ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Specialistica in Matematica

MODELLI PROBABILISTICI E STRATEGIE DI COMPORTAMENTO NEL GIOCO DEL BLACKJACK

Tesi di Laurea in Probabilitá

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Maurizio Brizzi

Presentata da:
Margherita Bonaldi

Correlatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Irene Crimaldi

Terza Sessione
Anno Accademico 2008/2009

Ogni regola del gioco è affascinante.
Un gioco, non è che questo,
e il delirio del gioco,
il piacere intenso del gioco
proviene dalla chiusura nella regola.
Jean Baudrilard

Introduzione

Perché una tesi in matematica su un gioco di carte?
La matematica, senza volerci addentrare nel complesso dominio della filosofia della matematica, è unoo strumento fondamentale della scienza, di analisi del mondo fisico dall'infinitamente piccolo all'infinitamente grande.
Nell'accezione popolare la scienza deve prima di tutto essere utile: la sua applicazione ai nostri problemi quotidiani inciderà sul cibo di cui ci nutriamo, gli abiti che indossiamo, le case che abitiamo, il nostro modo di lavorare, viaggiare, istruirci, in una parola di vivere. Ciò non è tuttavia sufficiente all'uomo. Egli può essere sazio di cibo, non avere pericoli in vista, ma, anziché scivolare in un torpore da mollusco, manterrà ancora un forte istinto di esplorazione, finalizzata e non. Il desiderio di conoscere che caratterizza la nostra specie opera su livelli progressivi di spiritualizzazione: dalla ricerca di risposte alle necessità pratiche della sopravvivenza quotidiana, alle arti applicate che sempre più innalzano il livello della nostra esistenza, alle arti estetiche, che non rispondono più a esigenze solo fisiche ma spirituali, fino alla pura speculazione, costantemente alimentata da uno dei più nobili attributi della mente umana, la curiosità.
Ma dove si inserisce il gioco inteso nella sua più comune accezione, cioè il complesso delle attività ludiche con le quali l'umanità, in qualunque cultura di qualunque tempo e latitudine, ha sempre riempito le proprie esistenze?
Sappiamo che per la neuro-psicologia infantile il gioco svolge una funzione fondamentale, tramite il meccanismo della simulazione, di crescita psicologica e intellettuale, con l'acquisizione successiva di nuove esperienze compor-

tamentali e ambientali. Ma l'adulto conserva tale necessità. Il gioco diviene culturalmente assimilabile alla pratica delle arti in generale e delle "belle arti" in particolare, condividendone la funzione fondamentale di stimolo per il cervello ad esercitarsi al di là delle necessità consuete; esercizio che, per chi non sia irreparabilmente abbruttito dalla routine, dovrebbe risultare gradevole, cioè ludico. Ogni attività umana che sia svincolata da necessità pratiche di sopravvivenza dell'individuo e della specie diviene ludica. Ogni attività ludica intesa in questo senso ha, o può acquisire, pari dignità morale ed intellettuale. Una partita a scacchi perfetta emoziona l'adepto tanto quanto una sonata, una poesia, un quadro emozionano chi abbia sviluppato una sensibilità e una cultura specifiche. L'esercizio delle arti pure o estetiche presenta però uno svantaggio: richiede una mente creativa e abilità manuali che sono doti rare, non disponibili alla massa dei comuni mortali, mentre il gioco è svincolato da questi prerequisiti, è e deve essere alla portata di tutti, svolgendo così anche un'importante funzione a livello sociale. La sua diffusione capillare, dalla tombola domestica ai grandi ed esclusivi casinò, ne è testimonianza.
Tutte queste funzioni "nobili" del gioco devono tuttavia essere supportate da un'assoluta consapevolezza del giocatore, che lo protegga dalla dannosa ma soprattutto noiosa sensazione di "tirannia della casualità". Questa consapevolezza deriva dalla conoscenza dei meccanismi interni del gioco praticato, delle strategie possibili, delle variabili da gestire (come nella lotta per la sopravvivenza, come nella scienza, come nell'arte, in una parola come nella vita) al fine di ottenere il miglior risultato dalle possibilità che la sorte ci dà da sfruttare. Proprio la matematica può assolvere tale compito di rendere il gioco un piacere della mente, restituendogli così il suo significato più profondo. Il musicista crea una melodia, all'interno di una rete di relazioni armoniche e melodiche di natura puramente matematica, per soddisfare il proprio bisogno spirituale, ben prima che per guadagnarsi da vivere. La matematica può così mettere il giocatore d'azzardo (tutti noi?) nella stessa condizione "creativa", rendendo la vincita in denaro mero accidente.

Questa tesi vuole così analizzare e finalizzare questa rete strutturale e probabilistica che sottende a uno dei giochi più diffusi, il Blackjack. Lo sviluppo di questo lavoro è stato complesso. Tabelle pratiche ad uso del giocatore sono pubblicate in tutti i testi dedicati ai giocatori di Blackjack, ma è assolutamente indisponibile in tutta la letteratura specifica una chiara esplicitazione della logica e della struttura matematiche che le sorreggono.
In questo lavoro viene sviluppato un percorso matematico autonomo e originale "ab ovo". Spero che, in accordo con i principi sopra espressi, questo lavoro, al di là dell'utilità pratica, possa dare a chi lo incontrerà il piacere e lo stimolo intellettuale che ha dato a me lo svilupparlo. Come un gioco, appunto.
Il lavoro è strutturato in quattro capitoli, il primo fornisce da un lato un quadro storico dello sviluppo e della diffusione del gioco d'azzardo nei secoli e dall'altro della nascita del calcolo della probabilità, ramo della matematica nato appunto come strumento di analisi per i giocatori d'azzardo. Nel secondo capitolo sono introdotti alcuni strumenti matematici, come ad esempio il modello delle catene di Markov che ben rappresenta la struttura del gioco del Blackjack. Il terzo capitolo è una breve analisi dei principali giochi del casinò, tratta dal testo [3], che mostra come la matematica applicata ad essi possa rendere il giocatore un buon giocatore, o meglio, un giocatore consapevole.
Infine il quarto capitolo e cuore della tesi è strutturato come segue: dopo dei brevi cenni storici e la spiegazione delle regole del gioco, viene dapprima proposta la strategia che si vuole dimostrare ed è poi esposto il lavoro svolto per dimostrarla ed i risultati ottenuti.

Indice

Capitolo 1

Brevi cenni storici

1.1 I primi sviluppi del calcolo delle probabilità

Da sempre l'azzardo è presente nella vita umana e fin dall'antichità gioco, legge, religione e fortuna erano strettamente correlati. Interrogandosi sul ruolo della casualità degli strumenti dell'azzardo la razza umana vi ha, in passato, attribuito un significato arcano ed esoterico, utilizzandoli per cercare di conoscere la volontà divina, ma con il passare del tempo il gioco ha acquisito sempre di più connotazioni laiche e attraverso un approccio matematico, la descrizione probabilistica dei fenomeni casuali è diventata una scienza a sé.
Il primo segno di una teoria probabilistica risale addirittura al filosofo greco Carneade, ma le prime vere descrizioni matematiche del gioco si trovano durante il Rinascimento. L'eclettico Girolamo Cardano (1501-1576), matematico ed esperto di giochi e magie scrisse *"Liber de ludo aleae"* e più tardi anche Galileo pubblicò un trattato dal titolo *"Considerazioni sopra le scoperte de i Dadi"*.
Secondo il matematico francese Simeon D.Poisson (1781-1840), però, l'origine del calcolo delle probabilità risale al 1654 quando, durante un viaggio in carrozza verso Pitou, Antoine Gombaud, o Chevalier de Méré, chiese un pa-

rere sulla convenienza di una scommessa su un gioco di dadi a Blaise Pascal. Vediamo brevemente l'argomento discusso in questo "leggendario" viaggio.
Il gioco prevedeva il lancio di due dadi e vincita in caso di uscita di un doppio sei. Il problema posto da de Méré fu il seguente: qual'è il numero minimo di lanci che occore fare per avere maggiori probabilità di vittoria che di sconfitta?
Il cavaliere aveva trovato due risposte una "errata", 24, suggerita dalla matematica (errata) ed una risposta corretta fornitagli dall'esperienza, 25. Pascal analizzò i casi favorevoli alla vittoria e alla sconfitta: con un solo dado, poichè la probabilità di non ottenere un sei è $\frac{5}{6}$ ogni lancio, dopo quattro lanci sarà $0,518 = 1-\left(\frac{5}{6}\right)^4$, con due dadi invece la probabilità di ottenere un doppio sei è pari a $0,491 = 1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$ mentre dopo 25 lanci diventa $0,505 = 1-\left(\frac{35}{36}\right)^{25}$.
Pascal dimostrò dunque che la matematica con una teoria ben formulata e corretta dava la risposta giusta.
E' importante notare che il calcolo delle probabilità , che al giorno d'oggi viene utilizzato in svariati campi sia nella scienza che nella vita comune, è nato proprio per dare informazioni e consigli ai giocatori di azzardo, per oltre duecento anni infatti i giochi d'azzardo sono rimasti il modello privilegiato degli studi statistico-probabilistici.

1.2 Storia dei giochi d'azzardo

Possiamo far risalire i primi segni di gioco d'azzardo a circa 5000 anni fa: in Cina sono stati infatti ritrovati dei dadi da gioco risalenti a quel periodo. Vi sono testimonianze che sempre in Cina intorno al 2300 a.C. venisse praticato il gioco del *Wei ch'i*, un gioco d'abilità fra contendenti, dove gli spettatori scommettevano sul risultato.
Anche nell'antico Egitto si possono trovare esempi di gioco d'azzardo, come il *Gioco di Atep*, un gioco con le mani per due persone in cui ognuno cerca di indovinare ciò che l'altro vuole "gettare" (gioco che è poi passato agli antichi

Greci e Romani e sopravvive ancora oggi in Italia come "morra"). Anche alcuni giochi di dadi, come ad esempio il Craps, discendono dalla pratica utilizzata dagli stregoni egiziani, che lanciavano pietre numerate e ossa per prevedere il destino di coloro che non godevano di buona salute.
Si ritiene che dadi e scommesse fossero ben conosciuti anche tra i grandi filosofi dell'antica Grecia, come Socrate e Platone; non a caso infatti anche nella mitologia greca gli dei si giocano la divisione dell'universo: Zeus ottiene il cielo, Poseidone ottiene il mare, Ade perde e si ritrova nell'oltretomba.
Anche i romani possono essere considerati degli avidi giocatori d'azzardo. Si scommetteva sui combattimenti tra gladiatori e sulle corse dei cavalli, si vendevano inoltre biglietti e tavolette della lotteria durante le festività dedicate a Saturno. Pare ad esempio che un nobile romano avesse chiesto di far ristrutturare l'interno della sua carrozza per renderla adatta al gioco dei dadi, così da potercisi dedicare ogni volta che doveva intraprendere un viaggio. Non solo, durante l'Impero Romano fu promulgata una legge per decretare che tutti i giovani di sesso maschile imparassero a giocare d'azzardo, così da poter giocare coi propri padri una volta raggiunta la maggiore età. Questo dimostra quanto fosse importante il ruolo che la società romana attribuiva alle scommesse ed ai giochi d'azzardo, probabilmente perchè tale esercizio ludico veniva considerato dalla cultura del tempo affine alla possibilità/necessità di previsioni utili nella vita reale in campo politico, sociale o militare.
Più in generale, comunque, la pratica di scommettere sul risultato di eventi come battaglie o tornei è sempre stata molto comune in tutte le culture, sia in Oriente che in Occidente.
Fu però nel medioevo che si osservò un vero e proprio sviluppo del gioco d'azzardo. Le taverne erano considerate nel XIII secolo dei luoghi di malaffare poichè i loro frequentatori più assidui erano vagabondi senza fissa dimora, goliardi, meretrici e giocatori d'azzardo. Qui si praticava, più che in altri luoghi, il gioco illecito.
Nel XIII secolo le due forme principali di gioco erano i "dadi" e le "tavole". *Alea* era sinonimo di 'tavola': indicava prevalentemente la pedina che veniva

utilizzata in tutti i giochi da tavola. Il *taxillus* indicava invece il dado a sei facce; il suo nome deriva dal termine *talus* che veniva utilizzato per indicare l'ossicino del piede posteriore degli agnelli chiamato anche astragalo. Tali ossicini venivano utilizzati dai bambini per giocare durante le festività pasquali; presso i popoli indo-germanici erano invece adoperati per interrogare il destino.
Il gioco da tavola piu' praticato era quello delle trenta pedine, le **alee** che, collocate su un tabolarium, cambiavano posto in base alla combinazione dei dadi che venivano lanciati.
La **zara**, citata anche nella Divina Commedia (Purgatorio, VI,1) era un gioco fatto con tre dadi che venivano disposti su un banco: vinceva chi, prima che i dadi fossero lanciati, indovinava la combinazione vincente, proclamandola ad alta voce. Il termine *zara* si riferiva alla combinazione sfavorevole, cioe' a quella che aveva meno probabilita' di uscire.
Il **sozum** era un gioco simile alla zara in cui vinceva chi, lanciando i dadi, totalizzava il numero maggiore. A partire dal XV secolo il gioco della zara, con le sue varianti, sarà sostituito dai giochi di carta o naibi (tarocchi).
La **gherminella** era un gioco d'abilità molto diffuso, consisteva nel far apparire e scomparire una cordicella dentro una bacchetta cava tenuta fra le mani del giocatore.
Lo **sbaraino** era invece un gioco da tavola in cui vinceva chi, lanciando due dadi, per primo sbarazzava la tavola dalle pedine.
In tutti gli statuti delle città italiane dei secoli XIII-XIV era permesso il gioco lecito; il gioco era considerato d'azzardo solo se interessato da una scommessa in denaro. Era permesso giocare durante il periodo natalizio, così come durante le feste dei santi locali e i giorni di fiera. Il gioco era particolarmente tollerato nei dodici giorni intorno a Natale, "le libertà di dicembre", feste considerate un'eredità di antiche festività pagane. In questo breve periodo era consentito il sovvertimento provvisorio dell'ordine, e le proibizioni contro l'azzardo si facevano più lievi. Pericoloso era invece giocare di notte, le sanzioni ai danni dei giocatori incalliti venivano raddoppiate. Il diritto di

giocare in pubblica piazza conduceva direttamente alla nascita della bisca pubblica, cioè alla baratteria. In alcuni comuni dell'Italia settentrionale la baratteria era tassata, indice del grande giro d'affari che gravitava intorno al gioco pubblico.
Le carte moderne, come le conosciamo oggi, furono introdotte nel quattordicesimo secolo dai francesi, che modificarono ed adattarono quelle precedentemente esistenti. Le nuove carte furono create a partire da idee raccolte in Asia Centrale e negli stati arabi. In particolare, la nobiltà francese scelse di giocare con carte in cui erano rappresentate le figure di Napoleone ed altri imperatori. In origine, le carte contenevano immagini completamente diverse rispetto a quelle che utilizziamo noi oggi, ed erano intagliate su tavolette di legno. Furono ancora i francesi ad attribuire alle carte i semi: le picche, i cuori, i quadri ed i fiori. Sulla base di questo tipo di carte, furono creati giochi come il poker ed il blackjack.
La parola "casinò" deriva dal termine italiano "casina", che indica una casa di piccole dimensioni. In origine, si riferiva ad un piccolo padiglione che veniva costruito nel grande giardino delle ville dei nobili. In questa "casina" si tenevano feste danzanti in cui l'alta società si riuniva per socializzare e, a volte, cimentarsi in giochi di fortuna. Con il passare del tempo, i giochi divennero la componente principale delle feste organizzate nelle "casine" - poi divenute "i casinò" - e questi piccoli padiglioni si trasformarono in veri e propri club del gioco d'azzardo.
Il primo vero e proprio casinò moderno fu costruito nel 1861 nel principato di Monaco, ancora oggi un centro di riferimento per il gioco d'azzardo.
Negli Stati Uniti il permesso di giocare con denaro reale è sempre stato discontinuo, poiché la legalità del gioco d'azzardo viene alternamente concessa e revocata da sempre. Le prime leggi sul gioco d'azzardo furono approvate in territorio americano nel XVII secolo, anche se i giochi di fortuna facevano parte delle tradizioni e della cultura degli indiani d'America da molto più tempo. Nel 1931, lo stato del Nevada legalizzò il gioco d'azzardo, e questo fece di Las Vegas la città dei casinò per antonomasia.

L'ultima svolta nella storia del gioco d'azzardo si ha con l'arrivo del casinò su Internet. Con lo sviluppo e la diffusione dei computer, infatti, nuovi tipi di giochi d'azzardo sono stati creati e messi a disposizione degli utenti. E coloro che una volta dovevano aspettare in fila per giocare alla slot machine preferita ora possono giocare alle slot online ogni volta che lo desiderano. Inoltre, giochi che in passato erano ritenuti troppo esclusivi da molti giocatori ora sono accessibili su internet, come ad esempio il Baccarat. Nei casinò reali solo gli ospiti più facoltosi potevano entrare nell'esclusiva area riservata a questo gioco, mentre i casinò online hanno reso il Baccarat più accessibile per ogni tipo di giocatore, e la puntata minima è molto minore di quella richiesta nelle sofisticate case da gioco tradizionali. I casinò virtuali hanno registrato una forte impennata a partire dagli anni Novanta. Questo decollo è dovuto allo sviluppo e alla diffusione di internet ed alla creazione di programmi generatori di numeri casuali (RNG, o Random Number Generators). Da quel momento, c'è stato un vero e proprio boom del gioco d'azzardo online con denaro reale, grazie alla grande accessibilità dei giochi e alle puntate minime di minore entità che vengono richieste ai giocatori. Oggi esistono più di 2000 casinò online, che offrono quasi ogni tipo di gioco d'azzardo esistente.
In conclusione, i giochi si sono sviluppati fin dall'antichità, evolvendosi notevolmente nel corso del tempo, per seguire e soddisfare i bisogni sempre mutevoli dei giocatori; tuttavia la struttura di base di tutte le forme e varianti oggi diffuse e apprezzate dai giocatori è sempre riconducibile a giochi antichi e primordiali (in analogia peraltro con molto altri aspetti della vita umana, psicologica individuale o sociale). Dagli stregoni egiziani ai gladiatori romani, dai creatori francesi delle carte da gioco moderne fino agli inventori del generatore di numeri casuali, tutti coloro che si sono dedicati all'arte del gioco d'azzardo hanno dato un grande contributo all'evoluzione dei giochi da casinò, rendendoli sempre più belli, coinvolgenti e divertenti. Quindi, mentre giochiamo ad uno dei tanti giochi d'azzardo esistenti oggi, dobbiamo sempre ricordare quanto è ricca la storia sociale e culturale che sottende la sua evoluzione ed il suo arrivo fino ai nostri giorni.

Capitolo 2

La probabilità applicata al gioco d'azzardo

2.1 Il rendimento

Fondamentale per fare un'analisi dei giochi d'azzardo è il concetto di rendimento, che permette di valutare il livello di equità dei giochi. Il rendimento di una puntata è uguale al prodotto tra la probabilità dell'evento su cui si sceglie di puntare per il numero di poste che vengono incassate in caso di vittoria:

Definizione 2.1.1. *Sia E un evento, N il numero di poste che si incasserebbero in caso di vittoria, $P(E)$ la probabilità dell'evento. Allora il rendimento della puntata relativa la verificarsi dell'evento E è*

$$R(E) = NP(E).$$

Il gioco risulta essere vantaggioso nel caso in cui il rendimento delle puntate sia sempre maggiore di 1, equo quando il rendimento è uguale a 1 e, infine, viene detto svantaggioso se il rendimento è minore di 1; i giochi svantaggiosi sono in generale tutti quelli gestiti da un banco.

2.2 Processi stocastici e catene di Markov

Un processo casuale è il modello matematico di un processo empirico la cui evoluzione è governata dalle leggi della probabilità.

Definizione 2.2.1. *Un processo stocastico (casuale) è una famiglia di variabili casuali $X = \{X(t), t \in T\}$, definite su un medesimo spazio campionario S e a valori in un medesimo spazio E, detto spazio degli stati.*

Un processo stocastico $\{X(t), t \in T\}$ è quindi una funzione di due argomenti $X(t, \zeta)$, con $t \in T$ e $\zeta \in S$. Posto $t = t_k$, l'applicazione $\zeta \to X(t_k, \zeta)$ è la variabile casuale indicata con $X(t_k)$ al variare di $\zeta \in S$; d'altro canto, fissato un punto campionario $\zeta_i \in S$, l'applicazione $t \to X(t, \zeta_i)$ è una funzione del tempo detta *funzione campionaria, traiettoria* o *realizzazione del processo*. L'insieme di tutte le funzioni campionarie è detto *insieme statistico*.
Se l'insieme degli indici T è discreto si dice che il processo è *a parametro discreto*. Un processo a parametro discreto con $T = \mathbb{N}$ viene anche detto *sequenza casuale* e viene indicato con $\{X_n, n \geq 0\}$. Se lo spazio degli stati E è discreto è detto processo casuale *discreto* o *catena*.
Si consideri un processo stocastico X. Fissato il tempo t_1, $X(t_1)$ è una variabile casuale e la sua funzione di ripartizione $F_X(x_1, t_1)$ è definita come

$$F_X(x_1, t_1) = P(X(t_1) \leq x_1)$$

e viene detta *distribuzione del primo ordine* di X. Analogalmente, date t_1 e t_2, la distribuzione congiunta delle variabili casuali $X(t_1)$ e $X(t_2)$ viene detta *distribuzione del secondo ordine* di X ed è data da

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2).$$

In generale si definisce *distribuzione di ordine n-simo* di X

$$F_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = P(X(t_1) \leq x_1, \ldots, X(t_n) \leq x_n).$$

La caratterizzazione completa di X richiede la conoscenza di tutte le distribuzioni finito dimensionali, ma fortunatamente spesso basta molto meno.

2.2.1 Catene di Markov

Definizione 2.2.2. *Un processo casuale discreto* $X = \{X_n, n \geq 0\}$ *a valori in uno spazio degli stati discreto* E *viene detto catena di Markov omogenea se vale la relazione* $\forall n \geq 1$ *e* $\forall s_0, \dots, s_n \in E$

$$P(X_0 = s_0, X_1 = s_1, \dots, X_n = s_n) = \rho_{s_0} p_{s_0,s_1} p_{s_1,s_2} \dots p_{s_{n-1},s_n}$$

dove $\rho_{s_i} = P(X_0 = s_i)$ *è detta distribuzione iniziale di* X
e le p_{s_i,s_j} *sono le probabilità di transizione in un unico stadio, ossia* $\forall n > 0$

$$p_{s_i,s_j} = P(X_n = s_j \quad | \quad X_{n-1} = s_i) = P(X_1 = i \quad | \quad X_0 = j).$$

Vale inoltre la *proprietà di Markov* (o anche *proprietà dell'assenza di memoria*), la quale ci dice che lo stato futuro di un processo di Markov dipende solo dallo stato presente e non dalla storia passata:

$$P(X_{r+1} = s_{r+1} \quad | \quad X_0 = s_0, X_1 = s_1, \dots, X_r = s_r) =$$

$$= P(X_{r+1} = s_{r+1} \quad | \quad X_r = s_r) = p_{s_r,s_{r+1}}$$

per ogni valore di r e $\forall s_0, \dots, s_{r+1} \in E$.

Dimostrazione.

$$P(X_{r+1} = s_{r+1} \quad | \quad X_0 = s_0, X_1 = s_1, \dots, X_r = s_r) =$$

$$= \frac{P(X_{r+1} = s_{r+1}, X_r = s_r, \dots, X_0 = s_0)}{P(X_r = s_r, \dots, X_0 = s_0)} =$$

$$= \frac{\rho_{s_0} p_{s_0,s_1} p_{s_1,s_2} \cdots p_{s_r,s_{r+1}}}{\rho_{s_0} p_{s_0,s_1} p_{s_1,s_2} \cdots p_{s_{r-1},s_r}} =$$

$$= p_{s_r,s_{r+1}} = P(X_{r+1} = s_{r+1} \quad | \quad X_r = s_r)$$

□

Per semplicità consideriamo lo spazio degli stati numerabile, ovvero $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ nel caso infinito oppure $E = \{0, 2, \dots, m\}$ nel caso finito.

Matrice di transizione

Sia $X = \{X_n, n \geq 0\}$ una catena di Markov omogenea con spazio degli stati E. La *matrice di transizione* di X è definita nel modo seguente:

$$P = [p_{ij}] = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

in cui sono soddisfatte le condizioni

$$p_{ij} \geq 0 \quad \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij=1} \quad i = 0, 1, 2, \cdots$$

Nel caso in cui lo spazio degli stati E sia finito, $E = \{0, 1, \cdots, m\}$, P è $(m+1) \times (m+1)$ dimensionale

$$P = [p_{ij}] = \begin{bmatrix} p_{01} & p_{02} & \cdots & p_{0m} \\ p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

dove

$$p_{ij} \geq 0 \quad \sum_{j=0}^{m} p_{ij=1} \quad i = 1, \cdots, m \tag{2.3}$$

Una matrice quadrata i cui elementi soddisfano queste condizioni viene detta *matrice di Markov* o *matrice stocastica.*

Probabilità di transizione di ordine superiore

Sia $P = [p_{ij}]$ la matrice delle probabilità di transizione di una catena di Markov omogenea $X = \{X_n, n \geq 0\}$. Definiamo poi $P^0 = Id$. Le matrici potenza di P sono definite da

$$P^2 = PP$$

dove l'elemento (i,j) è dato da

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_k p_{ik}p_{kj}$$

In generale l'elemento (i,j) di $P^{n+1} = PP^n$ sarà

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_k p_{ik}p_{kj}^{(n)}$$

.

Proposizione 2.2.1. *Vale la seguente uguaglianza*

$$P(X_n = j \quad | \quad X_0 = i) = p_{ij}^{(n)}.$$

Per cui l'identità matriciale

$$P^{n+m} = P^n P^m \quad n,m \geq 0$$

ci dice che una transizione da i a j in $n+m$ fasi può essere realizzata passando da da i ad una fase intermedia k in n fasi e poi da k a j in m fasi, se la esprimiamo per i singoli elementi è nota come equazione di Chapman-Kolmogorov:

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_k p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}.$$

Dimostrazione.

$$P(X_{m+n} = j \quad | \quad X_m = i) =$$

$$= P(X_{m+n} = j \quad | \quad X_m = i, X_{m-1} = s_{m-1}, \ldots, X_0 = s_0) =$$

$$= \frac{P(X_{m+n} = j, X_m = i, X_{m-1} = s_{m-1}, \ldots, X_0 = s_0)}{P(X_m = i, X_{m-1} = s_{m-1}, \ldots, X_0 = s_0)} =$$

$$= \frac{\sum_{s_{m+1},\ldots,s_{m+n-1}} P(X_{m+n} = j, X_{m+n-1} = s_{m+n-1}, \ldots, X_0 = s_0)}{P(X_m = i, X_{m-1} = s_{m-1}, \ldots, X_0 = s_0)} =$$

$$= \frac{\sum_{s_{m+1},\ldots,s_{m+n-1}} \rho_0 p_{s_0,s_1} \cdots p_{s_{m-1},i} p_{i,s_{m+1}} \cdots p_{s_{m+n-1},j}}{\rho_0 p_{s_0,s_1} \cdots p_{s_{m-1},i}} =$$

$$= \sum_{s_{m+1},\ldots,s_{m+n-1}} p_{i,s_{m+1}} \cdots p_{s_{m+n-1},j} = p_{ij}^{(n)}$$

□

La distribuzione di probabilità di X_n

Definizione 2.2.3. *Per ogni $n \geq 0$ e per ogni $i \in E$, definiamo $p_i(n) = P(X_n = i)$ e il vettore $\rho(n) = [p_0(n) \quad p_1(n) \quad \cdots]$.*
In particolare $\rho(0)$ coincide con il vettore della distribuzione iniziale $[\rho_0, \rho_1, \dots]$.

Proposizione 2.2.2. *Per ogni $n \geq 0$ vale*

$$\rho(n) = \rho(0)P^n$$

Questa proposizione ci dice che la distribuzione di probabilità di una catena di Markov omogenea è completamente determinata dalla matrice delle probabilità di transizione in una sola fase P e dalla distribuzione iniziale $\rho(0)$.

Dimostrazione. Procediamo per induzione.

$n = 1$:
se lo stato al tempo 0 è $X_0 = i$, lo stato X_1 sarà uguale a j solo se si verifica una transizione da i a j; inoltre gli eventi $\{X_0 = i, \quad i = 1, 2, \dots\}$ sono mutuamente esclusivi e uno di essi deve verificarsi. Di conseguenza vale

$$P(X_1 = j) = \sum_i P(X_0 = i)P(X_1 = j | X_0 = i)$$

ovvero

$$p_j(1) = \sum_i p_i(0)p_{ij} \quad j = 1, 2, \dots$$

che in termini matriciali si esprime

$$\rho(1) = \rho(0)P.$$

$n \Rightarrow n + 1$:

$$P(X_{n+1} = j) = \sum_i P(X_n = i)P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

ovvero

$$p_j(n + 1) = \sum_i p_i(n)p_{ij} \quad j = 1, 2, \dots$$

che in termini matriciali si esprime

$$\rho(n+1) = \rho(n)P =$$

poichè si è supposto che sia vera per n

$$= \rho(0)P^n P = \rho(0)P^{n+1}.$$

La proposizione è dunque vera per ogni $n \geq 1$. □

Classificazione degli stati

Definizione 2.2.4. *Stati comunicativi. Si dice che lo stato j comunica con lo stato i se per qualche $n \geq 0$, $p_{i,j}^{(n)} > 0$ e scriviamo $i \to j$. Se due stati sono reciprocamente comunicativi si dice bi-comunicano e indichiamo $i \leftrightarrow j$; se tutti gli stati di una catena di Markov bi-comunicano la catena è detta irriducibile.*

Stati ricorrenti.
Sia T_j il tempo (o numero di fasi) del primo ingresso nello stato j dopo il tempo zero, e poniamo $T_j = \infty$ se lo stato j non viene mai assunto. T_j è una variabile casuale discreta che assume i valori $\{1, 2, \cdots, \infty\}$. Sia $f_{ij}^{(0)} = 0$ e

$$f_{ij}^{(m)} = P(T_j = m \quad | \quad X_0 = i) =$$

$$= P(X_m = j, X_k \neq j, k = 1, \cdots, m-1 \quad | \quad X_0 = i)$$

Varrà dunque

$$f_{ij}^{(1)} = P(T_j = 1 \quad | \quad X_0 = i) = P(X_1 = j \quad | \quad X_0 = i) = p_{ij}$$

e

$$f_{ij}^{(m)} = \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}^{(m-1)} \quad m = 2, 3, \cdots$$

La probabilità di realizzare j in un tempo finito a partire da i è data da

$$f_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = P(T_j < \infty \quad | \quad X_0 = i).$$

Definizione 2.2.5. *Si dice che lo stato j è ricorrente se*

$$f_{jj} = P(T_j < \infty \quad | \quad X_0 = j) = 1$$

ovvero partendo da j la probabilità di tornare a j è uguale a 1. Lo stato ricorrente j viene detto ricorrente positivo se

$$\mu(T_j \quad | \quad X_0 = j) < \infty$$

e (ricorrente) nullo se

$$\mu(T_j \quad | \quad X_0 = j) = \infty.$$

Osserviamo che

$$\mu(T_j \quad | \quad X_0 = j) = \sum_{n=0}^{\infty} n f_{jj}^{(n)}$$

Definizione 2.2.6. *Diciamo che lo stato j è transitorio (non ricorrente) se*

$$f_{jj} = P(T_j < \infty \quad | \quad X_0 = j) < 1$$

ovvero se c'è una probabilità positiva di non tornare mai allo stato j.

Definizione 2.2.7. *Definiamo il periodo dello stato j nel modo seguente*

$$d(j) = mcd\{n \geq 1 : p_{jj}^{(n)} > 0\}$$

se $d(j) > 1$ lo stato j viene detto periodico di periodo $d(j)$. Se $d(j) = 1$ lo stato j viene detto aperiodico.

Definizione 2.2.8. *Si dice che lo stato j è uno stato assorbente se $p_{jj} = 1$, ovvero una volta che lo stato j è raggiunto non viene più abbandonato.*

Probabilità di assorbimento.
Sia $X = \{X_n, n \geq 0\}$ una catena di Markov con spazio degli stati finito $E = \{1, 2, \cdots, N\}$ e matrice delle probabilità di transizione P. Sia $A = \{1, 2, \cdots, m\}$ l'insieme degli stati assorbenti e $B = \{m+1, \cdots, N\}$ l'insieme

di stati non assorbenti. La matrice delle probabilità di transizione P potrà essere espressa nel modo seguente

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_{m+1,1} & & \cdots & p_{m+1,m} & p_{m+1,m+1} & \cdots & p_{m+1,N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{N,1} & & \cdots & p_{N,m} & p_{N,m+1} & \cdots & p_{N,N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ R & Q \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

dove I è la matrice identità $m \times m$, 0 è la matrice nulla $m \times (N-m)$ e

$$R = \begin{bmatrix} p_{m+1,1} & \cdots & p_{m+1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{N,1} & \cdots & p_{N,m} \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} p_{m+1,m+1} & \cdots & p_{m+1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{N,m+1} & \cdots & p_{N,N} \end{bmatrix}$$

Gli elementi di R sono le probabilità di transizione in un'unica fase dagli stati non assorbenti a quelli assorbenti, mentre gli elementi di Q sono le probabilità di transizione in un'unica fase da uno stato non assorbente ad un altro non assorbente. Sia $U = [u_{kj}]$, dove

$$u_{kj} = P(X_n = j(\in A) \quad | \quad X_0 = k(\in B))$$

U è una matrice $(N-m) \times m$ ed i suoi elementi rappresentano le probabilità di assorbimento nei vari stati assorbenti.

Proposizione 2.2.3. *Vale*

$$U = (I-Q)^{-1}R = \Phi R,$$

dove la matrice Φ è detta matrice fondamentale della catena di Markov $X(n)$.

Dimostrazione. Sia X una catena di Markov omogenea definita nello spazio degli stati finito E, siano inoltre A e B l'insieme degli stati rispettivamente

assorbenti e non definiti in precedenza.
Sia p_{ki} la probabiltà di passare dallo stato dallo stato $k \in B$ allo stato $i \in E$, quindi

$$u_{ki} = P(X_n = j(\in A) \quad | \quad X_0 = k(\in B)) =$$
$$= \sum_{i=1}^{N} p_{ki} P(X_n = j(\in A) \quad | \quad X_0 = i)$$

e vale

$$P(X_n = j(\in A) \quad | \quad X_0 = i) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \in A, i \neq j \\ u_{ij} & i \in B, i = m+1, \ldots, N \end{cases}$$

Di conseguenza risulta

$$u_{kj} = p_{kj} + \sum_{i=m+1}^{N} p_{ki} u_{ij} \quad k = m+1, \ldots, N; \quad j = 1, \ldots, m.$$

Ora $p_k j \quad k = m+1, \ldots, N; \quad j = 1, \ldots, m$ sono gli elementi di R e $p_k i \quad k = m+1, \ldots, N; \quad i = m+1, \ldots, N$ sono gli elemnti di Q, quindi in notazione matriciale risulta

$$U = R + QU$$

ovvero

$$(1 - Q)U = R$$

da cui

$$U = (1 - Q)^{-1} R = \Phi R$$

□

Indichiamo con T_k le unità di tempo totali fino all'assorbimento dello stato k e sia $T = [T_{m+1} \quad \ldots T_N]$ si può dimostrare che

$$\mu(T_k) = \sum_{i=m+1}^{N} \phi_{ki} \quad k = m+1, \ldots, N$$

dove $\phi_{k,i}$ è l'elemento (k, i) della matrice Φ.

2.3 La legge debole dei grandi numeri

Questo argomento comprende una classe di risultati relativi al comportamento asintotico della media aritmetica delle variabili aleatorie di una successione; risultati che forniscono un'efficace giustificazione a un fenomeno che si presenta in molte situazioni reali chiamato regolarità statistica: la media aritmetica degli esiti numerici di prove ripetute di un esperimento manifesta una spiccata tendenza a stabilizzarsi all'aumentare del numero di prove.
Nell'ambito della legge dei grandi numeri si usa fare una distinzione tra legge *forte*, che implica una forma di convergenza quasi certa, e legge *debole*, che fa invece riferimento a una forma di convergenza in probabilità ed è il caso che ci interessa e che andremo ad osservare.
La formulazione più semplice della legge debole dei grandi numeri è la seguente:

Teorema 2.3.1. ***Teorema di Chebyshev*** *Siano $X_1, X_2, \dots$ variabili casuali mutuamente indipendenti ciascuna con media μ e varianza σ^2 finite. Allora se $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, $n = \{1, 2, \dots\}$, vale*

$$lim_{n \to +\infty} P\left(|\frac{S_n}{n} - \mu| \geq \lambda \right) = 0 \quad \forall \lambda > 0$$

Questo teorema afferma che la probabilità che la media campionaria $\frac{S_n}{n}$ differisca dal suo valore probabile μ per più di ϵ tende a zero quando n tende all'infinito.
Si osserva inoltre che il teorema non richiede che la successione numerica presenti alcun carattere di convergenza, sicchè la legge rimane valida anche se tale successione diverge.

Dimostrazione. Introduciamo la seguente proposizione:

Proposizione 2.3.1. ***Disuguaglianza di Chebycev***
Valgono le seguenti disuguaglianze:

- *sia X una variabile aleatoria con previsione quadratica* $P_Q(X) > 0$. *Per ogni* $t > 0$ *vale*
$$P(|X| \geq tP_Q(X)) \leq \frac{1}{t^2};$$
- *sia X una variabile aleatoria con varianza* $\sigma^2(X) > 0$, *posto* $\mu = P(X)$, *per ogni* $t > 0$ *vale*
$$P(|X - \mu| \geq \sigma(X)t) \leq \frac{1}{t^2};$$

Usiamo la seconda disuguaglianza di Chebycev per dimostrare il teorema. Calcoliamo
$$P\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}(P(X_1) + ...P(X_n)) = \mu$$
$$\sigma^2\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sigma^2(S_n) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(X_i) + \sum_{i,j=1;i\neq j}^{n} cov(X_i, Y_j)\right) = \frac{\sigma^2}{n}.$$
Per la seconda disuguaglianza di Chebycev vale
$$P\left(|\frac{S_n}{n} - \mu| \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t\right) \leq \frac{1}{t^2}.$$
Se poniamo $\lambda = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t$ e quindi $\frac{1}{t^2} = \frac{\sigma^2}{n\lambda^2}$, risulta che
$$P\left(|\frac{S_n}{n} - \mu| \geq \lambda\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\lambda^2}$$
tende a 0 per $n \to +\infty$. □

E' fondamentale però notare che, in teoria, solo per un numero infinto di uscite ci sarà conincidenza fra probabilità teoriche e frequenze sperimentali; inoltre è possibile trovare sorprese controintuitive da una rigorosa applicazione della legge dei grandi numeri: lo scarto proporzionale diminuisce, ma può aumentare in valore assoluto.
Credere in una natura uniforme che tende a fornire eventi casuali con una frequenza pari a quanto previsto da un calcolo a priori delle probabilità è un errore comune e molto pericoloso per il giocatore. Troppo spesso l'esperienza temporale del giocatore non è tale da poter vedere compensati gli sbilanciamenti di una sera.

Capitolo 3

I principali giochi del casinò

3.1 Roulette

La storia

Il progenitore della Roulette può essere individuato nel *Biribissi*, gioco molto diffuso nella Venezia del '700. Costituito da un tabellone con 36 caselle e un sacchetto con le 36 palline corrispondenti, chi aveva puntato sulla casella estratta vinceva (solo 32 volte la posta!).
L'invenzione della Roulette viene, invece, attribuita a Blaise Pascal(1623-62), fisico e filosofo francese. La leggenda racconta che egli ricevette in regalo una *Ruota della fortuna*(molto simile a quella che possiamo vedere ormai da anni in TV) da un'amico di ritorno dalla Cina; modificandola e migliorandone le resistenze meccaniche da essa creò il *Rouler*, attraverso poi lo studio di questo "gioco" scrisse *Le proprietà cicliche delle combinazioni nel calcolo delle probabilità*.
La prima apparizione della Roulette in un casinò avviene però solo nel 1796, a Parigi, era una ruota con 36 numeri oltre allo zero e al doppio zero, solo nel 1810 arriverà anche negli Stati Uniti nei primi casinò di New Orleans.
Al 1842 risale l'attuale divisione tra Ruolette francese e americana, quando i fratelli Francois e Luis Blanc ottengono un gran successo in Germania dopo aver tolto il doppio zero e costringendo così anche gli altri casinò europei ad

adeguarsi. Fu proprio Francois Blanc che la installò nel 1860 a Montecarlo, da allora considerata la capitale mondiale della Roulette. In America invece si continua tutt'oggi ad usare la ruota con zero e doppio zero.
La Roulette Francese è un gioco tradizionale di tutti i casinò europei, viene giocata in modo formale con puntate anche molto elevate, è il gioco da casinò per antonomasia ed è quello che esercita senza dubbio più fascino nell'immaginario collettivo. Negli Stati Uniti invece i riti di gioco sono banalizzati ed è scomparsa l'aurea magica che circonda la regina dei casinò europei.

Il gioco

La Roulette Francese è decisamente più conveniente in termini di rendimento rispetto a quella Americana; nella prima infatti il banco trattiene solo l'1,35%/2,70% delle somme puntate, mentre nella seconda addirittura il 5,26%; di conseguenza è chiaro che un buon giocatore con un minimo di conoscenza matematica non avrà dubbi su quale tipo di roulette scegliere.
La Roulette francese è composta da 37 numeri, gli interi dall'1 al 36 e lo zero, non vi è interazione tra i giocatori , ognuno gioca contro il banco e le puntante di uno non influenzano quelle degli altri; il gioco consiste nello scommettere su quale numero si fermerà la pallina lanciata dal croupier.
Vediamo in dettaglio quali puntate si possono fare:

- **Puntate multiple:**
  Pieno (En plein). Si punta sull'uscita di un numero preciso (incluso lo zero), se il numero scelto è quello vincente il banco paga 35 volte la posta e restituisce la puntata.
  Cavallo (Cheval). Si scelgono due numeri adiacenti, se uno dei due numeri scelti esce il banco paga 17 volte la posta e restituisce la puntata.
  Terzina (Trasversale plain). Si scelgono tre numeri su una stessa riga, se uno dei tre numeri scelti esce il banco paga 11 volte la posta e restituisce la puntata.
  Carrè. Si scelgono quattro numeri disposti in quadrato, se uno dei

quattro numeri scelti esce il banco paga 8 volte la posta e restituisce la puntata.
Sestina (Trasversale simple). Si scelgono sei numeri disposti su due file, se uno dei sei numeri scelti esce il banco paga 5 volte la posta e restituisce la puntata.

- **Puntate doppie:**
  Dozzina (Douzaine). Si una delle tre dozzine di numeri (da 1 a 12, da 13 a 24 o da 25 a 36), se uno dei dodici numeri scelti esce il banco paga 2 volte la posta e restituisce la puntata.
  Colonna (Colonne). Come per la dozzina ma si sceglie una delle colonne del tavolo.

- **Puntate semplici:**
  Rosso/Nero (Rouge/Noir). Se esce un numero del colore scelto il banco paga 1 volta la posta e restituisce la puntata.
  Pari/Dispari (Pair/Impair). Se esce un numero della parità scelta il banco paga 1 volta la posta e restituisce la puntata.
  Manque/Passe. Con "manque" si scelgono i primi 18 numeri, mentre con "passe" gli ultimi 18 (da 19 a 36), se esce uno dei numeri scelti il banco paga 1 volta la posta e restituisce la puntata.

Quando esce lo zero le puntate semplici vengono "messe in prigione" (enfermée) fino al colpo successivo: se questo è vincente la puntata torna al giocatore.

Il calcolo delle probabilità di gioco

Si osserva come le puntate sulle combinazioni semplici si dimezzano quando esce lo zero, il croupier non divide le puntate ma le sposta nelle prigioni, se dovessero uscire più zeri consecutivi le puntate imprigionate verrebbero ogni volta dimezzate.
Oltre al margine il casinò si prende anche un altro vantaggio mettendo un tetto alle puntate, in quanto senza una puntata massima rischierebbe di dover

Puntata	P(E)	Pr.Eq.	Pr.Cor.	margine	R(E)
Pieno	$\frac{1}{37}$	37	36	$2,70\%$	$97,30\%$
Cavallo	$\frac{2}{37}$	$18,5$	18	$2,70\%$	$97,30\%$
Terzina	$\frac{3}{37}$	$12,33$	12	$2,70\%$	$97,30\%$
Carrè	$\frac{4}{37}$	$9,25$	9	$2,70\%$	$97,30\%$
Sestina	$\frac{6}{37}$	$6,17$	6	$2,70\%$	$97,30\%$
Doppia	$\frac{12}{37}$	$3,08$	3	$2,70\%$	$97,30\%$
Semplice	$\frac{18}{37}$	$1,35$	$2(0,5$ con lo $0)$	$1,35\%$	$98,65\%$

Tabella 3.1: Pr.Eq.= premio equo; Pr.Cor.=premio corrisposto

pagare somme davvero notevoli e si potrebbe addirittura sbancare il casinò. Osservando la tabella notiamo che le puntate semplici sono quelle a rendimento maggiore, ma ovviamente meno proficue ed emozianti.
Una regola fondamentale che deve osservare un buon giocatore è quella di considerare il ruolo dello zero. Se volesse ad esempio giocare due gettoni sulla prima dozzina e due sulla seconda, gli converebbe invece giocare tre gettoni sul manque e un gettone sulla sestina 19-24, questo perchè, a parità di vincita in caso di vittoria, nel primo caso se esce lo zero perde tutti i suoi gettoni, mentre nel secondo caso tre dei suoi gettoni non andrebbero persi, ma messi in prigione.
Non si deve mai dimenticare che la pallina non ha memoria, come l'urna del lotto d'altronde: basarsi quindi su statistiche e puntare sui numeri ritardartari non è assolutamente un metodo scientifico, ogni lancio è assolutamente equivalente al precedente e la probabilità che esca un determinato numero o una determinata combinazione rimane invariata di colpo in colpo.

3.2 Craps

La storia

L'ipotesi più accreditata fa risalire questo gioco di dadi ad un gioco arabo chiamato *Azzahr* (dado), lo stesso termine che ha dato origine alla nmstra parola "azzardo", esso venne poi esportato dapprima in Francia con il nome di *Hasard* e in seguito in Inghilterra con il nome *Crabs* (granchio), che sta ad indicare i risultati sfavorevoli per i giocatori.
Il moderno *Craps* nasce sulle sponde del Mississipi nel XIX secolo ed è ancor oggi uno dei giochi più popolari nei casinò americani.

Il gioco

Il Craps è una sfida tra il lanciatore dei dadi e il banco, sia il giocatore sia il lanciatore possono scommetere sul risultato di un singolo lancio o di una serie di lanci. Si gioca con due dadi e i giocatori seduti al tavolo si alternano nel ruolo di lanciatore, i risultati dei due dadi vengono sommati per ottenere dunque un punteggio compreso tra 2 e 12.
La partita comincia con un tiro di apertura (chiamato *come out roll*) che si considera:

- *Vincente* se il risultato è 7 o 11.
- *Perdente* se il risultato è un Craps cioè 2, 3 o 12.
- se esce 4, 5, 6, 8, 9 o 10 il risultato diventa il Point ovvero il numero che il lanciatore dovrà riuscire ad ottenere di nuovo prima di ottenere un 7.

In questo gioco vincente e perdente non assumono il loro reale significato in quanto ogni giocatore (anche il lanciatore stesso) è libero di puntare a favore (Right) o contro (Wrong) il lanciatore.
Il lanciatore continua a giocare fino a che dopo aver ottenuto un Point non

esce un 7 prima che esca nuovamente il Point.
Vediamo le scommesse che ha a disposizione il giocatore di Craps:

- **Pass line e Don't pass line.** La prima a favore del lanciatore e contro la seconda, solo se esce il 2 o il 12 come primo lancio lo scommettitore "contro" non vince ma ottiene solo la restituzione della puntata. Queste puntate vengono effettuate prima del lancio di apertura e una volta fissato il Point non possono più essere ritirate nel caso del Pass line mentre possono essere ritirate se si è scommesso sul Don't pass line (ma solo un giocatore poco saggio lo farebbe in quanto a quel punto sono puntate vantaggiose per il giocatore).

- **Come e Don't come.** Funzionano come le puntate appena descritte ma si possono fare solo quando il point è già stato fissato. Si può dire che si scommette su una partita parallela sfalsata di uno o più tiri rispetto alla partita principale (vi saranno dei Point differenti per queste "partite parallele" chiamati "Point di come").

- **Free odds.** Queste puntate hanno la caratteristica di essere pagate in modo equo, cosa che non avviene quasi mai in un casinò. Funzionano così: un giocatore che ha puntato su Pass line (o su Come) ed è uscito il Point (o Point di come) con la Free odds scommette che quel Point uscirà prima del 7, vicersa se si è puntato su Don't pass, la Free odds scommette che uscirà prima il 7.

- Oltre alle scommesse descritte vi sono altri tipi di scommessa, ma sono tutti molto vantaggiosi per il banco, la migliore strategia è quindi quella di evitarle.

Il calcolo delle probabilità di gioco

Ovviamente la probabilità che il lanciatore vinca con il primo tiro (8/36) è maggiore rispetto alla probabilità che perda (4/36), ma per i restanti 24/36 si fissa il Point e le probabilità che esca prima il 7 sono maggiori. Si può

calcolare che la probabilità di vittoria del lanciatore è leggermente inferiore, ma il casinò paga alla pari tutte le scommesse quindi trattiene solo un margine dell' 1,41%. Inoltre trattiene un margine pressochè identico anche in caso di scommessa "contro" infatti nel caso in cui il come out sia un 12, restituisce semplicemente la puntata senza pagare.
Le Free Odds vengono pagate equamente e a margine 0 per il casinò (per questo i casinò fissano sempre un tetto massimo alle puntate): scommettere su di esse dunque riduce il margine del casinò che diventa 0,85% (Pass line) o 0,83% (Don't pass line). Nella seguente tabella vediamo il rendimento delle Free Odds:

Free Odds	Point	Prob.favorevoli	Prob.contro	R(E)
A favore	4 e 10 5 e 9 6 e 8	3/36 4/36 5/36	6/36 6/36 6/36	2:1 3:2 6:5
Contro	4 e 10 5 e 9 6 e 8	6/36 6/36 6/36	3/36 4/36 5/36	1:2 2:3 5:6

3.3 Baccarà

La storia

Il baccarà nasce in Italia nel 1400 dove veniva giocato con carte simili ai tarocchi. È proprio un italiano di nome Felix Falguiere o Falguierein vissuto nel quindicesimo secolo ad essere considerato il padre del gioco del Baccarat. Pare che per inventare il gioco si sia basato sull'antico rituale etrusco chiamato "dei nove dei". Si pensa che il rituale si svolgesse nel modo seguente: una giovane vergine dai capelli biondi doveva tirare un dado di nove lati. Il risultato del dado determinava il suo destino. Se otteneva un 8 o un 9, otteneva grande gloria e veniva nominata sacerdotessa. Se lanciava un 6 o un 7, poteva continuare a vivere, ma non avrebbe più potuto prendere parte a nessun altro rituale religioso o partecipare ad eventi e manifestazioni tenuti all'interno della sua comunità. Se invece usciva un numero minore di 6, veniva abbandonata in mare e lasciata affogare. Non si trattava certo di un bel rituale, dunque, ma è proprio da esso che pare siano state tratte le prime regole del gioco di carte del Baccarat.
Per quanto riguarda il nome, invece, "baccarà" deriva dalla parola dialettale veneziana che a quel tempo veniva utilizzata per definire una quantità corrispondente a zero, indica dunque il punteggio peggiore.
Il Baccarat si diffuse in fretta, e ben presto dall'Italia arrivò nella vicina Francia. Durante il regno di Carlo VIII, alla fine del quindicesimo secolo, la nobiltà francese iniziò a giocarvi sempre più spesso, fino ad organizzare regolarmente incontri e partite.
Come tutti i più grandi giochi della storia, anche il Baccarat alla fine sbarcò anche negli Stati Uniti. Ma vi arrivò piuttosto tardi: solo all'inizio del Novecento. E ci volle un po' prima che gli americani imparassero a giocarvi e ad apprezzarlo. Così, le case da gioco americane decisero di introdurlo comunque fra i propri giochi, ma lo bollarono come un gioco esclusivo e di nicchia, riservato a coloro che potevano permettersi di spendere molti soldi. Crearono vere e proprie aree riservate al Baccarat, in cui lasciavano entrare

solo coloro che potevano puntare grosse somme di denaro. Naturalmente, il fatto che a questo gioco fossero dedicate aree riservate sollevò l'interesse delle persone, che iniziarono a prestarvi maggiore attenzione.
In epoca moderna si praticano tre differenti tipi di gioco che derivano dal Baccarà: il *Punto banco* (*American baccarat*), lo *Chemin de fer* e il *Baccarà a deux tableaux* (o semplicemente *Baccarat*)

Il gioco

Ogni variante di questo gioco è caratterizzata dal confronto fra la mano della "Punta" (il giocatore) e quella del Banco: entrambi hanno due carte alle quali se ne aggiunge eventualmente una terza in base a certe regole prestabilite.
L'Asso vale 1, le figure e i dieci valgono 0, mentre il valore delle carte dal 2 al 9 è uguale al loro valore nominale. Il valore totale di una mano è dato dalla somma delle carte, considerandone però solo solo la cifra dell'unità (un 14 varrà 4) quindi il massimo punteggio ottenibile è 9.

Il punto banco.
Vengono anche qui messe a confronto due mani, quella del Punto e quella del Banco, ma non vi è differenza in quanto ogni giocatore può scegliere liberamente di scommettere sulla vittoria di una o dell'altra mano. Dopo che ogni giocatore presente al tavolo ha fatto la sua puntata, si distribuiscono le carte e in base al loro valore si decide se estrarre una terza carta per il Punto e/o per il Banco:
Natural: il totale delle prime due carte è 8 o 9; in questo caso la mano vince automaticamente (se entrambe le mani hanno totalizzato lo stesso punteggio vi è egalitè).
Estrazione di una terza carta: se nessuna delle due mani è un "natural" si verifica prima se va estratta una carta per il Punto e poi per il banco, seguendo le seguenti regole di estrazione:

- **Punto:** si estrae la terza carta se il totale delle prime due carte è minore di 6.
- **Banco:** si estrae la terza carta se il totale delle prime due è minore di 3, mentre non si estrae invece se il totale è 7. Nel caso in cui il totale sia un numero da 3 a 6 si sceglie di estrarre le terza carta in base a ciò che è accaduto per Punto:
  - se per Punto non è stata estratta la terza carta, si estrae per Banco se il totale delle sue carte è 3, 4 o 5
  - se per Punto è stata estratta si segue la tabella seguente:

Tot Banco	si estrae se la terza carta di punto è
3	0,1,2,3,4,5,6,7,9
4	2,3,4,5,6,7
5	4,5,6,7
6	6,7

Una volta terminata la distribuzione delle carte si confrontano le mani, se non si verifica una parità le scommesse vincenti su Punto vengono pagate alla pari. Le scommesse vincenti su Banco vengono anch'esse pagate alla pari ma il casinò trattiene circa il 5 % (questo perchè in base alle regole del gioco il Banco ha un leggero vantaggio). In caso di pareggio tra le due mani le scommesse vincenti vengono pagate 8 volte la posta, mentre le altre puntate vengono restituite ai giocatori.

Chemin de fer.

Il nome "ferrovia" nasce dal movimento del sabot (composto da 6 mazzi) che

viene passato intorno al tavolo dai giocatori (in genere devono essere almeno 5 o 6) che si susseguono nel ruolo del mazziere che può essere sfidato da uno o più giocatori.
Il casinò non partecipa dunque al gioco ma trattiene una commissione del 5% sulle vincite del mazziere. Questo per conservare il suo ruolo deve puntare ad ogni mano vinta il suo capitale iniziale e tutte le eventuali vincite, quindi finchè il mazziere continua a vincere le somme puntate crescono molto rapidamente.
All'inizio del gioco l'assegnazione del ruolo del mazziere viene effettuata attraverso un'asta, chi vince può mantenere il ruolo finchè non viene sconfitto, ma anche lasciarlo in ogni momento, e passarlo al giocatore alla sua destra (che non sarà però costretto ad accettare, ma potrà passare a sua volta).
Dopo che il mazziere ha dichiarato la somma che intende puntare qualunque giocatore può dire "Banco", che significa che intende coprire tutta la posta; a quel punto nessun altro può giocare. Se nessuno dichiara Banco i giocatori possono puntare una cifra a scelta (a partire dal giocatore alla destra del banco), quando la posta iniziale viene coperta nessun altro può giocatore, se invece non viene coperta interamente la differenza viene restituita al mazziere.
Una volta effettuate le puntate vengono distribuite due carte al mazziere e due al giocatore che ha effettuato la puntata maggiore. Le regole da seguire sono molto simili a quelle del Punto Banco, vi sono solo poche differenze:

- le carte rimangono coperte (solo la terza è distribuita scoperta) a meno che uno dei due non abbia un Natural, dunque il banco non potrà sapere che punteggio ha in mano il giocatore.

- se il giocatore ha un 5 può scegliere liberamente se chiedere una terza carta.

- quando è il turno del mazziere esso segue del regole del punto banco tranne in due casi in cui ha libertà di scelta: se ha un 3 e la carta data al puntatore è un 9 e se ha un 5 e la carta data al puntatore è un 4.

Le vincite vengono pagate esattemente come nel Punto Banco.

Il calcolo delle probabilità di gioco

Punto Banco.

Si osserva che i margini del casinò sono piuttosto bassi (se si tralascia il

Puntata	Percentuale di vittoria	Payout	Margine del casinò
Punto	49,32	1:1	1,36%
Banco	50,68	0,95:1	1,36%
Egalitè	9,55	8:1	14,12%

caso dell'egalitè su cui però un giocatore consapevole non dovrebbe puntare), dunque possiamo ritenere il Punto Banco un gioco abbastanza onesto.

Chemin de fer

Come nel punto banco il mazziere è leggermente favorito, in caso di sua vittoria quindi il casinò trattiene una tassa e la scommessa è pagata 0,95:1, mentre se vince il puntatore la scommessa è pagata 1:1. Anche considerando questa tassa il vantaggio del mazziere è stato calcolato essere del 1,32%, ma il suo ruolo è più rischioso perchè per mantenerlo deve di volta in volta rischiare tutto il capitale vinto.

Analizzando matematicamente le limitate opzioni dei giocatori si osserva che al puntatore non conviene mai chiedere carta, al mazziere invece conviene chiedere carta solo nel caso in cui abbia in mano un 3 e il puntatore un 9 (anche se variare il proprio modo di giocare può confondere l'avversario e indurlo a commettere degli errori).

3.4 Trente e quarante

Il Trente et quarante (o anche *Rouge et noir*) è un gioco nato in Francia intorno al XVII secolo, le sue origini si possono trovare in un antico solitario praticato con i tarocchi a scopo divinatorio.
L'asso vale 1, le figure 10 e le altre carte il loro valore nominale, il gioco si basa sul confronto tra due file di carte chiamate una rouge e una noir, vengono prima girate le carte che comporranno la file noir in seguito quelle della file rouge, i valori delle carte si sommano e si continuano a girare carte finchè non si supera il 30, la fila vincente sarà quella che avrà totalizzato il punteggio minore.
I giocatori possono fare quattro tipi di scommesse:

- *rouge/noir:* si scommette sulla fila vincente
- *couleur/inverse* si scommette che la prima carta della fila noir è del colore della fila vincente (couleur) oppure che è di colore inverso (inverse)

Le scommesse vincenti vengono pagate alla pari. In caso di pareggio tra le due file la mano è nulla, ma se il pareggio è 31 a 31 il casinò trattiene la metà di tutte le puntate (che consente al casinò di garantirsi un margine che si è calcolato essere tra l'1,11% e l'1,28%). Vi è però la possibilità per il giocatore di assicurarsi per non rischiare di perdere la metà delle proprie puntante pagando un 1% in più sulla scommessa. Si può osservare che conviene sempre assicurare le proprie puntate, infatti così facendo il margine del casinò passa da quello calcoltato (comunque superiore al 1,1%) a 1 su 101 (0,9901%). Le probabilità delle diverse scommesse sono assolutamente identiche e anche un conteggio delle carte si rivela essere totalmente inutile.

3.5 I sistemi

Spesso sentiamo parlare di sistemi per vincere, ora è chiaro che se un sistema infallibile esistesse tutti i giocatori lo userebbero e i casinò avrebbero

già fallito. Dunque i sistemi non servono a vincere, ma ad avere un metodo per gestire il proprio capitale iniziale; questo perchè la matematica garantisce che alla lunga in un gioco d'azzardo contro un banco che trattiene un margine fisso, sarà impossibile chiudere in attivo i propri conti.
Vediamo di seguito alcuni dei sistemi più noti, sistemi che sono definiti *montanti in perdita* in quanto la puntata viene di volta in volta aumentata per potersi rifare delle perdite precedenti. La scelta dell'evento su cui scommetere è lasciata alla fantasia del giocatore che potrà scegliere di puntare su un numero o una combinazione ritardatari o su un sequenza di eventi uguali (puntare su un evento appena uscito si dice *paroli*).
Martingala: è senza dubbio il sistema più conosciuto, ma anche tra i più rischiosi. E' un sistema moltiplicativo che si basa sul raddoppio della puntata: "punto 1 euro sul rosso, se esce nero allora punto 2 euro sul rosso e così via raddoppiando la puntata finchè continuerà ad uscire nero", l'idea è che non potrà uscire nero per sempre. Il problema di questo sistema è che, poichè la puntata aumenta notevolmente man mano che si va avanti con il gioco, si rischia di dover pagare ingenti somme di denaro con la possibilità si guadagnare, in caso di vittoria, una somma di poco conto. Inoltre spesso i casinò mettono dei tetti sulle puntate massime in alcuni giochi, come appunto la roulette, per evitare di dover sborsare grandi quantità di denaro a giocatori che usano questa tecnica e che hanno un notevole capitale iniziale. Un giocatore con un capitale limitato rischia di finire tutti i suoi soldi ed in breve tempo. Vediamo un esempio: un giocatore che ha a disposizione 100 euro, se dopo sei neri consecutivi non è ancora uscito rosso ha speso 1+2+4+8+16+32=63 euro e dovrebbe quindi giocare altri 64 euro per poter recuperare i soldi spesi (ma non ne ha più abbastanza), se anche li avesse in caso di vittoria avrebbe guadangato un solo euro (rischiando però di perdere tutto il suo capitale nel caso in cui esca la "sventurata" combinazione data da sei neri consecutivi che ha la stessa probabilità delle altre $2^6 = 64$ combinazioni possibili di rossi e neri, cioè $\frac{1}{64}$).
Cancellazione (Labouchère): è un sistema additivo, si fissa una sequenza

di numeri $a_1, ..a_n$, la prima puntata sarà $a_1 + a_n$; se si vince a_1 e a_n verranno cancellati dalla serie e la puntata successiva sarà $a_2 + a_{n-1}$; se si perde invece $a_1 + a_n$ viene aggiunto come n+1-esimo termine della sequenza e la puntata successiva sarà quindi $a_1 + a_{n+1}$. Con questo sistema il guadagno è comunque piccolo in caso di vittoria, ma l'esborso di denaro è più controllato che nel caso della martingala.
Sitemi lineari: simili al sistema di d'Alambert o di progressione semplice; ogni puntata è uguale a quella effettuata precedentemente con l'aggiunta di un numero k stabilito in caso di sconfitta o sottraendovi k in caso di vittoria. Anche qui come vediamo l'esborso è controllato.

Capitolo 4

Il BlackJack

4.1 La storia

Molti studiosi della storia del blackjack tendono ad essere d'accordo che questo gioco si possa far risalire alla cutura Gallica e in particolar modo al gioco chiamato Vingt Et Un ("21" in francese) giocato nei casinò del diciassettesimo secolo in Francia, ma sulle origini del Vingt Et Un non si sa molto. Il Blackjack nasce ufficialmente nel 1623 dove in una stampa locale si ritrova un piccolo pezzo dedicato al gioco d'azzardo. Sembra che anche i Re di Francia amassero passare il tempo in incognito nelle bettole Parigine del XVII secolo scommettendo somme altissime sotto i colpi di abilissimi bari.
Sebbene il moderno blackjack abbia delle influenze squisitamente europee dobbiamo ammettere che questo gioco è davvero diventato famoso in America dove si è iniziato a giocare ad altissimi livelli e dove ha acquisito inoltre il nome Blackjack che deriva dai bonus stabiliti negli anni Cinquanta per i giocatori che avessero in mano un asso di picche ed un jack di colore black (nero).
In seguito alla Rivoluzione Francese gli immigrati portarono i propri giochi di carte nel Nuovo Continente e da lì si diffusero molto velocemente. Proprio in America il blackjack fu uno dei primi giochi ad essere monopolizzato dai giocatori prefessionisti che velocemente ne stilarono numerose strategie.

La popolarità del Blackjack è andata sempre più aumentando grazie alla capacità dei giocatori di casinò di utilizzare le proprie competenze ed intuizioni e farne delle piccole ma utili regole. Nel 1950 a cura di Roger Baldwin venne anche pubblicato un libro intitolato "Le migliori strategie nel Blackjack" scritto appositamente per aiutare i giocatori. Seguì poi la strategia di Edward Thorp nel 1962 basata sul conto delle carte e spiegata nel libro "Beat the Dealer". Le rivelazioni di Thorp fecero aumentare in maniera esponenziale la popolarità del Blackjack facendolo diventare la Star dei tavoli verdi di Las Vegas.
Per molti però il vero eroe del Blackjack è Ken Uston una sorta di Robin Hood del Casinò. Ha pubblicato i libri "Million Dollar Blackjack" e "Il Grande Giocatore". Ma se da un lato Uston era amato dai giocatori di tutto il mondo dall'altro era odiato dai casinò poichè lui usava computer segreti per contare le carte setacciando tutti i casinò di Las Vegas e continuando a vincere. Era diventato un incubo per tutte la case da gioco.
Un altro incubo dei casinò diventò un gruppo di studenti del MIT che ha vinto milioni di dollari nei casinò sino a che venne scoperto da degli investigatori privati che per vincere utilizzavano il metodo del conteggio delle carte.
Il Blackjack è comunque uno dei giochi che continua ad emozionare anche nei casinò online e che non sembra mai perdere il suo fascino originario.

4.2 Le regole

I partecipanti al gioco sono il mazziere (dealer) che si posiziona al centro del tavolo a spicchio e i giocatori che possono andare da un minimo di uno a un massimo di sette. Generalmente si gioca con 4-6 mazzi (in America si usa giocare anche con solo 1 o 2 mazzi) di 52 carte che sono posizionati nell'apposito sabot, chiamato *shoe* nel blackjack.
L'Asso può valere 1 oppure 11 a scelta del giocatore, le figure valgono 10 e le altre carte il loro valore nominale.
Tutti i giocatori fanno la loro puntata prima che le carte vengano distribuite

(ogni tavolo ha dei valori minimi e massimi di puntate, in America ad esempio la puntata minima va dai 25 cent ai 5 dollari e la massima da 100 dollari a 500 dollari); inoltre ogni giocatore è libero di puntare solo sulla sua mano o anche su altre caselle (sia che il posto sia libero sia che sia occupato).
Lo scopo del gioco è totalizzare un punteggio maggiore del dealer senza superare il 21. Il dealer distribuisce due carte a ciascun giocatore (le carte vengono distribuite coperte o scoperte a seconda delle usanze locali) e due carte a se stesso di cui solo una scoperta, i giocatori potranno, una volta viste le loro carte e la carta del dealer, scegliere di "stare" (fermare il gioco) o chiedere altre carte. Se chiedendo carta il punteggio ottenuto supera il 21 si sballa e la puntata scommessa è persa. Se il punteggio realizzato contiene un asso e questo può essere contato come 11 senza superare il 21 la mano è detta "soft", negli altri casi è chiamata "hard".
Dopo che tutti i giocatori hanno giocato è il turno del dealer, che sarà obbligato ha chiedere carta se il suo punteggio è uguale o minore di 16, mentre con un punteggio superiore al 16 deve stare (in alcuni casinò il banco con un 17 soft deve chiedere carta, in altri deve stare).
Alla fine ogni giocata è confrontata con quella del banco, se questo è vincente incassa la puntata, se è perdente paga alla pari, se i due risultati sono uguali viene semplicemente restituita la puntata. Se le prime due carte del giocatore sono Asso e dieci (chiamato anche natural o blackjack) e il banco non ha fatto anch'esso blackjack, il banco paga una volta e mezza la posta.
Il giocatore ha inoltre alcune opzioni:

- **Raddoppio:** dopo aver ricevuto le carte e aver visto la carta del banco il giocatore può decidere di raddoppiare la propria puntata; la contropartita è che se si sceglie di raddoppiare si riceverà una e una sola carta dal banco; in alcuni casinò il raddoppio è permesso se il giocatore ha un totale che va da 9 a 11, in altri invece è permesso qualunque siano le due carte iniziali (in particolare vedremo che sarà conveniente con un totale soft).

- **Dividere la coppia (split):** quando il giocatore riceve due carte di ugual valore può decidere di dividerle e considerarle come se appartenessero a due mani separate (dovrà aggiungere una puntata uguale alla puntata iniziale); se il giocatore riceve un'altra carta uguale può scegliere di dividere ancora (in alcuni casinò è permesso dividere fino a 4 volte). Le figure sono considerate tutte dei dieci è dunque possibile dividere ad esempio una donna e un 10. Particolare è il caso dei due assi, infatti il giocatore che decide di dividerli potrà ricevere una sola altra carta e in caso ricevesse un altro asso non potrebbe dividere nuovamente. Inoltre non in tutti i casinò è permesso dividere gli assi. Raddoppiare dopo uno split è permesso solo in certi casinò (perchè è ovviamente un'opzione favorevole al giocatore).

- **Assicurazione:** quando il dealer mostra un asso come prima carta i giocatori possono scegliere di assicurarsi facendo una puntata extra (di solito pari alla metà della puntata iniziale) che viene pagata 2:1 in caso di BlackJack del banco.

- **Resa:** quando è permessa dal casinò, la resa da al giocatore la possibilità di ritirare metà della propria puntata dopo aver visto le carte distribuite inizialmente. Vi sono due diversi tipi di resa, la resa anticipata (early surrender) e quella ritardata (late surrender), in quest'ultima ci si può arrendere solo dopo che il banco ha verificato di non aver fatto Blackjack. La resa anticipata non è più permessa in quasi tutti i casinò del mondo, in quanto è un'opzione troppo favorevole al giocatore, mentre la resa ritardata è consentita principalmente nei casinò asiatici e in quelli caraibici.

4.3 Strategia di base

Il blackjack è un gioco matematico-meccanico, per cui il giocatore non si dovrebbe mai affidare al caso o alla sensazione, ma sempre seguire, in ogni decisione, quella che il calcolo delle probabilità gli suggerisce essere l'opzio-

ne più favorevole: solo così facendo egli potrà sperare alla lunga di battere il banco, perchè ogni scelta fatta "non ascoltando" la matematica non farà altro che diminuire le sue probabilità di vittoria.
Il primo caso di strategia per giocare a Blackjack che se seguita limita di molto il vantaggio del banco risale al 1956, quando su una rivista statistica americana *"Journal of the American Statistical Association"* viene pubblicato un articolo intitolato "The Optimum Strategy in Blackjack". Questa strategia è stata modificata e riproposta in letteratura in diverse forme anche tenendo conto delle regole dei diversi casinò, ed è ormai disponibile in tutti i libri che trattano l'argomento.
Queste strategie di base sono state calcolate considerando solo le tre carte che il giocatore vede, le proprie e quella del banco, ignorando le carte che sono già uscite e dovrebbero descrivere il modo migliore di giocare.
La strategia che riportiamo, presa dal testo [10], si riferisce al gioco così come viene praticato nella maggior parte dei casinò europei, ovvero con le seguenti varianti delle regole: il gioco viene praticato con sei mazzi, il dealer dovrà stare con un 17 soft, il raddoppio è permesso qualunque siano le prime due carte del giocatore, si possono splittare gli assi ed è permesso raddoppiare dopo uno split. Vale inoltre un'altra regola fondamentale (adottata nei casino europei e non in quelli americani) per cui il dealer controllerà di aver fatto blackjack solo dopo che i giocatori avranno terminato il loro gioco ("no hole card rule").
Le possibili decisioni del giocatore sono: stare o chiedere carta, raddoppiare, splittare e fare l'assicurazione.
Deve essere chiaro che queste strategie non faranno vincere il giocatore, di sicuro non dopo un lungo periodo passato al tavolo. E' quasi una certezza matematica che alla lunga il vantaggio che si assicura il casinò avrà la meglio e il giocatore perderà i suoi soldi. Queste strategie però ci danno la possibilità di vincere, in breve tempo, anzi ci danno la maggior possibilità di vincere.

4.3.1 Stare(S)/Chiedere carta(C)

Sulle righe ci sono le carte mostrate dal banco, mentre in colonna la somma delle due carte del giocatore.

Mani hard

	G=11/-	G=12	G=13	G=14	G=15	G=16	G=17/+
B=2	C	C	S	S	S	S	S
B=3	C	C	S	S	S	S	S
B=4	C	S	S	S	S	S	S
B=5	C	S	S	S	S	S	S
B=6	C	S	S	S	S	S	S
B=7	C	C	C	C	C	C	S
B=8	C	C	C	C	C	C	S
B=9	C	C	C	C	C	C	S
B=10	C	C	C	C	C	C	S
B=A	C	C	C	C	C	C	S

Tabella 4.1: C=chiedere carta; S=stare

Mani soft

	$G = A, 9$	$G = A, 8$	$G = A, 7$	$G = A, 6$	$G = A, 5$
B=2	S	S	S	C	C
B=3	S	S	S	C	C
B=4	S	S	S	C	C
B=5	S	S	S	C	C
B=6	S	S	S	C	C
B=7	S	S	S	C	C
B=8	S	S	S	C	C
B=9	S	S	C	C	C
B=10	S	S	C	C	C
B=A	S	S	C	C	C

Tabella 4.2: C=chiedere carta; S=stare

4.3.2 Raddoppio

	G=11	G=10	G=9	G=8
B=2	R	R	C	C
B=3	R	R	R	C
B=4	R	R	R	C
B=5	R	R	R	C
B=6	R	R	R	C
B=7	R	R	C	C
B=8	R	R	C	C
B=9	R	R	C	C
B=10	R	C	C	C
B=A	C	C	C	C

Tabella 4.3: R=Raddoppio; C=chiedere carta; S=stare

	G=A,2	G=A,3	G=A,4	G=A,5	G=A,6	G=A,7
B=2	C	C	C	C	C	S
B=3	C	C	C	C	R	R
B=4	C	C	R	R	R	R
B=5	R	R	R	R	R	R
B=6	R	R	R	R	R	R
B=7	C	C	C	C	C	S
B=8	C	C	C	C	C	S
B=9	C	C	C	C	C	C
B=10	C	C	C	C	C	C
B=A	C	C	C	C	C	C

Tabella 4.4: R=Raddoppio; C=chiedere carta; S=stare

4.3.3 Split Pair

	G=2,2	G=3,3	G=4,4	G=5,5	G=6,6
B=2	C	C	C	R	C
B=3	C	C	C	R	Sp
B=4	Sp	Sp	C	R	Sp
B=5	Sp	Sp	C	R	Sp
B=6	Sp	Sp	C	R	Sp
B=7	Sp	Sp	C	R	C
B=8	C	C	C	R	C
B=9	C	C	C	R	C
B=10	C	C	C	C	C
B=A	C	C	C	C	C
	G=7,7	G=8,8	G=9,9	G=10,10	G=A,A
B=2	Sp	Sp	Sp	S	Sp
B=3	Sp	Sp	Sp	S	Sp
B=4	Sp	Sp	Sp	S	Sp
B=5	Sp	Sp	Sp	S	Sp
B=6	Sp	Sp	Sp	S	Sp
B=7	Sp	Sp	S	S	Sp
B=8	C	Sp	Sp	S	Sp
B=9	C	Sp	Sp	S	Sp
B=10	C	Sp	S	S	Sp
B=A	C	Sp	S	S	Sp

Tabella 4.5: Sp=split; R=Raddoppio; C=chiedere carta; S=stare

4.3.4 Assicurazione

La scommessa che viene fatta quando un giocatore decide di fare l'assicurazione davanti ad un Asso del banco è in sostanza la scommessa che esca un dieci. Per essere equa questa scommessa dovrebbe essere pagata 36:16, dunque 9:4, decisamente più dei 2:1 offerti. Nella maggior parte dei casi quindi essa risulterà essere una scommessa svantaggiosa; chi tiene conto delle carte uscite però potrebbe riscontrare dei momenti, quando il mazzo è povero di dieci, in cui fare l'assicurazione diventa addirittura favorevole al giocatore.

4.4 Breve cenno sulla strategia vincente

Oltre alla strategia di base, Edward Thorp nel 1962 elabora una strategia vincente per il gioco del Blackjack, spiegata nel libro "Beat the Dealer", che si basa sul conteggio delle carte.
Ovviamente non si pretende che il giocatore si ricordi ogni carta che esce, ma solamente che tenga a mente un punteggio, al quale, per ogni carta vista, si aggiunge o si sottrae 1 a seconda che questa sia favorevole o sfavorevole al giocatore. Se il numero è positivo vorrà dire che il mazzo è favorevole al giocatore, che potrà quindi decidere di aumentare la sua puntata, viceversa se il numero è negativo significa che il mazzo è sfavorevole al giocatore, che deciderà di diminuire la sua puntata.
Vediamo come si effettua questo conteggio:

- aggiungo -1 per ogni A e 10 uscito
- aggiungo +1 per ogni 3,4,5 e 6 uscito
- aggiungo 0 per ogni 2,7,8 e 9 uscito

Il nostro giocatore dovrà dunque tenere a mente il punteggio totale, è intuitivo però capire che l'importanza di questo totale varia a seconda di quante carte sono già andate: sarà ben diverso avere un punteggio positivo nelle prime mani, piuttosto che quando sono già stati usati 4 mazzi. Bisogna dunque essere in grado di calcolare un totale "vero" che tenga conto di quante carte sono uscite. La tecnica più semplice è valutare l'altezza della pila degli scarti

per tener conto dei mezzi mazzi andati, il totale ”corrente” andrà diviso per il numero di mezzi mazzi rimasti nello shoe.
Nella tabella che segue vediamo come il nostro totale influenzerà la variazione delle puntate:

TOTALE	PUNTATA
$< +1$	1(minima iniziale)
$da1a2$	2
$da2a3$	3
4	4
5	6
6	6
7	8
8	10
9/+	limite massimo

4.5 Studio probabilistico della strategia di base

4.5.1 Distribuzione di probabilità del banco

Il primo passo verso una dimostrazione matematica della validità delle tabelle rappresentanti la strategia di base è stato quello di calcolare, a seconda della carta visibile del dealer, le diverse probabilità del banco di ottenere, come punteggio finale, rispettivamente 17, 18, 19, 20, 21 o di sballare. Le probabilità sono state valutate considerando un ipotetico mazzo infinito in cui ogni carta ha, quindi, sempre la stessa probabilità di uscire delle altre (1/13), eccetto il punteggio 10 la cui probabilità è di 4/13 considerando anche le figure, indipendentemente da quali carte siano già state viste.
Sia C la variabile aleatoria rappresentante l'estrazione di una carta, la distri-

buzione di probabilità di C sarà

$$P(C = A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) = \frac{1}{13} \quad P(C = 10) = \frac{4}{13}.$$

Siano $C_1, C_2, \ldots$ le variabili aleatorie che rappresentano rispettivamente la prima carta del banco, la seconda, etc... definite nello spazio degli eventi $E = \{A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
Siano ora

$$B_1 = C_1, \quad B_1 \in E$$

$$B_2 = B_1 + C_2, \quad B_2 \in E_2$$

con

$$E_2 = \{2(12), 3(13), 4, 4(14), 5, 5(15), 6, 6(16), 7, 8, 9,$$

$$10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22+\}$$

$$B_3 = B_2 + C_3, \quad B_3 \in E_3 = E_2 - \{2(12)\}$$

fino ad arrivare a B_f, che rappresenta il risultato finale ottenibile dal banco e tale che

$$B_f \in E_f = \{17, 18, 19, 20, 21, 22+\}.$$

I numeri tra parentesi tonde indicano le mani soft e 22+ sono tutti i casi in cui il giocatore sballa.
Vogliamo calcolare la distribuzione di probabilità condizionata di B_f data B_1.
Nota B_1 calcoliamo dapprima le diverse distribuzioni di probabilità di B_2 e vale

$$P(B_2 = B_1 + C_1) = P(C_1)$$

in seguito abbiamo calcolato le distribuzioni di probabilità di B_f.
Vediamo come sono state calcolate le varie probabilità di ottenere, ad esempio $B_f = 17$ dato $B_1 = 10$:

$P(B_f = 17|B_1 = 10) = P(B_2 = 17) + P(B_f = 17|B_2 = 16) + P(B_f =$

$17|B_2 = 15) + P(B_f = 17|B_2 = 14) + P(B_f = 17|B_2 = 13) + P(B_f = 17|B_2 = 12) + P(B_f = 17|B_2 = 11)$

dove

$P(B_f = 17|B_2 = 16) = P(B_2 = 16) * P(B_3 = 17) = \frac{1}{13} * \frac{1}{13}$

$P(B_f = 17|B_2 = 15) = P(B_2 = 15) * (P(B_3 = 17) + P(B_4 = 17|B_3 = 16)) = \frac{1}{13} * (\frac{1}{13} + \frac{1}{13^2})$

$P(B_f = 17|B_2 = 14) = P(B_2 = 14) * (P(B_3 = 17) + P(B_4 = 17|B_3 = 15) + P(B_4 = 17|B_3 = 16) + P(B_5 = 17|B_3 = 15, B_4 = 16)) = \frac{1}{13} * (\frac{1}{13} + \frac{2}{13^2} + \frac{1}{13^3})$

$P(B_f = 17|B_2 = 13) = P(B_2 = 13) * (P(B_3 = 17) + P(B_4 = 17|B_3 = 14) + P(B_4 = 17|B_3 = 15) + P(B_4 = 17|B_3 = 16) + P(B_5 = 17|B_3 = 14, B_4 = 15) + P(B_5 = 17|B_3 = 14, B_4 = 16) + P(B_5 = 17|B_3 = 15, B_4 = 16) + P(B_6 = 17|B_3 = 14, B_4 = 15, B_5 = 16) = \frac{1}{13} * (\frac{1}{13} + \frac{3}{13^2} + \frac{3}{13^3} + \frac{1}{13^4})$

$P(B_f = 17|B_2 = 12) = \frac{1}{13} * (\frac{1}{13} + \frac{4}{13^2} + \frac{6}{13^3} + \frac{4}{13^4} + \frac{1}{13^5})$

I primi casi analizzati, ovvero $B_1 = 10, 9, 8, 7, 6$, sono casi in cui il valore dell'asso è fisso, varrà 1 o 11 a seconda dei casi, ma non ci troveremo ad avere mai un punteggio soft.
Quando invece $B_1 = 5, 4, 3, 2, A$ abbiamo dovuto analizzare anche le possibili mani "soft" del banco, in cui la probabilità di sballare è nulla, la probabilità di raggiungere un punteggio finale B_f è calcolata come nei casi precedenti, mentre devo tener conto man mano di come variano le probabilità $P(B_3), P(B_4), etc$, qualora questi punteggi siano "soft".
Si osserva che i numeratori delle diverse probabilità condizionate creano uno schema ricorrente che è il ben noto triangolo di Tartaglia:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

dove nella prima riga abbiamo i numeratori della probabilità condizionata da un unico evento, nella seconda riga i numeratori delle probabilità condizionate da due eventi, etc.
Il triangolo di Tartaglia è infatti equivalente a:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
$$

Dove l'elemento k-simo della riga n-sima, ovvero il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$, corrisponde al numero di combinazioni semplici di n elementi di classe k. Nel nostro caso corrispondono al numero dei modi possibili per passare da uno stato intermedio, $B_i = x$, ad uno stato stazionario B_f in k mosse e vale $n = 16 - x$ (poichè 16 rappresenta l'ultimo stato stazionario).
Nel caso $B_f > 21$ otteniamo invece:

$P(B_f > 21|B_2 = 16) = P(B_2 = 16) * P(B_3 > 21) = \frac{1}{13} * \frac{8}{13}$

$P(B_f > 21|B_2 = 15) = \frac{1}{13} * (\frac{7}{13} + \frac{8}{13^2})$

$P(B_f > 21|B_2 = 14) = \frac{1}{13} * (\frac{6}{13} + \frac{15}{13^2} + \frac{8}{13^3})$

$P(B_f > 21|B_2 = 13) = \frac{1}{13} * (\frac{5}{13} + \frac{21}{13^2} + \frac{23}{13^3} + \frac{8}{13^4})$

$P(B_f > 21|B_2 = 12) = \frac{1}{13} * (\frac{4}{13} + \frac{26}{13^2} + \frac{44}{13^3} + \frac{31}{13^4} + \frac{8}{13^5})$

Troviamo dunque un altro triangolo:

$$\begin{array}{c}
8 \\
7 \quad 8 \\
6 \quad 15 \quad 8 \\
5 \quad 21 \quad 23 \quad 8 \\
4 \quad 26 \quad 44 \quad 31 \quad 8
\end{array}$$

Che equivale a:

$$\begin{array}{c}
8 * \binom{0}{0} \\
7 * \binom{1}{0} \quad 8 * \binom{1}{1} \\
6 * \binom{2}{0} \quad 7 * \binom{2}{1} \quad 8 * \binom{2}{2} \\
5 * \binom{3}{0} \quad 6 * \binom{3}{1} \quad 7 * \binom{3}{2} \quad 8 * \binom{3}{3}
\end{array}$$

$$4 * \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 5 * \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 6 * \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad 7 * \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad 8 * \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Infatti 8 è il numero di carte che fanno sballare con punteggio 16, 7 con punteggio 15, e via dicendo.

Curiosità

Osserviamo che, mentre nel triangolo di Tartaglia la somma dei numeri su una riga rappresenta le potenze di due, in questo "nuovo" triangolo invece su ogni riga la somma totale dei numeri sulla riga r-sima è $2^{r+2} - 2^{r-1} + 1$

Risultati

Riporto qui la distribuzione di probabilità di B_f condizionata dai diversi valori di B_1:

	$B_1 = 10$	$B_1 = 9$	$B_1 = 8$	$B_1 = 7$	$B_1 = 6$
$P(B_f = 17)$	11,14%	12,00%	12,86%	36,86%	16,54%
$P(B_f = 18)$	11,14%	12,00%	35,93%	13,78%	10,63%
$P(B_f = 19)$	11,14%	35,08%	12,86%	7,86%	10,63%
$P(B_f = 20)$	34,22%	12,00%	6,94%	7,86%	10,17%
$P(B_f = 21)$	11,14%	6,08%	6,94%	7,41%	9,72%
$P(B_f > 21)$	21,21%	22,84%	24,47%	26,23%	42,32%

	$B_1 = 5$	$B_1 = 4$	$B_1 = 3$	$B_1 = 2$	$B_1 = A$
$P(B_f = 17)$	12,23%	13,05%	13,50%	13,98%	13,08%
$P(B_f = 18)$	12,23%	12,59%	13,05%	13,49%	13,08%
$P(B_f = 19)$	11,77%	12,14%	12,56%	12,97%	13,08%
$P(B_f = 20)$	11,31%	11,65%	12,03%	12,40%	13,08%
$P(B_f = 21)$	10,82%	11,12%	11,47%	11,80%	36,15%
$P(B_f > 21)$	41,64%	39,45%	37,37%	35,36%	11,52%

Da questi dati possiamo subito osservare che il caso $B_1 = A$ è il più favorevole per il banco.

Considerazioni sul mazzo infinito

Il fatto di considerare un ipotetico mazzo infinito è evidentemente un'approssimazione, si tratta ora di valutare se questa approssimazione è buona oppure no. Per farlo è stata effettuata una prova calcolando le probabilità nel caso $B_1 = 9$, ma questa volta considerando due mazzi di carte e avendo memoria delle carte che vengono man mano girate dal banco. Riporto di seguito i risultati ottenuti:

	Mazzo infinito	Due mazzi
$P(B_f = 17)$	12,00%	12,09%
$P(B_f = 18)$	12,00%	11,20%
$P(B_f = 19)$	35,08%	35,41%
$P(B_f = 20)$	12,00%	12,11%
$P(B_f = 21)$	6,08%	6,10%
$P(B_f > 21)$	22,84%	23,09%

Tabella 4.6: $B_1 = 9$

Si osserva che le percentuali nelle due colonne sono piuttosto simili, variano circa di uno $0,2\%$, tranne nel caso $P(B_f = 18)$ in cui variano dello $0,8\%$, l'approssimazione dunque può essere considerata buona, soprattutto perchè, maggiore è il numero di mazzi utilizzati (6 nel caso che andiamo a considerare), migliore risulterà essere l'approssimazione del mazzo infinito.

4.5.2 Modello della catena di Markov

E' interessante osservare come tutte le distribuzioni di probabilità di B_f trovate con l'approssimazione del mazzo infinito siano ottenibili utilizzando il modello delle catene di Markov.
Prendiamo in analisi il processo stocastico discreto (o catena) a parametro discreto, corrispondente al punteggio conseguito dal banco dopo ogni carta pescata.
Sia $B = \{B(t) = B_t, t \in T = \{1, 2, \cdots, \infty\}\}$ una famiglia di variabili casuali, gli stati B_t sono definiti nello spazio degli stati

$$E = \{A, 2, 2(12), 3, 3(13), 4, 4(14), 5, 5(15), 6, 6(16), 7, 8, 9, 10,$$
$$11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22+\}$$

finito e composto da 27 elementi, quindi 27 sono gli stati possibili.
Questa processo aleatorio è un processo di Markov in quanto vale la proprietà dell'assenza di memoria (o proprietà di Markov)

$$P(B_{n+1} = j \quad | \quad B_1 = i_1, \ldots, B_n = i) =$$
$$= P(B_{n+1} = j \quad | \quad B_n = i)$$

Poichè le probabilità di transizione $P(B_{n+1} = j \quad | \quad B_n = i)$ sono indipendenti da n la nostra catena di Markov possiede probabilità di transizione stazionarie ed è quindi una catena di Markov omogenea.

Matrice di transizione

Poniamo

$$p_{i,j} = P(B_{n+1} = j \quad | \quad B_n = i) \qquad i, j \in E$$

indipendentemente dal valore di n.
La matrice di transizione di $B = \{B_n, n \geq 0\}$ è una matrice quadrata di dimensione 27×27 definita nel modo seguente

$$P = [p_{i,j}] = \begin{bmatrix} p_{A,A} & p_{A,2} & p_{A,2(12)} & p_{A,3} & \cdots & p_{A,22+} \\ p_{2,A} & p_{2,2} & p_{2,2(12)} & p_{2,3} & \cdots & p_{2,22+} \\ p_{2(12),A} & p_{2(12),2} & p_{2(12),2(12)} & p_{2(12),3} & \cdots & p_{2(12),22+} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ p_{22+,A} & p_{22+,2} & p_{22+,2(12)} & p_{22+,3} & \cdots & p_{22+,22+} \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

in cui sono soddisfatte le condizioni

$$p_{i,j} \geq 0 \quad \sum_{j \in E} p_{i,j=1} \quad i = 1, \cdots, m \tag{4.2}$$

La distribuzione di probabilità di B

Consideriamo $p_i(n) = P(B_n = i)$, sia

$$\rho(n) = [p_A(n) \quad p_2(n) \quad \cdots \quad p_{22+}(n)]$$

il vettore di probabilità dello stato dopo n transizioni, ovvero la distribuzione di probabilità di B_n.
Sia $p_i(1) = P(X_1 = i)$ la distribuzione di probabilità dello stato iniziale, e

$$\rho(1) = [p_A(1) \quad p_2(1) \quad \cdots \quad p_{22+}(1)]$$

il vettore dello stato iniziale.
La distribuzione di probabilità di B è completamente determinata dalla matrice delle probabilità di transizione in una sola fase P e dal vettore di probabilità dello stato iniziale $\rho(1)$ e vale

$$\rho(n) = \rho(1)P^n$$

Nel nostro caso abbiamo

$$\rho(1) = [p(B_1 = A/11) \quad p(B_1 = 2) \quad p(B_1 = 2/12) \quad p(B_1 = 3) \quad p(B_1 = 3/13)$$

$p(B_1 = 4) \quad p(B_1 = 4/14) \quad p(B_1 = 5) \quad p(B_1 = 5/15) \quad p(B_1 = 6)$
$p(B_1 = 6/16) \quad p(B_1 = 7) \quad p(B_1 = 8) \quad p(B_1 = 9) \quad p(B_1 = 10) \quad p(B_1 = 11)$
$p(B_1 = 12) \quad p(B_1 = 13) \quad p(B_1 = 14) \quad p(B_1 = 15) \quad p(B_1 = 16) \quad p(B_1 = 17)$
$p(B_1 = 18) \quad p(B_1 = 19) \quad p(B_1 = 20) \quad p(B_1 = 21) \quad p(B_1 = 22)] =$
$= [7,69\% \quad 7,69\% \quad 0,00\% \quad 7,69\% \quad 0,00\% \quad 7,69\% \quad 0,00\% \quad 7,69\% \quad 0,00\%$
$7,69\% \quad 0,00\% \quad 7,69\% \quad 7,69\% \quad 7,69\% \quad 30,77\% \quad 0,00\% \quad 0,00\% \quad 0,00\%$
$0,00\% \quad 0,00\% \quad 0,00\% \quad 0,00\% \quad 0,00\% \quad 0,00\% \quad 0,00\% \quad 0,00\% \quad 0,00\%]$

La matrice di transizione è rappresentata nell'appendice A.

Classificazione degli stati

- lo stato A comunica con gli stati $\{2(12), 3(13), 4(14), 5(15), 6(16), 17, 18, 19, 20, 21\}$
- lo stato 2 comunica con gli stati $\{3(13), 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
- lo stato 2(12) comunica con gli stati $\{3(13), 4(14), 5(15), 6(16), 12, 17, 18, 19, 20, 21\}$
- lo stato 3 comunica con gli stati $\{4(14), 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$
- lo stato 3(13) comunica con gli stati $\{4(14), 5(15), 6(16), 12, 13, 17, 18, 19, 20, 21\}$
- lo stato 4 comunica con gli stati $\{5(15), 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$
- lo stato 4(14) comunica con gli stati $\{5(15), 6(16), 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 21\}$
- lo stato 5 comunica con gli stati $\{6(16), 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$
- lo stato 5(15) comunica con gli stati $\{6(16), 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21\}$
- lo stato 6 comunica con gli stati $\{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$

- lo stato 6(16) comunica con gli stati $\{12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21\}$
- lo stato 7 comunica con gli stati $\{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$
- lo stato 8 comunica con gli stati $\{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$
- lo stato 9 comunica con gli stati $\{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$
- lo stato 10 comunica con gli stati $\{12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21\}$
- lo stato 11 comunica con gli stati $\{12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21\}$
- lo stato 12 comunica con gli stati $\{13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22+\}$
- lo stato 13 comunica con gli stati $\{14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22+\}$
- lo stato 14 comunica con gli stati $\{15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22+\}$
- lo stato 15 comunica con gli stati $\{16, 17, 18, 19, 20, 21, 22+\}$
- lo stato 16 comunica con gli stati $\{17, 18, 19, 20, 21, 22+\}$

Stati assorbenti.
Nel nostro caso gli stati assorbenti sono $A = \{17, 18, 19, 20, 21, 22+\}$.
La nostra matrice di transizione è infatti della forma

$$P = \begin{bmatrix} p_{A,A} & \cdots & p_{A,16} & p_{A,17} & & \cdots & p_{A,22+} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{16,A} & \cdots & p_{16,16} & p_{16,17} & & \cdots & p_{16,22+} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

Gli elementi di R sono le probabilità di transizione in un'unica fase dagli stati non assorbenti a quelli assorbenti, mentre gli elementi di Q sono le probabilità di transizione in un'unica fase da uno stato non assorbente ad un altro non assorbente.

Nel nostro caso osserviamo che al tempo $n = 7$ otteniamo le probabilità di assorbimento degli stati assorbenti a partire da stati iniziali con probabilità diversa da zero (evidenziate in rosso nell'ultima matrice dell'appendice A). Risulta che le probabilità

$$P(B_7 = i \quad | \quad B_1 = k) \quad \text{t.c.} \quad P(B_1 = k) \neq 0 \quad \text{e} \quad i \in A$$

coincidono esattamente con le distribuzioni di probabilità del banco precedentemente calcolate e indicate in tabella 4.5.1.
Le probabilità di assorbimento dei vari stati assorbenti possono essere calcolate utilizzando la proposizione 2.2.3, calcolando dunque la matrice

$$U = [u_{kj}] = (I - Q)^{-1}R$$

dove

$$u_{kj} = P(X_n = j \quad | \quad X_0 = k) \quad \text{con} \quad j \in A \quad \text{e} \quad k \in B.$$

Ciò significa che la matrice $P^7 = PP^6$ sarà della forma

$$\begin{pmatrix} 0 & (I-Q)^{-1}R \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

4.6 La scelta tra Chiedere carta o Stare

Il passaggio successivo è stato calcolare nelle diverse situazioni la scelta più conveniente per il giocatore, abbiamo cercato dunque un riscontro alla tabella 4.3.1.
Dapprima sono state calcolate le probabilità del giocatore di vincere, perdere o pareggiare nel caso in cui decida di stare ed è stato fatto utilizzando solamente la distribuzione di probabilità di B_f precedentemente calcolata; per confrontare poi le percentuali trovate con le diverse probabilità che ha il giocatore di raggiungere un determinato punteggio se decide di chiedere carta.
Sia dunque G la somma delle prime due carte del giocatore e sia W la variabile "risultato" ($W = 1$ è l'evento vittoria, $W = \frac{1}{2}$ l'evento pareggio e $W = 0$

l'evento perdita). Indicando con P_s le probabilità conseguenti alla decisione di "stare" e P_c quelle conseguenti alla scelta di chiedere carta, abbiamo:

$$P_s(W = 0|G = k) = P((B_f > k) \cap (B_f \leq 21))$$

e se x è il valore della prima carta pescata, $x \in E = \{A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$$P_c(W = 0|G = k) = \sum_{x \in E}(P(C = x) * P(W = 0|G = k + x))$$

dove

$$P(W = 0|G = k{+}x) = \begin{cases} 1 \quad \text{se} \quad k + x > 21 \\ min\{P_s(W = 0|G = k + x), P_c(W = 0|G = k + x)\} \\ \text{se} \quad k + x < 21\} \end{cases} \tag{4.4}$$

Allo stesso modo è stata calcolata la probabilità di pareggiare nell'uno e nell'altro caso:

$$P_s(W = \frac{1}{2}|G = k) = P(B_f = k)$$
$$P_c(W = \frac{1}{2}|G = k) = \sum_{x \in E}(P(C = x) * (P(B_f = k + x))$$

e di conseguenza anche le probabilità di vittoria:

$$P_s(W = 1|G = k) = 1 - P_s(W = 0|G = k) - P_s(W = \frac{1}{2}|G = k)$$
$$P_c(W = 1|G = k) = 1 - P_c(W = 0|G = k) - P_c(W = \frac{1}{2}|G = k)$$

Abbiamo dovuto inoltre stabilire un criterio di scelta, per valutare quale fosse la mossa più conveniente da fare per il giocatore. Poichè in caso di pareggio, nel gioco del Blackjack la mano è nulla (ovvero il giocatore si riprende la sua puntata senza vincere nè perdere) abbiamo scelto di dividere equamente la probabilità di pareggiare tra la probabilità di vittoria e di perdita, come mostrato di seguito:

Definizione 4.6.1. *Siano*

$$P_{stot}(W = 0|G = k) = P_s(W = 0|G = k) + \frac{1}{2} * P_s(W = \frac{1}{2}|G = k)$$
$$P_{ctot}(W = 0|G = k) = P_c(W = 0|G = k) + \frac{1}{2} * P_c(W = \frac{1}{2}|G = k)$$

Il giocatore dovrà decidere di stare se

$$P_{ctot}(W = 0|G = k) > P_{stot}(W = 0|G = k)$$

e chiedere carta in caso contrario.
Vediamo i risultati ottenuti.

4.6.1 Mani hard

	$P_{stot}(W = 1\|G = k)$	$P_{ctot}(W = 1\|G = k)$	Rapporto	Strategia
$G = 19$	69,31%	13,27%	5,22	S
$G = 18$	56,09%	19,55%	2,87	S
$G = 17$	42,35%	23,04%	1,84	S
$G = 16$	35,36%	26,35%	1,34	S
$G = 15$	35,36%	29,13%	1,21	S
$G = 14$	35,36%	31,88%	1,11	S
$G = 13$	35,36%	34,61%	1,02	S
$G = 12$	35,36%	37,34%	0,95	C
$G = 11$	35,36%	62,00%	0,57	C

Tabella 4.7: $B_1 = 2$

	$P_{stot}(W=1\|G=k)$	$P_{ctot}(W=1\|G=k)$	Rapporto	Strategia
$G=19$	$70,20\%$	$13,32\%$	5,27	S
$G=18$	$57,40\%$	$18,79\%$	3,05	S
$G=17$	$44,12\%$	$23,22\%$	1,90	S
$G=16$	$37,37\%$	$26,79\%$	1,40	S
$G=15$	$37,37\%$	$29,60\%$	1,26	S
$G=14$	$37,37\%$	$32,53\%$	1,15	S
$G=13$	$37,37\%$	$35,43\%$	1,05	S
$G=12$	$37,37\%$	$38,32\%$	0,98	C
$G=11$	$37,37\%$	$63,10\%$	0,59	C

Tabella 4.8: $B_1 = 3$

	$P_{stot}(W=1\|G=k)$	$P_{ctot}(W=1\|G=k)$	Rapporto	Strategia
$G=19$	71,16%	13,70%	5,20	S
$G=18$	58,79%	19,19%	3,06	S
$G=17$	45,97%	23,42%	1,96	S
$G=16$	39,45%	27,01%	1,46	S
$G=15$	39,45%	30,09%	1,31	S
$G=14$	39,45%	33,17%	1,19	S
$G=13$	39,45%	36,26%	1,09	S
$G=12$	39,45%	39,32%	1,00	S
$G=11$	39,45%	64,23%	0,61	C

Tabella 4.9: $B_1 = 4$

	$P_{stot}(W=1\|G=k)$	$P_{ctot}(W=1\|G=k)$	Rapporto	Strategia
$G=19$	71,98%	13,74%	5,24	S
$G=18$	59,98%	19,30%	3,11	S
$G=17$	47,75%	23,93%	2,00	S
$G=16$	41,64%	27,31%	1,52	S
$G=15$	41,64%	30,56%	1,36	S
$G=14$	41,64%	33,81%	1,23	S
$G=13$	41,64%	37,06%	1,12	S
$G=12$	41,64%	40,31%	1,03	S
$G=11$	41,64%	65,44%	0,64	C

Tabella 4.10: $B_1 = 5$

	$P_{stot}(W=1\|G=k)$	$P_{ctot}(W=1\|G=k)$	Rapporto	Strategia
$G=19$	74,80%	13,92%	5,37	S
$G=18$	64,17%	19,69%	3,26	S
$G=17$	50,59%	24,64%	2,05	S
$G=16$	42,32%	28,55%	1,48	S
$G=15$	42,32%	31,50%	1,34	S
$G=14$	42,32%	34,80%	1,22	S
$G=13$	42,32%	38,10%	1,11	S
$G=12$	42,32%	41,40%	1,02	S
$G=11$	42,32%	66,74%	0,63	C

Tabella 4.11: $B_1 = 6$

	$P_{stot}(W=1\|G=k)$	$P_{ctot}(W=1\|G=k)$	Rapporto	Strategia
$G=19$	80,80%	14,27%	5,66	S
$G=18$	69,98%	20,51%	3,41	S
$G=17$	44,66%	25,91%	1,72	S
$G=16$	26,23%	29,36%	0,89	C
$G=15$	26,23%	31,62%	0,83	C
$G=14$	26,23%	33,75%	0,78	C
$G=13$	26,23%	36,38%	0,72	C
$G=12$	26,23%	39,21%	0,67	C
$G=11$	26,23%	64,57%	0,41	C

Tabella 4.12: $B_1 = 7$

	$P_{stot}(W=1\|G=k)$	$P_{ctot}(W=1\|G=k)$	Rapporto	Strategia
$G=19$	79,69%	14,36%	5,55	S
$G=18$	55,30%	20,51%	2,70	S
$G=17$	30,90%	24,78%	1,25	S
$G=16$	24,47%	27,17%	0,90	C
$G=15$	24,47%	29,26%	0,84	C
$G=14$	24,47%	31,52%	0,78	C
$G=13$	24,47%	33,64%	0,73	C
$G=12$	24,47%	36,26%	0,67	C
$G=11$	24,47%	61,44%	0,40	C

Tabella 4.13: $B_1 = 8$

	$P_{stot}(W=1\|G=k)$	$P_{ctot}(W=1\|G=k)$	Rapporto	Strategia
$G=19$	64,38%	14,27%	4,51	S
$G=18$	40,84%	19,24%	2,12	S
$G=17$	28,84%	22,39%	1,29	S
$G=16$	22,84%	24,61%	0,93	C
$G=15$	22,84%	26,51%	0,86	C
$G=14$	22,84%	28,56%	0,80	C
$G=13$	22,84%	30,76%	0,74	C
$G=12$	22,84%	32,82%	0,70	C
$G=11$	22,84%	57,83%	0,39	C

Tabella 4.14: $B_1 = 9$

	$P_{stot}(W=1\|G=k)$	$P_{ctot}(W=1\|G=k)$	Rapporto	Strategia
$G=19$	49,07%	13,12%	3,74	S
$G=18$	37,92%	16,91%	2,24	S
$G=17$	26,78%	19,24%	1,39	S
$G=16$	21,21%	21,31%	1,00	C
$G=15$	21,21%	22,95%	0,92	C
$G=14$	21,21%	24,72%	0,86	C
$G=13$	21,21%	26,63%	0,80	C
$G=12$	21,21%	28,69%	0,74	C
$G=11$	21,21%	51,58%	0,41	C

Tabella 4.15: $B_1 = 10$

	$P_{stot}(W = 1 \vert G = k)$	$P_{ctot}(W = 1 \vert G = k)$	Rapporto	Strategia
$G = 19$	44,22%	9,37%	4,72	S
$G = 18$	31,14%	15,45%	2,02	S
$G = 17$	18,06%	15,27%	1,18	S
$G = 16$	11,52%	16,71%	0,69	C
$G = 15$	11,52%	18,00%	0,64	C
$G = 14$	11,52%	18,20%	0,63	C
$G = 13$	11,52%	20,79%	0,55	C
$G = 12$	11,52%	22,39%	0,51	C
$G = 11$	11,52%	39,51%	0,29	C

Tabella 4.16: $B_1 = A$

4.6.2 Mani soft

Siano G_1, G_2 le prime due carte del giocatore

	$P_{stot}(W = 1 \mid G = k)$	$P_{ctot}(W = 1 \mid G = k)$	Rapporto	Strategia
$G_1, G_2 = A, 9$	82,00%	59,05%	1,39	S
$G_1, G_2 = A, 8$	69,31%	56,04%	1,24	S
$G_1, G_2 = A, 7$	56,09%	53,06%	1,06	S
$G_1, G_2 = A, 6$	42,35%	49,94%	0,85	C
$G_1, G_2 = A, 5$	35,36%	48,78%	0,72	C

Tabella 4.17: $B_1 = 2$

	$P_{stot}(W = 1 \mid G = k)$	$P_{ctot}(W = 1 \mid G = k)$	Rapporto	Strategia
$G_1, G_2 = A, 9$	82,49%	60,67%	1,36	S
$G_1, G_2 = A, 8$	70,20%	57,93%	1,21	S
$G_1, G_2 = A, 7$	57,40%	54,83%	1,05	S
$G_1, G_2 = A, 6$	44,12%	51,83%	0,85	C
$G_1, G_2 = A, 5$	37,37%	50,28%	0,74	C

Tabella 4.18: $B_1 = 3$

	$P_{stot}(W=1\|G=k)$	$P_{ctot}(W=1\|G=k)$	Rapporto	Strategia
$G_1, G_2 = A, 9$	83,05%	61,87%	1,34	S
$G_1, G_2 = A, 8$	71,16%	59,24%	1,20	S
$G_1, G_2 = A, 7$	58,79%	56,43%	1,04	S
$G_1, G_2 = A, 6$	45,97%	53,29%	0,86	C
$G_1, G_2 = A, 5$	39,45%	51,78%	0,76	C

Tabella 4.19: $B_1 = 4$

	$P_{stot}(W=1\|G=k)$	$P_{ctot}(W=1\|G=k)$	Rapporto	Strategia
$G_1, G_2 = A, 9$	83,52%	63,15%	1,32	S
$G_1, G_2 = A, 8$	71,98%	60,58%	1,19	S
$G_1, G_2 = A, 7$	59,98%	57,87%	1,04	S
$G_1, G_2 = A, 6$	47,75%	55,07%	0,87	C
$G_1, G_2 = A, 5$	41,64%	53,44%	0,78	C

Tabella 4.20: $B_1 = 5$

	$P_{stot}(W=1\|G=k)$	$P_{ctot}(W=1\|G=k)$	Rapporto	Strategia
$G_1, G_2 = A, 9$	85,20%	61,66%	1,32	S
$G_1, G_2 = A, 8$	74,80%	62,39%	1,20	S
$G_1, G_2 = A, 7$	64,17%	59,65%	1,08	S
$G_1, G_2 = A, 6$	50,59%	55,78%	0,91	C
$G_1, G_2 = A, 5$	42,32%	54,80%	0,77	C

Tabella 4.21: $B_1 = 6$

	$P_{stot}(W = 1\|G = k)$	$P_{ctot}(W = 1\|G = k)$	Rapporto	Strategia
$G_1, G_2 = A, 9$	88,66%	63,00%	1,41	S
$G_1, G_2 = A, 8$	80,80%	61,36%	1,32	S
$G_1, G_2 = A, 7$	69,98%	58,63%	1,19	S
$G_1, G_2 = A, 6$	44,66%	52,74%	0,85	C
$G_1, G_2 = A, 5$	26,23%	49,64%	0,53	C

Tabella 4.22: $B_1 = 7$

	$P_{stot}(W = 1\|G = k)$	$P_{ctot}(W = 1\|G = k)$	Rapporto	Strategia
$G_1, G_2 = A, 9$	89,59%	59,68%	1,50	S
$G_1, G_2 = A, 8$	79,69%	57,66%	1,38	S
$G_1, G_2 = A, 7$	55,30%	52,05%	1,06	S
$G_1, G_2 = A, 6$	30,90%	46,43%	0,67	C
$G_1, G_2 = A, 5$	24,47%	46,57%	0,53	C

Tabella 4.23: $B_1 = 8$

	$P_{stot}(W = 1\|G = k)$	$P_{ctot}(W = 1\|G = k)$	Rapporto	Strategia
$G_1, G_2 = A, 9$	87,92%	55,61%	1,58	S
$G_1, G_2 = A, 8$	64,38%	50,37%	1,28	S
$G_1, G_2 = A, 7$	40,84%	45,03%	0,91	C
$G_1, G_2 = A, 6$	28,84%	42,67%	0,68	C
$G_1, G_2 = A, 5$	22,84%	42,50%	0,54	C

Tabella 4.24: $B_1 = 9$

	$P_{stot}(W=1\|G=k)$	$P_{ctot}(W=1\|G=k)$	Rapporto	Strategia
$G_1, G_2 = A, 9$	71,75%	45,76%	1,57	S
$G_1, G_2 = A, 8$	49,07%	40,65%	1,21	S
$G_1, G_2 = A, 7$	37,92%	38,23%	0,99	C
$G_1, G_2 = A, 6$	26,78%	35,68%	0,75	C
$G_1, G_2 = A, 5$	21,21%	34,97%	0,61	C

Tabella 4.25: $B_1 = 10$

	$P_{stot}(W=1\|G=k)$	$P_{ctot}(W=1\|G=k)$	Rapporto	Strategia
$G_1, G_2 = A, 9$	57,29%	37,12%	1,54	S
$G_1, G_2 = A, 8$	44,22%	34,19%	1,29	S
$G_1, G_2 = A, 7$	31,14%	31,25%	1,00	C
$G_1, G_2 = A, 6$	18,06%	28,30%	0,64	C
$G_1, G_2 = A, 5$	11,52%	28,64%	0,40	C

Tabella 4.26: $B_1 = A$

Considerazioni sul mazzo infinito

Per fare questi calcoli abbiamo utilizzato un foglio di calcolo excel e le diverse probabilità sono state calcolate non più considerando un mazzo infinito ma tenendo conto delle tre carte che il giocatore può vedere ed inoltre il foglio excel è stato strutturato in modo tale che inserendo il numero di mazzi utilizzati esse si modifichino automaticamente.
Così facendo abbiamo ottenuto un dato ulteriore che mostra come l'approssimazione del mazzo infinito risulti essere buona soprattutto se si prende in analisi il gioco con 6 mazzi.
Riporto di seguito alcuni esempi che mostrano le variazioni di risultati nei casi: 1 mazzo, 2 mazzi, 4 mazzi e 6 mazzi; scegliamo i casi $B_1 = A$ e $G_1, G_2 = A, \{8, 6, 3, A\}$ che sono significativi in quanto il giocatore vede un maggior numero di carte ed inoltre due/tre di queste sono degli assi.

	$P_c(W = 1 \mid G = k)$	$P_c(W = 0 \mid G = k)$	Errore
$mazzoinfinito$	29,69%	57,43%	
$1mazzo$	28,94%	57,94%	0,75%/-0,51%
$2mazzi$	29,33%	57,68%	0,36%/-0,25%
$4mazzi$	29,51%	57,55%	0,18%/-0,12%
$6mazzi$	29,57%	57,51%	0,12%/-0,08%

Tabella 4.27: $B_1 = A \quad G_1, G_2 = A, 8$

	$P_c(W=1\|G=k)$	$P_c(W=0\|G=k)$	Errore
$mazzoinfinito$	23,82%	63,32%	
$1mazzo$	23,81%	63,24%	0,01%/0,08%
$2mazzi$	23,81%	63,28%	0,01%/0,04%
$4mazzi$	23,82%	63,30%	0%/0,02%
$6mazzi$	23,82%	63,31%	0%/0,01%

Tabella 4.28: $B_1 = A \quad G_1, G_2 = A, 6$

	$P_c(W=1\|G=k)$	$P_c(W=0\|G=k)$	Errore
$mazzoinfinito$	27,65%	60,01%	
$1mazzo$	27,70%	59,97%	-0,05%/0,04%
$2mazzi$	27,68%	59,98%	-0,03%/0,03%
$4mazzi$	27,67%	59,98%	-0,02%/0,03%
$6mazzi$	27,67%	59,98%	-0,02%/0,03%

Tabella 4.29: $B_1 = A \quad G_1, G_2 = A, 3$

	$P_c(W=1\|G=k)$	$P_c(W=0\|G=k)$	Errore
$mazzoinfinito$	29,93%	56,76%	
$1mazzo$	29,92%	56,77%	0,01%/0,01%
$2mazzi$	29,93%	56,75%	0%/0,01%
$4mazzi$	29,94%	56,75%	-0,01%/0,01%
$6mazzi$	29,94%	56,74%	-0,01%/0,02%

Tabella 4.30: $B_1 = A \quad G_1, G_2 = A, A$

4.7 Raddoppio

L'altra scelta a cui si troverà di fronte il giocatore è quella di decidere se raddoppiare quando ciò è permesso.
Andiamo quindi ad operare un confronto tra le probabilità ottenute nel paragrafo precedente (ovviamente si prenderà in considerazione la scelta più conveniente tra stare e chiedere carta) e le probabilità dei possibili esiti nel caso si scelga di raddoppiare, tenendo quindi conto che la puntata raddoppia e il giocatore riceverà una e una sola carta.

Definizione 4.7.1. *Fissato $B_1 = m$, indicando con G il punteggio totale del giocatore e con W la variabile risultato, definiamo*

$$P_t(W|G=k) = \begin{cases} P_s(W|G=k) \\ se \quad P_{stot}(W=1|G=k) > P_{ctot}(W=1|G=k)\} \\ P_c(W|G=k) \\ se \quad P_{stot}(W=1|G=k) < P_{ctot}(W=1|G=k)\} \end{cases} \tag{4.5}$$

Calcoliamo poi la distribuzione di probabilità di W nel caso del raddoppio nel modo seguente:
Sia $x \in E$ la prima carta pescata

$$P_r(W=0|G=k) = \sum_{x\in E}(P_s(W=0|G=k+x) * P(x))$$

$$P_r(W=\frac{1}{2}|G=k) = \sum_{x\in E}(P_s(W=\frac{1}{2}|G=k+x) * P(x))$$

$$P_r(W=1|G=k) = 1 - P_r(W=0|G=k) - P_r(W=\frac{1}{2}|G=k)$$

A questo punto dobbiamo confrontare le due distribuzioni di probabilità per valutare la scelta più conveniente e per farlo abbiamo deciso di calcolare la differenza tra probabilità di vittoria e di perdita in caso di raddoppio, tale differenza va moltiplicata per due perchè in questo caso il giocatore vincerà due volte la posta giocata. La differenza "doppia" così ottenuta va confrontata con la differenza tra probabilità di vittoria e di perdita in caso si scelga di non raddoppiare.

Definizione 4.7.2. *Definiamo*

$$D_r = (P_r(W = 1|G = k) - P_r(W = 0|G = k)) * 2$$

e

$$D_t = P_t(W = 1|G = k) - P_t(W = 0|G = k)$$

Raddoppio se

$$D_r > D_t$$

Vediamo i risultati ottenuti:

4.7.1 Mani hard

	D_r	D_t	Strategia
$G = 11$	47,06%	24,01%	DD
$G = 10$	35,89%	18,39%	DD
$G = 9$	5,93%	7,41%	Carta
$G = 8$	-20,45%	-2,22%	Carta

Tabella 4.31: $B_1 = 2$, DD=raddoppio

	D_r	D_t	Strategia
$G = 11$	51,70%	26,20%	DD
$G = 10$	40,85%	20,76%	DD
$G = 9$	11,84%	10,23%	DD
$G = 8$	-14,01%	0,74%	Carta

Tabella 4.32: $B_1 = 3$, DD=raddoppio

	D_r	D_t	Strategia
$G = 11$	56,60%	28,46%	DD
$G = 10$	46,09%	23,19%	DD
$G = 9$	18,04%	13,02%	DD
$G = 8$	-6,93%	3,98%	Carta

Tabella 4.33: $B_1 = 4$, DD=raddoppio

	D_r	D_t	Strategia
$G = 11$	61,47%	30,89%	DD
$G = 10$	51,25%	25,76%	DD
$G = 9$	24,17%	15,92%	DD
$G = 8$	0,07%	7,18%	Carta

Tabella 4.34: $B_1 = 5$, DD=raddoppio

	D_r	D_t	Strategia
$G = 11$	66,74%	33,47%	DD
$G = 10$	57,56%	28,92%	DD
$G = 9$	31,57%	19,72%	DD
$G = 8$	8,56%	11,60%	Carta

Tabella 4.35: $B_1 = 6$, DD=raddoppio

	D_r	D_t	Strategia
$G = 11$	46,29%	29,13%	DD
$G = 10$	39,24%	25,76%	DD
$G = 9$	10,43%	17,32%	Carta
$G = 8$	-20,59%	8,32%	Carta

Tabella 4.36: $B_1 = 7$, DD=raddoppio

	D_r	D_t	Strategia
$G = 11$	35,07%	22,88%	DD
$G = 10$	28,66%	19,82%	DD
$G = 9$	-4,46%	9,98%	Carta
$G = 8$	-54,12%	-5,88%	Carta

Tabella 4.37: $B_1 = 8$, DD=raddoppio

	D_r	D_t	Strategia
$G = 11$	22,78%	15,67%	DD
$G = 10$	14,43%	11,63%	DD
$G = 9$	-37,20%	-5,15%	Carta
$G = 8$	-71,85%	-20,93%	Carta

Tabella 4.38: $B_1 = 9$, DD=raddoppio

	D_r	D_t	Strategia
$G = 11$	5,94%	5,77%	DD
$G = 10$	-15,00%	-4,58%	Carta
$G = 9$	-51,36%	-21,35%	Carta
$G = 8$	-77,20%	-30,15%	Carta

Tabella 4.39: $B_1 = 10$, DD=raddoppio

	D_r	D_t	Strategia
$G = 11$	-35,09%	-10,20%	Carta
$G = 10$	-57,81%	-21,97%	Carta
$G = 9$	-91,54%	-33,59%	Carta
$G = 8$	-117,70%	-42,39%	Carta

Tabella 4.40: $B_1 = A$, DD=raddoppio

4.7.2 Mani soft

	D_r	D_t	Strategia
$G = A, 7$	11,61%	12,17%	Sto
$G = A, 6$	-0,86%	-0,12%	Carta
$G = A, 5$	-7,78%	-2,45%	Carta
$G = A, 4$	-7,19%	0,12%	Carta
$G = A, 3$	-6,75%	2,23%	Carta
$G = A, 2$	-6,66%	4,66%	Carta

Tabella 4.41: $B_1 = 2$, DD=raddoppio

	D_r	D_t	Strategia
$G = A, 7$	17,34%	14,82%	DD
$G = A, 6$	5,29%	3,66%	DD
$G = A, 5$	-1,40%	0,56%	Carta
$G = A, 4$	-0,83%	-0,35%	Carta
$G = A, 3$	1,29%	5,13%	Carta
$G = A, 2$	1,38%	7,50%	Carta

Tabella 4.42: $B_1 = 3$, DD=raddoppio

	D_r	D_t	Strategia
$G = A, 7$	23,36%	17,59%	DD
$G = A, 6$	11,73%	6,58%	DD
$G = A, 5$	5,26%	3,56%	DD
$G = A, 4$	5,81%	5,72%	DD
$G = A, 3$	6,22%	7,99%	Carta
$G = A, 2$	6,31%	10,28%	Carta

Tabella 4.43: $B_1 = 4$, DD=raddoppio

	D_r	D_t	Strategia
$G = A, 7$	29,20%	19,96%	DD
$G = A, 6$	18,11%	10,13%	DD
$G = A, 5$	12,04%	6,89%	DD
$G = A, 4$	12,57%	8,95%	DD
$G = A, 3$	12,96%	11,12%	DD
$G = A, 2$	13,04%	13,35%	Carta

Tabella 4.44: $B_1 = 5$, DD=raddoppio

	D_r	D_t	Strategia
$G = A, 7$	37,34%	28,34%	DD
$G = A, 6$	25,45%	11,56%	DD
$G = A, 5$	17,37%	9,60%	DD
$G = A, 4$	17,92%	11,34%	DD
$G = A, 3$	18,34%	13,59%	DD
$G = A, 2$	18,45%	15,90%	DD

Tabella 4.45: $B_1 = 6$, DD=raddoppio

	D_r	D_t	Strategia
$G = A, 7$	21,62%	39,96%	Sto
$G = A, 6$	-1,74%	6,83%	Carta
$G = A, 5$	-19,35%	-1,88%	Carta
$G = A, 4$	-18,59%	3,15%	Carta
$G = A, 3$	-17,88%	6,13%	Carta
$G = A, 2$	-17,64%	10,90%	Carta

Tabella 4.46: $B_1 = 7$, DD=raddoppio

4.8 Dividere la coppia

L'ultima scelta fondamentale che rimane da fare al giocatore è se "splittare" o meno qualora le due carte ricevute inizialmente siano di egual valore. Anche qui confrontiamo i risultati precedentemente ottenuti con le probabilità di vittoria in caso di split come segue:

Definizione 4.8.1. *Fissato $B_1 = m$, se G è il punteggio totale del giocatore e W l'evento risultato, definiamo*

$$P_f(W|G=k) = \begin{cases} P_t(W|G=k) \\ se \quad D_r(W=1|G=k) < D_t(W=1|G=k)\} \\ P_r(W|G=k) \\ se \quad D_r(W=1|G=k) > D_t(W=1|G=k)\} \end{cases} \tag{4.6}$$

Calcoliamo poi la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria W in caso di split; poichè si giocheranno due partite differenti considero due mani separatamente e per ciascuna mano calcolo:
sia $x \in E$ la prima carta pescata

$$P_{sp1}(W=0|G=k) = P_{sp2}(W=0|G=k) = \sum_{x \in E}(P_f(W=0|G=k+x)*P(x))$$

$$P_{sp1}(W=1|G=k) = P_{sp2}(W=1|G=k) = \sum_{x \in E}(P_f(W=1|G=k+x)*P(x))$$

$$P_{sp1}(W=\frac{1}{2}|G=k) = P_{sp2}(W=\frac{1}{2}|G=k) = \sum_{x \in E}(P_f(W=\frac{1}{2}|G=k+x)*P(x)).$$

Definizione 4.8.2. *Definiamo la variabile aleatoria V che potrà assumere i seguenti valori:*

- $V = 2$ *se si vincono entrambe le mani*
- $V = 1$ *se una mano è vinta e l'altra pareggiata*
- $V = 0$ *se una mano è vinta e l'altra persa o se si pareggiano entrambe*
- $V = -1$ *se una mano è persa e l'altra pareggiata*

- $V = -2$ *se si perdono entrambe le mani*

La distribuzione di probabilità di V condizionata al valore di G è calcolata nel modo seguente:

- $P_{sp}(V = 2|G = k) = P_{sp}(W = 1|G = k)^2$
- $P_{sp}(V = 1|G = k) = (P_{sp}(W = 1|G = k) * P_{sp}(W = \frac{1}{2}|G = k)) * 2$
- $P_{sp}(V = 0|G = k) =$
  $= P_{sp}(W = \frac{1}{2}|G = k)^2 + (P_{sp}(W = 1|G = k) * P_{sp}(W = 0|G = k)) * 2$
- $P_{sp}(V = -1|G = k) = (P_{sp}(W = 0|G = k) * P_{sp}(W = \frac{1}{2}|G = k)) * 2$
- $P_{sp}(V = -2|G = k) = P_{sp}(W = 0|G = k)^2$

A questo punto possiamo confrontare le due distribuzioni di probabilità per valutare la scelta più conveniente:

Definizione 4.8.3. *Definiamo*

- $R_{sp} = 2 * P_{sp}(V = 2|G = k) + 1 * P_{sp}(V = 1|G = k) + 0 * P_{sp}(V = 0|G = k) - 1 * P_{sp}(V = -1|G = k) - 2 * P_{sp}(V = -2|G = k)$
- $R_f = P_f(W = 1|G = k) - P_f(W = 0|G = k)$

dove i vari coefficienti di R_{sp} sono stati scelti in base al numero di poste incassate o perse dal giocatore nel caso si verifichi un determinato evento $V = k$. Il giocatore dovrà decidere di splittare nei casi in cui

$$R_{sp} > R_f$$

Vediamo di seguito i risultati ottenuti:

	R_{sp}	R_f	Strategia
$B = 2$	-15,15%	-11,48%	Carta
$B = 3$	-9,87%	-8,23%	Carta
$B = 4$	-4,37%	-4,95%	Split
$B = 5$	2,84%	-1,27%	Split
$B = 6$	7,81%	1,03%	Split
$B = 7$	-5,66%	-9,09%	Split
$B = 8$	-20,81%	-15,86%	Carta
$B = 9$	-38,10%	-23,94%	Carta
$B = 10$	-57,99%	-33,35%	Carta
$B = A$	-93,34%	-50,38%	Carta

Tabella 4.47: $G_1, G_2 = 2, 2$

	R_{sp}	R_f	Strategia
$B = 2$	-20,08%	-14,10%	Carta
$B = 3$	-13,72%	-10,69%	Carta
$B = 4$	-7,21%	-7,30%	Split
$B = 5$	0,11%	-3,48%	Split
$B = 6$	4,93%	-1,32%	Split
$B = 7$	-11,74%	-15,13%	Split
$B = 8$	-26,36%	-21,62%	Carta
$B = 9$	-42,81%	-29,11%	Carta
$B = 10$	-62,34%	-37,89%	Carta
$B = A$	-96,36%	-53,04%	Carta

Tabella 4.48: $G_1, G_2 = 3, 3$

	R_{sp}	R_f	Strategia
$B = 2$	-23,10%	-2,22%	Carta
$B = 3$	-16,65%	0,74%	Carta
$B = 4$	-10,07%	-3,98%	Carta
$B = 5$	-2,41%	7,18%	Carta
$B = 6$	1,96%	11,60%	Carta
$B = 7$	-18,01%	8,32%	Carta
$B = 8$	-31,85%	-5,88%	Carta
$B = 9$	-47,95%	-20,93%	Carta
$B = 10$	-66,79%	-30,15%	Carta
$B = A$	-100,79%	-44,75%	Carta

Tabella 4.49: $G_1, G_2 = 4, 4$

	R_{sp}	R_f	Strategia
$B = 2$	-25,95%	35,89%	Raddoppio
$B = 3$	-19,41%	40,85%	Raddoppio
$B = 4$	-12,70%	46,09%	Raddoppio
$B = 5$	-5,21%	51,25%	Raddoppio
$B = 6$	-0,33%	57,56%	Raddoppio
$B = 7$	-24,08%	39,24%	Raddoppio
$B = 8$	-37,73%	28,66%	Raddoppio
$B = 9$	-53,38%	14,43%	Raddoppio
$B = 10$	-71,39%	-4,58%	Carta
$B = A$	-102,84%	-25,33%	Carta

Tabella 4.50: $G_1, G_2 = 5, 5$

	R_{sp}	R_f	Strategia
$B = 2$	-28,18%	-25,33%	Carta
$B = 3$	-21,40%	-23,36%	Split
$B = 4$	-14,57%	-21,11%	Split
$B = 5$	-6,60%	-16,72%	Split
$B = 6$	-2,52%	-15,37%	Split
$B = 7$	-30,13%	-21,57%	Carta
$B = 8$	-43,20%	-27,48%	Carta
$B = 9$	-58,12%	-34,35%	Carta
$B = 10$	-75,79%	-41,83%	Carta
$B = A$	-106,09%	-55,22%	Carta

Tabella 4.51: $G_1, G_2 = 6, 6$

	R_{sp}	R_f	Strategia
$B = 2$	-21,79%	-29,28%	Split
$B = 3$	-15,25%	-25,23%	Split
$B = 4$	-8,54%	-21,11%	Split
$B = 5$	-1,39%	-16,72%	Split
$B = 6$	5,89%	-15,37%	Split
$B = 7$	-13,83%	-32,50%	Split
$B = 8$	-42,13%	-36,96%	Carta
$B = 9$	-56,92%	-42,88%	Carta
$B = 10$	-72,77%	-49,87%	Carta
$B = A$	-106,74%	-63,60%	Carta

Tabella 4.52: $G_1, G_2 = 7, 7$

	R_{sp}	R_f	Strategia
$B = 2$	-4,31%	-29,28%	Split
$B = 3$	1,62%	-25,23%	Split
$B = 4$	7,80%	-21,11%	Split
$B = 5$	14,21%	-16,72%	Split
$B = 6$	23,03%	-15,37%	Split
$B = 7$	16,35%	-41,29%	Split
$B = 8$	-12,01%	-45,67%	Split
$B = 9$	-42,00%	-50,77%	Split
$B = 10$	-60,25%	-56,79%	Carta
$B = A$	-89,29%	-66,58%	Carta

Tabella 4.53: $G_1, G_2 = 8, 8$

	R_{sp}	R_f	Strategia
$B = 2$	14,91%	12,17%	Split
$B = 3$	20,24%	14,79%	Split
$B = 4$	25,82%	17,59%	Split
$B = 5$	31,63%	19,96%	Split
$B = 6$	39,22%	28,34%	Split
$B = 7$	34,27%	39,96%	Sto
$B = 8$	19,65%	10,60%	Split
$B = 9$	-10,39%	-18,32%	Split
$B = 10$	-42,57%	-24,15%	Sto
$B = A$	-71,08%	-37,72%	Sto

Tabella 4.54: $G_1, G_2 = 9, 9$

	R_{sp}	R_f	Strategia
$B = 2$	47,78%	64,00%	Sto
$B = 3$	52,61%	65,03%	Sto
$B = 4$	57,63%	66,11%	Sto
$B = 5$	62,94%	67,04%	Sto
$B = 6$	69,31%	70,40%	Sto
$B = 7$	62,44%	77,32%	Sto
$B = 8$	50,20%	79,18%	Sto
$B = 9$	33,23%	75,84%	Sto
$B = 10$	-1,27%	43,50%	Sto
$B = A$	-40,85%	14,61%	Sto

Tabella 4.55: $G_1, G_2 = 10, 10$

	R_{sp}	R_f	Strategia
$B = 2$	128,55%	8,19%	Split
$B = 3$	132,48%	10,43%	Split
$B = 4$	136,27%	12,71%	Split
$B = 5$	141,16%	15,70%	Split
$B = 6$	146,84%	18,38%	Split
$B = 7$	146,02%	16,26%	Split
$B = 8$	132,66%	9,19%	Split
$B = 9$	114,23%	-0,32%	Split
$B = 10$	74,78%	-15,62%	Split
$B = A$	25,41%	-32,40%	Split

Tabella 4.56: $G_1, G_2 = A, A$

4.9 Confronti e considerazioni

Al termine di questa lunga disamina, possiamo senz'altro osservare che i risultati trovati concordano quasi sempre con la strategia che si voleva dimostrare.
In particolare vediamo che, rispetto alla strategia proposta nelle fonti che abbiamo considerato:

- **chiedere carta o stare:** i risultati ottenuti coincidono in tutti i casi;
- **raddoppio:** si presenta un unico caso dubbio in cui la strategia risultante non coincide con quella già proposta, ovvero quando il giocatore ha $A, 2$ contro un 5 del banco, la strategia precedente infatti consiglia di raddoppiare, mentre i risultati qui trovati non lo consigliano. La differenza di percentuale $D_t - D_r = 0,31\%$ è piuttosto ridotta, la divergenza tra fonti e risultati potrebbe quindi essere motivata dal margine di errore dovuto all'approssimazione del mazzo infinito;
- **split:** vi è il caso $G = 8,8$ contro $B_1 = A$ che non corrisponde, la strategia infatti consiglierebbe di dividere gli otto mentre secondo i miei calcoli il giocatore deve chiedere carta. In questo caso la differenza di percentuale non è trascurabile, essendo pari a circa il 23%.

É importante notare che, nonostante le metodologie matematiche e probabilistiche qui applicate permettano di definire una strategia valida in ogni situazione, è comunque necessario operare delle distinzioni tra i diversi casi di gioco. Vi sono delle mani in cui la differenza di percentuale tra le scelte possibili è talmente bassa da risultare quasi irrilevante; tali casi sono da considerarsi dei casi limite (indicati in tabella con il carattere grassetto $\boldsymbol{S}$) e quando si presentano la scelta del giocatore, volendo, può essere presa liberamente (non dobbiamo dimenticare che stiamo giocando e che anche le sensazioni emotive del giocatore rivestono un ruolo importante). Si è stabilito di far rientrare nei casi limite tutti questi casi in cui la differenza di precentuale tra le due opzioni è inferiore all'uno per cento.

Al contrario in altri casi la differenza di percentuale tra le scelte possibili è molto grande, in queste mani il giocatore che operasse una scelta contraria a quella suggerita dalla matematica facendosi condizionare da considerazioni squisitamente emotive (numeri porta fortuna, etc.) rischierebbe di ottenere dei risultati molto sfavorevoli.
Come abbiamo visto quindi il BlackJack è un gioco che può essere interamente basato sulla statistica: ogni decisione diversa da quelle proposte in tabella non otterrà altro risultato che diminuire le probabilità di vittoria del giocatore, il cui scopo deve essere invece quello di massimizzare, sul lungo termine, le proprie chance; sarebbe quindi illogico non seguire le indicazioni fornite dal calcolo delle probabilità per seguire le proprie sensazioni o intuizioni. Non vi è dunque alcuno spazio per la fantasia, non è un gioco creativo, anzi è un gioco per così dire "risolto", chiuso nella regola, ma anche complesso ed attraente.
E' altresì importante ribadire il concetto che, seguendo questa tabella, il giocatore non si assicurerà una vittoria certa, anzi è matematicamente certo che più a lungo un giocatore rischierà i propri soldi in un casinò, più sarà facile che li perderà. Seguendo le indicazioni fornite dalla strategia proposta, però, il giocatore potrà avere la possibilità di vincere se saprà ritirasi al momento giusto e ovviamente sfruttando anche un pizzico di fortuna. Per concludere vorrei dire che in un certo senso il Blackjack può essere considerato un gioco per matematici, perché tutti possono imparare a memoria una tabella, ma una buona conoscenza del calcolo delle probabilità potrà di certo portare un ulteriore vantaggio al giocatore, perché a differenza degli altri giochi da casinò in cui la memoria non conta, nel Blackjack le carte uscite nelle mani precedenti determinano una variazione, che può diventare anche sensibile, delle probabilità in favore del giocatore, e questa è un'arma molto potente che può permettere di ribaltare le condizioni iniziali e di avera addirittura un vantaggio nei confronti del casinò.

Riporto di seguito una tabella riassuntiva della strategia trovata:

	B=2	**B=3**	**B=4**	**B=5**	**B=6**	**B=7**	**B=8**	**B=9**	**B=10**	**B=A**
G=7/-	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
G=8	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
G=9	C	DD	DD	DD	DD	C	C	C	C	C
G=10	DD	DD	DD	DD	DD	DD	DD	DD	C	C
G=11	DD	DD	DD	DD	DD	DD	DD	DD	***DD***	C
G=12	C	***C***	***S***	S	***S***	C	C	C	C	C
G=13	***S***	S	S	S	S	C	C	C	C	C
G=14	S	S	S	S	S	C	C	C	C	C
G=15	S	S	S	S	S	C	C	C	C	C
G=16	S	S	S	S	S	C	C	C	***C***	C
G=17/+	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
G=A,2	C	C	C	***C***	DD	C	C	C	C	C
G=A,3	C	C	C	DD	DD	C	C	C	C	C
G=A,4	C	***C***	***DD***	DD	DD	C	C	C	C	C
G=A,5	C	C	DD	DD	DD	C	C	C	C	C
G=A,6	***C***	DD	DD	DD	DD	C	C	C	C	C
G=A,7	***S***	DD	DD	DD	DD	S	S	C	***C***	***C***
G=A,8	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
G=A,9	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
G=2,2	C	C	***Sp***	Sp	Sp	Sp	C	C	C	C
G=3,3	C	C	***Sp***	Sp	Sp	Sp	C	C	C	C
G=4,4	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
G=5,5	DD	DD	DD	DD	DD	DD	DD	DD	C	C
G=6,6	C	Sp	Sp	Sp	Sp	C	C	C	C	C
G=7,7	Sp	Sp	Sp	Sp	Sp	Sp	C	C	C	C
G=8,8	Sp	Sp	Sp	Sp	Sp	Sp	Sp	Sp	C	C
G=9,9	Sp	Sp	Sp	Sp	Sp	S	Sp	Sp	S	S
G=10,10	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
G=A,A	Sp	Sp	Sp	Sp	Sp	Sp	Sp	Sp	Sp	Sp

Tabella 4.57: $G_1, G_2 = 10, 10$

Bibliografia

[1] *Probabilità e giochi d'azzardo. Perchè il banco non perde mai.*
a cura di Domenico Costantini e Paola monari,
MUZZIO SCIENZE

[2] *Costumi di Romagna, il gioco d'azzardo attraverso i secoli.*
di Leonida Costa.

[3] *Il giocatore consapevole, giochi di casinò d'azzardo e di denaro.*
a cura di Dario de Toffoli. STAMPA ALTERNATIVA/NUOVI EQUILIBRI

[4] *Beat the dealer. A winning strategy for the game of twenty-one*
di Edward O. Thorp

[5] *Probabilità, variabili casuali e processi stocastici.*
di Hwei Hsu, 1998, MCGRAW-HILL editore.

[6] *Elementi di probabilità e statistica.* di F. Biagini, M. Campanino, 2006, Springer.

[7] *Probabilità e statistica.*
di Murray R.Spiegel, 1994, MCGRAW-HILL editore.

[8] *Teoria della Probabilità.*
di C.M.Monti e G.Pierobon, 2000, Decibel e Zanichelli editore.

[9] *The basics of Blackjack.*
di Allen, J.Edward 1984, Cardoza Publishing.

[10] *Winning casino Blackjack for non-counter.*
di Avery Cardoza, 1981-85, Cardoza Publishing.

[11] *Betting on Blackjack.*
di Frits Dunki-Jacobs, 2001, Adams Media.