Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

Scuola di Scienze
Corso di Laurea in Fisica

Il modello di Kaluza: unificazione tra gravità ed elettromagnetismo

Relatore:
Prof. Roberto Balbinot

Presentata da:
Luca Vandi

Sessione II
Anno Accademico 2013/2014

Indice

Abstract

Una teoria di unificazione ha il notevole compito di fornire un modello in grado di unificare le forze fondamentali della natura in una sola. Storicamente uno dei primi tentativi è rappresentato dal modello di Kaluza, che propone una formulazione unificata di gravità ed elettromagnetismo. In 4 dimensioni il campo gravitazionale e il campo elettromagnetico sono entità nettamente separate. Tale dualismo può essere superato estendendo la teoria della Relatività Generale ad uno spaziotempo a 5 dimensioni. Se alle consuete 4 si aggiunge una quinta dimensione spaziale, allora si dimostra che la gravità e l'elettromagnetismo possono essere visti come la manifestazione di un unico campo di forza, che è interpretabile in termini della geometria dello spaziotempo a 5 dimensioni. Nonostante i suoi intrinseci limiti, il modello di Kaluza rappresenta comunque un punto di partenza per molte altre teorie di campo unificato più moderne e a più di 5 dimensioni.

L'obiettivo è di sviluppare le linee fondamentali del modello di Kaluza. Preliminarmente si riportano i risultati principali dell'elettromagnetismo e della Relatività Generale, dato che il modello si formula a partire da questi. Si stabilisce la condizione di cilindro, secondo cui le quantità fisiche non subiscono variazioni nella quinta dimensione. Si ipotizza un ansatz per il tensore metrico 5D e si scrivono le equazioni di campo unitario e della geodetica, come estensioni a 5 dimensioni di quelle in 4. Si dimostra che il campo unitario in 4 dimensioni si separa nel campo scalare costante, nel campo elettromagnetico e nel campo gravitazionale. Le componenti quadridimensionali della geodetica 5D riconducono a quella 4D e alle leggi del moto 4D in presenza dei campi gravitazionale ed elettromagnetico. Inoltre si interpreta la carica elettrica come la quinta componente della velocità covariante 5D.

Capitolo 1

Introduzione

Uno dei più grandi obiettivi della fisica moderna è quello di descrivere le quattro forze fondamentali della natura e le particelle elementari attraverso una teoria di campo unificato.

Nel 1864 Maxwell fece la prima grande sintesi tra elettricità e magnetismo introducendo il campo elettromagnetico.

Nel 1905 con la teoria della Relatività Ristretta Einstein unificò spazio e tempo in un'unica varietà quadridimensionale, lo spaziotempo.

Nel 1915 sempre Einstein estese i risultati della teoria della Relatività Ristretta con quella della Relatività Generale, mostrando che *gli effetti della forza di gravità sono equivalentemente interpretabili come effetti della geometria dello spaziotempo. Una particella soggetta solo alla forza di gravità è in caduta libera e il suo moto segue un determinato percorso. La teoria della Relatività Generale insegna che tale percorso è identificabile con la geodetica, data una certa curvatura dello spaziotempo. Tutto ciò è codificato nell'equazione di campo di Einstein, infatti, da essa si può ricavare l'equazione del moto della particella, così come l'equazione del moto della sorgente stessa del campo gravitazionale. L'equazione di campo di Einstein in ultima analisi si costruisce con il tensore metrico che esprime la curvatura dello spaziotempo e il tensore energia-impulso che esprime le sorgenti del campo gravitazionale.*

Nel 1921 un tentativo di unificazione dell'elettromagnetismo con la gravità è stato fatto da Kaluza, estendendo la Relatività Generale a 5 dimensioni. Se l'estensione del modello di Kaluza funziona, si devono poter identificare gli effetti di un opportuno campo unificato, sul moto nello spaziotempo 5D di una particella carica, con la tendenza della stessa a seguire la geodetica dettata dalla curvatura dello spaziotempo 5D; alla stessa maniera di quanto si è fatto per il campo gravitazionale nella Relatività Generale. Ciò conduce alla costruzione di un opportuno tensore metrico 5D, che contiene anche termini elettromagnetici. In analogia con la Relatività Generale, tale tensore metrico dovrà descrivere la geometria indotta sullo spazio tempo 5D dal presunto campo unificato. A questo punto dall'equazione di campo, ottenuta estendendo quella di Einstein a 5 dimen-

sioni, se descrive proprio un campo unificato, si dovrebbero poter ricavare le equazioni di campo elettromagnetico e gravitazionale in 4D. Analogamente dalla geodetica in 5D, ottenuta estendendo l'equazione della geodetica da 4 a 5 dimensioni, se descrive proprio il moto di una particella in uno spaziotempo 5D modulato dal campo unificato, si dovrebbero poter ottenere le equazioni del moto di una particella carica in un campo elettromagnetico e gravitazionale in 4D.

Il percorso seguito per arrivare a sviluppare il modello di Kaluza è stato il seguente.

Sono state innanzitutto riportate alcune delle principali equazioni per descrivere una particella carica in un campo elettromagnetico in 4 dimensioni. Definendo il quadrivettore potenziale e il tensore metrico di Minkowski, si è costruito il tensore campo elettromagnetico, indispensabile per dare una forma covariante alle equazioni dell'elettromagnetismo. Con tale tensore e il quadrivettore corrente, si scrivono le equazioni di Maxwell in forma covariante. Definendo la quadrivelocità si possono scrivere le equazioni del moto in forma covariante. Infine si è riportato il tensore stress-energia di un campo elettromagnetico, costruito tramite il tensore di campo elettromagnetico. Tutte queste riscritture hanno permesso di avere le equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo in forma invariante per le trasformazioni di Lorentz. In questo modo si sono ottenute all'interno dell'impianto teorico della Relatività Ristretta, le equazioni dell'elettromagnetismo. Lo scopo è di dotarsi di un metro per stabilire la bontà del modello di Kaluza: se l'elettromagnetismo è compatibile con la relatività e il modello di Kaluza è un'estensione della relatività, allora le equazioni sviluppate nel modello devono essere compatibili con quelle dell'elettromagnetismo.

Si è fatto un breve accenno ai concetti fondanti e fondamentali della teoria della Relatività Generale. Tra questi, il Principio di Relatività Generale e il Principio di Covarianza Generale, garantiscono che le leggi della fisica siano le stesse per tutti gli osservatori e che pure il formalismo si debba adeguare a questa universalità, adottando la forma tensoriale covariante. In pratica, in tutte le equazioni della fisica, si deve sostituire il tensore metrico di Minkowski corrispondente ad una varietà spaziotempo piatta con uno corrispondente ad una varietà spaziotempo in generale curva, e la derivata parziale con quella covariante. Muniti di questi strumenti, si sono potute scrivere finalmente, nella maniera più generale possibile, le equazioni dell'elettromagnetismo. Si è riportata l'equazione di campo di Einstein, la quale servirà da punto di partenza per la generalizzazione della Relatività Generale a 5 dimensioni.

In seguito si sono presentate le ipotesi iniziali per costruire il modello di Kaluza: si è enunciata la condizione di cilindro, secondo cui la quinta dimensione non influisce sugli eventi dello spaziotempo quadridimensionale e si è costruito l'ansatz per il tensore metrico a 5 dimensioni. É doveroso rilevare che, nell'ansatz del tensore metrico 5D, compare un termine che si può identificare in 4 dimensioni con un campo scalare. Ottenuto il tensore metrico 5D, si sono scritte le espressioni dei simboli di Christoffel e dei tensori di Ricci necessari per la costruzione delle equazioni di campo 5D.

A questo punto sono state generalizzate le equazioni di campo di Einstein a 5 dimensioni. In particolare si è analizzata la condizione di vuoto in 5D, dalla quale si sono ottenute le equazioni 4D del campo scalare, del campo elettromagnetico e del campo gravitazionale. Si sono confrontate con quelle derivanti direttamente dall'impianto teorico dell'elettromagnetismo e della teoria della Relatività Generale in 4D.

Si è generalizzata a 5 dimensioni anche l'equazione della geodetica e se ne sono analizzate le componenti relative allo spaziotempo 4D. Si è studiato anche il significato che si può associare alla quinta componente della velocità covariante 5D.

Capitolo 2

Elettromagnetismo in forma covariante

L'elettromagnetismo è compatibile con la teoria della Relatività nel senso che le equazioni dell'elettromagnetismo possono essere scritte in forma covariante. Dire che le equazioni sono covarianti, vuol dire che sono invarianti in forma per le trasformazioni di Lorentz, da un sistema di riferimento inerziale ad un altro.

2.1 Principali equazioni dell'elettromagnetismo.

Innanzitutto si ricordino le principali equazioni che servono per sviluppare l'impianto teorico dell'elettromagnetismo.

Una particella puntiforme con carica q , che si muove con velocità $\overrightarrow{v}$, in una regione dello spazio dove sono presenti un campo elettrico $\overrightarrow{E}$ e un campo induzione magnetica $\overrightarrow{B}$, è soggetta alla forza di Lorentz

$$\overrightarrow{F} = q(\overrightarrow{E} + \frac{\overrightarrow{v}}{c} \times \overrightarrow{B}) \tag{2.1.1}$$

Quindi l'equazione del moto della particella carica è

$$\frac{d\overrightarrow{p}}{dt} = q(\overrightarrow{E} + \frac{\overrightarrow{v}}{c} \times \overrightarrow{B}) \tag{2.1.2}$$

e la variazione dell'energia cinetica rispetto al tempo è data da

$$\frac{d\overrightarrow{K}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{p}}{dt}\overrightarrow{v} = q\overrightarrow{E}\,\overrightarrow{v} \tag{2.1.3}$$

Le equazioni di Maxwell di un campo elettromagnetico nel vuoto sono

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2.1.4}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \tag{2.1.5}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \tag{2.1.6}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} = 0 \tag{2.1.7}$$

doveρ è la densità di carica e $\overrightarrow{J}$ è il vettore densità di corrente.

Le densità di energia immagazzinate in un campo elettrico e in un campo magnetico nel vuoto sono rispettivamente

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \tag{2.1.8}$$

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \tag{2.1.9}$$

da cui il tensore degli sforzi di Maxwell è

$$\sigma^{ij}{=}\epsilon_0(E_i E_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}E^2) + \frac{1}{\mu_0}(B_i B_j {-} \frac{1}{2}\delta_{ij}B^2) \tag{2.1.10}$$

2.2 Tensore del campo elettromagnetico

Il campo elettrico$\overrightarrow{E}$ e il vettore induzione magnetica$\overrightarrow{B}$ possono essere scritti, consistentemente con le equazioni di Maxwell, tramite il potenziale scalare ϕ e il potenziale vettore $\overrightarrow{A}$

$$\boxed{\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}} \tag{2.2.1}$$

$$\boxed{\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}} \tag{2.2.2}$$

Assumendo che il potenziale scalare ϕ e il potenziale vettore $\overrightarrow{A}$ si possano unire in un unico quadripotenziale

$$\boxed{A^\mu = \left(\varphi, \overrightarrow{A}\right)} \tag{2.2.3}$$

e data la seguente segnatura per il tensore metrico di Minkowski

$$\boxed{\eta_{\mu\nu} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}} \tag{2.2.4}$$

si giunge a definire (sfruttando eventualmente il principio variazionale) un tensore antisimmetrico di rango 2 detto tensore di campo elettromagnetico

$$\boxed{F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu} \tag{2.2.5}$$

dove ∂^μ è il quadrigradiente definito come

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\overrightarrow{\nabla}\right) \tag{2.2.6}$$

Calcolando esplicitamente la (2.2.5) per ogni valore degli indici si ottiene che

$$\boxed{F^{\mu\nu} = \begin{Vmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{Vmatrix}} \tag{2.2.7}$$

2.3 Equazioni di Maxwell in forma covariante

Nelle equazioni di Maxwell (2.1.4) e (2.1.5) compaiono la densità di carica ρ e il vettore densità di corrente $\overrightarrow{J}$. Si possono combinare queste due grandezze in un unico quadrivettore densità di corrente

$$\boxed{J^\mu = c\rho\frac{dx^i}{dx^0} = \left(c\rho, \overrightarrow{J}\right)} \tag{2.3.1}$$

Con un calcolo diretto si vede immediatamente che le coppie di equazioni di Maxwell (2.1.4) (2.1.5) e (2.1.6) (2.1.7) si ottengono rispettivamente dalle equazioni

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu} \tag{2.3.2}$$

$$\boxed{\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0} \tag{2.3.3}$$

Queste equazioni sono in forma covariante e i campi $\overrightarrow{E}$ e $\overrightarrow{B}$ sono codificati all'interno del tensore di campo elettromagnetico $F^{\mu\nu}$.

2.4 Equazione del moto di una particella carica in un campo elettromagnetico e forza di Lorentz scritta in forma covariante

La quadrivelocità della particella carica è definita

$$\boxed{U^\mu = \left(U^o, \overrightarrow{U}\right) = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\overrightarrow{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)} \tag{2.4.1}$$

Si può allora definire il quadrimpulso

$$\boxed{p^\mu = \left(p^0, \overrightarrow{p}\right) = m_0 U^\mu = m_0\left(U^0, \overrightarrow{U}\right) = m_0 \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(\frac{m_0 c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{m_0\overrightarrow{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)} \tag{2.4.2}$$

dove m_0 si indica la massa a riposo della particella.

U^μ e p^μ sono dei quadrivettori e quindi sono scritti in forma covariante per le trasformazioni di Lorentz.

Si vede che se le equazioni (2.1.2) e (2.1.3) si derivano rispetto al tempo proprio τ anziché al tempo t si ottengono

$$\frac{d\overrightarrow{p}}{d\tau} = \frac{q}{c}(U^0\overrightarrow{E} + \overrightarrow{U} \times \overrightarrow{B}) \tag{2.4.3}$$

$$\frac{dp^0}{d\tau} = \frac{q}{c}\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{E} \tag{2.4.4}$$

Si considerino i membri di sinistra delle equazioni (2.4.3) e (2.4.4) come componenti del quadrivettore

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \left(\frac{dp^0}{d\tau}, \frac{d\overrightarrow{p}}{d\tau}\right) \tag{2.4.5}$$

e si noti che nei membri di destra della (2.4.3) e (2.4.4) compaiono le componenti della quadrivelocità U^μ, $\overrightarrow{E}$ e $\overrightarrow{B}$. Dato che il membro di sinistra $\frac{dp^\mu}{d\tau}$ è un quadrivettore Lorentz-covariante, per costruire un'unica equazione covariante è necessario che anche il membro di destra sia Lorentz-covariante. U^μ è covariante, ma è combinato insieme alla carica,$\overrightarrow{E}$ e $\overrightarrow{B}$. La carica essendo uno scalare è un invariante relativistico, quindi non influisce. $\overrightarrow{E}$ e $\overrightarrow{B}$ non hanno un'espressione covariante, a meno che vengano scritti all'interno del tensore di campo elettromagnetico $F^{\mu\nu}$. $F^{\mu\nu}$ è un tensore con due indici in alto e se viene contratto con un quadricovettore U_ν con un indice basso si ottiene un quadrivettore con un indice in alto proprio come $\frac{dp^\mu}{d\tau}$. Si può dimostrare che il tensore a due indici necessario per scrivere l'*equazione in forma covariante del moto di una particella carica in un campo elettromagnetico* è proprio il tensore di campo $F^{\mu\nu}$ e si ottiene

$$\boxed{\frac{dp^\alpha}{d\tau} = m_0 \frac{dU^\mu}{d\tau} = m_0 \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} U_\nu} \tag{2.4.6}$$

2.5 Tensore energia-impulso elettromagnetico

Anche il *tensore stress-energia di un campo elettromagnetico nel vuoto privo di sorgenti* ha un'espressione che dipende dal tensore di campo$F^{\mu\nu}$

$$\boxed{T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left(-\eta_{\alpha\beta} F^{\mu\alpha} F^{\nu\alpha} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\delta\gamma} F^{\delta\gamma} \right)} \tag{2.5.1}$$

dove $\eta^{\mu\nu}$ sono le componenti del tensore metrico di Minkowki (2.2.4). Tale tensore fornisce il flusso della µ-esima componente del quadrimpulso p^μ attraverso la (iper)superficie individuata dalla coordinata x^ν costante. In particolare la componente T^{00} corrisponde alla densità di energia del campo elettromagnetico, le componenti $T^{0i} = T^{i0}$ corrispondono alla densità delle componenti dell'impulso vettore e le componenti $T^{ij} = \sigma^{ij}$ corrispondono alle componenti del tensore-stress di Maxwell.

Capitolo 3

Cenni sulla Teoria della Relatività Generale

Finora si sono inquadrate nell'ottica della teoria della Relatività Speciale alcune delle equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo.

La Relatività Speciale ha a che fare solo con i sistemi di riferimento inerziali. Dai due postulati della Relatività ed in particolare dal principio di costanza della velocità della luce, si deriva che in tutti i punti di un sistema di riferimento inerziale è definito uno stesso tensore metrico costante, quello di Minkowski $\eta_{\mu\nu}$. *Il tensore metrico definisce la geometria della varietà a cui è associato. In particolare quello di Minkowski descrive una geometria piatta.*

I sistemi di riferimento inerziali in Relatività Ristretta sono assunti globali, cioè con un' estensione tale da poter descrivere validamente tutti i punti della varietà spaziotempo. Se ad ogni punto di un sistema di riferimento inerziale è associata la metrica $\eta_{\mu\nu}$ e $\eta_{\mu\nu}$ descrive una geometria piatta, tale deve essere la geometria per tutta la varietà spaziotempo.

La teoria della Relatività Speciale però non considera i sistemi di riferimento non inerziali e non tratta la forza gravitazionale, aspetti invece contemplati dalla teoria della Relatività Generale, che quindi si configura come un' estensione.

3.1 Sistemi di riferimento inerziali nella teoria della Relatività Generale e Principio di Equivalenza.

Per la teoria della Relatività Generale in ogni punto della varietà spaziotempo è definito un generico tensore metrico $g_{\mu\nu}$, che può variare da punto a punto. In generale il tensore $g_{\mu\nu}$ è associato alla geometria di una varietà qualunque, che può essere anche curva. La metrica $g_{\mu\nu}$ torna ad essere quella di Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, rigorosamente solo nei punti dove è definito un sistema di riferimento inerziale.

Come si definisce un sistema di riferimento inerziale nella teoria della Relatività Generale? Al contrario delle altre forze fondamentali, per la forza di gravità non si può costruire una particella test che sia neutra, ovvero ogni sistema fisico è soggetto alla gravità. Se ipoteticamente si avvesse una particella test che però sia neutra per tutte le altre forze fondamentali, essendo soggetta alla gravità, il suo moto ne sarebbe influenzato. Il percorso che sarebbe obbligata a seguire sarebbe allora quello di caduta libera. Per definizione, un sistema di riferimento è inerziale, se in esso un oggetto lasciato fermo continua a rimanere fermo, oppure, se un oggetto in moto rettilineo uniforme continua a rimanere in moto rettilineo uniforme. Dato che qualsiasi osservatore sente comunque la forza di gravità, l'unico modo affinché soddisfi le condizioni per rappresentare un sistema di riferimento inerziale, nel caso in cui l'oggetto test sia proprio la particella test, è che necessariamente sia esso stesso in caduta libera. *Un sistema in caduta libera in un campo gravitazionale è un sistema di riferimento inerziale.* Questa asserzione può essere vista come una versione del Principio di Equivalenza. Ovviamente nel caso limite in cui il campo gravitazionale sia nullo, la definizione di sistema di riferimento inerziale si riconduce a quella classica.

La caduta libera del sistema di riferimento individua una linea nello spazio tempo. Si può intendere tale linea come il percorso in cui il sistema è forzato a passare dalla gravità per rimanere inerziale. Significa che non appena, per qualche motivo, non dovesse passare più per quel percorso il sistema perderebbe la sua inerzialità. Se, come si è detto, nei punti dove il sistema di riferimento è inerziale vige il tensore metrico di Minkowski, significa che appena ci si scosta dalle linee di caduta libera, per quel sistema di riferimento il tensore metrico cambia, diventando un tensore metrico rappresentativo di una varietà in generale curva. *La metrica $g_{\mu\nu}$ torna ad essere quella di Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, rigorosamente solo nei punti dove è definito un sistema di riferimento inerziale.* Si deduce che *nella teoria della Relatività Generale non è ammesso un sistema di riferimento inerziale globale, ossia, un sistema di riferimento può essere inerziale solo localmente.*

Questo significa che i risultati della Relatività Ristretta non sono più applicabili globalmente, mentre ritornano ad essere validi localmente. In altre parole la Relatività Generale deve ricondursi a quella Ristretta localmente e necessariamente il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ deve essere compatibile con $\eta_{\mu\nu}$: *$g_{\mu\nu}$ deve poter essere sempre ridotto in forma canonica con le derivate prime nulle e la segnatura deve essere* $(+ - - -)$.

3.2 Principio di Relatività Generale e Principio di Covarianza Generale

Uno dei principi fondanti della teoria della Relatività Generale è *il Principio di Relatività Generale che afferma che non solo i sistemi di riferimento inerziali, come vuole la Relatività Ristretta, ma tutti i sistemi di riferimento sono fra loro equivalenti, ovvero,* *per tutti devono valere le stesse leggi della fisica. Questo si traduce nel fatto che le leggi della fisica devono essere invarianti per trasformazioni di coordinate da un sistema di riferimento ad un altro.*

Ad esempio, come si è visto, per l'elettromagnetismo è possibile dare una formulazione covariante, cioè invariante in forma per trasformazioni di Lorentz (Poincaré). Questo è reso però possibile solo dal fatto che le equazioni dell'elettromagnetismo si possono scrivere tramite quantità tensoriali.

Un altro principio fondante, intimamente legato al Principio di Relatività Generale, è il *Principio di Covarianza Generale che asserisce che le equazioni della fisica devono poter essere scritte in forma tensoriale.*

Si è detto che la Relatività Generale ripristina la validità della Relatività Ristretta nei casi limite di sistemi di riferimento inerziali. Questo, in ottemperanza al Principio di Relatività Generale e al Principio di Covarianza Generale, comporta che: *i tensori che devono comparire nelle equazioni delle leggi della fisica, non siano più invarianti per trasformazioni di Lorentz (Poincaré), ma lo siano per trasformazioni generali; le derivate parziali diventino covarianti e il tensore metrico da quello di Minkowski diventi un altro più generale.*

$$\eta_{\mu\nu} \longrightarrow g_{\mu\nu} \tag{3.2.1}$$

$$\partial_\mu \longrightarrow \nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma^k_{\mu\nu} \tag{3.2.2}$$

3.3 Simbolo di Christoffel

Si noti che nell'espressione della derivata covariante (3.2.2) compare, oltre all'usuale derivata parziale, il simbolo di Christoffel definito

$$\boxed{\Gamma^k_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\partial_\nu g_{\mu l} + \partial_\mu g_{\nu l} - \partial_l g_{\mu\nu}\right) = g^{kl}\Gamma_{l\mu\nu}} \tag{3.3.1}$$

Nel caso di una varietà curva, le derivate di un generico tensore metrico $g_{\mu\nu}$ non si annullano, quindi $\Gamma^k_{\mu\nu}$ non si annula. Al contrario, nel caso di una varietà piatta, le derivate del tensore metrico si annullano tutte, quindi $\Gamma^k_{\mu\nu}$ si annulla. Dato che per un sistema di riferimento inerziale la metrica è quella piatta di Minkowski, il simbolo di Christoffel è nullo e così la derivata covariante ritorna ad essere coerentemente la derivata parziale. Quindi si è ottenuto un risultato consistente con le sostituzioni (3.2.1) e (3.2.2).

3.4 Equazioni dell'elettromagnetismo nella teoria della Relatività Generale

In particolare siamo interessati alla generalizzazione delle equazioni dell'elettromagnetismo in uno spaziotempo in generale non piatto. Quindi è necessario applicare i risultati della teoria della Relatività Generale appena visti.

Innanzitutto l'espressione della quadricorrente cambia e si può dimostrare che è

$$\boxed{J^\mu = \frac{c\rho}{\sqrt{g_{00}}}\frac{dx^i}{dx^0} = \left(\frac{c\rho}{\sqrt{g_{00}}}, \frac{\overrightarrow{J}}{\sqrt{g_{00}}}\right)} \tag{3.4.1}$$

Si sostituiscono le derivate parziali con le derivate covarianti nelle (2.3.2) e (2.3.3) e si tiene conto che il simbolo di Christoffel è simmetrico $\Gamma^k_{\mu\nu} = \Gamma^k_{\nu\mu}$ e che $F_{\mu\nu}$ è antisimmetrico, ovvero, $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$.

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu F^{\mu\nu} - \Gamma^\mu_{\mu\lambda} F^{\lambda\nu} - \Gamma^\nu_{\mu\lambda} F^{\mu\lambda} = \partial_\mu F^{\mu\nu} - \Gamma^\mu_{\mu\lambda} F^{\lambda\nu} - \Gamma^\nu_{\mu\lambda} F^{\mu\lambda}$$

$$= \partial_\mu F^{\mu\nu} - \Gamma^\mu_{\mu\lambda} F^{\lambda\nu} - \Gamma^\mu_{\mu\lambda} g^\nu_\mu F^{\mu\lambda} = \partial_\mu F^{\mu\nu} - \Gamma^\mu_{\mu\lambda} F^{\lambda\nu} - \Gamma^\mu_{\mu\lambda} F^{\nu\lambda} =$$

$$= \partial_\mu F^{\mu\nu} - \Gamma^\mu_{\mu\lambda} F^{\lambda\nu} + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} F^{\lambda\nu} = \partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$$

$$\nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} =$$

$$= \partial_\alpha F_{\beta\gamma} - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} F_{\lambda\gamma} - \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} F_{\beta\lambda} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} - \Gamma^\lambda_{\beta\gamma} F_{\lambda\alpha} - \Gamma^\lambda_{\beta\alpha} F_{\gamma\lambda} +$$

$$+ \partial_\gamma F_{\alpha\beta} - \Gamma^\lambda_{\gamma\alpha} F_{\lambda\beta} - \Gamma^\lambda_{\gamma\beta} F_{\alpha\lambda} = \partial_\alpha F_{\beta\gamma} - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} F_{\lambda\gamma} - \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} F_{\beta\lambda} +$$

$$+ \partial_\beta F_{\gamma\alpha} - \Gamma^\lambda_{\beta\gamma} F_{\lambda\alpha} + \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} F_{\lambda\gamma} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} F_{\beta\lambda} + \Gamma^\lambda_{\beta\gamma} F_{\lambda\alpha} =$$

$$= \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0$$

Si è ottenuto che le *equazioni di Maxwell* (2.3.2) e (2.3.3) si generalizzano nella forma

$$\boxed{\nabla_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu} \tag{3.4.2}$$

$$\boxed{\nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} = 0} \tag{3.4.3}$$

La soluzione di queste equazioni è

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu =$$

$$= \partial_\mu A_\nu - \Gamma^k_{\nu\mu} A_k - \partial_\nu A_\mu + \Gamma^k_{\mu\nu} A_k = \partial_\mu A_\nu - \Gamma^k_{\nu\mu} A_k - \partial_\nu A_\mu + \Gamma^k_{\nu\mu} A_k =$$

$$= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

cioè si ritrova sempre che il *tensore del campo elettromagnetico* è

$$\boxed{F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu} \tag{3.4.4}$$

Le *equazioni del moto di una particella carica in un campo elettromagnetico e in un campo gravitazionale* invece diventano

$$\boxed{\frac{dp^\alpha}{d\tau} = m_0 \frac{DU^\mu}{d\tau} = m_0 \left(\frac{dU^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} U^\nu U^\lambda \right) = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} U_\nu} \tag{3.4.5}$$

Il *tensore energia impulso* diventa

$$\boxed{T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left(-g_{\alpha\beta} F^{\mu\alpha} F^{\nu\alpha} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\delta\gamma} F^{\delta\gamma} \right)} \tag{3.4.6}$$

3.5 Equazioni di campo di Einstein e interpretazione geometrica della gravità

L'idea che gli effetti del campo gravitazionale possano essere interpretati in termini geometrici, tramite la curvatura dello spaziotempo, trova la sua compiuta formulazione nelle *equazioni di campo di Einstein*

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}} \tag{3.5.1}$$

Il membro di sinistra contiene termini dipendenti unicamente dal tensore metrico, il quale descrive intrinsecamente la geometria della varietà a cui è associato. Infatti $R_{\mu\nu}$ è il tensore di Ricci, mentre R è lo scalare di curvatura e si possono entrambi far derivare da un tensore più generale, il tensore di curvatura di Riemann

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \left(\partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \Gamma^\alpha_{\gamma\lambda} \Gamma^\lambda_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\delta\lambda} \Gamma^\lambda_{\beta\gamma} \right) \tag{3.5.2}$$

o anche

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\delta;\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma;\beta\delta} + g_{\beta\gamma;\alpha\delta} - g_{\beta\delta;\alpha\gamma}\right) \tag{3.5.3}$$

da cui

$$R_{\beta\delta} = R^{\gamma}_{\beta\gamma\delta} = \left(\partial_\gamma \Gamma^{\gamma}_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^{\gamma}_{\beta\gamma} + \Gamma^{\gamma}_{\gamma\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\delta} - \Gamma^{\gamma}_{\delta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}\right) \tag{3.5.4}$$

$$R = R^{\beta}_{\beta} \tag{3.5.5}$$

Il tensore di Riemann è la quantità matematica che fornisce una descrizione locale, ovvero, in ogni punto, della curvatura della varietà: quando il tensore si annulla la varietà è intrinsecamente piatta, invece quando non si annulla la varietà è intrinsecamente curva.

Risulta chiaramente che la (3.5.1) è un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine rispetto a $g_{\mu\nu}$. Una volta fornita un'equazione di stato della materia e delle condizioni iniziali, risolvere l'equazione significa determinare insieme le equazioni del moto della particella test e della materia della sorgente stessa, la distribuzione della sorgente e il campo gravitazionale stesso creato dalla sorgente. Si dimostra che (3.5.1) contiene le equazioni di conservazione dell'energia e dell'impulso, le quali a loro volta contengono le equazioni del moto del sistema fisico a cui il tensore $T_{\mu\nu}$ si riferisce. In altre parole *la sorgente del campo gravitazionale induce la curvatura della varietà spaziotempo nella quale si muove la particella test. La curvatura della varietà spaziotempo a sua volta influisce sul moto della sorgente gravitazionale in un effetto a catena. Questo comportamento si rispecchia appunto nella non linearità delle equazioni.*

Il membro di destra contiene invece il tensore energia-impulso che viene interpretato come la sorgente del campo gravitazionale o equivalentemente della geometria dello spaziotempo.

Nello spazio vuoto il tensore energia-impulso è nullo $T_{\mu\nu} = 0$, quindi l'equazione di campo di Einstein diventa semplicemente

$$\boxed{R_{\mu\nu} = 0} \tag{3.5.6}$$

Dalla teoria della Relatività Speciale è ben nota l'equivalenza massa-energia, allora si deduce che non solo la materia, ma anche qualsiasi altra forma di energia, è in grado di generare un campo gravitazionale o equivalentemente di influenzare la geometria dello spaziotempo. Il campo elettromagnetico trasporta energia e allora per quanto detto deve produrre effetti gravitazionali. Nel caso che lo spazio sia sede di un campo elettromagnetico il tensore energia-impulso da inserire in (3.5.1) è il (3.4.6).

In generale *il tensore energia-impulso della (3.5.1) è la somma di tutti i tensori energia-impulso associabili a tutte le sorgenti del campo gravitazionale, sia che esse siano in forma di materia od energia.*

3.6 Equazione della geodetica nella teoria della Relatività Generale

Si è detto che una particella test neutra soggetta unicamente alla forza di gravità è costretta a seguire un percorso specifico sulla varietà curva dello spazio tempo. Inoltre, proprio per il fatto di essere influenzata solo dalla gravità, risulta essere in caduta libera. Allora la particella e il sistema ad essa solidale devono essere inerziali. Nella teoria della Relatività Ristretta il moto inerziale avviene sempre lungo una geodetica (di tipo tempo) della varietà. Per definizione tale sistema vede la particella in quiete, oppure in moto rettilineo uniforme, quindi la particella deve avere accelerazione nulla

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2} = 0 \tag{3.6.1}$$

In ogni punto della varietà spaziotempo è associato un tensore metrico che definisce la geometria della varietà stessa in quel punto. La particella e il sistema solidale ad essa sono inerziali, quindi risulta che in tutti i punti delle linee che percorrono, il tensore metrico associato è quello di Minkowski. Ne consegue che il simbolo di Christoffel (3.3.1) si annulla. Si può allora scrivere

$$\Gamma^k_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \tag{3.6.2}$$

Dato che sommare 0 non cambia niente si può scrivere

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2} + \Gamma^k_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{dU^k}{d\tau} + \Gamma^k_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = U^\mu\nabla_\mu U^k = 0 \tag{3.6.3}$$

Questa è l'equazione del moto della particella in caduta libera nel campo gravitazionale, ma scritta sottoforma di equazione della geodetica seguita dalla particella nel suo moto.

In uno spaziotempo piatto, come quello della Relatività Ristretta, le geodetiche sono linee rette, la cui equazione è semplicemente la (3.6.1).

In uno spaziotempo curvo il termine (3.6.2) non si annulla e così nella (3.6.3) rispetto alla (3.6.1) compare un termine aggiuntivo. Per questo motivo le geodetiche in uno spaziotempo curvo non possono essere linee rette.

Il termine con $\Gamma^k_{\mu\nu}$ ha carattere geometrico dato che il simbolo di Christoffel si definisce a partire dal tensore metrico. Tuttavia, il termine (3.6.2) può anche essere letto come un potenziale del campo gravitazionale, che nello spaziotempo curvo produce la deviazione della geodetica da quella di uno spaziotempo piatto.

La distanza spaziotemporale in 4D è un'invariante relativistica quindi si può scrivere

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^3 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu =$$

$$= g'_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = c^2 d\tau^2 - dx'^2_1 - dx'^2_2 - dx'^3_3 = ds'^2$$

Nel sistema in cui si misura il tempo proprio, la particella è per definizione ferma, perciò dx'_1, dx'_2 e dx'_3 sono nulli e allora

$$ds^2 = c^2 d\tau^2$$

La (3.6.3) si può allora riparametrizzare scrivendo

$$\boxed{\frac{d^2 x^\kappa}{ds^2} + \Gamma^\kappa_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = \frac{dU^\kappa}{ds} + \Gamma^\kappa_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = U^\mu \nabla_\mu U^\kappa = 0} \tag{3.6.4}$$

Capitolo 4

Ipotesi del modello di Kaluza

Secondo la teoria della Relatività Generale un corpo in moto in un campo gravitazionale segue le geodetiche della varietà spaziotempo, infatti l'equazione del moto può essere vista anche come l'equazione della geodetica. La geodetica dipende dalla geometria di una varietà, la quale è fondamentalmente descritta dal tensore metrico. Nelle leggi del moto il termine contenente il tensore metrico è allora interpretato come un potenziale del campo gravitazionale.

D'altra parte le equazioni dell'elettromagnetismo si possono scrivere usando il tensore di campo elettromagnetico, che dipende dal quadrivettore potenziale A_μ *tramite la* (3.4.4).

Si può dire allora che il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ e il quadrivettore potenziale A_μ rappresentino rispettivamente il fondamento della gravitazione e dell'elettromagnetismo. Tuttavia, $g_{\mu\nu}$ e A_μ rimanendo entità separate, impongono un dualismo tra gravitazione ed elettromagnetismo.

L'idea di Kaluza è di superare tale dualismo per approdare ad una teoria fisica unificante, sfruttando un unico tensore metrico che comprenda in qualche modo sia $g_{\mu\nu}$ *che* A_μ*, e attraverso il quale sia quindi possibile descrivere tutti i fenomeni fisici.* (Al tempo della formulazione di questo modello non erano ancora note le forze nucleari forte e debole).

Una delle conseguenze dell'introduzione di questo tensore metrico è la necessità di considerare lo spaziotempo una varietà non più quadridimensionale, ma a 5 dimensioni, di cui 4 spaziali e 1 temporale.

Nel seguito gli indici greci, fatti variare da 1 a 4, indicheranno le componenti 4-dimensionali degli oggetti tensoriali. Gli indici latini, fatti variare da 1 a 5, invece indicheranno le componenti degli oggetti tensoriali a 5-dimensioni. In entrambi i casi l'indice 1 si riferirà sempre alla componente temporale.

4.1 Condizione di cilindro

Le teorie della Relatività Speciale e della Relatività Generale descrivono gli eventi fisici in una varietà spaziotempo 4D. Attualmente nessuna esperienza empirica ha mostrato l'evidenza di ulteriori dimensioni, nel senso che non è stato ancora mai osservato il cambiamento di una quantità fisica che non avvenisse nello spaziotempo 4D. Questo non impedisce però di considerare lo spaziotempo come una sottovarietà 4D di una varietà 5D. Basta supporre che nella quinta dimensione le quantità fisiche non cambino. *Matematicamente equivale ad imporre che le derivate rispetto ad un paramentro associato alla quinta dimensione di una qualunque quantità fisica siano nulle. Tale ipotesi di lavoro è definita "condizione di cilindro".*

4.2 Tensore metrico a 5 dimensioni

Si vuole definire il tensore metrico $\widetilde{g}_{ab}$ in cinque dimensioni, di cui una come al solito temporale e le altre quattro spaziali. La segnatura deve essere allora $(+----)$. Si può allora pensare $\widetilde{g}_{ab}$

$$\widetilde{g}_{ab} = \begin{vmatrix} \widetilde{g}_{11} & \widetilde{g}_{12} & \widetilde{g}_{13} & \widetilde{g}_{14} & \widetilde{g}_{15} \\ \widetilde{g}_{21} & \widetilde{g}_{22} & \widetilde{g}_{23} & \widetilde{g}_{24} & \widetilde{g}_{25} \\ \widetilde{g}_{31} & \widetilde{g}_{32} & \widetilde{g}_{33} & \widetilde{g}_{34} & \widetilde{g}_{35} \\ \widetilde{g}_{41} & \widetilde{g}_{42} & \widetilde{g}_{43} & \widetilde{g}_{44} & \widetilde{g}_{45} \\ \widetilde{g}_{51} & \widetilde{g}_{52} & \widetilde{g}_{53} & \widetilde{g}_{54} & \widetilde{g}_{55} \end{vmatrix} \tag{4.2.1}$$

come un'estensione a cinque dimensioni del tensore metrico 4D $g_{\mu\nu}$ e perciò $g_{\mu\nu}$ deve essere contenuto in $\widetilde{g}_{ab}$. L'unica possibilità coerente con la segnatura $(+----)$ è che ciascuna componete di $g_{\mu\nu}$ sia contenuta nella componente di $\widetilde{g}_{ab}$ con il medesimo indice

$$\widetilde{g}_{ab} = \begin{vmatrix} \widetilde{g}_{11} & \widetilde{g}_{12} & \widetilde{g}_{13} & \widetilde{g}_{14} & \widetilde{g}_{15} \\ \widetilde{g}_{21} & \widetilde{g}_{22} & \widetilde{g}_{23} & \widetilde{g}_{24} & \widetilde{g}_{25} \\ \widetilde{g}_{31} & \widetilde{g}_{32} & \widetilde{g}_{33} & \widetilde{g}_{34} & \widetilde{g}_{35} \\ \widetilde{g}_{41} & \widetilde{g}_{42} & \widetilde{g}_{43} & \widetilde{g}_{44} & \widetilde{g}_{45} \\ \widetilde{g}_{51} & \widetilde{g}_{52} & \widetilde{g}_{53} & \widetilde{g}_{54} & \widetilde{g}_{55} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \widetilde{g}_{\mu\nu} & \widetilde{g}_{\mu 5} \\ \widetilde{g}_{5\nu} & \widetilde{g}_{55} \end{vmatrix} \tag{4.2.2}$$

dove $\widetilde{g}_{\mu\nu}$ si può scrivere in generale $\widetilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + e_{\mu\nu}$.

Se si generalizza pure l'espressione dell'elemento di lunghezza da quattro dimensioni a cinque

$$ds^2 = dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 \tag{4.2.3}$$

si vede che

$$ds^2 = \widetilde{g}_{ab} d\widetilde{x}^a d\widetilde{x}^b \tag{4.2.4}$$

Dato che si può scrivere equivalentemente

$$ds^2 = \widetilde{g}_{ab} d\widetilde{x}^a d\widetilde{x}^b = \widetilde{g}_{ba} d\widetilde{x}^b d\widetilde{x}^a = ds^2 \tag{4.2.5}$$

risulta chiaramente che $\widetilde{g}_{ab}$ è simmetrico

$$\widetilde{g}_{ab} = \begin{vmatrix} \widetilde{g}_{11} & \widetilde{g}_{12} & \widetilde{g}_{13} & \widetilde{g}_{14} & \widetilde{g}_{15} \\ \widetilde{g}_{21} & \widetilde{g}_{22} & \widetilde{g}_{23} & \widetilde{g}_{24} & \widetilde{g}_{25} \\ \widetilde{g}_{31} & \widetilde{g}_{32} & \widetilde{g}_{33} & \widetilde{g}_{34} & \widetilde{g}_{35} \\ \widetilde{g}_{41} & \widetilde{g}_{42} & \widetilde{g}_{43} & \widetilde{g}_{44} & \widetilde{g}_{45} \\ \widetilde{g}_{51} & \widetilde{g}_{52} & \widetilde{g}_{53} & \widetilde{g}_{54} & \widetilde{g}_{55} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \widetilde{g}_{\mu\nu} & \widetilde{g}_{\mu 5} \\ \widetilde{g}_{\mu 5} & \widetilde{g}_{55} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \widetilde{g}_{\mu\nu} & \widetilde{g}_{5\nu} \\ \widetilde{g}_{5\nu} & \widetilde{g}_{55} \end{vmatrix} \tag{4.2.6}$$

in accordo con il fatto che anche nella teoria della Relatività Ristretta e della Relatività Generale i tensori metrici sono simmetrici.

Si vuole, come detto, che $\widetilde{g}_{ab}$ contenga oltre al tensore metrico $g_{\mu\nu}$, anche il quadrivettore potenziale A_μ.

Si assuma che il simbolo di Christoffel in cinque dimensioni si scriva nello stesso modo del simbolo di Christoffel in quattro dimensioni

$$\boxed{\widetilde{\Gamma}^j_{kl} = \frac{1}{2}\widetilde{g}^{jm}\left(\frac{\partial \widetilde{g}_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial \widetilde{g}_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial \widetilde{g}_{kl}}{\partial x^m}\right) = \frac{1}{2}\widetilde{g}^{jm}\left(\widetilde{g}_{mk,l} + \widetilde{g}_{ml,k} - \widetilde{g}_{kl,m}\right) = \widetilde{g}^{jm}\widetilde{\Gamma}_{mkl}} \tag{4.2.7}$$

con

$$\boxed{\widetilde{\Gamma}_{ikl} = \frac{1}{2}\left(\widetilde{g}_{ik,l} + \widetilde{g}_{il,k} - \widetilde{g}_{kl,i}\right)} \tag{4.2.8}$$

Tenendo conto della condizione di cilindro, i simboli di Christoffel in cui almeno un indice si riferisce alla quinta dimensione diventano

$$2\widetilde{\Gamma}_{\lambda\mu 5} = 2\widetilde{\Gamma}_{\lambda 5\mu} = \widetilde{g}_{\lambda 5,\mu} - \widetilde{g}_{\mu 5,\lambda} = \widetilde{g}_{\lambda 5,\nu} - \widetilde{g}_{\mu 5,\lambda} \tag{4.2.9}$$

$$2\widetilde{\Gamma}_{5\mu\nu} = \widetilde{g}_{5\mu,\nu} + \widetilde{g}_{5\nu,\mu} \tag{4.2.10}$$

$$2\widetilde{\Gamma}_{\lambda 55} = -\widetilde{g}_{55,\lambda} \tag{4.2.11}$$

$$2\widetilde{\Gamma}_{5\mu 5} = \widetilde{g}_{55,\mu} \tag{4.2.12}$$

$$2\widetilde{\Gamma}_{55\nu} = \widetilde{g}_{55,\nu} \tag{4.2.13}$$

$$2\widetilde{\Gamma}_{555} = 0 \tag{4.2.14}$$

Si vede che a meno dell'indice che si riferisce alla quinta dimensione la (4.2.9) ha una forma analoga a

$$\boxed{F_{\lambda\mu} = A_{\mu,\lambda} - A_{\lambda,\mu}} \tag{4.2.15}$$

in quattro dimensioni.
Se si tiene conto che $\widetilde{g}_{ab}$ è simmetrico e si impongono le condizioni

$$\widetilde{g}_{5\lambda} = \widetilde{g}_{\lambda 5} = 2\alpha A_\lambda \tag{4.2.16}$$

$$\widetilde{g}_{55} = \phi^2 \tag{4.2.17}$$

dove α e ϕ sono costanti opportune da determinare, si ottiene che $\widetilde{\Gamma}_{\lambda\mu 5} = \widetilde{\Gamma}_{\lambda 5\mu}$ è proporzionale al tensore di campo elettromagnetico $F_{\lambda\mu}$, infatti si può scrivere

$$\widetilde{\Gamma}_{\lambda\mu 5} = \widetilde{\Gamma}_{\lambda 5\mu} = \alpha\left(A_{\lambda,\mu} - A_{\mu,\lambda}\right) = -\alpha F_{\lambda\mu} \tag{4.2.18}$$

Inoltre si può vedere che

$$\widetilde{\Gamma}_{5\mu\nu} = \alpha\left(A_{\mu,\nu} + A_{\nu,\mu}\right) = \alpha\Sigma_{\mu\nu} \tag{4.2.19}$$

$$\widetilde{\Gamma}_{55\mu} = \widetilde{\Gamma}_{5\mu 5} = -\widetilde{\Gamma}_{\mu 55} = \frac{1}{2}\phi^2_{,\mu} \tag{4.2.20}$$

dove $\Sigma_{\mu\nu}$ è un campo ausiliario.
Alla luce di quanto finora si è detto il tensore metrico in cinque dimensioni si può scrivere

$$\widetilde{g}_{ab} = \begin{vmatrix} \widetilde{g}_{11} & \widetilde{g}_{12} & \widetilde{g}_{13} & \widetilde{g}_{14} & 2\alpha A_t \\ \widetilde{g}_{21} & \widetilde{g}_{22} & \widetilde{g}_{23} & \widetilde{g}_{24} & 2\alpha A_x \\ \widetilde{g}_{31} & \widetilde{g}_{32} & \widetilde{g}_{33} & \widetilde{g}_{34} & 2\alpha A_y \\ \widetilde{g}_{41} & \widetilde{g}_{42} & \widetilde{g}_{43} & \widetilde{g}_{44} & 2\alpha A_z \\ 2\alpha A_t & 2\alpha A_x & 2\alpha A_y & 2\alpha A_z & \phi^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \widetilde{g}_{\mu\nu} & 2\alpha A_\mu \\ 2\alpha A_\mu & \phi^2 \end{vmatrix} \tag{4.2.21}$$

Calcolando la (4.2.4) esplicitamente si ottiene

$$ds^2 = \widetilde{g}_{\mu\nu} d\widetilde{x}^\mu d\widetilde{x}^\nu + 4\alpha A_\mu d\widetilde{x}^\mu d\widetilde{x}^5 + \phi^2 d\widetilde{x}^5 d\widetilde{x}^5 =$$

$$= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + 4\alpha A_\mu d\widetilde{x}^\mu d\widetilde{x}^5 + \phi^2 d\widetilde{x}^5 d\widetilde{x}^5$$

Finora si è supposto che le componenti di $\widetilde{g}_{ab}$ fossero una combinazione dei termini di $g_{\mu\nu}$, A_μ e ϕ^2, perciò è ragionevole che $e_{\mu\nu}$ possa avere la seguente forma $e_{\mu\nu} = e_{\mu\mu} = \frac{4}{\phi^2}\alpha A_\mu A_\mu$. Da cui

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \frac{4}{\phi^2}\alpha^2 A_\mu A_\mu dx^\mu dx^\mu + 4\alpha A_\mu d\widetilde{x}^\mu d\widetilde{x}^5 + \phi^2 d\widetilde{x}^5 d\widetilde{x}^5 =$$

$$= c^2 d\tau^2 + \left(\frac{2}{\phi}\alpha A_\mu dx^\mu + \phi d\widetilde{x}^5\right)^2 = c^2 d\tau^2 + \phi^2\left(\frac{2}{\phi^2}\alpha A_\mu dx^\mu + d\widetilde{x}^5\right)^2$$

Se si sostituisce $\alpha = \frac{\phi^2}{2}$ si ottiene finalmente

$$\boxed{ds^2 = c^2 d\tau^2 + \phi^2\left(A_\mu dx^\mu + d\widetilde{x}^5\right)^2} \quad (4.2.22)$$

da cui l'*ansatz del tensore metrico del modello di Kaluza*

$$\boxed{\widetilde{g}_{ab} = \begin{Vmatrix} g_{\mu\nu} + \phi^2 A_\mu A_\nu & \phi^2 A_\mu \\ \phi^2 A_\mu & \phi^2 \end{Vmatrix}} \quad (4.2.23)$$

Il suo *inverso* è

$$\boxed{\widetilde{g}^{ab} = \begin{Vmatrix} g^{\mu\nu} & -A^\mu \\ -A^\mu & A^2 + \frac{1}{\phi^2} \end{Vmatrix}} \quad (4.2.24)$$

4.3 Nota sul campo scalare costante ϕ^2

Il tensore metrico a 5D $\widetilde{g}_{ab}$ contiene il tensore metrico 4D $g_{\mu\nu}$ e il quadripotenziale A_μ. Il tensore g_{ab} è simmetrico, quindi deve avere 15 componenti linearmente indipendenti, delle quali 10 sono fornite dal tensore $g_{\mu\nu}$ e altre 4 dalle componenti di A_μ. L'ultima componente necessaria deve essere $\widetilde{g}_{55}$, che viene identificata con un campo scalare costante ϕ^2. Dato che il valore di ϕ^2 è arbitrario, si fissa per comodità a $+1$ se la segnatura è $(-++++)$ o a -1 se la segnatura è $(+----)$.

4.4 Componenti del simbolo di Christoffel in 5D

Una volta ottenuto il tensore metrico, si possono estendere a 5 dimensioni le espressioni del simbolo di Christoffel.

$$\widetilde{\Gamma}^j_{kl} = \frac{1}{2}\widetilde{g}^{jm}\left(\widetilde{g}_{mk,l} + \widetilde{g}_{ml,k} - \widetilde{g}_{kl,m}\right) \quad (4.4.1)$$

Si può scrivere $\widetilde{\Gamma}^j_{kl}$ nelle sue componenti

$$\widetilde{\Gamma}^j_{kl} = \widetilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} + \widetilde{\Gamma}^5_{\mu\nu} + \widetilde{\Gamma}^\lambda_{5\nu} + \widetilde{\Gamma}^\lambda_{\mu5} + \widetilde{\Gamma}^\lambda_{55} + \widetilde{\Gamma}^5_{5\nu} + \widetilde{\Gamma}^5_{\mu5} + \widetilde{\Gamma}^5_{55} =$$

$$= \widetilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} + \widetilde{\Gamma}^{5}_{\mu\nu} + 2\widetilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu 5} + \widetilde{\Gamma}^{\lambda}_{55} + 2\widetilde{\Gamma}^{5}_{\mu 5} + \widetilde{\Gamma}^{5}_{55}$$

Dove

$$\widetilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\phi^2 A_\nu F_{\mu\sigma} + \phi^2 A_\mu F_{\nu\sigma} - A_\mu A_\nu \partial_\sigma \phi^2 \right) \tag{4.4.2}$$

$$\widetilde{\Gamma}^{5}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} A_\sigma \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\phi^2 A_\nu A^\sigma F_{\sigma\mu} + \frac{1}{2}\phi^2 A_\mu A^\sigma F_{\sigma\nu} +$$

$$+\frac{1}{2} \left(\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu \right) + \frac{1}{2\phi^2} \left(A_\nu \partial_\mu \phi^2 + A_\mu \partial_\nu \phi^2 \right) + \frac{1}{2} A_\mu A_\nu A^\sigma \partial_\sigma \phi^2 \tag{4.4.3}$$

$$\widetilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu 5} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\phi^2 F_{\mu\sigma} - A_\sigma \partial_\mu \phi^2 \right) \tag{4.4.4}$$

$$\widetilde{\Gamma}^{\lambda}_{55} = -\frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \partial_\sigma \phi^2 \tag{4.4.5}$$

$$\widetilde{\Gamma}^{5}_{\mu 5} = \frac{1}{2}\phi^2 A^\sigma F_{\sigma\mu} + \frac{1}{2} A^\sigma A_\mu \partial_\sigma \phi^2 + \frac{1}{2\phi^2} \partial_\mu \phi^2 \tag{4.4.6}$$

$$\widetilde{\Gamma}^{5}_{55} = \frac{1}{2} A^\mu \partial_\mu \phi^2 \tag{4.4.7}$$

Il calcolo esplicito delle componenti si trova in appendice.

Capitolo 5

Equazioni di campo nel modello di Kaluza

Per trovare le equazioni di campo di Einstein in cinque dimensioni si sono generalizzati i risultati già noti in quattro.

Risulta

$$\boxed{\widetilde{R}_{ab} - \frac{1}{2}\widetilde{g}_{ab}\widetilde{R} = \frac{8\pi G}{c^4}\widetilde{T}_{ab}} \tag{5.0.1}$$

5.1 Condizione di vuoto

Se si impone la condizione di vuoto, il tensore energia-impulso deve essere nullo. Dato che il tensore di Ricci e il tensore energia-impulso sono uno la traccia inversa dell'altro, risulta che il tensore di Ricci si annulla se e solo se il tensore energia-impulso si annulla. Allora l'equazione di campo di Einstein 5D di vuoto è

$$\boxed{\widetilde{R}_{ab} = 0} \tag{5.1.1}$$

Dalla (5.1.1) si derivano le equazioni in 4D del campo scalare ed elettromagnetico imponendo la condizione di cilindro.

5.2 Equazione del campo scalare

È immediato verificare che

$$\widetilde{R}^5_{555} = 0 \tag{5.2.1}$$

Allora

$$\widetilde{R}_{55} = \widetilde{R}^{c}_{5c5} = \widetilde{R}^{5}_{555} + \widetilde{R}^{\mu}_{5\mu 5} = \widetilde{R}^{\mu}_{5\mu 5} \tag{5.2.2}$$

Nella condizione di vuoto per la (5.1.1)

$$\widetilde{R}_{55} = 0 \tag{5.2.3}$$

Dal calcolo esplicito si ottiene

$$0 = \widetilde{R}_{55} = \widetilde{R}^{\mu}_{5\mu 5} =$$

$$= \frac{1}{4}\phi^4 \left(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha\right)\left(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha\right) +$$

$$+ \frac{1}{4\phi^2}\left(\partial^\mu \phi^2\right)\left(\partial_\mu \phi^2\right) - \frac{1}{2}\nabla^\mu \nabla_\mu \phi^2 \tag{5.2.4}$$

Dal momento che si è assunto ϕ^2 costante, le derivate parziali $\partial^\mu \phi^2$ si annullano e quindi si ha

$$\boxed{\nabla^\mu \nabla_\mu \phi - \frac{1}{4}\phi^3 F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 0} \tag{5.2.5}$$

La (5.2.5) *è un'equazione relativa allo spaziotempo 4D*. La struttura di (5.2.5) è quella dell'equazione di Poisson quindi si può leggere come *equazione del campo scalare.* La presenza del tensore di campo elettromagnetico suggerisce che *è la sorgente del campo scalare.*

5.3 Equazione di campo elettromagnetico

È immediato verificare che

$$\widetilde{R}^{5}_{\alpha 55} = 0 \tag{5.3.1}$$

Allora si può scrivere il tensore di Ricci con indici misti

$$\widetilde{R}_{\alpha 5} = \widetilde{R}^{c}_{\alpha c5} = \widetilde{R}^{5}_{\alpha 55} + \widetilde{R}^{\mu}_{\alpha\mu 5} = \widetilde{R}^{\mu}_{\alpha\mu 5} \tag{5.3.2}$$

Per la (5.1.1)

$$\widetilde{R}_{\alpha 5} = 0 \tag{5.3.3}$$

Dal calcolo diretto si ottiene

$$0 = \widetilde{R}_{\alpha 5} = \widetilde{R}^{\mu}_{\alpha\mu 5} =$$

$$= \frac{1}{2}\phi^2 g^{\beta\mu}\nabla_\mu F_{\alpha\beta} + \frac{1}{4}A_\alpha \phi^4 F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{3}{4}F_{\alpha\beta}\partial^\beta\phi^2 +$$

$$+\frac{1}{4\phi^2}A_\alpha\left(\partial^\nu\phi^2\right)\left(\partial_\nu\phi^2\right) - \frac{1}{2}A_\alpha\nabla^\nu\nabla_\nu\phi^2 \tag{5.3.4}$$

In questa equazione si possono riconoscere i tre termini della (5.2.4) moltiplicati per A_α, quindi si può riscrivere

$$\frac{1}{2}\phi^2 g^{\beta\mu}\nabla_\mu F_{\alpha\beta} + \frac{3}{4}F_{\alpha\beta}\partial^\beta\phi^2 + A_\alpha R_{55} = 0 \tag{5.3.5}$$

La (5.3.5) si è ottenuta per la condizione di vuoto, quindi deve valere (5.2.3) che fa annullare l'ultimo termine al primo membro. Anche il secondo termine deve annullarsi, se si considera il campo scalare costante. Con queste assunzioni la (5.3.5) si semplifica diventando

$$\boxed{\nabla^\beta F_{\alpha\beta} = 0} \tag{5.3.6}$$

che *è l'equazione di Maxwell quadridimensionale* (3.4.2) *in condizione di vuoto ed esprime il campo elettromagnetico.*

5.4 Equazione del campo gravitazionale

In condizione di vuoto in 5D il tensore energia-impulso è nullo quindi la (5.0.9) si scrive

$$\widetilde{R}_{ab} - \frac{1}{2}\widetilde{g}_{ab}\widetilde{R} = 0$$

ovvero

$$\begin{cases} \widetilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\widetilde{g}_{\mu\nu}\widetilde{R} = 0 \\ \widetilde{R}_{55} - \frac{1}{2}\widetilde{g}_{55}\widetilde{R} = 0 \end{cases} \tag{5.4.1}$$

Si esamini solo la prima equazione, cioè quella relativa agli indici 4D.
La componente quadridimensionale dell'equazione (5.1.1) risulta

$$\widetilde{R}_{\mu\nu} = 0 \tag{5.4.2}$$

ma si può anche scrivere

$$0 = \widetilde{R}_{\mu\nu} = \widetilde{R}^a_{\mu a\nu} = \widetilde{R}^5_{\mu 5\nu} + \widetilde{R}^\alpha_{\mu\alpha\nu} =$$

$$= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2\phi^2}\nabla_\nu\partial_\mu\phi^2 + \frac{1}{4\phi^4}\left(\partial_\mu\phi^2\right)\left(\partial_\nu\phi^2\right) +$$

$$-\frac{1}{2}\phi^2 g^{\alpha\beta}F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta}+A_\mu A_\nu R_{55}+$$

$$+A_\mu\left(R_{\nu 5}-A_\nu R_{55}\right)+A_\nu\left(R_{\mu 5}-A_\mu R_{55}\right)=$$

$$=R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\phi^2 g^{\alpha\beta}F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta}-\frac{1}{\phi}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi+$$

$$+A_\mu A_\nu R_{55}+A_\mu\left(R_{\nu 5}-A_\nu R_{55}\right)+A_\nu\left(R_{\mu}-A_\mu R_{55}\right) \tag{5.4.3}$$

Sostituendo i risultati precendenti rimane

$$0=\widetilde{R}_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\phi^2 g^{\alpha\beta}F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta}-\frac{1}{\phi}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi \tag{5.4.4}$$

Lo scalare di curvatura 5D invece si può scrivere

$$\widetilde{R}=\widetilde{R}^5_5+\widetilde{R}^\nu_\nu=\widetilde{g}^{\mu\nu}\widetilde{R}^5_{\mu 5\nu}+\widetilde{g}^{\mu 5}\widetilde{R}^\nu_{\mu\nu 5}+\widetilde{g}^{5\mu}\widetilde{R}^\nu_{5\nu\mu}+\widetilde{g}^{55}\widetilde{R}^\nu_{5\nu 5}=$$

$$=\widetilde{g}^{\mu\nu}\widetilde{R}_{\mu\nu}+2\widetilde{g}^{\mu 5}\widetilde{R}_{\mu 5}+\widetilde{g}^{55}\widetilde{R}_{55}=R-2A^\mu\widetilde{R}_{\mu 4}+\left(A^2+\frac{1}{\phi^2}\right)\widetilde{R}_{55}=$$

$$=R-\frac{1}{4}\phi^2 F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}+\frac{1}{2\phi^4}\left(\partial_\mu\phi^2\right)\left(\partial^\mu\phi^2\right)-\frac{1}{\phi^2}\nabla^\mu\nabla_\mu\phi^2=$$

$$=R-\frac{1}{4}\phi^2 F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}-\frac{2}{\phi}\nabla^\mu\nabla_\mu\phi \tag{5.4.5}$$

Sostituendo la (5.4.4) e la (5.4.5) nella prima delle (5.4.1) si ottiene

$$0=\widetilde{R}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\widetilde{g}_{\mu\nu}\widetilde{R}=R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\phi^2 g^{\alpha\beta}F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta}-\frac{1}{\phi}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi+$$

$$-\frac{1}{2}\widetilde{g}_{\mu\nu}\left(R-\frac{1}{4}\phi^2 F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}-\frac{2}{\phi}\nabla^\mu\nabla_\mu\phi\right) \tag{5.4.6}$$

Quindi si ricava finalmente

$$\boxed{R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=\frac{1}{2}\phi^2\left(g^{\alpha\beta}F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta}-\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)+\frac{1}{\phi}\left(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi-g_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla_\mu\phi\right)} \tag{5.4.7}$$

che è un'equazione di campo di Einstein in 4D.

Nell'equazione di campo di Einstein in 4D il membro di sinistra è legato alla geometria della varietà, mentre il membro di destra, espresso dal tensore energia-impulso, riguarda le sorgenti del campo gravitazionale. Si possono fare queste identificazioni anche per la (5.4.7). *Il tensore energia-impulso è formato da due componenti: nella prima compare il tensore di campo elettromagnetico* $T^{e.m.}_{\mu\nu}$ (3.4.6), *mentre nella seconda compare il tensore di campo scalare* $T^{\phi}_{\mu\nu}$.

La (5.4.7) *è denominata "miracolo di Kaluza" per il risultato notevole che comporta: l'emergere di un campo dal vuoto. L'interpretazione che infatti se ne può dare è che il campo elettromagnetico si comporti come sorgente del campo gravitazionale in 4D, nonostante non ci siano sorgenti in 5D, dato che vale la condizione di vuoto.*

Per far sì che il membro di destra in (5.4.7) sia compatibile con l'equazione di campo di Einstein 4D (3.5.1), si potrebbe riscalare il potenziale quadrivettore

$$A^{\mu} \to kA^{\mu}$$

con la rischiesta che

$$\frac{k^2}{2} = \frac{8\pi G}{c^4}\frac{1}{\mu_0}$$

dove μ_0 è la costante di permeabilità magnetica nel vuoto ottenendo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}\frac{\phi^2}{\mu_0}\left(g^{\alpha\beta}F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right) + \frac{1}{\phi}\left(\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\phi - g_{\mu\nu}\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}\phi\right)$$

Nella (5.4.7) la seconda componente del tensore energia-impulso in cui compare il campo scalare può essere interpretata come una variabile gravitazionale, che regola l'accoppiamento tra il tensore energia-impulso elettromagnetico e la curvatura dello spaziotempo.

Si noti infine che l'ipotesi iniziale per cui il termine A^{μ}, introdotto nell'espressione di $\widetilde{g}_{ab}$, sia il quadrivettore potenziale elettromagnetico, risulta giustificata dal fatto che nella (5.4.7) si ritrova il tensore di campo elettromagnetico $F^{\mu\nu}$, che è legato ad A^{μ} tramite la relazione (3.4.4).

Capitolo 6

Equazioni del moto dal modello di Kaluza

Supponendo di estendere la (3.6.4) da 4 a 5 dimensioni si ottiene

$$\boxed{\frac{d^2\widetilde{x}^c}{ds^2} + \widetilde{\Gamma}^c_{ab}\frac{d\widetilde{x}^a}{ds}\frac{d\widetilde{x}^b}{ds} = \frac{d\widetilde{U}^c}{ds} + \widetilde{\Gamma}^c_{ab}\widetilde{U}^a\widetilde{U}^b = \widetilde{U}^a\widetilde{\nabla}_a\widetilde{U}^c = 0} \tag{6.0.1}$$

Anche in 5D la particella si considera ancora neutra per tutte le forze eccetto che per la forza di campo unitario. In questa condizione la particella è in caduta libera. La (6.0.1) allora è l'equazione della geodetica 5D, ovvero, la linea di mondo seguita dalla particella nel suo moto inerziale nella varietà spaziotemporale 5D.

Le (6.0.1) sono cinque equazioni, una per ogni valore dell'indice c.

$$\begin{cases} \frac{d\widetilde{U}^\lambda}{ds} + \widetilde{\Gamma}^\lambda_{ab}\widetilde{U}^a\widetilde{U}^b = 0 \\ \frac{d\widetilde{U}^5}{ds} + \widetilde{\Gamma}^5_{ab}\widetilde{U}^a\widetilde{U}^b = 0 \end{cases} \tag{6.0.2}$$

6.1 Derivazione delle equazioni del moto in 4D

Si consideri la prima delle (6.0.9) relativa allo spaziotempo 4D

$$\frac{d\widetilde{U}^\lambda}{ds} + \widetilde{\Gamma}^\lambda_{ab}\widetilde{U}^a\widetilde{U}^b = 0 \tag{6.1.1}$$

Si possono scrivere le diverse componenti

$$0 = \frac{d\widetilde{U}^\lambda}{ds} + \widetilde{\Gamma}^\lambda_{ab}\widetilde{U}^a\widetilde{U}^b = \frac{dU^\lambda}{ds} + \widetilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}U^\mu U^\nu + \widetilde{\Gamma}^\lambda_{\mu 5}U^\mu U^5 + \widetilde{\Gamma}^\lambda_{5\nu}U^5 U^\nu + \widetilde{\Gamma}^\lambda_{55}U^5 U^5 =$$

$$= \frac{dU^\lambda}{ds} + \widetilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} U^\mu U^\nu + 2\widetilde{\Gamma}^\lambda_{\mu 5} U^\mu U^5 + \widetilde{\Gamma}^\lambda_{55} U^5 U^5 \tag{6.1.2}$$

Sostituendo i risultati della sezione 4.4 si ottiene

$$\boxed{\begin{array}{c} \frac{dU^\lambda}{ds} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} U^\mu U^\nu \\ +\frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\phi^2 A_\nu F_{\mu\sigma} + \phi^2 A_\mu F_{\nu\sigma} - A_\mu A_\nu \partial_\sigma \phi^2\right) U^\mu U^\nu + \\ +g^{\lambda\sigma} \left(\phi^2 F_{\mu\sigma} - A_\sigma \partial_\mu \phi^2\right) U^\mu U^5 + \\ -\frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \partial_\sigma \phi^2 \left(U^5\right)^2 = 0 \end{array}} \tag{6.1.3}$$

che è l'equazione del moto 4D della particella derivata dall'equazione della geodetica in 5D.

La (6.1.3) si semplifica notevolmente se si assume il campo scalare costante, dato che in questo caso le sue derivate parziali si annullano

$$\boxed{\frac{dU^\lambda}{ds} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} U^\mu U^\nu + \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\phi^2 A_\nu F_{\mu\sigma} + \phi^2 A_\mu F_{\nu\sigma}\right) U^\mu U^\nu + g^{\lambda\sigma} \phi^2 F_{\mu\sigma} U^\mu U^5 = 0} \tag{6.1.4}$$

Il termine $\frac{dU^\lambda}{ds} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} U^\mu U^\nu$ *è la consueta espressione relativistica della geodetica 4D* (3.6.4).

Si vuole studiare la seconda parte della (6.1.4).

$$\frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\phi^2 A_\nu F_{\mu\sigma} + \phi^2 A_\mu F_{\nu\sigma}\right) U^\mu U^\nu + g^{\lambda\sigma} \phi^2 F_{\mu\sigma} U^\mu U^5 =$$

$$= \frac{1}{2} \phi^2 g^{\lambda\sigma} A_\nu F_{\mu\sigma} U^\mu U^\nu + \frac{1}{2} \phi^2 g^{\lambda\sigma} A_\mu F_{\nu\sigma} U^\mu U^\nu + \frac{1}{2} \phi^2 g^{\lambda\sigma} F_{\mu\sigma} U^\mu U^5 + \frac{1}{2} \phi^2 g^{\lambda\sigma} F_{\mu\sigma} U^\mu U^5 =$$

$$= \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\phi^2 A_\nu F_{\mu\sigma} U^\mu U^\nu + \phi^2 F_{\mu\sigma} U^\mu U^5\right) + \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\phi^2 A_\mu F_{\nu\sigma} U^\mu U^\nu + \phi^2 F_{\mu\sigma} U^\mu U^5\right) =$$

$$= \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\phi^2 A_\nu F_{\mu\sigma} U^\mu U^\nu + \phi^2 F_{\mu\sigma} U^\mu U^5\right) + \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\phi^2 A_\mu F_{\nu\sigma} U^\mu U^\nu + \phi^2 F_{\nu\sigma} U^\nu U^5\right) =$$

$$= \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\phi^2 A_\nu U^\nu + \phi^2 U^5\right) F_{\mu\sigma} U^\mu + \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\phi^2 A_\mu U^\mu + \phi^2 U^5\right) F_{\nu\sigma} U^\nu \tag{6.1.5}$$

Vale

$$U_5 = \widetilde{g}_{5b} U^b = \widetilde{g}_{5\mu} U^\mu + \widetilde{g}_{55} U^5 = \widetilde{g}_{5\nu} U^\nu + \widetilde{g}_{55} U^5 =$$

$$= \phi^2 A_\mu U^\mu + \phi^2 U^5 = \phi^2 A_\nu U^\nu + \phi^2 U^5 \tag{6.1.6}$$

Quindi dentro le parentesi tonde della (6.1.5) si può sostituire U_5 ottenendo

$$\frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} U_5 F_{\mu\sigma} U^\mu + \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} U_5 F_{\nu\sigma} U^\nu =$$

$$= \frac{1}{2} U_5 g^{\lambda\sigma} F_{\mu\sigma} U^\mu + \frac{1}{2} U_5 g^{\lambda\sigma} F_{\nu\sigma} U^\nu = U_5 g^{\lambda\sigma} F_{\mu\sigma} U^\mu =$$

$$= U_5 F^\lambda_\mu U^\mu = U_5 F^\lambda_\mu g^{\mu\mu} U_\mu = U_5 F^{\mu\lambda} U_\mu = -U_5 F^{\lambda\mu} U_\mu \tag{6.1.7}$$

La (6.1.4) allora si può riscrivere semplicemente

$$\boxed{\frac{dU^\lambda}{ds} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} U^\mu U^\nu - U_5 F^{\lambda\mu} U_\mu = 0} \tag{6.1.8}$$

Il termine $F^{\lambda\mu} U_\mu$ è esattamente quello che compare nell'espressione della forza di Lorentz (3.4.5). Inoltre si dimostra che U_5 è una costante (vedi sezione 6.2) e perciò si può legare alla carica elettrica q della particella, anch'essa costante, tramite la relazione

$$\boxed{U_5 = \frac{q}{mc}} \tag{6.1.9}$$

dove m è la massa della particella e c è la velocità della luce nel vuoto.

Quindi si è dimostrato che $U_5 F^{\lambda\mu} U_\mu$ *è la consueta forza di Lorentz.*

La (6.1.8) è chiaramente l'equazione del moto (3.4.5). In altre parole *le equazioni del moto di una particella carica in un campo gravitazionale ed in un campo elettromagnetico, sono riconducibili alle equazioni del moto nel campo unitario, che coincidono con l'equazione della geodetica seguita dalla particella carica nello spaziotempo a 5 dimensioni.*

6.2 U_5 costante del moto in 5D

Si vuole dimostrare che U_5 è costante.

L'equazione della geodetica (6.0.1) può essere scritta anche

$$0 = \widetilde{U}^a \widetilde{\nabla}_a \widetilde{U}^c = \widetilde{U}^a \widetilde{U}^c_{;a} \tag{6.2.1}$$

Sapendo che

$$\widetilde{U}^c = \widetilde{g}^{cb} \widetilde{U}_b \tag{6.2.2}$$

la (6.2.1) si riscrive

$$0 = \widetilde{U}^a \left(\widetilde{g}^{cb}\widetilde{U}_b\right)_{;a} = \widetilde{U}^a\widetilde{U}_b\widetilde{g}^{cb}{}_{;a} + \widetilde{U}^a\widetilde{g}^{cb}\widetilde{U}_{b;a} \tag{6.2.3}$$

Si può dimostrare che

$$\begin{cases} \widetilde{g}^{cb}{}_{;a} = 0 \\ \widetilde{g}_{cb;a} = 0 \end{cases} \tag{6.2.4}$$

Applicando (6.2.4) a (6.2.3) si ha

$$0 = \widetilde{U}^a\widetilde{g}^{cb}\widetilde{U}_{b;a} \tag{6.2.5}$$

Contraendo entrambi i membri per g_{dc} si ha

$$0 = \widetilde{U}^a\widetilde{g}_{dc}\widetilde{g}^{cb}\widetilde{U}_{b;a} = \widetilde{U}^a\delta^b_d\widetilde{U}_{b;a} = \widetilde{U}^a\widetilde{U}_{d;a} =$$

$$= \left[\frac{\partial\widetilde{U_d}}{\partial\widetilde{x}^a} - \widetilde{\Gamma}^j_{da}\widetilde{U}_j\right]\widetilde{U}^a = \frac{\partial\widetilde{U_d}}{\partial\widetilde{x}^a}\widetilde{U}^a - \widetilde{\Gamma}^j_{da}\widetilde{U}_j\widetilde{U}^a =$$

$$= \frac{\partial\widetilde{U_d}}{\partial\widetilde{x}^a}\frac{d\widetilde{x}^a}{ds} - \frac{1}{2}\widetilde{g}^{jk}\left(\widetilde{g}_{dk,a} + \widetilde{g}_{ak,d} - \widetilde{g}_{da,k}\right)\widetilde{U}_j\widetilde{U}^a =$$

$$= \frac{d\widetilde{U_d}}{ds} - \frac{1}{2}\left(\widetilde{g}_{dk,a} + \widetilde{g}_{ak,d} - \widetilde{g}_{da,k}\right)\widetilde{U}^k\widetilde{U}^a =$$

$$= \frac{d\widetilde{U_d}}{ds} - \frac{1}{2}\widetilde{g}_{ak,d}\widetilde{U}^k\widetilde{U}^a - \frac{1}{2}\left(\widetilde{g}_{dk,a} - \widetilde{g}_{da,k}\right)\widetilde{U}^k\widetilde{U}^a =$$

$$= \frac{d\widetilde{U_d}}{ds} - \frac{1}{2}\widetilde{g}_{ak,d}\widetilde{U}^k\widetilde{U}^a$$

dove l'ultimo passaggio si è ottenuto perchè è immediato verificare che $\left(\widetilde{g}_{dk,a} - \widetilde{g}_{da,k}\right)\widetilde{U}^k\widetilde{U}^a = 0$.

Quindi si è dimostrato che la (6.0.1) è equivalente a

$$\boxed{\frac{d\widetilde{U_d}}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial\widetilde{g}_{ak}}{\partial x^d}\widetilde{U}^a\widetilde{U}^k = 0} \tag{6.2.6}$$

Si vede che se $\frac{\partial\widetilde{g}_{ak}}{\partial x^d} = 0$ allora $\frac{d\widetilde{U_d}}{ds} = 0$.
Considerando

$$\frac{d\widetilde{U_5}}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial\widetilde{g}_{ak}}{\partial x^5}\widetilde{U}^a\widetilde{U}^k = 0 \tag{6.2.7}$$

in particolare per la condizione di cilindricità si ha

$$\frac{\partial \widetilde{g}_{ak}}{\partial x^5} = 0 \tag{6.2.8}$$

da cui sostituendo nella (6.2.7) rimane

$$\frac{d\widetilde{U_d}}{ds} = 0 \tag{6.2.9}$$

che suggerisce che

$$\boxed{\widetilde{U}_5 = costante} \tag{6.2.10}$$

La quinta componente della velocità covariante 5D della particella è una costante del moto lungo la geodetica in 5 dimensioni, in accordo con la condizione di cilindricità.

Capitolo 7

Limiti del modello di Kaluza

Tra i principali limiti del primo modello formulato da Kaluza si può annoverare il fatto che, pur unificando gravità ed elettromagnetismo, esclude le altre due forze fondamentali della natura, la forza nucleare forte e la forza nucleare debole.

In secondo luogo il modello di Kaluza è una teoria che estende a 5 dimensioni la teoria della Relatività Generale, senza tenere conto dei risultati della meccanica quantistica.

Klein ha successivamente quantizzato il modello di Kaluza. In seguito sono stati sviluppati modelli che estendevano la teoria di Kaluza-Klein anche a più di 5 dimensioni, come tentativo di unificare anche la forza forte e la forza debole.

Capitolo 8

Conclusioni

Nella teoria della Relatività Generale, citando Einstein, "la gravitazione è stata riportata alla struttura dello spazio; ma, al di fuori del campo di gravitazione, c'è ancora il campo elettromagnetico; è stato necessario introdurre quest'ultimo nella teoria, come una formazione indipendente dalla gravitazione attraverso dei termini supplementari nell'equazione di condizione per il campo. Ma il pensiero non potrebbe sopportare l'idea che ci sono due strutture di spazio indipendenti una dall'altra: una di gravitazione metrica, l'altra elettromagnetica. S'impone la convinzione che queste due specie di campo devono corrispondere a una struttura unitaria dello spazio".

Il modello di Kaluza si propone di superare il dualismo tra l' elettromagnetismo e la gravità, senza però abbandonare i rispettivi impianti teorici su cui si fondano. L'espediente usato per unificare i due campi è quello di considerare lo spaziotempo una varietà a 5 dimensioni, di cui 4 spaziali e 1 temporale. In questo modo si estende la Relatività Generale a 5 dimensioni e si può supporre che la geometria dello spaziotempo 5D sia identificabile con la presenza di un campo unitario. Allora in 5 dimensioni il tensore metrico, le equazioni di campo e l'equazione della geodetica si scrivono nella stessa forma di quelli in 4.

I risultati di questo approccio sono notevoli.

Da equazioni del campo unitario in condizioni di vuoto in 5 dimensioni, si ottengono equazioni quadridimensionali, che corrispondono proprio alle equazioni di campo elettromagnetico, di campo gravitazionale e di un ulteriore campo scalare (ϕ^2). Questo risultato è definito miracolo di Kaluza per la sua importanza; già da condizioni minime, quali sono le condizioni di vuoto in 5D, si ottengono i soliti campi in 4D.

Un'altra conseguenza è che il campo elettromagnetico stesso può essere considerato la sorgente del campo scalare.

Riottenendo le equazioni del campo gravitazionale in 4 dimensioni, si ritrova un risultato già noto dalla Relatività Generale, ossia, che il campo elettromagnetico funge da sorgente. Questo risultato conferma la validità dell'ansatz del tensore metrico, in quanto una sorgente elettromagnetica che influenza la geometria dello spaziotempo, è compati-

bile con una metrica in cui compaiono termini come il quadripotenziale. Oltre al campo elettromagnetico come sorgente si trova anche il campo scalare.

Le equazioni della geodetica in 5 dimensioni riconducono alle leggi del moto in 4D della gravità e dell'elettromagnetismo.

Il modello suggerisce inoltre che U_5 *è una costante del moto in 5 dimensioni ed è legata alla carica elettrica.*

In conclusione, il modello permette di vedere il campo elettromagnetico e il campo gravitazionale come la manifestazione in 4 dimensioni di un campo unitario in 5 dimensioni. Per l'esattezza in 4 dimensione emerge un ulteriore campo, il campo scalare costante. Al netto dei limiti, almeno sul piano teorico e formale, rappresenta un esempio di unificazione tra gravità ed elettromagnetismo.

Capitolo 9

Appendice

9.1 Calcolo delle componenti del simbolo di Christoffel in 5 dimensioni

$$\widetilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\widetilde{g}^{\lambda m}\left(\widetilde{g}_{m\mu,\nu} + \widetilde{g}_{m\nu,\mu} - \widetilde{g}_{\mu\nu,m}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\widetilde{g}^{\lambda\sigma}\left(\widetilde{g}_{\sigma\mu,\nu} + \widetilde{g}_{\sigma\nu,\mu} - \widetilde{g}_{\mu\nu,\sigma}\right) + \frac{1}{2}\widetilde{g}^{\lambda 5}\left(\widetilde{g}_{5\mu,\nu} + \widetilde{g}_{5\nu,\mu} - \widetilde{g}_{\mu\nu,5}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}\left[\partial_\nu\left(g_{\sigma\mu} + \phi^2 A_\sigma A_\mu\right) + \partial_\mu\left(g_{\sigma\nu} + \phi^2 A_\sigma A_\nu\right) - \partial_\sigma\left(g_{\mu\nu} + \phi^2 A_\mu A_\nu\right)\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\widetilde{g}^{\lambda 5}\left(\widetilde{g}_{5\mu,\nu} + \widetilde{g}_{5\nu,\mu}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}\left[\left(\partial_\nu g_{\sigma\mu} + \partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right) + A_\sigma A_\mu \partial_\nu \phi^2 + \phi^2 A_\mu \partial_\nu A_\sigma + \phi^2 A_\sigma \partial_\nu A_\mu + \right.$$

$$+A_\sigma A_\nu \partial_\mu \phi^2 + \phi^2 A_\nu \partial_\mu A_\sigma + \phi^2 A_\sigma \partial_\mu A_\nu - A_\mu A_\nu \partial_\sigma \phi^2$$

$$\left. -\phi^2 A_\nu \partial_\sigma A_\mu - \phi^2 A_\mu \partial_\sigma A_\nu\right] - \frac{1}{2}A^\lambda\left[\partial_\nu\left(\phi^2 A_\mu\right) + \partial_\mu\left(\phi^2 A_\nu\right)\right] =$$

$$= \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}\left(\phi^2 A_\nu F_{\mu\sigma} + \phi^2 A_\mu F_{\nu\sigma} + \phi^2 A_\sigma \partial_\nu A_\mu + \phi^2 A_\sigma \partial_\mu A_\nu + \right.$$

$$\left. +A_\sigma A_\mu \partial_\nu \phi^2 + A_\sigma A_\nu \partial_\mu \phi^2 - A_\mu A_\nu \partial_\sigma \phi^2\right) +$$

$$-\frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}\left(A_\sigma A_\mu \partial_\nu \phi^2 + A_\sigma \phi^2 \partial_\nu A_\mu + A_\sigma A_\nu \partial_\mu \phi^2 + A_\sigma \phi^2 \partial_\mu A_\nu\right) =$$

$$= \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}\left(\phi^2 A_\nu F_{\mu\sigma} + \phi^2 A_\mu F_{\nu\sigma} - A_\mu A_\nu \partial_\sigma \phi^2\right) \tag{9.1.1}$$

$$\widetilde{\Gamma}^5_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\widetilde{g}^{5m}\left(\widetilde{g}_{m\mu,\nu} + \widetilde{g}_{m\nu,\mu} - \widetilde{g}_{\mu\nu,m}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\widetilde{g}^{5\sigma}\left(\widetilde{g}_{\sigma\mu,\nu} + \widetilde{g}_{\sigma\nu,\mu} - \widetilde{g}_{\mu\nu,\sigma}\right) + \frac{1}{2}\widetilde{g}^{55}\left(\widetilde{g}_{5\mu,\nu} + \widetilde{g}_{5\nu,\mu} - \widetilde{g}_{\mu\nu,5}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\widetilde{g}^{5\sigma}\left(\widetilde{g}_{\sigma\mu,\nu} + \widetilde{g}_{\sigma\nu,\mu} - \widetilde{g}_{\mu\nu,\sigma}\right) + \frac{1}{2}\widetilde{g}^{55}\left(\widetilde{g}_{5\mu,\nu} + \widetilde{g}_{5\nu,\mu}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}A^\sigma\left[\partial_\nu\left(g_{\sigma\mu} + \phi^2 A_\sigma A_\mu\right) + \partial_\mu\left(g_{\sigma\nu} + \phi^2 A_\sigma A_\nu\right) - \partial_\sigma\left(g_{\mu\nu} + \phi^2 A_\mu A_\nu\right)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left(A^2 + \frac{1}{\phi^2}\right)\left[\partial_\nu\left(\phi^2 A_\mu\right) + \partial_\mu\left(\phi^2 A_\nu\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}A_\sigma g^{\sigma\sigma}\left[\left(\partial_\nu g_{\sigma\mu} + \partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right) + A_\sigma A_\mu \partial_\nu\left(\phi^2\right) + \phi^2 A_\mu \partial_\nu\left(A_\sigma\right)\right.$$

$$+\phi^2 A_\sigma \partial_\nu\left(A_\mu\right) + A_\sigma A_\nu \partial_\mu\left(\phi^2\right) + \phi^2 A_\nu \partial_\mu\left(A_\sigma\right) + \phi^2 A_\sigma \partial_\mu\left(A_\nu\right) +$$

$$\left.-A_\mu A_\nu \partial_\sigma\left(\phi^2\right) - \phi^2 A_\nu \partial_\sigma\left(A_\mu\right) - \phi^2 A_\mu \partial_\sigma\left(A_\nu\right)\right] +$$

$$+\frac{1}{2}A^2 A_\mu \partial_\nu \phi^2 + \frac{1}{2}\phi^2 A^2 \partial_\nu A_\mu + \frac{1}{2}A^2 A_\nu \partial_\mu \phi^2 + \frac{1}{2}\phi^2 A^2 \partial_\mu A_\nu +$$

$$+\frac{1}{2\phi^2}A_\mu \partial_\nu \phi^2 + \frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu + \frac{1}{2\phi^2}A_\nu \partial_\mu \phi^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu =$$

$$= -\frac{1}{2}A_\sigma \Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\phi^2 A_\nu A^\sigma F_{\sigma\mu} + \frac{1}{2}\phi^2 A_\mu A^\sigma F_{\sigma\nu} +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu\right) + \frac{1}{2\phi^2}\left(A_\nu \partial_\mu \phi^2 + A_\mu \partial_\nu \phi^2\right) + \frac{1}{2}A_\mu A_\nu A^\sigma \partial_\sigma \phi^2 \tag{9.1.2}$$

$$\widetilde{\Gamma}^\lambda_{\mu 5} = \frac{1}{2}\widetilde{g}^{\lambda m}\left(\widetilde{g}_{m\mu,5} + \widetilde{g}_{m5,\mu} - \widetilde{g}_{\mu 5,m}\right) = \frac{1}{2}\widetilde{g}^{\lambda m}\left(\widetilde{g}_{m5,\mu} - \widetilde{g}_{\mu 5,m}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\widetilde{g}^{\lambda\sigma}\left(\widetilde{g}_{\sigma 5,\mu} - \widetilde{g}_{\mu 5,\sigma}\right) + \frac{1}{2}\widetilde{g}^{\lambda 5}\left(\widetilde{g}_{55,\mu} - \widetilde{g}_{\mu 5,5}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\widetilde{g}^{\lambda\sigma}\left(\widetilde{g}_{\sigma 5,\mu} - \widetilde{g}_{\mu 5,\sigma}\right) + \frac{1}{2}\widetilde{g}^{\lambda 5}\widetilde{g}_{55,\mu} =$$

$$= \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}\left(\partial_\mu\left(\phi^2 A_\sigma\right) - \partial_\sigma\left(\phi^2 A_\mu\right)\right) - \frac{1}{2}A^\lambda\partial_\mu\phi^2 =$$

$$= \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}A_\sigma\partial_\mu\phi^2 + \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}\phi^2\partial_\mu A_\sigma - \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}A_\mu\partial_\sigma\phi^2 - \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}\phi^2\partial_\sigma A_\mu - \frac{1}{2}A^\lambda\partial_\mu\phi^2 =$$

$$= \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}\left(\phi^2 F_{\mu\sigma} - A_\sigma\partial_\mu\phi^2\right) \tag{9.1.3}$$

$$\widetilde{\Gamma}^\lambda_{55} = \frac{1}{2}\widetilde{g}^{\lambda m}\left(\widetilde{g}_{m5,5} + \widetilde{g}_{m5,5} - \widetilde{g}_{55,m}\right) = -\frac{1}{2}\widetilde{g}^{\lambda m}\widetilde{g}_{55,m} =$$

$$-\frac{1}{2}\widetilde{g}^{\lambda\sigma}\widetilde{g}_{55,\sigma} - \frac{1}{2}\widetilde{g}^{\lambda 5}\widetilde{g}_{55,5} = -\frac{1}{2}\widetilde{g}^{\lambda\sigma}\widetilde{g}_{55,\sigma} =$$

$$= -\frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}\partial_\sigma\phi^2 \tag{9.1.4}$$

$$\widetilde{\Gamma}^5_{\mu 5} = \frac{1}{2}\widetilde{g}^{5m}\left(\widetilde{g}_{m\mu,5} + \widetilde{g}_{m5,\mu} - \widetilde{g}_{\mu 5,m}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\widetilde{g}^{5\sigma}\left(\widetilde{g}_{\sigma\mu,5} + \widetilde{g}_{\sigma 5,\mu} - \widetilde{g}_{\mu 5,\sigma}\right) + \frac{1}{2}\widetilde{g}^{55}\left(\widetilde{g}_{5\mu,5} + \widetilde{g}_{55,\mu} - \widetilde{g}_{\mu 5,5}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\widetilde{g}^{5\sigma}\left(\widetilde{g}_{\sigma 5,\mu} - \widetilde{g}_{\mu 5,\sigma}\right) + \frac{1}{2}\widetilde{g}^{55}\widetilde{g}_{55,\mu} = -\frac{1}{2}A^\sigma\left(\partial_\mu\left(\phi^2 A_\sigma\right) - \partial_\sigma\left(\phi^2 A_\mu\right)\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(A^2 + \frac{1}{\phi^2}\right)\partial_\mu\phi^2 = -\frac{1}{2}A^\sigma A_\sigma\partial_\mu\phi^2 - \frac{1}{2}\phi^2 A^\sigma\partial_\mu A_\sigma + \frac{1}{2}A^\sigma A_\mu\partial_\sigma\phi^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\phi^2 A^\sigma\partial_\sigma A_\mu + \frac{1}{2}A^2\partial_\mu\phi^2 + \frac{1}{2\phi^2}\partial_\mu\phi^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\phi^2 A^\sigma F_{\sigma\mu} + \frac{1}{2}A^\sigma A_\mu\partial_\sigma\phi^2 + \frac{1}{2\phi^2}\partial_\mu\phi^2 \tag{9.1.5}$$

$$\widetilde{\Gamma}^5_{55} = \frac{1}{2}\widetilde{g}^{5m}\left(\widetilde{g}_{m5,5} + \widetilde{g}_{m5,5} - \widetilde{g}_{55,m}\right) = -\frac{1}{2}\widetilde{g}^{5m}\partial_m\widetilde{g}_{55} =$$

$$= -\frac{1}{2}\widetilde{g}^{5\mu}\partial_\mu \widetilde{g}_{55} - \frac{1}{2}\widetilde{g}^{55}\partial_5 \widetilde{g}_{55} = -\frac{1}{2}\widetilde{g}^{5\mu}\partial_\mu \widetilde{g}_{55} =$$

$$= \frac{1}{2}A^\mu \partial_\mu \phi^2 \tag{9.1.6}$$

Bibliografia

[1] John David Jackson, "Elettrodinamica classica", Seconda edizione italiana condotta sulla terza edizione americana, Trad. di A. Barbieri, 2001, pp 539-543

[2] L. D. Landau, E. M. Lifsits, "Meccanica Quantistica, Teoria Relativisitca", Editori Riuniti Edizioni Mir, Roma (1976), pp 67-120, 312-366.

[3] L. L. Williams, "Field Equations and Lagrangian for the Kaluza Metric Evaluated with Tensor Algebra Software", Konfluence Research, Manitou Springs, Colorado, USA (Dated: 31 July 2014)

[4] Ray A. d'Inverno, "Introducing Einstein's Relativity", Oxford University Press, 1992, pp 120-142, 155-163

[5] Theodor Kaluza, "On the Problem of Unity in Physics", Sitzungsber.Preuss.Akad.Wiss.Berlin (Math.Phys.) 1921 (1921) 966-972 In *Erice 1982, Proceedings, Unified Field Theories In More Than 4 Dimensions*, pp 427-433