

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Corso di Laurea in Fisica

FLUSSI E PERTURBAZIONI ACUSTICHE
NEI FLUIDI

Relatore:
Prof. Fabio Ortolani

Presentata da:
Marco Polverigiani

Sessione II
Anno Accademico 2013/2014

Contents

0.1	Abstract	2
0.2	Introduzione	3
1	Fluidodinamica	5
1.1	Leggi di Conservazione	5
1.2	Fluidi Viscosi	9
1.3	Numero di Reynolds e Tipologie di Flusso	11
2	Flussi Turbolenti	13
2.1	Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations (RANS)	15
2.2	Anatomia e Fisiologia della Turbolenza	18
2.2.1	Anatomia	18
2.2.2	Fisiologia	20
3	Acustica Lineare	23
3.1	Perturbazioni Acustiche	23
3.1.1	Analisi in Frequenza	25
3.1.2	Equazione di Helmotz	26
3.2	Intensità e potenza	27
3.3	Sorgenti	29
3.3.1	Monopolo Acustico	30
3.3.2	Dipolo Acustico	30
3.3.3	Quadrupolo Acustico	32
3.3.4	Sviluppo in Multipoli	32
4	Suono generato Aerodinamicamente	33
4.1	Analogia di Lighthill	33
4.2	Altre Analogie	36

0.1 Abstract

Il seguente lavoro di tesi ripercorre la teoria classica della fluidodinamica, dalle leggi di conservazione alla derivazione dell'equazione di Navier-Stokes. Introdotto il numero di Reynolds R e delineate le caratteristiche dei flussi laminari e turbolenti viene posta maggiore attenzione su questi ultimi, derivando le RANS ed esponendo le principali teorie fisiche della turbolenza. Vengono quindi trattate le perturbazioni acustiche, nella loro forma lineare tipica delle radiazioni generate da corpi vibranti e nella forma non-lineare tipica delle radiazioni generate da flussi. Il suono aerodinamico, generato da flussi, é affrontato mediante la teoria di Lighthill, che formula un'analogia tra flussi e mezzi acustici a riposo.

0.2 Introduzione

La meccanica dei fluidi é una delle discipline principi della fisica classica. Le sue radici si estendono fino ai giorni della Grecia antica, con il lavoro di Aristotele sulla fluidostatica. La presente tesi ripercorre i passaggi fondamentali nella costruzione della teoria dei fluidi, con un accento sui fenomeni acustici. Ovvero, vengono analizzate le deviazioni dall'equilibrio di pressione e densità, come queste queste si propagano e quali equazioni governano i processi in questione.

Nel primo capitolo viene impostata la teoria fondante della fluidodinamica, basata sul modello del continuo. Sono delineate le equazioni di conservazione, é introdotto il tensore di stress ed é derivata l'equazione di Navier-Stokes, l'equazione fondamentale della fluidodinamica.

Nel secondo capitolo, descritte le due tipologie fondamentali di flusso, laminare e turbolento, si concentra l'attenzione sui flussi turbolenti. Delineate le caratteristiche principali ed optando per un approccio di natura statistica, vengono ricavate le equazioni di Reynolds, forma mediata delle Navier-Stokes. La descrizione fisica della turbolenza é affidata alla decomposizione ortogonale in vortici elementari ed al modello a cascata di Richardson, che descrive il comportamento energetico alle diverse scale caratteristiche del flusso.

Nel terzo capitolo si analizzano le piccole perturbazioni dall'equilibrio, generate da corpi vibranti, oggetto di studio dell'acustica lineare. Linearizzando le equazioni fondamentali viene derivata una funzione d'onda che descrive la propagazione delle perturbazioni. I segnali vengono descritti mediante un'analisi di Fourier. Si studiano inoltre i modelli fondamentali di sorgente perturbativa: monopolo, dipolo, quadrupolo.

Nel quarto ed ultimo capitolo viene allargato l'orizzonte dei fenomeni perturbativi, introducendo i campi acustici generati da flussi e non da corpi vibranti. Ovvero, i suoni generati aerodinamicamente. La produzione del suono avviene tipicamente ad alte velocità del flusso, e ad alti numeri di Reynolds. I flussi in questione sono quindi turbolenti. Data la non linearità delle equazioni é molto difficile predire i campi acustici prodotti. La teoria di riferimento é l'analogia acustica di Lighthill: i flussi vengono trattati come mezzi acustici omogenei a riposo, sottoposti ad un campo di stress esterno. Lo stress esterno fa da sorgente acustica ed é assimilabile ad una distribuzione di quadrupoli. É quindi possibile concludere che il suono generato da flussi é assimilabile a quello dovuto a dei quadrupoli, la cui intensità é correlabile con le proprietà del flusso. In particolare Lighthill dimostra che l'intensità della radiazione é proporzionale all'ottava potenza della velocità del flusso principale, in ottimo accordo con le evidenze sperimentali.

Si é quindi tracciata una linea di connessione tra la teoria classica dei fluidi, la teoria statistica delle turbolenze e quella dell'acustica, lineare e non lineare. Il tutto costituisce una sostanziosa base per l'evoluzione, soprattutto pratica, dell'acustica. L'obiettivo é

quello di riuscire a prevedere i campi acustici generati dalle piú svariate sorgenti ed in presenza delle adeguate condizioni al contorno. A livello ingegneristico le richieste da soddisfare sono soprattutto quelle di maggior comfort sonoro, con la riduzione del rumore provocato nella maggior parte dei casi da motori di aerei, treni, automobili o macchine industriali.

Chapter 1

Fluidodinamica

Si definiscono *fluidi* tutti i materiali che si deformano illimitatamente sotto l'effetto di forze di taglio, qualunque sia la loro entità. Tale stato della materia coinvolge liquidi, aeriformi e plasma. La dinamica dei fluidi è la branca della meccanica dei fluidi che studia il loro moto. In quanto i fenomeni affrontati sono generalmente di carattere macroscopico, la struttura molecolare del fluido non influisce sulla loro evoluzione. I fluidi sono quindi considerati un mezzo *continuo*. I punti materiali sono definiti *particelle di fluido*, e contengono un numero altissimo di molecole.

Le proprietà fondamentali che descrivono lo stato di un fluido in movimento sono la densità ρ , la pressione p e la velocità \mathbf{v} . Il valore di queste grandezze in un punto \mathbf{x} è inteso come la media sul volume infinitesimo di una particella di fluido, le cui dimensioni sono infinitesime rispetto alla lunghezza di scala della variazione della proprietà.

1.1 Leggi di Conservazione

Il comportamento dei fluidi è in primis governato dalle basilari leggi di conservazione della massa e del momento. Per la conservazione della massa, la variazione nel tempo della massa di fluido racchiusa in un volume è uguale al flusso della massa stessa attraverso la superficie che avvolge il volume. La massa non può sparire o nascere dal nulla, a meno che non siano presenti pozzi o sorgenti. L'equazione, anche detta di continuità, in forma differenziale assume la forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0 \quad (1.1)$$

Per la conservazione del momento si assume che la forza totale agente su un volume è uguale all'integrale di contorno della pressione.

$$- \oint p dS.$$

Trasformando l'integrale in un integrale di volume,

$$-\oint p dS = -\int \nabla p dV$$

vediamo che la forza totale esercitata su una particella di fluido di volume dV dal fluido circostante é $-\nabla p dV$. L'equazione del moto assume dunque la forma

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p$$

La variazione di velocità $d\mathbf{v}$ non si riferisce ad un punto fisso nello spazio, ma ad una particella di fluido in movimento. Deve essere quindi espressa rispetto ad un sistema inerziale. Notiamo che $d\mathbf{v}$ é composta di due parti: una relativa al cambio di velocità in un punto fisso $(\partial\mathbf{v}/\partial t)dt$, l'altra rappresentativa della differenza di velocità tra due punti distanti $d\mathbf{r}$, dove $d\mathbf{r}$ é la distanza percorsa da una particella di fluido nel tempo dt :

$$dx \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x} + dy \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y} + dz \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z} = (d\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{v}.$$

Dunque esprimiamo la conservazione del momento mediante:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p \quad (1.2)$$

dove D/Dt é la derivata strumentale corrispondente a $\partial/\partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)$. La formula (1.2) é detta Equazione di Eulero. Nel caso di ulteriori forze agenti, come gravità o attriti, vanno aggiunti nuovi termini nella parte destra dell'equazione. L'equazione puó essere riespressa convenientemente servendoci del formalismo tensoriale. Abbiamo, utilizzando la notazione di Einstein sulle somme:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} v_i.$$

Usando l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k}$$

e riscrivendo l'equazione di Eulero nella forma:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

otteniamo:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \rho}{\partial x_i} - v_i \frac{\partial \rho v_k}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_i v_k).$$

Riscrivendo il termine della pressione rispetto alla coordinata x_i mediante la delta di Kronecker δ_{ik} (il tensore unitario, le cui componenti sono 1 per $i = k$ e 0 per $i \neq k$)

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \delta_{ik} \frac{\partial p}{\partial x_k}$$

otteniamo infine

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} \quad (1.3)$$

dove il tensore Π_{ik} é definito come

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k. \quad (1.4)$$

Il tensore é chiaramente simmetrico, e rappresenta il flusso del momento. In particolare, la componente Π_{ik} rappresenta la densità di flusso della componente i del momento attraverso una superficie unitaria perpendicolare all'asse x_k . Il tutto é reso evidente dall'integrazione su un volume V

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho v_i dV = - \int \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} dV$$

che, reso un integrale di superficie attraverso il teorema di Green

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho v_i dV = - \oint \Pi_{ik} d\mathbf{f}_k$$

mostra come il tensore Π_{ik} si comporti come un flusso. $d\mathbf{f}_k$ é la superficie infinitesima orientata nella direzione \mathbf{k} . Le due componenti del tensore hanno natura ben diversa. La prima, $p\delta_{ik}$, rappresenta la variazione di momento dovuta all'applicazione di uno sforzo esterno, la pressione. Invece la seconda, $\rho v_i v_k$ rappresenta il flusso della massa, che muovendosi porta via con sé momento.

Per quanto riguarda l'aspetto energetico, l'energia del fluido é definita per un'unità di fluido come

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon$$

dove il primo termine é l'energia cinetica ed il secondo l'energia interna. Utilizzando l'equazione di continuitá (1.1) e quella del moto (1.2), ed introducendo le relazioni termodinamiche

$$dw = Tds + (1/\rho)dpd\epsilon = Tds - pdV,$$

dove w é l'entalpia definita dalla relazione termodinamica $dw = Tds + Vdp$, si vede che la variazione dell'energia é data da

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon \right) = -\nabla \cdot \left[\rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2}v^2 + w \right) \right] \quad (1.5)$$

La quantità $\rho \mathbf{v}(\frac{1}{2}v^2 + w)$ rappresenta il vettore di flusso dell'energia. Il suo modulo quantifica l'energia che attraversa nell'unità di tempo l'unità di area perpendicolare alla direzione della velocità. Il flusso può essere riscritto in termini di ϵ , considerando che $w = \epsilon + p/\rho$, ed integrando su un volume si ottiene:

$$- \oint \rho \mathbf{v}(\frac{1}{2}v^2 + \epsilon) ds - \mathbf{v} ds.$$

Si vede così che il flusso di energia è dovuto a quella trasportata dalla massa di fluido, nelle componenti cinetica ed interna, e dal lavoro fatto dalle forze di pressione.

1.2 Fluidi Viscosi

Le equazioni riportate precedentemente, in particolare quella che esprime la conservazione del momento, si riferiscono a fluidi *ideali*, ovvero a fluidi le cui particelle non interagiscono tra loro in alcun modo. I fluidi *reali* però differiscono da quelli ideali per la presenza di attriti interni tra le particelle componenti il fluido, che in quanto attriti hanno natura dissipativa. L'attrito nei fluidi è detto attrito viscoso, e fluidi viscosi sono tutti quei fluidi in cui la viscosità è un elemento non trascurabile in termini di dissipazione energetica. Come espresso da (1.3), la variazione di momento è esprimibile mediante un tensore. Per un fluido viscoso tale tensore va modificato, o meglio integrato, in modo da tenere conto anche dell'apporto viscoso. Per fare ciò aggiungiamo al flusso di momento ideale il termine viscoso $-\sigma'_{ik}$:

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma'_{ik} = -\sigma_{ik} + \rho v_i v_k. \quad (1.6)$$

Il tensore $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik}$ è detto tensore di sforzo, o tensore di *stress*, mentre σ'_{ik} è il tensore di stress viscoso. Va notato come Π_{ik} nel caso di fluidi ideali rappresenti un trasferimento di momento del tutto reversibile, mentre la viscosità determina un trasferimento irreversibile, da punti in cui la velocità è alta verso punti in cui è bassa. σ_{ik} dá la parte del flusso di momento che non è semplicemente trasportato dalla massa stessa in movimento. Possiamo abbozzare la forma generale del tensore di stress viscoso σ'_{ik} in seguito ad alcune considerazioni. Innanzitutto σ'_{ik} deve dipendere dalle derivate spaziali della velocità, in quanto l'attrito interno emerge solo se diverse particelle di fluido si muovono a velocità diverse. Inoltre, se i gradienti della velocità sono piccoli possiamo supporre che il trasferimento di momento dovuto alla viscosità dipenda solo dalle derivate prime della stessa, e σ'_{ik} sia funzione lineare delle derivate $\partial v_i / \partial x_k$. Non possono esserci termini di σ'_{ik} indipendenti dalle derivate $\partial v_i / \partial x_k$ in quanto σ'_{ik} deve svanire per velocità costanti. Infine va notato che σ'_{ik} deve svanire anche quando il fluido ruota uniformemente, poiché anche in questo caso non ci sono attriti. Le somme

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$$

sono combinazioni lineari delle derivate $\partial v_i / \partial x_k$ e si annullano quando $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$, quindi sono perfette per rappresentare il tensore in questione. Più in generale, un tensore di rango due papabile per rappresentare σ'_{ik} è:

$$\sigma'_{ik} = a \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + b \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ik}$$

dove a e b sono scalari indipendenti dalla velocità.

È conveniente riesprimere la formula dividendo la componente a traccia nulla dalla componente di traccia, e sostituendo a e b con altre costanti:

$$\sigma'_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \xi \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \quad (1.7)$$

L'espressione tra parentesi, a traccia nulla, è detta tensore di *stress deviatorico*. Le costanti η e ξ sono i cosiddetti *coefficienti di viscosità*. Definita la forma del tensore di stress viscoso, le equazioni del moto per un fluido viscoso possono essere derivate a partire dall'equazione di Eulero, aggiungendo il termine di attrito $\partial\sigma'_{ik}/\partial x_k$:

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\xi \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) \quad (1.8)$$

In generale η e ξ , essendo funzioni di pressione e temperatura, assumono valori variabili nel fluido ma nella maggior parte dei casi le loro oscillazioni sono così leggere da poter essere considerate costanti. Questo ci permette di portarle fuori dall'operatore di gradiente, ed ottenere:

$$\frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} = \eta \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \xi \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} + \left(\xi + \frac{1}{3} \eta \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}.$$

Considerando che

$$\partial v_l / \partial x_l \equiv \nabla \cdot \mathbf{v} \quad \partial^2 v_i / \partial x_k \partial x_k \equiv \nabla^2 v_i$$

possiamo riscrivere l'equazione del moto in forma vettoriale,

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v} + \left(\xi + \frac{1}{3} \eta \right) \nabla \nabla \cdot \vec{v} \quad (1.9)$$

che per flussi incomprimibili, ovvero in cui $\nabla \cdot \mathbf{v}$, si scrive

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (1.10)$$

L'equazione (1.10) è l'equazione di Navier-Stokes, equazione fondamentale che governa la dinamica dei fluidi viscosi. Per flussi incomprimibili il tensore di stress assume la semplice forma

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right).$$

La viscosità di un fluido comprimibile è quindi determinata da un solo coefficiente; visto che la gran maggioranza dei fluidi può essere considerata incomprimibile, solo il coefficiente di *viscosità dinamica* è di generale importanza, ed al suo fianco viene definito il coefficiente di *viscosità cinematica*

$$\nu = \eta / \rho \quad (1.11)$$

La determinazione del moto di un fluido, ovvero del campo di velocità di un flusso, passa quindi per la risoluzione dell'equazione di Navier-Stokes, affiancato dalle opportune condizioni al contorno. Ad esempio, per fluidi a contatto con superfici solide è richiesto che la velocità del fluido sulla superficie sia nulla, sia nella componente normale che in quella tangenziale; nel caso generale di superfici in movimento la velocità del fluido deve

essere uguale alla velocità della superficie.

La risoluzione del problema è tutt'altro che banale. Sebbene le equazioni siano ampiamente utilizzate nei più svariati contesti fisici ed ingegneristici non è ancora stata dimostrata l'esistenza di soluzioni in tre dimensioni e, in caso di esistenza, non è ancora dimostrato che tali soluzioni siano non singolari. Il Clay Mathematics Institute ha annoverato il problema di esistenza e regolarità delle Navier-Stokes tra i sette più importanti problemi aperti in matematica, ed offre tuttora 1 milione di dollari per una sua risoluzione od un contro esempio.

1.3 Numero di Reynolds e Tipologie di Flusso

La descrizione esaustiva di un flusso è data dal campo di velocità \mathbf{v} soluzione della Navier-Stokes associata. Ma una serie di risultati importanti è ottenibile anche da semplici considerazioni sulle dimensioni delle varie quantità fisiche in gioco e sulle geometrie del problema. In particolare notiamo come flussi caratterizzati dalle stesse dimensioni e geometrie si comportino in modo simile. Ad esempio i moti in un fluido di due corpi sferici sono *geometricamente simili*. Prendendo in considerazione un flusso stazionario intorno ad un corpo solido, in cui la velocità è in ogni punto indipendente dal tempo, i parametri fondamentali che regolano il flusso sono: la viscosità cinematica ν , la velocità del flusso principale u e la lunghezza caratteristica del corpo l . Le tre quantità possono essere combinate in un parametro adimensionale R :

$$R \equiv \rho ul / \eta = ul / \nu. \quad (1.12)$$

Il parametro R è il numero di Reynolds del flusso. Esso definisce il rapporto tra le forze inerziali e quelle viscosi agenti nel flusso. Di conseguenza quantifica la loro importanza nell'evoluzione del sistema. R può essere definito nelle più svariate situazioni in cui un fluido è in moto relativo rispetto ad una superficie o ad un corpo. Il parametro l può ad esempio rappresentare la lunghezza di un aereo o di una nave. È proprio perché permette di qualificare la natura delle forze agenti che il Numero di Reynolds accomuna flussi dello stesso tipo. Flussi dal basso valore di R si comportano in maniera molto differente rispetto a flussi dall'alto R . Convenzionalmente sono distinte due tipologie di flusso: i flussi laminari ed i flussi turbolenti. I primi sono identificati da un basso R , e sono dominati da forze viscosi. Al contrario, per valori di R più alti, il flusso si fa molto più complesso, ed è detto turbolento. Il valore R_{cr} a cui avviene la transizione tra le due tipologie di flusso non è univocamente determinato e dipende dalla situazione specifica.

I flussi laminari sono i più semplici da studiare, ed evolvono prevedibilmente nello spazio. In questo caso il fluido scorre su superfici parallele, senza interruzioni tra le superfici. Non c'è mescolamento laterale e le superfici scorrono le une sull'altre come carte da gioco. Il moto delle particelle è ordinato ed evolve coerentemente alle superfici di contorno. Sono del tutto assenti vortici e mulinelli.

Un flusso turbolento é molto irregolare e il suo studio costituisce un problema di notevole difficultá. Ad oggi non é ancora stata elaborata una teoria convincente e completa che inquadri in modo soddisfacente la turbolenza, e la ricerca é in corso d'opera. Possono essere forniti svariati esempi di regime turbolento: basti pensare alla formazione delle nuvole nell'atmosfera o al moto dell'acqua nei fiumi. Moltissimi altri fenomeni meno banali si comportano in maniera analoga. Dal sangue che scorre nelle nostre vene ed arterie all'aria che scorre nei nostri polmoni. Dalle correnti oceaniche a quelle generate dal passaggio di navi e sottomarini. In realtà la stragrande maggioranza dei flussi che emergono in natura e nelle applicazioni ingegneristiche é in qualche modo di natura turbolenta, ed i flussi laminari stessi se perturbati anche in minima misura sfociano in flussi turbolenti. É per questo che é necessario insistere sullo studio del fenomeno in questione: i vantaggi ed i benefici che deriverebbero da una gestione piú efficiente delle turbolenze sono ingentissimi.

Chapter 2

Flussi Turbolenti

É molto difficile dare una definizione esaustiva di flusso turbolento. Possiamo però elencare rapidamente alcune proprietà caratteristiche:

- Irregolarità ed imprevedibilità : un flusso turbolento é irregolare sia nello spazio che nel tempo e mostra pattern casuali e non predicibili.
- Ordine Statistico : dall'irregolarità del flusso emerge un certo ordine statistico e quantità medie sono regolari e predicibili.
- Ampio spettro di scala : il moto si compie irregolarmente su svariate scale di grandezza, ed ha numerosissimi gradi di libertà.
- Mescolamento e Diffusività : le particelle di fluido compiono traiettorie complicate, causando un rapido mescolamento tra le diverse parti del fluido; questo mescolamento accresce notevolmente la diffusione, potenziando il trasporto di momento, energia, calore ed altre quantità correlate.
- Vortex Stretching : é l'allungamento di vortici in flussi tridimensionali, associato ad un corrispondente aumento della componente della velocità nella direzione dell'allungamento, dovuto alla conservazione del momento angolare; é un meccanismo intrinsecamente tridimensionale che gioca un ruolo fondamentale nelle turbolenze.

Flussi turbolenti reali coinvolgono vari regimi allo stesso tempo. Un tipico flusso generato da un oggetto, ad esempio, mostra un moto laminare in corrispondenza dell'estremità nel verso contrario al flusso, uno strato turbolento nel verso del flusso e la formazione di una scia turbolenta. Un altro chiaro esempio di flusso a più regimi é quello del fumo di una sigaretta. Inizialmente il flusso é laminare, ma salendo il fumo aumenta la lunghezza caratteristica del flusso; il Numero di Reynolds aumenta fino al valore critico R_{cr} a cui avviene la "rottura" del flusso laminare in una disordinata turbolenza.

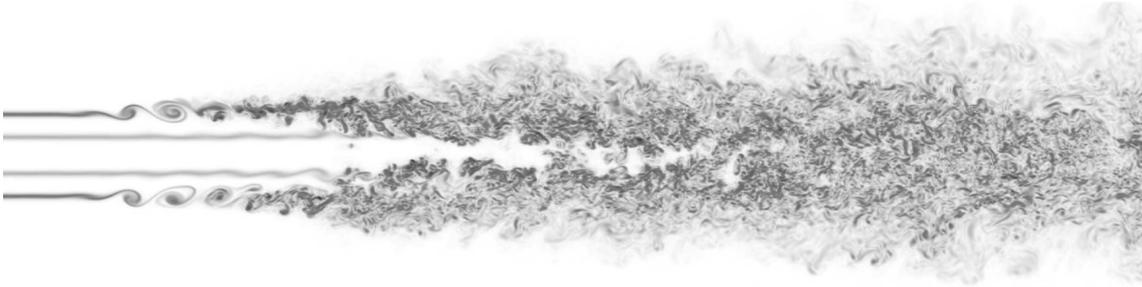


Figure 2.1: Flusso in transizione da moto laminare a turbolento

Come già accennato uno studio del moto istantaneo di una turbolenza é improponibile. I gradi di libertà aperti sono troppi, troppe le variabili indipendenti da gestire. Inoltre, anche una leggerissima variazione nelle condizioni iniziali o al contorno produrrebbe ampie variazioni nelle soluzioni. L'approccio di studio é quindi quello statistico e la turbolenza é considerata un sistema stocastico. In particolare viene utilizzato il concetto di *ensamble statistico*. Le ripetizioni di un evento x sono del tutto indipendenti ed il valor medio X é dato da

$$X = \langle x \rangle \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n \quad (2.1)$$

Ovviamente é impossibile ottenere la media d'ensamble sperimentalmente, in quanto non possiamo effettuare una misura infinite volte, ma la media sarà quella aritmetica su N misure. La quantità X é anche detta *valore atteso*. Ad esempio, la velocità nel punto \mathbf{x} al tempo t può essere considerata una variabile random $v_i(\mathbf{x}, t)$. In seguito ad un gran numero di esperimenti vengono raccolte le grandezze $v_i^{(n)}(\mathbf{x}, t)$, cosicch e la media d'ensamble é

$$\langle v_i(\mathbf{x}, t) \rangle \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v_i^{(n)}(\mathbf{x}, t). \quad (2.2)$$

La varianza quantifica poi come i valori della variabile stocastica sono distribuiti attorno alla media:

$$\text{var}[x] \equiv \langle (x')^2 \rangle = \langle [x - X]^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - X^2.$$

2.1 Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations (RANS)

La turbolenza, pur essendo un moto caotico, é soluzione delle stesse equazioni del moto che governano il comportamento di ogni fluido. Partendo dall'idea che ogni flusso laminare, se perturbato, sfocia in un flusso caotico é conveniente analizzare il flusso in due parti distinte: una componente media principale ed una componente fluttuante. La velocità e la pressione istantanea saranno quindi scritte

$$v = \bar{v} + v' \quad p = \bar{p} + p'.$$

Tale decomposizione é dovuta ad un'idea di Richardson, e per questo ci si riferisce ad essa come alla decomposizione di Richardson.

Sostituendo le nuove espressioni nelle equazioni di Navier-Stokes per flussi incomprimibili

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \right)$$

si ottiene:

$$\rho \left[\frac{\partial(\bar{v}_i + v'_i)}{\partial t} + (\bar{v}_j + v'_j) \frac{\partial(\bar{v}_i + v'_i)}{\partial x_j} \right] = -\frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x_i} + \mu \left[\frac{\partial^2(\bar{v}_i + v'_i)}{\partial x_j \partial x_j} \right].$$

Esaminando il secondo termine a sinistra si vede che

$$(\bar{v}_j + v'_j) \frac{\partial(\bar{v}_i + v'_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial(\bar{v}_i + v'_i)(\bar{v}_j + v'_j)}{\partial x_j} - (\bar{v}_i + v'_i) \frac{\partial(\bar{v}_j + v'_j)}{\partial x_j}$$

dove l'ultimo termine a destra svanisce per via dell'equazione di continuità. Dunque la Navier-Stokes diventa:

$$\rho \left[\frac{\partial(\bar{v}_i + v'_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{v}_i + v'_i)(\bar{v}_j + v'_j)}{\partial x_j} \right] = -\frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x_i} + \mu \left[\frac{\partial^2(\bar{v}_i + v'_i)}{\partial x_j \partial x_j} \right].$$

A questo punto viene presa la media d'ensemble su tutte le variabili dell'equazione, tenendo presente che la media di una grandezza fluttuante come v'_i é nulla, ma non lo é la media del prodotto di due variabili fluttuanti.

Si ottiene quindi

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}_i \bar{v}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}'_i \bar{v}'_j}{\partial x_j} \right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j \partial x_j}.$$

Sviluppando l'ultimo termine sulla parte sinistra dell'equazione

$$\frac{\partial \bar{v}_i \bar{v}_j}{\partial x_j} = \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j}$$

si vede che l'ultimo termine a destra è nullo come risultato dell'equazione di continuità mediata. La Navier-Stokes può quindi in definitiva essere riespressa come segue:

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \right] = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - \rho \bar{v}'_i \bar{v}'_j \right). \quad (2.3)$$

Il termine $\rho \bar{v}'_i \bar{v}'_j$ è detto *stress di Reynolds*, R_{ij} . È un termine non-lineare dovuto alle fluttuazioni delle velocità, ed ha un ruolo fondamentale in quanto è proprio la sua comparsa a rendere il problema delle turbolenze così spinoso. Viene trattato come uno stress per comodità ma fisicamente non lo è. La sua natura è ben diversa da quella dello stress viscoso, ad esempio. Quest'ultimo può essere direttamente relazionato ad altre proprietà del flusso da equazioni costitutive che dipendono solo dalle proprietà *del fluido*. Inoltre la scala caratteristica a cui trattiamo il problema, ben più piccola di quella del flusso, è al contempo molto più grande delle lunghezze molecolari che caratterizzano le interazioni molecolari a cui avviene effettivamente il trasferimento di momento. È proprio su questo punto che si fonda l'approssimazione del mezzo continuo.

Al contrario lo stress di Reynolds sorge dal flusso stesso, e le scale a cui siamo interessati sono le stesse del moto fluttuante che dà origine allo stress.

La comparsa degli R_{ij} aggiunge sei nuove componenti incognite al problema. L'assenza di altrettante nuove equazioni ci lascia in un vicolo cieco: ci si riferisce al problema come al *problema di Chiusura delle Turbolenze*. La questione viene allo stato attuale dell'arte affrontata con l'utilizzo di metodi numerici e tecniche computazionali, o adottando delle approssimazioni a certi ordini.

L'approssimazione di Boussinesq tratta le fluttuazioni turbolente come elementi che accrescono la viscosità del flusso; il modello di Parndtl *mixing-length* cerca di mettere in pratica l'idea di Boussinesq sotto il profilo computazionale. I due apporti costituiscono insieme il *modello algebrico* delle turbolenze.

Altri modelli, come i modelli $k - \epsilon$ e $k - \omega$ introducono nuove equazioni. Sono in corso ricerche che mirano a determinare nel modo più appropriato i parametri introdotti ad-hoc in questi modelli, che sono fortemente dipendenti dalle geometrie dei flussi. La dipendenza dalle geometrie può essere giustificata dal fatto che le RANS dovrebbero regolare il flusso anche a grandi scale del moto, che sono fortemente influenzate dalla geometria. La fluidodinamica computazionale (CFD) è quindi uno strumento fondamentale nello studio delle turbolenze, soprattutto in ambito ingegneristico. Anche sotto il profilo più teorico le simulazioni numeriche (DNS), che cercano di risolvere il comportamento del flusso a tutte le scale attive, sono importanti per svelare il comportamento del flusso soprattutto in fase di transizione tra i regimi laminare e turbolento. Al momento la potenza degli strumenti disponibili non consente la risoluzione a tutte le scale (altrimenti ogni problema sarebbe già risolto) e le simulazioni si limitano a flussi con un numero di Reynolds relativamente basso. Un metodo CFD di largo utilizzo e che sta dando buoni risultati è il *large-eddy simulation* (LES), teorizzato nel 1963 dal meteorologo americano Joseph Smagorinsky per la modellazione delle correnti atmosferiche. Il modello è una

via di mezzo tra l'approccio RANS e quello di simulazione numerica diretta DNS. In ogni caso la scelta del miglior metodo per una certa applicazione dipende molto dal numero di Reynolds del flusso e dalle conoscenze pregresse riguardo situazioni simili, che permettono di aggiustare al meglio i parametri.

2.2 Anatomia e Fisiologia della Turbolenza

Come abbiamo visto, il problema di chiusura ci pone davanti ad un muro: le equazioni della dinamica non sono sufficienti ad ottenere le risposte che cerchiamo, a causa di un'insieme di nuove incognite che emergono come diretta conseguenza della natura del flusso turbolento, gli stress di Reynolds. Per superare questo muro é necessario cercare una nuova via, che permetta di raggiungere una visione d'insieme piú completa e coerente dal punto di vista fisico, e che getti luce sul cammino percorso dall'energia. Da dove viene l'energia, e dove si sposta? Secondo quali meccanismi?

2.2.1 Anatomia

Per prima cosa va delineata l'anatomia di un flusso turbolento. Un primo abbozzo é già stato riportato nella scomposizione di Richardson in flusso principale e componente fluttuante. É però piú corretto vedere il flusso come un insieme di vortici elementari interagenti distribuiti su tutto lo spettro di scale attive. I vortici piú grandi hanno dimensioni caratteristiche paragonabili a quelle del flusso stesso. La loro velocità é quindi quella del flusso, e piú in generale tutte le proprietà macroscopiche del flusso si possono riferire a questi grandi vortici. I vortici piú piccoli rappresentano invece le piccole fluttuazioni caratteristiche delle turbolenze, e sono quelli di maggiore interesse fisico in quanto coinvolgono le scale a cui viene dissipata energia.

Il modello matematico universalmente accettato per la descrizione di un flusso, alla luce di queste premesse, é la **Decomposizione Ortogonale Propria**. Il flusso viene decomposto in una serie di modi ortogonali, ordinati in base all'energia che contengono. L'idea su cui é fondato il modello é la seguente. Dato un campo di velocità random $v_i(\mathbf{x}, t)$ vogliamo trovare un campo vettoriale deterministico $\phi_i(\mathbf{x}, t)$ che ha proiezione massima sul vettore casuale v_i . Ovvero cerchiamo un campo deterministico del tutto nuovo ϕ_i per cui $\langle |(v_i, \phi_i)|^2 \rangle$ é massimizzato. Possiamo pensare v_i e ϕ_i come funzioni appartenenti ad uno spazio di Hilbert, il cui prodotto interno é

$$(v_i(\mathbf{x}, t), \phi_i(\mathbf{x}, t)) = \int_V v_i(\mathbf{x}, t) \phi_i^*(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$$

dove l'integrale é su tutto il dominio in cui si estende il campo della perturbazione. Tramite il calcolo variazionale puó essere agilmente mostrato che la scelta appropriata per ϕ_i é la soluzione dell'equazione integrale

$$\int_V R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \phi_j(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \lambda \phi_i(\mathbf{x}) \quad (2.4)$$

dove $R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ é la funzione di correlazione data da

$$R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \equiv \langle v_i(\mathbf{x}) v_j(\mathbf{x}') \rangle \quad (2.5)$$

e

$$\lambda = \langle |\alpha^2| \rangle \quad (2.6)$$

dove α é definita come

$$\alpha = \int_V v_i(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (2.7)$$

Quest'equazione integrale é parte della famiglia di equazioni integrali di Fredholm. Queste hanno in genere molti set di soluzioni ϕ_i, λ_i , la cui natura dipende dal nucleo e dal tipo di regione su cui é preso l'integrale. Dunque la scelta di ϕ_i si riduce a trovare una soluzione all'equazione integrale in cui il nucleo é dato dalla funzione di correlazione $R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$.

Le soluzioni $\phi_i^{(n)}$ sono dette *autofunzioni*, mentre i λ_n sono i rispettivi *autovalori*. Tali soluzioni formano un sistema ortogonale, ovvero

$$\int_V \phi_i^{(p)} \phi_i^{(n)} d\mathbf{x} = \delta_{pn}$$

Date queste soluzioni ortogonali possiamo quindi ricostruire il campo di velocità originario cosí:

$$v_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_i^{(n)} \quad (2.8)$$

I coefficienti random a_n devono essere determinati con una proiezione sul campo di velocità:

$$a_n = \int_V v_i \phi_i^{*(n)} d\mathbf{x}.$$

Usando l'ortonormalità delle $\phi_i^{(n)}$ può essere dimostrato che

$$\lambda_n = \langle a_n a_m \rangle \delta_{mn}$$

e i coefficienti random sono quindi incorrelati. Dal momento che possiamo ricostruire il campo di velocità ci é anche possibile ricostruire il tensore di stress di Reynolds R_{ij} , che risulta:

$$R_{i,j}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \phi_i^{(n)}(\mathbf{x}) \phi_j^{(n)}(\mathbf{x}'). \quad (2.9)$$

Nel caso di campi *omogenei* (la cui statistica é indipendente dall'origine) e periodici (in cui $v(x) = v(x + L)$) le soluzioni sono nella forma $\phi(\mathbf{x}) \propto \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}]$ dove \mathbf{k} é il numero d'onda.

Per i campi omogenei tutti i valori di \mathbf{k} sono possibili, $-\infty < k < \infty$, ed il campo é ricostruito mediante

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{v}(k) e^{ikx} dk \quad (2.10)$$

dove il coefficiente \hat{v} é la trasformata di Fourier del campo

$$\hat{v}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(x) e^{-ikx} dx.$$

Essendo la variabile k continua, le autofunzioni non sono numerabili.

Per i campi periodici la situazione é simile, ma i numeri d'onda k non sono continui bensí discreti ed assumono i valori $k = 2\pi n/L$, con n intero. Le autofunzioni sono quindi numerabili ed il campo di velocità é espandibile in Serie di Fourier:

$$v(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{i2\pi nx/L}. \quad (2.11)$$

É a questo punto evidente che il modo piú conveniente di analizzare flussi omogenei e periodici é l'analisi di Fourier. Ma tali flussi sono per definizione estesi infinitamente; gli integrali di Fourier in senso ordinario non sono quindi convergenti ed é necessario *generalizzare* il problema usando l'integrazione di Fourier-Stieljes o ricorrendo all'utilizzo di funzioni generalizzate.

2.2.2 Fisiologia

Analizziamo ora come i vari vortici di diverse scale interagiscono tra loro e qual é il loro comportamento energetico. La linea guida é fornita dal *Modello a Cascata* di Richardson. Come é già stato accennato possiamo dividere i vortici in "grandi" e "piccoli" vortici. I vortici "grandi" sono quelli la cui grandezza di scala é paragonabile al flusso stesso. I "piccoli" sono di dimensioni molto inferiori, ed agiscono sotto una scala di soglia caratteristica. Nei primi le forze in gioco sono prevalentemente inerziali, mentre nei secondi la viscosità diventa l'elemento piú importante.

Secondo questo modello la maggior parte dell'energia é contenuta a grandi scale. Per mezzo di forze inerziali parte di questa é trasferita a vortici via via piú piccoli dove viene infine dissipata per mezzo delle forze viscosi. Il concetto é esposto nella breve poesia composta dallo stesso Richardson:

Big whorls have little whorls

Big whorls have little whorls
That feed on their velocity,
And little whorls have lesser whorls
And so on to viscosity.

Indipendentemente dal numero di Reynolds del flusso, questa é la struttura dei processi di trasferimento e dissipazione di energia. La viscosità interviene sempre sulle piccole

scale e dissipa energia in calore.

La distribuzione di energia nei diversi modi é descritta da una funzione $\mathcal{S}(k)$, tale che l'energia totale del flusso é

$$e = \int_0^\infty \mathcal{S}(k) dk$$

e $\mathcal{S}(k)dk$ é l'energia della parte del flusso formata dai vortici con numero d'onda tra k e $k + dk$. L'energia dissipata per l'azione della viscosità é invece fornita dall'integrazione

$$\epsilon = 2\nu \int_0^\infty k^2 \mathcal{S}(k) dk$$

Una teoria che descrive il comportamento ad alti numeri d'onda é stata elaborata da Kolmogorov nel 1941 e costituisce tutt'ora un punto di riferimento in materia. La teoria, detta della *turbolenza localmente isotropa*, ammette inhomogeneità ed anisotropia sulle larghe scale, assumendo che con il processo di cascata energetica gli effetti orientativi diventano sempre piú deboli finché nei vortici piú piccoli il moto diventa statisticamente omogeneo ed isotropo. Kolmogorov propone quindi che il regime statistico dei vortici di piccola scala sia universale e dipenda solo dal coefficiente di viscosità cinetica ν e dal tasso di trasferimento energetico ϵ . Il *range di equilibrio* é definito come il range di scale su cui vale l'universalità.

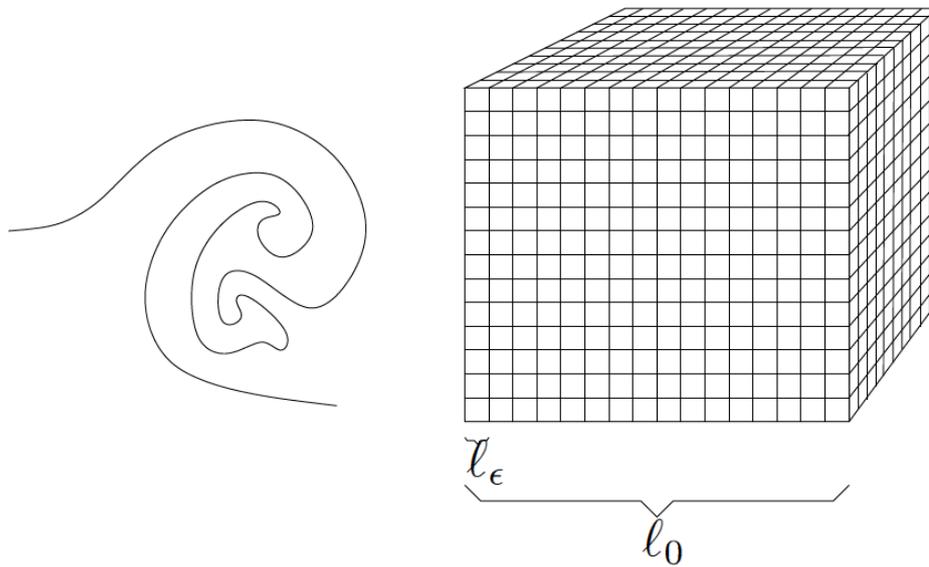


Figure 2.2: Schema raffigurante la divisione del flusso in vortici di diverse scale, da l_0 ad l_ϵ . Il numero totale N di gradi di libertà é dell'ordine di $N \sim (l_0/l_\epsilon)^3$, che puó essere stimato in termini del numero di Reynolds come $N \sim R^{9/4}$

Una semplice analisi dimensionale mostra che l'unica combinazione algebrica di ν ed ϵ con le dimensioni di una lunghezza é $l_\epsilon = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$, che é interpretata come la lunghezza di scala di soglia a cui gli effetti della viscosità diventano notevoli. La scala l_ϵ é nota come *lunghezza di Kolmogorov*. La teoria assume un'ampia separazione tra le scale che contengono energia, dell'ordine l_0 e quelle che dissipano energia dell'ordine l_ϵ , cosicché il processo di cascata avviene nel voluminoso spettro di scala l , $l_0 \gg l \gg l_\epsilon$. In questo range, detto *range inerziale*, gli effetti viscosi sono ancora trascurabili.

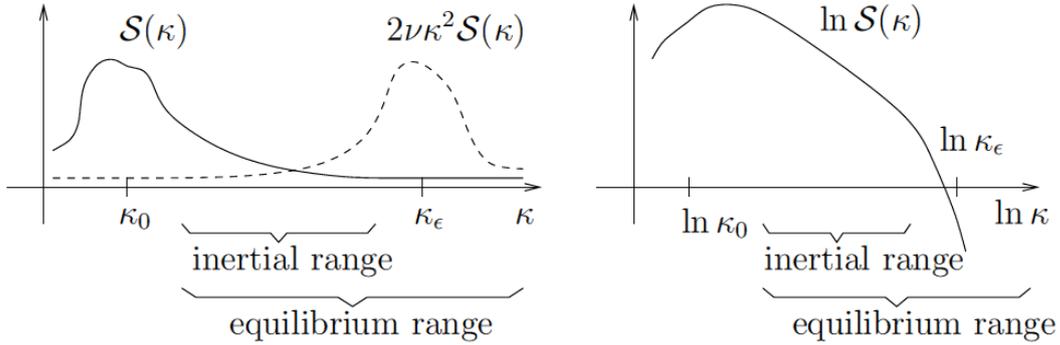


Figure 2.3: Tipica distribuzione dello spettro energetico e dello spettro dissipativo, in scala non-logaritmica e scala logaritmica

In figura (2.3) é rappresentata una tipica distribuzione di energia per un flusso turbolento: l'energia é concentrata a grandi scale, mentre la dissipazione attorno la scala di Kolmogorov l_ϵ .

Nel range inerziale vortici di scala l , la cui velocità caratteristica é u_l , trasferiscono energia cinetica ai vortici piú piccoli nel tempo caratteristico $\tau = l/u_l$, detto *tempo di circolazione*. L'energia cinetica trasferita é allora

$$\epsilon_l \sim \frac{u_l^2}{\tau_l} = \frac{u_l^3}{l}.$$

In equilibrio statistico l'energia che si perde verso le piccole scale é la stessa che arriva dalle grandi scale, uguale all'energia cinetica totale dissipata per viscosità. Dunque, $\epsilon_l \equiv \epsilon$, e troviamo

$$\epsilon \sim \frac{u_l^3}{l} \quad (2.12)$$

Segue inoltre che $\tau_l = l/u_l = l(\epsilon l)^{-1/3} l^{2/3}$, cosicché il tempo di circolazione decresce con la lunghezza di scala fino a diventare dell'ordine del tempo di dissipazione viscosa $(\nu/\epsilon)^{1/2}$ a lunghezze $l \sim l_\epsilon$. Una relazione simile puó essere ottenuta per le grandi scale, nell'analogia formula

$$\epsilon \sim \frac{u_0^3}{l_0} \quad (2.13)$$

Chapter 3

Acustica Lineare

3.1 Perturbazioni Acustiche

L'acustica é la disciplina che si occupa dello studio di perturbazioni sonore, ovvero di leggere deviazioni dai valori di equilibrio di pressione, densità e velocità p_0 , ρ_0 and v_0 . Le perturbazioni si aggiungono all'equilibrio determinando le nuove grandezze perturbate:

$$p = p_0 + p' \quad \rho = \rho_0 + \rho' \quad (3.1)$$

Esse si propagano come onde e nel range di frequenze tra 20Hz e 20kHz possono essere rilevate dall'orecchio umano. Le nuove espressioni devono continuare a risolvere le equazioni di conservazione (1.1) e (1.2). Sappiamo che densità e pressione sono legate da una relazione $p = p(\rho)$, e possiamo semplificare il problema espandendo p' in serie di ρ' ,

$$p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0 \rho' + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}\right)_0 (\rho')^2 + \dots \quad (3.2)$$

Così, considerando solo il primo ordine, otteniamo una *approssimazione lineare*, che conferisce alle equazioni (1.1) e (1.2) le forme:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0 \quad (3.3)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -\nabla p' \quad (3.4)$$

Inoltre possiamo scrivere la relazione tra pressione e densità, sempre al primo ordine:

$$p' = c^2 \rho' \quad c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0 \quad (3.5)$$

dove c é la velocità del suono.

Ovviamente affinché l'approssimazione sia valida é richiesto che i termini non lineari siano quasi sempre ed ovunque ben piú piccoli dei rispettivi termini lineari. Di conseguenza molti problemi non possono essere affrontati in quest'ottica. Dalle equazioni lineari, attraverso semplici rimaneggiamenti, é possibile derivare l'equazione d'onda, per primo scritta da D'Alembert nel caso uni-dimensionale di una corda vibrante nel 1747:

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (3.6)$$

L'equazione lega le variazioni nello spazio e del tempo delle variabili oscillanti, come la pressione. La stessa equazione puó essere ottenuta anche in seguito a delle considerazioni sul campo di velocità \mathbf{v} . Considerando nullo il rotore del campo é possibile introdurre un potenziale Φ , tale che \mathbf{v} ne sia il gradiente:

$$\mathbf{v} = \nabla \Phi \quad p = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

La versione lineare dell'equazione di Eulero (3.4) risulta soddisfatta ed utilizzando la conservazione della massa si ottiene

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0. \quad (3.7)$$

Si vede cosí che anche il potenziale velocità soddisfa l'equazione d'onda; Φ , seppur rappresenti una grandezza piuttosto astratta, é una quantità molto comoda da utilizzare per descrivere il campo acustico in quanto da essa possono essere ricavate tutte le altre proprietà del campo.

Una soluzione semplice ma molto utile dell'equazione d'onda é data dall'onda piana, dove ogni quantità oscilla solo su una qualche coordinata cartesiana s . ∇p ha solo una componente su s , e dunque $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ é in direzione di s . La soluzione generale é nella forma

$$p = f(t - c^{-1}s) + g(t + c^{-1}s) \quad (3.8)$$

dove f and g sono funzioni arbitrarie.

Un'altra semplice soluzione é l'onda sferica. Possiamo riscrivere l'equazione d'onda in coordinate sferiche (r, θ, ϕ) :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rp) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (3.9)$$

La soluzione ha quindi la struttura:

$$p(r, t) = r^{-1} f(t - c^{-1}r) + r^{-1} g(t + c^{-1}r) \quad (3.10)$$

Se l'unica sorgente é localizzata all'origine $g(t + c^{-1}r)$ é nulla e l'onda si sposta solo nella direzione positiva di r .

3.1.1 Analisi in Frequenza

Di fondamentale importanza nello studio delle perturbazioni acustiche é l'analisi in frequenza.

Una perturbazione é a frequenza costante se le variabili del campo oscillano sinusoidalmente nel tempo, cosicché, per la pressione:

$$p = p_{pk} \cos(\omega t - \phi) = p_{pk} \sin(\omega t - \phi') = \text{Re}(\hat{p} e^{-i\omega t}) \quad (3.11)$$

dove l'ampiezza p_{pk} , la frequenza angolare ω , l'ampiezza complessa \hat{p} e la fase ϕ sono indipendenti dal tempo. La frequenza della perturbazione é definita da

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (3.12)$$

ed é misurata in *hertz* (Hz), dove 1 Hz equivale ad 1 ciclo al secondo. Una perturbazione cosí definita si estende illimitatamente nel tempo.

In generale però $p(t)$ é una funzione piuttosto complessa, e raramente é esprimibile come una semplice sinusoide. Può invece essere scomposta in una somma di sinusoidi a diverse frequenze, col potente strumento dell'analisi di Fourier. Nel caso di segnali periodici di periodo T , può essere efficacemente utilizzata la Serie di Fourier, sommatoria di segnali elementari con frequenze discrete:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \hat{q}_n e^{-i\omega_n t} = \text{Re}(\sum_{n=0}^{\infty} \hat{p}_n e^{-i\omega_n t}) \quad (3.13)$$

dove $\omega_n = (2\pi/T)n$ e i coefficienti \hat{q}_n sono le ampiezze legate alle varie frequenze. In quanto $p(t)$ é reale, le due espressioni in (3.13) sono equivalenti, dato che

$$\hat{q}_n = \begin{cases} \frac{1}{2}\hat{p}_n & n > 0 \\ \hat{p}_0 & n = 0 \\ \frac{1}{2}\hat{p}_{-n}^* & n < 0 \end{cases}$$

La serie può anche essere utilizzata per descrivere un segnale generico in un intervallo di tempo T , ma senza periodicità la descrizione non é più valida fuori dall'intervallo.

Le singole componenti sinusoidali sono dette *armoniche* del segnale.

Nei casi reali i segnali $p(t)$ non si estendono all'infinito nel tempo, ma sono dei transienti. C'è sempre un inizio ed una fine. Il contenuto in frequenza del segnale é allora descritto dalla Trasformata di Fourier $\hat{p}(\omega)$:

$$\hat{p}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.14)$$

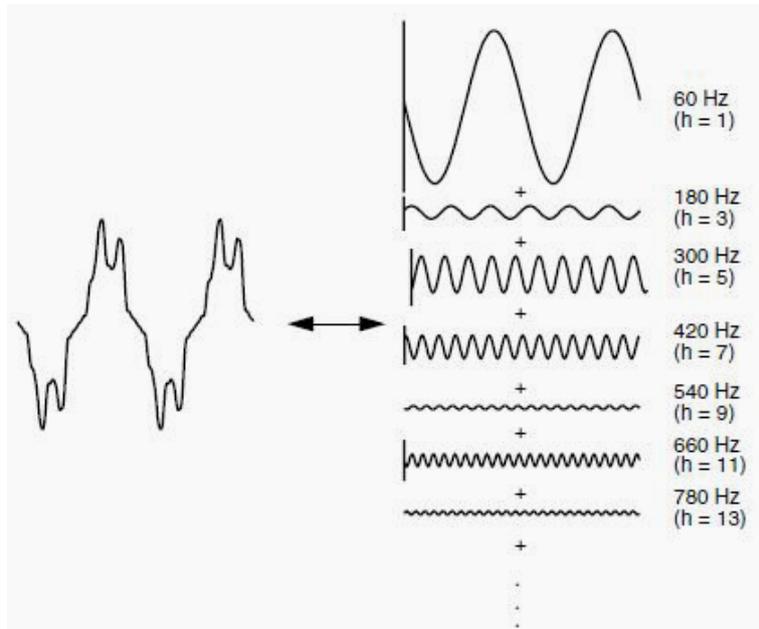


Figure 3.1: Scomposizione di un segnale periodico in una serie discreta di armoniche

mentre il segnale $p(t)$ può essere ricostruito grazie all'antitrasformata:

$$p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (3.15)$$

Trasformata ed antitrasformata permettono quindi di passare dal dominio dei tempi a quello delle frequenze e viceversa.

Lo strumento dell'analisi di Fourier è di incalcolabile importanza e offre uno sconfinato spettro di applicazioni.

Ad esempio, le forme d'onda dei moderni sintetizzatori di suoni sono assemblate mediante i metodi di *sintesi additiva* e *sottrattiva*, che operano aggiungendo o sottraendo armoniche con frequenze discrete.

Per la sintesi vocale allo stesso modo si sommano le cosiddette *formanti* per generare timbri di vario genere.

3.1.2 Equazione di Helmotz

Dal momento che le equazioni del campo sono lineari e presentano coefficienti indipendenti dal tempo, le variabili del campo possono oscillare in ogni punto alla stessa frequenza. ω può quindi essere considerata indipendente dalla posizione. Sostituendo alle variabili del campo le corrispondenti ampiezze e rimpiazzando l'operatore $\partial/\partial t$ con la quantità $-i\omega$ è possibile trovare equazioni che governano la dipendenza spaziale delle

ampiezze complesse. Dall'equazione d'onda é cosí ottenibile l'Equazione di Helmholtz

$$\nabla^2 \hat{p} + k^2 \hat{p} = 0 \quad (3.16)$$

dove il numero d'onda k é pari a ω/c . L'equazione é vantaggiosa, perché il numero delle variabili si riduce di uno, e perché spesso non siamo interessati alla componente temporale dell'oscillazione, bensí solo alla distribuzione spaziale delle ampiezze.

3.2 Intensitá e potenza

Di fondamentale importanza nel contesto applicativo ed ingegneristico é la quantificazione dell'energia trasportata da una perturbazione. Si definisce l'intensitá di un segnale come il prodotto della pressione p e della velocitá \mathbf{v} :

$$\mathbf{I} = p\mathbf{v}$$

Essa rappresenta il flusso di energia acustica e la sua espressione é derivata dalla legge di conservazione dell'energia per un campo acustico. Operando un prodotto scalare tra \mathbf{v} e la versione linearizzata dell'equazione di Eulero si ottiene

$$\mathbf{v} \cdot \left(\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) = -\mathbf{v} \cdot \nabla p = -\nabla \cdot (\mathbf{v}p) + p \nabla \cdot \mathbf{v} = -\nabla \cdot (p\mathbf{v}) - p \rho_0^{-1} \frac{\partial \rho'}{\partial t}$$

dove si é utilizzata un'identitá vettoriale e la versione linearizzata della conservazione della massa.

Riscrivendo il termine a sinistra come $(\partial/\partial t)(\frac{1}{2}\rho_0 v^2)$, e l'espressione $p\rho_0^{-1}\partial\rho'/\partial t$ come $(\partial/\partial t)(\frac{1}{2}p^2/\rho_0 c^2)$ il tutto puó essere riespresso come:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{I} = 0 \quad (3.17)$$

dove w é l'energia $w = \frac{1}{2}\rho_0 v^2 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{\rho_0 c^2}$ e l'intensitá definita come sopra rappresenta il flusso istantaneo di energia. Quello che piú ci interessa é però il valore medio dell'intensitá, ottenibile mediando semplicemente su un periodo od un intervallo sufficientemente lungo del segnale:

$$\mathbf{I}_{av} = [p(t)\mathbf{v}(t)]_{av}$$

Dato un segnale diviso in bande di frequenza descritte dalle pressioni $p_n(t)$, si definisce un'intensitá $\mathbf{I}_{n,av}$ per ogni banda e l'intensitá totale é data dalla loro somma $\sum_n \mathbf{I}_{n,av}$.

In caso di assenza di sorgenti l'integrale dell'intensità su una superficie chiusa S è nullo. Se c'è una sorgente l'integrale è invece diverso da zero e definisce la *potenza* della sorgente \mathcal{P} :

$$\mathcal{P} = \int \int_S \mathbf{I}_{av} \cdot \mathbf{n}_{out} dS \quad (3.18)$$

\mathcal{P} rappresenta l'energia acustica irradiata dalla sorgente in questione nell'unità di tempo.

Un'altra grandezza di interesse è la pressione quadratica media $(p^2)_{av}$ definita su un periodo T od un intervallo sufficientemente lungo di tempo come

$$(p^2)_{av} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p^2 dt$$

Anche in questo caso la grandezza può essere scomposta in bande di frequenza.

In tutti i contesti pratici ci si riferisce a pressione quadratica media, intensità e potenza in rapporto a dei valori di riferimento ed utilizzando una scala logaritmica. Si definisce il livello di pressione sonora come

$$L_p = 10 \log \frac{(p^2)_{av}}{p_{ref}^2}, \quad (3.19)$$

grandezza adimensionale misurata in decibel (dB). Analogamente si definiscono i livelli di intensità L_I e potenza L_P come

$$L_I = 10 \log \frac{|\mathbf{I}_{av}|}{I_{ref}} \quad L_P = 10 \log \frac{\mathcal{P}_{av}}{\mathcal{P}_{ref}}. \quad (3.20)$$

I valori di riferimento comunemente utilizzati sono $2 \times 10^{-5} Pa$ per la pressione, $10^{-12} W/m^2$ per l'intensità e $10^{-12} W$ per la potenza.

3.3 Sorgenti

Una sorgente acustica é un oggetto in grado di produrre potenza sonora. Ovvero qualunque corpo vibrante, in grado di innescare perturbazioni ai valori di equilibrio di pressione, densitá e velocitá, e generare fenomeni di compressione e dilatazione propagantisi nel mezzo. La presenza di una sorgente fa si che le equazioni di D'Alembert (3.6) e di Helmholtz (3.16) non siano piú omogenee. É necessario aggiungere un termine q caratteristico della sorgente nella parte destra dell'equazione. Ad esempio, nel caso di una sorgente puntiforme localizzata in \mathbf{x}_s l'equazione di Helmholtz diventa

$$(\nabla^2 + k^2)\hat{p} = \hat{A}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)$$

dove \hat{A} é l'ampiezza della sorgente. Equazioni di questo tipo sono risolte dalle Funzioni di Green. La Funzione di Green $\mathbf{G}(\mathbf{x}|\mathbf{x}_s)$ di un operatore differenziale lineare $L = L(x)$ é definita in generale come la soluzione dell'equazione

$$L\mathbf{G}(\mathbf{x}|\mathbf{x}_s) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s).$$

Se il nucleo di L é non banale la funzione di Green associata all'operatore non é unica, ma solitamente la combinazione di simmetrie e condizioni al contorno fa si che la soluzione ammessa sia unica.

Considerando l'equazione d'onda inhomogenea in una situazione analoga, si ha

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}G(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}_s, t_s) = \delta(t - t_s)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \quad (3.21)$$

dove ad agire é una sorgente puntiforme, localizzata in \mathbf{x}_s ed impulsiva, "accesa" nell'istante t_s . La funzione di Green é quindi la risposta del fluido allo stimolo impulsivo rappresentato dalla delta di Dirac, ed é detta *risposta all'impulso* del sistema. La rilevazione della risposta d'impulso permette di prevedere la risposta dal sistema ad uno stimolo qualunque, nota la sorgente, effettuando l'integrale di convoluzione tra la risposta all'impulso e la sorgente stessa. É con questo metodo che ad esempio vengono modellati i riverberi di stanze ed edifici. Integrali di convoluzione vengono utilizzati in ambito di produzione musicale per simulare il riverbero degli ambienti piú disparati.

Si noti che per considerazioni di casualitá G é nulla per $t < t_s$. Vale inoltre la relazione di reciprocitá

$$G(\mathbf{x}, t|\mathbf{y}, \tau) = G(\mathbf{y}, -\tau|\mathbf{x}, -t)$$

secondo cui il campo é simmetrico rispetto ad uno scambio tra sorgente ed ascoltatore. Il modello fisico con cui vengono interpretate le varie tipologie di sorgente acustica é quello dell'espansione polare.

3.3.1 Monopolo Acustico

Ogni sorgente sonora a simmetria sferica genera un'onda sferica uscente caratterizzata dalle grandezze

$$\hat{\Phi} = -\hat{Q}_s \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \quad \hat{p} = \hat{S} \frac{e^{ikR}}{R} \quad \mathcal{P} = \frac{2\pi|\hat{S}|^2}{\rho c} \quad (3.22)$$

dove $\hat{Q}_s = -4\pi\hat{S}/i\omega\rho$ é una costante e $R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|$ é la distanza radiale dal centro della sorgente. \hat{S} é detta *ampiezza di monopolo*. Una possibile realizzazione di una sorgente di questo tipo é una sfera vibrante, il cui raggio oscilla attorno al valore di equilibrio. Si può considerare il caso limite in cui il raggio della sfera collassi fino a zero, mantenendo però la sua natura vibrazionale. La sfera é quindi idealizzata come una sorgente puntiforme, o *monopolo acustico*.

L'azione del monopolo acustico può essere interpretato come quella di una sorgente di massa $q(t)$ variabile nel tempo. Infatti la variazione della densità del fluido a distanza r dalla sorgente é

$$\rho - \rho_0 = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{q'(t - r/c)}{r}.$$

Si noti che la grandezza fondamentale non é la quantità di massa introdotta $q(t)$, bensí il rate a cui questa varia, $q'(t)$.

3.3.2 Dipolo Acustico

La sovrapposizione dei campi di due monopoli a distanza \mathbf{d} , localizzati nei punti $\mathbf{x}_s + \mathbf{d}/2$ e $\mathbf{x}_s - \mathbf{d}/2$, e con ampiezze opposte \hat{S} e $-\hat{S}$, ovvero in opposizione di fase, genera un campo di *dipolo*. Nel limite in cui $kd \ll 1$ e dato $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s| \gg d$, la funzione di Green $G_k(\mathbf{x}|\mathbf{x}_s + \mathbf{d}/2)$ può essere approssimata con Taylor al primo ordine, e il campo di pressione diventa

$$\hat{p} = \hat{D} \cdot \nabla_S G_k(\mathbf{x}|\mathbf{x}_s)$$

dove l'ampiezza di dipolo \hat{D} sta per $\hat{S}\mathbf{d}$, e ∇_S denota l'operatore di gradiente rispetto alle coordinate della sorgente. Se il fluido che circonda il dipolo é libero, la funzione di Green é $R^{-1}e^{ikR}$. Dal momento che $\nabla_S f = (df/dR)\nabla_S R$ per ogni $f(R)$ e $\nabla_S R = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)/R$, il campo acustico generato da un dipolo é in definitiva

$$\hat{p} = -\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{e}_R \frac{d}{dR} \frac{e^{ikR}}{R} = -\nabla \cdot (\hat{\mathbf{D}} R^{-1} e^{ikR}). \quad (3.23)$$

Qui $\mathbf{e}_R = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)/R$ é il vettore unitario diretto radialmente fuori dal centro del dipolo verso il punto di osservazione.

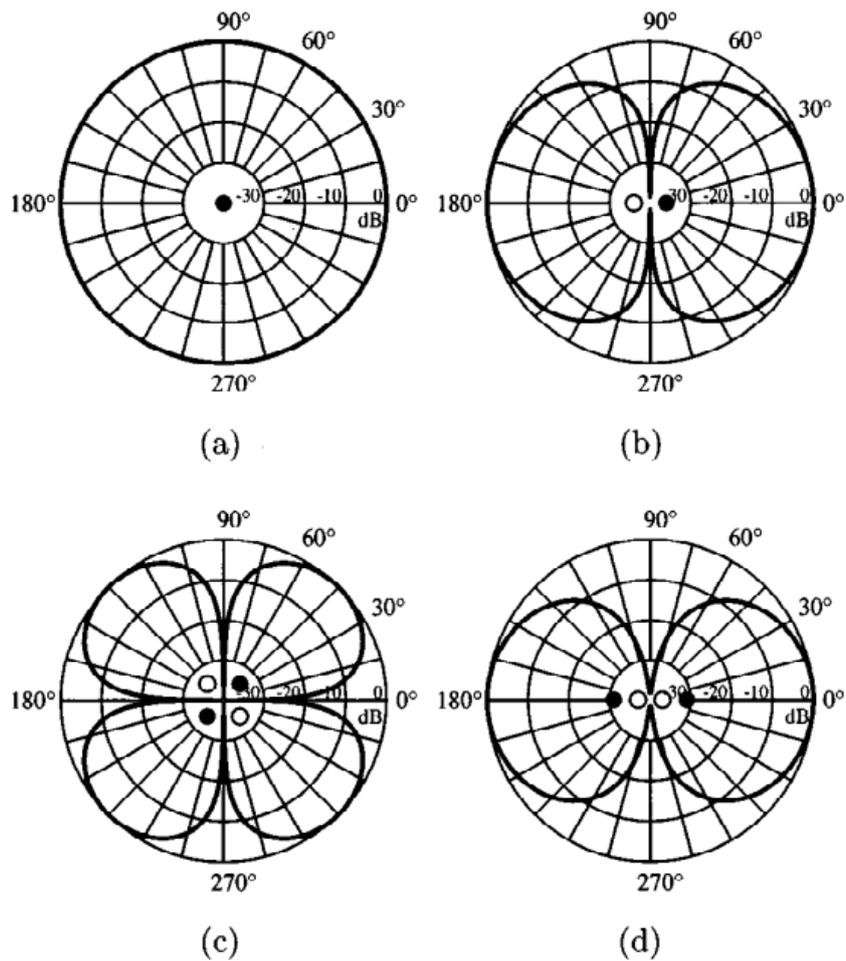


Figure 3.2: Campi di pressione generati da a) Monopolo, b) Dipolo, c) Quadrupolo Trasversale, d) Quadrupolo Longitudinale

3.3.3 Quadrupolo Acustico

Due dipoli vicini e con ampiezze di dipolo uguali ed opposte \hat{D} e $-\hat{D}$ generano un campo di quadrupolo. Nel limite di $d \ll R$ e $kd \ll 1$ il campo é approssimato a

$$\hat{p} = (\hat{D} \cdot \nabla_{\mathbf{s}})(\mathbf{d} \cdot \nabla_{\mathbf{s}})G_k(\mathbf{x}|\mathbf{x}_{\mathbf{s}})$$

Se il mezzo é illimitato, la funzione di Green é $R^{-1}e^{ikR}$ e dal momento che $\nabla_{\mathbf{s}} = -\nabla$ quando applicato a una funzione di $\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\mathbf{s}}$, si ha:

$$\hat{p} = (\hat{D} \cdot \nabla)(\mathbf{d} \cdot \nabla)\frac{e^{ikR}}{R} = \sum_{\mu,\nu=1}^3 \hat{Q}_{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_{\mu} \partial x_{\nu}} \frac{e^{ikR}}{R} \quad (3.24)$$

dove $\hat{Q}_{\mu\nu} = \hat{D}_{\mu}d_{\nu}$. Nel caso $\hat{\mathbf{D}}$ e \mathbf{d} siano paralleli il quadrupolo é detto *longitudinale*; nel caso siano perpendicolari il quadrupolo é *laterale*. Per il quadrupolo il campo di pressione e l'intensità irradiata sono fortemente direzionali e dipendono dai due angoli θ e ϕ , oltre che dalla distanza R . Per l'intensità le relazioni per $kR \gg 1$ sono

$$I_{R,av} = \begin{cases} \frac{(k^4 \cos^4 \theta) |\hat{Q}_{zz}|^2}{2\rho c R^2} & \textit{longitudinale} \\ \frac{k^4 \sin^4 \theta \cos^2 \phi \sin^2 \phi}{2\rho c R^2} |\hat{Q}_{xy}|^2 & \textit{laterale} \end{cases} \quad (3.25)$$

3.3.4 Sviluppo in Multipoli

Sorgenti sonore piú complesse non possono essere semplicemente rappresentate dai modelli ideali di monopolo, dipolo e quadrupolo. Sono invece approssimabili con una serie di termini via via di ordine crescente: un termine di monopolo, a simmetria sferica, uno di dipolo, di quadrupolo, ottupolo, e cosí via. I termini di ordini superiori sono dipendenti dalle variabili angolari in maniera sempre piú marcata. L'espansione della sorgente é detta *espansione in multipoli* e nella logica é analoga alle espansione frequentemente utilizzate per descrivere campi elettromagnetici e gravitazionali.

Chapter 4

Suono generato Aerodinamicamente

Con suono generato aerodinamicamente si intende il suono prodotto da un flusso d'aria, e non da un solido vibrante. Il flusso può contenere fluttuazioni dovute all'instabilità, che a seconda del numero di Reynolds R si manifestano in maniera diversa. A basso R le fluttuazioni danno origine ad un pattern regolare di vortici, che è responsabile ad esempio del suono prodotto dagli strumenti a fiato. Ad alto R il moto si fa irregolare e turbolento ed il suono prodotto si avvicina più ad un rumore: sono di questo genere i suoni prodotti dal vento o dagli aerei jet.

La teoria di riferimento nello studio dell'aeroacustica è quella formulata da M.J.Lighthill negli anni '50, nota come *analogia acustica*. La teoria assimila il flusso ad una distribuzione di quadrupoli, e stima l'intensità del suono prodotto note le caratteristiche del flusso. Ovviamente prima di poter predire le qualità del suono prodotto è necessario acquisire una stima soddisfacente del flusso prodotto mediante stime aerodinamiche che non riguardano il fenomeno acustico. Il problema non è banale in quanto, come si è visto, non è mai possibile conoscere con la massima accuratezza l'evoluzione di un flusso; la previsione sul suono prodotto non sarà quindi mai esatta.

4.1 Analogia di Lighthill

Si consideri un flusso di fluido fluttuante in un volume molto grande di fluido a riposo. Il fluido fuori dalla regione del flusso costituisce un mezzo acustico uniforme a riposo. Il modello è fondato sull'idea che anche il fluido componente il flusso può essere trattato come un mezzo uniforme a riposo sotto l'azione di una forza addizionale esterna. Tale forza, nota se è noto il flusso, agisce sul mezzo a riposo irradiando suono in accordo con le normali leggi dell'acustica.

Come si è visto nella derivazione dell'equazione di Navier-Stokes (1.10), il momento contenuto in una regione fissata dello spazio varia in modo regolato dal tensore di flusso di momento Π_{ik} . Come espresso in (1.6) il flusso è dovuto a due componenti distinte:

una di stress dovuta alla pressione $p\delta_{ik}$ e alla viscosità σ'_{ik} , l'altra dovuta al flusso di fluido che porta con sé momento $\rho v_i v_k$.

In un mezzo acustico uniforme però, lo stress si manifesta solo nella forma di pressione idrostatica, le cui variazioni sono proporzionali a quelle della densità, con costante di proporzionalità il quadrato della velocità del suono c^2 , come visto in (3.5). Dunque le fluttuazioni nella densità del flusso reale devono essere le stesse generate in un mezzo acustico uniforme soggetto al sistema di stress esterno dato dalla differenza

$$T_{ij} = \rho v_i v_j - \sigma_{ij} - c^2 \rho \delta_{ij} \quad (4.1)$$

tra gli stress effettivi nel flusso reale e gli stress nel mezzo acustico uniforme a riposo. Va notato che l'approccio al problema è del tutto valido e non vengono assunte semplificazioni sugli stress reali. Inoltre l'approccio è conveniente perché lo stress T_{ij} incorpora la convezione, la propagazione del suono a velocità variabile e la graduale dissipazione in calore per viscosità, che altrimenti sarebbero difficili da gestire. In pratica la dissipazione di energia acustica in calore è un processo molto lento, ed il suo contributo allo stress T_{ij} è di minima importanza. Il principale generatore di suono è la massa fluttuante stessa, nel termine $\rho v_i v_j$ e quindi possiamo considerare $T_{ij} \sim \rho_0 v_i v_j$. A questo punto le equazioni del moto per il flusso possono essere riscritte come quelle che regolano la propagazione del suono in un mezzo uniforme a riposo, sotto l'azione dello stress esterno T_{ij} :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = -\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \rho = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (4.4)$$

essendo (4.2) l'equazione di continuità, (4.3) la conservazione del momento e (4.4) l'equazione d'onda che regola la propagazione della perturbazione della densità.

Trovate le equazioni del moto ci chiediamo in che senso un flusso d'aria è sorgente sonora. Qual è il modello di sorgente che meglio si adatta alla descrizione di un flusso? Una forza oscillante F_i si comporta come un dipolo di intensità $-(\partial F_i)/(\partial x_i)$. Infatti il termine $-(\partial F_i)/(\partial x_i)$ è equivalente, nel limite di $\epsilon \rightarrow 0$, alle distribuzioni $\epsilon^{-1} F_1(x_1, x_2, x_3)$ e $-\epsilon^{-1} F_1(x_1 + \epsilon, x_2, x_3)$. Dunque ogni valore $\epsilon^{-1} F_1(x_1, x_2, x_3)$ emerge con segno positivo in (x_1, x_2, x_3) e con segno negativo in $(x_1 - \epsilon, x_2, x_3)$. Questi due valori, nel limite, costituiscono un dipolo con asse nella direzione positiva di x_1 . Un campo di forza F_1 è in definitiva equivalente ad una distribuzione di dipoli.

Allo stesso modo il tensore T_{ij} può essere pensato come due forze agenti sulle facce opposte di un piccolo volume di fluido. Dunque il termine T_{i1} genera un campo equivalente a quello di due dipoli $\epsilon^{-1} T_{i1}(x_1, x_2, x_3)$ e $\epsilon^{-1} T_{i1}(x_1 + \epsilon, x_2, x_3)$, cosicché ogni valore

$\epsilon^{-1}T_{i1}(x_1, x_2, x_3)$ emerge con segni opposti in (x_1, x_2, x_3) e $(x_1 - \epsilon, x_2, x_3)$. Il che costituisce un quadrupolo con asse nella direzione di T_{i1} . Il tensore nel complesso é dunque assimilabile ad una distribuzione di quadrupoli. In particolare possiamo distinguere tre distribuzioni di quadrupoli, una per asse.

Questo é il risultato fondamentale dell'analogia: é elaborata una funzione d'onda disomogenea ed il suono irradiato é assimilabile a quello irradiato da una distribuzione di quadrupoli.

Il modello permette quindi, integrando l'apporto dei quadrupoli cosí distribuiti, di calcolare una stima dei campi di densità e pressione generati dal flusso:

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{-\infty}^{\infty} \int_V \rho v_i v_j \frac{\delta(t - \tau - \frac{r}{c})}{4\pi r} dV d\tau = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_V \left[\frac{\rho v_i v_j}{4\pi r} \right]_{\tau=t_e} dV \quad (4.5)$$

dove $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|$ e $t_e = t - r/c$.

Delineato il modello, é importante cercare di abbozzare il modo in cui il campo acustico, ovvero l'ampiezza dei quadrupoli, dipende dalle proprietà del flusso stesso, quali la sua velocità tipica U , la lunghezza di scala principale L , le proprietà del gas ρ_0, c, ν .

Ciò che suscita maggiore interesse a livello pratico sono le quantità misurabili dall'orecchio umano: intensità e frequenza. Per quanto riguarda la frequenza evidenze sperimentali mostrano che lo spettro del suono generato é lo stesso del flusso che ne é sorgente. Questo significa che un flusso turbolento, caratterizzato dall'ampio range di scala, genera un suono dall'altrettanto ampio range di frequenze, ovvero un rumore. Esperimenti hanno mostrato che il rumore di flussi turbolenti si estende oltre le 7 ottave.

L'ampiezza delle fluttuazioni in T_{ij} é proporzionale a $\rho_0 U^2$, in quanto $\mathbf{v} \sim U$ e $\rho v_i v_j \sim \rho_0 U^2$, ma con dipendenze addizionali da R e dal numero di Mach $M = U/c$.

L'intensità risulta proporzionale all'ottava potenza della velocità, U^8 : il risultante é notevole, in quanto ripetute analisi sperimentali hanno confermato il dato con grande precisione.

La dipendenza diretta dell'intensità dalla velocità del flusso implica che la radiazione prodotta é notevole solo per velocità tipiche del flusso sostenute, almeno sopra $M = 0,3$. Lighthill concentra poi il suo lavoro sullo studio dei flussi turbolenti. Il fine del tutto in fondo é soddisfare le richieste in merito al contenimento del rumore generato dai motori jet degli aerei, da treni e macchine ad alta velocità, dal vento attorno agli edifici, dai sistemi di ventilazione..

A livello teorico il comportamento della turbolenza é di nuovo diviso negli apporti dei singoli vortici di varie lunghezze di scala. Di fatti, considerando il carattere statistico della turbolenza, i valori del flusso di momento in punti senza vortici in comune sono incorrelati, mentre i i valori in punti con vortici in comune sono ben correlati. Il volume totale del flusso puó quindi essere suddiviso in volumi relativi ai singoli vortici, ognuno dei quali é identificabile con un quadrupolo indipendente dagli altri. La forza del quadrupolo sará proporzionale al volume V in questione. Il campo di intensità sará quindi il risultato della somma dei campi d'intensità indipendenti dei singoli quadrupoli. Questo significa

che i vortici a grandi scale, ovvero quelli che non dissipano ma trasportano energia, sono i maggiori responsabili dell'irradiazione sonora, e la loro potenza é ben superiore rispetto a quella delle scale dissipative.

Altri elementi incidono sulla potenza della radiazione. Per primo il flusso principale: tanto piú grande é il flusso, tanto maggiore é il suono generato dalla turbolenza. Il che é piuttosto scontato, dal momento che in presenza di un flusso piú abbondante le oscillazioni del flusso di momento $\rho v_i v_j$ possono essere piú grandi.

Inoltre eventuali disomogeneitá nella temperatura contribuiscono ad amplificare le radiazioni di quadrupolo.

4.2 Altre Analogie

L'analisi appena fatta é adeguata ad un flusso nello spazio libero. Nel caso siano presenti superfici di ogni genere vanno introdotti termini di risonanza che amplificano notevolmente l'intensitá della radiazione prodotta. Le superfici sono considerate alla stregua di nuove sorgenti. Viene cosí estesa l'analisi di Lighthill in modo da poter affrontare situazioni in cui superfici solide sono direttamente coinvolte nella produzione aerodinamica del suono, come nel caso di rotori di elicotteri, ventole di motori, compressori e turbine. Il potenziale applicativo si amplia dunque moltissimo.

L'*analogia di Curle* prende in considerazione superfici S fissate nel tempo, ed estende dunque l'integrazione per il calcolo del campo di pressione:

$$p(\mathbf{x}, t) = c^2 \rho(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_V \frac{T_{ij}}{4\pi r} dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \left[\frac{\rho v_i}{4\pi r} \right] n_i dS - \frac{\partial}{\partial x_j} \int_S \left[\frac{\sigma_{ij} + \rho v_i v_j}{4\pi r} \right] n_i dS \quad (4.6)$$

dove \mathbf{n} é un versore normale ad S . La presenza della superficie si concretizza nell'aggiunta di due nuovi termini che irradiano come monopolo (il flusso della massa attraverso la superficie S) e come dipolo (la forza istantanea applicata dalla superficie sul fluido circostante).

La formulazione di Ffowcs Williams-Hawkings prende invece in considerazione superfici in movimento $S(t)$, introducendo il loro apporto nell'equazione differenziale (4.4).

Per farlo viene fatto uso delle funzioni generalizzate. In particolare viene utilizzata la funzione di Heaviside

$$H(x) = \int_{-\infty}^x \delta(s) ds$$

che mediante un'adeguata scelta del sistema di coordinate é nulla all'interno del volume $B(t)$ racchiuso dalla superficie $S(t)$. In seguito alla riscrittura delle equazioni di conservazione della massa e del momento considerando nuove sorgenti sulle superfici S e seguendo il metodo di Lighthill viene derivata una nuova equazione d'onda e il campo di pressione.

In ogni caso le formulazioni qui esposte rappresentano solo un primo passo per l'effettivo calcolo dei campi, che viene compiuto, partendo dai suddetti integrali, con tecniche numeriche e computazionali.

Bibliography

- [1] Landau, Lifschitz - Theoretical Physics VI: Fluid Mechanics, 1959
- [2] Pagnani, Gutfinger - Meccanica dei Fluidi, 1995
- [3] Stumpf - Analytical Acoustics , 1980
- [4] Hirschberg, Rienstra - An Introduction to Acoustics, 2014
- [5] Hirschberg, Rienstra - An Introduction to Aeroacoustics, 2004
- [6] Zhurbas - Lectures on Oceanography,
- [7] Ousukainen - Foundations of Acoustic Analogies, 2011
- [8] Childress - An Introduction to Theoretical Fluid Dynamics, 2008
- [9] Lighthill - On Sound Generated Aerodynamically I. General Theory, 1951
- [10] Lighthill - On Sound Generated Aerodynamically II. Turbulence as a Source of Sound, 1953
- [11] Layton, Novotny - On Lighthill's Acoustic Analogy for low Mach Number flows
- [12] Raichel - The Science and Applications of Acoustics, 2006
- [13] Rossing - Springer's Handbook on Acoustics, 2006
- [14] George - Lectures in Turbulence for the 21st Century, 2013
- [15] Orszag - Analytical theories of Turbulence, 1969
- [16] Carley - Turbulence and Noise
- [17] R.M.S. Rosa - Turbulence Theories