

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Triennale in Matematica

**CIRCOLAZIONI E OMOLOGIA
DEI GRAFI**

Tesi di Laurea in Topologia Algebrica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
MASSIMO FERRI

Presentata da:
MARCO LOCATELLI

Sessione II
Anno Accademico 2013-2014

Indice

Indice	I
1 Omologia	3
1.1 n-Simplessi e Complessi di Catene	3
1.1.1 Simplessi	3
1.1.2 Catene	4
1.2 Omologia	5
1.2.1 Definizione	5
1.2.2 Mappe di Catene	5
1.2.3 Invarianza per Omotopia	5
1.2.4 Matrice di Incidenza e Numero di Betti	6
1.2.5 Esattezza	6
1.2.6 Successioni di Mayer-Vietoris e Teorema di Escissione	7
1.2.7 Teorema dei Coefficienti Universali	8
2 Grafi	13
2.1 Grafi e Sottogradi	13
2.1.1 Introduzione ai Grafi	13
2.1.2 Alcune Definizioni e Speciali Classi di Grafi	14
2.1.3 Sottogradi	16
2.1.4 Cammini e Connessione	17
2.1.5 Cicli	18
2.2 Alberi	18
2.2.1 Alberi	18
2.2.2 Insiemi di Taglio	19
2.3 Grafi Orientati	21
2.3.1 Orientazione	21
2.3.2 Tornei e Cammini Hamiltoniani	22
2.3.3 Cicli Orientati	23
2.4 Spazio dei Cicli e Spazio dei Tagli	23
2.4.1 Circolazioni e Differenze di Potenziale	23
3 Omologia nei Grafi	27
3.1 Grafi come Complessi	27
3.2 Omologia e Circolazioni	27
3.3 Numeri di Betti di un Grafo	30
Bibliografia	33

Ringraziamenti

Desidero ringraziare tutte le persone che mi hanno aiutato nella stesura della mia Tesi.

Prima di tutto, ringrazio il Professor Ferri, per l'ispirazione che è riuscito a darmi in ogni lezione, per avermi aiutato nella ricerca delle fonti e per avermi supportato e guidato con pazienza fino alla fine.

Ringrazio inoltre i colleghi e gli amici che mi hanno incoraggiato e consigliato.

Un ringraziamento particolare va infine alla mia famiglia e a Camilla, per essere stati sempre al mio fianco.

Alle persone citate va la mia gratitudine, ma la responsabilità per ogni errore o imprecisione è soltanto mia.

Introduzione

In questa tesi verrà trattato il problema di introdurre una teoria omologica sui grafi. I grafi sono un oggetto matematico utile a descrivere molte situazioni reali in modo sintetico ed efficace, come ad esempio i circuiti elettrici o il traffico stradale. Vedremo che un grafo potrà essere visto come un 1-complesso simpliciale, cioè intuitivamente come un insieme di punti collegati da segmenti.

Nell'omologia abbiamo un efficace, e soprattutto pratico metodo di classificazione di un complesso simpliciale. Essa ci permette di comprendere in maniera relativamente facile alcune importanti proprietà di una superficie, come per esempio quante cavità presenta.

L'idea è dunque di applicare le conoscenze che si hanno di una teoria omologica generale ad un oggetto specifico, che è appunto il grafo.

Nel primo capitolo sarà trattato il concetto di omologia. Si partirà definendo rigorosamente oggetti come i k -complessi simpliciali e i complessi di catene, per poi definire i gruppi di omologia in un complesso di catene. Si introdurrà poi il numero di Betti di un complesso, e infine saranno studiate alcune importanti proprietà dei gruppi di omologia ed enunciati teoremi fondamentali come il teorema di escissione ed il teorema dei coefficienti universali.

Il secondo capitolo introduce lo studio dei grafi. Verranno definite le nozioni di cammino e cammino elementare in un grafo, quello di ciclo e quello di insieme di taglio fondamentale. Si parlerà poi di grafi orientati, o digrafi, nei quali sarà possibile definire i concetti di circolazione e di differenza di potenziale. Questi ultimi due oggetti saranno centrali nello sviluppo della tesi, perché osserveremo che daranno vita a due spazi vettoriali, detti lo spazio dei cicli e lo spazio dei tagli.

Nell'ultimo capitolo si studieranno quelli che sono i collegamenti tra i due capitoli precedenti. In particolare, si vedrà che lo spazio dei cicli di un grafo rappresenta l'anello di congiunzione dei due discorsi, perché non è altro che il primo gruppo di omologia del grafo, visto come 1-complesso simpliciale. Per fare ciò, vedremo che la sua dimensione coincide con il numero di Betti del grafo, calcolato nella maniera vista nel primo capitolo.

Capitolo 1

Omologia

In questo primo capitolo verranno introdotte le nozioni di omologia e gruppi di omologia e le loro proprietà fondamentali. In particolare, si arriverà a definire il Numero di Betti, a dare un teorema di escissione e infine dimostrare il teorema dei coefficienti universali.

Per gli argomenti trattati in questo capitolo si fa principalmente riferimento ai testi di A. Hatcher [I] e di L.C. Kinsey [IV].

1.1 n-Simplessi e Complessi di Catene

1.1.1 Simlessi

Dati X e Y sottospazi di uno spazio affine A , il *collegamento* tra X e Y ($X * Y$) è definito come l'unione di tutti i segmenti che collegano i punti di X ai punti di Y .

Il collegamento di $n+1$ punti affinemente indipendenti è un poliedro convesso di dimensione n , chiamato *simplesso*. Se gli $n+1$ punti sono gli $n+1$ vettori della base canonica di \mathbb{R}^{n+1} , il loro collegamento è il *simplesso n -dimensionale standard*

$$\Delta^n = \{(t_1, \dots, t_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | t_1 + \dots + t_{n+1} = 1 \text{ e } t_i \geq 0\}$$

Definiamo *n -simplesso singolare* in uno spazio X una mappa $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$.

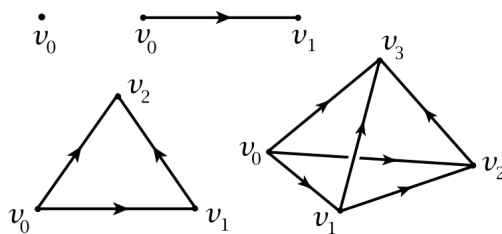


Figura 1.1: 0-simplesso, 1-simplesso, 2-simplesso e 3-simplesso

Un *complesso simpliciale* K è un insieme di simplessi di uno stesso spazio \mathbb{E}^n tale che:

- se $s^n \in K$ e s^q è faccia di s^n , allora $s^q \in K$;
- se $s^n, s^p \in K$, allora $s^n \cap s^p$ o è vuoto, o è una faccia comune di s^n e s^p ;
- ogni semplice di K è faccia di un insieme finito di semplici di K ;
- rispetto alla topologia indotta da \mathbb{E}^n , $A \subset \bigcup K$ è chiuso se e solo se, per ogni $s \in K$, anche $A \cap s$ è chiuso.

Una *coppia topologica* è una coppia di spazi topologici (X, A) dove A è sottospazio di X . Date due coppie topologiche (X, A) e (Y, B) , si definisce *mappa di coppie* un'applicazione continua $f : X \rightarrow Y$ tale che $f(A) \subset B$.

1.1.2 Catene

Sia $\Delta_n(X)$ il gruppo abeliano libero che ha per base gli n -simplessi e_α^n di X . I suoi elementi si definiscono *n -catene*, e sono della forma $\sum_\alpha n_\alpha e_\alpha^n$, con $n_\alpha \in \mathbb{Z}$, o equivalentemente $\sum_\alpha n_\alpha \sigma_\alpha$, con $\sigma_\alpha : \Delta^n \rightarrow X$ n -simpleso singolare. Questi oggetti possono essere pensati come delle collezioni finite di n -simplessi di X moltiplicati per gli interi n_α .

Definiamo il *bordo* dell' n -simpleso $[v_0, \dots, v_n]$, denotato con il simbolo ∂ , $\partial[v_0, \dots, v_n] = \sum_i (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$. Per esempio, osservando la figura 1.1, il bordo dell'1-simpleso $[v_0, v_1]$ è $\partial[v_0, v_1] = [v_1] - [v_0]$, mentre per il 2-simpleso e per il 3-simpleso, si ha: $\partial[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$ e $\partial[v_0, v_1, v_2, v_3] = [v_1, v_2, v_3] - [v_0, v_2, v_3] + [v_0, v_1, v_3] - [v_0, v_1, v_2]$.

Definiamo quindi in maniera più specifica l'*omomorfismo di bordo* per un generico simpleso singolare, $\partial_n : \Delta_n(X) \rightarrow \Delta_{n-1}(X)$.

$$\partial_n(\sigma_\alpha) = \sum_i (-1)^i \sigma_\alpha | [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$$

Teorema 1.1. La composizione $\Delta_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \Delta_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \Delta_{n-2}(X)$ è nulla.

Dimostrazione. Abbiamo: $\partial_n(\sigma) = \sum_i (-1)^i \sigma | [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$, e dunque

$$\begin{aligned} \partial_{n-1} \partial_n(\sigma) &= \sum_{j < i} (-1)^i (-1)^j \sigma | [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] + \\ &+ \sum_{j > i} (-1)^i (-1)^{j-1} \sigma | [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n] \end{aligned}$$

Queste due sommatorie si annullano perché, scambiando i e j nella seconda sommatoria, essa diventa l'opposto della prima. \square

Abbiamo quindi una successione infinita di omomorfismi di gruppi abeliani

$$\dots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Con $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ per ogni n , e ponendo $\partial_0 = 0$. Una successione così fatta si definisce *complesso di catene*.

1.2 Omologia

1.2.1 Definizione

La condizione $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ è equivalente all'inclusione $\text{Im} \partial_{n+1} \subset \text{Ker} \partial_n$. Possiamo dunque definire l'*n-esimo gruppo di omologia* del complesso di catene come il gruppo quoziente $H_n = \text{Ker} \partial_n / \text{Im} \partial_{n+1}$. Gli elementi del Ker di ∂_n si dicono *cicli*, mentre gli elementi di $\text{Im} \partial_{n+1}$ si dicono *bordi*. Gli elementi di H_n si dicono *classi di omologia*, e due cicli della stessa classe si dicono *omologhi*.

Per ogni coppia topologica (X, A) si definisce il complesso di catene $S(X, A) = (\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} S_k(X, A), \partial)$, dove $S_k(X, A) = \frac{S_k(X)}{S_k(A)}$, e $\partial_k : S_k(X, A) \rightarrow S_{k-1}(X, A)$ è indotto da $\partial_k : S_k X \rightarrow S_{k-1} X$. Si definiscono di conseguenza i gruppi di omologia $H_k(X, A) = H_k(S(X, A))$, detti *gruppi di omologia singolare relativa* di (X, A) .

1.2.2 Mappe di Catene

Data una mappa $f : X \rightarrow Y$, un omomorfismo indotto $f_{\#} : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ è definito componendo ogni n -simpleso singolare σ con la f , ottenendo un n -simpleso singolare $f_{\#}(\sigma) = f\sigma : \Delta^n \rightarrow Y$ e poi estendendo $f_{\#} : f_{\#}(\sum_i n_i \sigma_i) = \sum_i n_i f_{\#}(\sigma_i) = \sum_i n_i f \sigma_i$. Si ha inoltre che le mappe $f_{\#} : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ soddisfano la condizione $f_{\#} \partial = \partial f_{\#}$.

Dunque si ha il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_{n+1}(X) & \xrightarrow{\partial} & C_n(X) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(X) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_{\#} & & \downarrow f_{\#} & & \downarrow f_{\#} & & \\ 0 & \longrightarrow & C_{n+1}(Y) & \xrightarrow{\partial} & C_n(Y) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(Y) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Per quanto detto, tale diagramma è commutativo, cioè vale $f_{\#} \partial = \partial f_{\#}$ in ogni quadrato del diagramma.

1.2.3 Invarianza per Omotopia

Definizione 1.1. Dati due spazi topologici X e Y , e due mappe $f, g : X \rightarrow Y$, diciamo che f è *omotopa* a g ($f \simeq g$) se esiste una funzione continua $F : X \times I \rightarrow Y$, tale che $F|_{X \times \{0\}} = f$ e $F|_{X \times \{1\}} = g$, detta *omotopia* da f a g .

Due spazi topologici X e Y si dicono *omotopicamente equivalenti*, o *dello stesso tipo di omotopia* ($X \simeq Y$) se esistono funzioni continue $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ tali che $fg \simeq 1_X$ e $gf \simeq 1_Y$. In questo caso, g si definisce l'*inversa omotopica* di f , e viceversa.

Valgono i seguenti fatti.

Proposizione 1.1. Una mappa di catene tra due complessi di catene induce omomorfismi tra i gruppi di omologia dei due complessi.

Teorema 1.2. Se due applicazioni continue $f, g : X \rightarrow Y$ sono omotope, allora inducono lo stesso omomorfismo $f_* = g_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$.

Da cui si ricava immediatamente:

Corollario. Le mappe $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ indotte da un'equivalenza omotopica $f : X \rightarrow Y$ sono isomorfismi per ogni n .

1.2.4 Matrice di Incidenza e Numero di Betti

Ad ogni k -simplesso possiamo associare un'orientazione, scegliendo una delle due classi di permutazioni per i suoi $k - 1$ -simplessi.

Dato un $k - 1$ -simplesso S nel complesso C , definiamo la funzione m_S sull'insieme dei k -simplessi di C , definita come:

$$m_S(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } S \text{ è una faccia di } A \text{ orientata positivamente} \\ -1, & \text{se } S \text{ è una faccia di } A \text{ orientata negativamente} \\ 0, & \text{se } S \text{ non è faccia di } A \end{cases}$$

dove l'orientazione si considera positiva (negativa) se è concorde (discorde) con quella indotta su S dall'operatore di bordo.

oss Sia C un complesso finito n -dimensionale e, per ogni k , α_k il numero dei suoi k -simplessi. Per ogni $k \in \mathbb{N}_n$, il bordo $\partial_k : S_k(C) \rightarrow S_{k-1}(C)$ è una applicazione lineare, e come tale si esprime mediante una matrice E^{k-1} , con α_{k-1} righe e α_k colonne, detta $(k - 1)$ -esima matrice di incidenza di C . La $(k - 1)$ -esima matrice di incidenza di un complesso C è la matrice che ha per righe le funzioni $m_S(A)$, per ogni A k -simplesso di C . Denotiamo il rango della k -esima matrice di incidenza con il simbolo γ_k ; per i k per i quali non c'è una matrice E^k poniamo $\gamma_k = 0$.

Definizione 1.2. Dato un complesso C , se scriviamo $H_k(C)$ come la somma diretta di gruppi ciclici, allora il rango di $H_k(C)$, cioè il numero di addendi \mathbb{Z} presenti in tale scomposizione, si definisce il k -esimo numero di Betti di C ($\beta_k(C)$).

Proposizione 1.2. Il k -esimo numero di Betti di un complesso C vale:

$$\beta_k(C) = \alpha_k - \gamma_k - \gamma_{k-1} \quad (1.1)$$

L'importanza del k -esimo numero di Betti sta quindi nel fatto che dà la possibilità di sapere com'è fatto il k -esimo gruppo di omologia.

1.2.5 Esattezza

Una successione $\dots \rightarrow G_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} G_n \xrightarrow{\alpha_n} G_{n-1} \rightarrow \dots$ si dice *esatta in* G_n se $\text{Ker}\alpha_n = \text{Im}\alpha_{n+1}$. Una successione si definisce *esatta* se è esatta in G_n per ogni n .

Una successione esatta $0 \rightarrow G_1 \xrightarrow{\alpha} G_2 \xrightarrow{\beta} G_3 \rightarrow 0$ si dice *corta*.

Teorema 1.3. Data una successione esatta corta di complessi e mappe di catene

$$0 \rightarrow C_1 \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} C_2 \rightarrow 0$$

per ogni k , esiste un omomorfismo ∂_*^k che rende esatta la successione:

$$\dots \rightarrow H_k(C_1) \xrightarrow{\alpha_*^k} H_k(C) \xrightarrow{\beta_*^k} H_k(C_2) \xrightarrow{\partial_*^k} H_{k-1}(C_1) \xrightarrow{\alpha_*^{k-1}} H_{k-1}(C) \xrightarrow{\beta_*^{k-1}} \dots$$

L'omomorfismo ∂_* viene chiamato *omomorfismo di connessione*.

Teorema 1.4. Ad ogni diagramma commutativo di complessi e mappe di catene a righe esatte

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_1 & \xrightarrow{\alpha} & C & \xrightarrow{\beta} & C_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_1 & & \downarrow f & & \downarrow f_2 & & \\ 0 & \longrightarrow & C'_1 & \xrightarrow{\alpha'} & C' & \xrightarrow{\beta'} & C'_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

corrisponde un diagramma commutativo a righe esatte:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \dots & \longrightarrow & H_k(C_1) & \xrightarrow{\alpha_*} & H_k C & \xrightarrow{\beta_*} & H_k(C_2) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{k-1}(C_1) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f_{1*} & & \downarrow f_* & & \downarrow f_{2*} & & \downarrow f_{1*} & & \\ \dots & \longrightarrow & H_k(C'_1) & \xrightarrow{\alpha'_*} & H_k(C') & \xrightarrow{\beta'_*} & H_k(C'_2) & \xrightarrow{\partial'_*} & H_{k-1}(C'_1) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Una delle proprietà fondamentali di una teoria omologica è l'esattezza, cioè il fatto che, data la coppia topologica (X, A) , sia esatta la successione

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}*} H_n(A) \xrightarrow{(i_*)_n} H_n(X) \xrightarrow{(j^*)_n} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n*} H_{n-1}(A) \xrightarrow{(i_*)_{n-1}} \dots$$

dove $i : A \rightarrow X$ è l'inclusione di A in X , $j : (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$ è la mappa identica su X e ∂ è l'omomorfismo di connessione.

Inoltre, per ogni mappa di coppie $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, è commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial_*} & H_k(A) & \xrightarrow{i_*} & H_k X & \xrightarrow{j_*} & H_k(X, A) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{k-1}(A) & \xrightarrow{i_*} & \dots \\ & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \\ \dots & \xrightarrow{\partial'_*} & H_k(B) & \xrightarrow{i'_*} & H_k(Y) & \xrightarrow{j'_*} & H_k(Y, B) & \xrightarrow{\partial'_*} & H_{k-1}(B) & \xrightarrow{i'_*} & \dots \end{array}$$

1.2.6 Successioni di Mayer-Vietoris e Teorema di Escissione

Consideriamo il complesso X e due suoi sottocomplessi A e B , con le mappe di inclusione: $i_1 : A \cap B \rightarrow A$, $i_2 : A \cap B \rightarrow B$, $j_1 : A \rightarrow A \cup B$, $j_2 : B \rightarrow A \cup B$

Poniamo poi

$$\begin{aligned} i : C_n(A \cap B) &\longrightarrow C_n(A) \oplus C_n(B) \\ i(c) &= (C_n(i_1)(c) - C_n(i_2)(c)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j : C_n(A) \oplus C_n(B) &\longrightarrow C_n(A \cup B) \\ j(c_1, c_2) &= C_n(j_1)(c_1) + C_n(j_2)(c_2) \end{aligned}$$

Allora, la successione

$$0 \longrightarrow C_n(A \cap B) \xrightarrow{i} C_n(A) \oplus C_n(B) \xrightarrow{j} C_n(A \cup B) \longrightarrow 0$$

è una successione esatta corta di complessi e mappe di catene.

Teorema 1.5. La successione

$$\dots \xrightarrow{\partial_*} H_n(A \cap B) \xrightarrow{i_*} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{j_*} H_n(A \cup B) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A \cap B) \xrightarrow{i_*} \dots$$

è esatta.

Questa successione si definisce *successione esatta di omologia di Mayer-Vietoris*.

Dimostrazione. La dimostrazione di questo teorema è basata sul teorema 1.3. \square

Un discorso analogo si può fare se si considerano due sottoinsiemi di uno spazio topologico X e Y . In questo caso, bisogna assumere l'ipotesi aggiuntiva $X \cup Y = \text{int}_{X \cup Y}(X) \cup \text{int}_{X \cup Y}(Y)$.

Sotto queste condizioni, si ha che la successione

$$\dots \xrightarrow{\partial_*} H_n(X \cap Y) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \oplus H_n(Y) \xrightarrow{j_*} H_n(X \cup Y) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(X \cap Y) \xrightarrow{i_*} \dots$$

è esatta.

Una proprietà fondamentale dei gruppi di omologia relativa è data dal seguente *teorema di escissione*, e indica quando i gruppi $H_n(X, A)$ non sono influenzati dall'eliminazione di un sottoinsieme $Z \subset A$.

Teorema 1.6 (Teorema di Escissione). Siano $Z \subset A \subset X$ spazi topologici tali che la chiusura di Z sia contenuta nell'interno di A .

Allora la mappa di inclusione, che in questo caso prende il nome di *mappa di escissione*, $(X - Z, A - Z) \hookrightarrow (X, A)$ induce isomorfismi $H_n(X - Z, A - Z) \longrightarrow H_n(X, A)$.

1.2.7 Teorema dei Coefficienti Universali

Finora abbiamo considerato gruppi di omologia di complessi di catene in cui i gruppi di catene erano gruppi abeliani liberi. Dunque, se X è uno spazio topologico, un elemento di $S(X)$ è una combinazione lineare formale $\sum_i r_i \lambda_i$, dove i λ_i sono semplici singolari e i r_i sono interi.

Spesso è utile considerare un caso più generale, in cui gli r_i , invece che essere interi, sono elementi di un arbitrario gruppo abeliano G . Il nuovo complesso di catene che ne risulta viene denotato $S(X; G)$, e i gruppi di omologia corrispondenti sono i *gruppi di omologia a coefficienti in G* $H_n(X; G)$. Dunque, i gruppi di omologia singolare visti finora, vengono ora visti come casi particolari: $H_n(X) = H_n(X; \mathbb{Z})$.

In realtà, i gruppi $H_n(X; G)$ sono completamente determinati dai gruppi $H_n(X)$, infatti questa generalizzazione non fornisce nuove informazioni su X . Piuttosto, l'idea è che $H_*(X; G)$ potrebbe essere più semplice rispetto a $H_*(X)$. Per esempio, se C è un complesso simpliciale e K è un campo, si avrà che $H_n(C; K)$ è uno K -spazio vettoriale di dimensione finita, e quindi sappiamo com'è fatto, perché sarà isomorfo ad \mathbb{K}^n per un certo n .

Osservazione. Nel caso in cui, tensorizzando per un campo K , gli $H_k(C; K)$ siano spazi vettoriali, il k -esimo numero di Betti di C sarà la dimensione dello spazio vettoriale $H_k(C; K)$.

Definizione 1.3. Dato un complesso di catene $C = (\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} C_k, \partial)$ su R (cioè i C_k sono R -moduli e ∂ un omomorfismo di R -moduli), e un R -modulo G , i gruppi di omologia a coefficienti in G sono definiti come

$$H_n(C; G) = H_n(C \otimes G)$$

Il concetto di avere coefficienti in G invece che in \mathbb{Z} si formalizza nella nozione di *prodotto tensoriale* di due gruppi abeliani.

Definizione 1.4. Dati due R -moduli A e B , il *prodotto tensoriale* $A \otimes B$ è il gruppo abeliano generato da tutti i simboli della forma $a \otimes b$, per ogni elemento $a \in A$ e $b \in B$, per i quali valgono le relazioni:

- $a \otimes (r_1 b_1 + r_2 b_2) = r_1(a \otimes b_1) + r_2(a \otimes b_2)$ per ogni $a \in A, b_1, b_2 \in B, r_1, r_2 \in R$
- $(r_1 a_1 + r_2 a_2) \otimes b = r_1(a_1 \otimes b) + r_2(a_2 \otimes b)$ per ogni $a_1, a_2 \in A, b \in B, r_1, r_2 \in R$

Proposizione 1.3. $C \otimes G$ è un complesso di catene. Inoltre, se $f : C \rightarrow D$ è una mappa di catene, allora anche $f \otimes 1 : C \otimes G \rightarrow D \otimes G$ lo è.

Nel seguito indichiamo con R un dominio a ideali principali.

Successioni esatte di omologia relativa, successioni esatte di Mayer-Vietoris e un teorema di escissione analoghi a quelli visti in precedenza con coefficienti in \mathbb{Z} , si hanno anche con coefficienti arbitrari.

Una successione esatta corta

$$0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A_2 \longrightarrow 0$$

di R -moduli e omomorfismi oppure di complessi di catene su R e mappe di catene, si definisce *spezzante* se esiste un'inversa destra β' di β .

Si dimostra che, se una successione esatta corta è spezzante, $A \cong A_1 \oplus A_2$.

Proposizione 1.4. Data una successione esatta

$$A_1 \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A_2 \longrightarrow 0$$

e dato un R -modulo B , la successione

$$A_1 \otimes B \xrightarrow{\alpha \otimes 1_B} A \otimes B \xrightarrow{\beta \otimes 1_B} A_2 \otimes B \longrightarrow 0$$

è esatta.

La proposizione appena enunciata non si estende a successioni esatte corte. Per poter avere una proprietà simile sulle successioni esatte corte occorre aggiungere l'ipotesi che la successione esatta corta di partenza sia spezzante.

Proposizione 1.5. Data una successione esatta corta spezzante

$$0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A_2 \longrightarrow 0$$

e dato un R -modulo B , la successione

$$0 \longrightarrow A_1 \otimes B \xrightarrow{\alpha \otimes 1_B} A \otimes B \xrightarrow{\beta \otimes 1_B} A_2 \otimes B \longrightarrow 0$$

è una successione esatta corta spezzante.

Data la successione esatta corta

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} H \longrightarrow 0$$

se F e G sono moduli liberi, la successione data si definisce una *presentazione libera* di H , e si definisce $\text{Tor}(H, L) = \text{Ker} \alpha \otimes 1_L$ il *prodotto di torsione* di H e L . Diciamo che un complesso di catene è *libero* se è costituito da moduli liberi.

Teorema 1.7 (Teorema dei Coefficienti Universali). Sia C un complesso di catene libero su R e sia G un R -modulo. Esiste una successione esatta corta spezzante

$$0 \longrightarrow H_k(C) \otimes G \longrightarrow H_k(C; G) \longrightarrow \text{Tor}(H_{k-1}(C), G) \longrightarrow 0$$

per ogni k .

Dimostrazione. Costruiamo i complessi di catene $Z = (\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} Z_k(C), 0)$ e $B = (\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \bar{B}_k, 0)$, dove $\bar{B}_k = B_{k-1}(C)$. Entrambe hanno omomorfismi di bordo banali. Questi complessi di catene sono liberi. Considerando le applicazioni:

$$\begin{aligned} \alpha : Z &\longrightarrow C \\ \alpha_k(z) &= z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta : C &\longrightarrow B \\ \beta_k(c) &= \partial c \end{aligned}$$

risulta che la successione

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} B \longrightarrow 0$$

è esatta corta, e inoltre è spezzante poiché B è libero. Allora, tensorizzando con G , si ha una successione esatta corta di complessi di catene, dunque grazie al teorema 1.3, la successione

$$\dots \longrightarrow H_k(Z; G) \xrightarrow{\alpha_*^k} H_k(C; G) \xrightarrow{\beta_*^k} H_k(B; G) \xrightarrow{\partial_*^k} H_{k-1}(Z; G) \xrightarrow{\alpha_*^k} \dots$$

è esatta. Ma $H_k(Z; G) = Z_k(C) \otimes G$ e $H_k(B; G) = \bar{B}_k(C) \otimes G = B_{k-1}(C) \otimes G$.

Dunque, detta γ_k l'inclusione $B_k(C) \rightarrow Z_k(C)$, si ha che $\partial_* = \gamma \otimes 1_G$. La successione diventa cioè:

$$\dots \longrightarrow B_k \otimes G \xrightarrow{\gamma_k \otimes 1_G} Z_k \otimes G \xrightarrow{\alpha_* \otimes 1_G} H_k(C; G) \xrightarrow{\beta_*^k} B_{k-1} \otimes G \xrightarrow{\partial_*^k} Z_{k-1} \otimes G \longrightarrow \dots$$

Otteniamo dunque la successione esatta corta

$$0 \longrightarrow \text{CoKer}(\gamma_k \otimes 1_G) \longrightarrow H_k(C; G) \longrightarrow \text{Ker}(\gamma_{k-1} \otimes 1_G) \longrightarrow 0$$

Consideriamo ora un'altra successione esatta corta:

$$0 \longrightarrow B_k(C) \xrightarrow{\gamma_k} Z_k(C) \longrightarrow H_k(C) \longrightarrow 0$$

Questa è una presentazione libera di $H_k(C)$. Per la Proposizione 1.3, si ha che $H_k(C) \otimes G = \text{CoKer}(\gamma_k \otimes 1_G)$ e, per definizione, $\text{Tor}(H_{k-1}(C), G) = \text{Ker}(\gamma_{k-1} \otimes 1_G)$. \square

Capitolo 2

Grafi

In questo capitolo si introduce prima di tutto il concetto di grafo, per poi definire cammini, cicli, alberi e insiemi di taglio. Ci si sofferma poi in maniera particolare sulle nozioni di circolazione e differenza di potenziale in un grafo, osservando che entrambe danno vita a spazi vettoriali, detti lo *spazio dei cicli* e lo *spazio dei tagli* del grafo.

Per gli argomenti di questo capitolo si fa riferimento alle opere di J.A. Bondy e U.S.R. Murty sulla teoria dei grafi [V], [VI].

2.1 Grafi e Sottografi

2.1.1 Introduzione ai Grafi

Molte situazioni del mondo reale possono essere descritte in maniera efficace per mezzo di un diagramma che consiste in un insieme di punti connessi tra loro da linee. Questi oggetti si dicono *grafi*.

Definizione 2.1. Un *grafo* G è una terna ordinata $(V(G), E(G), \psi_G)$, dove $V(G)$ è un insieme non vuoto di vertici, $E(G)$ è un insieme, disgiunto da $V(G)$, di lati e ψ_G è una *funzione di incidenza* che associa ad ogni lato e una coppia non ordinata di vertici uv (non necessariamente distinti). In alcuni casi, si potrà scrivere V e E al posto di $V(G)$ e $E(G)$, se il contesto non dà luogo ad ambiguità. La cardinalità degli insiemi V ed E sarà denotata con ν e ϵ rispettivamente.

$$\begin{aligned}\psi_G : E(G) &\longrightarrow V(G) \\ e &\longmapsto uv\end{aligned}$$

Mostriamo un esempio di grafo per chiarire la definizione.

Esempio 2.1.

$$G = (V(G), E(G), \psi_G)$$

dove

$$\begin{aligned}V(G) &= v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \\ E(G) &= e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\end{aligned}$$

e ψ_G è così definita:

$$\begin{aligned} \psi_G(e_1) &= v_1v_2, & \psi_G(e_2) &= v_2v_3, & \psi_G(e_3) &= v_3v_3, & \psi_G(e_4) &= v_3v_4, \\ \psi_G(e_5) &= v_2v_4, & \psi_G(e_6) &= v_4v_5, & \psi_G(e_7) &= v_5v_2, & \psi_G(e_8) &= v_5v_2 \end{aligned}$$

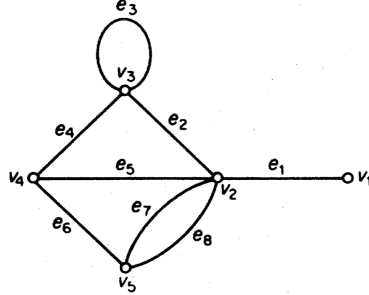


Figura 2.1: Rappresentazione del grafo dell'esempio 1

2.1.2 Alcune Definizioni e Speciali Classi di Grafi

I grafi sono chiamati così perché si possono rappresentare graficamente (in maniera non necessariamente univoca), rendendo più facile la comprensione di alcune loro proprietà; in particolare, sarà possibile identificare ogni grafo con una delle sue rappresentazioni.

Si avrà che, nella rappresentazione di un grafo, due lati si potranno incontrare in un punto che non è un vertice. I grafi i cui lati si incontrano solo in corrispondenza di qualche vertice si dicono *planari*, perché la loro rappresentazione può essere contenuta semplicemente su un piano. Un esempio di grafo planare è il grafo della figura 2.1, mentre in figura 2.2 è mostrata una rappresentazione di un grafo non planare.

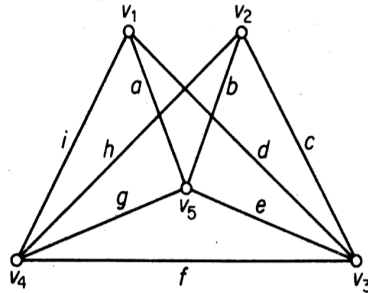


Figura 2.2: Esempio di un grafo non planare

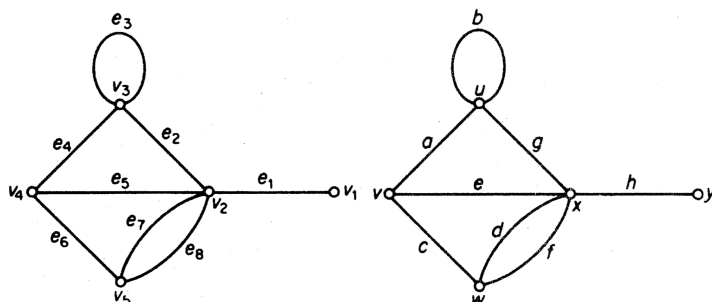
Molti concetti e definizioni propri della teoria dei grafi sono suggeriti intuitivamente dalla rappresentazione grafica. I vertici ai capi di un lato e il lato stesso sono detti *incidenti*; due vertici che sono incidenti con lo stesso lato, o due lati incidenti con lo stesso vertice si dicono *adiacenti*. Un lato i cui capi sono identici si dice *cappio*, mentre un lato con i capi distinti si dice *link*. Per esempio, in figura 2.1, e_3 è un cappio, mentre tutti gli altri lati sono link.

Un grafo G si dice *finito* se sia $V(G)$ che $E(G)$ sono insiemi finiti. Diciamo che un grafo è *banale* se consiste di un unico vertice.

Un concetto importante in teoria dei grafi è quello di *grafo semplice*: un grafo è detto *semplice* se nessuno dei suoi lati è un cappio e non ci sono due lati diversi i cui estremi sono uguali. Il grafo in figura 2.1 non è semplice, mentre quello in figura 2.2 lo è.

Due Grafi G e H si dicono *identici* ($G = H$) se $V(G) = V(H)$, $E(G) = E(H)$ e $\psi_G = \psi_H$. Ovviamente due grafi identici avranno la stessa rappresentazione, ma questo non è l'unico caso in cui due grafi ammettono rappresentazioni essenzialmente uguali. La figura ?? mostra che, se per esempio si cambiano i nomi di lati e vertici di un grafo, la rappresentazione del grafo che ne risulta non cambierà.

Figura 2.3: Esempio di due grafi non identici che ammettono rappresentazioni uguali



In generale, due grafi H e G si dicono *isomorfi* ($H \cong G$) se e solo se esistono $\theta : V(G) \rightarrow V(H)$ e $\phi : E(G) \rightarrow E(H)$ biezioni tali che $\psi_G(e) = uv$ se e solo se $\psi_H(\phi(E)) = \theta(u)\theta(v)$; in questo caso, la coppia (θ, ϕ) si dice un *isomorfismo* tra i grafi H e G .

Introduciamo ora altre importanti classi di grafi. Un grafo semplice in cui ogni coppia di vertici distinti è collegata da un lato è detto un *grafo completo*. Per ogni n , esiste un unico grafo completo su n vertici, a meno di isomorfismi, che viene denotato con K_n . Un *grafo vuoto* è un grafo privo di lati. Un *grafo bipartito* è un grafo il cui insieme dei vertici si può dividere in due sottoinsiemi X e Y tali che ogni lato abbia un vertice in X e uno in Y ; una tale partizione (X, Y) si dice *bipartizione* del grafo. Un *grafo bipartito completo* è un grafo semplice bipartito in cui ogni vertice di X è collegato con ogni vertice di Y ; se $|X| = m$ e $|Y| = n$, un tale grafico si denota con $K_{m,n}$. La figura 2.4 rappresenta il grafo K_5 , (2.4.a), un esempio di grafo bipartito (2.4.b) e il grafo $K_{3,3}$.

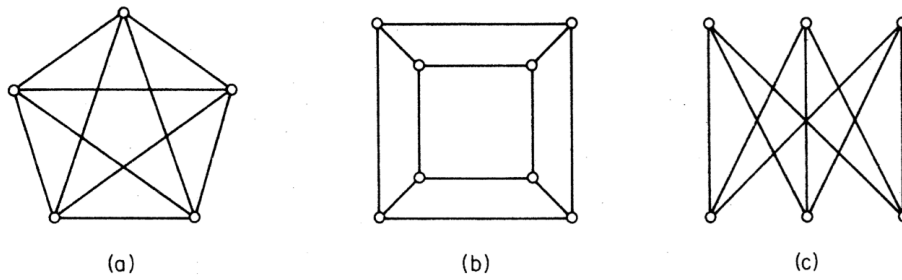


Figura 2.4: Esempi di grafo completo, bipartito e bipartito completo

2.1.3 Sottografi

Un grafo H si dice un *sottografo* di G (e si scrive $H \subseteq G$) se $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$ e ψ_H è la restrizione di ψ_G a $E(H)$. Se $H \subseteq G$ e $H \neq G$, scriviamo $H \subset G$, e diciamo che H è un *sottografo proprio* di G .

Definizione 2.2. Dato un grafo G , un *sottografo ricoprente* (o *fattore*) di G è un sottografo H tale che $V(H) = V(G)$.

Prendendo un grafo generico G e cancellando da esso ogni coppia e, per ogni coppia di vertici adiacenti, tutti i lati che li collegano tranne uno, otteniamo un sottografo ricoprente di G che è anche semplice, e lo chiamiamo un *grafo semplice sottostante* di G . La figura 2.5 mostra un grafo e il suo grafo semplice sottostante.

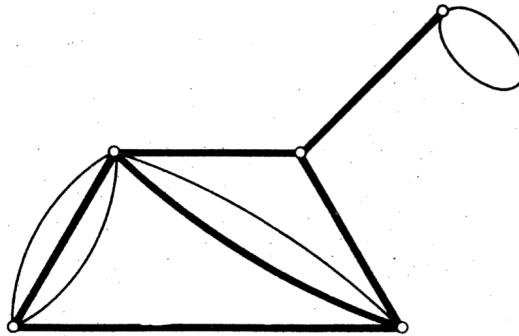


Figura 2.5: Un grafo con evidenziato un suo grafo semplice sottostante

Sia G un grafo, e supponiamo che V' sia un sottoinsieme non vuoto di $V(G)$. Il sottografo di G il cui insieme dei vertici è V' e il cui insieme dei lati è il sottoinsieme di $E(G)$ che contiene tutti i lati che hanno entrambi gli estremi in V' si chiama *sottografo di G indotto da V'* , e si denota $G[V']$. Il sottografo indotto $G[V \setminus V']$ viene anche denotato $G - V'$, ed è il sottografo di G che si ottiene eliminando tutti i vertici di V' e tutti i lati incidenti ad essi.

Analogamente, si può introdurre il concetto di sottografo di G indotto da E' (denotato con $G[E']$), dove E' è un sottoinsieme di $E(G)$. Esso è il sottografo di G il cui insieme dei vertici è il sottoinsieme di $V(G)$ formato dagli estremi dei lati di E' , e il cui insieme dei lati è proprio E' . Denotiamo con $G - E'$ il sottografo di G che ha come insieme dei lati l'insieme $E \setminus E'$: esso si ottiene semplicemente cancellando da G i lati di E' . Analogamente, $G + E'$ sarà il grafo ottenuto da G aggiungendo i lati di un insieme E' .

2.1.4 Cammini e Connessione

Un *cammino* in G è una sequenza finita e non nulla $W = v_0e_1v_1e_2v_2 \dots e_kv_k$ i cui termini sono alternatamente vertici e lati, tale che, per $0 \leq i \leq k$, gli estremi del lato e_i siano v_{i-1} e v_i . Diciamo che W è un cammino da v_0 a v_k , o che è un (v_0, v_k) -cammino, e i vertici v_0 e v_k sono detti rispettivamente l'*origine* e il *termine* di W , mentre v_1, v_2, \dots, v_{k-1} saranno chiamati *vertici interni*. Il numero intero k verrà chiamato la *lunghezza* di W .

Se $W = v_0e_1v_1 \dots e_kv_k$ e $W' = v_ke_{k+1}v_{k+1} \dots e_tv_t$ sono due cammini, il cammino $v_ke_kv_{k-1} \dots e_1v_0$ che si ottiene invertendo W , si denota con W^{-1} , e il cammino $v_0e_1v_1e_2v_2 \dots e_tv_t$, ottenuto concatenando W e W' , si denota con WW' . Una sezione di un cammino $W = v_0e_1v_1 \dots e_kv_k$, è una sottosequenza di termini consecutivi di W : $v_ie_iv_{i+1} \dots e_jv_j$; chiameremo una tale sottosequenza una (v_i, v_j) -sezione di W .

In un grafo semplice, un cammino $v_0e_1v_1 \dots e_kv_k$ è determinato tramite la sola sequenza $v_0v_1v_2 \dots v_k$ dei suoi vertici, dunque si può indicare semplicemente con essa.

Se, in un cammino W , i lati e_1, e_2, \dots, e_k sono distinti, W si dice *cammino semplice*; in questo caso, la lunghezza di W è semplicemente $\epsilon(W)$. Se, inoltre, anche i vertici v_0, v_1, \dots, v_k sono distinti, diciamo che W è un *cammino elementare*.

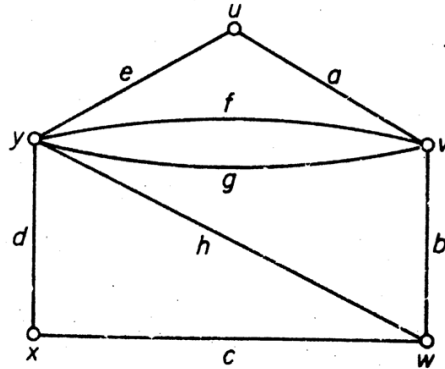


Figura 2.6: Cammino: $vfyhwhydx$

Cammino semplice: $vbwhyfvau$

Cammino elementare: $ueyhwcx$

Si dice che due vertici u e v di G sono *connessi*, se esiste un (u, v) -cammino elementare in G . La connessione è una relazione di equivalenza sull'insieme dei vertici V ; dunque per ogni grafo G , esiste una partizione dell'insieme $V(G)$, $V_1, V_2, \dots, V_\omega$, tale che due vertici u e v sono connessi se e solo se appartengono allo stesso sottoinsieme V_i . I sottografi $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_\omega]$ sono chiamati *componenti* di G . Se G ha esattamente una componente, si dice che G è *connesso*; altrimenti è *disconnesso*. Il numero di componenti connesse di un grafo G sarà denotato con $\omega(G)$.

2.1.5 Cicli

Si dice che un cammino è *chiuso* se la sua lunghezza è positiva e la sua origine coincide con il suo termine. Un cammino chiuso semplice tale che la sua origine e i suoi punti interni siano distinti, è detto un *ciclo*. Un ciclo di lunghezza k viene detto k -ciclo e diremo che un k -ciclo è *pari* oppure *dispari* a seconda che k sia pari oppure dispari.

2.2 Alberi

2.2.1 Alberi

Un grafo si dice *aciclico* se non contiene cicli. Chiamiamo *albero* un grafo aciclico connesso. In figura 2.7 sono illustrati gli alberi su sei vertici.

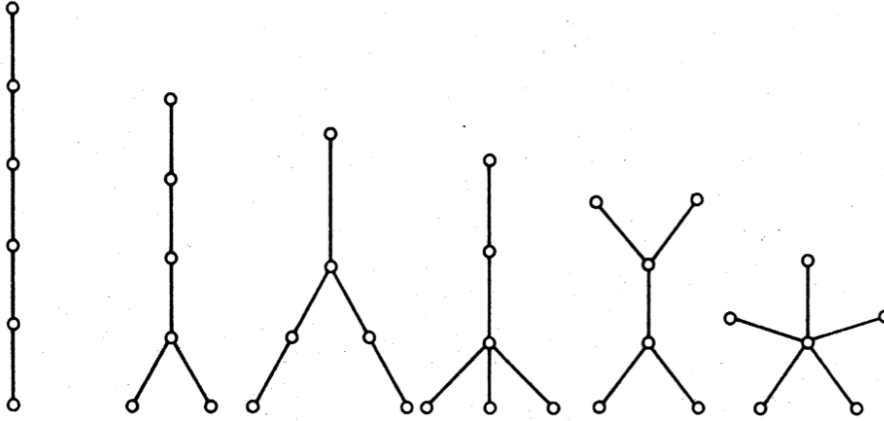


Figura 2.7: Gli alberi su sei vertici

Valgono i seguenti teoremi.

Teorema 2.1. In un albero, una coppia qualsiasi di vertici è connessa da un unico cammino elementare.

Dimostrazione. Consideriamo un grafo G , e supponiamo per assurdo che esistano due cammini elementari da u a v P_1 e P_2 in G . Poiché $P_1 \neq P_2$, c'è un lato $e = xy$ di P_1 che non è un lato di P_2 . Ovviamente il grafo $P_1 \cup P_2 - e$ è connesso; esso dunque contiene un cammino elementare P da x a y .

Ma allora $P + e$ sarà un ciclo nel grafo G , che avevamo supposto essere aciclico. \square

Teorema 2.2. Se G è un albero, allora $\epsilon = \nu - 1$

Dimostrazione. La dimostrazione è per induzione su ν .

Per $\nu = 1$, $G \cong K$ e $\epsilon = 0 = \nu - 1$.

Supponiamo il teorema vero per tutti gli alberi con meno di ν vertici e sia G un albero su $\nu \geq 2$ vertici. Sia $uv \in E$. Allora $G - uv$ non contiene (u, v) -cammini elementari, perché uv è l'unico (u, v) -cammino elementare in G . Dunque, $G - uv$ è disconnesso, e per questo si ha che $\omega(G - uv) = 2$. Le

componenti G_1 e G_2 di $G - uv$, essendo acicliche, sono alberi. Quindi, per ipotesi induttiva

$$\epsilon(G_i) = \nu(G_i) - 1 \quad \text{per } i = 1, 2$$

da cui

$$\epsilon(G) = \epsilon(G_1) + \epsilon(G_2) + 1 = \nu(G_1) + \nu(G_2) - 1 = \nu(G) - 1$$

□

Corollario. Ogni albero non banale ha almeno due vertici di grado 1.

2.2.2 Insiemi di Taglio

Un *lato di taglio* (in inglese *cut edge*) è un lato e di G tale che $\omega(G - e) > \omega(G)$, cioè tale che, se il grafo viene privato di esso, perde la sua connessione. La figura 2.8 mostra un grafo dotato di tre cut edge.

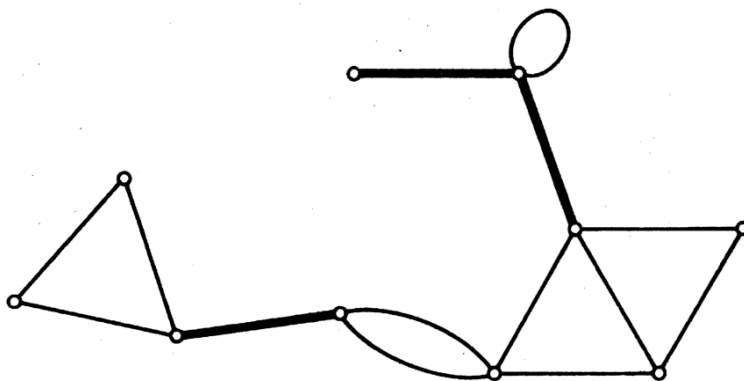


Figura 2.8: I lati di taglio di un grafo

Valgono i seguenti teoremi.

Teorema 2.3. Un lato e di G è un lato di taglio se e solo se non è contenuto in alcun ciclo di G .

Teorema 2.4. Un grafo connesso è un albero se e solo se ogni lato è un lato di taglio.

Dimostrazione. Sia G un albero ed e un lato di G . Poiché G è aciclico per definizione, e non è contenuto in alcun ciclo di G e, di conseguenza, è un lato di taglio.

D'altra parte, supponiamo che G sia connesso ma non sia un albero. Allora, G contiene un ciclo C , dunque per il teorema 2.3, nessun lato può essere un lato di taglio per G . □

Chiamiamo *albero massimale* di G un sottografo ricoprente di G che sia un albero.

Corollario. Ogni grafo connesso contiene un albero massimale.

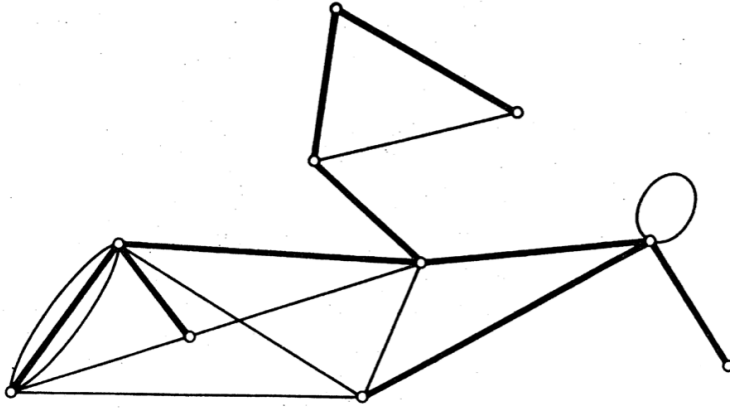


Figura 2.9: La figura mostra un albero massimale in un grafo connesso

Corollario. Se G è connesso, allora $\epsilon \geq v - 1$.

Teorema 2.5. Sia T un albero massimale di un grafo connesso G , e sia e un lato di G che non sta in T .

Allora $T + e$ contiene uno e un solo ciclo.

Dimostrazione. Poiché T è aciclico, ogni ciclo di $T + e$ contiene e . Inoltre, C è un ciclo di $T + e$ se e solo se $C - e$ è un cammino elementare in T che collega i due estremi di e . Per il teorema 2.1 esiste un unico cammino elementare in T tra i due vertici. Di conseguenza, $T + e$ contiene un unico ciclo. \square

Siano S e S' due sottoinsiemi di V . Denotiamo con $[S, S']$ l'insieme di lati di G che hanno un vertice in S e l'altro in S' .

Un *insieme di taglio* (o *cut edge*) è un sottoinsieme di E della forma $[S_1, S_2]$, dove S_1 è un sottoinsieme proprio non vuoto di V , e $S_2 = V - S_1$.

Definiamo *insieme di taglio fondamentale* (in inglese *bond*) un insieme di taglio minimo e non vuoto di G . Ogni lato di taglio e , per esempio, genera un bond $\{e\}$. Se G è connesso, allora un bond B di G è un minimo sottoinsieme di E tale che il grafo $G - B$ è disconnesso.

Se H è un sottografo di G , il *complemento* di H in G , denotato con $\overline{H}(G)$, è il sottografo $G - E(H)$. Se G è connesso, un sottografo della forma $\overline{T}(G)$, dove T è un albero, si dice un *coalbero* di G .

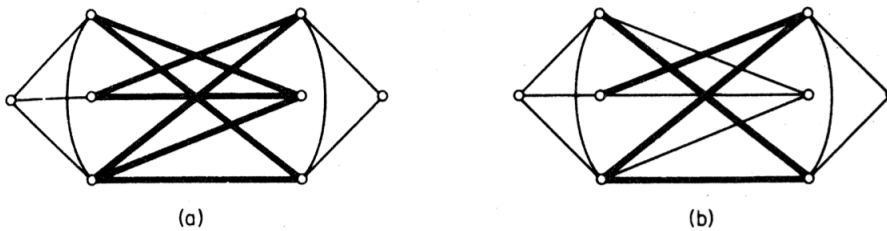


Figura 2.10: (a) Un insieme di taglio; (b) Un insieme di taglio fondamentale

Teorema 2.6. Sia T un grafo ricoprente di un grafo connesso G , e sia e un lato di T . Allora:

1. il coalbero \bar{T} non contiene insiemi di taglio fondamentali di G
2. $\bar{T} + e$ contiene un unico insieme di taglio fondamentale di G

Dimostrazione. 1. Sia B un insieme di taglio fondamentale di G . Allora $G - B$ è disconnesso, e allora non può contenere l'albero ricoprente T . Dunque, B non è contenuto in \bar{T} .

2. Denotiamo con S l'insieme di vertici di una delle due componenti connesse di $T - e$. L'insieme di taglio $B = [S, \bar{S}]$ è ovviamente un insieme di taglio fondamentale di G , ed è contenuto in $\bar{T} + e$. Ora, per un qualunque $b \in B$, $T - e + b$ è un albero ricoprente di G . Di conseguenza, ogni insieme di taglio fondamentale di G contenuto in $\bar{T} + e$ deve contenere ogni elemento b tale. Ne viene che B è l'unico insieme di taglio fondamentale di G contenuto in $\bar{T} + e$. □

Osservazione. La relazione che c'è tra gli insiemi di taglio fondamentali e i coalberi è analoga a quella che c'è tra i cicli e gli alberi ricoprenti. L'affermazione (1) del teorema 2.6 è l'analogo per gli insiemi di taglio fondamentali del fatto che un albero ricoprente è aciclico, mentre l'affermazione (2) è analoga al teorema 2.5.

2.3 Grafi Orientati

2.3.1 Orientazione

Definiamo un *grafo orientato*, o *digrafo* D come una tripla ordinata $(V(D), A(D), \psi_D)$, in cui $V(D)$ è un insieme non vuoto di *vertici*, $A(D)$ è un insieme, disgiunto da $V(D)$, di *archi*, e ψ_D la *funzione di incidenza*, che associa ad ogni arco di D una coppia ordinata di vertici di D (non necessariamente distinti). Se a è un arco e u e v sono vertici tali che $\psi_D(a) = (u, v)$, allora si dice che a *collega* u a v ; in questo caso, u e v si dicono rispettivamente la *coda* e la *testa* di a . Si definisce un sottografo di un grafo orientato in maniera del tutto analoga al caso dei grafi non orientati.

Ad ogni digrafo D , si associa in maniera naturale un grafo sullo stesso insieme di vertici, e con dei semplici lati al posto degli archi: si toglie cioè l'orientazione da ogni arco. Questo grafo viene detto *grafo sottostante* di D . Viceversa, dato un grafo non orientato G , possiamo ottenere un grafo orientato da esso specificando, per ogni lato, un verso di percorrenza. Un tale digrafo viene chiamato una *orientazione* di G .

La rappresentazione di un digrafo è del tutto intuitiva: indichiamo ogni arco con una freccia con la punta rivolta verso la testa. Tutte le proprietà dei grafi non orientati si estendono automaticamente ai digrafi.

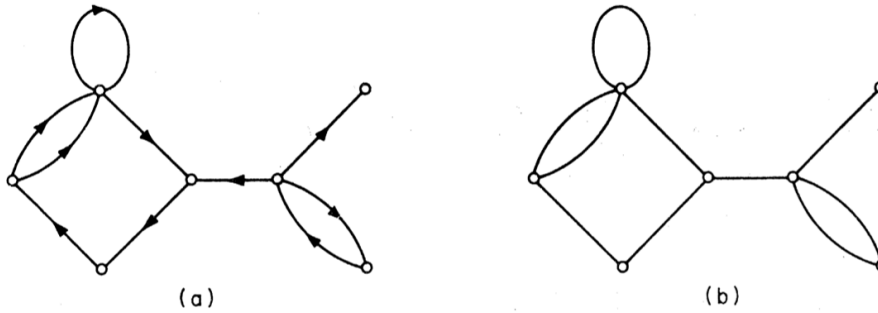


Figura 2.11: (a) Un digrafo; (b) Il suo grafo sottostante

Un *cammino orientato* in un digrafo D è una sequenza finita non nulla $W = (v_0, a_1, v_1, \dots, a_k, v_k)$ i cui termini sono alternatamente vertici e archi, e per $i = 1, \dots, k$, l'arco a_i ha coda v_{i-1} e testa v_i . Spesso si indica un cammino solo tramite la sequenza dei suoi vertici. In maniera analoga al caso non orientato, si definiscono i *cammini elementari orientati* e i *cicli orientati*.

Se c'è un cammino elementare orientato da u a v in D , diciamo che il vertice v è *raggiungibile* dal vertice u in D . Due vertici si dicono *fortemente connessi* se ciascuno è raggiungibile dall'altro. Come nel caso della connessione, quella di forte connessione è una relazione di equivalenza sull'insieme V dei vertici, e le sue classi di equivalenza si definiscono *componenti fortemente connesse*, e si denotano con $D[V_1], D[V_2], \dots, D[V_n]$. Un grafo G è *fortemente connesso* se ha esattamente una componente fortemente connessa.

In un digrafo D , si può distinguere il concetto di *grado entrante* di un vertice, da quello di *grado uscente*, denotati rispettivamente $d_D^-(v)$ e $d_D^+(v)$. Si definiscono poi il massimo grado, entrante ed uscente, e il minimo grado entrante ed uscente di D , denotandoli rispettivamente: $\Delta^-(D)$, $\Delta^+(D)$, $\delta^-(D)$, $\delta^+(D)$. Normalmente, se il contesto non darà luogo ad ambiguità, si indicheranno questi concetti omettendo la lettera D indicante il digrafo considerato. Un digrafo è detto *sempllice* se è privo di cappi e di coppie di archi distinti che hanno gli stessi estremi e la stessa orientazione.

2.3.2 Tornei e Cammini Hamiltoniani

Definiamo *torneo* un'orientazione di un grafo completo. Si può pensare ad un torneo su n vertici come ad un grafo che indica i risultati di un torneo all'italiana disputato da n giocatori. La figura 2.12 mostra i tornei su quattro vertici. Per esempio, il primo grafo di figura 2.12 mostra che un giocatore ha vinto tutte e tre le partite mentre gli altri ne hanno vinta una a testa.

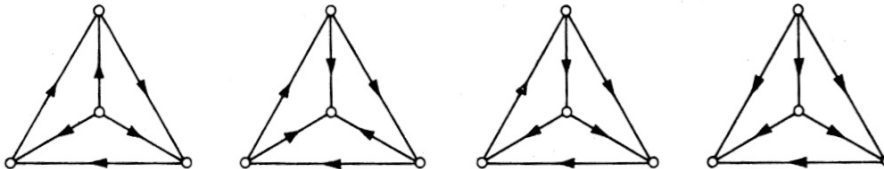


Figura 2.12: I tornei su quattro vertici

Un *cammino hamiltoniano orientato* di D è un cammino orientato che passa per tutti i vertici di D .

Teorema 2.7. Ogni torneo è dotato di un cammino hamiltoniano orientato.

Teorema 2.8. Un digrafo D privo di cappi ha un sottoinsieme S tale che ogni vertice di D che non sta in S è raggiungibile da un vertice di S tramite un cammino orientato di lunghezza al più due.

Corollario. Un torneo contiene un vertice dal quale ogni altro vertice è raggiungibile tramite un cammino orientato di lunghezza al più due.

2.3.3 Cicli Orientati

Il teorema 2.7 ci dice che ogni torneo contiene un cammino hamiltoniano orientato. Se supponiamo che il torneo sia fortemente connesso, però, si possono trarre conclusioni più forti.

Teorema 2.9. Ogni vertice di un torneo fortemente connesso D , con $\nu \geq 3$ è contenuto in un k -ciclo orientato, con $3 \leq k \leq \nu$.

Un *ciclo hamiltoniano orientato* di D è un ciclo orientato che passa per tutti i vertici di D . Segue dal teorema 2.9 che ogni torneo fortemente connesso contiene un ciclo hamiltoniano orientato.

2.4 Spazio dei Cicli e Spazio dei Tagli

2.4.1 Circolazioni e Differenze di Potenziale

Dato un digrafo D e un vertice v in esso, definiamo $A^+(v)$ l'insieme degli archi di A che hanno testa in v . Analogamente, definiamo $A^-(v)$ l'insieme degli archi di A che hanno coda in v .

Data una funzione f su $A[D]$ e preso un vertice v di D , definiamo $f^+(v) = \sum_{a \in A^+(v)} f(a)$, e $f^-(v) = \sum_{a \in A^-(v)} f(a)$.

Definizione 2.3. Sia D un digrafo e f una funzione su A a valori reali.

Si dice che f è una *circolazione* in D se soddisfa la condizione di conservazione in ogni vertice:

$$f^-(v) = f^+(v) \quad \text{per ogni } v \in V$$

Si dimostra facilmente che, se f e g sono due circolazioni e r è un numero reale, allora anche $f + g$ e rf sono circolazioni. Dunque l'insieme delle circolazioni sul digrafo D è uno spazio vettoriale, che verrà denotato \mathcal{C} .

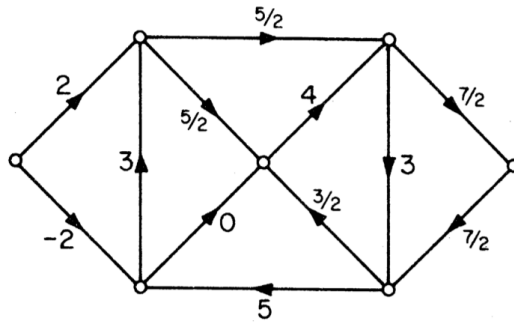


Figura 2.13: Un esempio di circolazione

Esistono alcune circolazioni particolarmente interessanti: quelle associate ai cicli di D .

Sia C un ciclo in D con un'orientazione assegnata, e denotiamo C^+ l'insieme di archi di C la cui orientazione è concorde con quella di C stesso.

Definiamo poi la funzione $f_C : D \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ in questo modo:

$$f_C(a) = \begin{cases} 1, & \text{se } a \in C^+ \\ -1, & \text{se } a \in C \setminus C^+ \\ 0, & \text{se } a \notin C \end{cases}$$

Proposizione 2.1. Ogni circolazione si può scrivere come combinazione lineare delle circolazioni associate ai cicli. Per questo motivo chiameremo \mathcal{C} lo spazio dei cicli di D .

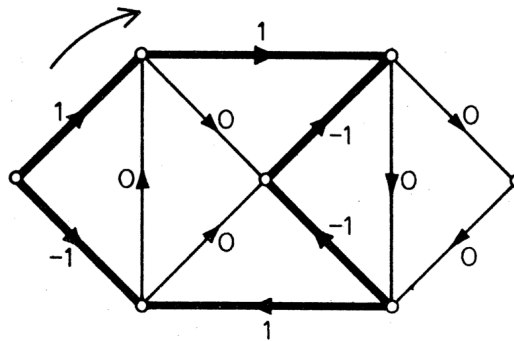


Figura 2.14: Un esempio di circolazione associata ad un ciclo

Definizione 2.4. Data una funzione p a valori reali su V , spazio dei vertici di D , definiamo la funzione:

$$\begin{aligned} \delta p : A &\rightarrow \mathbb{R} \\ \delta p(a) &= p(x) - p(y) \end{aligned}$$

Se si pensa al digrafo D come ad un circuito elettrico con potenziale $p(v)$ (in corrispondenza del vertice v), allora la funzione δp rappresenta la differenza di potenziale lungo i fili del circuito. Definiamo dunque *differenza di potenziale* una funzione g su A tale che esiste una funzione p su V per cui $g = \delta p$.

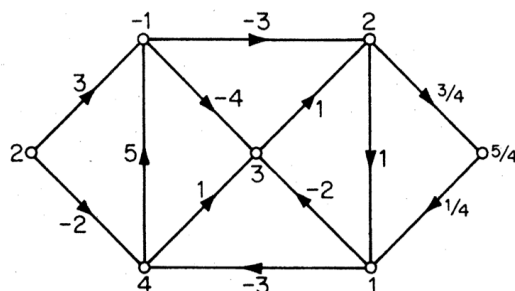


Figura 2.15: Un esempio di potenziale

Così come per le circolazioni, risulta che l'insieme \mathcal{B} di tutte le differenze di potenziale in D è chiuso rispetto alla somma e alla moltiplicazione per scalare, e dunque è uno spazio vettoriale.

Come analogo della funzione f_C associata ad ogni ciclo C , in questo caso si ha una funzione g_B associata ad ogni insieme di taglio fondamentale B .

Sia $B = [S, \bar{S}]$ un insieme di taglio fondamentale di D .

Definiamo la funzione $g_B : D \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ in questo modo:

$$g_B(a) = \begin{cases} 1, & \text{se } a \in (S, \bar{S}) \\ -1, & \text{se } a \in (\bar{S}, S) \\ 0, & \text{se } a \notin B \end{cases}$$

Si può verificare che $g_B = \delta p$, con

$$p(v) = \begin{cases} 1, & \text{se } v \in S \\ 0, & \text{se } v \in \bar{S} \end{cases}$$

Proposizione 2.2. Ogni differenza di potenziale si può scrivere come combinazione lineare di differenze di potenziale associate a insiemi di taglio fondamentali. Per questo motivo chiameremo \mathcal{B} lo spazio dei tagli di D .

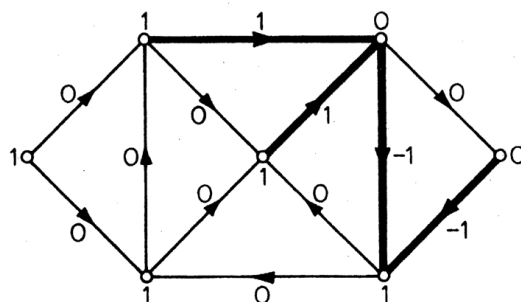


Figura 2.16: Un esempio di potenziale associato ad un insieme di taglio fondamentale

Introduciamo ora la matrice di incidenza del digrafo D , che permetterà di comprendere meglio la relazione tra \mathcal{B} e \mathcal{C} .

Ad ogni vertice v di D , associamo la funzione m_v su A , definita come:

$$m_v(a) = \begin{cases} 1, & \text{se } a \text{ è un lato e } v \text{ è la coda di } a \\ -1, & \text{se } a \text{ è un lato e } v \text{ è la testa di } a \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La *matrice di incidenza* di D è la matrice \mathbf{M} le cui righe sono le funzioni m_v .

Teorema 2.10. Sia \mathbf{M} la matrice di incidenza di un digrafo D . Allora \mathcal{B} è lo spazio generato dalle righe di \mathbf{M} e \mathcal{C} è il suo complemento ortogonale.

Dimostrazione. Sia $g = \delta p$ una differenza di potenziale in D . Per definizione, si ha che

$$g(a) = \sum_{v \in V} p(v) m_v(a) \quad \text{per ogni } a \in A$$

Dunque g è una combinazione lineare delle righe di \mathbf{M} . D'altra parte, ogni combinazione lineare delle righe di \mathbf{M} è una differenza di potenziale. Dunque, \mathcal{B} è lo spazio generato dalle righe di \mathbf{M} . Sia ora f una funzione su A . Ora, condizione che abbiamo dato nella definizione di circolazione è equivalente a:

$$\sum_{a \in A} m_v(a) f(a) = 0 \quad \text{per ogni } v \in V.$$

Questo implica che f è una circolazione se e solo se è ortogonale ad ogni riga di \mathbf{M} . Dunque \mathcal{C} è il complemento ortogonale di \mathcal{B} . \square

Il *supporto* di una funzione f su A è l'insieme di elementi di A sui quali il valore di f è diverso da zero; il supporto della funzione f viene denotato con $\|f\|$.

Proposizione 2.3. Se f è una circolazione non nulla, allora $\|f\|$ contiene un ciclo.

Una matrice \mathbf{C} si dice una *matrice di base* di \mathcal{C} . Se \mathbf{R} è una matrice le cui colonne sono chiamate come gli elementi di A , e se $S \subseteq A$, denoteremo con $\mathbf{R}|S$ la sottomatrice di \mathbf{R} che consiste nelle colonne di \mathbf{R} chiamate come gli elementi di S .

Teorema 2.11. Siano \mathbf{B} e \mathbf{C} le matrici di base di \mathcal{B} e \mathcal{C} , rispettivamente. Allora, per ogni $S \subseteq A$

1. le colonne di $\mathbf{B}|S$ sono linearmente indipendenti se e solo se S è aciclico;
2. le colonne di $\mathbf{C}|S$ sono linearmente indipendenti se e solo se S non contiene bond.

Corollario. Le dimensioni di \mathcal{B} e \mathcal{C} sono date da:

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{B} &= \nu - \omega \\ \dim \mathcal{C} &= \epsilon - \nu + \omega \end{aligned}$$

Capitolo 3

Omologia nei Grafi

In questo capitolo si applicano le nozioni introdotte nel capitolo 1 ai concetti relativi ai grafi studiati nel capitolo 2. In particolare, si introduce una diversa definizione di grafo per intenderli come complessi, in modo da poter definire dei gruppi di omologia su di essi. Si osserverà in particolare che il primo modulo di omologia di un grafo coincide con lo spazio dei cicli, mentre lo 0-esimo modulo di omologia ha come dimensione il numero di componenti connesse del grafo.

3.1 Grafi come Complessi

Un altro modo per intendere un grafo semplice, è quello di definirlo come un 1-complesso finito. I vertici rappresentano gli 0-simplessi, mentre i lati (o gli archi nel caso di grafi orientati) rappresentano gli 1-simplessi. Per come è stato definito un grafo, non abbiamo simplessi di dimensione maggiore di 1. Il bordo degli 1-simplessi è definito normalmente come $\partial[v_0, v_1] = [v_1] - [v_0]$, dove v_0 e v_1 sono i vertici agli estremi dell'1-simplesso e $[v_1]$ e $[v_0]$ sono i valori che assegniamo ad essi; si pone uguale a zero il bordo degli 0-simplessi.

Tutte le proprietà definite nel capitolo 2 rimangono naturalmente valide e inoltre possiamo applicare le nozioni introdotte nel capitolo 1, per capire che cos'è l'omologia in un grafo. In questo senso, vedremo sotto una luce nuova alcuni dei concetti visti fin qui.

3.2 Omologia e Circolazioni

Non esistendo simplessi di dimensione maggiore di 1, per un grafo G possiamo definire soltanto il primo gruppo di omologia $H_1(G) = \text{Ker}\partial_1/\text{Im}\partial_2$ e $H_0(G) = \text{Ker}\partial_0/\text{Im}\partial_1$. Poiché ∂_2 è banale, la sua immagine è nulla, dunque $H_1(G) = \text{Ker}\partial_1/\text{Im}\partial_2$ è isomorfo al Ker di ∂_1 , cioè all'insieme che contiene i cicli di G ; H_0 invece.

Dato un grafo semplice G , una funzione sull'insieme degli archi di G può essere considerata una catena a coefficienti in \mathbb{R} .

Proposizione 3.1. Una funzione sui lati di un grafo è una circolazione se e solo se, vista come catena, è un ciclo.

Per capire meglio il significato di questa proposizione, vediamo qualche esempio.

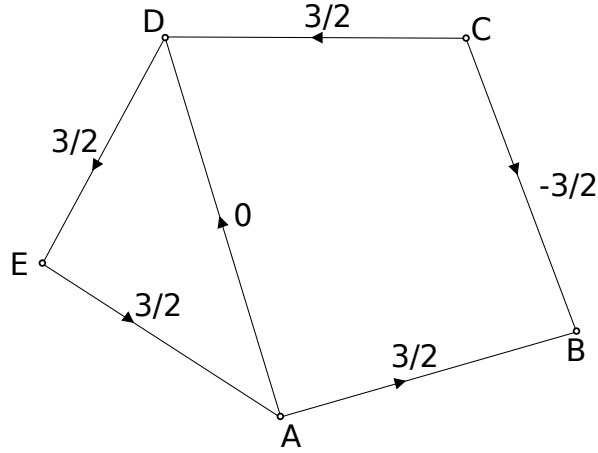


Figura 3.1: Una circolazione su un grafo semplice G

In figura 3.1, è mostrata una circolazione f sul ciclo C , infatti la condizione di conservazione è rispettata su ogni vertice.

In questo modo vediamo che, calcolando l'1-bordo della funzione f vista come catena, esso risulta in effetti essere nullo. Calcoliamolo direttamente, partendo dal vertice A .

$$\partial C = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0 \quad (3.1)$$

In questo caso, l'arco AD non dà contributo perché $f(AD) = 0$.

Vediamo cosa succede se cambiamo il valore della funzione f su un lato in modo che non sia più una circolazione.

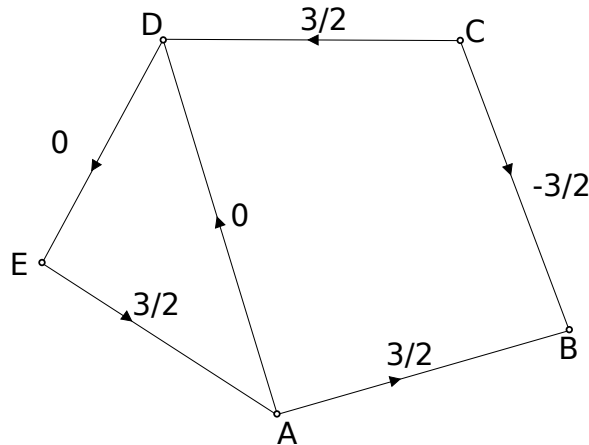


Figura 3.2: La f non è più una circolazione perché non vale la condizione di conservazione sul vertice D

Calcolando il bordo, partendo dal vertice E , risulta:

$$\partial C = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = -3 \neq 0 \quad (3.2)$$

Quindi, considerando la f come una catena, essa non è un ciclo perché il suo bordo è diverso da zero.

Vediamo un esempio più complesso.

Esempio 3.1. Consideriamo la funzione g sul digrafo semplice D di figura 3.3

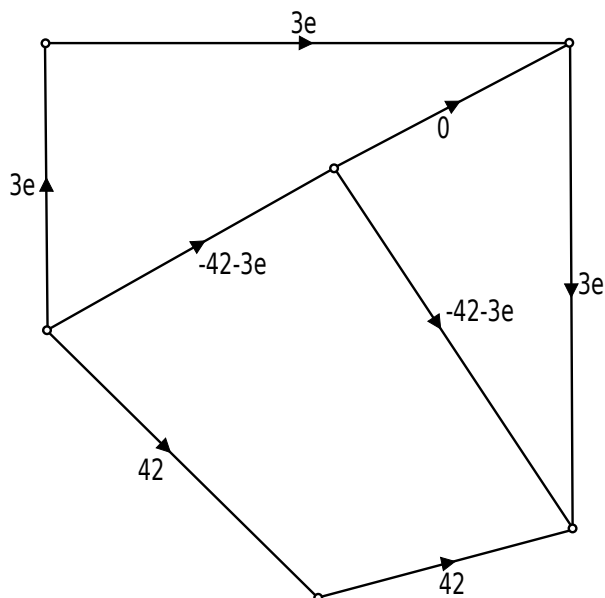
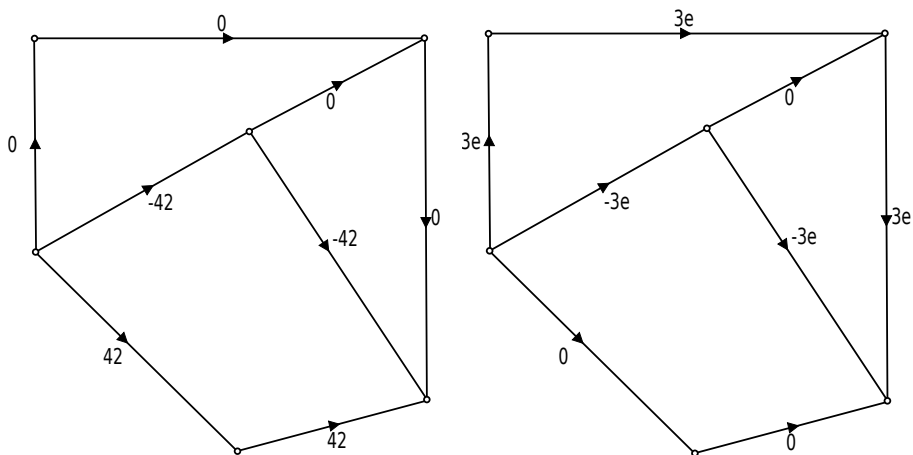


Figura 3.3: Su ogni vertice vale la condizione di conservazione, dunque g è una circolazione

Per la proposizione 2.1, sappiamo che questa circolazione si può scomporre in una combinazione lineare di circolazioni associate a cicli.

Figura 3.4: Circolazioni associate a due cicli la cui somma è proprio la circolazione vista in figura 3.3

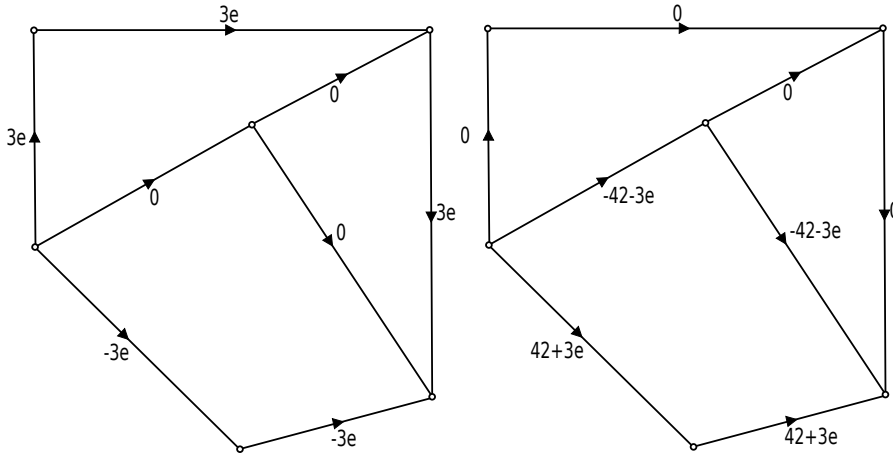


Si vede che entrambe le funzioni sono circolazioni e quindi entrambe sono cicli,

se considerate come catene. Per dimostrarlo si procede in maniera del tutto analoga a quanto fatto per la figura 3.2.

Data una circolazione c su un grafo, non esiste un modo unico per trovare circolazioni associate a cicli che combinate linearmente diano c : si possono scegliere circolazioni diverse o associate a cicli diversi.

Figura 3.5: Altre due circolazioni associate a cicli che si possono combinare per ottenere la circolazione della figura 3.3



3.3 Numeri di Betti di un Grafo

Ricordiamo che per calcolare il k -esimo numero di Betti di un complesso C , si può ricorrere alla formula 1.1 $\beta_k(C) = \alpha_k - \gamma_k - \gamma_{k-1}$, dove α_k è il numero di k -simplessi di C e γ_k e γ_{k-1} sono i ranghi della k -esima e della $(k-1)$ -esima matrice di incidenza di C . Ora siamo interessati a capire che cos'è il numero di Betti quando si parla di un grafo. Ovviamente, non esistendo in un grafo simplessi di dimensione maggiore di uno, le matrici di incidenza avranno tutte rango zero tranne la 0-esima, che è la matrice di incidenza che abbiamo definito nella sezione 2.4.1, quindi possiamo subito dire che

$$\beta_i(G) = 0 \quad \text{per ogni } i \notin \{0, 1\}$$

Proposizione 3.2. 1. Il primo numero di Betti di un grafo G è $\beta_1(G) = \epsilon - \nu + \omega$, cioè la dimensione dello spazio dei cicli \mathcal{C} ;

2. Lo 0-esimo numero di Betti di un grafo G è $\beta_0(G) = \omega$, cioè il numero di componenti connesse di G .

Dimostrazione. 1. Il primo numero di Betti di un complesso C si calcola usando la formula 1.1, e dunque risulta:

$$\beta_1(G) = \alpha_1 - \gamma_1 - \gamma_0$$

Ma γ_1 è il rango della seconda matrice di incidenza e quindi è uguale a zero, dunque risulta:

$$\beta_1(G) = \alpha_1 - \gamma_0 = \epsilon - \rho M$$

dove ρM è il rango della matrice di incidenza M . Ora, il rango di M è la dimensione del Ker di M , cioè dello spazio generato dalle righe di M . Dunque, per il corollario al teorema 2.11, risulta

$$\rho M = \dim \text{Ker} M = \nu - \omega$$

Sostituendo, si avrà:

$$\beta_1(G) = \epsilon - \rho M = \epsilon - \nu + \omega$$

2. Usiamo ancora la formula 1.1 per calcolare lo 0-esimo numero di Betti di un grafo.

$$\beta_0(G) = \alpha_0 - \gamma_0 - \gamma_{-1}$$

Ma $\gamma_{-1} = 0$, quindi l'equazione diventa:

$$\beta_0(G) = \alpha_0 - \gamma_0 = \nu - \rho M$$

e anche in questo caso ρM è il rango della matrice di incidenza di G . Per lo stesso ragionamento di prima e applicando ancora il corollario al teorema 2.11, risulta

$$\rho M = \dim \text{Ker} M = \nu - \omega$$

Sostituendo:

$$\beta_0(G) = \nu - \rho M = \nu - \nu + \omega = \omega$$

Cioè lo 0-esimo numero di Betti di un grafo G è il numero delle sue componenti connesse.

□

Questa proposizione ci dice che, in un grafo G , siamo facilmente in grado di conoscere spazi isomorfi a $H_1(G)$ e a $H_0(G)$.

Bibliografia

- [I] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002);
- [II] C.R.F. Maunder, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (1980);
- [III] E.H. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill (1966);
- [IV] L.C. Kinsey, *Topology of Surfaces*, Springer-Verlag (1991);
- [V] J.A. Bondy and U.S.R. Murty, *Graph theory with applications*, North Holland, 1976 Freely downloadable;
- [VI] J.A. Bondy and U.S.R. Murty, *Graph theory*, Springer Series: Graduate Texts in Mathematics, Vol. 244 (2008).