Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Grado topologico e applicazioni alle equazioni differenziali periodiche

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Giovanna Citti

Presentata da:
Fares Essebei

II Sessione
Anno Accademico 2013-2014

Bisogna avere in sè il caos per partorire una stella che danzi.

(F. Nietzsche)

Introduzione

Molti problemi in analisi e nelle sue applicazioni possono essere ricondotti allo studio dell'insieme delle soluzioni di una equazione della forma

$$f(x) = p$$

in uno spazio appropriato. Scopo di questa tesi è lo studio della teoria del grado e delle sue applicazioni alle equazioni differenziali ordinarie che ammettono soluzioni periodiche. In effetti, la teoria del grado fornisce informazioni sull'esistenza di soluzioni, il loro numero e la loro natura.
Nel primo capitolo presentiamo appunto la nozione di grado topologico di Brouwer in spazi di dimensione finita. Si tratta di una funzione definita sull'insieme

$$\mathbf{V}(\Omega) = \left\{ f \in \mathbf{C}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}) \, | p \notin f(\partial\Omega) \right\}.$$

a valori interi. La proprietà piú importante del grado è sicuramente l'invarianza per omotopia che permette, in particolare, di dimostrare il teorema di punto fisso di Brouwer. Un'importante conseguenza di questa teoria è il cosiddetto teorema della palla pelosa il quale implica che non esiste un campo vettoriale continuo e non nullo tangente alla sfera.
Nel secondo capitolo ci poniamo il problema di definire il grado topologico anche per spazi di dimensione infinita. Sapendo che in tali spazi si perde la compattezza della sfera, definiremo la nozione di grado solo per perturbazioni dell'identità mediante le mappe compatte che trasformano sottoinsiemi limitati in spazi compatti. Questa nozione si dice grado di Leray-Schauder

ed è definita sull'insieme

$$K(\Omega) = \left\{ (I - T) : \bar{\Omega} \longrightarrow X \quad | \, T \; compatta \; e \; p \notin (I - T)(\partial\Omega) \right\}.$$

Essa verifica le stesse proprietà del grado di Brouwer tra le quali, di maggior interesse, l'invarianza omotopica. In particolare la nozione di punto fisso è alla base di teoremi di esistenza e unicità di equazioni non lineari.
Nel terzo e ultimo capitolo infatti, applichiamo gli strumenti acquisiti per trovare soluzioni periodiche per equazioni differenziali ordinarie.

Indice

1 Grado di Brouwer **3**

1.1 Grado di Brouwer in $\mathbb{R}$ 3

1.2 Definizione di grado in $\mathbb{R}^n$ 4

1.3 Grado di Brouwer: generalizzazione 9

1.4 Proprietà del grado di Brouwer 11

2 Grado di Leray-Schauder **21**

2.1 Problemi in spazi di dimensione infinita 21

2.2 Definizione del grado di Leray-Schauder 23

2.3 Proprietà del grado di Leray-Schauder 26

3 Soluzioni periodiche di EDO **31**

Bibliografia **37**

Capitolo 1

Grado di Brouwer

In questo capitolo diamo la nozione di grado di Brouwer. Si tratta di una nozione topologica che ci permetterà di enunciare un teorema di punto fisso per funzioni definite su uno spazio di dimensione finita. La definizione viene fornita in $\mathbb{R}$, poi generalizzata in $\mathbb{R}^n$. In questo setting viene dato dapprima per funzioni di classe $\mathbf{C}^1$ senza punti critici, poi usando un teorema di rappresentazione integrale viene rimossa l'ipotesi sui punti critici, e infine la nozione viene data per funzioni continue, usando un teorema di approssimazione.

1.1 Grado di Brouwer in $\mathbb{R}$

Definizione 1.1. Sia $f \in \mathbf{C}[a,b] \cap \mathbf{C}^1(a,b)$. Si dice che f ha uno **zero semplice** in $x_0 \in (a,b)$ se

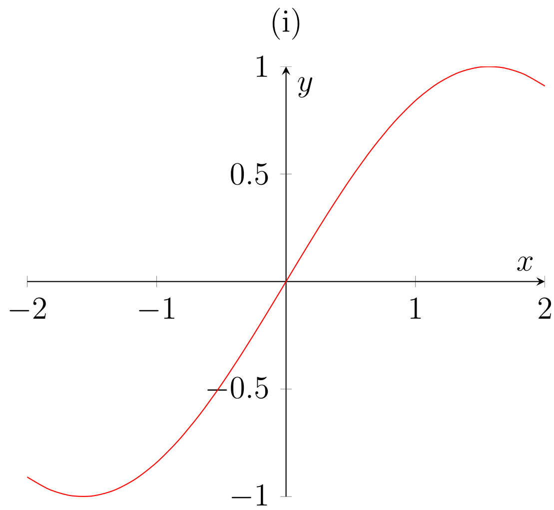
$$f(x_0) = 0 \quad e \quad f'(x_0) \neq 0.$$

Definizione 1.2 (Grado di Brouwer)**.** Siano $f \in \mathbf{C}[a,b] \cap \mathbf{C}^1(a,b)$ e $p \in \mathbb{R}$. Supponiamo $f^{-1}(p) = \{x_1, ..., x_m\}$ e che $x_1, .., x_m$ siano zero semplici per f. Se $f(a) \neq p \neq f(b)$ definiamo

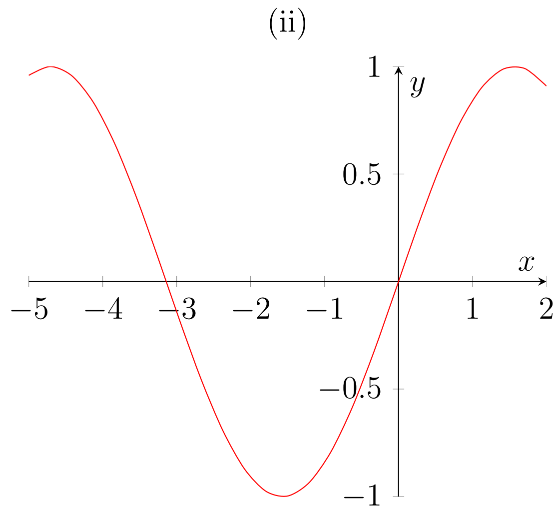
$$deg(f,(a,b),p) = \sum_{i=1}^{m} sgn f'(x_i)$$

dove sgn denota il segno della funzione e con la convenzione che la somma sia 0 quando $f^{-1}(p) = \emptyset$.

Esempio 1. Calcoliamo il grado di Brouwer per $f(x) = sen(x)$ in $p = 0$, in due diversi intervalli.



(a) $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



(b) $(-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

(i) $deg(f, (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), 0) = 1$

(ii) $deg(f, (-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), 0) = 0$

Osservazione 1. Se si suppone $p = 0$ si avrà:

$$deg(f, (a, b), 0) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad f(a)f(b) > 0; \\ 1 & \text{se} \quad f(a) < 0 \ e \ f(b) > 0; \\ -1 & \text{se} \quad f(a) > 0 \ e \ f(b) < 0. \end{cases}$$

1.2 Definizione di grado in $\mathbb{R}^n$

Adesso possiamo estendere la precedente definizione ad una funzione a piú variabili. Nel seguito consideremo funzioni $f : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dove Ω è un sottoinsieme aperto e limitato di $\mathbb{R}^n$. Se $f \in \mathbf{C}^1(\Omega)$ indichiamo con $\det J_f(x)$ lo jacobiano di f nel punto x. Si dice che $x \in \Omega$ è un **punto critico** di f se $\det J_f(x) = 0$, altrimenti x è un punto **regolare** per f. Denoteremo quindi con $\mathbf{Z}_f$ l'insieme dei punti critici di f in Ω.

Definizione 1.3. Sia $f \in \mathbf{C}(\bar{\Omega}) \cap \mathbf{C}^1(\Omega)$ e tale che $p \notin f(\partial\Omega)$ e $f^{-1}(p) \cap \mathbf{Z}_f = \oslash$. Quindi possiamo definire:

$$deg(f, \Omega, p) = \sum_{i=1}^{n} sgn \det J_f(x_i)$$

dove $\{x_1, ..., x_m\} = f^{-1}(p)$.
Se $f^{-1}(p) = \oslash$ definiamo $deg(f, \Omega, p) = 0$.

Il seguente lemma ci permetterà di dare una nuova rappresentazione del grado in $\mathbb{R}^n$.

Lemma 1.2.1. *Sia $f \in \boldsymbol{C}(\bar{\Omega}) \cap \boldsymbol{C}^1(\Omega)$. Se $f^{-1}(p) \cap \boldsymbol{Z}_f = \oslash$ allora $f^{-1}(p)$ è finito.*

Dimostrazione. Indichiamo con D(A) l'insieme dei punti di accumulazione dell'insieme A. Supponiamo per assurdo che esista $x^* \in D(f^{-1}(p))$; poichè $x^* \in \bar{\Omega}$ e $f \in \mathbf{C}(\bar{\Omega})$, allora

$$\exists \ \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in f^{-1}(p) - \{x^*\} \quad \textit{tale che} \quad x_n \longrightarrow x^*$$

Per cui $f(x_n) = p \quad \forall p$, da cui segue $f(x^*) = p$. Quindi $x^* \in \Omega$ perchè $p \notin f(\partial\Omega)$; dall'ipotesi che x^* sia un punto regolare segue allora l'esistenza di un intorno U^* di x^*, $U^* \subset \Omega$, tale che $f_{|U^*}$ è un omeomorfismo di U^* su $f(U^*)$, per il teorema di invertibilità locale; ma allora il solo punto di U^* in cui f ha il valore p è proprio x^*, contrariamente all'ipotesi che $x^* \in D(f^{-1}(p))$. $\square$

Definizione 1.4. Indichiamo con $\mathbb{F}_\epsilon$ l'insieme delle funzioni $\Phi : [0, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(||x||)dx = 1$ e tali che

(i) $\Phi(t) = 0$ per t in un intorno dello zero,

(ii) $\Phi(t) = 0$ per $t \geq \epsilon > 0$.

Teorema 1.2.2. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e limitato e sia $f : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in \boldsymbol{C}^1(\Omega) \cap \boldsymbol{C}(\bar{\Omega})$. Sia $p \notin f(\partial\Omega)$ e se $\exists \epsilon$ tale che*

$$\epsilon < \inf_{x \in \partial\Omega} ||f(x) - p||$$

allora:

$$deg(f,\Omega,p) = \int_\Omega \Phi(||f(x)-p||)\det J_f(x)dx. \tag{1.2.1}$$

Dimostrazione. Sia $f^{-1}(p)=\oslash$; allora per la definizione 1.3, $deg(f,\Omega,p)=0$. Inoltre $||f(x)-p||>0 \quad \forall\, x\in\bar{\Omega}$, così preso $\epsilon>0$ tale che sia $\epsilon<\inf_{\bar{\Omega}}||f(x)-p||$, risulta $\Phi(||f(x)-p||)=0 \quad \forall x\in\Omega$, perchè Φ soddisfa le proprietà (i) e (ii) della definizione 1.4; per cui anche il secondo membro di 1.2.1 è nullo.

Supponiamo ora $f^{-1}(p)\neq\oslash$ e $f^{-1}(p)$ è costituito da punti regolari e $f^{-1}(p)=\{x_1,...,x_m\}$ che sono in numero finito per il lemma 1.2.1. Per $i=1,2,....,m \quad \det J_f(x_i)\neq 0$, ma $f\in\mathbf{C}^1(\Omega)$ pertanto $\forall\, i \quad \exists\, U_i$ tale che

$$sgn\det J_f(x) = sgn\det J_f(x_i) \quad \forall\, x\in U_i$$

Restringendo opportunamente si ha $U_i\subset\Omega$, $U_i\cap U_j=\oslash \quad \forall\, i\neq j$ e per il teorema di invertibilità locale si ha che:

$$f_{|U_i}: U_i \longrightarrow f(U_i)$$

è un omeomorfismo. Quindi per $i=1,2,....,m \quad (f-p)(U_i)$ risulta un intorno dello zero e pertanto $\exists\epsilon>0$ tale che $B(0,\epsilon)\subset\bigcap_{i=1}^m(f-p)(U_i)$,
e poichè $\epsilon<\inf_{\partial\Omega}||f(x)-p||$, ne segue che $\Phi(||f(x)-p||)=0$ per $x\in\Omega-\bigcup_{i=1}^n U_i$, (per le proprietà (i) e (ii) della definizione 1.4) e quindi

$$\int_\Omega \Phi(||f(x)-p||)detJ_f(x)dx = \sum_{i=1}^n\int_{U_i}\Phi(||f(x)-p||)\det J_f(x)dx.$$

Poichè per $i=1,2,...,m$ $sgn\det J_f(x)=sgn\det J_f(x_j) \quad \forall\, x\in U_j$, allora l'ultimo integrale è uguale a

$$\sum_{i=1}^m sgn\det J_f(x_i)\int_{U_j}\Phi(||f(x)-p||)|\det J_f(x)|dx;$$

posto $y=f(x), x\in U$, si ha $x=f^{-1}(y)$ ma $detJ_{f^{-1}}(x)=\frac{1}{detJ_f(x)}$ perciò l'ultimo integrale scritto diventa

$$\int_{f(U_j)}\Phi(||y-p||)dy = \int_{(f-p)(U_j)}\Phi(||z||)dz;$$

ma $B(0,\epsilon) \subset (f-p)(U_j)$ e quindi, poichè $supp\Phi \subset [0,\epsilon]$, l'ultimo integrale scritto è uguale a 1. In conclusione si ha:

$$\sum_{i=1}^{m} sgn \det J_f(x_i) = \int_\Omega \Phi(||f(x)-p||)\det J_f(x)dx.$$

$\square$

Osservazione 2. La precedente definizione è indipendente dalla scelta di Φ (la quale soddisfa le proprietà (i) e (ii)).

Osservazione 3. La definizione 1.3 si applica al caso in cui $f^{-1}(p) \cap \mathbf{Z}_f = \oslash$, mentre l'espressione

$$deg(f,\Omega,p) = \int_\Omega \Phi(||f(x)-p||)\det J_f(x)dx$$

ha senso nelle ipotesi che $f \in \mathbf{C}(\bar{\Omega}) \cap \mathbf{C}^1(\Omega)$ con $p \notin f(\partial\Omega)$. Possiamo quindi estendere la definizione di grado ad ogni funzione che verifichi queste proprietà.

Teorema 1.2.3. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e limitato e siano $f,g \in \boldsymbol{C}^1(\Omega) \cap \boldsymbol{C}(\bar{\Omega})$. Siano $p \in \mathbb{R}^n$ e $\epsilon > 0$ tali che*

1. $||f(x)-p|| \geq 7\epsilon \quad \forall x \in \partial\Omega$
2. $||f(x)-g(x)|| < \epsilon \quad \forall x \in \bar{\Omega}$

Allora:

$$deg(f,\Omega,p) = deg(g,\Omega,p).$$

Dimostrazione. Sia $\gamma \in \mathbf{C}^1([0,+\infty],\mathbb{R})$, $0 \leq \gamma(t) \leq 1$ tale che

$$\gamma(t) = 1 \quad per\ 0 \leq t \leq 2\epsilon, \quad \gamma(t) = 0 \quad per\ t \geq 3\epsilon$$

Poniamo: $h(x) = \big(1-\gamma(||f(x)-p||)\big)f(x) + \gamma(||f(x)-p||)g(x)$. Risulta $h \in \mathbf{C}^1(\Omega) \cap \mathbf{C}(\bar{\Omega})$ e:

- $||h(x)-f(x)|| = \gamma(||f(x)-p||)||f(x)-g(x)|| < \epsilon \quad \forall x \in \bar{\Omega}$

- $||h(x) - g(x)|| = \big(1 - \gamma((||f(x) - p||))\big)||f(x) - g(x)|| < \epsilon \quad \forall x \in \bar{\Omega}$
- $||h(x) - p|| \geq ||f(x) - p|| - \gamma(||f(x) - p||)||f(x) - g(x)|| > 7\epsilon - \epsilon = 6\epsilon.$

Inoltre $h(x) = f(x)$ se $||f(x) - p|| \geq 3\epsilon$, $h(x) = g(x)$ se $||f(x) - p|| \leq 2\epsilon$. Prendiamo $\Phi_1 \in \mathbb{F}_{5\epsilon}$, $\Phi_1(t) = 0$ per $0 \leq t \leq 4\epsilon$ e questa soddisfa la definizione (i) e (ii) di $\mathbb{F}_\epsilon$. Poichè $||h(x) - p|| > 6\epsilon \quad \forall\, x \in \partial\Omega$, risulta dall'osservazione precedente che

$$deg(h, \Omega, p) = \int_\Omega \Phi_1(||h(x) - p||) det J_h(x) dx = \int_\Omega \Phi_2(||h(x) - p||) det J_h(x) dx$$

dove $\Phi_2 \in \mathbb{F}_\epsilon$. Osserviamo che

$$\Phi_1(||h(x) - p||) \det J_h(x) = \Phi_1(||f(x) - p||) \det J_f(x);$$

infatti se $||f(x) - p|| \geq 3\epsilon$ è $h(x) = f(x)$, mentre se $||f(x) - p|| \leq 3\epsilon$ allora $||h(x) - p|| \leq ||f(x) - p|| + ||f(x) - h(x)|| < 3\epsilon$ e quindi $\Phi_1(||h(x) - p||) = \Phi_1(||f(x) - p||) = 0$. Pertanto

$$\begin{aligned} deg(h, \Omega, p) &= \int_\Omega \Phi_1(||h(x) - p||) \det J_h(x) dx = \\ &= \int_\Omega \Phi_1(||f(x) - p||) \det J_f(x) dx = deg(f, \Omega, p). \end{aligned}$$

È anche

$$\Phi_2(||h(x) - p||) \det J_h(x) = \Phi_2(||g(x) - p||) \det J_g(x);$$

infatti se $||f(x) - p|| \leq 2\epsilon$ è $h(x) = g(x)$ mentre se $||f(x) - p|| \geq 2\epsilon$ è $||g(x) - p|| \geq ||f(x) - p|| - ||f(x) - g(x)|| > \epsilon$ e quindi $\Phi_2(||g(x) - p||) = 0$ e $||h(x) - p|| \geq ||f(x) - p|| - \gamma(||f(x) - p||) - ||f(x) - g(x)|| > \epsilon$ e quindi $\Phi_2(||h(x) - p||) = 0$. Dunque

$$\begin{aligned} deg(h, \Omega, p) &= \int_\Omega \Phi_2(||h(x) - p||) \det J_h(x) dx = \\ &= \int_\Omega \Phi_2(||g(x) - p||) \det J_g(x) = deg(g, \Omega, p). \end{aligned}$$

□

1.3 Grado di Brouwer: generalizzazione

In questo paragrafo si vuole eliminare la restrittiva condizione $f \in \mathbf{C}^1(\Omega)$.

Iniziamo con un esempio.

Esempio 2. Sia $\Omega = (-1, 1)$ e $f(x) = |x|$. Sicuramente $f \in \mathbf{C}[-1, 1]$ ma $f \notin \mathbf{C}^1(-1, 1)$. Comunque, se noi consideriamo la successione di funzioni $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ si ha che $f_n \in \mathbf{C}^1(-1, 1)$ e quindi possiamo calcolare, essendo nelle giuste ipotesi della definizione, $deg(f_n, (-1, 1))$. Inoltre, abbiamo che $\{f_n\}$ converge uniformemente ad f in $[-1, 1]$ e quindi è ben definito:

$$deg(f, (-1, 1)) = \lim_{n\to\infty} deg(f_n, (-1, 1)) = 0$$

Teorema 1.3.1 (Teorema di approssimazione di Weiestrass)**.** *Sia* $f \in \boldsymbol{C}(\bar{\Omega})$. *Allora esiste una successione di funzioni polinomiali* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *tale che*

$$\sup_{x\in\bar{\Omega}} ||f(x) - f_n(x)|| \longrightarrow 0 \quad n \to \infty$$

quindi f_n *converge uniformemente ad* f *in* $\bar{\Omega}$.

Definizione 1.5. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e limitato e sia $f \in \mathbf{C}(\bar{\Omega})$. Sia poi $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{C}(\bar{\Omega}) \cap \mathbf{C}^1(\bar{\Omega})$ tale che $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente ad f in $\bar{\Omega}$. Se $p \notin f(\partial\Omega)$ possiamo definire:

$$deg(f, \Omega, p) = \lim_{n\to\infty} deg(f_n, \Omega, p).$$

Osservazione 4. Il teorema 1.2.3 assicura che $deg(f_m, \Omega, p)$ è definito, che esiste m_0 tale che $deg(f_m, \Omega, p) = deg(f_{m_0}, \Omega, p) \quad \forall\, m \geq m_0$ e che il $\lim_{m\to\infty} deg(f_m, \Omega, p)$ è indipendente dalla particolare successione $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ approssimante (nel senso specificato) la f.

Dimostrazione. Per ipotesi $f(x) \neq p \quad \forall\, x \in \partial\Omega$ allora $\exists \min_{x\in\partial\Omega} ||f(x) - p|| > 0$. Poniamo quindi

$$\epsilon = \min_{x\in\partial\Omega} ||f(x) - p||$$

Si ha inoltre che $f_m \longrightarrow f$ uniformemente quindi arbitrariamente si avrà che $||f - f_m|| \leq \frac{\epsilon}{2} \leq 7\epsilon \quad \forall\, m \geq m_0$.

(i) $||f_m - p|| \geq ||f(x) - p|| - ||f - f_m|| \geq \min_{x\in\partial\Omega} ||f(x) - p|| - 7\epsilon \geq 14\epsilon - 7\epsilon = 7\epsilon$,

(ii) $||f_m - f_{m_0}|| \leq ||f_m - f|| + ||f - f_{m_0}|| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Dunque, le ipotesi del teorema 1.2.3 sono state verificate. □

Inoltre, il teorema di Weierstrass ci assicura che è sempre possibile calcolare il grado di qualsiasi funzione continua.

Esempio 3. Sia $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$ e sia $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. L'origine è un punto critico di f, quindi possiamo approssimarlo con una successione di punti regolari che si trovanno sull'asse delle x. Sia $\{\epsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione decrescente tale che $0 < \epsilon_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e $\epsilon_n \longrightarrow 0$, e si ponga $y_n = (\epsilon_n, 0)$. Allora $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una successione di valori regolari che converge all'origine. Se definiamo $f_n(x) = f(x) - \epsilon_n$, si ha $deg(f_n, \Omega, 0) = 2$ e quindi

$$deg(f, \Omega, 0) = 2.$$

Lemma 1.3.2 (Lemma di Sard)**.** *Se $f \in \boldsymbol{C}^1(\Omega)$ allora $f(\boldsymbol{Z}_f)$ ha misura di Lebesgue nulla. In particolare, $int f(\boldsymbol{Z}_f) = \emptyset$.*

Teorema 1.3.3. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e limitato. $\forall f \in \boldsymbol{C}(\Omega)$ e $\forall p \notin f(\partial\Omega)$, il* ***grado*** *è un numero intero.*

Osservazione 5. Dalla definizione 1.3 segue immediatamente che $deg(f, \Omega, p)$ è intero se $f^{-1}(p) \cap \mathbf{Z}_f = \emptyset$. Verifichiamo che tale proprietà vale anche quando viene rimossa l'ipotesi $f^{-1}(p) \cap \mathbf{Z}_f = \emptyset$ (si veda l'osservazione 3).

Dimostrazione. Per quanto visto precedentemente, esiste $g : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $g \in \mathbf{C}(\bar{\Omega}) \cap \mathbf{C}^1(\Omega)$, $p \in \mathbb{R}^n - g(\partial\Omega)$, tale che $deg(f, \Omega, p) = deg(g, \Omega, p)$. Se p è regolare per g allora, per la definizione 1.3, segue che $deg(g, \Omega, p)$, e quindi $deg(f, \Omega, p)$, è un numero intero. Supponiamo che p non sia regolare per g. Per il lemma di Sard abbiamo che $int(g(\mathbf{Z}_g)) = \emptyset$, ovvero $g(\mathbf{Z}_g)$ non ha punti interni. Poichè ora $p \in g(\mathbf{Z}_g)$, esiste una successione $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tale che

$$\lim_{k\to\infty} p_k = p \quad e \quad p_k \notin g(\mathbf{Z}_g).$$

Sia $||p_k - p|| < \epsilon \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$, $||g(x) - p|| \geq 8\epsilon \quad \forall\, x \in \partial\Omega$. Allora

$$||g(x) - p_k|| \geq ||g(x) - p|| - ||p - p_k|| \geq 7\epsilon \quad \forall\, x \in \partial\Omega$$

e quindi $||(g(x) + p - p_k) - p|| \geq 7\epsilon$.
Ora: $||(g(x) + p - p_k) - g(x)|| = ||p - p_k|| < \epsilon$ e per il teorema 1.2.3 (relativo alle funzioni $g + p - p_k$ e g) segue che $deg(g, \Omega, p) = deg(g + p - p_k, \Omega, p)$; d'altra parte quest'ultimo è uguale a

$$\int_\Omega \Phi(||g(x) + p - p_k - p||)\mathbf{J}_{g+p-p_k}(x)dx =$$
$$= \int_\Omega \Phi(||g(x) - p_k||)\mathbf{J}_g(x)dx = deg(g, \Omega, p_k),$$

($\Phi \in \mathbb{F}_\epsilon$, soddisfacente (i) e (ii) della definizione). Dunque $deg(g, \Omega, p)$ è un numero intero. $\square$

Osservazione 6. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e limitato e si ponga

$$\mathbf{V}(\Omega, p) = \left\{f \in \mathbf{C}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) | p \notin f(\partial\Omega)\right\}$$

Allora la mappa $deg(\cdot, \Omega, p) : \mathbf{V}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{Z}$ è ben definita.

1.4 Proprietà del grado di Brouwer

Osservazione 7. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ insieme aperto e limitato e $p \notin f(\partial\Omega)$. Allora $deg(f, \Omega, p)$ soddisfa le seguenti proprietà :

Normalizzazione Se $p \in \Omega$ allora $deg(I, \Omega, p) = 1$, dove I denota la mappa identità in $\bar{\Omega}$;

Additività Se Ω_1 e Ω_2 sono due sottoinsiemi aperti di Ω tali che $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ e $p \notin f(\bar{\Omega} - (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ allora:

$$deg(f, \Omega, p) = deg(f, \Omega_1, p) + deg(f, \Omega_2, p).$$

Proposizione 1.4.1 (Invarianza per Omotopia)**.** *Siano* $f, g \in \boldsymbol{V}(\Omega)$ *e sia* $h : [0,1] \times \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una omotopia da* f *a* g*. Se si suppone che*
$p \notin h(t, \partial\Omega) \quad \forall\, t \in [0,1]$ *allora:*

$$deg(f, \Omega, p) = deg(g, \Omega, p).$$

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre $p = 0$. Esiste $\epsilon > 0$ tale che

$$||h(t,x)|| > 8\epsilon \quad \forall x \in \partial\Omega,\, \forall t \in [0,1]$$

ed esiste $\delta > 0$ tale che

$$||h(t_1,x) - h(t_2,x)|| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall x \in \Omega,\, \forall t_1, t_2 \in [0,1], \quad |t_1 - t_2| < \delta_\epsilon.$$

Fissiamo t_1 e t_2, $|t_1 - t_2| \leq \delta_\epsilon$. Siano $\left\{f_k^{(1)}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\left\{f_k^{(2)}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ due successioni che approssimano $h(t_1, \cdot)$ e $h(t_2, \cdot)$ uniformemente; allora esiste k_0 tale che per $k \geq k_0$ è

$$||f_k^{(2)}(x)|| \geq 7\epsilon \quad \forall\, x \in \partial\Omega$$

e

$$||f_k^{(1)}(x) - f_k^{(2)}(x)|| < \epsilon \quad \forall\, x \in \bar{\Omega}$$

Allora

$$deg(f_k^{(1)}, \Omega, 0) = deg(f_k^{(2)}, \Omega, 0) \quad k \geq k_0$$

e quindi al limite per $k \longrightarrow \infty$,

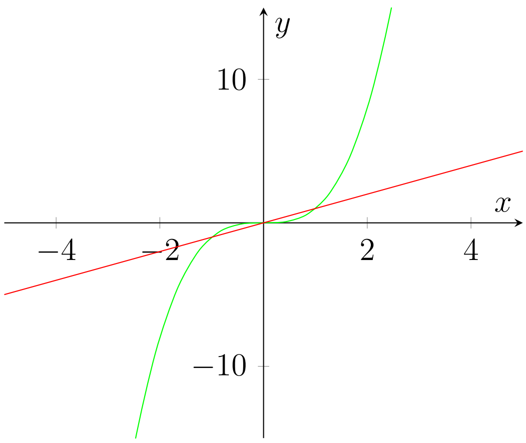
$$deg(h(t_1, \cdot), \Omega, 0) = deg(h(t_2, \cdot), \Omega, 0).$$

Per l'arbitrarietà di t_1 e t_2 segue la tesi. □

Osservazione 8. D'ora in poi considereremo solo omotopie $h : [0,1] \times \bar{\Omega} \longrightarrow \bar{\Omega}$ **ammissibili**. Questo vuol dire che $h(t,x) \neq p \quad \forall\, x \in \partial\Omega$ o equivalentemente $||h(t,x) - p|| > 0 \quad \forall\, x \in \partial\Omega$.

Osservazione 9. L'invarianza per omotopia è sicuramente la proprietà piú importante del grado di Brouwer. Significa che se deformiamo con continuità una funzione $f \in \mathbf{V}(\Omega)$ in un'altra funzione $g \in \mathbf{V}(\Omega)$ il grado di Brouwer

Le funzioni f e g sono omotope



rimane lo stesso. Questo risultato dipende dal fatto che $deg(h(t,\bullet),\Omega)$ non dipende da t. L'assunzione che nessuno zero appaia su $\partial\Omega$ durante l'omotopia è necessaria. In conclusione, se si definisce una mappa $\mathbf{D}:\mathbf{V}(\Omega)\longrightarrow\mathbf{Z}$ che soddisfa le proprietà precedenti allora $\mathbf{D}(\cdot)=deg(\cdot,\Omega,p)$.

Esempio 4. Sia $\Omega=(-1,1)$ e si consideri la mappa

$$h(t,x)=(1-t)x+tx^3.$$

Questa mappa soddisfa le seguenti proprietà:

1. h è continua in $[0,1]\times\bar{\Omega}$;
2. $h(0,x)=x$ e $h(1,x)=x^3$;
3. Per ogni $t\in[0,1]$, la funzione $h(t,x)$ non si annulla agli estremi $\{-1,1\}$

Pertanto, conoscendo il grado dell'identità e avendo visto che le due funzioni sono omotope, risulta $deg(f,(-1,1),0)=deg(I,(-1,1),0)=1$.

Proposizione 1.4.2 (Esistenza)**.** *Nelle ipotesi precedenti, il grado di Brouwer soddisfa la seguente proprietà:*

$$\textit{Se } deg(f,\Omega,p)\neq 0 \textit{ allora esiste } x\in\Omega \textit{ tale che } f(x)=p.$$

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre $p = 0$.
Supponiamo $f(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in \Omega$; poichè anche sul bordo non esitono zeri di f allora $\exists\, \epsilon > 0$ tale che $||f(x)|| > 2\epsilon \quad \forall\, x \in \bar{\Omega}$. Sia poi $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni, $f_k : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad f_k \in \mathbf{C}^1(\Omega) \cap \mathbf{C}(\bar{\Omega})$ tale che $f_m \longrightarrow f$ uniformemente su $\bar{\Omega}$ e tale che $0 \notin f_m(\partial\Omega) \quad \forall\, m$.
Dunque $\exists\, m_0$ tale che $||f_m(x)|| > \epsilon \quad \forall\, x \in \bar{\Omega}$ e $\forall\, m \geq m_0$. Allora:

$$deg(f_m, \Omega, 0) = \int_\Omega \Phi(||f_m(x)||) det J_{f_m}(x) dx = 0 \quad \forall m \geq m_0$$

(Φ soddisfa le proprietà (i) e (ii) della definizione). Ne segue che:

$$deg(f, \Omega, 0) = \lim_{m \to \infty} deg(f_m, \Omega, 0) = 0.$$

Questo è assurdo. □

Teorema 1.4.3 (Rouché)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e limitato. Siano $f, g : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue e tali che $||f(x) - g(x)|| < ||f(x) - p|| \quad \forall\, x \in \partial\Omega$. Allora*

$$deg(f, \Omega, p) = deg(g, \Omega, p).$$

Dimostrazione. Poniamo $h(t, x) = f(x) + t\big(g(x) - f(x)\big)$, $t \in [0, 1]$ una omotopia tra f e g. Poichè h è ammissibile allora

$$\begin{aligned} &||h(t, x) - p|| > 0 \Leftrightarrow \\ &\qquad \Leftrightarrow ||f(x) - p|| - ||g(x) - f(x)|| > 0 \quad \forall\, x \in \partial B \quad 0 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

Quindi vale la tesi per l'invarianza omotopica. □

Corollario 1.4.4 (Dipendenza dal bordo)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e limitato. Se $f, g \in \boldsymbol{V}(\Omega)$ sono tali che $f_{|\partial\Omega} = g_{|\partial\Omega}$ allora:*

$$deg(f, \Omega, p) = deg(g, \Omega, p).$$

Corollario 1.4.5 (Escissione)**.** *Nelle ipotesi precedenti, se $\Omega_1 \subset \Omega$ è un sottoinsieme aperto tale che $p \notin f(\bar{\Omega} - \Omega_1)$ allora:*

$$deg(f, \Omega, p) = deg(f, \Omega_1, p).$$

Proposizione 1.4.6. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e limitato e sia $f : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua. Sia A una delle componenti connesse di $\mathbb{R}^n - f(\partial\Omega)$. Allora $deg(f, \Omega, p)$ è costante per $p \in A$.*

Dimostrazione. Siano $p, q \in A$. Poichè A è una componente connessa di $\mathbb{R}^n - f(\partial\Omega)$ e $f(\partial\Omega)$ è compatto, esiste $\gamma : [0,1] \longrightarrow A$ continua tale che $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ e $||\gamma(t) - f(x)|| > 0 \quad \forall\, t \in [0,1]$ e $\forall x \in \Omega$. Quindi esiste $\epsilon > 0$ tale che $||\gamma(t) - f(x)|| \geq \epsilon \quad \forall\, t \in [0,1]$ e $\forall\, x \in \partial\Omega$.
Sia $0 = t_0 < t_1 < ... < t_k = 1$ una partizione finita dell'intervallo $[0,1]$ tale che sia $||\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|| < \epsilon$ per $j = 1, 2, ..., k$. Si pone $g_1(x) = f(x) + p - \gamma(t_1)$ e si ha

$$||f(x) - g_1(x)|| = ||p - \gamma(t_1)|| < \epsilon \leq ||f(x) - p|| \quad \forall x \in \partial\Omega$$

e quindi, per il teorema di Rouché , $deg(f, \Omega, p) = deg(g_1, \Omega, p) = deg(f, \Omega, \gamma(t_1))$.
Ripetendo lo stesso procedimento k volte si ha

$$||deg(f, \Omega, \gamma(t_1))|| = ||deg(f, \Omega, \gamma(t_k))||.$$

Dunque $deg(f, \Omega, p) = deg(f, \Omega, q)$. □

Osservazione 10. Tra le componenti connesse di $\mathbb{R}^n - f(\partial\Omega)$ ne esiste una, ed una sola, non limitata: sia A_∞ (questa contiene $\mathbb{R}^n - S$ dove S è l'arbitraria sfera di $\mathbb{R}^n$ contente $f(\partial\Omega)$) allora $\forall\, p \in A_\infty$ risulta $deg(f, \Omega, p) = 0$.

Teorema 1.4.7 (Teorema del punto fisso di Brouwer)**.** *Sia $B \subset \mathbb{R}^n$ la sfera aperta n-dimensionale. Se $f : \bar{B} \to \bar{B}$ è continua allora f ha un punto fisso in $\bar{B}$ ovvero $\exists x \in \bar{B}$ tale che $f(x) = x$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $f(x) \neq x, \forall\, x \in \bar{B}$. Sia

$$h : [0,1] \times \bar{B} \longrightarrow \bar{B} \quad h(t,x) = x - tf(x), \quad t \in [0,1]$$

una omotopia ammissibile. Infatti h non ammette zeri su $\partial B \quad \forall x \in \bar{B}$. $\forall\, x \in \partial B$ risulta $||h(t,x)|| \geq ||x|| - t||f(x)|| \geq 1 - t > 0$ *e* $\forall\, t \in [0,1[$. D'altra parte $||h(1,x)|| = ||x - f(x)|| > 0$ per ipotesi. Allora per il teorema di Rouché si ha

$$deg(h(1,\cdot), B, 0) = deg(h(0,\cdot), B, 0).$$

Poichè $deg(h(0,\cdot), B, 0) \neq 0$, per la proprietà di esistenza del grado $\exists\, x_0 \in B$ tale che $f(x_0) = x_0$, che è assurdo. $\square$

Teorema 1.4.8 (Teorema del punto fisso di Brouwer)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, limitato e convesso, e sia $f \in \boldsymbol{C}(\bar{\Omega})$ tale che $f(\bar{\Omega}) \subset \bar{\Omega}$. Allora f ha un punto fisso in $\bar{\Omega}$.*

Lemma 1.4.9 (Teorema di estensione di Tietze)**.** *Sia $F \subset \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso e sia $f : F \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una mappa continua. Allora esiste $\bar{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua tale che $\bar{f}_{|F} = f$.*

Lemma 1.4.10. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e limitato. Se $0 \in \Omega$ allora la mappa $-I$ definita come $(-I)(x) = -x$ soddisfa $deg(-I, \Omega, 0) = (-1)^n$.*

Dimostrazione. Poichè 0 è l'unico zero di -I in Ω, abbiamo che $deg(-I, \Omega, 0) = sgn \det J_{-I}(0)$. Si ha:

$$J_{-I}(0) = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

da cui la tesi. $\square$

Teorema 1.4.11 (Teorema della palla pelosa)**.** *Sia $n \in \mathbb{N}$ fissato e denotiamo $S^{n-1} = \partial B$, dove B è la palla unitaria in $\mathbb{R}^n$. Se $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n - \{0\}$ è una mappa continua allora esiste $\lambda \neq 0$ e $x \in S^{n-1}$ tale che $f(x) = \lambda x$.*

Dimostrazione. Per il lemma, esiste una mappa continua $\bar{f} : B \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $\bar{f}_{|S^{n-1}} = f$. Supponiamo per assurdo che non esista una coppia (λ, x) tale che $\bar{f}(x) = \lambda x$ in S^{n-1}. Adesso consideriamo le seguenti funzioni continue:

$$h_1(t,x) = (1-t)\bar{f}(x) + tx, \quad h_2(t,x) = (1-t)\bar{f}(x) - tx.$$

Pertanto h_1 e h_2, nelle condizioni precedenti, sono due omotopie ammissibili rispettivamente tra: I e $\bar{f}$, $-I$ e $\bar{f}$. Quindi per la proprietà sopra abbiamo che:

$$1 = deg(I, B, 0) = deg(\bar{f}, B, 0) = deg(-I, B, 0) = -1$$

che porta ovviamente ad un assurdo. □

Osservazione 11. Il teorema precedente può essere formulato nel seguente modo: non esiste un campo vettoriale continuo e non nullo tangente alla sfera. Questo vuol dire che è impossibile pettinare una sfera senza creare dei vortici.

Corollario 1.4.12. *Sia $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ e sia $f : S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$ una mappa continua. Allora f ha un punto fisso oppure un punto antipodale.*

Dimostrazione. Per il teorema della palla pelosa, esiste $\lambda \neq 0$ e $x \in S^{n-1}$ tale che $f(x) = \lambda x$. $\forall x, f(x) \in S^{n-1}$ e quindi abbiamo che $1 = ||f(x)|| = |\lambda|$, da cui si ha che x è un punto fisso se $\lambda = 1$, oppure $f(x) = -x$ se $\lambda = -1$. □

Corollario 1.4.13. *Sia n fissato, $n \geq 3$, e sia $f : S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$ una mappa continua tale che $\langle x, f(x) \rangle = 0 \quad \forall x \in S^{n-1}$. Allora $\exists x_0 \in S^{n-1}$ tale che $f(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $f(S^{n-1}) \cap \{0\} = \oslash$. Quindi, per le ipotesi del teorema della palla pelosa, abbiamo che $\exists \lambda \neq 0$ e $x \in S^{n-1}$ tale che $f(x) = \lambda x$. Risulta:

$$\langle x, f(x) \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \lambda ||x||^2 \neq 0,$$

che è ovviamente una contraddizione. □

Enunciamo e dimostriamo infine il seguente teorema.

Teorema 1.4.14 (di Riduzione)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e limitato. Sia poi $m \in \mathbb{N}$, $m < n$ e identifichiamo $\mathbb{R}^m$ con il sottospazio*

$\{x = (x_1, ..., x_m, 0, ..., 0)\}$ *di* $\mathbb{R}^n$. *Sia poi* $f : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *continua e sia* $g : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *definita ponendo*

$$g(x) = x + f(x), \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Allora se $p \in \mathbb{R}^m - g(\partial\Omega)$ *si ha*

$$deg(g, \Omega, p) = deg(g_{|\mathbb{R}^m \cap \bar{\Omega}}, \Omega \cap \mathbb{R}^m, p).$$

Dimostrazione. Si può denotare $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x), 0, ...0)$ e quindi $g(x) = (x_1 + f_1(x), ..., x_m + f_m(x), x_{m+1}, ..., x_n)$ e quindi $g(\mathbb{R}^m \cap \bar{\Omega}) \subset \mathbb{R}^m$; perciò ha senso scrivere

$$deg(g_{|\mathbb{R}^m \cap \bar{\Omega}}, \Omega \cap \mathbb{R}^m, p).$$

È sufficiente dimostrare il teorema nell'ipotesi che sia $f \in \mathbf{C}(\bar{\Omega}) \cap \mathbf{C}^1(\Omega)$ e che i punti di $g^{-1}(p)$ siano regolari.
Se $g(y) = y + f(y) = p$ allora $y = p - f(y) \in \mathbb{R}^m$ e quindi $g^{-1}(p) \subset \mathbb{R}^m \cap \Omega$; perciò $\{y \in \Omega \mid g(y) = p\} = \left\{y \in \Omega \cap \mathbb{R}^m \mid g_{|\mathbb{R}^m \cap \bar{\Omega}} = p\right\}$. Ora

$$\det J_g(x) = \det \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_m} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_{m+1}} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \dots & 1 + \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_m} & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_{m+1}} & \dots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \dots & 1 + \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

e qui è da porre $x = (x_1, ..., x_m, 0, ..., 0)$ se $g(x) = p$; d'altra parte

$$g_{|\mathbb{R}^m \cap \bar{\Omega}} : \mathbb{R}^m \cap \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

è del tipo $(x_1 + f_1(x_1, ..., x_m, 0, ..., 0), ..., x_m + f_m(x_1, ..., x_m, 0, ..., 0))$ e quindi

$$\det J_{g_{|\mathbb{R}^m \cap \bar{\Omega}}}(x_1, ..., x_m, 0, ..., 0) = \det \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial f_1(x_1, x_m, 0, ..., 0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x_1, ..., x_m, 0, ..., 0)}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m(x_1, ..., x_m, 0, ..., 0)}{\partial x_1} & \dots & 1 + \frac{\partial f_m(x_1, ..., x_m, 0, ..., 0)}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

Pertanto

$$\sum_{y, g(y)=p} sgn \det J_g(y) = \sum_{y, g(y)=p} sgn \det J_{g_{|\mathbb{R}^m \cap \bar{\Omega}}}(y).$$

$\square$

Capitolo 2

Grado di Leray-Schauder

2.1 Problemi in spazi di dimensione infinita

In questo paragrafo vogliamo estendere la nozione di grado di Brouwer per spazi infinito-dimensionali. Tuttavia non è possibile costruire una mappa che verifichi le proprietà del grado nell'insieme delle funzioni continue. Per fare vedere questo assumiamo che una tale mappa esista e così otteniamo una contraddizione.

Esempio 5. Si consideri $l^2 = \{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}$ che è uno spazio di Banach con la norma

$$||x||_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2}$$

Sia B la palla unitaria in l^2 e definiamo $T : \bar{B} \longrightarrow \bar{B}$ come:

$$x = (x_1, x_2, ...) \longmapsto Tx = (\sqrt{1 - ||x||_2^2}, x_1, x_2, ...)$$

Così definita, T è una mappa continua e $(I - T)(\partial B) \cap \{0\} = \oslash$. Prendo poi la funzione $h(t, x) = x - tTx$. Questa è una omotopia ammissibile, nel senso del capitolo precedente, tra le mappe $I - T$ e I, quindi:

$$deg(I - T, B, 0) = deg(I, B, 0) = 1$$

Comunque, T non ha punti fissi in B. Infati se x fosse un punto fisso di T, poichè $||Tx|| = 1$ otteniamo:

$$Tx = (0, x_1, x_2, ...) = x = (x_1, x_2, ...)$$

e quindi $x = 0$. Ma $T0 = (1, 0, 0, ...) \neq 0$, ed è una contraddizione.

Osservazione 12. Negli spazi di dimensione infinita, il teorema del punto fisso di Brouwer fallisce perchè in questi spazi la palla unitaria chiusa non è compatta. Infatti dall'esempio precedente si può facilmente dedurre che esiste una mappa $f : \bar{B} \longrightarrow \bar{B}$ che non possiede punti fissi. Questo implica l'esistenza di una retrazione

$$r : \bar{B} \longrightarrow \partial\Omega$$

il che significa: in uno spazio vettoriale normato di dimensione infinita, il bordo della palla è sempre retratto della palla chiusa. Si consideri adesso l'omotopia:

$$h : [0, 1] \times \bar{B} \longrightarrow \bar{B}, \quad h(t, x) = tr(x) + (1 - t)x$$

Se $x \in \partial B,\ h(\lambda, x) = x$ quindi $0 \notin h([0, 1] \times \partial B)$.
D'altra parte $h(0, \cdot) = Id \implies deg(h(0, \cdot), B, 0) = 1$ per la proprietà di normalizzazione; mentre $h(1, \cdot) = r$ e poichè $r(x) = 0$ non ha soluzione in $\bar{B}$ allora per definizione $deg(h(1, \cdot), B, 1) = 0$. Quindi l'omotopia non ha conservato il grado. È proprio per questo che, negli spazi vettoriali di dimensione infinita, non può esistere una teoria del grado che goda delle buone proprietà viste nel caso finito dimensionale. Infatti, per estendere la nozione di grado negli spazi a dimensione infinita, abbiamo bisogno di introdurre le mappe compatte.

Definizione 2.1 (Mappa Compatta)**.**
Sia X uno spazio di Banach e $\Omega \subset X$. Diciamo che la mappa $T : \Omega \longrightarrow X$ è **compatta** se T è continua e $\overline{T(D)}$ è compatta per ogni insieme limitato $D \subset \Omega$.

Definizione 2.2. Sia X uno spazio di Banach e $\Omega \subset X$. Diciamo che $T : \Omega \longrightarrow X$ ha **rango finito** se $\dim(Rango(T)) < \infty$, ovvero se $\langle Im(T) \rangle$ è un sottospazio di dimensione finita di X.

Osservazione 13. Si può vedere che, se X e Y sono spazi di Banach, ogni mappa $T : X \longrightarrow Y$ continua, limitata e di rango finito è una mappa compatta.
Inoltre il limite uniforme di mappe compatte è compatto. D'altra parte, un operatore lineare compatto tra spazi di Banach non è, in generale, approssimabile in norma con operatori lineari di rango finito (questo è vero ad esempio se lo spazio di arrivo è uno spazio di Hilbert).

2.2 Definizione del grado di Leray-Schauder

Nella sezione precedente abbiamo visto che non si può avere una nozione di grado per mappe continue, ma lo si fa per mappe compatte. La definizione è quindi basata su un teorema di approsimazione di queste mappe compatte con funzioni a rango finito, per le quali, invece, il grado di Brouwer è ben definito. Enunciamo quindi il teorema di approssimazione.

Teorema 2.2.1. *Sia X uno spazio di Banach e sia $\Omega \subset X$ limitato. Se $T : \Omega \longrightarrow X$ è una mappa compatta allora esiste una successione $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ di mappe continue con rango finito tale che $T_n \rightrightarrows T$ in X.*

Quindi adesso possiamo definire il grado di Leray-Schauder per la seguente classe di funzioni:

$$K(\Omega) = \left\{ (I - T) : \bar{\Omega} \longrightarrow X \quad | \, T \text{ compatta e } p \notin (I - T)(\partial\Omega) \right\}.$$

Il teorema precedente ci suggerisce la seguente definizione:

Definizione 2.3. Data una mappa compatta T tale che $p \notin (I - T)(\partial\Omega)$, possiamo approssimarla con una successione di mappe $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ continue e di rango finito. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, consideriamo il sottoinsieme

$\Omega_n = \langle T_n(\bar{\Omega}) \rangle \cap \Omega$. Dato che $\langle T_n(\bar{\Omega}) \rangle$ è finito-dimensionale, possiamo considerare Ω_n come sottoinsieme di uno spazio finito-dimensionale e quindi siamo in grado di calcolare $deg(I - T_n, \Omega_n, p)$. Possiamo finalmente definire il grado di Leray-Schauder di $I - T$ come:

$$deg(I - T, \Omega, p) = \lim_{n \to \infty} deg(I - T_n, \Omega_n, p)$$

Osservazione 14. Tale limite esiste ed è indipendente dalla particolare coppia di successioni $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. La definizione è quindi univoca.

Dimostrazione. Per semplicità, e non è restrittivo, $p = 0$. Esiste $r > 0$ tale che

$$\inf_{x \in \partial\Omega} ||T(x) - x|| \geq r \tag{2.2.1}$$

Supponiamo infatti che sia $\inf_{x \in \partial\Omega} ||T(x) - x|| = 0$; allora esiste una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $\partial\Omega$ tale che $\lim_{n \to \infty} ||T(x_n) - x_n|| = 0$; poichè $\partial\Omega$ è limitato, la successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata e quindi esiste una sua sottosuccessione, che per semplicità supponiamo essere la successione stessa, tale che la successione dei trasformati attraverso T è convergente; allora $\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} T(x_n) = T(\lim_{n \to \infty} x_n) = T(x_0)$ e quindi $T(x_0) = x_0$; ciò contraddice le ipotesi che sia $T(x) \neq x \quad \forall x \in \partial\Omega$. Dal teorema 2.2.1 sappiamo che

$$\exists \, \{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad \textit{tale che } T_n \rightrightarrows T.$$

In particolare, dalla stima 2.2.1 segue l'esistenza di $\bar{n}$ tale che $||T_n(x) - x|| \geq \frac{r}{2} \quad \forall\, x \in \partial\Omega$ e $\forall\, n \geq \bar{n}$. Indichiamo con X_n il sottospazio di X generato dai vettori $x_1^{(n)}, ..., x_{\nu_n}^{(n)}$, esso è un insieme di generatori di $T_n(\Omega)$ ed è munito della norma di X; esso è quindi uno spazio di Banach di dimensione finita. Indicato $\Omega_n = X_n \cap \Omega$, $\Omega_n \neq \oslash$, questo insieme è aperto e limitato e risulta $\partial\Omega_n \subset \partial\Omega$. Poichè $(I - T_n)(\bar{\Omega_n}) \subset X_n$ e $\inf_{x \in \partial\Omega} ||T_n(x) - x|| \geq \frac{r}{2}$ (almeno per $n > \bar{n}$), resta definito $deg_{X_n}(I - T_n, \Omega_n, 0)$.
Sia n^* tale che risulti $||T(x) - T_n(x)|| < \frac{r}{2} \quad \forall\, x \in \bar{\Omega}$ e $n \geq n^*$. Siano $m, n > n^*$, $m \neq n$; sia X_p il sottospazio di X generato dai vettori di X_m e di X_n. Per il Teorema di Riduzione si ha:

$$deg(I - T_n, \Omega_n, 0) = deg(I - T_n, \Omega_p, 0)$$

$$deg(I - T_m, \Omega_m, 0) = deg(I - T_m, \Omega_p, 0).$$

Consideriamo ora l'omotopia

$$H(t, x) = t(I - T_n)(x) + (1 - t)(I - T_m)(x), \quad t \in [0, 1]$$

Per $x \in \partial\Omega$ si ha

$$\begin{aligned} &||t(I - T_n)(x) + (1 - t)(I - T_m)(x) - (I - T)(x)|| \leq \\ &\leq t||(I - T_n)(x) - (I - T)(x)|| + (1 - t)||(I - T_m)(x) - (I - T)(x)|| = \\ &= t||T(x) - T_n(x)|| + (1 - t)||T(x) - T_m(x)|| < \frac{r}{2}, \end{aligned}$$

pertanto $\forall\, x \in X_p \cap \partial\Omega$ e $\forall\, t \in [0, 1]$ si ha

$$\begin{aligned} ||H(x, t)|| &= ||(I - T)(x) + H(x, t) - (I - T)(x)|| \geq \\ &\geq ||(I - T)(x)|| - ||H(x, t) - (I - T)(x)|| \geq r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}, \end{aligned}$$

e quindi, poichè l'omotopia è ammissibile, per il Teorema di Invarianza omotopica del grado di Brouwer otteniamo

$$deg(I - T_n, \Omega_n, 0) = deg(I - T_m, \Omega_m, 0).$$

Ciò prova che esiste $\lim_{n\to\infty} deg(I - T_n, \Omega_n, 0)$. □

Teorema 2.2.2. *Sia X uno spazio di Banach, $\Omega \subset X$ aperto e limitato. Sia poi $T : \bar{\Omega} \longrightarrow X$ compatta e $T(x) \neq x \quad \forall\, x \in \partial\Omega$.*
Se $deg(I - T, \Omega, 0) \neq 0$ allora $\exists\, x_0 \in \Omega$ tale che $T(x_0) = x_0$.

Dimostrazione. Esiste n_0 e un r opportuno tale che $||T_n(x) - x|| \geq \frac{r}{2}$
$\forall\, x \in \partial\Omega_n$ e $\forall\, n \geq n_0$ e $deg(I - T_n, \Omega_n, 0) = deg(I - T, \Omega, 0) \neq 0$. Allora per la proprietà di normalizzazione del grado di Brouwer, $\exists\, x_n \in \Omega_n$ tale che $(I - T_n)(x_n) = 0$, $n \geq n_0$. Poniamo $(I - T)(x_n) = y_n$; allora

$$||y_n|| = ||(I - T)(x_n)|| = ||(I - T_n)(x_n) + (T_n - T)(x_n)||$$

$$= ||(T_n - T)(x_n)|| \longrightarrow 0 \quad n \to \infty$$

(perchè $\lim_{n\to\infty} ||T_n(x) - T(x)|| = 0$ uniformemente su $\bar{\Omega}$).
Poichè $x_n \longrightarrow 0 \quad x_n \in \Omega \,\forall\, n \in \mathbb{N}$ ed è limitata e T è compatto, allora esiste una sottosuccessione $\{x_{kn}\}_{n\in\mathbb{N}}$ di $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\{T(x_{k_n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente; sia $y = \lim_{n\longrightarrow\infty} T(x_{k_n})$. Dal fatto che $y_{k_n} = x_{k_n} - T(x_{k_n})$, e per la stima 2.2.1 $||y_{k_n}|| \longrightarrow 0$ segue che $\lim_{n\longrightarrow\infty} x_{k_n} = y$ e quindi, per la continuità di T si ha:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} T(x_{k_n}) = T(\lim_{n\longrightarrow\infty} x_{k_n}) = T(y).$$

Ma $x_{k_n} \in \Omega \quad \forall\, n$ e quindi $y \in \bar{\Omega}$; d'altra parte per ipotesi sappiamo che $T(x) \neq x \,\forall\, x \in \partial\Omega$, dunque $y \in \Omega$. □

2.3 Proprietà del grado di Leray-Schauder

Premettiamo due definizioni che serviranno per dimostare, anche in spazi infinito-dimensionali, l'invarianza omotopica del grado di Leray-Schauder.

Definizione 2.4. Sia X uno spazio topologico. X si dice **relativamente compatto** se la sua chiusura è compatta.

In particolare, sottoinsiemi chiusi in uno spazio compatto sono relativamente compatti.

Definizione 2.5. Sia X spazio di Banach e sia $\Omega \subset X$ un insieme aperto e limitato. Sia poi $T(t)\ \forall\, t \in [0,1]$ una applicazione $T : \bar{\Omega} \longrightarrow X$ compatta. Diremo che $\{T(t)\,|\, t \in [0,1]\}$ è una **omotopia** di **applicazioni compatte** su $\bar{\Omega}$ se $\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta_\epsilon > 0$ tale che $t, t' \in [0,1]$,

$$|t - t'| < \delta_\epsilon \Longrightarrow ||T(t)(x) - T(t')(x)|| < \epsilon \quad \forall x \in \bar{\Omega}$$

Per semplicità enunciamo e dimostriamo il teorema nel caso $p = 0$.

Proposizione 2.3.1 (Invarianza per omotopia)**.** *Sia X uno spazio di Banach e sia $\Omega \subset X$ un aperto limitato. Se $\{T(t)\,|\, t \in [0,1]\}$ è una omotopia di applicazioni compatte su $\bar{\Omega}$ e se $T(x) \neq x \quad \forall\, x \in \partial\Omega$ e $\forall\, t \in [0,1]$, allora esiste $deg(I - T(t), \Omega, 0) \quad \forall\, t \in [0,1]$ ed è costante.*

Dimostrazione. Anzitutto, $\exists\, r > 0$ tale che

$$||(I - T(t))(x)|| \geq r \quad \forall t \in [0,1] \; e \; \forall\, x \in \partial\Omega$$

Infatti, in caso contrario, esistono una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\partial\Omega$ e una successione $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $[0,1]$ tale che $||(I - T(t_n))(x_n)|| < \frac{1}{n} \quad \forall\, n$. Poniamo

$$y_n = x_n - T(t_n)(x_n).$$

Poichè $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione limitata, esiste una sottosuccessione $\{T_{\nu_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente; sia

$$t_0 = \lim_{n\to\infty} x_{\nu_n} \quad t_0 \in [0,1]$$

Poichè $\{T(t_0)(x_{\nu_n})|\, n \in \mathbb{N}\}$ è relativamente compatto, esiste una sottosuccessione $\{x_{\mu_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ di $\{x_{\nu_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\{T(t_0)(x_{\nu_n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente; indichiamo con y il limite. Poichè $||T(t)(x) - T(t')(x)|| < \epsilon \quad \forall\, t' \in [0,1]$ con $|t - t'| < \delta_\epsilon$ e $\forall\, x \in \bar{\Omega}$, poichè per ipotesi

$$y_n = x_n - T(t_n)(x_n) \longrightarrow 0 \quad e \quad T(t_0)(x_{\mu_n}) \longrightarrow y \quad e \quad t_{\mu_n} \longrightarrow t_0$$

si ha che $\lim_{n\to\infty} x_{\mu_n} = y$; dopo di ciò, per la continuità di T,
si ha $y - T(t_0)(y) = 0$. D'altra parte $x_n \in \partial\Omega \quad \forall\, n$ e quindi $y \in \partial\Omega$; ma allora esistono $t_0 \in [0,1]$ e $y \in \partial\Omega$ tali che $y = T(t_0)(y)$, contrariamente all'ipotesi. Fissiamo ora $t_1 \in [0,1]$ e siano T_n, X_n, Ω_n come dichiarato nella definizione, relativamente a $T(t_1)$. Esiste $\bar{n}$ tale che

$$||T_n(x) - T(t_1)(x)|| < \frac{r}{4} \quad \forall x \in \bar{\Omega},\; se\, n > \bar{n};$$

esiste $\delta_1 > 0$ tale che

$$||T(t)(x) - T(t_1)(x)|| < \frac{r}{4} \quad \forall\, t \in [0,1], \quad |t - t_1| < \delta_1,\, \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Perciò

$$||T(t)(x) - T_n(x)|| < \frac{r}{2} \quad \forall\, x \in \bar{\Omega},\; t \in [0,1],\; ||t - t_1|| < \delta_1,\; n > \bar{n}.$$

Per $n > \bar{n},\; t \in [0,1],\; |t - t_1| < \delta_1$ e $\forall\, x \in \partial\Omega$ risulta

$$||(I - T_n)(x)|| \geq ||(I - T(t))(x)|| - ||T(t)(x) - T_n(x)|| \geq r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}.$$

Pertanto per tali valori di n e t si ha

$$deg(I - T(t), \Omega, 0) = deg(I - T_n, \Omega_n, 0).$$

Ciò prova che $deg(I-T(t), \Omega, 0)$ esiste ed è costante su $]t_1-\delta_1, t_1+\delta_1[\cap[0,1]$. Ora, per il teorema di Borel, esistono punti di $[0,1]$, in numero finito, $t_1, t_2, ..., t_k$, tali che, avendo δ_j il significato di δ_1 relativamente a t_j anzichè a t_1, posto $\{]t_j - \delta_j, t_j + \delta_j[\cap[0,1]; j = 1, 2, ..., k\}$, questo è un ricoprimento aperto relativamente a $[0,1]$. Per quanto precede, si conclude che $deg(I - T(t), \Omega, 0)$ è costante su $[0,1]$. □

Proposizione 2.3.2. *Sia X uno spazio di Banach e sia $\Omega \subset X$ aperto e limitato. Il grado di Leray-Schauder soddisfa le seguenti proprietà:*

Normalizzazione *Se $p \in \Omega$ allora $deg(I, \Omega, p) = 1$;*

Additività *Siano $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ aperti e tali che $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \oslash$.*
Se $p \notin (I - T)(\bar{\Omega} - (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ allora

$$deg(I - T, \Omega, p) = deg(I - T, \Omega_1, p) + deg(I - T, \Omega_2, p);$$

Esistenza *Se $deg(I - T, \Omega, p) \neq 0$ allora $\exists x \in \Omega$ tale che $(I - T)x = p$;*

Dipendenza dai valori al bordo *Se $I-T_1, I-T_2 \in K(\Omega)$ e sono tali che $(I - T_1)_{|\partial\Omega} = (I - T_2)_{|\partial\Omega}$ allora:*

$$deg(I - T_1, \Omega, p) = deg(I - T_2, \Omega, p);$$

Escissione *Se $\Omega_1 \subset \Omega$ è un insieme aperto tale che $p \notin (I - T)(\bar{\Omega} - \Omega_1)$ allora:*

$$deg(I - T, \Omega, p) = deg(I - T, \Omega_1, p)$$

Teorema 2.3.3 (Teorema del punto fisso di Schauder)**.** *Sia X uno spazio di Banach e $B \subset X$ la palla unitaria. Se $T : \bar{B} \longrightarrow \bar{B}$ è una mappa compatta allora $\exists\, x \in \bar{B}$ tale che $Tx = x$.*

Dimostrazione. La dimostrazione è come quella del Teorema di Brouwer. □

Teorema 2.3.4. *Sia X uno spazio di Banach e sia $\Omega \subset X$ un insieme aperto, convesso e limitato. Se $T : \bar{\Omega} \longrightarrow \bar{\Omega}$ è una mappa compatta, allora $\exists\, x \in \bar{\Omega}$ tale che $Tx = x$.*

Dimostrazione. Sia $T_n : \bar{\Omega} \longrightarrow X$ una successione di mappe continue tali che $T_n(\bar{\Omega}) \subset X_n$ dove X_n è un sottospazio vettoriale di dimensione finita di X e $||T_n - T|| \rightrightarrows 0$. Possiamo anche assumere per ipotesi che

$$T_n(\bar{\Omega}) \subset convT(\bar{\Omega}) \subset conv(\bar{\Omega}) = \bar{\Omega}.$$

Quindi T_n manda il convesso $\bar{\Omega} \cap X_n$ in sè stesso, e dato che X_n ha dimensione finita, per il teorema di Brouwer la mappa T_n ha un punto fisso $x_n \in \bar{\Omega} \cap X_n$. Dato che T è compatta, a meno di sottosuccessioni, $T(x_n) \longrightarrow x \in \bar{\Omega}$. Poichè T_n converge uniformemente a T anche $x_n = T_n(x_n)$ converge a x, da cui $T(x) = x$. □

Osservazione 15. Come nel grado di Brouwer, anche qui si estende facilmente il teorema ad insiemi aperti, convessi e limitati. Inoltre esiste la generalizzazione del teorema precedente ai domini non limitati. Questo teorema sarà essenziale nel prossimo capitolo.

Teorema 2.3.5 (Generalizzazione del teorema di punto fisso di Schauder)**.** *Sia X uno spazio di Banach e sia $F \subset X$ un insieme chiuso non necessariamente limitato. Se $T : F \longrightarrow F$ è una mappa continua e tale che $T(F)$ è relativamente compatto in X, allora T ha un punto fisso.*

Teorema 2.3.6. *Sia X spazio di Banach e sia $\Omega \subset X$ un sottoinsieme aperto e limitato, con $p \in \Omega$. Se $T : \bar{\Omega} \longrightarrow X$ è una mappa compatta allora vale una delle seguenti condizioni:*

(i) T ha un punto fisso in Ω;

(ii) Esiste $\lambda > 1$ e $x \in \partial\Omega$ tale che $Tx = \lambda x$.

Dimostrazione. Se è valida la (ii) allora non c'è nulla da provare.
Altrimenti, possiamo definire l'omotopia:

$$H(t, x) = tTx, \quad t \in [0, 1].$$

Così definita, $H(t, \cdot)$ è una mappa compatta e $H(0, x) = 0$ e $H(1, x) = Tx$. Si assuma inoltre che $H(t, x_0) = x_0$ per qualche $t \in [0, 1]$ e $x_0 \in \partial\Omega$. Quindi abbiamo che $tTx_0 = x_0$. Se $t = 0$ o $t = 1$ abbiamo (i); altrimenti

$$Tx_0 = \frac{1}{t}x_0 \quad \textit{per qualche}\, t \in (0, 1),$$

e quindi abbiamo (ii).
Altrimenti, otteniamo $deg(I - T, \Omega, p) = deg(I, \Omega, p) = 1$ e quindi T ha un punto fisso in Ω. $\square$

Capitolo 3

Soluzioni periodiche di equazioni differenziali ordinarie

Come applicazione della teoria del grado, presentiamo qui un teorema di esistenza e unicità per soluzioni periodiche alle equazioni differenziali ordinarie.

Consideriamo l'equazione differenziale del primo ordine

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t,\lambda) = A(t)x + \lambda g(x,t,\lambda) \tag{3.0.1}$$

dove $x \in \mathbb{R}^n$, A è una matrice $n \times n$ i cui termini sono funzioni continue su $\mathbb{R}$ e periodiche di periodo T, $\lambda \in [0,1]$ e $g \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times [0,1]; \mathbb{R}^n)$ periodica in t di periodo T.

È noto il teorema di di esistenza e unicità per il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x,\lambda,t) \\ x(0,a,\lambda) = x(T,a,\lambda). \end{cases} \tag{3.0.2}$$

Teorema 3.0.7. *Comunque si fissino $h,k \in \mathbb{R}^+$ e $\lambda \in [0,1]$, la funzione $x \longrightarrow f(x,t,\lambda)$ sull'insieme $\{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; ||x|| \leq h, |t| \leq k\}$ è Lipschitziana (nella x) uniformemente rispetto a t e allora 3.0.2 ammette una ed una sola soluzione che soddisfa le condizioni inziali.*

Indichiamo con $t \longrightarrow x(t, a, \lambda)$ la soluzione del problema 3.0.2 tale che $x(0, a, \lambda) = a$ dove $a \in \mathbb{R}$, $\lambda \in [0, 1]$. Essa è funzione continua nelle variabili a e λ.

Definizione 3.1. Si dice che x è una soluzione **periodica** di 3.0.1 se

$$x(0, a, \lambda) = x(T, a, \lambda).$$

A causa della periodicità di A e g, $x(\cdot, a, \lambda)$ è periodica anch'essa di periodo T. Quindi, ricerchiamo valori di a per cui $x(\cdot, a, \lambda)$ è periodica di periodo T.

Proposizione 3.0.8. *Se $g \in \boldsymbol{C}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times [0, 1], \mathbb{R}^n)$ è periodica in G di periodo T, allora $\exists\, \epsilon > 0$ tale che $\forall\, \lambda \leq \epsilon$ esiste una soluzione periodica di 3.0.1.*

Dimostrazione. Sia G la soluzione fondamentale del problema:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{3.0.3}$$

cioè $G(t)$ è una matrice $n \times n$ invertibile $\forall\, t \in \mathbb{R}$ e

$$\frac{dG(t)}{dt} = A(t)G(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad G(0) = 1.$$

Il metodo della variazione delle costanti ci permette di trovare la soluzione che è:

$$x(t, a, \lambda) = G(t)a + G(t) \int_0^t [G(s)]^{-1} \lambda g(x(s, a, \lambda), s, \lambda) ds = 0. \tag{3.0.4}$$

Pertanto $x(\cdot, a, \lambda)$ è periodica di periodo T se e solo se

$$(G(t) - 1)a + G(T) \int_0^T [G(s)]^{-1} \lambda g(x(s, a, \lambda), s, \lambda) ds = 0. \tag{3.0.5}$$

Supponiamo che 3.0.3 non abbia soluzioni periodiche di periodo T (oltre, ovviamente, alla soluzione nulla). Indicato con $F(a, \lambda)$ il primo membro della 3.0.5, si può scrivere $F(a, \lambda) = 0$. Inoltre $F(0, 0) = 0$ e poichè $G(T) - 1$ è invertibile, per il teorema sulle funzioni implicite esiste $a(\lambda)$ in un intorno dello zero tale che $F(a(\lambda, \lambda)) = 0$. Da cui la tesi.

Proposizione 3.0.9. *Sia* $g \in \boldsymbol{C}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times [0,1], \mathbb{R}^n)$ *e supponiamo esistano* $C_0, c \in \mathbb{R}^+$ *con* $0 \leq c \leq 1$ *tali che risulti*

$$||g(x,t,\lambda)|| \leq C_0(1+||x||)^{1-c} \quad \forall\, t \in [0,T]\, e\, \forall\, \lambda \in [0,1]. \tag{3.0.6}$$

allora $\forall\, \lambda \leq 1$ *esiste una soluzione periodica di 3.0.1.*

Dimostrazione. Proviamo anzitutto che, posti

$$\mathbb{L}_a = (G(T)-1)a, \quad \mathbb{M}(a,\lambda) = G(T)\int_0^T [G(s)]^{-1} g(x(s,a,\lambda),s,\lambda)ds,$$

esiste $c > 0$ ed una costante opportuna C_5 tale che

$$||\mathbb{M}(a,\lambda)|| \leq C_5(1+||a||)^{1-c}.$$

La 3.0.5 si scrive così:

$$\mathbb{L}_a + \lambda\mathbb{M}(a,\lambda) = 0.$$

$\mathbb{L}$ è un operatore lineare da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ invertibile, mentre $\mathbb{M}(\cdot,\lambda)$ è un operatore da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ in generale non invertibile. Posto

$$\alpha(a) = \max_{0\leq t\leq T\; 0\leq\lambda\leq 1} ||x(t,a,\lambda)||,$$

dalla 3.0.6 segue

$$||\mathbb{M}(a,\lambda)|| \leq C_1(1+\alpha(a))^{1-c}$$

per una opportuna costante positiva C_1. Dalla 3.0.4 si deduce

$$||x(t,a,\lambda)|| \leq C_2||a|| + C_3\int_0^t (1+||x(s,a,\lambda)||)^{1-c} ds \tag{3.0.7}$$

$$\leq (C_2||a|| + C_3 t) + \int_0^t C_3||x(s,a,\lambda)||ds \tag{3.0.8}$$

e quindi per il lemma di Gronwall

$$||x(t,a,\lambda)|| \leq C_2||a|| + C_3 t + \int_0^t (C_2||a|| + C_3\tau)\exp^{C_3(t-\tau)} d\tau;$$

dunque

$$\alpha(a) \leq C_4(1+||a||);$$

ne segue

$$||\mathbb{M}(a,\lambda)|| \leq C_5(1+||a||)^{1-c}$$

dove C_2, C_3, C_4, C_5 sono costanti opportune.
Ciò premesso, proviamo che 3.0.1 ha una soluzione periodica di periodo $T \quad \forall\, \lambda \in [0,1]$. Si tratta di provare che l'equazione

$$f_\lambda(a) = a + \lambda \mathbb{L}^{-1}\mathbb{M}(a,\lambda) = 0$$

ha una soluzione $\forall\, \lambda \in [0,1]$. Se supponiamo che a sia una soluzione, allora si ha:

$$||a|| \leq \lambda ||\mathbb{L}^{-1}||C_5(1+||a||)^{1-c};$$

se $||a|| > 1$ allora $||a|| \leq \lambda ||\mathbb{L}^{-1}||C_5 2^{1-c}||a||^{1-c}$ e quindi $||a||^c \leq \lambda ||\mathbb{L}^{-1}||C_5 2^{1-c}$; dunque esiste una costante K tale che, se $x(\cdot, a, \lambda)$ è una soluzione di 3.0.1 periodica di periodo T, allora $||a|| = ||x(0,a,\lambda)|| < K$. Sia B la sfera di $\mathbb{R}^n$ di centro l'origine e raggio K. Evidentemente

$$deg(f_0, \Omega, 0) = 1.$$

Per $||a|| = K$ non esiste nessuna soluzione di 3.0.1 periodica di periodo T $\forall\, \lambda \in [0,1]$; ciò vuol dire che $f_\lambda(a) \neq 0$ per $||a|| = K$. Allora per il Teorema dell'Invarianza Omotopica del grado, risulta

$$deg(f_\lambda, B, 0) = deg(f_0, B, 0) = 1 \quad \forall\, \lambda \in [0,1].$$

Dunque $\forall\, \lambda \in [0,1]$ esiste una soluzione di 3.0.1 periodica di periodo T.

$\square$

Diamo ora una generalizzazione del teorema precedente, rimuovendo l'ipotesi che il secondo membro della 3.0.1 sia una perturbazione polinomiale di una trasformazione lineare. Premettiamo prima un lemma.

Lemma 3.0.10. *Consideriamo l'equazione*

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) \tag{3.0.9}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ *e* $f \in \boldsymbol{C}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *e sia:*

(i) $f(x,0) \neq 0 \quad \forall\, x \in \partial\Omega$,

(ii) $x(t,0,a)$ *(soluzione di 3.0.9 tale che* $x(0,0,a) = a$*) è definita per* $a \in \bar{\Omega}$ *e* $0 \leq t \leq T$,

(iii) $\forall\, a \in \partial\Omega$ *risulta* $x(t,0,a) \neq a$ *per* $0 < t \leq T$.

Allora, posto $V_t(a) = x(t,0,a) - a$ *e* $F(x) = f(x,0)$*, risulta*

$$deg(V_T, \Omega, 0) = deg(F, \Omega, 0).$$

Dimostrazione. Anzitutto, $deg(F,\Omega,0)$ e $deg(V_t,\Omega,0)$ con $0 \leq t \leq T$ sono bene definiti. Per il Teorema dell'Invarianza Omotopica $deg(V_t,\Omega,0)$ è indipendente da t per $0 \leq t \leq T$ (perchè $0 \notin V_t(\partial\Omega)$ per $0 \leq t \leq T$). Sia $\phi(t)$ una componente di $x(t,0,a)$; poichè ϕ è di classe $\mathbf{C}^2$ si ha

$$\phi(t) = \phi(0) + t\phi'(0) + O(t^2) \quad \textit{per } t \longrightarrow 0$$

e quindi

$$\frac{V_t(a)}{t} = F(a) + o(1) \quad \textit{per } t \longrightarrow 0,$$

uniformemente per $a \in \bar{\Omega}$. Ne segue che è $\lambda V_t(a) + (1-\lambda)F(a) \neq 0 \quad \forall a \in \partial\Omega$ e $0 \leq \lambda \leq 1$ purchè t sia sufficientemente piccolo. Allora

$$deg(F,\Omega,0) = deg(V_t,\Omega,0) = deg(V_T,\Omega,0).$$

□

Da ciò che abbiamo dimostrato si ha il seguente teorema.

Teorema 3.0.11. *Se* f *soddisfa le ipotesi precedenti ed è periodica in* t *di periodo* T*, e* $deg(F,\Omega,0) \neq 0$*, allora la 3.0.9 ha una soluzione periodica di periodo* T*.*

Dimostrazione. Poichè $0 \neq deg(F,\Omega,0) = deg(V_T,\Omega,0)$ esiste a tale che $x(t,0,a) = a$ e quindi $x(\cdot,0,a)$ è una soluzione di 3.0.9 periodica di periodo T. □

Bibliografia

[1] Bruno Pini, Lezioni di Analisi Matematica di Secondo Livello, Clueb, 1983, Bologna.

[2] N.G. Lloyd, Degree Theory, Cambridge Univerity Press, 1978, Cambridge.

Ringraziamenti

Il mio primo pensiero si posa sui miei genitori. Grazie mamma e grazie papà che, con la forza, il sacrificio e la determinazione avete combattuto sempre al mio fianco, senza sosta e senza respiro; se oggi siamo qui, Ã¨ solo grazie a voi. Ringrazio la mia ragazza che, come l'edificio poggia sulle fondamenta, mi ha sostenuto nei momenti difficili e ha gioito delle mie vittorie; grazie di essere stata il mio porto sicuro nella tempesta. Ringrazio mio fratello e Riccardo che hanno trascorso con me le ultime disavventure di questo anno; voi siete la buona novella e il sorriso accecante di una giornata spenta. Ringrazio tutti i miei amici: quelli che sono partiti con me per questa avventura, tutti coloro che ho trovato inaspettatamente in questa città, tutti quelli che lascio sempre a Chieti oppure quelli che non vado ancora a trovare a Torino. Un ultimo ringraziamento alla mia relatrice, la professoressa Giovanna Citti, che ha reso possibile la creazione di questa tesi.
Grazie a tutti quelli che hanno partecipato.
Io non mi fermerò qui.