ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Corso di Laurea in Fisica

Meccanica Classica e Meccanica Quantistica nel formalismo della Geometria Differenziale

Relatore:
Prof.ssa Elisa Ercolessi

Presentata da:
Sara Maraventano

Sessione II
Anno Accademico 2013/2014

Sommario. Si fornisce un'introduzione al formalismo geometrico della meccanica classica e quantistica, studiando dapprima lo spazio delle fasi come varietà simplettica ricavando le equazioni di Hamilton. Si descrivono in seguito gli strumenti necessari per operare in uno spazio di Hilbert, i quali risultano più complessi di quelli utilizzati per descrivere lo spazio delle fasi classico. In particolare notiamo l'esigenza di definire anche una struttura riemanniana sugli spazi complessi per poter ivi definire il prodotto scalare, le parentesi e i commutatori simmetrici.

Indice

Introduzione

Questo scritto introduce la formulazione geometrica della meccanica classica e quantistica. Sono inizialmente introdotte alcune nozioni di geometria differenziale necessarie alla comprensione dei concetti fisici esposti nel seguito: più precisamente si daranno le definizioni di varietà simplettica e varietà riemanniana, ponendo particolare attenzione sulle proprietà e sulle caratteristiche che saranno utili nello svolgimento della tesi. Lo scopo del primo capitolo non è infatti quello di esporre completamente il formalismo e gli utilizzi di tali strumenti geometrici, bensì quello di esaltare le sole proprietà che si riveleranno necessarie.
Nel secondo capitolo ricaveremo le equazioni del moto di un sistema classico e vedremo come a questo scopo sia sufficiente la nozione di struttura simplettica definita sulla varietà spazio delle fasi. Vedremo che alla forma simplettica è associata la struttura delle parentesi di Poisson e daremo la definizione di campo Hamiltoniano.
Nell'ultimo capitolo introdurremo il formalismo geometrico della meccanica quantistica. Apparirà subito chiaro come spostandoci dallo spazio delle fasi classico allo spazio complesso di Hilbert la forma simplettica non sarà più sufficiente alla costruzione delle strutture e del formalismo della meccanica quantistica. Un ruolo chiave sarà ricoperto dalla struttura Hermitiana definita sullo spazio di Hilbert la quale imporrà la presenza di una struttura riemanniana oltre a quella simplettica. In particolare, la necessità di aggiungere una forma simmetrica agli strumenti operativi negli spazi di Hilbert, che nella descrizione di un sistema classico non è richiesta, è il sintomo dell'impossibilità di costruire una corrispondenza $1-1$ tra il framework classico e quello quantistico, in particolare tra le parentesi di Poisson e i commutatori; per passare dalle parentesi di Poisson ai commutatori abbiamo sempre bisogno di un'informazione in più, fornita dalla struttura riemanniana, che si perde nel percorso inverso, segnando un'ambiguità non eliminabile (fare riferimento a [2, 4]).

Capitolo 1

Nozioni di Geometria Differenziale

In questo capitolo si introdurrano alcune nozioni basilari della geometria differenziale, basndoci sul testo [6], utili ai fini di una formulazione geometrica della meccanica classica e quantistica. In particolare daremo le definizioni di forma e varietà simplettiche, che si riveleranno concetti chiave sia nell'ambito classico che in quello quantistico, e si dimostrerà il teorema che permette di associare a una qualsiasi varietà differenziabile una varietà simplettica: il suo fibrato cotangente. Verrà anche presentato il concetto ti metrica e struttura riemanniana, che scopriremo essere necessario in ambito quantistico per la definizione del prodotto scalare negli spazi di Hilbert.

1.1 Varietà simplettica

Consideriamo una varietà differenziabile $\mathcal{M}$ k-dimensionale (dove $k = 2n$, con $n \in \mathbb{N}$). Tale varietà è detta **varietà simplettica** se in ogni suo punto è definita una **forma simplettica** ω, ovvero una 2-forma (tensore di tipo $(0, 2)$ antisimmetrico) chiusa e non-degenere sullo spazio tangente $T_m M \quad \forall m \in \mathcal{M}$; quest'ultima condizione si traduce praticamente nell'invertibilità della matrice rappresentativa della 2-forma ω rispetto alla base dello spazio tangente inteso come spazio vettoriale.
In generale, dato uno spazio vettoriale k-dimensionale con $k \in \mathbb{N}_0$, per una forma bilineare non degenere $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ la condizione di non degenerazione si scrive:

$$\begin{cases} \omega(x, y) = 0 & \forall x \Leftrightarrow y = 0 \\ \omega(x, y) = 0 & \forall y \Leftrightarrow x = 0 \end{cases} . \tag{1.1}$$

inoltre scegliendo una base $\{v_j, j = 1, ..., k\}$ di V e considerando la base duale $\{\vartheta^j, j = 1, ..., k\}$ dello spazio duale V^*, ω potrà essere scritta come:

$$\omega = \omega_{ij} \vartheta^i \otimes \vartheta^j \tag{1.2}$$

dove $\omega_{ij} := \omega(v_i, v_j)$ sono gli elementi della matrice rappresentativa di ω nella base $\{v_j, j = 1, ..., k\}$ di V. Imponendo inoltre la condizione di antisimmetria si ha che il numero di righe di tale matrice deve essere pari, in quanto una matrice antisimmetrica avente un numero dispari di righe ha sempre determinante nullo e ciò contraddirebbe la condizione di non degenerazione. In altre parole la dimensione dello spazio vettoriale su cui ω è definita deve essere pari. Enunciamo ora un teorema, la cui dimostrazione è esposta nel libro [7], che ci sarà utile per esplicitare in ogni punto della varietà la forma simplettica ω in coordinate locali, definendo per ogni punto $m \in \mathcal{M}$ una carta $(U \ni m, \varphi)$ dove φ: $U \longrightarrow \mathbb{R}^k$ è un omeomorfismo t.c. $\varphi(m) := (x^1, ..., x^k)$, con $x^1, ..., x^k$ coordinate locali del punto m.

Teorema di Darboux. $\forall m \in \mathcal{M} \quad \exists \quad (U \ni m, \varphi)$ carta t.c. le componenti di ω in tali coordinate siano costanti.

In particolare è possibile effettuare un cambio di coordinate che agisca su ω come una sorta di ortogonalizzazione di Gram-Schmit, permettendoci dunque di scegliere delle coordinate locali $(x^1, ..., x^k, y^1, ..., y^k)$ su $\mathcal{M}$ t.c.

$$\omega = \sum_{j=1}^{k} dx^j \wedge dy^j \tag{1.3}$$

dette *coordinate canoniche*. Si noti che l'antisimmetria della forma simplettica è garantita dalla proprietà di antisimmetria del prodotto esterno.
Enunciamo ora un teorema, la cui dimostrazione si può trovare nel testo [6], che fornisce una condizione necessaria e sufficiente per l'esattezza di una forma chiusa:

Lemma di Poincarè. sia ν una p-forma chiusa su un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ (con $p < n$), allora essa è anche esatta, ovvero esiste una $(p-1)$-forma η tale che $\nu = d\eta$.

Questo lemma ci permette di individuare localmente il *potenziale simplettico* θ, ovvero la 1-foroma che soddisfa:

$$\omega = d\theta \tag{1.4}$$

con

$$\theta = \sum_{j=1}^{k} x^j dy^j. \tag{1.5}$$

Questo è possibile in quanto stiamo lavorando in un intorno U della varietà differenziabile $\mathcal{M}$ omeomorfo a $\mathbb{R}^k$.

1.2 Fibrato cotangente: una varietà simplettica

In questa sezione verrà dimostrato il seguente teorema, sulla traccia seguita nel testo [7], il quale sarà molto utile nello studio geometrico della dinamica di un sistema classico.

Teorema. Il fibrato cotangente T^*M di una qualunque varietà differenziabile $\mathcal{M}$ è una varietà simplettica.

Dimostrazione.
Consideriamo la verietà $\mathcal{M}$ n-dimensionale e un suo atlante $\big\{(U_i, \varphi_i)\big\}_i$. Perendiamo il punto $m \in \mathcal{M}$ e la carta $(U \ni m, \varphi)$ dunque avremo:

$$\varphi(m) = (x^1, ..., x^n). \tag{1.6}$$

Possiamo scrivere un vettore X_m tangente in m come:

$$X_m = \sum_{j=1}^{n} B^j \frac{\partial}{\partial x^j} \tag{1.7}$$

e il vettore cotangente α_m:

$$\alpha_m = \sum_{j=1}^{n} x_j dx^j. \tag{1.8}$$

Consideriamo ora il fibrato tangente TM e il fibrato cotangente T^*M alla varietà $\mathcal{M}$. Essi sono a loro volta delle varietà $2n$-dimensionali: infatti un punto del fibrato tangente/cotangente è individuato da un punto m della varietà $\mathcal{M}$ di dimensione n e da un elemento dello spazio tangente T_mM o cotangente T^*_mM nello stesso punto $m \in \mathcal{M}$, anch'essi di dimensione n. Dunque un elemento del fibrato tangente lo scriveremo come:

$$X = (m, X_m) = \big((x^1, ..., x^n), \sum_{j=1}^{n} B^j \frac{\partial}{\partial x^j}\big) \tag{1.9}$$

mentre per un punto dello spazio cotangente avremo:

$$\alpha = (m, \alpha_m) = \big((x^1, ..., x^n), \sum_{j=1}^{n} x_j dx^j\big). \tag{1.10}$$

Possiamo ora identificare $\varphi(U)$ con il suo spazio tangente, ponendo:

$$(x^1, ..., x^n) = \sum_{j=1}^{n} x^j \frac{\partial}{\partial x^1}. \tag{1.11}$$

Consideriamo ora il fibrato tangente allo spazio duale TT^*M. Tale spazio sarà uno spazio $4n$-dimensionale e un campo $\tilde{X}$ su tale spazio si potrà scrivere nella forma:

$$\tilde{X} = ((m, \alpha), X_{(m,\alpha)}) = (\alpha_m, X_{\alpha_m}) \tag{1.12}$$

dove X_{α_m} è il vettore $2n$ dimensionale che vive nello spazio tangente allo spazio duale nel punto $(m, \alpha) \equiv \alpha_m$. Tale vettore si scrive come:

$$X_{\alpha_m} = \sum_{j=1}^{n} \big[A_j dx^j + B^j \frac{\partial}{\partial x^{n+j}}\big] \tag{1.13}$$

dove la notazione usata per esprime la parte controvariante è ottenuta con una semplice sostituzione degli indici $j \longmapsto (n+j)$ nell'espressione (1.9) di X_m. Grazie a questa costruzione è possibile definire una 1-forma ϑ sul fibrato cotangente T^*M che soddisfi:

$$\vartheta_{\alpha_m}\big(\tilde{X}_{\alpha_m}\big) := \alpha_m(X_m) \forall m \in \mathcal{M} \tag{1.14}$$

con ϑ_{α_m} 1-forma definita sullo spazio cotangente n-dimensionale T^*_mM corrispondente a ϑ, 1-forma definita sul fibrato cotangente. Dunque l'elemento su cui ϑ_{α_m} agisce non è un oggetto che vive in TT^*M $4n$-dimensionale, bensì è un elemento del fibrato tangente $2n$-dimensionale dello spazio cotangente in $m \in \mathcal{M}$ TT^*_mM. Si può facilmente trovare utilizzando le formule (1.7) e (1.8) che $\alpha_m(X_m) = \sum_{j=1}^{n} x_j B^j$. Inserendo tale risultato nella definizione di ϑ_{α_m} (1.14), si trova la forma esplicita di ϑ_{α_m}:

$$\vartheta_{\alpha_m} = \sum_{j=1}^{n} x_j dx^{j+n}. \tag{1.15}$$

Notiamo che è nella stessa forma del potenziale simplettico definito nella (1.5). È dunque possibile definire una forma simplettica $\omega := d\vartheta$ a partire dalla 1-forma ϑ sulla varietà T^*M.

♡

Notiamo che la varietà del fibrato tangente, su cui abbiamo dimostrato che si può sempre definire una forma simplettica, è una varietà di dimensione pari, come avevamo anticipato nella definizione di forma simplettica proposta nella sezione precedente. Osserviamo inoltre che l'esistenza di una forma simplettica su una varità non implica che tale varietà sia un fibrato cotangente; possiamo fare un esempio di varietà simplettica non riconducibile a un fibrato tangente.

Esempio: la sfera. Consideriamo la varietà 2-sfera data da:

$$S^2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{t.c.} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\} \tag{1.16}$$

in coordinate cartesiane (x, y, z), su cui sia definita la 2-forma:

$$\omega = \sum_{\sigma \in \mathbb{P}_3} (-1)^{sgn(\sigma)} x^{\sigma(i)} dx^{\sigma(j)} \wedge dx^{\sigma(k)} \tag{1.17}$$

che risulta una forma simplettica nonostante S^2 non sia riconducibile ad alcun fibrato tangente. Nelle usuali coordinate sferiche

$$\begin{cases} x^1 = sin\vartheta cos\varphi \\ x^2 = sin\vartheta sin\varphi \\ x^3 = cos\vartheta \end{cases} \tag{1.18}$$

dove $\vartheta \in [0, \pi\pi]$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$. In tali coordinate le variabili coniugate che costituiscono lo spazio delle fasi sono $-cos\vartheta$ e ϕ, dunque abbiamo che la forma simplettica si scrive come:

$$\omega = sin\vartheta d\vartheta \wedge d\varphi = d(-cos\vartheta) \wedge d\phi \tag{1.19}$$

Inoltre, data la forma simplettica ω e detti $\chi(\mathcal{M})$ l'insieme dei campi vettoriali e $\Omega^n(\mathcal{M})$ l'insieme delle n-forme definiti su $\mathcal{M}$, possiamo definire le mappe di *abbassamento* e *innalzamento* degli indici:

$$^\flat : \chi(\mathcal{M}) \to \Omega^1(\mathcal{M}) \qquad \text{t.c.} \qquad X^\flat := i_X\omega = \omega(X, \cdot) \tag{1.20}$$

e

$$^\sharp : \Omega^1(\mathcal{M} \to \chi(\mathcal{M}) \qquad \text{t.c.} \qquad \alpha^\sharp := X \quad \text{con} \quad \alpha = \omega(X, \cdot) \tag{1.21}$$

con $X \in \chi(\mathcal{M})$ e $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{M})$. È evidente che sono una l'inversa dell'altra; abbiamo dunque una corrispondenza biunivoca tra campi vettoriali e forme differenziali.

1.3 Struttura riemanniana

Data la varietà $\mathcal{M}$, sia definito su di essa un tensore g di tipo (0,2) tale che il tensore g_m valutato nel punto $m, \forall m \in \mathcal{M}$ soddisfi le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} g_m(X_m, Y_m) = 0 \quad \forall X_m \in T_mM \Leftrightarrow Y_m = 0 \\ g_m(X_m, Y_m) = 0 \quad \forall Y_m \in T_mM \Leftrightarrow X_m = \end{cases}, \tag{1.22}$$

$$g_m(X_m, Y_m) = g_m(Y_m, X_m). \tag{1.23}$$

Allora la varietà $\mathcal{M}$ si dice *varietà pseudo-riemanniana.* Se $\forall X_m \in T_m M$ vale che

$$g_m(X_m, Y_m) \begin{cases} > 0, & X_m \neq 0 \\ \\ = 0, & X_m = 0 \end{cases} \tag{1.24}$$

allora la varietà $\mathcal{M}$ si dice *riemanniana* e il tensore g è detto *tensore metrico.* In coordinate locali abbiamo:

$$g_m = g_{ij}(x) dx^i \otimes dx^j \tag{1.25}$$

dove g_{ij} è una matrice reale $n \times n$ simmetrica. Essendo simmetrica esiste sempre una matrice ortogonale che diagonalizza la matrice g_{ij} in modo tale che gli elementi della diagonale siano strettamente definiti positivi. Ogni struttura riemanniana g determina un prodotto scalare in $T_m M$ definito come:

$$\langle X_m, Y_m \rangle_m := g_m(X_m, Y_m) \tag{1.26}$$

per X_m e $Y_m \in T_m M$ A questo punto è possibile definire:

- una *norma* su $T_m M$:

  $$||X_m||_m := \sqrt{\langle X_m, X_m \rangle_m} \tag{1.27}$$

  per $X_m \in T_m$

- l'*angolo* α tra due vettori $X_m, Y_m \in T_m M$:

  $$cos\alpha := \frac{\langle X_m, X_m \rangle_m}{||X_m|| \, ||Y_m||}. \tag{1.28}$$

È interessante notare che, data una varietà riemanniana $\mathcal{M}$, è possibile stabilire un isomorfismo tra lo spazio tangente e lo spazio cotangente analogamente a quanto fatto per la struttura simplettica, definito per $X \in TM$come:

$$^\flat := TM \to T^*M, \tag{1.29}$$

$$X^\flat := g(X, \cdot) = i_X g \tag{1.30}$$

e la sua inversa è definita come:

$$^\sharp : T^*M \to TM, \tag{1.31}$$

$$g(\alpha^\sharp, \cdot) = \alpha \tag{1.32}$$

per $\alpha \in T^*M$. Dunque, dato che TM e T^*M sono isomorfi e $T * M$ abbiamo dimostrato essere una varietà simplettica, anche TM sarà una varietà simplettica con forma simplettica indotta da quella dello spazio cotangente.

Capitolo 2

Formulazione geometrica della della Meccanica Classica

In questo capitolo ci proponiamo di ricavare le equazioni del moto di Hamilton di un sistema classico a partire da considerazioni geometriche sullo spazio delle fasi, seguendo l'impostazione del testo [5]. Trattiamo infatti lo spazio delle fasi come una varietà simplettica, usando il formalismo precedentemente introdotto e vedremo come la struttura simplettica sia strettamente legata alle parentesi di Poisson e come queste giochino un ruolo fondamentale nella derivazione delle equazioni del moto.

2.1 Lo Spazio delle Fasi

Con gli strumenti che abbiamo introdotto, è possibile studiare la dinamica classica sfruttando il formalismo geometrico. A tale proposito introduciamo una notazione più familiare, facendo riferimento alle convenzioni e ai risultati delle sezioni precedenti indicheremo con:

- $m = (x^{n+1}, ..., x^{2n}) =: (q^1, ..., q^n)$ le coordinate di un punto di una varietà n-dimensionale $\mathcal{Q}$;
- $\alpha = \big((x^{n+1}, ..., x^{2n}), (x_1, ..., x_n)\big) =: (q^1, ..., q^n, p_1, ..., p_n)$ un punto del fibrato cotangente T^*Q;
- $\vartheta = \sum_{j=1}^n p_j dq^j$ il potenziale simplettico definito sullo stesso fibrato;
- $\omega = \sum_{j=1}^n dp_j \wedge dq^j$ la forma simplettica definita a partire dal potenziale simplettico ϑ.

In tale notazione abbiamo identificato lo spazio delle coordinate di ogni elemento con lo spazio in cui tale elemento vive. Questa procedura è resa possibile dal fatto che gli spazi che stiamo trattando sono varietà differenziabili e in quanto tali sono omeomorfe a $\mathbb{R}^n$. In particolare, dato un qualunque sistema classico, la varità $\mathcal{Q}$ è detta *spazio delle configurazioni* se contiene i gradi di libertà posizionali del sistema. Definiamo invece *spazio delle fasi* l'insieme delle coppie (q^i, p_i) appena definite, il quale rappresenta l'insieme di tutti i gradi di libertà del sistema. Nello specifico, le coordinate generalizzate q^i prendono il nome di *posizioni* mentre i p_i di *momenti coniugati.* La definizione del potenziale e della forma simplettica, rendono lo spazio delle fasi una varietà simplettica. Notiamo che in generale un sistema fisico può essere definito su una varietà simplettica $(\mathcal{M}, \omega)$ che non è riconducibile a un fibrato tangente: in ogni caso il teorema di Darboux ci assicura l'esistenza di coordinate per cui valga la (1.3) localmente. Diamo ora alcune definizioni necessarie a ricavare le equazioni del moto del nostro sistema dinamico.

2.1.1 Parentesi di Poisson

Data una varietà differenziabile $\mathcal{N}$, una applicazione agente sull'insieme $F(\mathcal{N})$:

$$\{\ ,\ \} : F(\mathcal{N}) \times F(\mathcal{N}) \to \mathbb{R} \tag{2.1}$$

con le proprietà di:

- antisimmetria: $\{f_1, f_2\} = -\{f_2, f_1\}$
- bilinearità: $\{f_1, \lambda f_2 + \mu f_3\} = \lambda\{f_1, f_2\} + \mu\{f_1, f_3\}\mu \qquad \text{con} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- identità di Jacobi: $\big\{f_1, \{f_2, f_3\}\big\} = \big\{\{f_1, f_2\}, f_3\big\} + \big\{f_2, \{f_1, f_3\}\big\}$
- $\{f_1, f_2 f_3\} = \{f_1, f_2\}f_3 + f_2\{\{f_1, f_3\}$

per ogni $f_1, f_2, f_3 \in F(\mathcal{N})$ è detta **parentesi di Poisson**. Una varietà $\mathcal{N}$ dotata della struttura delle parentesi di Poisson è detta **varietà di Poisson**. In particolare utilizzeremo una particolare struttura di Poisson, la cui definizione è strettamente legata alla forma simplettica, nel modo seguente. Data la varietà simplettica $\mathcal{M}$, consideriamo una funzione $f \in \Omega^0(\mathcal{M})$ insieme delle 0-forme definite su $\mathcal{M}$ ($\Omega^0(\mathcal{M}) = C^\infty(\mathcal{M})$). È evidente che $df \in \Omega^1(\mathcal{M})$. Dunque risulta che:

$$df^\sharp = X_f \quad \text{con} \quad X_f \quad \text{t.c.} \quad i_{X_f}\omega = \omega(X_f, \cdot) = df \tag{2.2}$$

Ovvero a ogni 0-forma f è possibile associare un campo vettoriale X_f definito tramite il differenziale df e la mappa di abbassamento degli indici. Date due funzioni $f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$, è ora possibile definire l'applicazione binaria che soddisfa le proprietà delle parentesi di Poisson:

$$\{f, g\} := \omega(X_f, X_g). \tag{2.3}$$

D'ora in avanti useremo la notazione $\{\ ,\ \}$ e il termine parentesi di Poisson per richiamare questa particolare applicazione e non tutte le possibili applicazioni soddisfacenti le

proprietà sopra elencate.
Nelle coordinate canoniche abbiamo che:

$$\{f, g\} = \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial g}{\partial y^j} - \frac{\partial g}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial y^j}\Big). \tag{2.4}$$

Nella sezione successiva vedremo come tale struttura si rivelerà necessaria nel determinare le equazioni del moto di un sistema classico, unitamente alla definizione di *campo Hamiltoniano*.

2.1.2 Campo Hamiltoniano

Consideriamo ora una generica struttura simplettica $(\mathcal{M}, \omega)$ e un campo vettoriale X definito su tale varietà. Diremo che esso è un **campo hamiltoniano** se esiste una funzione $H : \mathcal{M} \to \mathbb{R}, \quad H \in C^1(\mathcal{M})$ insieme delle funzioni su $\mathcal{M}$ t.c.

$$i_X\omega = \omega(X, \cdot) = -dH \tag{2.5}$$

ovvero la 1-forma $i_X\omega = \omega(X, \cdot)$ è esatta. Nel caso in cui si possa dire soltanto che essa è chiusa, il lemma di Poincarè ci garantisce l'esattezza soltanto localmente; avremo quindi un campo *localmente hamiltoniano*.
Date queste definizioni fondamentali è finalmente possibile ricavare le **equazioni di Hamilton**:

$$\begin{cases} \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q^i} \end{cases} \tag{2.6}$$

equazioni differenziali accoppiate al prim'ordine che deve soddisfare una curva $\big((q^i(t), p_i(t)\big)$ integrale di un campo hamiltoniano X_H. Esplicitiamo il campo hamiltoniano in coordinate locali. In generale esso può essere scritto come:

$$X^H = A^i\frac{\partial}{\partial q^i} + B_i\frac{\partial}{\partial p_i} \tag{2.7}$$

da cui otteniamo che:

$$i_x\omega = -B_i dq^i + A^i dp_i. \tag{2.8}$$

D'altra parte abbiamo che:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q^i}dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i. \tag{2.9}$$

Dunque dalla relazione (2.5) otteniamo che:

$$A^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad B_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \tag{2.10}$$

per cui il campo hamiltoniano X_H si scrive come:

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}. \tag{2.11}$$

Considerando quindi il campo hamiltoniano X_H e sia $c(t)$ una sua curva integrale, inoltre sia $f \in C^\infty(\mathcal{M})$. Allora vale:

$$\frac{df}{dt}\big(c(t)\big) = \{f, g\}\big(c(t)\big) \tag{2.12}$$

Infatti per il primo membro vale:

$$\frac{df}{dt}\big(c(t)\big) = df_{c(t)}\big(\frac{dc}{dc}\big) = df_{c(t)}\big(c(t)\big). \tag{2.13}$$

A questo punto, scegliendo $f = q^i$ e $f = p_i$ troviamo:

$$\begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = \{q^i, H\} \\ \frac{dp_i}{dt} = \{p_i, H\} \end{cases} \tag{2.14}$$

che corrispondono esattamente alle equazioni di Hamilton (2.6).

Capitolo 3

Formulazione geometrica della Meccanica Quantistica

Dopo aver presentato le principali nozioni di geometria differenziale e averle applicate nel caso dei sistemi classici, vedremo come gli strumenti che in meccanica classica erano sufficienti per descrivere la dinamica del moto, non bastino più per operare negli spazi di Hilbert. Il tema verrà sviluppato seguendo la traccia del testo [3]. Dunque, unitamente alla forma simplettica sfrutteremo anche il tensore metrico introdotto nel primo capitolo, il quale vedremo essere necessario per la definizione del prodotto scalare in uno spazio di funzioni. Inoltre vedremo come sia possibile interpretare l'equazione di Schrodinger come equazione di evoluzione classica, in cui i suoi argomenti non sono altro che curve su varietà differenziabili. Infine vedremo come su uno spazio complesso sia possibile definire, per funzioni sullo spazio di Hilbert a valori reali, oltre alle parentesi antisimmetriche di Poisson, le parentesi simmetriche di Lie e come a queste strutture siano associate delle regole di commutazione tra operatori lineari definiti sullo spazio di Hilbert, in particolare esporremo le implicazioni per operatori Hermitiani.

3.1 Le istanze del prodotto scalare

Affrontiamo ora nello specifico il problema di determinare un prodotto scalare in uno spazio complesso. Ciò che emerge sin dall'inizio è il bisogno di utilizzare sia una struttura simmetrica che una struttura antisimetrica per soddisfare la richiesta di Hermitianicità del prodotto scalare. Consideriamo quindi lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, spazio vettoriale complesso di funzioni complesse: la sua natura di spazio vettoriale induce la spontanea identificazione di $\mathcal{H}$ con lo spazio tangente $T_\psi H$ allo spazio di Hilbert stesso, in ogni punto $\psi \in \mathcal{H}$. In generale abbiamo l'identificazione: $TH \approx \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, dove con TH indichiamo il fibrato tangente allo spazio $\mathcal{H}$ secondo la nostra consueta notazione. Questo significa che gli elementi dello spazio di Hilbert giocano il ruolo sia di punti dello spazio che di vettori tangenti ad un dato punto. Come nel caso delle varietà differenziabili, $\psi = \psi(t)$ rappresenta una curva su $\mathcal{H}$ e la quantità $\frac{d\psi(t)}{dt}\Big|_{t'}$ rappresenta il vettore tangente alla curva nel punto $\psi(t')$. Definiamo su $\mathcal{H}$ la struttura Hermitiana $h : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ t.c.

$$h(\phi, \psi) \equiv \langle \phi | \psi \rangle \tag{3.1}$$

la quale definisce un prodotto scalare Hermitiano su $\mathcal{H}$ con le proprietà usuali del prodotto scalare su spazi complessi. Più propriamente, definendo $h(\cdot\,,\cdot)$ abbiamo definito su $\mathcal{H}$ un campo tensoriale di tipo $(0, 2)$, dunque ϕ e ψ nella (3.1) sono da intendersi come vettori tangenti a un punto di $\mathcal{H}$. Scriveremo quindi più propriamente:

$$h(\varphi)(\Gamma_\phi(\varphi), \Gamma_\psi(\varphi)) = \langle \phi | \psi \rangle \tag{3.2}$$

dove $h(\varphi)$ indica il la forma Hermitiana calcolata nel punto $\varphi \in \mathcal{H}$ e dove Γ_ϕ è definito come:

$$\Gamma_\phi : \mathcal{H} \to TH \; ; \; \vartheta \mapsto (\vartheta, \phi) \tag{3.3}$$

con $\vartheta \in \mathcal{H}$ e $\phi \in T_\vartheta H \approx \mathcal{H}$. Quindi $\Gamma_\phi(\varphi)$ nella (3.2) indica il campo vettoriale valutato nel punto φ. La struttura Hermitiana così definita può essere scritta come somma di una parte simmetrica e di una parte antisimmetrica. Inoltre essendo definita sullo spazio prodotto cartesiano $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ a valori complessi, abbiamo che:

$$h(\cdot\,,\cdot) = Re\, h(\cdot\,,\cdot) + Im\, h(\cdot\,,\cdot)\,, \tag{3.4}$$

per cui risulta chiaro dalla proprietà di hermiticità che la parte reale dovrà essere quella simmetrica e la parte immaginaria quella antisimmetrica:

$$h(\cdot\,,\cdot) = g(\cdot\,,\cdot) + i\omega(\cdot\,,\cdot) \tag{3.5}$$

dove:

$$g(\phi, \psi) = \frac{1}{2}[\langle \phi | \psi \rangle + \langle \phi | \phi \rangle] \tag{3.6}$$

e

$$\omega(\phi, \psi) = \frac{1}{2i}[\langle \phi | \psi \rangle - \langle \phi | \phi \rangle]. \tag{3.7}$$

Notiamo inoltre che:

$$\omega(\phi, i\psi) = g(\phi, \psi) \tag{3.8}$$

Unitamente alle proprietà del prodotto scalare che la 2-forma $\omega(\cdot\,,\cdot)$ eredita da $h(\cdot\,,\cdot)$, l'antisimmetria la rende una forma simplettica; la non-degenerazione di $\omega(\cdot\,,\cdot)$ fa si che essa possa essere rappresentata , in una qualche carta privilegiata, da una matrice costante. Dall'altra parte g è un tensore metrico, essendo anch'essa non degenere ma simmetrica, che conferisce una *struttura riemanniana* alla varietà su cui è definita.

3.2 L'equazione di Schrodinger come equazione di evoluzione classica

Vediamo ora come si riesca a interpretare classicamente l'equazione di Schrodinger. Definiamo anzitutto la derivata di Lie di una funzione su una varietà nella direzione di un campo anch'esso definito sulla varietà, la quale ci dice come la funzione evolve al variare del parametro che definisce la curva. In seguito assoceremo all'operatore lineare $\hat{H}$ un campo lineare; la sua definizione, unitamente a quella di derivata di Lie ci permettera di ricavare l'equazione di Schroedinger, che in questo contesto non è altro che un'equazione di evoluzione classica.

Derivata di Lie

Possiamo ora definire l'applicazione di derivazione sull'algebra delle funzioni come in una varietà differenziabile, ovvero sia dato il campo vettoriale definito nella (3.3) t.c. $\phi := \frac{d\psi(t)}{dt}\big|_{t=0}$, $\psi(0) = \psi_0$ e una funzione $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ si definisce *derivata di Lie* lungo Γ:

$$(\mathcal{L}_\Gamma(f))(\psi(0)) = \frac{d}{dt} f(\psi(t))\big|_{t=0}. \tag{3.9}$$

In coordinate locali, scegliendo una base ortonormale $\{e_i\}$ i vettori e i vettori tangenti possono essere rappresentati da ennuple di numeri complessi:

$$\psi = (\psi^1, ..., \psi^n) \quad \text{con} \quad \psi^j = \langle e_j|\psi\rangle \tag{3.10}$$

dove risulta dato che

$$\psi^j = q^j + ip^j \quad \text{con} \quad q^j, p^j \in \mathbb{R} \tag{3.11}$$

e anche

$$\frac{\partial}{\partial \psi^j} = \frac{\partial}{\partial q^i} - i\frac{\partial}{\partial p^i} \tag{3.12}$$

essendo $\psi^j \in \mathbb{C}$. Dunque nelle coordinate locali (3.9) diventa:

$$(\mathcal{L}_\Gamma(f))(\psi) = \phi^i(\psi)\frac{\partial f}{\partial \psi^i}(\psi) \tag{3.13}$$

Campi vettoriali lineari e operatori lineari

Possiamo ora considerare due tipi di campi:

1 I *campi vettoriali costanti*, caratterizzati da $\phi = cost.$ dai quali si costituisce il gruppo a un parametro:

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \psi(t) = \psi_0 + \phi t \tag{3.14}$$

che descrive l'evoluzione della curva $\psi(t)$ al variare del parametro reale t.

2 I *campi vettoriali lineari*, per i quali $\phi(\psi)$ è una funzione lineare e omogenea di ψ, ovvero $\psi = A\psi$ dove A è un operatore lineare. Per determinare l'evoluzione della curva $\psi(t)$ al variare del parametro t è data dall'equazione differenziale:

$$\mathrm{A}\psi = \frac{d\psi}{dt} \tag{3.15}$$

imposta dalla definizione del campo vettoriale ϕ. Risolvendo troviamo che:

$$\psi(t) = exp(t\mathrm{A})\psi_0. \tag{3.16}$$

Un esempio di campo vettoriale lineare è il *compo di dilatazione* Δ:

$$\Delta : \psi \to (\psi, \psi) \tag{3.17}$$

Al quale corrisponde l'operatore A= $\mathbb{I}$, per cui l'equazione (3.16) diventa:

$$\psi(t) = e^t\psi_0 \tag{3.18}$$

Tale campo esplicita l'identificazione di $\mathcal{H}$ con il suo spazio tangente $T_\psi H$.

Notiamo che ad ogni operatore lineare A corrisponde un campo vettoriale lineare Γ_A t.c.

$$\begin{gathered} \Gamma_A : \mathcal{H} \to TH; \\ \psi \mapsto (\psi, A\psi) \end{gathered} \tag{3.19}$$

che in coordinate locali si scrive:

$$\Gamma_A \equiv A^i_j \psi^j \frac{\partial}{\partial \psi^j} \tag{3.20}$$

Dove A^i_j è la matrice rappresentativa dell'operatore lineare. Per il campo di dilatazione avremo:

$$\Delta \equiv \psi^i \frac{\partial}{\partial \psi^i} \tag{3.21}$$

Consideriamo ora l'equazione di Schrodinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt}\psi = \hat{H}\psi. \tag{3.22}$$

Secondo quanto detto è possibile associare all'operatore lineare H un campo vettoriale lineare Γ_H t.c :

$$\Gamma_H : \mathcal{H} \to TH; \Gamma_H : \psi \mapsto (\psi, -\tfrac{i}{\hbar}H\psi) \tag{3.23}$$

dunque risluta:

$$\mathcal{L}_{\Gamma_H} \equiv \frac{d}{dt}\psi = -\frac{i}{\hbar}H\psi \tag{3.24}$$

Che è esattamente l'equazione di Schrodinger (3.22); in questo senso essa può essere intesa come equazione di evoluzione classica in uno spazio vettoriale complesso.

3.2.1 Il campo Hamiltoniano e la struttura simplettica

Consideriamo ora l'equazione (3.2), espressione dell'azione della forma Hermitiana tra due campi Γ_ϕ e Γ_ψ valutata nel punto $\varphi \in \mathcal{H}$. In particolare, il membro destro di tale equazione è evidentemente indipendente dal punto φ, il che implica:

$$\mathcal{L}_{\Gamma_H} \langle \phi | \psi \rangle \equiv \mathcal{L}_{\Gamma_H} (h(\varphi)(\Gamma_\phi(\varphi), \Gamma_\psi(\varphi)) = \mathcal{L}_{\Gamma_H} h(\phi, \psi) = 0. \tag{3.25}$$

Calcolando:

$$0 = \mathcal{L}_{\Gamma_H} h(\phi, \psi) = (\mathcal{L}_{\Gamma_H} h)(\phi, \psi) + h(\mathcal{L}_{\Gamma_H} \phi, \psi) + h(\phi, \mathcal{L}_{\Gamma_H} \psi) \tag{3.26a}$$

$$= (\mathcal{L}_{\Gamma_H} h)(\phi, \psi) + \frac{i}{\hbar} \big[\langle H\phi | \psi \rangle - \langle \phi | H\psi \rangle \big] \tag{3.26b}$$

dove per ottenere la (3.26b) si usa la definizione del campo Γ_H e la sesquilinearità del prodotto scalare. Dato che l'operatore H è autoaggiunto, dalla (3.26) risulta che:

$$\mathcal{L}_{\Gamma_H} h = 0 \tag{3.27}$$

ovvero la struttura Hermitiana è invariante lungo il flusso di Γ_H, equivalentemente possiamo dire che Γ_H è un *campo vettoriale di Killing* della struttura Hermitiana.
Riprendiamo ora la forma simplettica ω definita nella (3.7). Si trova facilmente che:

$$(i_{\Gamma_H} \omega)(\psi) = \omega\big(-\frac{i}{\hbar} H\phi, \psi \big) = \frac{1}{2\hbar} \big[\langle H\phi H | \psi \rangle + \langle \psi | H\phi \rangle \big] \tag{3.28}$$

Definiamo ora la funzione quadratica:

$$f_H(\phi) = \frac{1}{2\hbar} \langle \phi | H\phi \rangle \tag{3.29}$$

possiamo introdurre l'1-forma data dal differenziale della f_H:

$$df_H(\phi) = \frac{1}{2} \big[\langle \cdot | H\phi \rangle + \langle \phi | H \cdot \rangle \big] = \frac{1}{2} \big[\langle \cdot | H\phi \rangle + \langle H\phi | \cdot \rangle \big] \tag{3.30}$$

dove la seconda uguaglianza è dovuta alla fatto che H è autoaggiunto. Dunque risulta che:

$$(i_{\Gamma_H} \omega)(\psi) = df_H(\phi)(\psi) \quad \forall \psi \tag{3.31}$$

questo significa che:

$$i_{\Gamma_H} \omega = df_H \tag{3.32}$$

ovvero Γ_H è un campo Hamiltoniano secondo la definizione (2.5).

3.3 Strutture geometriche sullo spazio di Hilbert

In questo capitolo presenteremo la struttura simplettica e quella metrica come campi tensoriali sulla varietà e le loro inverse, attraverso le quali sarà possibile definire le parentesi di Poisson e le parentesi di Jordan. In particolare vedremo che dato un operatore è sempre possibile definire una funzione quadratica che risulti reale se e solo se l'operatore è Hermitiano; alle parentesi di Poisson e Jordan di tali funzioni è sempre possibile associare delle regole di commutazione tra operatori lineari sullo spazio di Hilbert.

La forma simplettica e riemanniana come campi tensoriali

La varietà $\mathcal{H}$ è fornita di una naturale struttura complessa, che indicheremo con J, che è definita da:

$$\begin{gathered} J : \phi \to i\phi \\ J^2 = -\mathbb{I} \end{gathered} \tag{3.33}$$

Richiamando la (3.8), osserviamo che:

$$\omega(\phi, J\psi) = g(\phi, \psi). \tag{3.34}$$

Data questa proprietà, la struttura J è detta *compatibile* con la coppia (g, ω) e la tripletta (g, ω, J) è detta *ammissibile*. È ora possibile scrivere la struttura Hermitiana nel modo seguente:

$$h(\phi, \psi) = \omega(\phi, J\psi) + i\omega(\phi, \psi) = g(\phi, \psi) - ig(\phi, J\psi). \tag{3.35}$$

Inoltre possiamo notare che:

$$\begin{gathered} \omega(J\phi, J\psi) = \omega(\phi, \psi) \\ g(J\phi, J\psi) = g(\phi, \psi) \end{gathered} \tag{3.36}$$

Consideriamo ora la realificazione $\mathcal{H}_\mathbb{R}$ di $\mathcal{H}$ su cui riconosciamo la stessa identificazione $TH_\mathbb{R} \approx \mathcal{H}_\mathbb{R} \times \mathcal{H}_\mathbb{R}$. Possiamo associare ad ogni punto $x \in \mathcal{H}_\mathbb{R}$ un campo vettoriale costante

$$X_\psi \equiv (x, \psi). \tag{3.37}$$

A questo punto è facile immaginare l'estensione della forma simplettica (3.7) e il tensore metrico (3.6) a campi tensoriali di tipo $(0, 2)$ definibili come:

$$\begin{gathered} g(x)(X_\psi, X_\phi) \equiv g(\psi, \phi) \\ \omega(x)(X_\psi, X_\phi) \equiv \omega(\psi, \phi) \end{gathered} \tag{3.38}$$

Nella realificazione $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ possiamo definire l'analogo dell'applicazione moltiplicazione per unità immaginaria J in $\mathcal{H}$, che indicheremo con $J_{\mathbb{R}}$, t.c.:

$$J_{\mathbb{R}} : (u, v) \mapsto (-v, u) \tag{3.39}$$

allo stesso modo in cui la moltiplicazione di un numero complesso per l'unità immaginaria i cambia di segno alla parte immaginaria mappandola in parte reale e mantiene il segno di quella reale mappandola in parte immaginaria. $J_{\mathbb{R}}$ è dunque definita come:

$$J_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n\times n} & -\mathbb{I}_{n\times n} \\ & \\ \mathbb{I}_{n\times n} & \mathbf{0}_{n\times n} \end{pmatrix}$$

con la proprietà:

$$J_{\mathbb{R}}^2 = -\mathbb{I}_{2n\times 2n} \tag{3.40}$$

Possiamo immaginare facilmente come agisca il campo tensoriale $(1, 1)$ definito come:

$$J_{\mathbb{R}}(x)(X_{\psi}) = (x, J\psi) \tag{3.41}$$

dove $x \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ e $\psi \in T_x H_{\mathbb{R}}$. Dunque anche la tripletta di campi tensoriali (g, ω, J) è ammissibile.

Le parentesi di Jordan e di Poisson

Consideriamo ora i tensori $(0, 2)$ g e ω che ricevendo come solo argomento un elemento di $TH_{\mathbb{R}}$ lo mappano nel duale $T^*H_{\mathbb{R}}$: essendo non degeneri ammettono inverse, le quali mappano lo spazio duale nello spazio tangente e ci permettono di definire un prodotto scalare nello spazio duale come esposto di seguito. Definiamo quindi il *tensore metrico* G e il *tensore di Poisson* Λ in modo tale che:

$$G \circ g = \Lambda \circ \omega = \mathbb{I}_{TH_{\mathbb{R}}}. \tag{3.42}$$

A questo punto, equipaggiando lo spazio duale di una struttura duale complessa J^* che, data la 1-forma α nello spazio duale, è definita come:

$$J^* : \alpha \mapsto i\alpha, \tag{3.43}$$

possiamo sfruttare il tensore metrico e la il tensore di Poisson per definire il prodotto scalare nello spazio duale come:

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{T^*H_{\mathcal{R}}} = G(\alpha, \beta) + i\Lambda(\alpha, \beta) \quad \forall \alpha, \beta \in T^*H_{\mathcal{R}} \tag{3.44}$$

in cui è implicita la struttura duale complessa J^*. Possiamo esprimere tale definizione in termini delle coordinate globali su $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ (q^k, p^k) con $k = 1, ..., n$ definite come:

$$\langle e_k, x\rangle = (q^k + ip^k)(x) \quad \forall x \in \mathcal{H} \tag{3.45}$$

dove $\{e_k\}$ con $k = 1, ..., n$ base ortonormale in in $\mathcal{H}$. Dunque il prodotto scalare in tali coordinate risulterà:

$$G + i \cdot \Lambda = (\frac{\partial}{\partial q^k} - i\frac{\partial}{\partial p^k}) \otimes (\frac{\partial}{\partial q^k} + i\frac{\partial}{\partial p^k}). \tag{3.46}$$

Infatti abbiamo che in coordinate locali i tensori $(0, 2)$ g e ω e l'operatore lineare $J_{\mathbb{R}}$ si scrivono come:

$$g = dq^k \otimes dq^k + dp^k \otimes dp^k \tag{3.47}$$

$$\omega = dq^k \otimes dp^k - dp^k \otimes dq^k \tag{3.48}$$

$$J_{\mathbb{R}} = dp^k \otimes \frac{\partial}{\partial q^k} - dq^k \otimes \frac{\partial}{\partial p^k}. \tag{3.49}$$

Inoltre il tensore metrico e il tensore di Poisson si scrivono come:

$$G = \frac{\partial}{\partial q^k} \otimes \frac{\partial}{\partial q^k} + \frac{\partial}{\partial p^k} \otimes \frac{\partial}{\partial p^k} \tag{3.50}$$

$$\Lambda = \frac{\partial}{\partial p^k} \otimes \frac{\partial}{\partial q^k} - \frac{\partial}{\partial q^k} \otimes \frac{\partial}{\partial p^k} \tag{3.51}$$

Introducendo le coordinate complesse

$$z^k := q^k + ip^k, \tag{3.52}$$

risulterà che:

$$\frac{\partial}{\partial z^k} =: \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial q^k} - i\frac{\partial}{\partial p^k}) \tag{3.53}$$

Dunque possiamo scrivere il prodotto scalare in termini delle coordinate z^k:

$$G + i\Lambda = 4\frac{\partial}{\partial z^k} \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}. \tag{3.54}$$

Dalle equazioni (3.50) e (3.51), è immediato notare che il tensore metrico e il tensore di Poisson inducono due *parentesi* reali su funzioni sufficientemente dolci a valori reali definite su $\mathcal{H}$.

I commutatori

Consideriamo le due funzioni f, h definite su $\mathcal{H}$ a valori reali; la parentesi simmetrica associata al tensore G è detta *parentesi di Jordan*:

$$\{f, h\}_g := G(df, dh) \tag{3.55}$$

mentre riconosciamo nella parentesi indotta dal tensore di Poisson, una *parentesi di Poisson*, antisimmetrica che definiremo come:

$$\{f, h\}_\omega := \Lambda(df, dh) \tag{3.56}$$

Che nelle coordinate z^k si scrivono come:

$$\{f, h\}_g = 2(\frac{\partial f}{\partial z^k}\frac{\partial h}{\partial \bar{z}^k} + \frac{\partial h}{\partial z^k}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^k}) \tag{3.57}$$

$$\{f, h\}_\omega = \frac{2}{i}(\frac{\partial f}{\partial z^k}\frac{\partial h}{\partial \bar{z}^k} - \frac{\partial h}{\partial z^k}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^k}) \tag{3.58}$$

Mentre nelle stesse coordinate J si scriverà come:

$$J = -i(dz^k \otimes \frac{\partial}{\partial z^k} - \bar{z}^k \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}) \tag{3.59}$$

Le parentesi di Jordan e di Poisson, date le funzioni f, h, g appartenenti all'insieme delle funzioni reali su $\mathcal{H}$ soddisfano le proprietà:

1. bilinearità: dato $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \{f, h + ag\}_g = \{f, h\}_g + a\{f, g\}_g \\ \\ \{f, h + ag\}_\omega = \{f, h\}_\omega + a\{f, g\}_\omega \end{cases} . \tag{3.60}$$

2. simmetria/antisimmetria:

$$\{f, g\}_g = \{g, h\}_g \tag{3.61}$$

$$\{f, g\}_\omega = -\{g, h\}_\omega \tag{3.62}$$

3. identità di Jacobi valida solo per $\{\cdot, \cdot\}$:

$$\{f, \{g, h\}_\omega\}_\omega + \{h, \{f, g\}_\omega\}_\omega + \{g, \{h, f\}_\omega\}_\omega = 0 \tag{3.63}$$

È ora possibile definire, oltre al campo Hamiltoniano che abbiamo già incontrato nella prima sezione, il *gradiente* ∇f di una funzione f. Avremo dunque:

$$g(\cdot, \nabla f) = df \quad \text{o} \quad G(\cdot, df) = \nabla f \tag{3.64}$$

$$\omega(\cdot, X_f) = df \quad \text{o} \quad \Lambda(\cdot, df) = X_f \tag{3.65}$$

i quali, nelle coordinate, si scrivono:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial q^k}\frac{\partial}{\partial q^k} + \frac{\partial f}{\partial p^k}\frac{\partial}{\partial p^k} = 2\left(\frac{\partial f}{\partial z^k}\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^k}\frac{\partial}{\partial z^k}\right) \tag{3.66}$$

$$X_f = \frac{\partial f}{\partial p^k}\frac{\partial}{\partial q^k} - \frac{\partial f}{\partial q^k}\frac{\partial}{\partial p^k} = 2i\left(\frac{\partial f}{\partial z^k}\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^k}\frac{\partial}{\partial z^k}\right) \tag{3.67}$$

per i quali vale $J(\nabla f) = X_f$.
Tali campi ci permettono di scrivere le parentesi di Jordan e di Poisson come:

$$\{f, h\}_g = g(\nabla f, \nabla h), \tag{3.68}$$

$$\{f, h\}_\omega = \omega(X_f, X_h) \tag{3.69}$$

Estendendo entrambe le parentesi a funzioni complesse è possibile sfruttarle per definire una parentesi complessa come:

$$\{f, h\}_{\mathcal{H}} : \langle df, dh\rangle_{T^*H_{\mathbb{R}}} := \{f, h\}_g + i\{f, h\}_\omega \tag{3.70}$$

In particolare dato A, operatore lineare sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, è sempre possibile definire la funzione quadratica:

$$f_A(x) = \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle = \frac{1}{2}z^\dagger A z \tag{3.71}$$

dove z è il vettore colonna $(z_1, ..., z_n)$. Dunque f_A sarà una funzione reale se e solo se A è un operatore Herimitano. È immendiato, osservando le relazioni alle coordinate delle parentesi di Jordan e Poisson verificare che:

$$\{f_A, f_B\}_g = f_{AB+BA} \tag{3.72}$$

$$\{f_A, f_B\}_\omega = f_{\frac{AB-BA}{i}} \tag{3.73}$$

Questo significa che alle parentesi di Jordan e di Poisson delle due funzioni quadratiche f_A e f_B è possibile associare rispettivamente le seguenti parentesi tra operatori lineari A e B sullo spazio di Hilbert:

- *Parentesi di Jordan* o *anticommutatore*

$$[A, B]_+ := AB + BA \tag{3.74}$$

- *Parentesi di Lie* o *commutatore*

$$[A, B]_- := \frac{1}{i}(AB - BA) \tag{3.75}$$

Possiamo notare che se gli operatori lineari A e B sono Hermitiani, le parentesi appena definite erediteranno tale proprietà. Dunque, l'insieme degli operatori Hermitiani su $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ fornito delle operazioni binarie di anticommutazione e commutazione costituiscono l'*algebra di Lie-Jordan*. È possibile estendere questi concetti al caso infinito-dimensionale assumendo che gli operatori A e B appartengono all'insieme degli operatori limitati autoaggiunti sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, dove le regole di anticommutazione e commutazione sono indotte direttamente dalla struttura riemanniana e dalla forma simplettica di cui $\mathcal{H}$ è dotato via prodotto scalare. Inoltre è possibile definire il prodotto binario associativo:

$$(A, B) = \frac{1}{2}\big([A, B]_{+} + i[A, B]_{-}\big) \tag{3.76}$$

tale che:

$$(A, B) = AB. \tag{3.77}$$

Consideriamo nuovamente la funzione quadratica definita nella (3.71) è semplice vedere che:

$$\{f_A, f_B\}_{\mathcal{H}} = 2f_{AB} \tag{3.78}$$

Abbiamo quindi che per ogni operatore lineare A, B, C vale

$$\{\{f_A, f_B\}_{\mathcal{H}}, f_C\}_{\mathcal{H}} = \{f_A, \{f_B, f_{C_{\mathcal{H}}}\}\}_{\mathcal{H}} = 4f_{ABC} \tag{3.79}$$

Riprendiamo ora i campi definiti nelle (3.64) e (3.65) e consideriamo un operatore lineare A t.c.:

$$A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}. \tag{3.80}$$

A tale operatore è possibile associare una funzione quadratica f_A definita nella (3.71) e un campo vettoriale:

$$X_A : \mathcal{H} \to TH \tag{3.81}$$

in modo tale che:

$$x \mapsto (x, Ax) \tag{3.82}$$

Se A è Hermitiana, ovvero se f_A è reale, si può dimostrare che (si faccia riferimento al testo [3]):

$$\nabla f_A = X_A \tag{3.83}$$

e anche:

$$X_{f_A} = J(X_A) \tag{3.84}$$

Esempio: i campi vettoriali di dilatazione e di fase. Consideriamo il campo di dilatazione definito nella (3.17) come:

$$\Delta : x \mapsto (x, x) \tag{3.85}$$

che in coordinate reali si scrive come:

$$\Delta = q^k \frac{\partial}{\partial q^k} + p^k \frac{\partial}{\partial p^k}. \tag{3.86}$$

A questo punto possiamo definire il campo vettoriale di fase come:

$$\Gamma = J(\Delta) \tag{3.87}$$

dunque nelle coordinate si scrive:

$$\Gamma = p^k \frac{\partial}{\partial q^k} - q^k \frac{\partial}{\partial p^k}. \tag{3.88}$$

Abbiamo dunque mostrato come su spazi complessi come lo spazio di Hilbert, sia necessario fornire delle strutture supplementari come quella riemanniana per una descrizione geometrica completa tali spazi. Si è anche osservato come dalle definizioni di forma simplettica e riemanniana si possano definire delle strutture geometriche e delle relazioni tra gli oggetti definiti sugli spazi complessi; tali relazioni giocano un ruolo fondamentale nella comprensione e nello sviluppo della meccanica quantistica, unitamente a strumenti più complessi e raffinati. Nella presente tesi abbiamo infatti posto le basi e presentato gli strumenti fondamentali per affrontare lo studio della meccanica quantistica in termini geometrici, sottolineando le analogie e le differenze con la meccanica classica e già da un approccio preliminare ci siamo resi conto dell'impossibilità di individuare una corrispondenza biunivoca tra il mondo classico e quello quantistico.

Bibliografia

[1]V. I. Arnold,*Metodi matematici della meccanica classica*, Editori Riuniti, 1979
[2]J. Clemente-Gallardo, G. Marmo, *Besic of quantum mechanics, geometrization and appications to quantum information*,International Journal of Geometric Methods in Modern Physic (5,6), 2008, 989-1032
[3]E. Ercolessi, *A short course on Quantum Mechanics and its Geometry*
[4]E. Ercolessi, G. Marmo, G. Morandi, *From the equations of motion to the canonical commutation relations*, La Rivista del Nuovo Cimento(33,5,8-9), 2010
[5]G. Esposito, G. Marmo,G. Miele, G. Sudarshan, *Advanced concepts in quantum mechanics*
[6]B. Schutz, *Geometrical methods of mathematical physics*, Cambridge Uniiversity Press, 1980
[7]Y. Talpert, *Differential geometry with applications to mechanics and physics*,Ouagadougou University