

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Corso di Laurea in Fisica

Computer e simulazioni quantistici

Relatore:
Prof.ssa Elisa Ercolessi

Presentata da:
Antonio Lorenzo Mariano

Sessione II
Anno Accademico 2013/2014

A Peter

Sommario

Lo studio di sistemi quantistici sta alla base di molti dei moderni sviluppi teorici e applicativi della Fisica. In questo scritto vogliamo studiare il funzionamento di simulatori e computer quantistici. I primi permettono di simulare l'evoluzione di un sistema quantistico in maniera controllata gli altri possono eseguire operazioni logiche su oggetti chiamati *qubits*. Andremo a studiare come ottenere un set universale di porte logiche quantistiche e le loro caratteristiche. Analizzeremo le differenze tra simulazione analogica(AQS) e digitale(DQS). Applicheremo quest'ultima a sistemi di particelle fermioniche e bosoniche in un reticolo.

Indice

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introduzione | 4 |
| 2 | Postulati della Meccanica quantistica | 6 |
| 2.1 | Postulato n^o1 | 6 |
| 2.2 | postulato n^o2 | 8 |
| 2.3 | postulato n^o3 | 9 |
| 2.4 | postulato n^o4 | 10 |
| 3 | Struttura di un computer quantistico | 11 |
| 3.1 | Qubit | 11 |
| 3.2 | Qubits multipli | 12 |
| 3.3 | Quantum gate | 13 |
| 3.4 | Scomposizione di operatori | 13 |
| 4 | Porte logiche | 16 |
| 4.1 | Single qubit gate | 16 |
| 4.2 | Multiple qubit gates | 17 |
| 4.3 | Implementazione della logica classica in un computer quantistico | 18 |
| 4.4 | Toffoli gate | 20 |
| 5 | Quantum simulation | 23 |
| 5.1 | Simulatori quantistici digitali e analogici | 24 |
| 5.2 | simulazione di un sistema di fermioni | 28 |
| 5.3 | Simulazione di un sistema di bosoni | 32 |
| 6 | Conclusioni | 36 |

1 Introduzione

“... the problem is, how can we simulate the quantum mechanics? [...] We can give up on our rule about what the computer was, we can say: Let the computer itself be built of quantum mechanical elements which obey quantum mechanical laws.[...] Can you do it with a new kind of computer, a quantum computer? ...”[6]

Nel 1982 Richard Feynman pose l’attenzione sul problema della simulazione di sistemi quantistici attraverso calcolatori classici. Contemporaneamente Paul Benioff propose l’utilizzo di sistemi quantistici per la simulazione della logica propria dei calcolatori classici[2]. L’idea di questi “pionieri” era quella di concepire una macchina che affondasse le sue radici non nella meccanica classica, come la macchina di Turing e quindi tutti i calcolatori classici, ma sulla teoria quantistica sviluppata a partire dai primi del ’900. Feynman sottolinea la necessità di simulatori le cui dimensioni, in termini di componenti necessarie alla simulazione di grandi sistemi fisici, siano proporzionali al volume spazio-temporale del sistema stesso. *“... I don’t want to have an explosion.”*[6] così Feynman si riferisce alla crescita esponenziale delle risorse necessarie alla simulazione di sistemi quantistici attraverso calcolatori classici, andamento che può essere sostituito da una crescita polinomiale nel caso di simulatori che implementano oggetti di natura quantistica.

La teoria della computazione quantistica ha avuto un rapido sviluppo negli anni a seguire; ciò nonostante la tecnologia richiesta per la realizzazione pratica di macchine quantistiche ha tardato circa di un ventennio. Nel 2001 si assiste ad una prima dimostrazione sperimentale in cui si utilizzano qubits per eseguire un algoritmo quantistico: l’algoritmo di Shor[3]. Oggi lo sviluppo tecnologico e le conoscenze teoriche permettono l’applicazione di simulazioni quantistiche in molti ambiti della Fisica, per citarne alcune: Fisica delle alte energie, Cosmologia, Fisica atomica, Chimica, Chaos quantistico, Interferometria.[1]

Lo scopo del presente scritto è quello di analizzare i meccanismi che stanno alla base del

funzionamento di una macchina quantistica e di studiarne l' applicazione per la simulazione di sistemi quantistici.

Capitolo 1: vengono introdotti i quattro postulati della meccanica quantistica che rappresentano, in termini di prima quantizzazione, le basi teoriche essenziali per la comprensione dei meccanismi che regolano i fenomeni quantistici.

Capitolo 2: si analizzano gli elementi fondamentali dei computer quantistici, i *qubits*, la loro rappresentazione geometrica, modello di Bloch, e vengono introdotti i fenomeni di entanglement che emergono nello studio di sistemi a più *qubits*. Si introduce il concetto di porta logica quantistica come operatore unitario. Viene, infine, discussa e dimostrata la scomposizione di operatori unitari in matrici a due livelli al fine di scomporre operazioni logiche rappresentate genericamente da operatori unitari.

Capitolo 3: vengono descritte alcune porte logiche quantistiche che agiscono su singoli *qubit*: i gate rappresentati dalla prima e dalla terza matrice di Pauli, l'Hadamard gate e i gate di rotazione. Viene presentato il prototipo di multi-gate quantistico, il *Controlled-NOT* gate. L'ultima parte del capitolo è dedicata alla dimostrazione di come sia possibile implementare la logica classica all'interno di un calcolatore quantistico risolvendo alcuni problemi: quello dell'irreversibilità dei gate classici, risolvibile implementando una logica reversibile a partire dal *Toffoli* gate, e quello dell'impossibilità di *FANOUT* da parte dei gate quantistici. Quest' ultimo problema viene affrontato esponendo e dimostrando il teorema di no-cloning quantistico, si accenna all'implementazione di macchine per la clonazione imperfetta di stati quantistici.

Capitolo 4: si discute di simulatori quantistici, delle loro caratteristiche e dei due diversi approcci che si possono avere nella simulazione: simulazione digitale e simulazione analogica. Successivamente si dà esempio di simulazione digitale di sistemi di particelle. Vengono analizzati il caso di particelle fermioniche e bosoniche in un reticolo. Si conclude accennando ai moderni sviluppi e ai risultati ottenuti recentemente sullo studio di tecniche di simulazione di sistemi quantistici.

2 Postulati della Meccanica quantistica

2.1 Postulato n°1

Ad ogni sistema fisico isolato è associato uno spazio di Hilbert, tale spazio prende il nome di spazio degli stati del sistema. Il sistema è completamente descritto da un vettore di stato (o funzione d'onda), ossia un vettore unitario dello spazio degli stati.

Il primo postulato della meccanica quantistica, delinea lo scenario matematico nel quale viene costruita la teoria: ogni sistema fisico è rappresentato da un vettore $|\psi\rangle$ nello spazio di Hilbert H . Siano ϕ' e ϕ'' vettori appartenenti ad H , c' e c'' numeri complessi, allora anche

$$|\phi\rangle = c' |\phi'\rangle + c'' |\phi''\rangle \quad (1)$$

è un vettore di H . Affinchè un vettore di stato $|\psi\rangle$, che descrive un sistema fisico, abbia un'interpretazione statistica deve soddisfare la condizione di normalizzazione

$$\|\psi\|^2 = 1. \quad (2)$$

Siccome una combinazione lineare di vettori di stato è in generale non normalizzabile, possiamo richiedere che la funzione d'onda soddisfi una condizione meno stringente. Infatti una funzione d'onda rappresenta uno stato fisico se

$$\|\psi\|^2 < \infty, \quad (3)$$

una funzione d'onda ψ che soddisfa tale proprietà può essere sostituita da $c|\psi\rangle$ con $c \in \mathbb{C}$, una scelta opportuna della costante c può far sì che la nuova funzione soddisfi la condizione (2). Uno stato fisico è definito a meno di un fattore di fase, infatti il vettore $|\psi\rangle$ e il vettore $e^{i\alpha} |\psi\rangle$ rappresentano lo stesso stato fisico. Un insieme completo di vettori indipendenti $|e_1\rangle, \dots, |e_n\rangle$ sono una base ortonormale se soddisfano

$$\langle e_{n'} | e_n \rangle = \delta_{n',n} \quad (4)$$

e un qualsiasi vettore $|\psi\rangle$ può essere scritto come somma degli elementi di base ognuno moltiplicato per un certo coefficiente complesso c_n

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |e_n\rangle. \quad (5)$$

Un osservabile fisico A è rappresentato nello spazio di Hilbert da un operatore Hermitiano, ossia un operatore \hat{A} tale che

$$\hat{A}^\dagger = \hat{A}, \quad (6)$$

il valor medio di un osservabile \hat{A} su uno stato $|\psi\rangle$ è dato da

$$\langle A \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle, \quad (7)$$

inoltre la deviazione standard è definita come

$$\Delta \hat{A} = \sqrt{\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2} \quad (8)$$

L'insieme di tutti i possibili valori che può assumere un osservabile A è chiamato spettro dell'operatore. Dal fatto che un osservabile è rappresentato da un operatore Hermitiano, deriva che il suo spettro è necessariamente reale. Considerando il solo caso di spettro discreto, i valori a_n che un osservabile A può assumere rispetto a una base ortonormale $\{|n\rangle\}$ sono gli autovalori dell'operatore \hat{A}

$$\hat{A} |n\rangle = |n\rangle a_n. \quad (9)$$

Non tutti gli osservabili sono misurabili simultaneamente, esiste infatti una specifica relazione tra gli operatori che rappresentano due osservabili A e B che possono essere misurati simultaneamente con arbitraria precisione

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{0} \quad (10)$$

in cui $[\hat{A}, \hat{B}]$ è il commutatore tra \hat{A} e \hat{B} . Nel caso in cui invece si ha la condizione

$$[\hat{A}, \hat{B}] \neq \hat{0} \quad (11)$$

subentra una relazione tra le deviazioni standard $\Delta \hat{A}$ e $\Delta \hat{B}$. Tale relazione prende il

nome di Principio di indeterminazione di Heisenberg ed è dovuta a Kennard una prima dimostrazione formale[11]:

definiamo gli scarti dalla media di due osservabili A e B come

$$\hat{A}_0 = \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \text{ e } \hat{B}_0 = \hat{B} - \langle \hat{B} \rangle$$

introduciamo le varianze

$$\Delta \hat{A}^2 = \langle \hat{A}_0^2 \rangle \text{ e } \Delta \hat{B}^2 = \langle \hat{B}_0^2 \rangle.$$

Attraverso la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ottiene:

$$\Delta \hat{A}^2 \Delta \hat{B}^2 = \langle \hat{A}_0^2 \rangle \langle \hat{B}_0^2 \rangle \geq \| \langle \hat{A}_0 \hat{B}_0 \rangle \|^2$$

sfruttando la seguente identità

$$\hat{A}_0 \hat{B}_0 = \frac{1}{2} [\hat{A}_0, \hat{B}_0] + \frac{1}{2} \{ \hat{A}_0, \hat{B}_0 \}$$

supponendo di poter scrivere $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$ e notando che le traslazioni non influenzano i commutatori, $[\hat{A}_0, \hat{B}_0] = [\hat{A}, \hat{B}]$, possiamo scrivere

$$\Delta \hat{A}^2 \Delta \hat{B}^2 = \left(\Delta \hat{A} \Delta \hat{B} \right) \geq \left\| \left\langle \frac{i}{2} \hat{C} + \frac{1}{2} \{ \hat{A}_0, \hat{B}_0 \} \right\rangle \right\|^2 \geq \frac{\| \langle \hat{C} \rangle \|^2}{4}$$

ovvero

$$\Delta \hat{A} \Delta \hat{B} \geq \frac{\| \langle \hat{C} \rangle \|^2}{2}$$

che è il principio di indeterminazione di Heisenberg nella sua forma più generale.

2.2 postulato n°2

L'evoluzione nel tempo di un sistema quantistico chiuso è descritta da una trasformazione unitaria.

Il secondo postulato ci da informazioni sulla dinamica di un sistema fisico. Un generico vettore di stato $|\psi(t)\rangle$ evolve nello stato $|\psi(t')\rangle$, con $t' > t$, attraverso la relazione

$$|\psi(t')\rangle = \hat{U}(t, t') |\psi(t)\rangle, \quad (12)$$

con \hat{U} operatore unitario, ossia che soddisfa la condizione

$$\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{1} \iff \hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}. \quad (13)$$

In particolare l'evoluzione temporale di un sistema fisico è governata dall'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo

$$\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} \hat{H} |\psi(t)\rangle. \quad (14)$$

L'operatore Hamiltoniano \hat{H} è tale per cui il suo spettro è formato dai valori di energia a cui appartengono stati stazionari del sistema quantistico

$$\hat{H} |\psi_n\rangle = |\psi_n\rangle \omega_n \quad (15)$$

quest'ultima relazione è chiamata equazione di Schrödinger indipendente dal tempo.

2.3 postulato n°3

Una singola misura dell'osservabile A sullo stato $|\psi\rangle$ fornisce come risultato uno degli autovalori a_n di \hat{A} con probabilità $|\langle a_n | \psi \rangle|^2$. Immediatamente dopo la misura il sistema si trova nello stato $\frac{\hat{P}_n |\psi\rangle}{\|\hat{P}_n |\psi\rangle\|}$, dove \hat{P}_n è l'operatore di proiezione nel sottospazio degli autostati di \hat{A} con autovalore a_n .

La natura probabilistica della meccanica quantistica emerge in maniera evidente dal 3° postulato: eseguendo più volte la misura di un osservabile A su un sistema preparato nello stato $|\psi\rangle$ si ottiene una distribuzione di probabilità dei possibili valori di A sullo stato $|\psi\rangle$. Ogni valore a_n ha una probabilità di uscita pari a $|\langle a_n | \psi \rangle|^2$, e dalle condizioni (2) e (5) risulta che

$$\sum_n |\langle a_n | \psi \rangle|^2 = 1. \quad (16)$$

2.4 postulato n°4

Lo spazio degli stati di un sistema fisico composto da n sistemi è il prodotto tensoriale degli spazi di ciascun sistema. Inoltre, assumendo che ogni sistema si trova nello stato $|\psi_i\rangle$, il sistema si trova nell'autostato $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\psi_n\rangle$.

3 Struttura di un computer quantistico

3.1 Qubit

Qualsiasi sistema quantistico con uno spazio di Hilbert H 2-dimensionale che può esistere solo in due stati ortogonali $|0\rangle$ e $|1\rangle$ può essere utilizzato come *quantum bit* o *qubit*. Tali stati corrispondono agli stati “0” e “1” di un bit classico. Esempi di sistemi che possono essere trattati come sistemi a due stati sono il ground state e il primo stato eccitato di un atomo; la polarizzazione verticale e orizzontale di un fotone polarizzato linearmente oppure destra e sinistra, nel caso di polarizzazione circolare; la componente lungo un certo asse dello spin di una particella con spin $\frac{1}{2}$ [12]. A differenza di un bit classico, che può esistere solo in due stati, un qubit può essere in un' arbitraria combinazione lineare $|\psi\rangle$ degli stati di base

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Essendo H bidimensionale l'algebra degli operatori sarà 4-dimensionale e un qualsiasi operatore \hat{A} può essere espanso come

$$\hat{A} = a_m \hat{1} + |\mathbf{a}| \mathbf{a}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad (18)$$

con a_m e $|\mathbf{a}|$ reali, \mathbf{a}_1 vettore unitario e $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ vettore di operatori. La scelta standard per gli operatori $\hat{\sigma}$ sono gli operatori di Pauli che hanno come autovalori ± 1 . Una volta fissata una base ortonormale e_α ($\alpha = x, y, z$), tali operatori assumono la forma matriciale delle matrici di Pauli ortogonali

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Essendo osservabili gli operatori di Pauli sono autoaggiunti

$$\hat{\sigma}_\alpha^\dagger = \hat{\sigma}_\alpha. \quad (20)$$

Introduciamo la seguente formula esponenziale

$$\exp\left(i\frac{\theta}{2}\mathbf{a}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}\right) = \cos\frac{\theta}{2}\hat{1} + i\sin\frac{\theta}{2}\mathbf{a}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad (21)$$

tale espressione permette di rappresentare l'azione di un qualsiasi operatore attraverso

una rotazione 3-dimensionale in quella che viene chiamata sfera di Bloch (Figura 1). La superficie di tale sfera di raggio unitario è in corrispondenza uno a uno con i possibili stati di un qubit. Partendo dai due stati di base $|0\rangle$ e $|1\rangle$ un qualsiasi altro stato può essere scritto come

$$|\theta, \varphi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle. \quad (22)$$

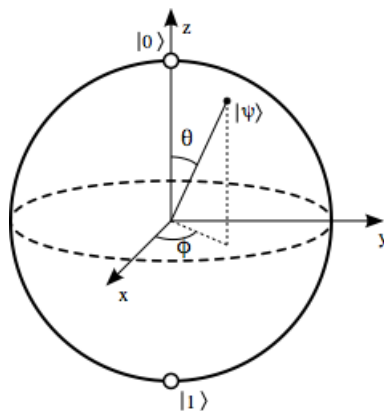


Figura 1: Sfera di Bloch

3.2 Qubits multipli

Al fine di utilizzare sistemi quantistici a due stati per implementare un sistema di qubits in grado di eseguire operazioni analoghe a quelle realizzabili con un computer classico, occorre studiare il comportamento e i fenomeni cui sono soggetti sistemi composti da almeno due qubits. Consideriamo un sistema formato da due sottosistemi A e B ognuno dei quali è caratterizzato da una base ortonormale per lo spazio di Hilbert dei sottosistemi:

$$\{|0\rangle_A, |1\rangle_A\} \quad \{|0\rangle_B, |1\rangle_B\}$$

in cui gli stati $|0\rangle$ e $|1\rangle$ possono rappresentare, ad esempio, i possibili stati di spin di una particella di spin $\frac{1}{2}$. Dal 4° postulato della meccanica quantistica si ha che se i due

sottosistemi A e B si trovano, rispettivamente, nello stato $|\psi\rangle_A$ e $|\phi\rangle_B$ allora il sistema totale si trova nello stato $|\psi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B$, dove \otimes indica il prodotto diretto. In accordo con il principio di sovrapposizione sarà possibile trovare il sistema totale in un generico stato

$$|s\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B, \quad c_{ij} \in \mathbb{C}. \quad (23)$$

È opportuno, a questo punto, introdurre due possibili configurazioni dello stato del sistema totale: stato di *entanglement* e stato *separabile*. Lo stato del sistema è in entanglement se non è esprimibile come prodotto diretto di due stati dei due sottosistemi dello spazio di Hilbert, e questo è valido qualunque sia la scelta della base per i due sottosistemi. Viceversa, uno stato esprimibile come prodotto diretto di stati dei due sottosistemi è detto separabile[12].

3.3 Quantum gate

In un computer classico un *logic gate*, o semplicemente *gate*, è un circuito elettronico in cui il livello logico del segnale in uscita dipende dallo stato logico di uno o più segnali d'ingresso[8]. Tali elementi agiscono su uno o più bits e danno in uscita uno stato 0 o 1 in base alla tavola di verità che descrive la funzione del/dei gates utilizzati. Nell'ambito della computazione quantistica ci si aspetta di poter definire oggetti con la stessa funzione, ossia oggetti che evolvono un certo stato $|\psi\rangle$ in uno stato finale $|\psi'\rangle$. È chiaro dal secondo postulato della meccanica quantistica che, siccome una qualunque evoluzione di uno stato fisico avviene attraverso una trasformazione unitaria, un qualunque gate che agisce su uno o più qubit avrà la forma di un operatore unitario. Questa è l'unica condizione che deve soddisfare un valido quantum gate[5].

3.4 Scomposizione di operatori

In questa sezione vogliamo dimostrare che un qualsiasi operatore rappresentato da una matrice unitaria U che agisce su uno spazio di Hilbert d -dimensionale può essere decomposto nel prodotto di matrici unitarie a due livelli[5]. Per matrice unitaria a due livelli si intende una matrice che agisce in modo non banale solo su due, o meno, vettori dello spazio.

La dimostrazione è fatta su una matrice 3×3 , lo stesso procedimento è realizzabile a partire da una qualsiasi matrice $N \times N$ in modo analogo.

Consideriamo la matrice

$$U = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & j \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Vogliamo trovare tre matrici a due livelli unitarie U_1 , U_2 e U_3 tali che

$$U_3 U_2 U_1 U = \mathbb{I} \quad (25)$$

e affinché l'uguaglianza sia verificata si deve avere

$$U = U_1^\dagger U_2^\dagger U_3^\dagger, \quad (26)$$

dove U_1^\dagger , U_2^\dagger e U_3^\dagger sono ancora matrici unitarie a due livelli e sono proprio la scomposizione di U che stiamo cercando.

Andiamo a determinare un metodo iterativo del tutto generale per determinare la scomposizione di U :

- se $b = 0$ allora

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (27)$$

se $b \neq 0$ costruiamo la seguente matrice unitaria

$$U_1 = \begin{pmatrix} \frac{a^*}{\sqrt{|a|^2+|b|^2}} & \frac{b^*}{\sqrt{|a|^2+|b|^2}} & 0 \\ \frac{b}{\sqrt{|a|^2+|b|^2}} & \frac{-a}{\sqrt{|a|^2+|b|^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (28)$$

in entrambi i casi si ottiene

$$U_1 U = \begin{pmatrix} a' & d' & g' \\ 0 & e' & h' \\ c' & f' & j' \end{pmatrix}, \quad (29)$$

in cui abbiamo ridefinito gli elementi della matrice con i primati delle lettere. Il punto chiave del passaggio è aver annullato l'elemento $(1, 0)$ della matrice.

- se $c' = 0$ allora

$$U_2 = \begin{pmatrix} a'^* & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (30)$$

se $b \neq 0$

$$U_2 = \begin{pmatrix} \frac{a'^*}{\sqrt{|a'|^2+|b'|^2}} & 0 & \frac{c'^*}{\sqrt{|a'|^2+|b'|^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{c'}{\sqrt{|a'|^2+|b'|^2}} & 0 & \frac{-a'}{\sqrt{|a'|^2+|b'|^2}} \end{pmatrix} \quad (31)$$

si ottiene

$$U_2 U_1 U = \begin{pmatrix} 1 & d'' & g'' \\ 0 & e'' & h'' \\ 0 & f'' & j'' \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Dalla proprietà delle matrici unitarie tale per cui il prodotto di matrici unitarie è ancora una matrice unitaria, segue che $U_2 U_1 U$ è unitaria e quindi gli elementi fuori diagonale della prima riga devono essere nulli: $d'' = g'' = 0$.

- Per soddisfare la relazione (25) basta porre

$$U_3 = (U_2 U_1 U)^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e''^* & f''^* \\ 0 & h''^* & j''^* \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Abbiamo trovato tre matrici U_i ($i = 1, 2, 3$) tali per cui $U_3 U_2 U_1 U = \mathbb{I}$, quindi $U = U_1^\dagger U_2^\dagger U_3^\dagger$ è una decomposizione di U in tre matrici unitarie a due livelli.

Più in generale questa procedura ci permette di scrivere una qualsiasi evoluzione temporale in termini di operatori che agiscono su sottospazi 2–dimensionali. Inoltre dalle proprietà dei sistemi a due stati possiamo scomporre ulteriormente un operatore di uno spazio 2–dimensionale in termini della matrice unità e in termini di operatori di Pauli. Il passaggio successivo consiste nel restringere ulteriormente l'insieme delle matrici a due livelli alla scelta di due soli operatori universali con i quali è possibile scrivere qualsiasi operatore.

4 Porte logiche

4.1 Single qubit gate

L'unico single gate classico, ossia che agisce su un solo bit, non banale è il *NOT*[5]. Esistono invece una vasta gamma di single gate in ambito di computer quantistici. Consideriamo un qubit in un generico stato

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$$

con $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ base ortonormale dello spazio di Hilbert H con le ampiezze di probabilità α e $\beta \in \mathbb{C}$ tali che $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Il *NOT* gate è rappresentato dalla prima matrice di Pauli $\hat{\sigma}_x$ (Figura 2), il suo effetto è quello di scambiare le ampiezze di probabilità relative ai due elementi di base:

$$\hat{\sigma}_x |\psi\rangle = |\phi\rangle \quad , \quad |\phi\rangle = \alpha |1\rangle + \beta |0\rangle . \quad (34)$$

Un altro esempio di single gate è rappresentato dalla terza matrice di Pauli $\hat{\sigma}_z$, il suo effetto è quello di *flippare* il segno di $|1\rangle$:

$$\hat{\sigma}_z |\psi\rangle = |\phi'\rangle \quad , \quad |\phi'\rangle = \alpha |0\rangle - \beta |1\rangle \quad (35)$$

Infine uno dei più importanti single gate utilizzati l'*Hadamard* gate, questo assume la seguente forma matriciale:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

tale gate a volte chiamato 'radice quadrata del *NOT*' gate, trasforma $|0\rangle$ in una combinazione di $|0\rangle$ e $|1\rangle$ con uguale ampiezza e analogamente su $|1\rangle$ invertendo il segno di $|1\rangle$:

$$\hat{H} |\psi\rangle = |\phi''\rangle \quad , \quad |\phi''\rangle = \alpha \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} + \beta \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} . \quad (37)$$

Nella rappresentazione dello stato di un qubit attraverso la sfera di Bloch l'*Hadamard* gate può essere visto come una rotazione di 90° intorno a \hat{y} , seguita da una rotazione

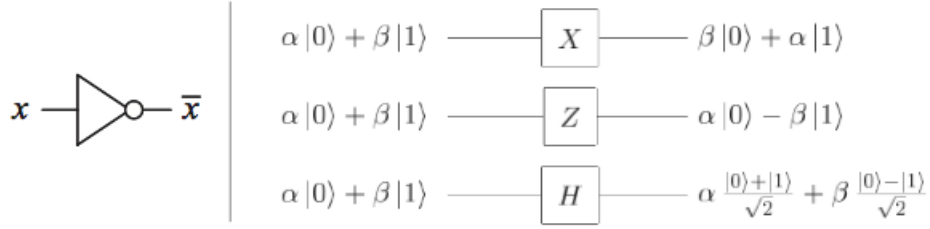


Figura 2: Classic *NOT* gate e single qubit gate

di 180° intorno a \hat{x} . Ricordiamo che, in questa visione, ogni stato del qubit è caratterizzato da una coppia di angoli (θ, ϕ) che definiscono in maniera univoca un vettore $(\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta)$ di modulo unitario che collega l'origine del sistema di assi con un punto della superficie della sfera unitaria centrata sull'origine. A tale proposito scriviamo gli *operatori di rotazione* $\hat{R}_x, \hat{R}_y, \hat{R}_z$ che possono essere visti come single gate che agiscono genericamente sullo stato di un qubit ruotando il vettore di un angolo η intorno ai tre assi $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$

$$R_x(\eta) \equiv e^{-i\eta\hat{\sigma}_x/2} = \cos \frac{\eta}{2} I - i \sin \frac{\eta}{2} \hat{\sigma}_x = \begin{bmatrix} \cos \frac{\eta}{2} & -i \sin \frac{\eta}{2} \\ -i \sin \frac{\eta}{2} & \cos \frac{\eta}{2} \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$R_y(\eta) \equiv e^{-i\eta\hat{\sigma}_y/2} = \cos \frac{\eta}{2} I - i \sin \frac{\eta}{2} \hat{\sigma}_y = \begin{bmatrix} \cos \frac{\eta}{2} & -\sin \frac{\eta}{2} \\ \sin \frac{\eta}{2} & \cos \frac{\eta}{2} \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$R_z(\eta) \equiv e^{-i\eta\hat{\sigma}_z/2} = \cos \frac{\eta}{2} I - i \sin \frac{\eta}{2} \hat{\sigma}_z = \begin{bmatrix} e^{-i\eta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\eta/2} \end{bmatrix} \quad (40)$$

4.2 Multiple qubit gates

In un computer classico esistono, oltre al gate singolo *NOT*, diversi gate che operano avendo in input più di un bit. Tra questi i due fondamentali sono l'*AND* e l'*OR* che, insieme al già citato *NOT*, permettono di definire altri gate come il *NAND*, il *NOR* e l'*EXOR*[8]. Un importante risultato teorico è la dimostrazione che qualsiasi funzione logica può essere scritta componendo diverse porte logiche *NAND* o *NOR*, che per questa ragione sono chiamati gate *universali*[8]. Il motivo per cui l'*EXOR* non può essere considerato un gate universale è dovuto al fatto che non è in grado di cambiare la parità dei bits in ingresso[5]: se in ingresso il numero di bits accesi è pari (o dispari) in uscita si avrà comunque un numero pari (o dispari) di bits accesi. In un computer quantistico il prototipo di multi gate è il *controlled-NOT* o *CNOT* gate. Questo gate ha due

qubits in input: il *control* qubit e il *target* qubit. Se il control qubit è 0, allora il target qubit rimane inalterato; se il control qubit è 1, allora il target qubit viene *flippato*: $|A, B\rangle \longrightarrow |A, A \oplus B\rangle$, dove $(A \oplus B)$ significa eseguire la funzione *EXOR* tra il control qubit A e il target qubit B.

È possibile scrivere la rappresentazione matriciale del *CNOT* gate come

$$U_{CN} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (41)$$

È facile verificare che U_{CN} è una matrice unitaria che soddisfa $U_{CN}^\dagger U_{CN} = \mathbb{I}$.

Si può dimostrare che un generico operatore che agisce su un numero arbitrario di qubit può essere scritto utilizzando un single quantum gate e un *CNOT* gate: tale insieme di gate è un set universale.[5]

4.3 Implementazione della logica classica in un computer quantistico

Quello che stiamo cercando di fare è riuscire a implementare la logica di un computer classico in un computer quantistico; vogliamo quindi trovare operatori con i quali sia possibile eseguire le stesse operazioni logiche dei gate classici. Il problema emerge quando si considera che questi ultimi non sono rappresentabili attraverso un operatore unitario, ossia sono *non-invertibili*. Questo è legato al fatto che l'azione di un gate, come l'*XOR* o il *NAND*, inevitabilmente implica la perdita di informazioni: non si può applicare un gate che a partire dall'output dia in uscita il valore dei bit in ingresso[5]. Vice versa un quantum gate è sempre invertibile essendo l'inverso di una matrice unitaria ancora una matrice unitaria.

Un altro problema emerge nello studio dei circuiti di un quantum computer, ed è legato al concetto di *FANOUT*. Classicamente il *FANOUT* di una porta logica è il numero di porte logiche che possono essere collegate alla sua uscita. Tale definizione implica che sia possibile copiare il risultato di un'operazione logica in modo da mandare la stessa informazione a diverse porte, questa azione è possibile classicamente ma non quantisticamente. Non è in generale possibile clonare uno stato quantistico attraverso operazioni unitarie, questo è ciò che afferma il teorema di *no-cloning* quantistico ad opera di Wootters, Zurek e Dieks. Per dimostrare questo teorema consideriamo uno stato sorgente $|\psi\rangle$ nello spazio di Hilbert H_{source} e uno stato obbiettivo $|s\rangle$ nello spazio di Hilbert H_{target} in cui vogliamo copiare lo stato sorgente. Per quest'ultima operazione occorre definire un

operatore \hat{U} appartenente allo spazio $H_{source} \otimes H_{target}$ con la proprietà

$$\hat{U} |\psi\rangle \otimes |s\rangle = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle \quad \forall |\psi\rangle \in H_{source}. \quad (42)$$

siccome si è supposto che \hat{U} cloni ogni stato di H_{source} , consideriamo la sua azione su un secondo stato $|\phi\rangle$:

$$\hat{U} |\phi\rangle \otimes |s\rangle = |\phi\rangle \otimes |\phi\rangle. \quad (43)$$

assumiamo per semplicità che $|\psi\rangle$, $|\phi\rangle$ e $|s\rangle$ siano normalizzati, e consideriamo il prodotto scalare delle due precedenti equazioni considerando che \hat{U} è unitario è quindi conserva il prodotto scalare

$$\left(\langle s| \otimes \langle \psi| \hat{U}^\dagger\right) \left(\hat{U} |\phi\rangle \otimes |s\rangle\right) = \langle s|s\rangle \langle \psi|\phi\rangle = \langle \psi|\phi\rangle. \quad (44)$$

supponendo che \hat{U} cloni entrambi gli stati $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ si ha anche

$$\left(\langle s| \otimes \langle \psi| \hat{U}^\dagger\right) \left(\hat{U} |\phi\rangle \otimes |s\rangle\right) = (\langle \psi| \langle \psi|) (|\phi\rangle |\phi\rangle) = (\langle \psi|\phi\rangle)^2. \quad (45)$$

Confrontando i risultati

$$\langle \psi|\phi\rangle = (\langle \psi|\phi\rangle)^2 \quad (46)$$

questo è possibile solamente se $\langle \psi|\phi\rangle = 0$ o $\langle \psi|\phi\rangle = 1$, ossia solo se i due stati sono identici o ortogonali. Ciò significa che un operatore di *clonazione* può clonare solamente stati ortogonali tra loro, e non è in grado di clonare una generica combinazione di questi. In conclusione la clonazione esatta di uno stato quantistico non è possibile, esistono tuttavia tecniche per una clonazione imperfetta di uno stato quantistico.

Agli stessi Wootters e Zurek si deve l'implementazione di una macchina per la clonazione di stati ortogonali[4]; successivamente Buzek e Hillery proposero una macchina in grado di copiare uno stato quantistico indipendentemente dall'input. Quest'ultimo procedimento permette di copiare i 5/6 delle informazioni contenute in uno stato sorgente[4]. In questo genere di oggetti l'entanglement tra la copia e la sorgente dopo la clonazione introduce problemi all'atto della misura dello stato della copia. La misura, infatti, provoca il collasso della funzione d'onda dello stato clonato, se questo è in entanglement con lo stato del sistema sorgente questa operazione provocherà un cambiamento anche nello stato sorgente. Esistono tuttavia tecniche per minimizzare gli effetti di questo fenomeno.[4]

4.4 Toffoli gate

Per poter stabilire definitivamente che la logica classica sia implementabile anche in computer quantistico dobbiamo analizzare il problema della non-invertibilità dei gate classici, la soluzione di questo problema sta nel dimostrare che tutti i gate classici sono realizzabili a partire da un gate classico reversibile. Il gate in questione prende il nome di *Toffoli gate*, ciò che rende questa porta logica fondamentale nel passaggio tra classico e quantistico è dato dal fatto che è possibile rendere la logica classica *reversibile* mantenendo, inoltre, un set minimo di gate universali.

Il Toffoli gate, o anche *controlled-controlled-NOT (CCNOT)*, è un gate che riceve in input tre bits (Figura 3). La sua azione su tre bits a , b e c è la seguente

$$(a, b, c) \longrightarrow (a, b, ab \oplus c) \quad (47)$$

il bit c , o target bit, viene *flippato* solo se a e b sono uguali a 1.

| Inputs | | | Outputs | | |
|--------|-----|-----|---------|------|------|
| a | b | c | a' | b' | c' |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

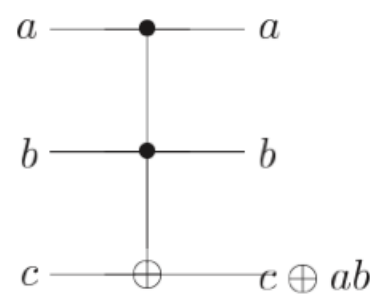


Figura 3: Tavola di verità e circuito del Toffoli gate

È facile verificare che applicando due volte tale gate si riottengono i valori iniziali dei bits

$$(a, b, c) \longrightarrow (a, b, ab \oplus c) \longrightarrow (a, b, c).$$

Come già accennato tale gate è universale; è infatti possibile implementare il *NAND*, oltre che al *NOT* e al *XOR*, fissando opportunamente uno o più bits:

- per $c = 1$ si ha

$$(a, b, 1) \longrightarrow (a, b, 1 - ab) = (a, b, aNANDb)$$

- per $a = 1$ si ha

$$(1, b, c) \longrightarrow (1, b, bEXORc)$$

- per $a = b = 1$ si ha

$$(1, 1, z) \longrightarrow (1, 1, NOTz)$$

Il Toffoli gate è inoltre implementabile come quantum gate, la sua azione su un sistema di tre qubit è quella di far cambiare stato al target qubit nel caso in cui i primi due siano nello stato 1. La sua azione è definita da un operatore unitario \hat{U}_{CCNOT} rappresentato dalla seguente matrice 8×8 :

$$U_{CCNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Esiste oltre al Toffoli gate un altro gate reversibile che prende il nome di Fredkin gate[12]. La sua funzione è analoga, con la differenza che invece di avere due bit di controllo e un bit obiettivo, il Fredkin gate utilizza un bit di controllo e due bit obiettivo. La sua azione è rappresentata dalla sua tavola di verità:

Se $c = 0$ in input, in output c contiene la funzione $aANDb$. Ponendo invece $c = 1$ e $b = 0$ si ha in output $c = NOTa$. È quindi possibile utilizzare questo gate allo stesso modo del Toffoli gate, ossia per rendere la logica classica reversibile e quindi implementabile in un computer quantistico.

È facile verificare che un gate reversibile come il Toffoli gate può essere utilizzato per fare *FANOUT* (Figura 4). Si considerino i tre input (a, b, c) e supponiamo di voler copiare le informazioni presenti nel bit a in modo da avere in output due bits copie di a . Osservando la tavola di verità del Toffoli gate si vede che prendendo come input $(a = 1, b = a, c = 0)$ in uscita si ottiene $(a' = 1, b' = a, c' = a)$. In questa maniera l'informazione di del bit a è stata copiata in b' e c' che possono a loro volta entrare in input in altre porte logiche.

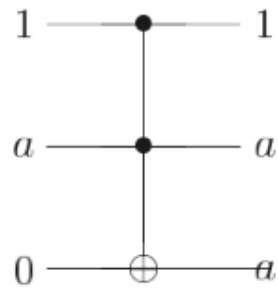


Figura 4: Circuito per fare FANOUT con un Toffoli gate.

5 Quantum simulation

La simulazione di un sistema quantistico sarà l'argomento centrale di questo capitolo. I problemi relativi ad un approccio classico a questo scopo, risiedono nelle enormi risorse di memoria necessarie. Queste, infatti, sono descritte da parametri che crescono esponenzialmente con la dimensione del sistema[10], in particolare questo è dovuto al fatto che è necessario tenere memoria di tutte le ampiezze di probabilità legate a tutte le possibili configurazioni del sistema. Per dimensione del sistema si intende in generale il numero di particelle o di gradi di libertà, per fare un esempio si consideri un sistema di N particelle a spin $1/2$, un generico stato $|\psi'\rangle$ sarà sovrapposizione di 2^N vettori, ossia di tutti i possibili stati del sistema. La simulazione classica di un sistema di questo tipo richiede l'utilizzo di un numero complesso per ogni ampiezza di probabilità e quindi $2^{N+1} \times \text{size} - \text{of} - \text{double}$. Inoltre l'evoluzione temporale è descritta dall'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi'\rangle = \hat{H} |\psi'\rangle$$

con \hat{H} Hamiltoniana indipendente dal tempo. Le soluzioni sono date da

$$|\psi'(t)\rangle = \exp(-i\hbar\hat{H}t) |\psi'(0)\rangle$$

è richiesto quindi l'esponenziale di una matrice $2^N \times 2^N$ elementi. Prendendo per esempio un sistema con $N = 36$ uno stato è codificato da una quantità di memoria pari a circa 1 Terabyte e ogni particella aggiuntiva raddoppia tale cifra. Un valore limite standard è $N = 40$, per cui sono necessari circa 16 terabytes di memoria[10]. Per quanto riguarda la matrice che rappresenta l'Hamiltoniana solitamente si ha a che fare con forme piuttosto regolari che non soffrono, grazie alle loro caratteristiche, di andamenti esponenziali[1]. Per simulatore quantistico si intende un sistema quantistico controllabile utilizzabile per simulare/emulare altri sistemi quantistici. Un computer quantistico può funzionare da simulatore universale di sistemi quantistici; per computer quantistico intendiamo un insieme di qubits che possono essere inizializzati, misurati e sui quali è possibile agire con gate universali. Il carattere universale del computer quantistico è da intendersi come la capacità di simulare problemi differenti da parte della stessa macchina. Esiste tuttavia un altro approccio al problema: quello di realizzare un dispositivo quantistico che imiti il comportamento di un sistema quantistico reale.

5.1 Simulatori quantistici digitali e analogici

Consideriamo un sistema $|\psi'\rangle$ che vogliamo simulare, questo evolve da uno stato iniziale $|\psi'(0)\rangle$ a un certo stato $|\psi'(t)\rangle$ attraverso una trasformazione unitaria $\hat{U}' = \exp\left(-i\hbar\hat{H}_{sys}t\right)$, dove \hat{H}_{sys} è l'Hamiltoniana del sistema. Un simulatore quantistico è un sistema, $|\psi\rangle$, controllabile: lo stato iniziale $|\psi(0)\rangle$ può essere preparato, l'evoluzione unitaria $\hat{U} = \exp\left(-i\hbar\hat{H}_{sim}t\right)$, con \hat{H}_{sim} l'Hamiltoniana controllabile del simulatore, può essere tecnologicamente realizzata, e lo stato finale $|\psi(t)\rangle$ può essere misurato. Se esiste una mappatura tra il sistema e il simulatore, ossia le mappature $|\psi'(0)\rangle \leftrightarrow |\psi(0)\rangle$, $|\psi'(t)\rangle \leftrightarrow |\psi(t)\rangle$ e $\hat{U}' \leftrightarrow \hat{U}$, allora il sistema può essere simulato[1].
 È possibile definire due differenti tipi di simulatori (Figura 5):

A. Simulatore quantistico digitale(DQS) Alla base di un simulatore quantistico digitale sta tutta la teoria della logica dei computer quantistici. Lo stato da simulare $|\psi'\rangle$ viene codificato in un insieme di qubits, tali elementi devono essere inizializzati in modo da riprodurre lo stato iniziale $|\psi'(0)\rangle$ in un generico stato $|\psi(0)\rangle$ dei qubits. Come abbiamo visto nelle sezioni precedenti un *single qbit gate* e un *multi qbit gate(CNOT)* formano un set universale con cui è possibile comporre qualsiasi operatore unitario, che rappresenta per definizione una porta logica. Andiamo a studiare come ottenere un certo operatore \hat{U} in un simulatore quantistico digitale. Consideriamo l'Hamiltoniana \hat{H}_{sys} del sistema, supponendo di poterla scrivere come somma di M termini \hat{H}_l , con $l = 1, 2 \dots M$, di interazione locale

$$\hat{H} = \sum_{l=1}^M \hat{H}_l. \quad (48)$$

Ricordando la formula di Baker-Campbell-Hausdorff

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots} \quad (49)$$

allora se il commutatore $[\hat{H}_l, \hat{H}_{l'}] = 0$ per ogni l e l' si può scrivere

$$\hat{U} = \prod_{l=1}^M \exp\left(-i\hbar\hat{H}_l t\right). \quad (50)$$

In questo caso la decomposizione di \hat{U} in gate locali è esatta ed è possibile utilizzare single e multi gate per realizzarlo. Sfortunatamente nella maggior parte dei casi di interesse

pratico $[\hat{H}_I, \hat{H}_V] \neq 0$. Apriamo ora una parentesi per enunciare e dimostrare la *formula di Trotter* che in questo frangente gioca un ruolo centrale[5]. Siano \hat{A} e \hat{B} due operatori Hermitiani allora per ogni t reale vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{i\hat{A}t/n} e^{i\hat{B}t/n} \right)^n = e^{i(\hat{A}+\hat{B})t}. \quad (51)$$

dimostrazione: dalla definizione di esponenziale come serie di potenza

$$e^{i\hat{A}t/n} = I + \frac{1}{n} i\hat{A}t + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (52)$$

e quindi

$$e^{i\hat{A}t/n} e^{i\hat{B}t/n} = I + \frac{1}{n} i(\hat{A} + \hat{B})t + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (53)$$

Elevando tale prodotto alla n -esima potenza

$$\left(e^{i\hat{A}t/n} e^{i\hat{B}t/n} \right)^n = I + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \left[i(\hat{A} + \hat{B})t \right]^k + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (54)$$

e siccome

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) / k!, \quad (55)$$

allora si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{i\hat{A}t/n} e^{i\hat{B}t/n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{\left(i(\hat{A} + \hat{B})t \right)^k}{k!} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) + O\left(\frac{1}{n}\right) = e^{i(\hat{A}+\hat{B})t}. \quad (56)$$

inoltre prendendo $n = t/\Delta t$ si ha anche

$$e^{i(\hat{A}+\hat{B})\Delta t} = e^{i\hat{A}\Delta t} e^{i\hat{B}\Delta t} + O(\Delta t^2). \quad (57)$$

L'approccio che utilizziamo per affrontare il problema è quello di dividere l'evoluzione

temporale in più step di durata temporale Δt minore, possiamo scrivere

$$\hat{U}(t) = \left(e^{-i\hbar\hat{H}\Delta t} \right)^{t/\Delta t}. \quad (58)$$

Utilizzando la formula di Trotter si ottiene

$$\hat{U}(\Delta t) = e^{-i\hbar\sum_l \hat{H}_l \Delta t} = \prod_l e^{-i\hbar\hat{H}_l \Delta t} + O(\Delta t^2). \quad (59)$$

Facendo il limite $\Delta t \rightarrow 0$ si ha

$$\hat{U}(\Delta t) \approx \prod_l e^{(-i\hbar\hat{H}_l \Delta t)}. \quad (60)$$

Siamo riusciti ad approssimare l'intera evoluzione del sistema attraverso evoluzioni relative a intervalli di tempo piccoli, ognuna di queste, attraverso la formula di Trotter, è stata approssimata come prodotto di operatori relativi a interazioni locali. Operativamente ogni evoluzione $\hat{U}(\Delta t)$ comporta l'utilizzo di single e multi gate per la sua realizzazione. È chiaro, quindi, che tanto più si vuole ottenere precisione tanto più bisogna prendere intervalli di tempo Δt piccoli, questo si traduce in un sempre maggiore numero di gate da utilizzare.

Una volta simulata l'evoluzione del sistema, l'ultimo passo è quello di eseguire le misure sul sistema al fine di ottenere i risultati della simulazione.

B.simulatori quantistici analogici(AQS) Un altro approccio per la simulazione di un sistema quantistico risiede nell'utilizzo di simulatori quantistici analogici, nei quali un sistema quantistico molto simile al sistema da simulare viene preso come emulatore dello stesso. L'Hamiltoniana del sistema da simulare, \hat{H}_{sys} , è direttamente mappata nell'Hamiltoniana del simulatore, \hat{H}_{sim} , che può essere controllato. È necessario che esista una mappatura $|\psi'(0)\rangle \leftrightarrow |\psi(0)\rangle$ attraverso un operatore \hat{f} :

$$|\psi(0)\rangle = \hat{f} |\psi'(0)\rangle. \quad (61)$$

La mappatura $|\psi'(t)\rangle \leftrightarrow |\psi(t)\rangle$ avviene attraverso \hat{f}^{-1}

$$|\psi'(t)\rangle = \hat{f}^{-1} |\psi(t)\rangle. \quad (62)$$

Per le Hamiltoniane si ha

$$\hat{H}_{sim} = \hat{f} \hat{H}_{sys} \hat{f}^{-1}. \quad (63)$$

In generale approssciare la simulazione di un sistema quantistico attraverso AQS porta con se diversi vantaggi[1]: la preparazione dello stato iniziale, assumendo che i due sistemi siano molto simili, è eseguita semplicemente lasciando rilassare il sistema fino a uno stato di equilibrio; la misura di diverse grandezze può essere eseguita direttamente sul sistema senza passare attraverso la manipolazione di qubits come in DQS; inoltre AQS può essere utile anche se l' emulatore è affetto da errori (comunque entro un certo limite di tolleranza), infatti è possibile ottenere informazioni qualitative utili del sistema in analisi. È evidente che un simulatore quantistico analogico è limitato alla simulazione di un sistema specifico, a differenza di un simulatore quantistico digitale che può simulare una gamma di sistemi fisici molto più ampia.

Andiamo a vedere come applicare la simulazione DQS a due diversi casi: particelle fermioniche e particelle bosoniche. In questo modello, l' algebra assegnata ad un sistema di N-qubits è costruita a partire dagli operatori di Pauli $\hat{\sigma}_x^j$, $\hat{\sigma}_y^j$ e $\hat{\sigma}_z^j$ che agiscono sul j-esimo qubit. La relazione di commutazione per questi operatori è definita come

$$[\hat{\sigma}_x^j, \hat{\sigma}_y^k] = 2i\delta_{j,k}\epsilon_{xyz}\hat{\sigma}_z^j, \quad (64)$$

dove ϵ_{xyz} è il simbolo di Levi-Civita. È utile scrivere gli operatori che alzano o abbassano lo stato di un qubit

$$\hat{\sigma}_\pm^j = \frac{\hat{\sigma}_x^j \pm i\hat{\sigma}_y^j}{2}. \quad (65)$$

Qualsiasi operazione su qubit è rappresentata da un operatore unitario \hat{U} ; ogni operatore di evoluzione \hat{U} applicato ad un sistema di N qubits può essere decomposto utilizzando un single qbit gate e un multi qbit gate. Non tratteremo nei dettagli la scelta dei gate elementari da utilizzare, comunque nel contesto in cui ci troviamo è spesso opportuno utilizzare come single qubit il gate di rotazione e per il multi qubits gate, invece che un *CNOT* gate, un gate di interazione[7]. La scelta tra set universali di quantum gate risulta ad ogni modo arbitraria proprio per il loro carattere universale.

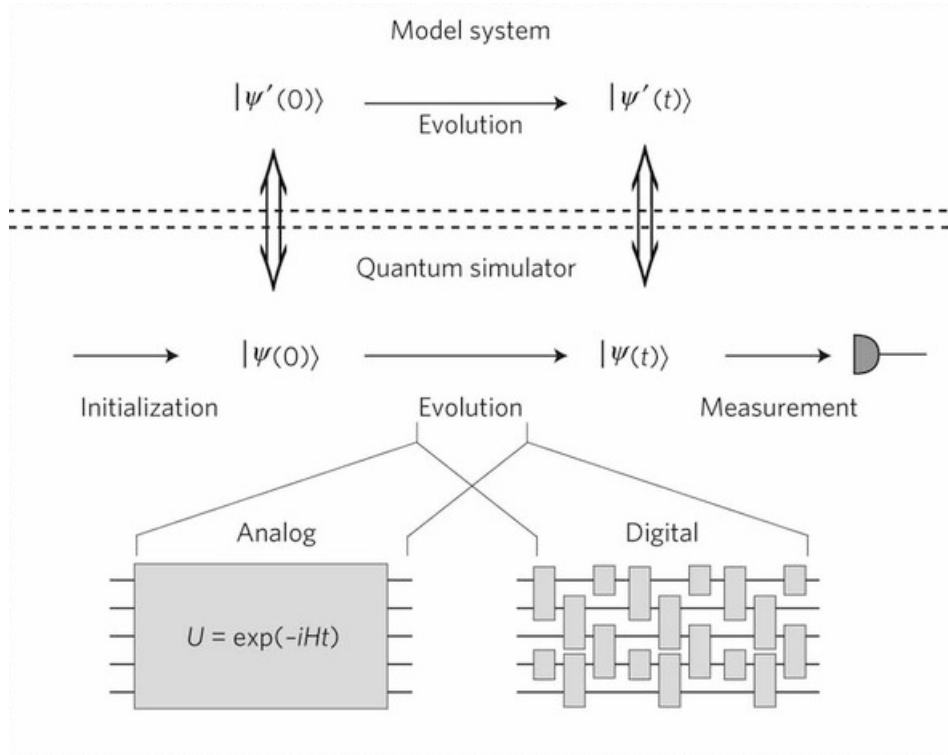


Figura 5: Rappresentazione schematica dell'azione di un simulatore quantistico: in AQS l'evoluzione è rappresentata da un unico operatore che rappresenta l'evoluzione del simulatore stesso; in DQS l'intera evoluzione è suddivisa in una serie di termini implementati attraverso quantum gate.

5.2 simulazione di un sistema di fermioni

Il primo sistema quantistico la cui simulazione vogliamo implementare attraverso *DQS* è quello di un reticolo con N siti nel quale si dispongono particelle fermioniche senza spin. Un sistema di fermioni è governato dal principio di esclusione di Pauli, questo implica che non più di un fermione possa occupare uno stesso stato quantico allo stesso tempo. In questo modo, lo spazio di Hilbert di un sistema di fermioni in un solido è finito dimensionale: il numero di stati è dato da tutte le combinazioni con cui si possono disporre fermioni in N siti atomici, ovviamente tenendo conto del fatto che essendo particelle quantistiche sono indistinguibili; lo spazio di Hilbert del sistema sarà pertanto 2^N -dimensionale.

Nella rappresentazione di seconda quantizzazione, gli operatori fermionici c_i^\dagger e c_i sono definiti come operatori di creazione e distruzione di un fermione nell' i -esimo sito

($i = 1, \dots, N$). Dal principio di esclusione di Pauli e dalla natura antisimmetrica della funzione d'onda di un fermione rispetto alla permutazione di due fermioni, derivano le seguenti relazioni

$$\{c_i, c_j\} = 0, \{c_i^\dagger, c_j^\dagger\} = 0, \{c_i^\dagger, c_j\} = \delta_{ij}, \quad (66)$$

dove $\{, \}$ indica l'anticommutatore.

la trasformazione di Jordan-Wigner[9] permette di scrivere gli operatori di creazione e distruzione in termini di operatori di Spin

$$c_j \rightarrow \left(\prod_{l=1}^{j-1} -\sigma_z^l \right) \sigma_-^j \quad (67)$$

$$c_j^\dagger \rightarrow \left(\prod_{l=1}^{j-1} -\sigma_z^l \right) \sigma_+^j, \quad (68)$$

Le precedenti trasformazione sono quelle per cui continuano a valere le regole di commutazione giuste: la mappatura diretta $c_j \rightarrow \sigma_-^j$ e $c_j^\dagger \rightarrow \sigma_+^j$ soddisfa le condizioni solo tra operatori relativi allo stesso sito, aggiungere il termine $\prod_{l=1}^{j-1} -\sigma_z^l$ aggiusta i segni nel calcolo dell'anticommutatore nel caso in cui ($i \neq j$).

La simulazione del sistema di fermioni avviene attraverso tre step: la preparazione dello stato iniziale, evoluzione del sistema e misura del sistema. Quest'ultima fase della simulazione non verrà presa in esame in questa trattazione.

preparazione dello stato iniziale Come già anticipato l'operazione di preparazione dello stato iniziale prevede una mappatura 1 – 1 tra gli stati del sistema da simulare e gli stati di un certo numero di qubits. L'idea alla base della nostra mappatura sta nell'associare a ogni sito del reticolo lo stato di un qubit; assumendo che i possibili stati del qubit siano $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$, la mappatura prevede che la presenza di un fermione nell' i -esimo sito sia codificata all'interno del sistema di qubits con lo stato alto, $|\uparrow\rangle$, dell' i -esimo qubit. Consideriamo un numero N_e di fermioni, un generico stato del sistema $|\psi\rangle$ può essere scritto come combinazione lineare di un numero L , finito, di funzioni antisimmetriche ottenute calcolando il determinante di Slater[7]. Questa operazione permette di scrivere una funzione antisimmetrica $|\phi_\alpha\rangle$ a partire da un certo numero di fermioni. Lo stato del sistema diventa

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha=1}^L g_{\alpha} |\phi_{\alpha}\rangle, \quad (69)$$

dove

$$|\phi_{\alpha}\rangle = \sum_{j=1}^{N_e} c_j^{\dagger} |vac\rangle \quad (70)$$

lo stato $|vac\rangle$ è definito come lo stato senza nessun fermione. Rispetto al linguaggio di spin l'assenza di fermioni in ogni sito del reticolo, ossia lo stato $|vac\rangle$, si scrive come:

$$|vac\rangle = |\downarrow\downarrow \dots \downarrow\rangle \quad (71)$$

É possibile preparare lo stato $|\phi_{\alpha}\rangle$ utilizzando un quantum gate la cui rappresentazione operatoriale è

$$U_m = e^{i\frac{\pi}{2}(c_m + c_m^{\dagger})} \quad (72)$$

tale operatore unitario quando agisce sullo stato del vuoto produce $c_m^{\dagger} |vac\rangle$ a meno di un fattore di fase[7]. Utilizzando la trasformazione di Jordan-Wigner possiamo riscrivere U_m nel linguaggio di spin

$$U_m = e^{i\frac{\pi}{2}\sigma_x^m \prod_{j=1}^{m-1} -\sigma_z^j}. \quad (73)$$

Applicando N_e operatori unitari di questo tipo si può generare lo stato $|\phi_{\alpha}\rangle$ a meno di una costante di fase globale irrilevante.

É importante notare che lo stato antisimmetrico ottenuto dal determinante di Slater è ottenibile anche in una base differente a partire dalla base corrente. Infatti la funzione in un' altra generica base si scrive

$$|\phi_{\beta}\rangle = \prod_{i=1}^{N_e} d_i^{\dagger} |vac\rangle, \quad (74)$$

in cui gli operatori di creazione d_i^{\dagger} sono legati agli operatori c_j^{\dagger} dalla seguente relazione

$$\vec{d}^{\dagger} = e^{iM} \vec{c}^{\dagger} \quad (75)$$

con $\vec{d}^\dagger = (d_1^\dagger, d_2^\dagger, \dots, d_{N_e}^\dagger)$, $\vec{c}^\dagger = (c_1^\dagger, c_2^\dagger, \dots, c_{N_e}^\dagger)$, e M è una matrice Hermitiana $N \times N$. Si ha inoltre che le due funzioni sono legate da una trasformazione unitaria $|\phi_\beta\rangle = U |\phi_\alpha\rangle$, dove l'operatore U è definito come

$$U = e^{-i\vec{c}^\dagger M \vec{c}}. \quad (76)$$

Utilizzando la trasformazione di Jordan-Wigner quest'ultimo può essere decomposto in quantum gate. Anche se il numero di gate scala polinomialmente con la dimensione del sistema, lo stato $|\phi_\beta\rangle$ può essere preparato direttamente a partire dallo stato $|\phi_\alpha\rangle$ [7].

Evoluzione dello stato iniziale Il secondo step riguarda la simulazione dell'evoluzione dello stato iniziale. L'Hamiltoniana, indipendente dal tempo, sarà in generale data dalla somma di un contributo cinetico K e uno potenziale V , $H = K + V$. L'operatore unitario di evoluzione assume la forma $U(t) = e^{iHt}$. Come già accennato nelle precedenti sezioni, in generale i termini che formano H non commutano, $[V, K] \neq 0$. Questo implica che la decomposizione di $U(t)$ in termini di gate elementari risulta complicata. Utilizziamo l'approssimazione di Trotter per scomporre l'evoluzione totale in una serie di evoluzioni relative a tempi Δt brevi che facciamo tendere a 0

$$U(t) = \prod_{g=1}^{N'} U(\Delta t), \quad (77)$$

$$U(\Delta t) = e^{iH\Delta t} = e^{i(K+V)\Delta t} \approx e^{iK\Delta t} e^{iV\Delta t}. \quad (78)$$

Dove N' è il numero di intervalli Δt in cui è stata suddivisa l'intera evoluzione temporale. Generalmente l'energia potenziale V è somma di termini che commutano tra loro e quindi è immediata la realizzazione dell'operatore $e^{iV\Delta t}$ attraverso gate elementari. D'altro canto la parte cinetica dell'Hamiltoniana è in generale somma di termini nella forma $c_i^\dagger c_j + c_j^\dagger c_i$ che non commutano[7], per questa ragione applichiamo nuovamente l'approssimazione di Trotter all'operatore $e^{iK\Delta t}$. Ogni termine del tipo $e^{i(c_i^\dagger c_j + c_j^\dagger c_i)\Delta t}$, ($i < j$) diventa in linguaggio di spin

$$e^{[-\frac{i\Delta t}{2}(\sigma_x^i \sigma_x^j + \sigma_y^i \sigma_y^j) \prod_{k=i+1}^{j-1} (-\sigma_z^k)]} = e^{[-\frac{i\Delta t}{2} \sigma_x^i \sigma_x^j \prod_{k=i+1}^{j-1} (-\sigma_z^k)]} e^{[-\frac{i\Delta t}{2} \sigma_y^i \sigma_y^j \prod_{k=i+1}^{j-1} (-\sigma_z^k)]}. \quad (79)$$

In questo modo abbiamo ottenuto una forma dell'intera evoluzione temporale implementabile attraverso quantum gate elementari, come già accennato l'accuratezza di questo metodo cresce al diminuire di Δt .

5.3 Simulazione di un sistema di bosoni

Come abbiamo già visto, la simulazione di un sistema quantistico è basata sulla mappatura 1 – 1 tra gli stati del sistema da simulare e gli elementi fondamentali di un computer quantistico: i qubits. Nel caso fermionico il principio di esclusione di Pauli permette una volta fissato il numero N di siti, di mappare i siti stessi con i qubit e di identificare lo stato occupato con uno stato $|\uparrow\rangle$ del qubit. Il caso bosonico presenta una complicazione: la possibilità da parte di particelle bosoniche di coesistere nel medesimo stato quantico non fornisce un limite all'occupazione di un certo sito. Questo si traduce con l'esistenza di uno spazio di Hilbert, associato al sistema, infinito-dimensionale. In generale si può ovviare a questo problema considerando un sottospazio finito-dimensionale dello spazio totale; considereremo pertanto un numero N_P finito di bosoni. A tale proposito consideriamo il sistema la cui Hamiltoniana è data da

$$H = \sum_{i,j=1}^N \alpha_{ij} b_i^\dagger b_j + \beta_{ij} n_i n_j, \quad (80)$$

nella quale gli operatori b_i^\dagger e b_i creano e distruggono un bosone nell' i -esimo sito, l'operatore $n_i = b_i^\dagger b_i$ è l'operatore che applicato a un generico stato fornisce il numero di bosoni presenti nell' i -esimo sito. La dimensione spaziale del reticolo è contenuta nei parametri α_{ij} e β_{ij} .

Per uno spazio di Hilbert infinito-dimensionale le relazioni di commutazione sono

$$[b_i, b_j] = [b_i^\dagger, b_j^\dagger] = 0, [b_i, b_j^\dagger] = \delta_{ij}. \quad (81)$$

Un generico stato del sistema ha la forma $|n_1, n_2, \dots, n_N\rangle$ dove n_1, n_2, \dots, n_i stanno per il numero di bosoni presenti nell' i -esimo sito (ognuno dei quali può contenere al massimo il numero totale N_P di bosoni). Gli operatori di creazione e distruzione possono essere scritti in forma matriciale

$$\bar{b}_i^\dagger = \mathbb{I} \otimes \dots \otimes \mathbb{I} \otimes \hat{b}^\dagger \otimes \mathbb{I} \otimes \dots \otimes \mathbb{I} \quad (82)$$

dove \otimes indica il prodotto tensoriale tra matrici, l'operatore \hat{b}^\dagger è l' i -esimo elemento del prodotto. \mathbb{I} è la matrice identità mentre \hat{b}^\dagger è

$$\hat{b}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{N_P} & 0 \end{pmatrix}. \quad (83)$$

Il fatto di star considerando un sottospazio finito-dimensionale dello spazio di Hilbert totale, comporta che le relazioni di commutazioni assumano una forma differente

$$[\bar{b}_i, \bar{b}_j] = [\bar{b}_i^\dagger, \bar{b}_j^\dagger] = 0, [\bar{b}_i, \bar{b}_j^\dagger] = \delta_{ij} \left[1 - \frac{N_P + 1}{N_P!} (\bar{b}_i^\dagger)^{N_P} (\bar{b}_i)^{N_P} \right], \quad (84)$$

e chiaramente essendo il numero di bosoni finito $(\bar{b}_i^\dagger)^{N_P+1} = 0$.

Le relazioni di commutazione (84) tra \bar{b}_i^\dagger e \bar{b}_i nel caso finito-dimensionale, implicano che non sia possibile trovare una mappatura diretta tra gli operatori di creazione e distruzione e gli operatori di spin in modo analogo alle trasformazioni di Jordan-Wigner[7].

Una possibile soluzione consiste nell' associare ad ogni sito un numero N_P di qubits. La presenza di un numero n di bosoni nel sito sar  rappresentato dallo stato alto dell' n -esimo qubits.   evidente che se il numero di siti   N saranno necessari $N(N_P + 1)$ qubits per mappare l'intero sistema. Fissato l' i -esimo sito la mappatura risulta

$$\begin{aligned} |0\rangle_i &\leftrightarrow |\uparrow_0 \downarrow_1 \downarrow_2 \cdots \downarrow_{N_P}\rangle_i \\ |1\rangle_i &\leftrightarrow |\downarrow_0 \uparrow_1 \downarrow_2 \cdots \downarrow_{N_P}\rangle_i \\ |2\rangle_i &\leftrightarrow |\downarrow_0 \downarrow_1 \uparrow_2 \cdots \downarrow_{N_P}\rangle_i \\ &\vdots \\ |N_P\rangle_i &\leftrightarrow |\downarrow_0 \downarrow_1 \downarrow_2 \cdots \uparrow_{N_P}\rangle_i \end{aligned}$$

L'azione dell' operatore di creazione \bar{b}_i^\dagger sullo stato $|n\rangle_i$ dell' i -esimo sito sar  quella di spegnere l' n -esimo qubit e accendere l' $(n + 1)$ -esimo

$$\bar{b}_i^\dagger |\downarrow_0 \cdots \downarrow_{n-1} \uparrow_n \downarrow_{n+1} \cdots \downarrow_{N_P}\rangle_i = \sqrt{n+1} |\downarrow_0 \cdots \downarrow_n \uparrow_{n+1} \downarrow_{n+2} \cdots \downarrow_{N_P}\rangle_i. \quad (84)$$

L'operatore di creazione assume la seguente forma

$$\bar{b}_i^\dagger = \sum_{n=0}^{N_P-1} \sqrt{n+1} \sigma_-^{n,i} \sigma_+^{n+1,i}. \quad (84)$$

Per poter scrivere una generica Hamiltoniana nella forma (80) dobbiamo andare ad esprimere l'operatore numero \bar{n}_i rispetto agli operatori di Pauli

$$\bar{n}_i = \sum_{n=0}^{N_P} n \frac{\sigma_z^{n,i} + 1}{2}, \quad (84)$$

la sua azione su un generico stato dell' i -esimo sito diventa

$$\bar{n}_i |\downarrow_0 \cdots \downarrow_{n-1} \uparrow_n \downarrow_{n+1} \cdots \downarrow_{N_P}\rangle = n |\downarrow_0 \cdots \downarrow_{n-1} \uparrow_n \downarrow_{n+1} \cdots \downarrow_{N_P}\rangle. \quad (84)$$

Utilizzando le precedenti espressioni per l'operatore di creazione e per l'operatore numero possiamo riscrivere l'Hamiltoniana del sistema in termini di operatori di spin.

Preparazione dello stato iniziale Andiamo a scrivere un generico stato $|\psi\rangle$ di N_P bosoni in N siti

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha=1}^L g_\alpha |\phi_\alpha\rangle, \quad (84)$$

dato dalla combinazione lineare di un numero finito, L , di stati $|\phi_\alpha\rangle$ ognuno pesato dalla relativa ampiezza di probabilità g_α . Ogni singolo stato del sistema si ottiene applicando allo stato del vuoto, $|vac\rangle$, N operatori di creazione b_i^\dagger , ognuno relativo all' i -esimo sito ($i = 1 \cdots N$), un numero n_i di volte pari al numero di bosoni nell' i -esimo sito ($\sum_{i=1}^N n_i = N_P$)

$$|\phi_\alpha\rangle = K (b_1^\dagger)^{n_1} (b_2^\dagger)^{n_2} \cdots (b_N^\dagger)^{n_N} |vac\rangle, \quad (84)$$

dove K è un fattore di normalizzazione. Rispetto alla mappatura precedentemente implementata possiamo scrivere lo stato del vuoto utilizzando lo stato di N gruppi di N_P qubits come

$$|vac\rangle = |\uparrow_0 \downarrow_1 \cdots \downarrow_{N_P}\rangle_1 |\uparrow_0 \downarrow_1 \cdots \downarrow_{N_P}\rangle_2 \otimes \cdots \otimes |\uparrow_0 \downarrow_1 \cdots \downarrow_{N_P}\rangle_N, \quad (84)$$

analogamente uno stato $|\phi_\alpha\rangle$ si scrive come

$$|\phi_\alpha\rangle = |\downarrow_0 \cdots \uparrow_{n_1} \cdots \downarrow_{N_P}\rangle_1 \otimes \cdots \otimes |\downarrow_0 \cdots \uparrow_{n_N} \cdots \downarrow_{N_P}\rangle_N. \quad (84)$$

Per la preparazione dello stato iniziale è sufficiente cambiare stato a N qbits rispetto allo stato iniziale dove tutti i qubits hanno stato basso.

Evoluzione dello stato iniziale Per quanto riguarda l'evoluzione temporali rispetto a un Hamiltoniana nella forma $H = K + V$, con V energia potenziale e K energia cinetica, il discorso è analogo a quello fatto nel caso fermionico. In generale i due termini K e V sono tali per cui $[K, V] \neq 0$, questo comporta l'utilizzo dell'approssimazione di Trotter. In questo modo per ogni intervallo di tempo Δt in cui viene scomposta l'evoluzione totale si ha

$$e^{iH\Delta t} \approx e^{iK\Delta t} e^{iV\Delta t}. \quad (84)$$

Come nel caso di fermioni in generale anche K è somma di termini nella forma $b_k^\dagger b_l + b_l^\dagger b_k$ che non commutano, questo porta ad effettuare nuovamente l'approssimazione di Trotter relativamente al termine cinetico. Utilizzando le espressioni ricavate nel paragrafo precedente per gli operatori di creazione, possiamo scrivere un generico operatore di evoluzione relativo a uno dei termini cinetici utilizzando gli operatori di spin

$$\begin{aligned} \exp[it(b_i^\dagger b_j + b_j^\dagger b_i)] \rightarrow \exp\left[\frac{it}{8} \sum_{n,n'=0}^{N_P-1} \sqrt{(n+1)(n'+1)} [(\sigma_x^{n,i} \sigma_x^{n+1,i} + \sigma_y^{n,i} \sigma_y^{n+1,i})(\sigma_x^{n',j} \sigma_x^{n'+1,j} + \sigma_y^{n',j} \sigma_y^{n'+1,j}) \right. \\ \left. + (\sigma_x^{n,i} \sigma_y^{n+1,i} - \sigma_y^{n,i} \sigma_x^{n+1,i})(\sigma_x^{n',j} \sigma_y^{n'+1,j} - \sigma_y^{n',j} \sigma_x^{n'+1,j})]\right], \end{aligned}$$

I termini della precedente forma esponenziale commutano tra loro e una volta effettuata l'approssimazione di Trotter ogni termine è realizzabile attraverso gate elementari all'interno di un computer quantistico.

6 Conclusioni

Abbiamo visto come la manipolazione controllata di sistemi quantistici porti alla realizzazione di un dispositivo che permette l'implementazione di tecniche che possono, con le opportune precauzioni, realizzare funzioni logiche e dunque eseguire le stesse operazioni di un computer classico oltre a diverse operazioni non realizzabili in un normale calcolatore[5]. Inoltre la sua importanza nello sviluppo della Fisica è dovuto al loro utilizzo come simulatori. I recenti sviluppi relativi a tecniche di Laser-Cooling e alla realizzazione di trappole per atomi neutri e per ioni, hanno fornito strumenti per la realizzazione di simulatori quantistici particolarmente adatti allo studio dei problemi di materia condensata[1]. Come abbiamo avuto modo di analizzare, la simulazione di particelle in un reticolo richiede la realizzazione di un array di qubit e di un opportuno strumento di controllo.

La realizzazione di un simile apparato può avvenire attraverso l'utilizzo di atomi neutri in un reticolo ottico. Quest'ultimo si realizza incrociando due onde stazionarie prodotte da laser le quali, accoppiandosi con il momento di dipolo dell'atomo, generano un potenziale periodico. Gli atomi, soggetti a questo potenziale, si dispongono in un reticolo di cui è possibile controllarne la geometria agendo sui laser stessi. Sfruttando opportunamente due stati interni dell'atomo come stati $|0\rangle$ e $|1\rangle$ si ottiene un array di qubits. Per utilizzare questa configurazione in DQS è necessario che i due reticoli ottici siano sovrapposti e che ognuno di essi interagisca con uno dei due stati interni dell'atomo. Affinchè si possano realizzare operazioni logiche gli atomi devono poter interagire con quelli vicini. Ciò si verifica muovendo nello spazio i reticoli ottici uno rispetto all'altro[1].

Nel caso di ioni vengono utilizzate trappole che sfruttano l'interazione tra il campo elettrico o magnetico con la carica dello ione. I livelli energetici interni e i modi vibrazionali vengono adoperati per codificare informazioni quantistiche. A differenza di atomi neutri la cui interazione è debole, quella tra ioni vicini è più intensa a causa della repulsione Coulombiana e questo facilita il controllo dei qubits e l'implementazione di multi qbits gate. Attualmente vengono utilizzati come simulatori quantistici anche atomi in cavità, spin di nuclei, circuiti semiconduttori e fotoni[1].

Lo sviluppo nel campo dei computer quantistici ha portato, nel 2014, alla commercializzazione del primo computer quantistico della storia: il *D-Wave Two*. [13] Questo dispositivo utilizza SQUID (Superconducting Quantum Interference Device) per codificare le informazioni. Questi oggetti sono magnetometri estremamente sensibili che lavorano in regime di superconduttività e possono essere opportunamente inizializzati in una sovrapposizione arbitraria di due possibili stati di spin [13]. Sfruttando questi oggetti è anche possibile combinare diversi stati quantici per realizzare quantum gate.

Riferimenti bibliografici

- [1] Ashhab S., Georgescu M., Nori F., *Quantum Simulation*, in “Reviews of modern physics”, 86, 995, 2014.
- [2] Benioff P., *Quantum mechanical hamiltonian models of Turing machines*, in “Journal of Statistical Physics”, Vol. 29, Issue 3, 1982.
- [3] Breyta G., Chuang I. L., Sherwood M. H., Steffen M., Vandersypen L. M. K., Yannoni C. S., *Experimental realization of Shor’s quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance*, in “Nature”, 414, 2001.
- [4] Bužek V., Hillery M., *Quantum copying: Beyond the no-cloning theorem*, Physical Review A, n.54, 1996
- [5] Chuang I.L., Nielsen M.A., *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge, Cambridge University Press, 2010.
- [6] Feynman R.P., *Simulating Physics with Computers*, in “International Journal of Theoretical Physics”, vol. 21, n.6/7, 1982
- [7] Gubernatis J., Knill E., Ortiz G., Somma R., *Quantum Simulation of Physics Problem*, 2003.
- [8] Halkias, Millman, *Integrated Electronics*, Tata McGraw-Hill Publishing Company, 1972.
- [9] Jordan P. and Wigner E., in “Z. Phys.”, 47, 631, 1928.
- [10] Kendon V. M., Memoto K., Munro W. J., *Quantum Analogue Computing*, in “Philosophical Transactions of the Royal Society A”, vol. 368 n. 1924, 2010.
- [11] Kennard E. H., *Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen*, in “Zeitschrift für Physik”, Vol. 44, Issue 4-5, 1927.
- [12] Stolze J., Suter D., *Quantum computing. A Short Course from Theory to Experiment*, Weinheim, Strauss Offsetdruck GmbH, 2004.
- [13] <http://www.dwavesys.com>.