Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

L'ASSIOMA DI SCELTA : STORIA E INFLUENZA SULLA MATEMATICA DEL NOVECENTO.

Tesi di Laurea in Principi della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Piero Plazzi

Presentata da:
Dora Pastore

Sessione di Ottobre
2013/2014

A Gianluchì, la mia scelta.

«*Gutta cavat lapidem, non bis sed saepe cadendo,*
Sic homo fit sapiens non bis, sed saepe legendo».
Il candelaio, Giordano Bruno.

Introduzione

Nel 1926 David Hilbert affermò che l'assioma di scelta di Zermelo era stato fino a quel momento l'assioma più discusso e attaccato in matematica e qualche tempo dopo Abraham Fraenkel aggiunse che, in quanto a polemiche scatenate, si poteva ritenere secondo solo all'assioma delle parallele di Euclide, introdotto più di duemila anni prima.
La nascita dell'assioma di scelta stranamente non coincide con la sua formulazione originale, che Zermelo presentò nel 1904 come enunciato di un principio evidente, naturale e necessario per la sua dimostrazione del teorema del buon ordinamento. L'assioma di scelta ha infatti una preistoria, che riguarda l'uso inconsapevole e i primi barlumi di consapevolezza che si trattasse di un nuovo principio di ragionamento.
Lo scopo della prima parte di questa tesi è proprio quello di ricostruire questo percorso di usi più o meno impliciti e più o meno necessari che rivelarono la consapevolezza non solo del fatto che fosse indispensabile introdurre un nuovo principio, ma anche che il modo di "fare matematica" stava cambiando. Un esempio famoso di uso inconsapevole dell'assioma di scelta, di cui si parla nel capitolo 1, è quello che riguarda la dimostrazione dell'equivalenza delle due nozioni di continuità per le funzioni, quella classica e quella sequenziale.
Come vedremo soprattutto nei capitoli 2 e 3, furono moltissimi i matematici che, senza rendersene conto, utilizzarono l'assioma di scelta nei loro lavori, tra questi anche Cantor che appellandosi alla banalità delle dimostrazioni, evitava spesso di chiarire le situazioni in cui era richiesta questa particolare assunzione. Il contributo di Cantor alla storia dell'assioma di scelta è importante anche perchè venuti a conoscenza

dei suoi lavori, molti altri matematici iniziarono a far uso delle scelte arbitrarie, tra questi anche quelli che si opponevano ad esso (capitolo 3).
Il capitolo 2 è dedicato ad un caso notevole e rilevante dell'uso inconsapevole dell'Assioma, di cui per la prima volta si accorse R. Bettazzi nel 1892: l'equivalenza delle due nozioni di finito, quella di Dedekind e quella "naturale".
La prima parte di questa tesi si conclude con la dimostrazione di Zermelo del teorema del buon ordinamento e con un'analisi della sua assiomatizzazione della teoria degli insiemi che aveva lo scopo di difendere e giustificare sia l'Assioma che la dimostrazione del teorema (capitolo 4).
La seconda parte si apre con il capitolo 5 in cui si parla dell'intenso dibattito sulla dimostrazione di Zermelo e sulla possibilità o meno di accettare il suo Assioma, che coinvolse i matematici di tutta l'Europa. In quel contesto l'assioma di scelta trovò per lo più oppositori che si appellavano ad alcune sue conseguenze apparentemente paradossali. Queste conseguenze, insieme alle molte importanti, sono analizzate nel capitolo 6.
Nell'ultimo capitolo vengono riportate alcune tra le molte equivalenze dell'assioma di scelta con altri enunciati importanti come quello della tricotomia dei cardinali. Si ci sofferma poi sulle conseguenze dell'Assioma e sulla sua influenza sulla matematica del Novecento, quindi sulle formulazioni alternative o su quelle più deboli come l'assioma delle scelte dipendenti e quello delle scelte numerabili. Si conclude con gli importanti risultati, dovuti a Gödel e a Cohen sull'indipendenza e sulla consistenza dell'assioma di scelta nell'ambito della teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel.
Si sottolinea che per questo lavoro, il testo di riferimento seguito principalmente è [1] da cui, salvo diversa indicazione, sono tratte tutte le citazioni riportate, ritradotte personalmente.

Indice

Parte I

La storia dell'Assioma di Scelta

Capitolo 1

La cornice matematica

1.1 Introduzione

Nel 1904 Ernst Zermelo presentò la prima formulazione di quello che sarà più tardi chiamato Assioma di Scelta (che da qui in poi sarà abbreviato in AS):

> *A ogni sottoinsieme M' dell'insieme non vuoto M si può associare un certo elemento $m_1{}'$ che appartiene ad M' stesso e che può essere chiamato l'elemento "distinto" di M'.*

Con questa affermazione, Zermelo aveva postulato l'esistenza di una funzione $\gamma : S \to M$ tale che $\gamma(M') \in M'$ per ogni $M' \in S$, dove S è l'insieme di tutti i sottoinsiemi non vuoti di M ([1, p.90]).
Le radici di AS sono fortemente intrecciate con lo sviluppo di una nuova disciplina che era emersa tra la fine del XIX e l'inzio del XX secolo dall'Analisi: **la teoria degli insiemi di Cantor**. Al congresso di Parigi del 1900 Hilbert pone all'attenzione del mondo matematico una lista di problemi tra cui due rimasti irrisolti per la teoria di Cantor: il problema della *potenza del continuo* e quello del *buon ordinamento.* Quest'ultimo suona:

> *Sorge ora la questione: non si può ordinare la totalità di tutti i numeri in un altro modo, cosicchè ogni sottoinsieme*

> *abbia un elemento che viene prima di tutti gli altri, ossia non si può concepire anche il continuo come un insieme bene ordinato? Cantor crede che si debba rispondere affermativamente. Mi sembra altrettanto desiderabile ottenere una dimostrazione diretta di questa notevole asserzione di Cantor...* [3, pag. 169]

La questione centrale, qui denotata come *problema del buon ordinamento* e che Hilbert formula esclusivamente per il continuo, consiste nel chiedersi se ogni insieme può essere ben ordinato. E' opportuno dunque precisare cosa si intende:

Definizione 1.1.1. Un insieme A può essere *ben ordinato* se esiste una relazione S (dove aSb può essere letto come "a è minore di b") che ordina A e tale che ogni sottoinsieme non vuoto B di A abbia un elemento b che è minimo, cioè bSc per ogni $c \in B$.
La relazione S ordina A se:

i) per nessun $a \in A$ può valere aSa;

ii) per ogni $a, b, c \in A$, se aSb e bSc allora aSc.
Inoltre se vale anche che:

iii) per ogni $a, b \in A$, aSb oppure $a = b$ oppure bSa,
si dice che la relazione ordina totalmente A e che è una relazione d'ordine totale.

Osserviamo che se un insieme A è ben ordinato, la proprietà espressa dalla (*iii*) vale di conseguenza, perchè è garantita dall'esistenza del minimo dell'insieme $\{a, b\}$, per ogni $a, b \in A$.
E' importante notare che il *problema del buon ordinamento* non nasce come un vero è proprio problema ma piuttosto come un principio che Cantor formulò nel 1883 come una "*legge del pensiero*" secondo la quale ogni insieme può essere ben ordinato. Questa legge del pensiero fu molto discussa tra i matematici dell'epoca e lo stesso Cantor, dopo qualche tempo, sentiva l'esigenza di cercarne una dimostrazione. Fu

proprio con l'obiettivo di risolvere il *problema del buon ordinamento* che Zermelo ritenne doveroso formulare espliticitamente quella che secondo lui era un'assunzione che moltissimi matematici utilizzavano già da moltissimo tempo in maniera incosapevole, *AS*. In matematica infatti accade spesso che quando si introduce un nuovo concetto, alcune assunzioni fatte su di esso senza alcuna formulazione rigorosa, vengano usate inconsapevolmente fino ad ottenere teoremi e conseguenze delle assunzioni stesse.
La soluzione di Zermelo al *problema del buon ordinamento* scatenò una vera e propria bufera matematica di attacchi e difese che lo portarono ad iniziare nel 1908 la sua assiomatizzazione della teoria degli insiemi che comprendeva *AS* e la dimostrazione del teorema del buon ordinamento. Questa teoria, che si colloca sulla scia della formalizzazione del linguaggio della logica predicativa odierna della scuola di Hilbert, fu successivamente ripresa dal matematico tedesco Abraham Fraenkel e oggi è conosciuta come teoria di Zermelo-Fraenkel, abbreviata in **ZF** (senza *AS*).
In questo capitolo verrà messo alla luce il clima matematico-culturale in cui Zermelo si trovava e si analizzerà in dettaglio quella che in [1, par. 1.2] viene definita la "*preistoria dell'assioma di scelta* ", ovvero la strada lunga e intricata fatta di usi più o meno consapevoli e più o meno necessari di *AS*, che portò alla sua formulazione esplicita.

1.2 Uso inconsapevole di *AS*

Si ci potrebbe chiedere cosa si intende per *uso inconsapevole di AS* e una risposta ovvia è sicuramente quella che classifica come tali tutti gli usi di *AS* precedenti alla formulazione esplicita di Zermelo del 1904. Prima di quel momento infatti, la maggior parte dei matematici, quando utilizzava *AS* , lo faceva omettendo motivazioni rigorose, ad eccezione di alcuni matematici italiani, tra cui Peano, che anche prima della formulazione di Zermelo evitavano intenzionalmente l'uso di *AS* ritendolo insolito e azzardato. Ad ogni modo, per stabilire quando un'assunzione in matematica diventa consapevole, bisogna tener conto sia del fatto che essa si può esprimere in forme diverse equivalenti, sia del fatto che può essere usata sotto forme più deboli o più forti per scopi vari. Nel 1908 Zermelo propose una versione di AS che può essere utile per descrivere le sue forme più deboli e aiutare a rintracciare meglio i suoi primi usi inconsapevoli: la seguente definizione

Definizione 1.2.1. *Data una famiglia T di insiemi non vuoti, esiste una funzione f che assegna ad ogni membro A di T, un elemento $f(A)$ di A.*

Si può osservare che se T è finito, non solo AS è superfluo ma si può addirittura dimostrare; il caso più semplice per cui AS risulta non banale è quello in cui T è numerabile, dove per numerabile si intende un insieme che può essere mappato in $\mathbb{N}$ tramite una corrispondenza iniettiva e suriettiva. Questa forma più debole di AS attualmente viene chiamata "*assioma delle scelte numerabili*" (qui verrà denotata con ASN) e uno dei modi in cui viene formulata, tratto da [2, cap. 8], è il seguente:

Definizione 1.2.2 (ASN)**.** Per ogni insieme B e per ogni relazione binaria $P \subseteq \mathbb{N} \times B$ tra i numeri naturali e gli elementi di B,

$$\big(\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists y \in B \quad (nPy)\big) \Rightarrow \exists f \quad \big(f\colon \mathbb{N} \to B \quad \wedge \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (nPf(n))\big).$$

Per far capire come AS venisse usato senza accorgersene è opportuno esaminare ora alcuni teoremi fondamentali formulati prima di Zermelo, in cui si fa appello alle scelte in maniera inconsapevole. Dopo le controversie scatenate da AS , molti matematici hanno iniziato un lavoro di ricerca non solo per rintracciare i teoremi in cui era stato usato implicitamente nel corso della storia della matematica, ma anche per mettere in evidenza le diverse forme sotto le quali veniva coinvolto. Inoltre è importante cercare di distinguere gli usi inessenziali di AS , dove con una opportuna riformulazione o modifica della dimostrazione, l'appello intuitivamente comodo alle scelte può essere evitato, da quelli essenziali e si può risalire anche più indietro di Cantor. Qui con "*uso essenziale o inevitabile di AS* " si intende il caso in cui una certa proposizione φ può essere provata in **ZFC** (**ZF** con l'assioma di scelta) ma non in **ZF** :

$$\mathbf{ZFC} \vdash \varphi, \quad \mathbf{ZF} \not\vdash \varphi$$

Il primo teorema che viene riportato è stato utilizzato sia in teoria degli insiemi che in Analisi e sicuramente i primi studi su di esso risalgono ai lavori di ricerca di Cantor del 1870 che si stavano muovendo dallo studio dello sviluppo in serie trigonometriche delle funzioni verso quello degli insiemi numerici.

Teorema 1.2.1 (dell'unione numerabile). *L'unione finita o numerabile di una famiglia $\mathcal{F}$ di insiemi finiti o numerabili è numerabile.*

Dimostrazione (cenni). Supponiamo che la famiglia $\mathcal{F}$ sia numerabile e che gli insiemi A_i, $i = 1, 2, ...$, che ne fanno parte, lo siano (i casi finiti sono banali). Quindi ogni A_i avrà come elementi $a_{i,1}, a_{i,2}, ...$ e di conseguenza l'unione B di tutti gli A_i è data dagli elementi $a_{i,j}$, con i e j interi positivi. Usando il *metodo diagonale* di Cantor, con il quale aveva dimostrato che l'insieme dei numeri razionali è numerabile, si può concludere che B è numerabile. □

Sebbene l'uso di *AS* non sembri evidente, esso risulta necessario quando enumeriamo tutti gli elementi di tutti gli A_i. Infatti, ci sono infiniti A_i e per ognuno di essi ci sono diverse possibili biezioni con l'insieme degli interi positivi. Grazie ad *ASN* si può associare ad ogni A_i un unica biezione $a_i(j)$. In questo modo $a_i(j)$, o $a_{i,j}$, sono ben definiti. L'uso di *ASN* per dimostrare questo teorema è inevitabile nel caso generale e infatti esiste un modello di **ZF** in cui *ASN* è falso e l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, sebbene sia non numerabile, è l'unione numerabile di insiemi numerabili.
Un altro esempio è dato da un teorema dimostrato mediante uso inconsapevole di *ASN* sia da Cantor nel 1895, che da Borel nel 1898, che da Russell nel 1902 e riguarda il *confine fra finito e infinito*, di cui si

parlerà nel prossimo capitolo (come si vedrà, senza *AS* questo confine non può essere ben tracciato).

Teorema 1.2.2. *Ogni insieme infinito A ha un sottoinsieme numerabile.*

Dimostrazione (cenni). La dimostrazione di Russell consisteva nell'osservare che siccome A è infinito, esistono $A_1, A_2, ...$ sottoinsiemi di A tali che per ongni n, A_n ha esattamente n elementi ed è un sottoinsieme di A_{n+1}. Il sottoinsieme numerabile di A è l'unione di tutti gli A_n. □

Sembra che Russell non si sia accorto del fatto che per determinare A_{n+1} a partire da A_n è necessario scegliere un elemento da $A \setminus A_n$. Poichè questo teorema richiede infinite scelte numerabili e non c'è nessuna regola ben precisa per determinarle, *ASN* è necessario. Esiste infatti anche in questo caso, un modello di **ZF** in cui un determinato insieme infinito di numeri reali non possiede un sottoinsieme numerabile.
Il terzo esempio di uso inconsapevole di *AS* è una proposizione che viene di solito chiamata "*principio di partizione*"; prima di enunciarlo è opportuno dare delle definizioni:

Definizioni 1.2.1.

- Si dice che due insiemi A e B sono equipotenti se esiste una corrispondenza biunivoca da A su B e si dice anche che la *cardinalità* di A è uguale a quella di B, si scrive $card(A) = card(B)$.
- $card(A) \leq card(B)$ se esiste una corrispondenza iniettiva da A in B, cioè A è equipotente ad un sottoinsieme di B.
- $card(A) < card(B)$ se esiste una corrispondenza iniettiva da A in B e nessuna corrispondenza siffatta può essere suriettiva.

Spesso per indicare la cardinalità di un insieme A useremo il simbolo (di Cantor) della doppia barra, ossia $\overline{\overline{A}}$: tuttavia, si noti che la cardinalità non viene definita esplicitamente.

Definizione 1.2.3. Si dice che un insieme M è ripartito in un insieme S di sottoinsiemi disgiunti se:

i . $S \subseteq \mathcal{P}(M)$ e $\emptyset \in S$;

ii . per ogni $u, v \in S$ se $u \neq v$ allora $u \cap v = \emptyset$;

iii . vale $M = \bigcup_{s \in S} s$.

Proposizione 1.2.1 (Principio di partizione)**.** *Se un insieme M viene ripartito in un insieme S di sottoinsiemi disgiunti, si ha che la cardinalità di S è minore o uguale a quella di M.*

In termini di funzioni f con dominio M, questa proposizione afferma che l'immagine di M tramite f, $f(M) = \{f(x) : x \in M\}$, ha cardinalità minore o uguale a quella di M.
Sebbene Cantor nel 1880, studiando la topologia della retta reale, avesse utilizzato un caso particolare del principio di partizione, la sua formulazione esplicita (anche se incompleta) è dovuta a Cesare Burali-Forti. Nel 1896 infatti, Burali-Forti aveva auspicato che fosse assunto come assioma il principio tradotto da [1]: "*ogni famiglia non vuota di classi è equivalente* [equipotente] *a una sottoclasse dell'unione*", analogo al principio di partizione, ma senza la condizione che gli insiemi siano a due a due disgiunti. Fu Russell ad accorgersi di questo errore e successivamente anche Bernstein che, come vedremo più avanti, usava spesso *AS* proprio nella forma del principio di partizione. Comunque è molto interessante osservare che nell'articolo del 1904, Zermelo, per sottolineare l'importanza del riconoscere la validità di *AS* , fa riferimento proprio al principio di partizione :

> *Invero, questo principio logico* [AS] *non può essere ridotto a uno più semplice, ma è usato inconsapevolmente in numerose deduzioni matematiche. Ad esempio la validità generale del teorema che il numero di parti in cui un insieme è diviso è minore o uguale al numero dei suoi elementi* [principio di partizione] *non può essere dimostrato altrimenti che pensando che ciascuna delle parti in questione venga correlata a uno dei suoi elementi.* [3, pag. 180]

In generale, come afferma lo stesso Zermelo, la dimostrazione di questo principio si basa sul "*selezionare*" un elemento da ogni insieme di S, in modo tale da ottenere una biezione da S in un sottoinsieme di M e dunque AS risulta necessario. Anche se oggi non sappiamo ancora se il principio di partizione sia una forma più debole di AS o sia equivalente ad esso, esiste un modello di **ZF** in cui il principio è falso. Si veda [1, par. 1.2].
Come ultimo esempio, si considera il seguente teorema, strettamente collegato al *problema del buon ordinamento* :

Teorema 1.2.3 (Tricotomia dei cardinali)**.** *Per ogni coppia di cardinalità n ed m, o $m < n$ o $m = n$ oppure $m > n$.*

Se vogliamo formularlo equivalentemente, in termini di insiemi, il teorema afferma che dati due insiemi A e B, essi sono sempre confrontabili, cioè almeno uno dei due è equipotente ad un sottoinsieme dell'altro. Questo teorema fu dimostrato per la prima volta da Zermelo come corollario del teorema del buon ordinamento a cui è equivalente AS . Come si vedrà nelle prossime sezioni, il problema della tricotomia dei cardinali interessò non solo Zermelo, ma anche tutti gli altri ricercatori che si erano messi sulla strada aperta da Cantor. Anche quest'ultimo, in un lavoro del 1895, i "*Beiträge*", aveva messo in evidenza la tricotomia senza dimostrarla e quattro anni dopo, nella loro corrispondenza epistolare, cominicò a Dedekind che il teorema 1.2.3 seguiva dal fatto che ogni insieme può essere bene ordinato. In effetti l'equivalenza tra la tricotomia dei cardinali e il teorema del buon ordinamento fu provata nel 1915 da Friedrich Hartogs.

1.3 Sulle tracce di *AS*

I quattro esempi analizzati in precedenza, insieme al *problema del buon ordinamento* e al confine tra finito e infinito, rappresentano la trama e l'ordito con cui è stata tessuta la storia di AS . Per capire in maniera più approfondita come si è arrivati alla formulazione esplicita di AS del 1904, è opportuno ricercare le sue tracce anche in ambiti diversi della teoria degli insiemi. Con questo scopo, seguendo [1], indicheremo in questa sezione, quattro stadi o fasi principali dell'uso delle scelte in diversi settori della matematica.

Il primo stadio consiste nello scegliere un elemento non specificato da un singolo insieme e ne troviamo le prime tracce negli *Elementi* di Euclide, se non prima. Qui l'uso delle scelte può essere visto come una prima forma del metodo di generalizzazione: per dimostrare che un certo enunciato vale in generale, si sceglie un elemento arbitrario ma ben definito e si procede con la dimostrazione per questo elemento. Questa fase include anche le scelte di più elementi, uno da ogni insieme di una famiglia *finita*. E' importante osservare che AS non è necessario per la scelta di un elemento da un singolo insieme, anche se esso è infinito; basta infatti ricondursi a determinate regole di inferenza come la generalizzazione. Per induzione sui numeri naturali, questa procedura può così essere estesa ad ogni famiglia finita di insiemi.
Il secondo stadio inizia quando un matematico fa uso di infinite scelte attraverso una regola ben precisa ed è proprio quando questa regola viene omessa ma è possibile, che inizia il terzo stadio.
Nel momento in cui risultava difficile fornire una regola per la selezione di infiniti elementi, si aprivano le porte al quarto stadio dell'uso delle scelte. Fu proprio Cantor, come vedremo a breve, che nel 1871 fece uso per la prima volta di infinite scelte arbitrarie per le quali non poteva dare alcuna regola. Egli non si accorse che l'impossibilità di specificare la regola di scelta stava aprendo le porte al quarto stadio, nonchè all'utilizzo di un'importante ma inconsapevole assunzione.
Fu attraverso queste quattro fasi importanti che emerse la formulazione di Zermelo di AS , anche se fino agli inizi del 1900, la matematica si basava ancora su processi costruttivi: per provare l'esistenza di un oggetto matematico era ritenuto necessario darne un metodo di costruzione.

Vediamo adesso alcuni esempi tratti da [1, par. 1.2], che saranno utili a capire meglio quanto detto fin'ora.

Esempio. Nel 1801 Gauss pubblicò il lavoro più importante di quel periodo nell'ambito della teoria dei numeri, *Disquisitiones Arithmeticae.* A proposito delle forme quadratiche binarie del tipo $ax^2 + 2bxy + cy^2$, $(a, b, c \in \mathbb{Z})$ mostrò che per quelle forme con un dato discriminante (in verità usava il termine "determinante") $d = b^2 - ac$, esistevano un unico intero n e una certa relazione d'equivalenza che le partizionava in esattamente n classi. La relazione di cui parlava Gauss è così definita : due forme A e B sono equivalenti se hanno lo stesso discriminante e se esistono due trasformazioni lineari a coefficienti interi, una che trasforma A in B e l'altra che fa il viceversa. Riconoscendo il fatto che era possibile scegliere un rappresentante da ogni classe di equivalenza in diversi modi, Gauss diede un regola ben precisa con la quale selezionare unicamente un elemento da ciascuna classe. Poichè per ogni valore di d, egli effettuava solo un numero finito di scelte, possiamo dire che questo esempio si colloca al confine tra il primo e il secondo stadio: fissato d, si hanno n scelte, ma $d \in \mathbb{Z}$...

Il prossimo esempio aiuta a capire il passaggio al terzo stadio e non riguarda più la teoria dei numeri, bensì l'Analisi matematica.

Esempio. Nel 1821 Cauchy dimostrò una versione del teorema del valore intermedio:

Teorema 1.3.1. *Ogni funzione a valori reali e continua f che ha per dominio un intervallo chiuso $[a, b]$, tale che $f(a)$ e $f(b)$ hanno segni discordi, ha una radice in $[a, b]$.*

Cauchy notò che per ogni intero $m \geq 1$, nella successione

$$f(a), f\Big(a + \frac{b-a}{m}\Big), f\Big(a + \frac{2(b-a)}{m}\Big), ..., f(b)$$

compariranno delle coppie di elementi consecutivi con segno opposto, sia $f(a_1), f(b_1)$ una coppia siffatta, con $a_1 < b_1$ e tale che $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{m}$.

Si divide poi $[a_1, b_1]$ in m parti uguali e, come prima, si sceglie una coppia $f(a_2), f(b_2)$, con segno opposto e tale che $a_2 < b_2$, $b_2 - a_2 = \frac{b-a}{m^2}$. Procedendo alla stessa maniera, si ottengono le successioni $a_1, a_2, ...$ e $b_1, b_2, ...$ che convergono allo stesso punto p. Siccome f è continua su $[a, b]$ e per ogni n, i valori $f(a_n), f(b_n)$ hanno segni opposti, ne viene che $f(p) = 0$. Anche se Cauchy non stabilisce con precisione una regola da usare, per ottenere a_n e b_n ad ogni passo, avrebbe potuto decidere di selezionare la prima coppia che compariva da sinistra con la proprietà richiesta. In questo modo, poichè la regola di scelta non viene data ma è comunque possibile trovarne una, siamo nell'ambito di quello che abbiamo chiamato terzo stadio. [1, 1.2]
Si può osservare che il metodo utilizzato da Cauchy, della suddivisione ripetuta in intervalli, veniva attribuito a Bolzano, anche se di fatto quest'ultimo, nella sua dimostrazione del teorema 1.3.1, non lo utilizzò direttamente ma diede un algoritmo per approssimare l'estremo superiore di un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$, sommando potenze di 2. Secondo Cantor, il metodo della suddivisione in intervalli era stato utilizzato in alcune ricerche in teoria dei numeri da Lagrange, Legendre e Dirichelet, ma non sappiamo a quali pubblicazioni si riferisse. Comunque in alcuni casi che prevedono l'utilizzo di questo metodo, *AS* risulta necessario. [1, par. 1.2]

Il primo esempio che possiamo attribuire al quarto stadio, quello più interessante per lo scopo di questa sezione, risale al 1871 quando Eduard Heine scrisse un articolo di Analisi reale basato su una ricerca di Weierstrass e che fu pubblicato l'anno successivo. Heine era venuto a conoscenza del lavoro di Weierstrass tramite George Cantor, che aveva studiato all'università di Berlino sotto la guida di Weierstrass e che era diventato collega di Heine all'Università di Halle nel 1869. L'unico teorema dell'articolo che riguarda l'uso di scelte arbitrarie è attribuito da Heine stesso, a Cantor ed è il seguente:

Teorema 1.3.2. *Una funzione a valori reali f è continua in un punto p se e solo se è sequenzialmente continua in p.*

Il teorema di Cantor, stabilisce l'equivalenza delle due caratterizzazioni di continuità, che all'epoca suonavano:

continuità classica Definizione dovuta a Cauchy e Weierstrass; una funzione a valori reali f è continua in un punto p se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni x, $|x - p| < \delta$ implica $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$

continuità sequenziale Viene chiamata continuità secondo Heine; una funzione a valori reali f è sequenzialmente continua in un punto p se per ogni successione $x_1, x_2, ...$ che converge a p, la successione $f(x_1), f(x_2), ...$ converge a $f(p)$.

La dimostrazione di Heine, presa in prestito da Cantor, richiedeva l'uso implicito di AS per dimostrare che la continuità sequenziale in p implica la continuità. Infatti, come affermava Heine, se supponiamo che f non sia continua in p, allora esiste un certo $\varepsilon > 0$ tale che comunque si scelga un δ_0 piccolo a piacere, ci sarà sempre un $\delta > 0$, $\delta < \delta_0$ tale che $|f(p+\delta) - f(p)| \geq \varepsilon$. Fissiamo un δ_0 a piacere e poniamo $\delta = \delta'$, dove δ' è tale che $|f(p+\delta') - f(p)| \geq \varepsilon$; se dimezziamo δ_0 per $\delta = \delta''$, la nostra differenza non può essere minore di ε e lo stesso accade per $\delta = \delta'''$ che si ottiene se dimezziamo ancora il valore di δ_0 da cui eravamo partiti (cioè prendiamo la sua quarta parte), e così via. Siccome la successione $\delta', \delta'', ...$ converge a zero, allora $p + \delta', p + \delta'', ...$ converge a p ma la successione $f(p+\delta'), f(p+\delta''), ...$ non converge a $f(p)$, contrariamente all'ipotesi di continuità sequenziale in p.

Nè Cantor, nè Heine, si accorsero che in questa dimostrazione non poteva essere data alcuna regola per la costruzione della successione $\delta', \delta'', ...$ e che quindi era richiesta un'assunzione fondamentale, AS appunto. Solo dopo una decina di anni dalla formulazione di Zermelo, Michele Cipolla in Italia e Waclaw Sierpiński in Polonia, riconobbero che il teorema 1.3.2 era strettamente legato ad AS . Più tardi infatti è stato trovato un modello di **ZF** in cui esiste una funzione a valori reali

che è sequenzialmente continua ma non continua. [1, par. 1.2]
AS permette anche di risolvere il problema della dicotomia tra la nozione di punto di accumulazione e punto di limite sequenziale di un insieme con una tecnica simile a quella che Cantor usa per dimostrare che per una funzione, la continuità sequenziale in un punto implica la continuità in quello stesso punto. Dato un sottoinsieme A dello spazio euclideo n-dimensionale, p è un punto di accumulazione per A se ogni intorno di p contiene un qualche punto $q \in A \setminus \{p\}$; d'altra parte, se esiste una successione $a_1, a_2, ...$ di elementi di $A \setminus \{p\}$ che converge a p, allora p è un punto di limite sequenziale per A. Si può dimostrare che ogni punto di limite sequenziale di A è anche un suo punto di accumulazione, ma per provare il viceversa, come mostrò Sierpiński nel 1918, è necessario *ASN* (per la fonte originale si veda [1, pag. 15]). Sebbene le nozioni di punto di accumulazione e di punto di limite sequenziale determinino definizioni diverse di insieme chiuso, insieme perfetto e così via, gli analisti all'inizio del XIX secolo, le consideravano equivalenti in $\mathbb{R}^n$: siamo di fronte ad un altro esempio notevole di uso inconsapevole di *AS* .

Concludiamo questa sezione mostrando un caso significativo in cui, mediante determinati accorgimenti, l'uso di *AS* risulta non necessario e dunque evitabile: il teorema conosciuto con il nome di *teorema di Bolzano-Weierstrass* ma che in realtà è dovuto solo a Weierstrass.

Teorema 1.3.3. *Ogni sottoinsieme A infinito e limitato di $\mathbb{R}^n$ ha almeno un punto di accumulazione.*

Durante il 1865, Weierstrass formulò questo teorema per $n = 2$ in un articolo rimasto impubblicato e qualche anno dopo, Cantor, suo studente, si riferisce ad esso per il caso $n = 1$, senza però fornire alcuna dimostrazione. Solo nel 1874 Weierstrass dimostrò il teorema nella seguente forma:

> *Se una funzione f a valori reali, assume infiniti valori tra due numeri c e d, allora l'insieme dei valori in $[c, d]$ ha un*

punto di accumulazione b.

E' interessante osservare il metodo di dimostrazione di Weierstrass, ereditato da Bolzano: il punto di accumulazione b è dato da

$$k + \frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m^2} + \frac{k_3}{m^3} + ... \qquad (m \in \mathbb{N}, m \geq 2)$$

dove $k_i \in \{0, 1, ..., m-1\}$. Qui k è il più piccolo intero, maggiore o uguale a c, tale che l'intervallo $[k, k+1]$ contiene infiniti valori di f. Allo stesso modo, k_1 è il più piccolo intero tale che $[k + \frac{k_1}{m}, k + \frac{k_1+1}{m}]$ contiene infiniti valori di f e così via per k_2, k_3,... . In questo modo Weierstrass approssimò il punto di accumulazione b ed estese il teorema anche ad $\mathbb{R}^n$, senza usare le scelte arbitrarie in nessun caso. Sembra che questa dimostrazione non sia stata formalizzata finchè Salvatore Pincherle, che nel 1878 aveva assistito alle lezioni di Weierstrass a Berlino, la pubblicò nel 1880.
E' interessante osservare che anche se AS non risulta necessario per la dimostrazione del teorema di Bolzano-Weierstrass, esso è inevitabilmente richiesto quando si sostituisce il termine "*punto di accumulazione*" con "*punto di limite sequenziale*" :

Teorema 1.3.4. *Ogni sottoinsieme A infinito e limitato di $\mathbb{R}^n$ ha un punto di limite sequenziale.*

Nessuno afferrò l'importanza del distinguere queste due versioni del teorema, finchè Sierpiński studiò il problema qualche anno dopo. Comunque, nel 1892 Camille Jordan utilizzò le scelte arbitrarie per dimostrare il teorema 1.3.4 nel suo brillante articolo che illustra il ruolo che ha AS svolge nell'ambito dei teoremi sui punti di limite sequenziale.

Capitolo 2

Il confine tra finito e infinito

Abbiamo detto che *AS* svolge un ruolo fondamentale nella definizione del confine tra finito e infinito. Prima di vedere in dettaglio cosa si intende, analizzeremo brevemente l'evoluzione del modo di concepire l'infinito seguendo, in maniera cronologica, una strada in cui matematica e filosofia si intrecciano inevitabilmente.

2.1 Breve storia dell'infinito

Per quanto riguarda l'infinito, nella filosofia e nella matematica greca si percepiva un clima di profondo imbarazzo nei confronti di questo argomento, che portava a contraddizioni o, almeno, a paradossi. Per i Pitagorici ad esempio, l'infinito rappresentava qualcosa di incompleto, imperfetto, privo di confini, indeterminato, fonte di complicazione e confusione. Diversa la posizione di Melisso di Samo, Anassagora e Democrito, che sono i protagonisti del dibattito sulla possibilità dell'infinito di rappresentare una qualità positiva dell'essere. Fu Aristotele a considerare una duplice natura dell'infinito: in atto (o attuale) e in potenza (o potenziale). Con l'espressione infinito potenziale egli intendeva la possibilità di aggiungere sempre qualcosa a una quantità determinata senza che ci sia mai un elemento ultimo, mentre l'infinito attuale era inteso come collezione, compiutamente data. Aristotele bandì ai matematici di far uso dell'infinito attuale, consentendo un uso esclusivo dell'infinito potenziale:

> *Il numero è infinito in potenza, ma non in atto... Questo nostro discorso non intende sopprimere per nulla le ricerche dei matematici, per il fatto che esso esclude che l'infinito per accrescimento sia tale da poter essere percorso in atto. In realtà essi stessi allo stato presente non sentono il bisogno di infinito, ma di una quantità più grande quanto essi vogliono, ma pur sempre finita...* (Aristotele, *Physica*, Libro III, cap. 7, citato da [4, p.12])

Questa concezione aristotelica fu predominante per i successivi due millenni e anche lo stesso Galileo, che aveva cercato di liberarsi dell' *ipse dixit*, rimaneva perplesso innanzi ad alcuni aspetti dell'infinito attuale. E' noto che egli aveva osservato, a conferma dell'affermazione euclidea "il tutto è maggiore della parte", che i numeri naturali della forma n^2 sono di meno dei naturali stessi, proprio perchè esistono dei numeri che non sono della suddetta forma. D'altra parte era anche in grado di affermare che ci sono tanti naturali della forma n^2 quanti sono i naturali stessi, dato che tra i due insiemi esiste una corrispondenza biunivoca. In effetti Galileo aveva trovato un esempio di un insieme infinito secondo la definizione che darà Dedekind, ma essendo i tempi ancora poco maturi, egli rinuncia ad applicare le nozioni di *maggiore*, *minore* o *uguale* a quantità infinite.
L'infinito in atto ricompare ed acquista un ruolo estremamente importante a partire dalla metà del XIX secolo, quando vennero stampati postumi *I Paradossi dell'Infinito* di Bernard Bolzano. Sebbene Bolzano non avesse adeguatamente definito le nozioni di finito e di infinito, era già a conoscenza di alcune proprietà fondamentali per questo scopo. Una di queste suggerisce la seguente:

Definizione 2.1.1. Un insieme non vuoto A è finito se esiste un certo intero positivo n tale che A è equipotente all'insieme $\{1, 2, ..., n\}$; altrimenti A è infinito. [1, par. 1.3]

Un errore commesso da Bolzano, le cui tracce si ritrovavano già nella trattazione di Galileo, consisteva nell'associare e confondere un insieme infinito di numeri con la loro somma: questa confusione si manifestava quando egli considerava l'insieme degli interi positivi come esempio di una quantità infinitamente grande che però non poteva essere un numero infinitamente grande (credeva che questo numero non esistesse affatto). Secondo ciò che affermava Cantor, i problemi di Bolzano erano dovuti al fatto che mancava ancora l'idea di cardinale di un insieme. Inoltre, come si può osservare, la proprietà conosciuta da Bolzano, espressa dalla (2.1.1), presuppone la conoscenza degli interi positivi e scatena così un circolo vizioso se si cerca di definire gli interi positivi in termini di insiemi finiti.
Nel lavoro di Bolzano si riscontra anche quella che potrebbe essere una sorta di anticipatizione della definizione di insieme infinito data successivamente da Dedekind:

Definizione 2.1.2. Un insieme A è infinito (D-infinito) se esiste un suo sottoinsieme proprio B equipotente ad A. Altrimenti A è finito secondo Dedekind, o più brevemente D-finito. [1, par. 1.3]

Questa definizione di Bolzano rivela una forte ambiguità perchè non è chiaro cosa volesse intendere: se ogni insieme infinito A ha un sottoinsieme proprio B equipotente ad esso oppure se solo alcuni insiemi infiniti hanno un sottoinsieme siffatto: è importante sottolineare che in realtà, per Bolzano, più che una definizione, la (2.1.2) era una relazione che poteva sussistere tra due insiemi infiniti A e B. In realtà affermava parallelamente che un insieme A è infinito se ogni insieme finito è solo una parte di A.

Cantor analizza i *Paradossi dell'Infinito* nel 1883 apprezzando le considerazioni a proposito dell'infinito attuale, ma critica la decisione di Bolzano di rifiutare sia il concetto di numero infinito che quello di "potenza" di un insieme. Sebbene Cantor avesse preso in prestito da Bolzano i termini *Menge* (insieme) e *Vielheit* (moltitudine), il suo in-

teresse per l'infinito aveva avuto origine molto tempo prima.
Egli si laurea e prende la libera docenza, in teoria dei numeri, a Berlino, dove insegnavano Weierstrass, Kronecker e Kummer, trasferendosi poi a Halle, dove resterà tutta la vita e dove il professore anziano era Eduard Heine. Intorno al 1870, quando stava studiando le condizioni che permettono di rappresentare una funzione in serie trigonometrica in maniera univoca, inizia il suo tentativo di estendere il concetto di numero inaugurando la strada che porterà ai suoi numeri ordinali infiniti. Nel 1880 Cantor introduce dei veri e propri "simboli di infinito" ($\infty, \infty + 1, ...$) anche se questi resteranno semplicemente delle etichette per un po' di tempo (vedi [3]). Sebbene il suo modo di intendere il finito e l'infinito fosse simile a quello di Bolzano, egli non tentò di definire un confine tra queste due nozioni, nè di darne una definizione precisa. Nel suo articolo del 1878, dove dimostra che la potenza di $\mathbb{R}$ è uguale a quella di $\mathbb{R}^n$, Cantor descrive un insieme finito come un insieme la cui potenza è data da un intero positivo e afferma che per questi insiemi vale la proprietà che ogni sottoinsieme proprio ha potenza minore. Al contrario, un insieme infinito ha la stessa potenza di un suo sottoinsieme proprio. Dunque, pur conoscendo bene le proprietà espresse dalla (2.1.1) e dalla (2.1.2), Cantor non le usò mai come definizioni di insieme finito e infinito, ma senza darne una dimostrazione affermò la loro equivalenza: è proprio a questo punto che entra in gioco ancora una volta in maniera inconsapevole, AS .

2.2 AS e il finito

Durante la seconda metà del XIX secolo, molti matematici, tra cui Cantor e Dedekind, sostenevano che un insieme A è finito se e solo se è D-finito. Mentre l'altra implicazione non dava nessun problema, nello stabilire che la (2.1.2) implica la (2.1.1), questi matematici usavano AS implicitamente. Analizzeremo ora in dettaglio il ruolo delle scelte arbitrarie svolto in questo contesto e il pensiero significativo di alcuni matematici a tal proposito.

Nel 1882 Cantor credeva ancora che non fosse possibile dare una definizione semplice di insieme finito e rimase particolarmente sorpreso quando, nelle loro corrispondenze epistolari, Dedekind gli comunicò la sua definizione che non richiedeva l'utilizzo dei numeri naturali. Cinque anni dopo finalmente Cantor rivelò la sua definizione alternativa di insieme finito:

> *Per insieme finito si intende un insieme M che ha origine da un elemento iniziale aggiungendo uno dopo l'altro, nuovi elementi, in modo tale che l'elemento iniziale possa essere ottenuto da M rimuovendo uno alla volta gli elementi aggiunti in ordine inverso.* [3]

Non sappiamo precisamente cosa intendesse Cantor con "aggiungere e rimuovere uno dopo l'altro" ma comunque egli riuscì a dimostrare, applicando un sorta di principio di induzione matematica, che ogni insieme finito secondo la sua definizione, è anche D-finito. Senza alcuna dimostrazione però, affermò il viceversa appellandosi, com'era solito fare nei casi in cui usava *AS* implicitamente, alla banalità e semplicità del procedimento. Inoltre secondo Cantor, la differenza sostanziale tra un insieme infinito e uno finito è che mentre per il primo ordini differenti danno numerazioni diverse, per il secondo danno sempre lo stesso risultato. Oggi si potrebbe esprimere quanto creduto da Cantor, dicendo che per insiemi finiti i concetti di potenza e di ordine, di cardinale e ordinale, coincidono.
Il logico americano C.S.Pierce intorno al 1885 diede una definizione di insieme finito che si avvicina molto alla proprietà espressa dalla (2.1.2) e che può essere così intesa:

Definizione 2.2.1. Un insieme A è finito secondo Pierce se ogni funzione iniettiva $f : A \to A$ è anche suriettiva.[1, par. 1.3]

Qualche anno più tardi Pierce diede una seconda definizione di insieme finito che esprime sostanzialmente la proprietà data dalla (2.1.1):

> *Per finitezza, applicata ad una classe o ai numeri interi, si intende la proprietà di essere completamente "contato".* (ritradotto da [1, par. 1.3])

E' molto probabile che Pierce considerasse equivalenti queste due definizioni, facendo inconsapevolmente uso di AS . Tuttavia, poichè non ha fornito alcuna dimostrazione di questa equivalenza, non possiamo stabilire sotto quale forma fossero coinvolte le scelte arbitrarie.
Bisogna aspettare il 1888 per avere una teoria degli insiemi finiti formulata in maniera completa e rigorosa, messa a punto da Dedekind. Dopo aver formulato la sua definizione, la (2.1.2), egli dimostrò che ogni insieme equipotente a un insieme D-finito, è D-finito e che ogni insieme finito è D-finito. E' opportuno precisare ancora una volta, che fino a questo punto AS non risulta necessario e che invece è richiesto inevitabilmente nella dimostrazione del seguente teorema.

Teorema 2.2.1. *Ogni insieme D-finito è finito.*

Nè Bolzano, nè Cantor avevano fornito una dimostrazione dettagliata di questa affermazione, mentre Dedekind l'aveva dedotta in maniera rigorosa dalla seguente proposizione:

Proposizione 2.2.1. *Dato un insieme S, se per ogni intero positivo n, l'insieme $Z_n = \{1, 2, ..., n\}$ è equipotente ad un sottoinsieme di S, allora S è D-infinito.*

Osservazione 2.2.1 (sulla dimostrazione)**.** La dimostrazione di questa proposizione, fatta da Dedekind, richiedeva necessariamente AS nel momento in cui egli affermava che per ogni n, esiste una funzione iniettiva ben definita a_n, che manda Z_n in S. Ed è proprio con Dedekind e la sua selezione, per ogni n, di un a_n da un insieme non vuoto di applicazioni, che AS entra per la prima volta in gioco nella definizione del confine tra finito e infinito in maniera inequivocabile seppur ancora inconsapevole. [1, par. 1.3]

Il lavoro di Dedekind, attirò l'attenzione del matematico Rodolfo Bettazzi, che insegnava all'Accademia Militare di Torino. Nel Febbraio

1892, Bettazzi pubblicò due articoli, in uno dei quali discuteva l'utilizzo delle scelte arbitrarie di Dedekind, nella dimostrazione della (2.2.1):

> *La sua* [di Dedekind] *dimostrazione esige che si stabiliscano corrispondenze tra tutti i possibili* Z_n *e l'insieme proposto* S*. Ma siccome di tali corrispondenze ve n'è più di una fra ogni* Z_n *e* S*, e il Dedekind non determina una speciale tra esse, così devesene prendere una qualunque* "ad arbitrio", *e ciò fare per ciascun insieme di corrispondenze fra ogni* Z_n *e* S*, cioè si deve scegliere ad arbitrio un ente* [corrispondenza] *in ciascuno di infiniti insiemi, il che non pare rigoroso; a meno che non si voglia ammettere per postulato che tale scelta possa farsi, la qual cosa peraltro ci sembrerebbe inopportuna.* [6, p.512]

Prima di commentare le sue parole, ricordiamo che, seppur non ancora in ambito insiemistico, Bettazzi fu il primo a dare la definizione di insieme finito che qui è stata chiamata definizione 2.1.1. Ancora più importante è il fatto che il matematico torinese fu anche il primo a riconoscere che nel dimostrare l'equivalenza delle definizioni di insieme finito, era necessario fare una assunzione particolare e soprattutto che c'è una differenza notevole tra lo specificare un particolare oggetto e lo sceglierne uno arbitrariamente. Nonostante ciò, come si evince dalle sue parole, egli rifiutò del tutto l'idea di ammettere l'assioma che Zermelo introdurrà, preoccupato anche del fatto che Dedekind aveva scelto le infinite applicazioni da insiemi con infiniti elementi. Probabilmente, il suo rifiuto di *AS* derivava dall'influenza del pensiero di Peano, suo collega all'Accademia Militare.
Si potrebbe credere che le osservazioni di Bettazzi sul lavoro di Dedekind, dessero alla luce nel mondo dei matematici il dibattito sulle scelte arbitrarie ma non fu così, anzi possiamo dire che più di una nascita si trattò di un necrologio. Infatti, Cesare Burali-Forti, un altro collega di Bettazzi all'Accademia Militare, aveva pubblicato un articolo sugli insiemi finiti, in cui dimostrava il teorema 2.2.1, che non solo

convinse pienamente Bettazzi della sua validità, ma che mise anche fine all'interesse di quest'ultimo nei confronti delle scelte arbitrarie utilizzate da Dedekind. Burali-Forti adottò la definizione 2.1.2 di Dedekind, ma pensava che non fosse sufficiente per dimostrare tutte le proprietà desiderate degli insiemi finiti. Con questo scopo, come abbiamo visto nel paragrafo 1.2, introdusse un nuovo postulato:

> *Se S è una famiglia non vuota di classi* [insiemi], *allora S è equipotente ad una sottoclasse della sua unione.* (ritradotto da [1, par. 1.3])

Con l'aggiunta di questo postulato, Burali-Forti sviluppò la teoria degli insiemi D-finiti, in maniera forse più approfondita di quanto fece lo stesso Dedekind e dimostrò il teorema 2.2.1. Come abbiamo già detto, Russell scoprì che l'assunzione di Burali-Forti è falsa in generale, a meno che non si supponga S disgiunta : a quel punto non diventa altro che il *principio di partizione* che dipende da AS (vedi p.7). Inoltre, anche se si corregge il postulato di Burali-Forti, alcune sue dimostrazioni falliscono, in particolare quelle delle seguenti proposizioni:

Proposizione 2.2.2. *Se l'insieme A è D-finito, allora anche l'insieme delle parti di A è D-finito.*

Proposizione 2.2.3. *Se A è D-finito e B è D-infinito, allora A è equipotente ad un sottoinsieme di B.*

Proposizione 2.2.4. *L'unione si una famiglia D-finita, di insiemi D-finiti è D-finita.*

Ognuna di queste proposizioni, dipende da ASN ed è importante osservare che ognuna di esse implica che ogni insieme D-finito è finito [1, par. 1.3].

Dunque, nè Bettazzi che era stato persuaso dalla dimostrazione di Burali-Forti, nè nessun altro matematico, indagarono ancora il ruolo svolto dalle scelte arbitrarie in matematica, fino a che nel 1902, Beppo Levi non pubblicò un'analisi della tesi del matematico Felix Bernstein, allievo di Cantor. Nel suo articolo, Levi critica un'assunzione fatta da Bernstein, il principio di partizione, usando le seguenti parole:

> *Cionondimeno in questo medesimo lavoro si deve rilevare una nuova ammissione che mi pare derivi in fondo dallo stesso postulato dell'ordinabilità, quantunque in modo assai più nascosto, e tale da lasciare forse un momento di esitanza nel negare l'evidenza a questo nuovo ammesso.* (ritradotto da [1, par. 1.3])

Alcuni storici della matematica credono che nonostante Beppo Levi fosse contrario ad AS , fu il primo matematico, insieme a Peano, a formularlo espiclitamente, ancora prima di Zermelo. Probabilmente questa tesi si avvale del fatto che nel tentativo di dimostrare il principio di partizione, Levi evitò volontariamente le scelte arbitrarie e cercò di stabilire una legge precisa per le scelte, concludendo che il principio può essere dimostrato in tutti i casi in cui una regola ben determinata permetta di distinguere in maniera univoca, un elemento da ogni insieme della famiglia. Inoltre Fraenkel, nel 1958, afferma che Levi, per risolvere un problema riscontrato da Cantor e da Bernstein nel provare un certo risultato a proposito del *problema del buon ordinamento* , introdusse il principio delle scelte in una forma generale. Non è ben chiaro a cosa si riferisse Fraenkel, ma come sostenuto da [1], Beppo Levi, anche se nel 1918 propose una forma estremamente ristretta di ASN come alternativa all'Assioma di Zermelo, continuò a rifiutare e ad evitare AS senza alcun ripensamento. (vedi par. 6.4)
Comunque, i matematici che hanno provato a dimostrare l'equivalenza delle nozioni di finitezza hanno usato inconsapevolmente AS soprattutto per dimostrare il teorema 1.2.2: ogni insieme infinito ha un sottoinsieme numerabile. Come abbiamo già detto, questo teorema fu introdotto per la prima volta da Cantor e successivamente fu dimostrato anche da Borel e Russell sostanzialmente alla stessa maniera.

Osservazione 2.2.2. Una volta provato il teorema 1.2.2, per dimostrare che ogni insieme D-finito è anche finito, si prova l'affermazione equivalente che ogni insieme non finito è D-infinito. Si procede in questo modo: sia A un insieme non finito; la dimostrazione del teorema 1.2.2 prova che; esiste un suo sottoinsieme $B = \{x_0, x_1, ...\}$ numerabile. Si può definire allora l'applicazione successivo su B, $s(x_k) = x_{k+1}$ e prolungarla in questo modo su A:

$$f(x) = \begin{cases} s(x), & \text{se } x = x_k \text{ per un } k \\ x, & \text{se } x \neq x_k \forall k \end{cases}$$

La funzione f così definita è una corrispondenza biunivoca da A in $A \setminus \{x_0\}$. Dunque, essendo in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria, A è D-infinito.

Dopo la formulazione di AS del 1904, Zermelo affermò che l'equivalenza delle due definizioni di insieme finito viste, era una delle conseguenze dell'Assioma. Da quel momento in poi, molti matematici studiarono il problema e alcuni di essi, tra cui Russell e Whitehead pensavano che potessero esistere insiemi contemporaneamente infiniti e D-finiti. Oggi sappiamo con certezza che senza AS si possono dare diverse definizioni di finito o infinito che però potrebbero non risultare equivalenti, anche se, come affermava Tarski, l'equivalenza delle due definizioni qui analizzate ha un carattere altamente intuitivo, forse più dell'Assioma stesso [1, par. 1.3]

Capitolo 3

Il patrimonio di Cantor

Come si è visto fin'ora, la figura di Cantor ha un ruolo quasi sempre da protagonista nella storia delle scelte arbitrarie. La sua importanza è dovuta prima di tutto al fatto che la sua ricerca in teoria degli insiemi e in topologia degli insiemi di punti, generò in sostanza il primo gruppo di risultati in cui AS viene usato in maniera implicita ma essenziale. Di più, attraverso il suo lavoro e le sue scoperte, molti altri matematici iniziarono di conseguenza, a far uso delle scelte arbitrarie, tra questi anche quelli che, come Borel e Lebesgue, criticarono poi fortemente l'Assioma. Anche se fu il primo a parlare di principio del buon ordinamento che come sappiamo è strettamente collegato ad AS , Cantor non si accorse dell'utilizzo delle scelte arbitrarie, che passavano in secondo piano. La sua attenzione in un primo momento, era infatti rivolta alla dimostrazione di teoremi che riguardavano diversi settori della matematica, dall'Analisi alla topologia e solo in un secondo momento alla teoria degli insiemi vera e propria. In questo capitolo analizzeremo alcuni di questi risultati che Cantor lasciò in eredità al mondo matematico, in cui AS spesso interviene in lemmi da lui ritenuti troppo elementari per essere dimostrati in dettaglio.

3.0 Equipollenza di insiemi numerici

Il primo di questi risultati risale al 1877, quando Cantor stava cercando una dimostrazione al teorema che afferma che $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$ hanno la stessa potenza. Per provare questo teorema, Cantor voleva dimostrare che l'intervallo chiuso $[0, 1]$ conserva la sua potenza anche quando si rimuove dall'intervallo un'infinità numerabile di elementi. Con questo obiettivo, enunciò senza alcuna dimostrazione, il seguente lemma in una lettera a Dedekind:

Lemma 3.0.1. *Date due famiglie di insiemi a due a due disgiunti,* $\{A_k\}_{k=1,2,..}$ *e* $\{B_n\}_{n=1,2,..}$*, se* A_k *è equipollente* [equipotente] *a* B_k *per ogni* k*, allora l'unione di tutti gli* A_k *è equipollente all'unione di tutti i* B_k*.*

Cantor pensava gli A_k e i B_k come sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ e non come insiemi qualsiasi e qualche anno più tardi pubblicò una dimostrazione in cui non si trova traccia di AS . L'Assioma però è necessario per provare questo lemma; nello specifico, serve ASN nel momento in cui bisogna scegliere una biiezione tra gli insiemi per provarne l'equipotenza delle unioni.

3.1 Gli studi sugli insiemi derivati

Dopo aver completato i suoi studi sull'equipotenza in $\mathbb{R}^n$, Cantor rivolse la sua attenzione all'analisi degli insiemi derivati che aveva definito quando si occupava delle serie trigonometriche. Tra il 1879 e il 1884, pubblicò sei articoli in cui studiava la struttura topologica dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ iterando la sua nozione di insieme derivato. In questo contesto arrivò ad una serie di risultati importanti in cui spesso è richiesto il teorema 1.2.1 dell'unione numerabile, la cui validità, come abbiamo visto nel capitolo 1, dipende necessariamente da AS . Modernamente la sua definizione si formula così:

Definizioni 3.1.1.

- Dato un insieme P, il suo insieme derivato $P^{(1)}$ è l'insieme di tutti i suoi punti di accumulazione.
- Per ogni ordinale α, $P^{(\alpha+1)}$ è l'insieme derivato di $P^{(\alpha)}$.
- Se β è un ordinale limite, $P^{(\beta)} = \bigcap_{0<\alpha<\beta} P^{(\alpha)}$.

Osservazione 3.1.1. Abbiamo già visto cosa si intende per punto di accumulazione di un insieme (p. 12). E' importante osservare che se un insieme è limitato e contiene infiniti punti, ha sempre almeno un punto d'accumulazione (teorema di Bolzano-Weierstrass). Notiamo ancora che $P^{(n+1)} \subseteq P^{(n)}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e l'intersezione di tutti gli insiemi derivati di ogni ordine n di un insieme P, se non sono vuoti da un certo punto in poi, è un insieme, che Cantor denota con $P^{(\infty)}$ e successivamente, quando introduce il simbolo ω per distinguere l'infinito attuale da quello potenziale, con $P^{(\omega)}$.

Il teorema dell'unione numerabile, in questo caso, serve a Cantor per mettere in relazione la cardinalità di un insieme e il suo insieme derivato, grazie al seguente

Teorema 3.1.1. *Se P è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ e $P^{(\omega)}$ è numerabile, allora anche P è numerabile.*

Dimostrazione (cenni). La dimostrazione di Cantor per questo teorema, si basava sulla decomposizione di $P^{(1)}$ in $\bigcup_m P^{(m)} \setminus P^{(m+1)}$, e $P^{(\omega)}$. Siccome $P^{(\omega)}$ è numerabile per ipotesi e ogni insieme $P^{(m)} \setminus P^{(m+1)}$ di punti isolati è finito o numerabile, allora $P^{(1)}$ è numerabile per il teorema dell'unione numerabile. Così anche P lo è. □

In realtà, il teorema dell'unione numerabile serve ad ottenere una differente versione del precedente teorema, in cui Cantor sostituisce ω con un qualsiasi ordinale "numero" ordinale finito, oppure numerabile:

Teorema 3.1.2. *Se P è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, tale che $P^{(\alpha)} = \emptyset$ per un certo ordinale α finito o numerabile, allora sia $P^{(1)}$ che P sono numerabili.*

Questo risultato, è un primo passo verso il teorema posteriore di Cantor-Bendixson di cui ora parleremo; esso venne formulato originariamente da Cantor con un errore che presto scoprì il giovane matematico svedese Ivar Bendixson, da qui il nome del teorema. Prima della sua correzione, il teorema affermava che :

> *Se $P^{(1)}$ è un sottoinsieme non numerabile di $\mathbb{R}^n$, allora $P^{(1)}$ può essere partizionato in maniera univoca in un insieme perfetto V* [cioè un insieme uguale al proprio derivato] *e uno finito o numerabile S tale che per un certo ordinale α, $S \cap S^{(\alpha)} = \emptyset$* [Cantor dice "per un α minore di Ω" che è il più piccolo ordinale non numerabile e che nella teoria moderna viene indicato con ω_1]. [1, parr. 1.4-1.5]

Dopo la correzione di Bendixson, Cantor riformulò il teorema per gli insiemi chiusi e cioè nella forma in cui il teorema di Cantor-Bendixson è più conosciuto:

> *Ogni sottoinsieme non numerabile e chiuso di $\mathbb{R}^n$ può essere partizionato in un insieme perfetto e uno finito o numerabile.*

Nel dimostrare questo teorema, sia Cantor che Bendixson fecero uso del teorema dell'unione numerabile per provare che se $P^{(1)}$ è non numerabile, allora $P^{(\Omega)}$ è perfetto e di nuovo per mostrare che l'insieme S, definito come $P^{(1)} \setminus P^{(\Omega)}$, è finito o numerabile. Nonostante ciò, qualche anno più tardi Sierpiński ne diede una dimostrazione che non faceva alcun uso dell'Assioma, anche se fece notare che se nell'enunciato si sostituiscono i termini *chiuso* e *perfetto*, rispettivamente con *sequenzialmente chiuso* e *sequenzialmente perfetto*, allora tutte le dimostrazioni conosciute fanno uso necessariamente di AS . [1, par. 1.4]

3.2 Il problema del buon ordinamento e l'ipotesi del continuo

La straordinaria potenza intuitiva dell'approccio di Cantor lo ha reso protagonista anche nella formulazione di alcune proposizioni importanti che noi oggi sappiamo essere logicamente equivalenti ad AS ma che furono enunciate prima della pubblicazione di Zermelo del 1904, senza alcun sospetto della loro equivalenza con l'Assioma. Fanno parte di questi risultati il *principio del buon ordinamento*, che come sappiamo fu formulato da Cantor prima come legge del pensiero e poi come problema, e la *tricotomia dei cardinali* (teorema 1.2.3), di cui abbiamo già parlato nel capitolo 1. Approfondiremo ora il lavoro di Cantor a tal proposito soffermandoci anche sul suo approccio nei confronti di un altro importante risultato che è l'*ipotesi del continuo*.
Quando nel 1878 Cantor enunciò la *tricotomia dei cardinali* sempre nell'articolo in cui provava l'equipotenza di $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{R}^n$, piuttosto che considerarla come un assioma o una proposizione da dimostrare, la presentò come una conseguenza diretta della sua definizione di equipotenza:

> *Se due insiemi di punti M ed N non hanno la stessa potenza, o M ha la potenza di un sottoinsieme proprio di N, oppure N ha la potenza di un sottoinsieme proprio di M. Nel primo caso diremo che la potenza di M è minore di quella di N, nel secondo caso che è maggiore.* (ritradotto da [1, parr. 1.4-1.5])

In questo modo, Cantor credeva di definire semplicemente la relazione (d'ordine debole) "minore" o "maggiore" tra cardinali e non si rese conto che escludere l'esistenza di insiemi M ed N, nessuno dei due equipotente ad un sottoinsieme proprio dell'altro, non era affatto un qualcosa di banale. Sottolineiamo anche il fatto che gli insiemi considerati in questo enunciato non sono generici, ma sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$. Solo una decina di anni più tardi Cantor formulò la tricotomia per insiemi arbitrari aggiungendo un'analisi critica ancora una volta senza alcuna dimostrazione.

L'anno di svolta della ricerca di Cantor fu il 1882 quando, ormai determinato a sviluppare la sua teoria degli insiemi, introdusse il nuovo concetto del *buon ordinamento.* In quella occasione, scrisse con grande entusiasmo, una lettera a Dedekind, in cui spiegava il suo desiderio di estendere la sequenza degli interi positivi in maniera naturale e sottolineava l'importanza di considerare come numeri veri e propri quelli che aveva chiamato i "simboli dell'infinito", $\infty, \infty+1, \infty+2, ...$ e che aveva usato quando studiava gli insiemi derivati di cui abbiamo parlato. Fu sempre in una lettera a Dedekind dello stesso anno che introdusse il numero ordinale ω come limite della successione $1, 2, ...$: questo procedimento è quello che Cantor chiama *secondo principio di generazione* e che usa per giustificare la formazione degli ordinali limite. Il *primo principio di generazione* era invece quello che permetteva di aggiungere 1 ad ogni ordinale, un'operazione che gli dava modo di ottenere non solo i numeri ordinali finiti, ma anche $\omega + 1$ e tutti gli ordinali successori. Rimane poi il *terzo principio*, che è un principio di limitazione per le classi numeriche: esso richiede che per ciascun numero α della $\beta + 1$-esima classe numerica, l'insieme di tutti gli ordinali che lo precedono abbia la potenza della classe numerica di ordine β. Così, dato che la *prima classe numerica* per Cantor è numerabile ed è costituita dai numeri finiti, o meglio dagli ordinali finiti (quelli che oggi nel sistema **ZF** sono chiamati numerali di Von Neumann), la seconda classe sarà l'insieme di tutti gli ordinali numerabili. Attraverso questo procedimento, Cantor immaginava una successione illimitata di classi numeriche che collegano il concetto di ordinale e quello di cardinale: risulta possibile riconoscere una successione di potenze di cui ciascuna è la potenza immediatamente maggiore della precedente; in particolare la potenza della seconda classe numerica è l'immediato successore della potenza della prima. Ecco quindi come Cantor definisce la successione dei cardinali che più tardi chiamerà aleph, le potenze degli insiemi infiniti ben ordinati. Nella stessa lettera a Dedekind, Cantor mette in evidenza la relazione esistente tra i nuovi nuovi ordinali definiti e il continuo $\mathbb{R}$, dando alla congettura che aveva formulato qualche anno prima, il nome di "*teorema delle due classi*" :

Teorema 3.2.1. *Ogni sottoinsieme infinito di $\mathbb{R}$, o è numerabile o ha la potenza del continuo.*

Questa si potrebbe definire la prima formulazione dell'*ipotesi del continuo*, anche se sembra che Cantor non abbia mai usato questo appellativo. Inoltre, la lettera a Dedekind, conteneva anche un nuovo enunciato che afferma che ogni sottoinsieme infinito della seconda classe numerica o è numerabile o ha la potenza della classe. E' molto probabile che questi due teoremi suggerirono a Cantor una versione più forte dell'*ipotesi del continuo*, enunciata sempre nella lettera:

Teorema 3.2.2. *$\mathbb{R}$ ha la potenza della seconda classe numerica.*

Se utilizziamo la sua notazione degli aleph, l'*ipotesi del continuo* 3.2.2, afferma che

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Il teorema enunciato a Dedekind infatti, suggerisce che non esite nessun m tale che $\aleph_0 < m < \aleph_1$, mentre il teorema 3.2.1 implica che non esiste nessun m tale che $\aleph_0 < m' < card(\mathbb{R})$. Dalla tricotomia, che Cantor dava per buona, seguiva che $\mathbb{R}$ è equipotente alla potenza $\aleph_1$ della seconda classe numerica, dato che non avrebbe sottoinsiemi m' equipotenti alla II classe numerica.
Dopo il 1882, Cantor preferì la forma dell'*ipotesi del continuo* espressa dal teorema 3.2.2 che coinvolgeva anche il buon ordinamento, uno dei teoremi che cercava di dimostrare senza però avere successo. Osserviamo che la differenza tra le due forme dell'ipotesi è rilevante per l'assioma di scelta: come Cantor sapeva, il teorema 3.2.2 implica che $\mathbb{R}$ può essere ben ordinato, mentre il teorema 3.2.1 no. Di più, il teorema 3.2.2 è equivalente alla congiunzione del teorema 3.2.1 e dell'esistenza di un buon ordine per $\mathbb{R}$. Comunque, usando l'*ipotesi del continuo* 3.2.2, Cantor provò che l'insiemi dei numeri reali algebrici può essere ben ordinato e da qui ne dedusse che anche per $\mathbb{R}$ valeva la stessa cosa.

Il salto successivo che fece fu quello di ipotizzare che ogni insieme può essere ben ordinato, questa volta non più in corrispondenza epistolare con Dedekind, ma pubblicando l'articolo *Grundlagen*:

> *Il concetto di insieme bene ordinato risulta essere fondamentale per tutta la teoria delle varietà. In un successivo articolo discuterò la legge del pensiero che afferma che è sempre possibile mettere ogni insieme ben definito nella forma di un insieme bene ordinato; a me questa sembra una legge del pensiero fondamentale e di eccezionale rilevanza, notevole soprattutto a motivo della sua validità generale.* (ritradotto da [1, parr. 1.4-1.5])

Nonostante la promessa di ritornarci su, Cantor, così come per l'*ipotesi del continuo*, non riuscì mai a pubblicare una giustificazione del buon ordinamento che lo soddisfacesse pienamente. Comunque ritornando all'*ipotesi del continuo*, possiamo notare che è strettamente collegata alla formulazione di Cantor del *teorema di equivalenza* del 1882, oggi conosciuto come teorema di Cantor-Schröder-Bernstein (dimostrato prima da Schröder con un piccolo errore e poi corretto da Bernstein nel 1897):

Teorema 3.2.3. *Se $M'' \subseteq M' \subseteq M$ ed M ha la stessa potenza di M'', allora M ha anche la stessa potenza di M'.*

In un primo momento, Cantor pensava di non essere in grado di dimostrare questo teorema, ma poi si rese conto che era una conseguenza del teorema 3.2.2. Però la sua dimostrazione valeva solo nel caso in cui gli insiemi in questione fossero sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$, mentre non riuscì mai a provare il teorema nel caso generale. Ad ogni modo, il passo forse più importante che fece Cantor verso la dimostrazione dell'*ipotesi del continuo*, fu quello di provare in un articolo del 1884 un caso particolare del teorema 3.2.1:

> *Se un sottoinsieme infinito A di $\mathbb{R}$ è chiuso, allora A o è numerabile o ha la potenza del continuo.*

Nella dimostrazione di questo teorema, Cantor combinò il teorema di Cantor-Bendixson con la proposizione che afferma che ogni sottoinsieme perfetto di $\mathbb{R}$ ha la potenza del continuo. Concluse poi l'articolo, esprimendo il suo desiderio di dimostrare che $\mathbb{R}$ stesso ha la potenza della seconda classe numerica per cui sperava che gli tornasse utile un risultato che aveva provato nell'articolo stesso: non esiste alcun insieme con potenza compresa tra la potenza della prima classe numerica e quella della seconda.

Il 26 Agosto 1884, Cantor scrisse a Mittag-Leffler, editore della rivista *Acta Mathematica*, sulla quale spesso pubblicava degli articoli, comunicandogli di aver trovato una strada per dimostrare che il continuo ha la potenza della seconda classe. La sua idea si basava sul provare l'esistenza di un insieme chiuso M di numeri reali con la potenza della seconda classe. Poi siccome per il teorema di Cantor-Bendixson, M può essere decomposto in un insieme perfetto P e uno numerabile, allora P deve necessariamente avere la potenza della seconda classe numerica. Ma Cantor aveva provato che ogni insieme perfetto P deve avere la potenza del continuo e di conseguenza si ottiene che $\mathbb{R}$ ha la potenza della seconda classe. Purtroppo però Cantor non riuscì a trovare un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ chiuso e con potenza $\aleph_1$ e qualche mese più tardi comunicò a Mittag-Leffer non solo di essersi sbagliato, ma anche che iniziava a dubitare della validità sia dell'*ipotesi del continuo* che del teorema del buon ordinamento. Alternando speranze di dimostrazione in una direzione a certezze di dimostrazione in un'altra, Cantor fu spinto da Mittag-Leffler a non pubblicare altri risultati prima di aver dato una svolta positiva alle sue ricerche.

Abbandonò definitivamente lo studio sull'*ipotesi del continuo* e si concentrò esclusivamente sul problema del buon ordinamento, cercando di definire bene il legame tra il concetto di numero ordinale e quello di numero cardinale. Come abbiamo visto in sostanza questo nesso per Cantor consisteva nel vedere ogni cardinale infinito come la potenza di una classe numerica. Usando la notazione degli aleph, questo si traduce nel cosiddetto *teorema degli aleph* che afferma che ogni cardinale

infinito è un aleph. Il teorema degli aleph è equivalente al buon ordinamento, ma il legame non era affatto evidente per Cantor che continuava ad invocare questo principio o la tricotomia dei cardinali nelle dimostrazioni di diverse proposizioni senza però mai andare al nocciolo della questione.
Nel 1895 il suo atteggiamento stava cambiando nei confronti di questi problemi rimasti aperti: voleva assolutamente trovare una dimostrazione sia per il principio del buon ordinamento che per la tricotomia dei cardinali. Così in quello stesso anno, nei *Beiträge* propone la tricotomia nella seguente forma:

> *Dati* m *ed* n *due cardinali qualsiasi, allora o* $m = n$*, o* $m < n$ *oppure* $n < m$.

Due anni più tardi, Cantor era sicuro di aver trovato una dimostrazione del teorema del buon ordinamento e la scrisse in una lettera indirizzata ad Hilbert, che però è andata perduta. Fortunatamente è stata ritrovata una spiegazione simile anche in alcune lettere indirizzate a Dedekind: una lettera del 1899 si apre con un chiarimento sulla distinzione tra due tipi di moltitudini: il primo tipo, che Cantor chiamava moltitudini assolutamente infinite o inconsistenti, sono tali che assumendo che tutti i suoi elementi "siano una unità" (*Zusammensein*), si ha una contraddizione e quindi è impossibile concepire tale moltitudine come una unità; il secondo tipo invece comprende le moltitudini che possono essere considerate come un'unità o un singolo oggetto, senza incorrere in contraddizioni e vengono definite moltitudini consistenti o insiemi. Dopo questa precisazione, Cantor cerca di collegare i due tipi di moltitudini alle nozioni di numero cardinale e di tipo d'ordine: ogni insieme, o moltitudine consistente, possiede un numero cardinale e ogni insieme ordinato ha un certo tipo d'ordine; le moltitudini inconsistenti invece, non possiedono nessuno dei due. Usando queste osservazioni, Cantor considera la moltitudine di tutti i numeri ordinali, che qui indica con Ω. Sulla base dei risultati che aveva già ottenuto sulla confrontabilità e sulla transitività della relazione d'ordine, poteva affermare che "il sistema Ω, nel suo ordine naturale costituisce una sequenza (una moltitudine bene ordinata) ma non un insieme". Se Ω fosse un insieme, avrebbe un ordinale δ maggiore di tutti i numeri in Ω, ma δ apparterrebbe anche a Ω e sarebbe $\delta < \delta$, che è una contraddizione. Dunque Ω è inconsistente e lo stesso la totalità degli aleph, che è in corrispondenza biunivoca con quella degli ordinali. A questo punto, Cantor si chiedeva se la moltitudine della totalità degli aleph contiene ogni cardinale infinito, oppure se al contrario, si poteva trovare un certo insieme infinito la cui cardinalità non si può esprimere con un aleph. Arrivò quindi a sostenere che un simile insieme non può esistere: se V fosse una moltitudine la cui cardinalità non è un aleph, allora Ω sarebbe "proiettabile" con una corrispondenza iniettiva, in V e si otterrebbe una sottomoltitudine V' equipotente a Ω. Quindi V' è inconsistente e lo stesso è V. Da qui ne viene che siccome i numeri cardinali sono definiti solo per moltitudini consistenti, ogni cardinale infinito è un aleph. In questo modo il teorema degli aleph e dunque anche quello del buon ordinamento, risulterebbero dimostrati. Per di più, Cantor affermò che siccome dati due ordinali α e β vale la legge di tricotomia:

$$\alpha = \beta \quad o \quad \alpha < \beta \quad oppure \quad \alpha > \beta,$$

vale anche quella per i cardinali

$$\aleph_\alpha = \aleph_\beta \quad o \quad \aleph_\alpha < \aleph_\beta \quad oppure \quad \aleph_\alpha > \aleph_\beta$$

.

Studiando i lavori di Cantor, Zermelo nel 1932 commentò a lungo la sua dimostrazione del teorema degli aleph. Quello che non lo convinceva, era la presunta esistenza di una mappa iniettiva da Ω in V :

> *Evidentemente Cantor pensava di assegnare ogni numero ordinale in Ω, ad elementi successivi ed arbitrari di V, in modo tale che ogni elememto di V viene utilizzato una sola volta... inoltre si presuppone di poter fare scelte arbitrarie successive e definire così un sottoinsieme arbitrario V' di V, cosa*

che non si potrebbe fare con le condizioni date. Solo usando l'assioma di scelta, che postula la possibilità di fare scelte simultanee e che Cantor usa ovunque in maniera inconsapevole e istintiva senza averlo mai formulato esplicitamente, si può definire un simile sottoinsieme di V. Di più la dimostrazione viene fatta per moltitudini inconsistenti, anzi forse include concetti contraddittori e questo è logicamente inammissibile. Dunque l'editore, [Zermelo stesso], *ha basato la sua dimostrazione sul teorema del buon ordinamento e quindi in realtà sull'assioma di scelta, senza usare le moltitudini inconsistenti.*(ritradotto da [1, parr. 1.4-1.5])

Zermelo continua analizzando in dettaglio la differenza tra quelle che aveva chiamato scelte successive di Cantor, e le scelte simultanee, permesse dall'Assioma. Il secondo problema che attira l'attenzione di Zermelo è quello delle classi inconsistenti che erano pericolose per la contraddittorietà dei risultati ottenuti da Cantor. Uno di questi è sicuramente la dimostrazione dell'inconsistenza di Ω che può essere vista come una prima formulazione di quello che oggi conosciamo con il nome di *paradosso di Burali-Forti*. A differenza di quanto avevano fatto Frege e Russell, Cantor considerava questi paradossi non come qualcosa di catastrofico, bensì come un nuovo modo di fare importanti scoperte matematiche. Infatti, a proposito di quanto aveva scoperto sulle moltitudini inconsistenti, Cantor affermava che non sono altro che collezioni troppo grandi per essere trattate come un insieme. Inoltre era molto vicino a scoprire che queste moltitudini inconsistenti possono essere anche trattate come una unità, a patto che non vengano considerate come elementi di altre classi (in effetti fu von Neumann a riconoscerlo per prima). Comunque il problema delle moltitudini inconsistenti, sembra che abbia indotto Cantor ad esaminare la consistenza dei suoi aleph. Nella stessa lettera a Dedekind del 1899 dichiarò che la consistenza degli insiemi finiti non poteva essere dimostrata ed era semplicemente una "verità indimostrabile", che lui chiamava *assioma dell'aritmetica.* Allo stesso modo affermò che anche la consistenza di ogni aleph è una verità indimostrabile, formulando quello che chiamava *assioma dell'aritmetica transfinita estesa*. Probabilmente, quest'ultimo è l'unico assioma che Cantor formulò direttamente per la teoria degli insiemi, data la sua ideologia platonistica che lo poneva in un atteggiamento di "scoperta" della verità piuttosto che di ricerca di quelle che potevano essere le assunzioni minime da fare per lo sviluppo di un sistema deduttivo. Infatti in un'altra lettera a Dedekind, sembra che Cantor abbia formulato delle assunzioni che si avvicinano molto all'assioma dell'unione, di separazione e di rimpiazzamento dovuti a Zermelo e a Fraenkel senza mai considerarli però degli assiomi veri e propri.

3.3 Problemi irrisolti

Quando Hilbert al congresso di Parigi del 1900, mise in evidenza i problemi rimasti irrisolti nonostante il contributo di Cantor, come l'ipotesi del continuo e il problema del buon ordinamento, i matematici, soprattutto in Germania e in Inghilterra, iniziarono attivamente a cercare delle risposte. Concludiamo dunque questo capitolo, mettendo in evidenza i risultati più importanti dei matematici che si erano messi sulla strada aperta da Cantor a proposito di quello che sappiamo fu il filo conduttore della soluzione di Zermelo al problema del buon ordinamento: le infinite scelte arbitrarie.

Ad esempio, nella sua tesi di dottorato del 1901, Bernstein, influenzato da Cantor e supervisionato da Hilbert, si interessò a due problemi che stavano alla base della teoria degli insiemi. Il primo problema riguardava quello che chiamava *problema del continuo di Cantor*: quante potenze distinte di un insieme A (che è un sottoinsieme infinito di $\mathbb{R}$) possono esistere? Cantor aveva risposto due, ma Bernstein voleva cercare di approfondire la questione. Si interessò dunque anche all'approccio di Cantor attraverso gli aleph e provò che

$$\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$$

usando l'insieme $\mathcal{O}$ di tutti i tipi d'ordine degli insiemi numerabili e la definizione della seconda classe numerica che è formata da tutti i tipi d'ordine degli insiemi numerabili e ben ordinati.

Dimostrazione (cenni). Poichè la potenza della seconda classe è $\aleph_1$, segue subito che $\aleph_1 \leq \overline{\overline{\mathcal{O}}}$ (potenza di $\mathcal{O}$). Dopo aver riportato la dimostrazione di Cantor della proposizione mai pubblicata $\overline{\overline{\mathcal{O}}} \leq 2^{\aleph_0}$, Bernstein prova che $2^{\aleph_0} \leq \overline{\overline{\mathcal{O}}}$ usando AS implicitamente. Poi grazie al teorema d'equivalenza, può stabilire che

$$\overline{\overline{\mathcal{O}}} = 2^{\aleph_0}$$

e dunque che $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$. □

Bernstein conclude l'analisi di questo primo argomento, affermando che Cantor possedeva una dimostrazione mai pubbicata della seguente

Proposizione 3.3.1. *Ogni insieme non numerabile ha un sottoinsieme con potenza* $\aleph_1$.

Oggi non si hanno tracce della dimostrazione di Cantor ma si può affermare con certezza che per provare questa proposizione l'Assioma risulta necessario. [1, parr. 1.4-1.5]
Il secondo problema analizzato nella tesi di Bernstein riguarda la *fondazione* della teoria degli insiemi. Con questo termine Bernstein non si riferiva ai paradossi o alle contraddizioni che erano venuti fuori, bensì all'esigenza di determinare nuove regole e leggi che valessero per tutti gli insiemi sottolineando la possibilità di un approccio assiomatico. In questo contesto presentò anche la sua dimostrazione del teorema di equivalenza e il suo contributo per la soluzione al problema della tricotomia dei cardinali :

Proposizione 3.3.2. *Se* $\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}}$ *allora le cardinalità degli insiemi* A *e* B *sono confrontabili.*

Per la dimostrazione di questo risultato, Bernstein usava inconsapevolmente l'Assioma. Nel 1924 Alfred Tarski dimostrerà che da questo

enunciato segue la tricotomia dei cardinali e l'assioma di scelta stesso. [1, parr. 1.4-1.5]
Fuori dalla Germania l'interesse per il problema della tricotomia dei cardinali, si diffuse soprattutto in Inghilterra, fra i matematici che erano stati colpiti dalle ricerche di Cantor, come Bertrand Russell, G.H.Hardy e Philip Jourdain.
In particolare Russell aveva iniziato ad avvicinarsi al lavoro di Cantor leggendo il libro di un filosofo kantiano francese, Arthur Hannequin, che pensava che l'uso degli indivisibili e degli atomi in matematica e fisica portava necessariamente a contraddizioni. Secondo Hannequin il numero ordinale cantoriano ω non poteva essere assolutamente accettato in quanto la successione dei numeri naturali $1, 2, ...$ non ha limite e inoltre non condivideva la considerazione di Cantor del continuo come un insieme di punti perchè era un chiaro esempio di contraddizione: la divisibilità dell'indivisibile. Così, influenzato da Hannequin, Russell iniziò a credere che la teoria degli insiemi rivelava delle forti contraddizioni e nel 1896 in un lavoro non pubblicato, aveva scritto che *i matematici rischiano di dimenticare che le antinomie filosofiche trovano la loro controparte nelle fallacie matematiche* [che sembrano pervadere] *il Calcolo e la più elaborata costruzione delle collezioni di Cantor* [3, pag. 177]. Influenzato da Peano, Russell a partire dal 1900, iniziò a cercare le contraddizioni che si nascondevano nella teoria degli insiemi e a distinguere tra i lavori di Cantor, quelli che potevano essere considerati risultati corretti da quelli che non potevano essere tali. Il risultato fu la formulazione del cosiddetto paradosso di Russell:

> *non esiste un insieme che contenga tutti gli insiemi che non contengono se stessi come elemento.*

D'altra parte Russell scrisse anche un articolo in cui analizzava le relazioni di buon ordine e affermava che nonostante avesse accettato la teoria degli ordinali infiniti e quella dei numeri cardinali di Cantor, la classe di tutti gli ordinali non poteva essere ben ordinata e che quindi stentava a credere che ogni classe potesse essere ben ordinata. Leggendo poi l'articolo di Burali-Forti che parlava degli insiemi ben ordinati, Russell nel 1903 enunciò anche il paradosso di Burali-Forti:

> *non esiste un insieme che abbia per elementi tutti gli ordinali.*

Cercò di spiegare questo paradosso usando il fatto che la classe degli ordinali non poteva essere ben ordinata ma comunque iniziava a dubitare non solo del principio del buon ordinamento, ma anche del teorema degli aleph , della tricotomia dei cardinali e del teorema che afferma che $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$.
Al contrario, G.H.Hardy, amico e collega di Russell, non solo credeva nella validità del teorema $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$, ma diede anche una dimostrazione del caso generale:

Teorema 3.3.1. $\aleph_{\alpha+1} \leq 2^{\aleph_\alpha}$ *per ogni ordinale* α.

Hardy aveva ricavato la disuguaglianza da una argomentazione che "ogni cardinale infinito o è un aleph o è più grande di tutti gli aleph" in opposizione a quanto credeva Russell a proposito della non confrontabilità con altri aleph perchè nessuno era riuscito a bene ordinare il continuo. Il procedimento di Hardy era così descritto:

> *Dato un insieme di cardinalità* $> \alpha_0$*, possiamo scegliere da esso successivamente individui*
>
> $$u_1, u_2, ..., u_\omega, ..., u_\alpha, ...,$$
>
> *in corrispondenza a tutti i numeri della prima e della seconda classe numerica; se il processo arrivasse a un termine, il cardinale dell'insieme sarebbe* α_0*. Il suo cardinale è perciò* $> \alpha_1$*; e se è* $> \alpha_1$*, sarebbe* $> \alpha_2$*, e così via [. . .] Se non c'è alcun* α_β *uguale alla cardinalità dell'insieme, deve essere almeno uguale alla cardinalità dell'insieme di tutti gli* α_β *e quindi maggiore di qualsiasi* α_β*.* (ritradotto da [1, parr. 1.4-1.5])

Hardy aveva ottenuto questo, generalizzando la dimostrazione di Cantor che un insieme infinito ha un sottoinsieme numerabile, basato sulle infinite scelte arbitrarie. Inoltre oggi sappiamo con certezza che AS (o un'assunzione equivalente ad esso), è necessario per dimostrare che $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$. [1, par. 1.6]
Philip Jourdain aveva cercato di modificare il risultato di Hardy in modo da dimostrare il teorema del buon ordinamento e quello degli aleph. Alla fine del 1903 Jourdain, che era da due anni in corrispondenza con Cantor, gli comunica la sua dimostrazione del teorema degli aleph, e Cantor gli risponde che è la stessa con la quale egli ha dimostrato il teorema del buon ordinamento. Lo invita a pubblicarla, ma quando Jourdain gli chiede il permesso di citare la sua lettera, Cantor non glielo accorda; probabilmente aveva delle perplessità sull'argomento e non si voleva impegnare pubblicamente. Ad ogni modo Jourdain fa uscire il suo lavoro, dove si nota, nella terminologia delle classi consistenti e inconsistenti, l'influenza di Cantor. Jourdain fa anche un tentativo di delimitare il concetto di classe inconsistente, introducendo un nuovo criterio formale: una classe è inconsistente se ha una sottoclasse equipotente alla classe W di tutti gli ordinali. Per evitare il paradosso di Burali-Forti, afferma che solo le classi consistenti hanno un tipo d'ordine e un numero cardinale, una restrizione simile a quella già fatta da Cantor. Dal teorema degli aleph inoltre, Jourdain ricava che la potenza del continuo è un aleph e generalizza per cardinali qualunque alcune relazioni che Whitehead aveva stabilito per gli aleph:

Proposizione 3.3.3. *Se m è infinito e $n \leq m$, allora $m + n = m$, $m \cdot n = m$.*

Segue che $m^m = 2^m$, un risultato enunciato da Schoenflies. Esprimendo il desiderio di voler analizzare a fondo anche l'ipotesi del continuo, Jourdain conclude il suo articolo osservando che occorre dimostrare indipendentemente che $2^{\aleph_0}$ è un aleph.
Sia Cantor che Jourdain forse furono i matematici che arrivarono più vicino alla dimostrazione del teorema del buon ordinamento ma en-

trambi usavano senza rendersene conto un potentissimo mezzo: le infinite scelte arbitrarie. Jourdain a proposito della sua dimostrazione, qualche anno più tardi dice infatti:

> *La validità del procedimento delle infinite scelte arbitrarie era stata assunta semplicemente da me, come conseguenza del lavoro di Hardy; ma come molti altri matematici, in effetti all'epoca ero inconsapevole del fatto che dietro al principio di scelta si nascondeva una nuova assunzione non dimostrata.* (ritradotto da [1, parr. 1.4-1.5])

Capitolo 4

La soluzione di Zermelo

Quando nel 1904 Zermelo pubblicò la sua dimostrazione del teorema del buon ordinamento, il mondo matematico fu travolto da una serie di polemiche, dubbi e questioni che riguardavano non solo i problemi fondamentali che abbiamo analizzato nel capitolo precedente, ma anche questioni quasi filosofiche. Infatti ci si interrogava sia sulla validità dell'assioma di scelta e delle sue varianti, sia su quale fosse la metodologia più adatta da seguire in matematica e cosa volesse dire dimostrare l'esistenza di un oggetto. In realtà, già Cantor aveva aperto le porte al cambiamento nel modo di dimostrare che un oggetto matematico esiste. Infatti, quando nel 1874 pubblicò una nuova dimostrazione del teorema di Liouville che afferma che esistono infiniti numeri trascendenti, Cantor non definì nè costruì questi numeri, ma dimostrò la loro esistenza mostrando che la loro non esistenza determina una contraddizione. Sin dai tempi di Euclide, dimostrare l'esistenza di un oggetto matematico, significava essenzialmente darne un metodo di costruzione; tuttavia anche lo stesso Euclide aveva dimostrato alcuni teoremi utilizzando la strategia che Cantor adotta per il teorema di Liouville [cap. 3]. La differenza sostanziale però sta nel fatto che la maggior parte delle volte in cui Cantor dimostra l'esistenza di un oggetto matematico in maniera indiretta, non c'è la alcuna possibilità di trovare una dimostrazione alternativa che sia diretta e costruttiva (il caso del teorema di Liouville non rientra tra questi). La soluzione di Zermelo al problema del buon ordinamento fu però la vera e propria scintilla che fece scoppiare il dibattito che analizzeremo nella seconda parte di questa tesi e che coinvolse tutta l'Europa. Prima però, in questo capitolo ci occuperemo dell'analisi della dimostrazione di Zermelo per il teorema del buon ordinamento e del suo tentativo di difenderla dagli attacchi ricevuti, attraverso una precisa assiomatizzazione della teoria degli insiemi.

4.1 La dimostrazione del teorema del buon ordinamento

Al congresso internazionale dei matematici di Heidelberg, un professore di Budapest, Julius König annunciò di poter dimostrare che la cardinalità del continuo non può essere un aleph, e che quindi non è bene ordinabile; l'emozione dell'annuncio si smontò subito, in un giorno, dopo avere provocato un'apprensione a Cantor, quando Zermelo si accorse che la dimostrazione era basata su una errata interpretazione troppo generale di una uguaglianza aritmetica di Bernstein. König dimostrò innanzitutto che per ogni successione di insiemi infiniti e disgiunti $M_0, M_1, M_2, \ldots$, valgono le seguenti disuguaglianze

$$\sum_{i=0}^{\infty} \overline{\overline{M_i}} \leq \prod_{i=0}^{\infty} \overline{\overline{M_i}} \leq \Big(\sum_{i=0}^{\infty} \overline{\overline{M_i}}\Big)^{\aleph_0}. \tag{4.1}$$

Per ottenere la prima disuguaglianza, König dimostrò che un sottoinsieme del prodotto $\prod_{i=0}{}^{\infty} \bar{\bar{M}}_i$ è equipollente a $\sum_{i=0}{}^{\infty} \overline{\overline{M_i}}$ utilizzando l'assioma di scelta : "*...per questo scopo si può scegliere da ogni M_i un certo elemento β_i...* " . Poi dimostrò che per una successione crescente di cardinali infiniti la prima disuguaglianza della (4.1) è stretta:
Se $\aleph_0 \leq \overline{\overline{M_i}} < \overline{\overline{M}}_{i+1}$ per ogni $i \in \mathbb{N}$, allora

$$\sum_{i=0}^{\infty} \overline{\overline{M_i}} < \prod_{i=0}^{\infty} \overline{\overline{M_i}}. \tag{4.2}$$

Da questi due risultati, (4.1) e (4.2), che per essere dimostrati richiedono necessariamente AS , ne viene che (la seconda parte di (4.1) è semplice).

$$\text{Se } \aleph_0 \leq \overline{\overline{M_i}} < \overline{\overline{M}}_{i+1} \text{ per ogni } i \in \mathbb{N}, \text{ allora } \sum_{i=0}^{\infty} \overline{\overline{M_i}} < \Big(\sum_{i=0}^{\infty} \overline{\overline{M_i}}\Big)^{\aleph_0}. \tag{4.3}$$

Per completare la sua argomentazione, König utilizzò una proposizione dimostrata da Bernstein:

$$\aleph_\alpha{}^{\aleph_0} = \aleph_\alpha \cdot 2^{\aleph_0} \text{ per ogni ordinale } \alpha. \tag{4.4}$$

Se il continuo potesse essere ben ordinato, affermava König, allora la sua cardinalità sarebbe un $\aleph_\beta$ per un certo ordinale β. Poi, usando la (4.3) con $\aleph_{\beta+i}$ al posto di $\overline{\overline{M_i}}$, si otterrebbe:

$$\aleph_{\beta+\omega} < \aleph_{\beta+\omega}{}^{\aleph_0}, \tag{4.5}$$

dato che $\sum_{i=0}{}^{\infty}\aleph_{\beta+i} = \aleph_{\beta+\omega}$. Ma la (4.4) implica che

$$\aleph_{\beta+\omega}{}^{\aleph_0} = \aleph_{\beta+\omega} \cdot \aleph_\beta = \aleph_{\beta+\omega},$$

contraddicendo la (4.5). Così König concluse che $\mathbb{R}$ non può essere ben ordinato.
La formula di Bernstein fu corretta da Zermelo al congresso e un mese dopo da Hausdorff, che restrinse la sua validità al caso di ordinali non limite svuotando così l'argomento di König. La prima parte del lavoro di König sopravvisse peraltro permettendo di ottenere l'unico risultato dimostrabile nella teoria **ZF** , con l'assioma di scelta, sulla cardinalità del continuo, e cioè che

$$2^{\aleph_0} \neq \aleph_\beta,$$

per ogni ordinale limite β cofinale con ω. Infatti se β è cofinale con ω, cioè è il limite di una successione crescente di tipo ω di cardinali, come sopra, si ottiene $\aleph_\beta < \aleph_\beta{}^{\aleph_0}$. Ma $\aleph_\beta{}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \times \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, che contraddice quanto appena detto.

Zermelo aveva iniziato la sua carriera matematica in ambiti molto diversi da quello della teoria degli insiemi. La sua tesi di dottorato verteva sul calcolo delle variazioni e ben presto il suo interesse si spostò verso la fisica matematica e la meccanica statistica. Dopo essere stato assistente di Planck dal 1894 al 1897, presso l'Istituto di fisica teoretica di Berlino, Zermelo si spostò a Göttingen dove iniziò a studiare idrodinamica e a insegnare come *Privatdozent*. Qui lavorò a stretto contatto con Hilbert che lo influenzò e lo indirizzò negli studi. Quando agli inizi del 1900 Hilbert iniziò a studiare la consistenza del sistema dei numeri reali, Zermelo scoprì nella logica algebrica di Schröder, quello che poi divenne il paradosso di Russell, (due anni prima di Russell stesso) e glielo comunicò senza però pubblicarlo. Nel 1901 Zermelo tenne il suo primo corso di teoria degli insiemi basandosi sui *Beiträge* di Cantor. Dai suoi appunti del corso si evince che non considerva dimostrata la tricotomia dei cardinali e che era interessato all'addizione di infiniti cardinali. In queste note, Zermelo usava AS sia in maniera diretta che non. Ad esempio, l'Assioma viene impiegato in maniera esplicita, per selezionare un infinità numerabile di biezioni per provare che se

$$m = m + \mathfrak{p}_n$$

per ogni n, allora

$$m = m + \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{p}_n.$$

In precedenza Zermelo aveva usato invece AS implicitamente per dimostrare che la somma di un'infinità numerabile di cardinali è ben definita. Successivamente, i suoi interessi cambiarono quando nell'Agosto del 1904, scoprì l'errore nel tentativo di König di refutare il teorema del buon ordinamento. Due mesi dopo il congresso di Heidelberg, Zermelo mandò una lettera a Hilbert, da pubblicare sui *Mathematische Annalen*, dove dimostra il teorema del buon ordinamento. La dimostrazione si appoggia a una assunzione che Zermelo dichiara essere un "principio logico", appunto il nostro AS :

> *La precedente dimostrazione dipende dall'assunzione che in generale esistano ricoprimenti* γ [vedi sotto], *cioè sul principio che anche per una totalità infinita di insiemi esistano sempre correlazioni per mezzo delle quali a ciascun insieme corrisponde uno dei suoi elementi, o formalmente, che il prodotto di una totalità infinita di insiemi, ciascuno dei quali contiene almeno un elemento, è differente da zero* [insieme vuoto].

L'uso di un tale principio gli era stato suggerito da un altro allievo di Hilbert, Erhard Schmidt, con il quale, conversando, aveva avuto l'idea per la dimostrazione. Zermelo aveva studiato la teoria sui lavori di Cantor, come si evince dalla terminologia che usa, con i "ricoprimenti", che sono le attuali funzioni di scelta.
Cantor chiamava ricoprimento di un insieme A tramite gli elementi di un insieme B, una qualsiasi funzione $f : A \to B$, mentre Zermelo usava questo termine per indicare una funzione $\gamma : S \to M$, la cui esistenza era postulata dall'Assioma e cioè, come abbiamo visto all'inizio del capitolo 1, una funzione che dati un insieme qualsiasi non vuoto M e l'insieme S dei suoi sottoinsiemi, associa ad ogni M' in S un elemento $\gamma(M') \in M'$ (l'*elemento distinto di* M'). Questa funzione era considerata da Zermelo come un ricoprimento molto particolare:

> *Il numero di questi ricoprimenti* γ *è uguale al prodotto* $\prod m'$, *esteso a tutti i sottoinsiemi* M' [non vuoti e di potenza m'] *ed è diverso da* 0 *in ogni caso. Qualsiasi ricoprimento considerato permette di derivare un buon ordine per gli elementi di* M. (ritradotto da [1, par.2.2])

Vediamo ora nei dettagli la dimostrazione del teorema del buon ordinamento data Zermelo, a cui premettiamo alcune definizioni.

Definizione 4.1.1. Dato un insieme ben ordinato A, il segmento (proprio) di A determinato dal suo elemento b che si indica con $s(b, A)$, è l'insieme di tutti gli elementi che precedono strettamente b nell'insieme ben ordinato A.

Definizione 4.1.2. Dato un insieme M e un ricoprimento γ, un γ-insieme è un sottoinsieme M' di M ben ordinato e tale che ogni $b \in M'$ sia l'elemento distinto di $M \setminus s(b, M')$. Ogni elemento di un γ-insieme è detto γ-elemento.

La prima cosa che dimostrò Zermelo fu l'esistenza di γ-insiemi: l'insieme $\{m_1\}$, dove m_1 è l'elemento distinto di M è un γ-insieme. Successivamente mostrò che se M' ed M'' sono due γ-insiemi distinti, allora uno dei due è un segmento dell'altro e come conseguenza, che se due γ-insiemi hanno in comune un elemento allora hanno in comune anche il rispettivo segmento.
A questo punto Zermelo voleva provare che la totalità L_γ di tutti i γ-elementi è un γ-insieme e che contiene tutti gli elementi dell'insieme originario M, per poter concludere finalmente che M può essere ben ordinato. Ripercorriamo il procedimento di Zermelo come in [3, p. 181], dividendolo per punti:

i) Si definisce la relazione d'ordine $<$ in L_γ. Se a e b sono due distinti γ-elementi si considera l'ordine relativo ad un qualsiasi γ-insieme a cui appartengono entrambi, perchè per quanto aveva già provato Zermelo, quest'ordine è indipendente dalla scelta del γ-insieme. Dunque per due γ elementi distinti a e b, vale sempre o $a < b$ oppure $b < a$.

ii) Si prova che dati $a, b, c \in L_\gamma$ tali che $a < b$ e $b < c$, allora si ha $a < c$. Infatti sempre per quanto dimostrato in precedenza da Zermelo, se A è un qualsiasi γ-insieme che contiene c, deve contenere anche b e dunque a. Per definizione, essendo A totalmente ordinato, si ha $a < c$. Quindi si può concludere che L_γ stesso è totalmente ordinato.

iii) Si dimostra che L_γ è bene ordinato: sia L' un sottoinsieme arbitrario di L_γ e a uno dei suoi elementi che appartiene ad un certo

γ-insieme A. A conterrà allora anche tutti gli elementi che precedono a e quindi include il sottoinsieme L'' che si ottiene da L' rimuovendo tutti gli elementi che seguono a. Essendo L'' un sottoinsieme dell'insieme ben ordinato A, possiede un primo elemento che è anche il primo elemento di L'. Dunque L_γ è ben ordinato.

iv) Si prova che L_γ stesso è un γ-insieme: se a è un elemento arbitrario di L_γ e A è la totalità di tutti gli elementi precedenti $x < a$, allora in ogni γ-insieme che contiene a, A è il segmento corrispondente ad a. Per definizione di γ-insieme, a sarà l'elemento distinto di $M \setminus A$. Quindi L_γ è un γ-insieme.

v) Si conclude dimostrando che L_γ e il nostro insieme di partenza M coincidono: poichè l'inclusione $L_\gamma \subseteq M$ è ovvia, si prova solo l'altra. Se esistesse un elemento di M che non appartiene a nessun γ-insieme, quindi un elemento di $M \setminus L_\gamma$, esisterebbe anche un elemento distinto m' di $M \setminus L_\gamma$. Allora $L_\gamma \cup \{m'\}$ sarebbe un γ-insieme e m' dovrebbe essere un γ-elemento che non sta in L_γ, che è una contraddizione. Dunque $L_\gamma = M$ ed M stesso è ben ordinato.

4.2 L'assiomatizzazione di Zermelo

Durante l'estate del 1907, Zermelo aveva attentamente analizzato tutte le critiche ricevute dal suo Assioma e dalla sua dimostrazione del teorema del buon ordinamento. Pensando che entrambi fossero stati mal interpretati, voleva modificarli affinchè si potessero evitare fraintendimenti e interpretazioni soggettive. Scrisse così due articoli: il primo conteneva una risposta alle critiche ricevute che rimandiamo alla seconda parte di questa tesi; nel secondo invece, Zermelo presentava la sua assiomatizzazione della teoria degli insiemi, con lo scopo di costruire una base solida e inequivocabile su cui potevano poggiarsi AS e la sua dimostrazione. Bisogna tener presente che in quegli anni, la scoperta dei paradossi, come abbiamo già accennato, aveva seminato il panico

tra i matematici che allora vedevano nell'uso del metodo assiomatico una via di salvezza. Zermelo fu influenzato molto dall'assiomatizzazione di Hilbert per la geometria euclidea, che si basava su un sistema di assiomi che non lasciavano spazio ad alcuna assunzione implicita e sull'introduzione di tre insiemi di oggetti (che chiamava punti, linee e piani) e alcune relazioni esistenti tra essi. Hilbert aveva dimostrato l'indipendenza dei suoi assiomi e la loro consistenza riconducendosi a quella dei numeri reali. Fu proprio questa idea di Hilbert basata sull' uso di un dominio di oggetti con una certa relazione, sul formulare tutte le assunzioni fatte come assiomi e sull'importanza dello stabilire la loro indipendenza e consistenza, che catturò l'attenzione di Zermelo.
E' importante osservare però che l'esigenza di seguire un metodo assiomatico in matematica non nasce con la scoperta dei paradossi. Infatti, mentre stava sviluppando la sua teoria sugli insiemi D-finiti (vedi par. 2.2), Burali-Forti scrisse:

> *Si dovrebbero considerare i concetti di "classe" e "corrispondenza"* [funzione] *come primitivi* [o irriducibili] *e assegnare un sistema di proprietà* [postulati] *dai quali dedurre logicamente tutte le proprietà che siamo soliti attribuire a questi concetti. Fino ad oggi, un tale sistema di postulati ancora non esiste."* (ritradotto da [1, par.3.2])

Con questo scopo dunque, come abbiamo già detto, Burali-Forti introdusse la sua versione (senza la condizione di disgiunzione) del principio di partizione, prima ancora che fosse scoperto alcun paradosso. Ricordiamo che dell'atteggiamento di Cantor rispetto all'uso del metodo assiomatico, abbiamo già parlato nel capitolo precedente (si veda pagg. 38-39).
Iniziamo ora l'analisi approfondita dell'assiomatizzazione di Zermelo, seguendo [1, par. 3.2]. Come aveva fatto Hilbert nel suo lavoro, Zermelo inizia definendo un dominio $\mathfrak{B}$ di oggetti (tra cui gli insiemi) e la relazione $\in$ di appartenenza che può sussistere tra gli oggetti di $\mathfrak{B}$.

Formulò allora sette assiomi, che riteneva indipendenti l'un l'altro ma di cui non riusciva a provare la consistenza:

I. (*Assioma di estensionalità*) Se ogni elemento dell'insieme S è anche elemento dell'insieme T e viceversa, allora $S = T$; vale a dire che ogni insieme è determinato dai suoi membri.

II. (*Assioma degli insiemi elementari*) Esiste un insieme che non ha alcun elemento, chiamato l'insieme vuoto, e se a e b sono oggetti del dominio $\mathfrak{B}$, allora esistono gli insiemi $\{a\}$ e $\{a, b\}$.

III. (*Assioma di separazione*) Se una funzione proposizionale $P(x)$ è definita per un insieme S, allora esiste un insieme T che contiene tutti gli elementi x di S per cui $P(x)$ è vera. (Per Zermelo una funzione proposizionale $P(x)$ è definita per un insieme S, se tramite la relazione di appartenenza su $\mathfrak{B}$ e le leggi logiche è possibile stabilire se vale o meno $P(x)$ per ogni x in S.)

IV. (*Assioma dell'insieme potenza*) Ad ogni insieme S corrisponde un insieme, detto insieme potenza, che ha per elementi tutti e soli i sottoinsiemi di S.

V. (*Assioma dell'unione*) Ad ogni insieme S corrispnde un insieme, detto insieme unione di S, che contiene tutti e soli gli elementi di elementi di S.

VI. (*Assioma di scelta*) Se S è un insieme che ha per elementi insiemi non vuoti e a due a due disgiunti, allora esiste un sottoinsieme T dell'unione di S che ha esattamente un elemento in comune con ogni elemento di S.

VII. (*Assioma dell'infinito*) Esiste un insieme Z contenente l'insieme vuoto come elemento ed è costituito in modo tale che per ogni oggetto a, se $a \in Z$, allora anche $\{a\} \in Z$.

Osservazione 4.2.1. La versione di AS che Zermelo propone nel suo articolo è equivalente a quelle viste fin'ora e alla sua formulazione originale (p. 3); l'insieme T con le proprietà descritte è chiamato anche *insieme di scelta*. Per ulteriori chiarimenti in proposito, si veda [2, cap.8].

Questi assiomi meritano qualche osservazione:

(1) Prima di tutto bisogna dire che Zermelo non accettava la definizione di insieme data da Cantor come collezione di oggetti ben distinti del nostro pensiero e cercava quindi di trovarne una più adeguata. Nel 1888 Dedekind aveva enunciato come un dato di fatto piuttosto che come un assioma, che due insiemi che hanno gli stessi elementi sono uguali. Così proponendo l'assioma di estensionalità e quello di separazione, Zermelo adotta un concetto di insieme simile a quella di Dedekind.

(2) L'assioma degli insiemi elementari nasceva invece dal desiderio di Zermelo di considerare l'insieme vuoto come un vero e proprio insieme, come aveva fatto Schröder ma non Frege, e di distinguere l'insieme A dal singoletto $\{A\}$.

(3) Inoltre poichè Baire, criticando la dimostrazione del teorema del buon ordinamento, aveva affermato che dato un insieme infinito non è detto che siano dati anche tutti i suoi sottoinsiemi, Zermelo inserisce l'assioma dell'insieme potenza.

(4) Quando invece formulò l'assioma dell'unione, sembra che Zermelo non fosse a conoscenza della proposizione formulata da Cantor in una lettera a Dedekind, molto simile a tale assioma.

(5) Per quanto riguarda l'assioma dell'infinito, bisogna soffermarsi un po' sulla sua storia. Nel 1851 Bolzano aveva dimostrato che esistono insiemi infiniti con la seguente strategia: si considera la proposizione "esistono verità " chiamata A; sia B la proposizione "A è vera " che è diversa da A e anche dalla proposizione "B è vera", dunque continuando in questo modo si ottiene un insieme infinito di proposizioni. Qualche tempo dopo Dedekind trasformò questa idea di Bolzano nella proposizione che afferma che la totalità di tutti gli oggetti del pensiero è D-infinita, poichè per ogni pensiero

A esiste anche il pensiero di A che è diverso da A (per la fonte originale si veda [1, par. 3.2]). Non soddisfatto dell'argomentazione di Dedekind, Burali-Forti propose l'esistenza di una classe infinita come un'ipotesi necessaria in matematica, anche se non la considerò mai come un assioma. Anche Zermelo non accettava del tutto l'idea di Dedekind e quindi pensò di risolvere la questione inserendo nella sua assiomatizzazione l'assioma dell'infinito.

Concludiamo questo capitolo e la prima parte di questo elaborato sottolineando ancora una volta che ciò che spinse Zermelo a mettere a punto la sua assiomatizzazione, non fu tanto la sua preoccupazione per la scoperta dei paradossi insiemistici come invece accadde per Russell, ma più che altro l'intenzione di collocare i risultati da lui ottenuti all'interno di una teoria consistente. Come Russell però egli credeva che fosse necessario chiarire alcuni concetti di teoria degli insiemi, quali la definizione di insieme stesso che Cantor aveva formulato in maniera piuttosto ambigua. Zermelo poi pensava come Hausdorff (e al contrario di Russell), che la teoria degli insiemi fosse parte della matematica piuttosto che della logica o della filosofia. Come vedremo nel paragrafo 5.2, Hausdorff concordava con Zermelo anche sul fatto che la strada dell'assiomatizzazione fosse quella da seguire per un corretto sviluppo di questa teoria.

Parte II

Polemiche e utilizzazione dell'Assioma

Capitolo 5

Una tempesta di critiche

Come abbiamo ripetuto più volte, la dimostrazione di Zermelo generò una tempesta di critiche, rifiuti, incomprensioni, che non avevano a che fare solo con la scelta, infatti (a parte Poincaré) nessuno attaccò la dimostrazione in sè. Viene rifiutata l'assunzione (AS), vengono messi in evidenza i paradossi di nessuno dei quali sembrerebbe responsabile l'assioma di scelta, sono contrapposte tra loro concezioni degli insiemi e degli enti matematici in generale: la discussione di una dimostrazione innesca così accese prese di posizione su cosa è e come si deve fare matematica. Il dibattito investì contemporaneamente tutto il mondo matematico, in particolare la Germania, la Francia e la Gran Bretagna. Nessun altro assioma nella storia della matematica ha provocato discussioni così accese e prolungate che ancora oggi non sono cessate. Significative a tal proposito sono le parole del matematico francese Hadamard:

> *La storia incomincia, a proposito delle questioni nuove e assai astruse della teoria degli insiemi, con il famoso "assioma di scelta" di Zermelo* [...]. *Per parte mia, in quel momento ho vissuto degli straordinari ritorni a tutto quello che mi avevano insegnato, nella mia gioventù, di filosofia e in particolare di metafisica* [...]. *Avevo sempre creduto, allora, che si trattasse di questioni su cui i nostri elementi di informazione*

> *erano insufficienti, e soprattutto che si trattasse di questioni mal poste, o poco chiare* [...]*. E ora, ecco che una controversia proprio simile a una controversia metafisica nasceva tra matematici abituati a trovare senza difficoltà l'accordo su quello che era ammesso e quello che non lo era, abituati anche, o almeno con la pretesa di esserlo, a sapere bene se non "ciò di cui parlano"* [...]. [3, pag. 149]

Se pensiamo ad un paragone con l'assioma delle parallele, possiamo dire che quest'ultimo è stato a lungo discusso ma dal punto di vista della sua dimostrabilità o meno dai restanti assiomi di Euclide, non per quanto riguarda la sua accettabilità come proposizione matematica. L'assioma di scelta ha acquisito un'importanza fondamentale in tutti i settori della matematica e come vedremo in questa seconda parte, l'elenco delle sue conseguenze è impressionante al punto da configurare due matematiche divergenti a seconda della sua accettazione o meno. Non era prevedibile che rifiutare l'assioma di scelta avrebbe comportato uno stravolgimento del sapere matematico e si combatte più che altro per quello che esso rappresenta rispetto a una concezione generale del fare matematica.

5.1 Polemiche in Francia

Il primo episodio significativo è la discussione che si svolge tra alcuni matematici francesi in occasione della pubblicazione di un articolo di Borel sulla dimostrazione di Zermelo, pubblicato per richiesta di Hilbert. L'intervento viene ripubblicato in Francia con uno scambio di lettere tra Borel stesso, Baire, Lebesgue e Hadamard, che diventerà famoso come le "cinque lettere ". Alcuni storici della matematica, li definiscono semi-intuizionisti ed empiristi riferendosi alle loro simpatie costruttiviste. Ad ogni modo, i lavori di questi matematici, che si influenzarono a vicenda, riguardavano concetti cantoriani di teoria degli insiemi ma risulta difficile stabilire le loro credenze comuni.

Ad esempio, Borel considerava solo gli insiemi numerabili o con la potenza del continuo o tutt'al più quelli che potevano essere definiti in maniera univoca mediante un'infinità numerabile di condizioni. Rifiutava qualsiasi insieme di funzioni con potenza maggiore del continuo e successivamente iniziò a diffidare anche dalla nozione di insieme non numerabile perchè troppo vaga. In uno dei suoi articoli pubblicati, Borel afferma che quello che aveva provato Zermelo è l'equivalenza dei seguenti problemi:

(A) ordinare un insieme qualsiasi M

(B) scegliere un elemento distinto da ogni sottoinsieme non vuoto di M.

Quello che invece Zermelo non ha dimostrato, secondo Borel, è che l'equivalenza di (A) e (B) fornisce

> *una soluzione generale al problema (A). Invece per considerare risolto il problema (B) per un certo insieme M, c'è bisogno, almeno in teoria, di un metodo per determinare l'elemento distinto di un arbitrario sottoinsieme di M; e questo problema sembra essere uno dei più difficili se si suppone che M sia l'insieme* $\mathbb{R}$. (ritradotto da [1, par. 2.3])

Borel riteneva che per dotare un insieme di un buon ordine, la dimostrazione di Zermelo non fosse di certo più valida del procedimento basato sullo scegliere un primo elemento, poi un secondo, un terzo e così via fino a che gli elementi dell'insieme non sono finiti. Affermava con certezza che l'uso di un'infinità non numerabile di scelte non poteva essere ammesso in matematica (diceva che era "al di fuori della matematica ") ma non era affatto contrario all'uso di un'infinità numerabile di scelte arbitrarie, ossia a quello che abbiamo chiamato *assioma delle scelte numerabili* (*ASN*) e che analizzeremo in dettaglio nel prossimo capitolo. Infatti, come abbiamo già accennato in precedenza, Borel utilizzò in diverse occasioni *ASN* in maniera inconsapevole: in una di queste, la dimostrazione del teorema (ora chiamato di Heine-Borel) secondo il quale se un intervallo chiuso $[a, b]$ ammette un ricoprimento costituito da un'infinità numerabile di intervalli aperti, allora esiste una sottocollezione finita di questi intervalli che ricopre $[a, b]$, egli usò AS, anche se era necessario solo ASN [1, par. 2.3]. Ci sono altri lavori di Borel, come ad esempio quello in cui dimostra che ogni insieme infinito ha un sottoinsieme numerabile, in cui è necessario solo ASN. Un altro risultato importante provato da Borel, per cui è necessariamente richiesto ASN è il seguente:

Teorema 5.1.1. *L'unione di un'infinità numerabile di insiemi $A_1, A_2, ...$, ognuno con la potenza del continuo, ha la potenza del continuo.*

Osservazione 5.1.1. Per dimostrare questo teorema, Borel osservava che, per ogni n, A_n ha la potenza dell'intervallo aperto $(n-1, n)$ in $\mathbb{R}$ e quindi che l'unione di tutti gli A_n ha la potenza del continuo. In effetti, così facendo, sceglieva ad arbitrio una biezione f_n da A_n in $(n-1, n)$ per ogni n, in modo da ottenere una funzione iniettiva da $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ in $\mathbb{R}$.

Sottolineamo inoltre che quando Borel definì la cosiddetta misura di Borel e quindi gli insiemi misurabili chiamati oggi boreliani partendo dall'insieme degli intervalli aperti e chiudendolo per l'operazione di complementazione e unione numerabile, non usò mai l'Assioma, neppure in maniera implicita. Però, sembra che pensasse che esistono sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non misurabili rispetto alla sua misura : questa proprietà e molte altre dei boreliani, dipendono da AS (si veda [1, par. 2.3] e [2, cap. 10])
L'analista Jaques Hadamard invece non era d'accordo con Borel sulla critica mossa alla dimostrazione di Zermelo e al paragone fatto con la scelta di elementi in successione per ordinare un insieme, perchè riteneva che le scelte di cui parlava Zermelo fossero *indipendenti* le une dalle altre (nel prossimo capitolo, tra le forme più deboli di AS parleremo dell'assioma delle scelte dipendenti e analizzeremo meglio la questione). Secondo Hadamard infatti, una distinzione tra un'infinità numerabile

di scelte e una non numerabile, è rilevante solo nel caso in cui le scelte non siano indipendenti le une dalle altre. Il punto fondamentale su cui si focalizza l'attenzione di Hadamard è la distinzione tra il definire e il descrivere un oggetto matematico, richiamando il pensiero di Jules Tannery. Quello che aveva fornito Zermelo era semplicemente una dimostrazione di esistenza senza una precisa costruzione, cosa che secondo Hadamard aveva fatto anche Borel usando per i suoi lavori sulla convergenza delle serie complesse, funzioni di cui aveva provato l'esistenza ma che non potevano essere definite univocamente. Il suo interesse inoltre era rivolto anche all'evoluzione degli strumenti linguistici e concettuali della matematica che si arricchisce proprio parlando di enti che non sono nominabili in fasi e con tecniche precedenti.
Il più radicale di tutti è sicuramente Baire che, come Borel, aveva più volte usato l'Assioma inconsapevolmente. Infatti, nei suoi lavori di topologia, aveva dimostrato con un procedimento di scelta, ad esempio che

(1) l'unione di una infinità numerabile di insiemi di prima categoria è di prima categoria e

(2) anche il teorema della categoria, che afferma che $\mathbb{R}$ è di seconda categoria.

In seguito si è capito che questi teoremi si possono dimostrare senza AS : Baire aveva usato una sua formulazione più debole di cui parleremo nel prossimo capitolo (*assioma delle scelte dipendenti*). E' importante osservare anche che Baire considerava ogni tipo di infinito come infinito potenziale, più che altro come una pura convenzione e riteneva che gli ordinali infiniti di Cantor fossero un semplice *façon de parler*, ovvero un modo di dire; inoltre, come abbiamo già detto, pensava che anche se un insieme infinito è dato, è falso considerare come dati tutti i suoi sottoinsiemi, e che quindi non ha senso considerare il problema di scegliere un elemento da ciascuno di essi come aveva fatto Zermelo. La scelta di Zermelo, secondo Baire, è comunque non contraddittoria e a tal proposito dice:

> *Quindi tutto quello che prova* [Zermelo]*, per quel che mi interessa, è che noi non percepiamo una contraddizione nel supporre che in ogni insieme che ci è dato i suoi elementi sono posizionati tra loro nella stessa forma che in un insieme bene ordinato. Per concludere che questa è una dimostrazione, il significato di queste parole deve essere esteso in un modo straordinario e, aggiungerei, fallace.* (ritradotto da [1, par. 2.3])

Sul teorema di Zermelo, Baire si era pronunciato in una delle "cinque lettere ", inviata a Borel, dove affermava di dubitare che "*si possa mai trovare una misura comune tra il continuo* [...] *e gli insiemi bene ordinati perchè, ciascuna di queste due cose è definita solo virtualmente, e può darsi che queste due potenzialità siano irriducibili*". Conclude la lettera con il pensiero che per fare progressi in tali questioni si dovrebbe delimitare il dominio del definibile ma, "*nonostante le apparenze, in ultima analisi tutto dovrebbe essere ridotto al finito*".
Quando Borel gli chiese la sua opinione sulla polemica suscitata dall'idea di Zermelo, Lebesgue si mostrò cauto e riflessivo e considerò come questione centrale la seguente: si può provare l'esistenza di un oggetto matematico senza definirlo? Egli rispondeva negativamente perchè rifiutava le dimostrazioni che mostrano l'esistenza di una classe non vuota di oggetti di un certo tipo piuttosto che quella di uno specifico oggetto della classe. Si evince quindi anche dal pensiero di Lebesgue un'influenza dell'ideologia costruttivista (in particolare di Kronecker), soprattutto quando in riferimento al teorema di Zermelo, si chiede come si possa garantire che un γ-ricoprimento resti lo stesso per tutta la durata della dimostrazione. Contrariamente a quanto credeva Borel, Lebesgue considera discutibile anche fare un'infinità numerabile di scelte arbitrarie e dunque rifiuterebbe *ASN* . Di conseguenza, riteneva non dimostrato il teorema dell'esistenza di un sottoinsieme numerabile di ogni insieme infinito perchè troppo poco "kroneckeriano" come teorema d'esistenza. Così come gli altri suoi colleghi però, Lebesgue

utilizzò AS in maniera inconsapevole in numerosi risultati delle sue ricerche sulla misura da lui definita (la misura di Lebesgue). Un esempio significativo è il seguente:

Proposizione 5.1.1. *Esiste un insieme misurabile secondo Lebesgue che non è Borel-misurabile.*

In un saggio scritto nel 1905 Lebesgue distingue due correnti matematiche, quella degli empiristi e quella degli idealisti, spiegando le differenze nel modo di parlare di funzioni. Gli empiristi accettano solo le funzioni che possono essere definite, gli idealisti invece anche altre, e non si preoccupano di garantire che quando parlano di una funzione, sia sempre la stessa. Nello stesso anno Vitali mostra con AS l'esistenza di un insieme non misurabile secondo Lebesgue, riuscendo anche a stabilire che non c'è alcuna soluzione per *il problema della misura* posto da Lebesgue (cioè l'esistenza di una misura numerabilmente additiva, invariante per traslazioni, definita su tutti i sottoinsiemi limitati di $\mathbb{R}$ e che assegna misura 1 all'intervallo unitario). Ispirato dal lavoro di Vitali, Lebesgue fa vedere che una funzione di scelta per sottoinsiemi della retta non può essere misurabile, e quindi non ha rappresentazione analitica, a sostegno della sua tesi di indefinibilità per una funzione di scelta come quella proposta da Zermelo.
Tuttavia Lebesgue e Borel continuarono ad usare AS , o almeno ASN nel loro lavoro senza sentirsi incoerenti e senza apprezzare la profondità della presenza dell'Assioma nella teoria degli insiemi. Se non valesse l'assioma di scelta numerabile, $\mathbb{R}$ potrebbe essere l'unione numerabile di insiemi numerabili, la gerarchia degli insiemi boreliani e quella delle funzioni di Baire potrebbe collassare banalmente, la misura di Lebesgue non essere numerabilmente additiva e ogni insieme Lebesgue-misurabile essere Borel-misurabile. Questo è solo un accenno alle conseguenze di AS (nelle sue forme più deboli) che approfondiremo nel prossimo capitolo.
Sottolineiamo però che Zermelo assumeva l'intero assioma di scelta perchè necessario per provare il teorema del buon ordinamento in ge-

nerale e molti risultati dell'artimetica cardinale e della teoria degli insiemi di Cantor. Ma in altri settori della matematica, come l'Analisi, le applicazioni delle scelte arbitrarie, possono essere giustificate sulla base di una formulazione più debole di *AS* , l'assioma delle scelte dipendenti, che ha come conseguenza *ASN* (vedi par. 6.2). Ed è proprio per questo motivo, che i matematici di cui abbiamo parlato fin'ora, pensavano di essere leggittimati ad usare le scelte numerabili senza sentirsi incoerenti o incerti, data la natura meno astratta e più "costruttiva" di *ASD* e *ASN* , che bastavano per giustificare i loro usi della scelta [2, cap. 8]. Prima di passare alla reazione tedesca alla soluzione di Zermelo, ci soffermiamo su un episodio curioso e significativo avvenuto sempre in Francia a proposito della prima pubblicazione della dimostrazione di Zermelo su una rivista scientifica. In quell'occasione, nel Novembre 1904, un autore anonimo che secondo [1] potrebbe essere Hadamard, pubblicò un articolo in cui metteva in evidenza il paradosso scatenato dall'incompatibilità della dimostrazione di König sull'impossibilità di trovare un buon ordine per $\mathbb{R}$, con il teorema di Zermelo. L'anonimo sottolineava anche la distinzione tra il provare che una certa funzione esiste e definirla unicamente, affermando che siccome l'alfabeto matematico è finito, si può definire solo un'infinità numerabile di oggetti matematici e dunque le funzioni di scelta postulate da Zermelo non possono essere definite in maniera univoca. Pochi mesi più tardi, Jules Richard, professore di liceo, per rispondere all'anonimo, pubblicò un articolo in cui presentava il paradosso che oggi porta il suo nome:

> Se abbiamo un alfabeto costituito da un numero finito di parole e di segni, consideriamo le frasi nel nostro alfabeto, che definiscono in maniera univoca specifici numeri reali costruibili, ad esempio "il numero il cui quadrato è due" (composta da 7 parole). Se R_n è l'insieme, finito, dei numeri reali definibili con n parole dell'alfabeto, chiamiamo R l'unione di tutti gli R_n, ovvero l'insieme di tutti e soli i numeri reali definibili con un numero finito di elementi dell'alfabeto. R è nume-

> rabile e possiamo ordinare i suoi elementi nella successione $r_1, r_2, r_3, \ldots$. Consideriamo ora il numero r (possiamo battezzarlo numero di Richard) definito nel modo seguente: il numero reale la cui parte intera è zero, mentre, per ogni i, il suo i-esimo decimale è ottenuto aumentando di uno l'i-esimo decimale del numero r_i appartenente ad R (con l'avvertenza che se tale decimale fosse 8 o 9 lo si sostituisce con 1). Da un lato, r è un numero reale definibile con un numero finito di parole dell'alfabeto per come è costruito, quindi sta in R, ma dall'altro lato è diverso da tutti i numeri reali contenuti in R e quindi non vi risulta incluso. Di qui il paradosso (vedi anche [1, par. 2.4]).

Richard chiedeva come potesse essere risolto il suo paradosso, facendo notare che la definizione di r richiede la definizione di R, che consiste di infinite parole. Il paradosso di Richard attirò l'attenzione di Henri Poincaré, matematico attivo nella critica alla ricerca in fondamenti della matematica. Poincaré aveva accettato la soluzione iniziale di Richard per risolvere il suo paradosso, affermando che tutti i paradossi in matematica sono causati delle "definizioni impredicative", ossia definizioni di un oggetto matematico in termini di una certa classe di cui l'oggetto stesso è membro. Quindi se r si potesse definire e fosse un r_i, nel momento in cui si definisco gli r_i si dovrebbe far riferimento a R che non è stata ancora definita, scatenando il circolo vizioso di cui parla Poincaré. Il suo pensiero a proposito della dimostrazione di Zermelo segue le stesse orme, anche se Poincaré non era affatto contrario all'assioma di scelta:

> *Gli assiomi in questione* [AS ed equivalenti] *saranno sempre proposizioni che alcuni ammetteranno come "auto-evidenti" e che altri metteranno in dubbio. Ogni persona crederà solo alla sua intuizione. Tuttavia su un punto tutti concorderanno: l'assioma è "auto-evidente" per le classi finite. Ma se non è dimostrabile per le classi infinite, è senza dubbio in-*

> *dimostrabile anche per le classi finite, che non sono ancora distinte dalle precedenti a questo stadio della teoria. Perciò esso [AS] è un principio sintetico a priori senza il quale la "teoria dei cardinali" sarebbe impossibile, per gli insiemi finiti come per quelli infiniti.* (ritradotto da [1, par. 2.3])

La sua prospettiva kantiana, lo portava a considerare *AS* come un principio che non dipende dalla definizione del soggetto ma che è oggettivamente attendibile. Poincaré però rifiutava la dimostrazione del buon ordine, perchè vi vedeva una definizione non predicativa: Zermelo aveva definito L_γ come la collezione di tutti i γ-insiemi, ma L_γ è esso stesso un γ-insieme [cap.4].
Quando Richard tornò sulla sua antinomia, influenzato da Poincaré, discusse più che altro l'infinito attuale che rifiutava del tutto in quanto ostacolo per la comprensione della matematica. L'assioma di Zermelo peraltro sarebbe dimostrabile nel caso numerabile per Richard se si ammette, assunzione che non ritiene veramente restrittiva, che ogni insieme non vuoto contenga elementi definibili; questi si possono bene ordinare in base all'ordine lessicografico delle loro definizioni. Si capisce quindi perchè Richard decise di rifiutare del tutto *AS* e accettare solo il caso particolare delle scelte numerabili che nel 1907 riuscì a dedurre da un'ipotesi sugli elementi definibili. Il suo pensiero si conclude con un'osservazione sull'impossibilita di applicare la teoria degli insiemi al mondo reale perchè "*queste questioni sono interessanti ma assolutamente inutili in matematica; la vera matematica, che ci aiuta a capire il mondo esterno, non ha niente a che fare con insiemi non numerabili o con oggetti non definibili attraverso un numero finito di parole*" (ritradotto da [1, par. 2.3]).

5.2 Le critiche tedesche

Mentre in Francia la polemica sull'assioma di scelta e il teorema di Zermelo si riduce a questioni di esistenza e definibilità, in Germania la

risposta è diversa. Come vedremo, più che l'assioma di scelta è l'insieme, ora chiamato W, di tutti gli ordinali, il punto centrale della discussione. Nel volume dei *Mathematische Annalen* del 1905, nel quale era apparso l'intervento di Borel che aveva dato il via alle "cinque lettere", comparivano anche articoli di Jourdain, Bernstein, Schoenflies e Hamel, tutti sulla dimostrazione di Zermelo. Il numero era stato curato da Hilbert, che era favorevole alla dimostrazione di Zermelo ma voleva che passasse al vaglio degli altri matematici.
Usando il paradosso di Burali-Forti, Bernstein attacca il teorema del buon ordinamento, con la seguente strategia: siccome W è bene ordinato, dovrebbe esistere un ordinale β che sarebbe il massimo; ma allora $W \cup \{\beta\}$ sarebbe ben ordinabile e avrebbe l'ordinale $\beta + 1$, con $\beta + 1 > \beta$, contraddizione. Bernstein però non seguì l'idea di Cantor di considerare W come una moltitudine inconsistente che non poteva essere un insieme ben definito o un sottoinsieme di un insieme ben definito, ma rifiutò l'esistenza dell'ordinale successore $\alpha + 1$ per ogni ordinale α. Questo principio, secondo Bernstein, può essere applicato solo ai segmenti di W e non a tutti i suoi elementi; inoltre W può ancora essere un sottoinsieme proprio di qualche altro insieme V, purchè non venga esteso con un elemento di $V \setminus W$. Inoltre, con questi presupposti Bernstein afferma che siccome per ogni ordinale α, $\aleph_\alpha$ è la potenza di qualche segmento di W, la cardinalità di W non può essere un $\aleph$, e quindi il teorema degli aleph di Cantor non può essere valido. Per quanto riguarda la dimostrazione di Zermelo, la critica di Bernstein si basa proprio sull'idea appena espressa: Zermelo non ha escluso la possibilità che per qualche insieme M, l'insieme L_γ di tutti i γ-elementi potrebbe essere uguale a W; dunque in tal caso non si potrebbe estendere L_γ con un elemento di $M \setminus L_\gamma$ (vedi cap.4). Bernstein è sensibile anche alla questione della definibilità, e propone di usare una nozione di "equivalenza a più valori" per gli insiemi: se C è un insieme di biiezioni tra A e B, tra le quali nessuna è distinta (intende probabilmente "definibile" o "nominabile"), allora A e B sono "equivalenti a più valori" e se un teorema afferma che sono equipotenti allora, si dice che il

teorema ha "molteplicità" C ([1, par.2.5]). Questa sua definizione, gli permette di dire che l'assioma di scelta è superfluo: se nessuna funzione può essere specificata, non occorre nessun assioma per provare che l'insieme di certe funzioni di scelta non è vuoto. Come abbiamo già visto [par. 3.3], nonostante questa idea, Bernstein usò spesso AS in maniera implicita nella sue dimostrazioni e anche in lavori successivi, nel 1908, quando ad esempio provò che esiste un insieme più che numerabile di reali che non ha alcun sottoinsieme perfetto.
Anche Schoenflies è convinto che il teorema del buon ordinamento sia falso, mentre crede vero fino ad arrivare a proporlo come assioma, quello della tricotomia dei cardinali che come abbiamo già detto è equivalente ad AS e al teorema del buon ordinamento (la dimostrazione verrà data nel prossimo capitolo). Contro la dimostrazione di Zermelo, argomenta nello stesso modo di Bernstein, riferendosi all'ambiguità di W.
L'unico intervento favorevole in Germania è quello di Georg Hamel che non solo approva la dimostrazione di Zermelo, ma presenta anche nuovi risultati ottenuti con AS . Sono i primi esempi di applicazione dell'assioma di scelta, che analizzeremo a fondo nel prossimo capitolo. Usando il teorema di Zermelo e per ricorsione su un buon ordine, Hamel dimostrò l'esistenza di una base $\mathfrak{B}$ per $\mathbb{R}$, inteso come spazio vettoriale sui numeri razionali, che oggi chiamiamo *base di Hamel*. Zermelo si accorse subito che AS è necessario per ottenere una base siffatta perchè in sua assenza, uno spazio vettoriale potrebbe non avere una base o averne due di cardinalità differenti. Hamel trovò anche nuove solzioni, discontinue, per l'equazione funzionale di Cauchy $f(x+y) = f(x) + f(y)$ che potevano essere ottenute da una certa base di Hamel.
Ora vedremo la posizione di altri due matematici tedeschi: Hessenberg e Hausdorff.
Hessenberg nel 1906 preferì essere più cauto sull'uso delle scelte arbitrarie e sull'accettare la dimostrazione di Zermelo, anche se in sostanza la pensava come Hamel. In un lungo articolo pubblicato, analizzò a fondo i concetti fondamentali della teoria degli insiemi e considerò una casistica di principi di scelta:

(i) scelta di un elemento da ogni insieme non vuoto definito in maniera consistente, principio non banale secondo Hessenberg, in quanto non è sempre possibile definire l'elemento, come nel caso dell'insieme dei reali indefinibili;

(ii) scelta di un sottoinsieme numerabile a partire da un insieme infinito, principio introdotto per risolvere il problema della dimostrazione che un insieme infinito è anche D-infinito;

(iii) se una scelta è possibile, allora sono possibili $\aleph_0$ scelte;

(iv) si possono fare quante scelte si vuole, dipendenti;

(v) assioma di scelta di Zermelo.

Secondo Hessenberg inoltre, Zermelo non aveva fatto altro che dimostrare che se è possibile distinguere un elemento in ogni sottoinsieme non vuoto di un insieme M, allora M si può ben ordinare ma nessuno era riuscito ad utilizzare questo metodo per $\mathbb{R}$. Rimaneva allora in una posizione neutrale sia nei confronti del buon ordinamento che dell'Assioma, ma quando Zermelo pubblicò la sua assiomatizzazione, si convinse della validità di entrambi.
Anche Felix Hausdorff era indeciso sulla posizione da tenere rispetto ad AS e al teorema di Zermelo e in un primo momento cercò di evitare di affrontare la questione, rinunciando ad utilizzare alcuni risultati importanti sui cardinali infiniti, strettamenti legati al teorema del buon ordinamento, come la legge $\mathfrak{m} = 2\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$ per ogni cardinale k infinito. Nonostante i suoi accorgimenti, si trovano alcuni suoi lavori in cui AS è usato inavvertitamente, come nel caso in cui definendo un insieme B di tipi d'ordine e un sottoinsieme A di B tale che $\bar{\bar{B}} = 2^{\aleph_0}$ e $\bar{\bar{A}} = \aleph_1$, aveva dimostrato che $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$. Dopo poco tempo, Hausdorff si convinse della validità delle idee di Zermelo e si concentrò sulla ricerca di un ordine parziale tre le funzioni, quello della eventuale dominanza. In realtà, Hausdorff si limitò alle successioni di numeri reali con l'ordine parziale $<$ così definito: date due successioni f e g, $f < g$ se esiste un certo m tale che per ogni $n \geq m$, $f_n < g_n$. Chiamava "pantachia" un

insieme massimale di successioni rispetto all'ordine $<$. Questi concetti lo portarono alla formulazione, nel 1909, di quello che oggi è noto come *principio di massimalità di Hausdorff* che risulterà equivalente ad AS . Per studiare le pantachie, Hausdorff introduce e indaga complicati insiemi ordinati e in questo studio si appoggia ripetutamente alla scelta, intenzionalmente senza più menzionarla direttamente anche nel caso in cui dimostra le seguenti proposizioni utilizzando il teorema del buon ordinamento ([1, par. 2.5]):

Proposizione 5.2.1. *Ogni insieme denso $M \subseteq \mathbb{R}$, si può scomporre in due insiemi M_1 e M_2, entrambi densi in M.*

Proposizione 5.2.2. $\aleph_{\alpha+1}$ *è regolare per ogni α.*

Prima di dimostrare quest'ultima proposizione, Hausdorff aveva definito la nozione di cofinalità per classificare i cardinali infiniti e distinguerli in singolari e regolari: un cardinale era detto singolare se era cofinale con un cardinale più piccolo, altrimenti era detto regolare. Hausdorff aveva così usato AS in maniera più profonda di chiunque altro ma cercava sempre di non pronunciarsi in maniera diretta. In questo suo atteggiamento, come si sottolinea in [1], si leggeva sia una certa insofferenza contro le discussioni oziose sui principi e contro le restrizioni costruttiviste tipiche della scuola francese, sia una forte esigenza di trovare un'assiomatizzazione precisa per la teoria degli insiemi.

5.3 Il dibattito inglese

In Inghilterra si svolse un intenso dibattito, non di natura filosofica come quello francese, ma piuttosto scientifico che coinvolse diversi matematici tra cui Russell, Hardy e Whitehead. Questi ultimi in particolare, non erano mai stati convinti del teorema degli aleph di Cantor e le loro critiche erano rivolte principalmente all'uso di AS nella dimostrazione di Zermelo.
Russell aveva dei dubbi riguardo l'Assioma e, aiutato anche da Whitehead,

ne aveva scoperto una forma diversa, in maniera indipendente da Zermelo: l'assioma moltiplicativo. L'assioma di Russell non nasceva con lo stesso intento di quello di Zermelo (la dimostrazione del teorema del buon ordinamento) ma piuttosto con l'obiettivo di definire il prodotto infinito di una famiglia di insiemi disgiunti e quindi il prodotto di infiniti cardinali. Whitehead infatti aveva definito la classe moltiplicativa K^x di una famiglia K disgiunta di classi non vuote, come la classe di tutte le sottoclassi M dell'unione di K, tali che per ogni S in K, $M \cap S$ ha esattamente un elemento. L'assioma moltiplicativo di Russel fu dunque formulato nella maniera seguente:

> Se K è una famiglia disgiunta di classi non vuote, allora K^x è non vuota.

E' importante capire che questo per Russell era un assioma in quanto rappresentava un risultato fino ad allora impossibile da dimostrare piuttosto che una verità evidente da accettare. Grazie a Couturat, alla fine del 1904 venne informato della dimostrazione di König ad Heidelberg e della sua smentita grazie al teorema di Zermelo. Quando lesse la dimostrazione di Zermelo che tradusse in un linguaggio simbolico, si accorse che AS è equivalente al suo assioma moltiplicativo e che senza di esso molti risultati dell'artimetica cardinale non potrebbero essere ottenuti. Accettò e ritenne interessante l'idea di Zermelo ma non lo convinse il fatto che la dimostrazione fosse basata sull'Assioma che non riuscì ad ammettere poichè complicato e dubbio. Infatti rifiutò anche la dimostrazione di Hardy che ogni cardinale infinito o è uguale ad un aleph oppure è più più grande di tutti gli aleph, perchè coinvolgeva AS (vedi pg.42). Russell si soffermò poi anche su una forma alternativa dell'assioma moltiplicativo, in cui K è una famiglia di classi che possono essere ben ordinate ma capì subito che in questo modo è comunque necessario scegliere un buon ordine per ogni classe.
Russell scrisse a Couturat che non comprendeva la ragione per cui l'Assioma dovesse essere coinvolto nella dimostrazione dell'equivalenza delle definizioni di finito, cosa che per Couturat risultava più che evidente.

Russell rispose che l'evidenza in matematica ha generato molti risultati inattendibili e falsi e propose di considerare come postulato (una anticipazione della scelta globale, vedi par. 6.5) l'assunzione che esiste una funzione f tale che $f(u) \in u$ per ogni classe u non vuota, anche se affermò di non essere in grado di sapere se ciò potesse causare delle contraddizioni. Nel 1905 Russell continuò la discussione soprattutto con Hardy il quale riteneva impossibile provare che la classe moltiplicativa non è vuota in generale, ma negarlo sembrava paradossale in quanto non sarebbe servito a risolvere alcun problema e invece avrebbe privato la matematica di molti risultati interessanti. Provvisoriamente, a patto che generasse forti contraddizioni, Hardy era disposto ad accettarlo e ritenendo non sensata la distinzione tra il caso numerabile e quello generale, gli pareva curioso che Borel lo rifiutasse ma lo usasse per i suoi teoremi.

Hardy tuttavia rifiutò la dimostrazione di Zermelo, non per la scelta ma perchè anche lui temeva l'infiltrarsi dell'antinomia di Burali-Forti. Della stessa idea era anche Jourdain che però si fece convincere dell'importanza dell'Assioma da Russell, che gli fece notare come AS fosse indispensabile in numerosi risultati. Jourdain si ritrovò allora a riesaminare alcune dimostrazioni in cui veniva usato l'Assioma in maniera inconsapevole come il teorema di Bernstein che afferma che ci sono esattamente $2^{\aleph_0}$ sottoinsiemi chiusi di $\mathbb{R}$. Jourdain si occupò anche di modificare l'assioma di Russell, cercando di rafforzarlo per dimostrare la sua equivalenza con AS , cosa di cui Russell non era più convinto; ci riuscì ma commise un errore di cui nessuno dei due si accorse.

Contemporaneamente, Couturat aveva informato Russell della dimostrazione di Burali-Forti del teorema di Dedekind con il principio di partizione che, come abbiamo già visto (par. 2.2), Russell corresse. Durante il 1906 Russell scrisse un manoscritto, intitolato "L'assioma moltiplicativo ", in cui studiava le differenti forme dell'assioma di scelta e cercava di convincersi della sua necessità :

Potrebbe servire un assioma generale che ci dia elementi di

> *classi nel caso noi non possiamo specificarne alcun elemento. Un tale assioma potrebbe essere legittimo.*([3, p. 210] e [1, par. 2.7]

Nel manoscritto propone anche la seguenti formulazioni alternative dell'Assioma:

- Ogni funzione può essere ristretta ad una funzione iniettiva con la stessa immagine
- Ogni relazione r include una funzione f con lo stesso dominio di r.

Il motivo dello scetticismo di Russell si capisce quando afferma che "*l'Assioma stabilisce che possiamo trovare qualche regola per mezzo della quale estrarre un elemento da ciascuna delle classi esistenti contenuta in una classe*" ([1, par.2.7]). Sembra quindi che anche Russell ad un certo punto sia stato influenzato dai problemi di definibilità che abbiamo già incontrato. Negli anni seguenti sia Russell sia Jourdain dedicheranno molta attenzione a individuare i luoghi dell'uso della scelta e, in particolare Jourdain, a eliminarlo quando è possibile. Russell però resterà avvolto dai dubbi, tanto che nel 1917 arriverà ad affermare che non si può dimostrare la tricotomia dei cardinali. Sicuramente fu influenzato dal pensiero di Peano che come vedremo nell'ultima sezione di questo capitolo, fu il solo matematico italiano ad interessarsi alla dimostrazione di Zermelo prima del 1908.

5.4 Peano contro *AS*

In Italia, gli allievi di Peano lasciano che sia il maestro a pronunciarsi con un articolo del 1908 in cui si occupa di diversi argomenti. Prima di tutto Peano analizza sia la dimostrazione di Zermelo che il paradosso di Richard ma essi insieme al paradosso di Burali-Forti e a quello di Russell, non lo sconvolgono affatto. Peano pensava infatti che i paradossi e le antinomie in matematica sono sempre stati causati da errori di ragionamento in quanto le difficoltà maggiori risiedono proprio nel linguaggio naturale utilizzato, che non può avere la precisione di un sistema logico formale. Venuto a conoscenza del dibattito europeo scatenato dalle idee di Zermelo, Peano vi prese parte con un approccio diverso, soprattutto nei confronti di AS : riconduce l'assioma ad un principio logico che fa parte di un sistema formale di principi, espresso nel suo *Formulario.* Grazie a questi principi, per dimostrare i teoremi si può fare un numero finito di scelte arbitrarie da ogni insieme non vuoto, con una tecnica che descrive in dettaglio e da questi principi AS non può essere dedotto. Nel *Formulario*, infatti, l'introduzione di n elementi arbitrari successivi, dipende da $n + 2$ proposizioni e quindi infinite scelte arbitrarie richiederebbero infinite proposizioni. Poichè nessuna dimostrazione può essere composta da un numero infinito di passi, Peano conclude che AS è falso. Corregge poi l'affermazione di Poincaré per cui l'Assioma è evidente per le classi finite, precisando che lo si può rincondurre a sillogismi e nega che sia accettabile la dimostrazione presa dal libro di Borel che ogni insieme infinito ha un sottoinsieme numerabile: la questione resta aperta con lo stesso status della congettura di Goldbach. Sottolinea quindi che è possibile evitare l'Assioma non solo per un numero finito di scelte arbitrarie ma anche nel caso infinito, attraverso una regola. Peano aveva già sostenuto questa posizione in un articolo del 1890, che rimane una delle prime, se non la prima testimonianza dell'attenzione di un matematico alla questione dell' arbitrarietà di infinite scelte, che egli non accettava. [1, par. 1.8] Zermelo, nel primo articolo dei due pubblicati in risposta alle critiche ricevute, si difese argutamente:

> *Prima di tutto, Peano come è arrivato ai suoi principi fondamentali e come li ha introdotti nel Formulario, dal momento in cui non possono essere dimostrati? Ovviamente, attraverso le regole di inferenza che sono storicamente ritenute valide e riferendosi all'evidenza intuitiva sia delle regole, che della loro necessità per la scienza* [matematica]-

considerazioni che valgono anche per il discusso Assioma [...]. Questo Assioma, senza essere formulato in maniera scolastica, è stato applicato spesso e con successo nei più svariati campi della matematica, in particolare in teoria degli insiemi, da R. Dedekind, G. Cantor, F. Bernstein, A. Schoenflies e J. König [...]. Un simile uso frequente di un principio può essere spiegato solo grazie alla sua EVIDENZA, che naturalmente, non deve essere confusa con la sua dimostrabilità. L'evidenza è sicuramente soggettiva e può avere diversi gradi, ma in molti casi è una sorgente di principi matematici [assiomi]*, sebbene non sia una base per le dimostrazioni matematiche. Quindi l'affermazione di Peano, che l'evidenza non ha nulla a che fare con la matematica, non rende giustizia ai fatti ovvi.*[1, par.3.1]

Capitolo 6

Formulazioni equivalenti e conseguenze di *AS*

Come abbiamo visto, una volta iniziata la polemica sull'assioma di scelta molti matematici intrapresero un lavoro di ricerca sui teoremi che ne richiedevano l'utilizzo inevitabile o meno e in alcuni casi anche su quali fossero gli enunciati equivalenti ad esso. Dal 1908 si conosceva l'equivalenza di AS al teorema del buon ordinamento, ma si dovrà aspettare fino al 1920 per avere una dimostrazione dell'equivalenza con la tricotomia dei cardinali. Un diverso tipo di proposizioni, la cui dimostrazione di equivalenza con AS non fu data prima del 1930, iniziava a partire dal 1907, ad acquistare sempre maggiore importanza: i principi di massimalità. Con questo termine, intendiamo ogni risultato che stabilisce l'esistenza di un elemento massimale rispetto ad un certo ordine parziale dato. Abbiamo già parlato del lavoro di Hausdorff a proposito degli insiemi di funzioni a valori reali, per cui cercava di dimostrare l'esistenza di una *pantachia*, usando il teorema del buon ordinamento (par. 5.2). Questo teorema di Hausdorff in un certo senso anticipa l'enunciato del Lemma di Zorn, e anche se dedusse alcune sue varianti dall'assioma di scelta, Hausdorff non dimostrò mai la loro equivalenza ad esso. Dunque, i principi di massimalità non attirarono l'attenzione dei contemporanei di Hausdorff e bisognerà aspettare i lavori di ricerca di K. Kuratowski e M. Zorn che li riscoprirono in maniera indipendente.

6.1 Formulazioni equivalenti

L'obiettivo di questo capitolo è quello di dimostrare che AS è equivalente prima di tutto al teorema del buon ordinamento (dato che Zermelo in sostanza aveva dimostrato solo che AS implica il buon ordinamento ma non il viceversa) e allo stesso tempo anche ad alcuni enunciati fondamentali, che sono alla base della matematica. Con questo scopo, seguiamo [2], indicando con (*AS1*) la sua formulazione dell'assioma di scelta :

(**AS1**) Per ogni coppia di insiemi A e B e per ogni relazione binaria $P \subseteq (A \times B)$,

$$\big(\forall x \in A \quad \exists y \in B \quad (xPy)\big) \Rightarrow \exists f\big(f : A \to B \wedge \quad \forall x \in A \quad (xPf(x))\big)$$

Questa formulazione è equivalente ad AS (dimostrazione semplice).
Prima di dimostrare il nostro teorema di equivalenza, è doveroso soffermarsi su premesse e richiami necessari per il seguito. Tra questi concetti, troviamo subito due riformulazioni dell'Assioma, una basata sulla definizione di *insieme di scelta* e l'altra su quella di *funzione di scelta* ([2, cap.8]).

Definizione 6.1.1. Un insieme S è un insieme di scelta per la famiglia di insiemi $\mathcal{E}$, se:

(i) $S \subseteq \bigcup \mathcal{E}$;

(ii) per ogni $X \in \mathcal{E}$, l'intersezione $S \cap X$, è data da un singoletto;

Un insieme di scelta S seleziona quindi da ogni membro X della famiglia di insiemi $\mathcal{E}$, l'unico elemento dell'intersezione $S \cap X$. Si può provare inoltre facilmente, che se $\emptyset \in \mathcal{E}$, allora $\mathcal{E}$ non ammette alcun insieme di scelta, oppure che succede la stessa cosa se ad esempio $\mathcal{E}$ coincide con l'insieme $\{\{a\}, \{a, b\}, \{b\}\}$, con $a \neq b$. Infatti vale il seguente :

Teorema 6.1.1. *L'assioma di scelta (AS1) è equivalente alla seguente proposizione (IS) : ogni famiglia $\mathcal{E}$ di insiemi non vuoti e a due a due disgiunti ammette un insieme di scelta.*

Dimostrazione. Assumiamo che valga (*AS1*) e chiamiamo U l'unione della famiglia $\mathcal{E}$ di insiemi non vuoti, a due a due disgiunti, cioè $U = \bigcup \mathcal{E}$. Questo vuol dire che

$$(\forall X \in \mathcal{E})(\exists x \in U)[x \in X].$$

(AS 1) garantisce l'esistenza di una funzione $f : \mathcal{E} \to U$, tale che

$$(\forall X \in \mathcal{E})[f(x) \in X].$$

Non resta allora che porre l'insieme di scelta cercato $S = f[\mathcal{E}] = \{f(X), X \in \mathcal{E}\}$: il fatto che gli insiemi della famiglia $\mathcal{E}$ sono a due a due disgiunti ci garantisce che S interseca ogni membro in un singoletto.
Per provare il viceversa, assumiamo che per due insiemi qualsiasi A e B valga:

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B)[xPy],$$

con P relazione binaria, e per ogni $x \in A$ poniamo

$$U_x = \{(t, y), tPy \wedge t = x\}.$$

Sia $\mathcal{E} = \{U_x, x \in A\}$: ogni membro di $\mathcal{E}$ è non vuoto per l'ipotesi assunta ed è determinato dal primo membro delle coppie che contiene. Così gli elementi di $\mathcal{E}$ sono a due a due disgiunti e *IS* fornisce l'insieme S; la funzione

$$f(x) = \text{l'unico } y \text{ tale che } (x, y) \in S$$

soddisfa la conclusione di *AS1*. □

Definizione 6.1.2. Una funzione di scelta per un insieme A è una qualsiasi funzione $\varepsilon : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ tale che per ogni $X \subseteq A$ diverso dal vuoto, $\varepsilon(X) \in X$.

Lemma 6.1.1. *L'assioma di scelta (AS1) è equivalente all'affermazione che ogni insieme ammette una funzione di scelta.*

Per la dimostrazione di questo lemma, si rimanda a [2, p. 119]. Vediamo ora alcuni risultati sugli insiemi ordinati che verranno usati a breve.

Definizione 6.1.3. Una catena S in un insieme (parzialmente) ordinato P è un sottoinsieme di P che soddisfa

$$(\forall x, y \in S)[x \leq y \vee y \leq x].$$

Inoltre P è induttivo se ogni catena in P ha un maggiorante.

Definizione 6.1.4. Una mappa π, da un insieme ordinato P in se stesso, $\pi : P \to P$, si dice espansiva se per ogni $x \in P$, $x \leq \pi(x)$.

Teorema 6.1.2 (del punto fisso)**.** *Ogni mappa espansiva $\pi : P \to P$, con P insieme ordinato induttivo, ha almeno un punto fisso, cioè un certo $x^* \in P$ tale che*

$$x^* = \pi(x^*).$$

Teorema 6.1.3. *Per ogni insieme ordinato P, l'insieme*

$$\mathcal{C}(P) = \{S \subseteq P, S \text{ catena in } P\}$$

di tutte le catene in P è ordinato rispetto alla relazione $\subseteq$ ed è induttivo.

Per la dimostrazione dei precedenti teoremi si rimanda a [2, capp.6-7], così come per il seguente risultato:

Teorema 6.1.4 (di Hartogs)**.** *Esiste sempre un'operazione ben definita $\chi(A)$, che associa ad ogni insieme A un insieme ben ordinato :*

$$\chi(A) = (h(A), \leq_{\chi(A)}),$$

tale che non esiste alcuna funzione iniettiva π, $\pi : h(A) \to A$.

A questo punto possiamo finalmente dimostrare il seguente :

Teorema 6.1.5. *Le seguenti proposizioni sono tutte equivalenti:*

(1) (AS1).

(2) Principio della catena massimale: ogni insieme ordinato P ha una catena $S \subseteq P$ che è massimale, cioè tale che per ogni altra catena S', $S \subseteq S' \Rightarrow S = S'$.

(3) Lemma di Zorn: se ogni catena in un insieme ordinato P ha un maggiorante, allora P ha almeno un elemento massimale.

(4) Ipotesi della confrontabilità dei cardinali: per ogni coppia di insiemi A e B, vale che $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$ oppure che $\overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{A}}$.

(5) Teorema del buon ordinamento: ogni insieme si può dotare di una relazione di buon ordine.

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema in maniera circolare, facendo vedere che ognuna di queste proposizioni implica la successiva; concluderemo provando che la (5) implica la (1):
(1) $\Rightarrow$ (2). Per assurdo, se supponiamo che l'insieme ordinato P non abbia nessuna catena massimale, allora ogni sua catena avrà un'estensione propria. Se consideriamo la relazione $\subseteq$ di inclusione, applicando (*AS1*) al caso in cui gli insiemi A e B coincidano con l'insieme delle catene in P, $\mathcal{C}(P)$, possiamo dire che esiste una funzione π, $\pi : \mathcal{C}(P) \to \mathcal{C}(P)$, tale che

$$\forall S \in \mathcal{C}(P), S \subset \pi(S).$$

Quindi π sarebbe una mappa espansiva senza punti fissi e poichè il teorema 6.1.3, ci dice che $\mathcal{C}(P)$ è induttivo, si ha una conttraddizione con il teorema 6.1.2.
(2) $\Rightarrow$ (3). Dato l'insieme ordinato P, per (2), sappiamo che ha una catena massimale che chiamiamo S. Se assumiamo che ogni catena in P abbia un maggiorante (e sia M un maggiorante di S), M è massimale in P perchè se esistesse $y \in P$ tale che $M < y$, allora $S \cup \{y\}$ sarebbe

una catena propria, estensione di S, che è assurdo.
(3) $\Rightarrow$ (4). Prendiamo due insiemi qualsiasi A e B e consideriamo l'insieme di tutte le funzioni parziali da A in B (ossia funzioni il cui dominio è contenuto in A), iniettive, $\mathcal{I} = \{f : A \to B, f \text{ funzione parziale iniettiva}\}$. Questo insieme è ordinato dalla relazione $\subseteq$ così definita:

$$f \subseteq g \Longleftrightarrow (\forall x \in A)[x \in \mathcal{D}(f) \Rightarrow [x \in \mathcal{D}(g) \wedge f(x) = g(x)]],$$

dove con $\mathcal{D}(f)$ intendiamo il dominio di f, stessa cosa per g (per ulteriori chiarimenti si veda [2, cap. 7]). Così ogni catena S in $\mathcal{I}$, avrà un maggiorante dato dalla sua unione $\bigcup S$. Allora per (3), esiste una funzione iniettiva parziale f, $f : A \to B$, che è massimale. Se

$$a \in A \setminus \mathcal{D}(f)$$

e

$$b \in B \setminus f(\mathcal{D}(f)),$$

allora $f \cup \{(a, b)\}$ è una funzione iniettiva parziale che estende propriamente f. Dunque deve valere una delle due seguenti opzioni:

- $f(A) = B$, cioè f è totale e vale $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$;
- $f(\mathcal{D}(f)) = B$ e la funzione parziale iniettiva inversa $f^{-1} : B \to A$ è totale, quindi $\overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{A}}$.

(4) $\Rightarrow$ (5). Dato un insieme qualsiasi A, sia $h(A)$ l'insieme di Hartogs associato ad A, ovvero l'insieme ben ordinato la cui esistenza è garantita dal teorema 6.1.4. Siccome il teorema ci dice che non può essere che $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{h(A)}}$, la proposizione (4) garantisce l'esistenza di una funzione iniettiva f, $f : A \to h(A)$. Possiamo allora definire la seguente relazione $\leq_A$ di buon ordine su A

$$x \leq y \Longleftrightarrow_{df} f(x) \leq_{\chi(A)} f(y).$$

(5) $\Rightarrow$ (1). Dato un insieme A qualsiasi, se $\leq$ è una relazione di buon ordine su di esso, la cui esistenza è garantita dalla (5), allora la seguente

funzione

$$\varepsilon(X) = \text{ il minimo di } X \text{ rispetto alla relazione } \leq$$

definita per ogni $X \subseteq A$ non vuoto, è una funzione di scelta per A. Peril lemma 6.1.1 si conclude. □

6.2 Formulazioni deboli di *AS*

Come abbiamo visto in diverse occasioni, nel corso della storia i matematici hanno usato in maniera inconsapevole *AS* nei loro lavori, ma spesso più che dell'Assioma vero e proprio, si trattava di alcune sue formulazioni deboli. Tra queste, quelle più usate sono sicuramente due: l'assioma delle scelte numerabili di cui si è già data la definizione (1.2.2) e quello delle scelte dipendenti, che indicheremo con (*ASD*).

Definizione 6.2.1 (*ASD*). Per ogni insieme A e per ogni ogni relazione $P \subseteq A \times A$,

$$\begin{aligned}&(a \in A \wedge (\forall x \in A \quad \exists y \in A(xPy))) \\ &\quad \Rightarrow \exists f(f : \mathbb{N} \to A)(f(0) = a \wedge (\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n)Pf(n+1)))\end{aligned}$$

Vediamo ora un importante risultato che mostra le relazioni esistenti tra queste formulazioni deboli e *AS1* stesso.

Teorema 6.2.1. *Valgono le seguenti implicazioni:*

(1) AS1⇒ ASD ;

(2) ASD ⇒ ASN .

Dimostrazione. (1) Prendiamo un insieme qualsiasi A e sia $\varepsilon : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ una funzione di scelta per A. Assumiamo l'ipotesi di *ASD* e notiamo che la funzione $f : \mathbb{N} \to A$ che cerchiamo per concludere che *ASD* vale è definita cosìper induzione:

$$\begin{aligned}f(n) &= a \\ f(n+1) &= \varepsilon(\{y \in A, f(n)Py\}).\end{aligned}$$

(2) Assumiamo che valga l'ipotesi di *ASN* cioè supponiamo di avere un insieme B e la relazione binaria $P \subseteq \mathbb{N} \times B$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N} \quad \exists y \in B$ tale che nPy. Poniamo $A = \mathbb{N} \times B$ e sia $a = (0, b)$, dove $b \in B$ è un elemento qualunque che soddisfa $0Pb$. Definiamo su A la relazione Q nella seguente maniera:

$$(n, x)Q(m, y) \Leftrightarrow_{df} m = n + 1 \wedge mPy.$$

ASD garantisce l'esistenza di una funzione f, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times B$ per l'elemento a e la relazione Q sull'insieme $\mathbb{N} \times B$ tale che $f(n) = (g(n), h(n))$, con $g(0) =, h(0) = b$ e g e h opportune funzioni tali che per ogni n, $g(n + 1) = g(n) + 1$ e $g(n + 1)Ph(n + 1)$. Ne viene che per ogni n, $g(n) = n$ e $nPh(n)$. La funzione h allora soddisfa la conclusione di *ASN* .

□

Le due implicazioni non si possono invertire (cap.5).

Prima di parlare delle conseguenze di *AS* e delle sue formulazioni alternative, mettiamo in evidenza ancora una volta le proposizioni equivalenti ad *AS* che abbiamo già enunciato e ne aggiungiamo delle altre con qualche osservazione.

PROPOSIZIONI EQUIVALENTI AD *AS*

- *AS1*
- *IS*
- Ogni insieme ammette una funzione di scelta
- Teorema del buon ordinamento di Zermelo
- Tricotomia dei cardinali
- Lemma di Zorn
- Principio della catena massimale

- Assioma moltiplicativo di Russell Aggiungiamo:
- Teorema di Löwenheim-Skolem (-Tarski): ogni insieme di enunciati che abbia un modello (normale) infinito, ne ha uno di qualunque cardinalità infinita.
- Teorema di compattezza di Tychonoff : il prodotto di qualunque famiglia di spazi topologici compatti è compatto.

Del teorema del buon ordinamento abbiamo già parlato a lungo nei capitoli 3 e 4.
Per quanto riguarda la tricotomia invece aggiungiamo che già dal 1890 secondo molti matematici la tricotomia implicava il buon ordinamento ma non si riusciva a provare il viceversa. Fu Hartogs nel 1915 a farlo, nonostante l'idea ormai diffusa che la tricotomia fosse più debole dell'Assioma. [1, par.3.4]
Come abbiamo già accennato, il lemma di Zorn è solo uno degli enunciati che riguarda i principi di massimalità. Infatti anche Kuratowski e Hausdorff prima, e Teichmüller poi, si dedicarono allo studio di questi principi. Però prima di Zorn, i principi di massimalità erano considerati come teoremi da dimostrare piuttosto che come formulazioni equivalenti dell'Assioma. Solo grazie a Teichmüller e allo stesso Zorn vennero usati per la prima volta come alternative al teorema del buon ordinamento in algebra: l'obiettivo non era quello di evitare l'utilizzo dell'Assioma, ma piuttosto si cercava di trovare degli enunciati più facilmente applicabili all'algebra astratta. Dal punto di vista matematico, gli approcci di Kuratowski e Hausdorff differivano di poco da quello di Zorn, conservando comunque l'equivalenza dei loro risulati : i primi due consideravano sottofamiglie ben ordinate dall'inclusione, mentre Zorn evitava la limitazione del buon ordine e considerava semplicemente le sottofamiglie *ordinate* dall'inclusione. Quando un collega e amico di Zorn, Chevalley, presentò i principi di massimalità ai Bourbakisti, quest'ultimi cercarono di ricavarne una versione più generale possibile che faceva uso di relazioni d'ordine arbitrarie anzichè di quella particolare data dall'inclusione. Grazie al teorema di Kuratowski, che afferma che

ogni relazione d'ordine può essere rappresentata tramite l'inclusione, i risultati dei Bourbakisti si rivelarono del tutto equivalenti a quelli già noti (per approfondimenti si veda [1, par. 4.5]).
L'assioma moltiplicativo di Russell è stato uno degli argomenti del paragrafo 5.3 quindi ci focalizziamo sugli ultimi due enunciati dell'elenco equivalenti ad AS .
Nel 1920, anno in cui Skolem pubblicava i suoi lavori, le ricerche sui fondamenti della matematica si basavano principalmente sullo studio di teorie logiche del primo ordine, con un linguaggio costituito da un insieme di simboli finito o numerabile e quindi da un'infinità numerabile di enunciati. In questo contesto, Skolem sottolineava l'importanza dei modelli finiti o numerabili ma grazie a Tarski e al suo seminario tenutosi all' Università di Varsavia nel 1926, la non numerabilità rientrava in gioco. Skolem, qualche anno prima, aveva esteso un risultato di Löwenheim, con il seguente teorema per cui AS risulta necessario (si veda [1, par. 4.8]), oggi conosciuto come teorema di Löwenheim-Skolem:

Teorema 6.2.2. *Sia S un insieme di enunciati di un linguaggio del primo ordine* [con uguaglianza]*. Se S è soddisfacibile in un insieme M'* [un modello normale]*, allora è soddisfacibile in un insieme finito o numerabile M.*

Quando Skolem nel 1934 pubblicò un articolo in cui mostrava un modello non standard dell'aritmetica, Tarski aggiunse una nota che parlava della sua idea, che risaliva a sei anni prima, di estendere il teorema di Löwenheim, nella seguente maniera [1, par. 4.8]:

Teorema 6.2.3. *Se un insieme consistente S di enunciati in un linguaggio del primo ordine non è soddisfacibile in un modello finito, allora S ha sia un modello numerabile che uno non numerabile [...].*

Tarski non pubblicò la dimostrazione di questo teorema, perchè pensava di non possedere una precisa idea della nozione di soddisfacibilità e lo stesso fece anche quando riuscì a dimostrare che se un insieme di

enunciati ha un modello infinito allora ne ha uno di ogni cardinalità infinita. [1, par. 4.8]
Intorno al 1915, a Mosca, due matematici, N. Luzin e il suo studente M. Suslin, pensarono di iniziare un lavoro di ricerca di tutti i risulati che in Analisi reale, potevano essere provati senza AS . Tra i membri della scuola moscovita, c'era anche Andrei Tychonoff che studiava topologia. Nel 1930 Tychonoff stava studiando il problema dell'immersione di uno spazio di Hausdorff in uno spazio compatto e in questo contesto pubblicò il teorema che afferma che il prodotto di una famiglia di spazi compatti è compatto. In realtà il teorema che dimostrò Tychonoff era ristretto al prodotto di un numero qualsiasi di volte dell'intervallo chiuso $[0, 1]$ con se stesso ma poichè la dimostrazione si basava sull'uso di particolari punti di accumulazione, era possibile generalizzarla [1, par. 4.6]. Un matematico che si impegnò a dimostrare la generalizzazione del teorema di Tychonoff, fu il ceco E. Čech che a differenza del suo collega moscovita, si interessava agli spazi topologici arbitrari e non solo a quelli di Hausdorff. Il metodo seguito da Čech nella sua dimostrazione era molto simile a quello di Tychonoff e faceva uso del teorema del buon ordinamento. Solo nel 1950 Kelley dimostrò che il teorema di Tychonoff, più precisamente chiamato anche teorema di Čech-Tychonoff, è equivalente ad AS (per approfondimenti si veda [1, par. 4.6].

6.3 Conseguenze e paradossi

A questo punto ci soffermiamo a parlare di alcune conseguenze dell'Assioma di scelta, tra cui troviamo anche qualche risultato paradossale che non ha fatto altro che aumentare, al momento delle polemiche, il grado di sfiducia del mondo matematico nei suoi confronti.
Nel paragrafo 5.2 abbiamo parlato dell'importante risultato provato da Hamel, con l'utilizzo di AS , dell'esistenza di una base per $\mathbb{R}$ inteso come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$. Il teorema di Hamel fu generalizzato e provato da diversi matematici nella forma più nota:

Teorema 6.3.1. *Ogni spazio vettoriale non banale ha una base.*

Anche Hausdorff nel 1932 aveva dimostrato questo teorema, deducendolo dal teorema del buon ordinamento e ispirato da questo lavoro, Teichmüller provò un risultato simile ma più utile per l'Analisi: ogni spazio di Hilbert ha una base ortonormale. [1, par. 4.5].
A partire dal 1908 l'algebra astratta stava facendo passi da gigante e l'Assioma di scelta, fino al 1906, con l'eccezione dei lavori di Hamel, non era stato coinvolto affatto in questi progressi. Fu Ernst Steinitz a riconoscere, a partire dal 1910, l'importanza e la necessità dell'Assioma per ottenere risultati fondamentali per la teoria dei campi. Nell'introduzione del suo articolo del 1910, Steinitz, professore a Breslavia, discusse il ruolo di *AS* nello studio dei campi algebricamente chiusi. Il primo teorema che dimostrò, come conseguenza dell'Assioma è il seguente:

Teorema 6.3.2. *A meno di isomorfismi, ogni campo ammette un'unica chiusura algebrica.*

Nel caso del campo dei razionali, l'esistenza di una chiusura algebrica non richiede *AS* , mentre come sottolineava Steinitz, nel caso generale è indispensabile non per l'unicità ma per l'esistenza. [1, par. 3.5]. Questo teorema convinse Steinitz dell'assoluta importanza dell'Assioma in algebra e in matematica in generale:

> *Molti matematici continuano ad opporsi all'Assioma di Scelta. Riconoscendo sempre più che ci sono questioni che in matematica non possono essere risolte senza l'assioma, la resistenza ad esso pian piano sarà sempre minore.* (ritradotto da [1, 3.5])

Coerentemente alle sue parole, Steinitz cercò di sviluppare la teoria dei campi ricavando prima tutti i possibili risultati per cui *AS* non era necessario, e in un secondo momento dimostrando quei teoremi che si ottenevano esplicitamente da esso. La maggior parte di questi teoremi riguardava la decomposizione e le estensioni di campi. [1, par. 3.5].

Steinitz si occupò anche di teoria degli anelli, attirando l'attenzione di un altro matematico, W. Krull. Quest'ultimo aveva sviluppato il metodo di classificazione degli anelli di Steinitz e aveva utilizzato il teorema del buon ordinamento per dimostrare che ogni anello commutativo unitario può essere esteso ad un anello unitario algebricamente chiuso. Il risultato più importante che provò Krull fu sicuramente il seguente [1, par. 4.5]:

Teorema 6.3.3. *In ogni anello commutativo, ogni ideale proprio può essere esteso ad un ideale primo massimale.*

Quello che sfuggì a Krull, fu l'importanza particolare di questo teorema quando viene enunciato per gli anelli booleani, ossia anelli con almeno due elementi, in cui per ogni elemento a vale $a^2 = a$ (se l'anello booleano è anche unitario, viene chiamato algebra di Boole). Fortunatamente, un algebrista americano, M.H. Stone, senza citare Krull, dimostrò un importante teorema:

Teorema 6.3.4. *In ogni anello booleano, c'è almeno un ideale primo.*

Da questi ultimi due teoremi, usando (necessariamente) AS , Stone derivò il noto teorema degli ideali primi per algebre di Boole:

Teorema 6.3.5. *In un'algebra di Boole, ogni ideale si può estendere ad un ideale primo.*

Inoltre dal teorema 6.3.4 e con l'uso inevitabile di AS , Stone dedusse anche il suo famoso teorema di rappresentazione: ogni anello booleano è isomorfo ad un anello di insiemi. [1, par. 4.5].
Prima di passare alle conseguenze paradossali di AS , vediamo un ultimo risultato che anche se in realtà fu provato a partire dal teorema del buon ordinamento, ci sembra doveroso citare tra le conseguenze dell'Assioma: il teorema di Hahn-Banach che fu dimostrato con l'uso di formulazioni equivalenti ad AS .
Alcune conseguenze dell'Assioma hanno rivelato una certa ambiguità soprattutto per quanto riguarda la teoria della misura: come già detto

nel paragrafo 5.1, da un lato AS è necessario per dimostrare alcune proprietà fondamentali della misura di Lebesgue, come la sua additività, ma dall'altro è stato usato per stabilire anche il seguente risultato:

Proposizione 6.3.1. *Esistono sottoinsiemi* $A \subset \mathbb{R}$*, non misurabili nel senso di Lebesgue.*

Nel 1905 infatti, Giuseppe Vitali utilizzò un insieme di scelta per costruire un insieme non misurabile secondo Lebesgue. Vediamo il procedimento per punti:

- si definisce sui numeri reali dell'intervallo $[0, 1]$ la seguente relazione d'equivalenza: x è in relazione con y se la loro differenza è un numero razionale;
- si considera l'insieme di tutte le classi di equivalenza della relazione definita, che devono essere un infinità non numerabile, altrimenti l'intervallo $[0, 1]$ sarebbe numerabile (in quanto unione numerabile di insiemi numerabili);
- usando ancora l'assioma di scelta si può considerare un insieme che contiene esattamente un rappresentante di ogni classe, che chiameremo V, insieme di Vitali.
- si può provare la non misurabilità dell'insieme V rispetto alla misura di Lebesgue usando la positività, l'invarianza per traslazioni e l'additività.

Siamo ancora nell'ambito della teoria della misura, quando nel 1914, Hausdorff ottenne una versione più debole del problema della misura di Lebesgue (vedi p. 65). Hausdorff si chiedeva se esiste una funzione m, detta misura, che assegna un numero reale non negativo ad ogni sottoinsieme limitato A di $\mathbb{R}^n$ e che soddisfa le seguenti condizioni:

(a) Il cubo unitario n-dimensionale ha misura 1.

(b) Insiemi congruenti hanno la stessa misura.

(c) $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$, se A e B sono disgiunti.

Hausdorff dimostrò che per $n \geq 3$ la risposta è no. Per farlo utilizzò l'Assioma di scelta per partizionare una sfera in quattro insiemi A, B, C, D, tali che A, B, C e $B \cup C$ sono congruenti e D è finito o numerabile con misura nulla: così un terzo della sfera avrebbe la stessa misura di mezza sfera.[1, par. 3.7]. Questo risultato oggi è conosciuto come paradosso di Hausdorff e portò alla scoperta di un'altra conseguenza paradossale dell'assioma di scelta: il paradosso di Banach-Tarski.

Proposizione 6.3.2. *Se $S_r \subset \mathbb{R}^3$ è una qualsiasi sfera solida di raggio r nello spazio euclideo ordinario, è possibile suddividerla in un numero finito di parti riassemblabili (con movimenti rigidi) in due sfere complete con lo stesso raggio r.*

Le radici di questo paradosso si trovano nell'intenzione di Banach di studiare e risolvere il problema della misura di Hausdorff per i due casi che erano rimasti aperti: la linea e il piano. Dopo aver trovato una misura soddisfacente per questi due casi, Banach si concentrò sul paradosso generato dal lavoro di Hausdorff. Nel 1924, insieme a Tarski, dimostrò che in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, due insiemi limitati qualsiasi con interno non vuoto, sono equivalenti per decomposizione in parti finite congruenti. Di conseguenza, Banach e Tarski osservarono che due sfere di raggio diverso o due poliedri qualsiasi sono equivalenti per decomposizione in parti finite congruenti (in realtà questo fu il loro risultato originario, si veda [1, par. 4.11]). I due speravano di usare questo risultato come motivo per non avvalersi di AS ma molti matematici preferirono utilizzare l'Assioma e vedere nel paradosso di Banach e Tarski semplicemente un risultato controintuitivo e tuttavia di per sé non contraddittorio. Infatti, il paradosso mostra che non è possibile formulare una nozione di misura che da una parte si accordi con la classica nozione di volume (e che quindi sia invariante per roto-traslazioni) e che dall'altra possa essere applicata a tutti i sottoinsiemi dello spazio: se della classica nozione di volume si vuole preservare la proprietà di invarianza roto-traslazionale, allora si deve rinunciare alla pretesa di misurare ogni sottoinsieme dello spazio [1].

6.4 Alternative ad *AS*

Abbiamo visto che l'introduzione di *AS* in matematica ha dato origine a due diverse reazioni: la ricerca dei teoremi che richiedevano il suo utilizzo al fine di mettere in evidenza la sua importanza oppure il tentativo di renderlo eliminabile dalle dimostrazioni e dunque di evitarlo. Quando ci si accorse che senza *AS* tutta la struttura della teoria della misura di Lebesgue avrebbe avuto seri problemi, molti analisti che rifiutavano l'Assioma si preoccuparono di cercare una soluzione per aggirare il problema. Tra questi c'era l'italiano Leonida Tonelli, che nel 1921 propose di sostituire la teoria dell'integrazione di Lebesgue con una teoria alternativa che non faceva uso dell'assioma di scelta. L'integrazione proposta da Tonelli era molto simile a quella che aveva introdotto prima di lui W.H.Young e con *AS* si può dimostrare che è del tutto equivalente a quella di Lebesgue. Siccome Tonelli rifiutava l'Assioma, non si preoccupò di dimostrare che il suo integrale fosse numerabilmente additivo. Si accontentò di provare che se f è una funzione integrabile (secondo Tonelli) e se $E_1, E_2, ...$ è una successione di insiemi misurabili che converge ad un insieme E, allora la successione degli integrali di f su $E_1, E_2, ...$ converge all'integrale di f su E.
Diversa fu invece la strategia utilizzata da Beppo Levi, che piuttosto che pensare a teorie alternative per evitare *AS* , cercava una restrizione più costruttiva dell'Assioma da sostituire a quella classica. Levi, pensava che in matematica si dovesse operare solo in particolari " domini deduttivi ", come quello dei numeri naturali o dei reali, dove gli insiemi definiti possono essere considerati come "un unico e irriducibile atto del pensiero ". Postulò così la possibilità di far uso delle scelte arbitrarie sotto alcune condizioni particolari, attraverso il suo *principio di approssimazione*:

> *Assumiamo che D sia un dominio deduttivo che include quello dei reali e sia $A_1, A_2, ..$ una successione di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Supponiamo che per un dato insieme M, ci sia una funzione $f : E \to M$, dove E è un insieme dato di*

> *funzioni di scelta per la successione $A_1, A_2, \ldots$. [...] Sia poi $d : M \times M \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $d(x, y) = 0$, se e solo se $x = y$. Infine assumiamo che per ogni reale positivo r, esista un intero n tale che per ogni $u, v \in E$ che coincidono sui loro primi n-elementi, $d(f(u), f(v)) < r$. Così ogni membro dell'immagine di E si trova in una certa estensione naturale di D.* (Levi, *Riflessioni sopra alcuni principii della teoria degli aggregati e delle funzioni*, ritradotto da [1]; non è spiegato cosa sia una "estensione naturale ")

Era questa l'assunzione alternativa, ma anche poco maneggevole, che Levi offrì come sostituto di AS . Come osservò egli stesso, il suo principio non era equivalente all'Assioma e quindi non giustificava tutti i suoi usi, in particolare quelli che riguardavano la cardinalità. Sebbene Levi accettasse solo la sua forma ristretta di AS , non condivideva affatto le idee costruttiviste di fondare la matematica esclusivamente sui numeri naturali, perchè secondo lui avrebbero portato alla distruzione dell'Analisi. Per molto tempo il principio di Levi non attirò l'attenzione degli altri matematici, soprattutto perchè il suo enunciato rimaneva piuttosto vago e non era chiaro cosa intedesse quando parlava di domini deduttivi. Comunque, nel 1931 Tullio Viola allora a Bologna, pubblicò un articolo in cui applicava questo principio all'Analisi. In particolare ne dedusse l'equivalenza dei punti di accumulazione e di limite sequenziale in $\mathbb{R}^n$ e che un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$ è infinito se e soltanto se è D-infinito. In realtà, Viola era riuscito ad ottenere questi risultati perchè il principio di Levi e ASN sono equivalenti [1]. Nonostante Viola avesse cercato di determinare quei teoremi della teoria della misura in cui il principio di approssimazione poteva essere usato come sostituto dell'Assioma, l'interesse nei confronti dell'alternativa di Levi svanì ben presto. Infatti anche i matematici italiani che non credevano in AS , preferirono determinare dove esso poteva essere evitato piuttosto che affidarsi al principio di approssimazione.

In generale possiamo dire che fino al 1962, neppure i critici più ostinati dell'assioma erano riusciti a trovare una valida alternativa ad esso. In quell'anno finalmente due matematici polacchi, J. Mycielski e H. Steinhaus introdussero l'assioma di determinatezza che qui indicheremo con *AD*. Questo assioma nacque dalla teoria dei giochi infiniti e stabilisce che se S è un insieme di successioni numerabili di 0 e 1, e due giocatori a turno scelgono un elemento (0 o 1) e formano una successione infinita allora il gioco è determinato; cioè esiste sempre una strategia che garantisce che la successione sta in S o che garantisce che non ci sia. Nel 1964 Mycielski affermò che *AD* poteva essere considerato una valida alternativa all'assioma di scelta e di più permetteva di evitare alcune sue spiacevoli conseguenze, come il paradosso di Banach-Tarski. Come mostrò in seguito, *AD* implica anche che ogni insieme di numeri reali è misurabile secondo Lebesgue e da esso si può dedurre *ASN* ristretto ai sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Però Mycieski sosteneva anche che la consistenza di *AD* in **ZF** è abbastanza problematica e oggi si sa che alcuni risultati dimostrati falsi con *AS* , risultano veri come conseguenze di *AD*. Le conseguenze di *AD*, le sue restrizioni e le relazioni con *AS* sono attualmente un problema aperto, per approfondimenti si veda [1, par. 5.2].

6.5 Il contributo di Hilbert

Concludiamo il discorso sulle diverse forme dell'Assioma parlando del contributo che diede Hilbert con il suo assioma di scelta globale: un enunciato da cui segue *AS* ma più generale di esso (in realtà come vedremo non fu Hilbert a dargli questo nome).
Tra le due guerre mondiali furono tre gli aspetti della relazione tra l'Assioma e la logica ad interessare maggiormente i matematici. Il primo di questi riguardava l'uso vero e proprio dell'Assioma all'interno dell'emergente branca della logica matematica; il secondo si basava sul posto occupato da *AS* nei vari sistemi assiomatici per la teoria degli insiemi; il terzo aspetto, che ci condurrà direttamente alla prossima sezione, si

basava sullo studio della consistenza dell'Assioma e della sua indipendenza. Hilbert e la sua scuola avevano come principale obiettivo quello di ridurre la logica alla sintassi e credevano fortemente nell'importanza del metodo assiomatico. Quando nel 1922 Hilbert fu attaccato dalle critiche degli intuizionisti, cercò di difendersi riformulando ogni questione fondamentale in maniera così semplice da evitare ogni domanda: voleva rendere anche alcune forme dell'assioma di scelta *"tanto ovvie quanto la relazione* $2 + 2 = 4$*"*. L'idea di Hilbert era quella di sviluppare una teoria della dimostrazione matematica che avrebbe fornito una solida base sia per l'Analisi che per la teoria degli insiemi, considerando la matematica e la sua logica sottostante come stringhe di simboli da interpretare. In questa visuale le dimostrazioni diventerebbero stringhe aventi una determinata forma e ottenibili da determinate regole meccaniche a partire da stringhe iniziali, gli assiomi. Respingendo le critiche dell'assioma di Zermelo, Hilbert scriveva:

> *L'idea essenziale su cui si basa l'assioma di scelta costituisce un principio logico generale necessario e indispensabile perfino per i primi elementi di inferenza matematica. Se riusciamo ad assicurare questi primi elementi otteniamo contemporaneamente le fondamenta per l'assioma di scelta. Entrambi sono garantiti mediante la mia teoria della dimostrazione.* (Hilbert, *The Axiom of Choice in Mathematical Logic* ritradotto da [1, 4.8]).

Quello che Hilbert aveva in mente era un nuovo postulato per la logica, che chiamò *assioma transfinito* e che formulò in termini del suo linguaggio simbolico. Questo postula l'esistenza di "elementi generici" per ogni proprietà (insiemi). L'intenzione di Hilbert di fondare la logica sull'assioma transfinito attirò l'attenzione di diversi matematici. Tra questi c'era W. Ackermann che stabilì senza una dimostrazione che l'assioma di Hilbert implica l'assioma di scelta. In Italia, d'altra parte, Cipolla criticava l'assioma transfinito perchè troppo vago e piuttosto preferiva una forma molto generale dell'assioma di scelta equivalente ad esso:

Proposizione 6.5.1. *Per ogni classe M di insiemi non vuoti esiste una funzione che assegna ad ogni A in M un elemento di A.*

Se M è uguale alla classe universale, allora la precedente proposizione viene detta *assioma di scelta globale*, un termine coniato da A. Levy [1, par. 4.8]. Questo enunciato di Cipolla implica AS ma non è equivalente ad esso, cosa che a quel tempo non era conosciuta. In realtà Cipolla dimostrò che l'assioma di Hilbert non è equivalente alla proposizione 6.5.1, ma ad una forma ancor più generale dell'assioma di scelta:

Proposizione 6.5.2. *Esiste una funzione σ tale che $\sigma(C) \in C$ per ogni classe non vuota C.*

Da questa equivalenza Cipolla concluse che l'assioma di Hilbert era tanto illeggittimo quanto quello di Zermelo.

6.6 Consistenza e indipendenza di *AS*

Nonostante la tempesta di critiche e lo scetticismo che avevano generato l'assioma di scelta e le sue conseguenze paradossali, la sua grande importanza ormai evidente in ogni ambito della matematica ha fatto si che esso venisse considerato parte integrante della teoria degli insiemi, e solitamente lo si menziona a stento nelle dimostrazioni in cui risulta essenziale. Sicuramente hanno giocato un ruolo importante a favore della sua accettazione, i risultati di Gödel della sua consistenza.
Dopo la pubblicazione dell'assiomatizzazione di Zermelo molti matematici speravano di provare o refutare la consistenza di AS senza alcun risultato. Hilbert fallì perfino nel provare la consistenza della teoria degli insiemi in termini di logica matematica, anche restringendosi al caso degli assiomi per i numeri reali [1, par. 4.8].
Il motivo di questi fallimenti fu trovato da Gödel: tra il 1930 e il 1931 scoprì che gli assiomi per i numeri naturali non sono sufficienti per

provare la loro stessa consistenza e che la consistenza della teoria **ZF** (l'assiomatizzazione di Zermelo che in quegli anni veniva ripresa da Fraenkel), non poteva essere dedotta in **ZF** stessa. Gödel aveva provato che una dimostrazione per la sua consistenza poteva essere ottenuta solo da un sistema più ampio, la cui consistenza però ritorna ad essere indimostrabile in esso. Qualche anno più tardi (1937), Ackermann stabilì la consistenza di una versione ristretta del sistema di Zermelo, che escludeva l'assioma dell'infinito, ma includeva AS . La sua strategia fu quella di ridurre la consistenza del sistema di assiomi considerato a quella della teoria elementare dei numeri. Ackermann aveva pensato di rappresentare ogni insieme come un numero naturale: la rappresentazione unica di ogni numero come somma di potenze distinte di 2, unitamente all'interpretazione di $\in$ come la relazione esponente-numero, permetteva di trasformare gli assiomi di Zermelo in teoremi di teoria dei numeri elementare.
Ma la questione più interessante riguardava la consistenza dell'intero sistema di Zermelo, compreso l'assioma dell'infinito senza il quale il sistema perderebbe la sua reale importanza: in particolare, aggiungendo l'assioma di scelta il sistema diventava contradditorio? Gödel rispose negativamente e durante il suo soggiorno a Princeton nel 1935 informò Von Neumann che aveva appena stabilito la consistenza dell'Assioma introducendo i suoi insiemi "costruibili" (che sono costruibili per mezzo di formule che definiscono intensionalmente l'insieme stesso). Chiariamo: la classe L di tutti gli insiemi costruibili si definisce attraverso l'induzione transfinita, vediamo brevemente come.

- Un insieme X è definibile in un modello M se vi è una fbf Φ del linguaggio del primo ordine e alcuni $a_1, ..., a_n \in M$ tali che

$$X = \{x \in M : M \models \Phi(x, a_1, ..., a_n)\};$$

- si definisce $Def(M) = \{X \subset M : X \text{ è definibile in } M\}$;

- si definiscono insiemi L_α per induzione transfinita nel seguente modo:

1. $L_0 = \emptyset$
2. $L_{\alpha+1} = Def(L_\alpha)$
3. $L_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta$ se α limite
4. $L = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{ORD}} L_\alpha$.

Con questa costruzione egli provò il seguente

Teorema 6.6.1. *Se **ZF** è consistente, lo è anche **ZFC** , cioè AS non è refutabile in **ZF** : **ZF*** $\nvdash \neg AS$.

Per ottenere questo risultato Gödel mostrò che la classe L degli insiemi costruibili è un modello per **ZF** . Di più, il suo modello soddisfaceva anche una proposizione che successivamente divenne famosa come *assioma di costruttibilità*, sul quale Gödel stesso ebbe delle riserve: *ogni insieme è costruibile.*
Un altro risultato importante ottenuto in quegli anni è la dimostrazione di Andrzej Mostowski, che fu influenzato dal metodo di Gödel basato su insiemi costruibili, che l'assioma delle scelte indipendenti non implica l'assioma di scelta [1]. La strategia di Mostowski, basata sull'utilizzo di insiemi non numerabili di *Urelementen* (oggetti della teoria che NON sono insiemi), era molto simile a quella usata da Fraenkel per i suoi risultati di indipendenza. Il metodo di Fraenkel-Mostowski diede i suoi risultati più importanti (come l'indipendenza dell'assioma di scelta, [1]) poco prima di essere sostituito dall'efficace metodo del *forcing* che Paul Cohen utilizzò per dimostrare l'indipendenza dell'assioma di scelta:

Teorema 6.6.2. *Se **ZF** è consistente AS non è derivabile in **ZF** : **ZF*** $\nvdash AS$.

Un altro argomento che interessava Cohen era l'ipotesi del continuo (in simboli la denoteremo con *CH*), che come abbiamo visto nel paragrafo 3.2, era stata enunciata da Cantor in diversi modi senza però alcuna dimostrazione. Sperando che fosse più facile da dimostare, Cantor formulò un'ipotesi più generale che pure rimase indimostrata:

Ipotesi generalizzata del continuo (GCH).
Non esistono potenze intermedie tra quella di un insieme infinito e quella del suo insieme della parti.

In realtà Cantor non poteva immaginare che, come rivelarono successivamente i risultati di Gödel e Cohen, il suo obiettivo non era raggiungibile. Infatti Gödel nel 1938 aveva dimostrato la consistenza di GCH con **ZFC** , seguendo lo stesso metodo utilizzato per il caso di AS :

Teorema 6.6.3. *Se* ***ZF*** *è consistente lo è anche* ***ZFC*** $\cup \{GCH\}$*: quindi* ***ZF*** $\nvdash \neg GCH$.

L'indipendenza dell'ipotesi del continuo da **ZFC** fu dimostrata da Cohen attraverso un modello di **ZFC** in cui CH non vale:

Teorema 6.6.4. *Se* ***ZF*** *è consistente, da* ***ZFC*** *non si può derivare CH: cioè* ***ZFC*** $\nvdash CH$. *Equivalentemente, è consistente anche* ***ZFC*** $\cup \{\neg CH\}$.

Concludiamo con uno dei risultati più importanti che provò Sierpiński nel 1947 a proposito dell'ipotesi generalizzata del continuo ristretta ai numeri cardinali (non per potenze di insiemi infiniti qualsiasi), in relazione all'assioma di scelta:

Teorema 6.6.5. *In* ***ZF*** *, l'ipotesi generalizzata del continuo implica l'assioma di scelta:* ***ZF*** $\vdash GCH \Longrightarrow AS$.

Per approfondimenti si veda [1, par. 4.1]. Questi risultati provano ancora una volta la stretta connessione tra l'Assioma e l'ipotesi del continuo.

Conclusione

La storia dell'assioma di scelta, l'importanza di molte sue conseguenze e i risultati sulla sua consistenza hanno convinto la maggior parte dei matematici moderni della sua indispensabilità. Come affermava spiritosamente Russell, se l'insieme A è costituito da paia di scarpe, si può sempre trovare una funzione che seleziona da ogni paio una scarpa (ad esempio la scarpa sinistra); ma se l'insieme A è costituito da calzini una simile funzione non si può usare in quanto ogni paio è costituito da calzini identici. Per induzione si potrebbe dimostrare che una funzione di scelta esiste quando A è finito nel caso dei calzini, ma se immaginiamo, come è consentito in matematica, infinite paia di calzini allora abbiamo bisogno di qualche principio, come l'Assioma di scelta che ne garantisca l'esistenza: qui sta la sua utilità, anche in casi apparentemente semplici.
Da questo esempio di Russell si può fare qualche importante considerazione sulla trasformazione graduale del modo di fare matematica, che ebbe luogo tra la fine del XIX e l'inizio del XX secolo, di cui l'assioma di scelta rappresenta l'emblema. Il motivo fondamentale del suo rifiuto da parte di molti matematici, tra cui Borel, Baire, Lebesgue, Peano (e, in parte lo stesso Russell), era il carattere poco costruttivo che l'assioma conferiva alle dimostrazioni in cui veniva usato. Essi pensavano che l'esistenza di un oggetto matematico con una certa proprietà potesse essere stabilita solo esibendone uno particolare: l'assioma di scelta in generale non prevedeva l'utilizzo di nessuna regola specifica per questo scopo e quindi era da evitare. Questo atteggiamento si scontrava però con lo sviluppo di nuove teorie matematiche sempre più astratte

e quindi con l'esigenza di generalità piuttosto che di costruzione. Fu proprio per questo motivo che soprattutto i semi-intuizionisti francesi citati si ritrovarono ad accettare il compromesso offerto dall'assioma delle scelte dipendenti (spesso ridotto a quello delle scelte numerabili) che per il suo carattere apparentemente costruttivo veniva usato nelle dimostrazioni senza alcun problema.

L'assioma di scelta simboleggia quindi un cambiamento che l'uso dell'infinito attuale in tutta la matematica ha reso evidente: l'esistenza e la costruzione sono due concetti matematici notevolmente differenti.

Per quanto riguarda la trattazione del modo di concepire l'infinito matematico da parte degli insegnanti della scuola secondaria, si consiglia di leggere la tesi di dottorato di S. Sbaragli [4], in cui si mette in evidenza attraverso una sperimentazione, come il concetto di infinito spesso trattato in maniera vaga e imprecisa, tenda a confondere gli studenti. In questo lavoro di ricerca, l'autrice ha potuto osservare come sia difficoltoso per gli insegnanti distinguere l'infinito attuale da quello potenziale e afferma che le stesse difficoltà sono state incontrate anche nel corso della storia della matematica di cui abbiamo parlato e che rappresenta la sfondo storico-matematico in cui si colloca il nostro Assioma...

Come abbiamo visto, le critiche all'assioma di scelta hanno spinto Zermelo a iniziare un'assiomatizzazione della teoria degli insiemi con l'obiettivo di giustificare formalmente i suoi risultati. L'Assioma si pone così al centro della crisi dei fondamenti, assieme ai contributi di Frege, Hilbert e altri matematici, che tentarono di dare una rigorosa giustificazione formale all'insieme di definizioni e deduzioni su cui si basavano le loro teorie: siamo nel pieno della crisi dei fondamenti che come sappiamo raggiunse il culmine e la sua risoluzione con la scoperta dei teoremi di incompletezza di Gödel.

A questo punto non possiamo far altro che riconoscere che postulando l'esistenza senza un metodo di costruzione per una funzione di scelta, l'Assioma ha aperto le porte alla matematica astratta moderna e ha messo in evidenza come la matematica non si possa ridurre ai soli algoritmi (e alla sola logica).

Ringraziamenti

Sembra un gioco di parole ma inevitabilmente in questi ultimi cinque anni mi sono ritrovata a dover fare tante scelte... scelte per cui non c'è alcun assioma.
Ho scelto la matematica, ho scelto Bologna, ho scelto, con dispiacere, di stare lontana dalla mia famiglia, ho scelto nuovi amici, ho scelto di continuare a coltivare le mie passioni e di scoprirne altre.
Oggi, finalmente giunta a questo importante traguardo accademico, non so quanti e quali errori io abbia fatto, l'unica cosa che credo sia davvero importante è che, nonostante tutto, ho scelto e ce l'ho fatta!
Per questo mi sembra doveroso ringraziare alcune persone senza le quali non sarebbe stato possibile.
Prima di tutto ringrazio il professor Piero Plazzi, non solo per la sua disponibilità, professionalità e pazienza di relatore ma anche per l'interesse che ha suscitato in me il suo corso di principi della matematica.
Ringrazio mia madre che con la sua sensibilità e fragilità mascherate da forza e determinatezza, ha sempre creduto in me e mi ha spinta a fare sempre meglio, insegnandomi l'importanza dell'umiltà e dell'ironia.
Dico grazie a mia sorella Sara che ho sentito sempre vicina, nonostante la lontanza. A lei faccio i miei auguri per l'inizio del suo percorso accademico e tengo a dirle: niente si ottiene con facilità, ci vuole tanta pazienza e tanta fiducia in sè stessi.
Ringrazio la mia amica Alice e il mio amico Luca, con voi ho ricominciato a credere nella vera Amicizia... e nel gelato! Credo che il nostro sia un legame speciale! Grazie a Cesare e a Giuliana che mi hanno accolta nella loro famiglia e che mi hanno fatto capire che non servono

legami di sangue per volersi bene. Per la stessa ragione dico grazie anche alla famiglia Deplanu.
Ringrazio Gianluca e tutta la famiglia Punzo per essere stato uno dei miei punti di riferimento più importanti di questi anni, senza il quale mi sarei sentita persa. Grazie a voi ho imparato a non accontentarmi.
Grazie a mio nonno Guido, che da lassù ha saputo essere molto previdente... e grazie anche a mia nonna Dora.
Ringrazio il mio amico Manlio perchè a modo suo ci è sempre stato e ci sarà sempre. Grazie a Giuseppe e a tutti quelli che anche se non sono stati citati, hanno creduto in me.
Infine dico Grazie a Gianluca, mio compagno di studio e di vita che premurosamente è stato al mio fianco in ogni momento e senza aggiungere altro, concludo dicendo che è stata la scelta migliore che potessi fare.

Bibliografia

[1] Moore, Gregory H. : *Zermelo's Axiom of Choice: Its Origins, Development, and Influence.* Dover, Mineola-New York, 2013.

[2] Moschovakis, Yiannis N. : *Notes on Set Theory.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin 1994.

[3] Lolli, Gabriele : *Dispense per il corso di Filosofia della matematica 08-09.* Web Link : http://homepage.sns.it/lolli/

[4] Sbaragli, Silvia : *Le convinzioni degli insegnanti sull'infinito matematico.* Tesi di dottorato, Università di Bratislava 2004. Web Link: http://www.dm.unibo.it/rsddm

[5] Bolzano, Bernand : *I paradossi dell'infinito.* Bollati Boringhieri, Torino 2003.

[6] Bettazzi, Rodolfo : "Gruppi finiti ed infiniti di enti". *Atti della Reale Accademia delle scienze di Torino* 31 n.8 (1895 - 1896) pp.506-512. Reperibile anche su Emeroteca digitale - Biblioteca Nazionale Braidense. Web Link: http://emeroteca.braidense.it/

[7] Bettazzi, Rodolfo : "Sulla definizione del gruppo finito ". *Atti della Reale Accademia delle scienze di Torino* 32 n.6 (1896 - 1897), pp.352-355. Reperibile anche su Emeroteca digitale - Biblioteca Nazionale Braidense. Web Link: http://emeroteca.braidense.it/