

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI  
BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Corso di Laurea in Fisica

**IL RUOLO DELLA TEORIA DELLA  
RELATIVITÀ NELLA  
FORMAZIONE DI STRUTTURE  
STELLARI: NANE BIANCHE E  
STELLE DI NEUTRONI**

**Relatore:**  
Prof. Francesco Ravanini

**Presentata da:**  
Guido Davoli

**Sessione II**  
**Anno Accademico 2013/2014**

# Introduzione

In questa tesi viene affrontato il problema della stabilità delle strutture stellari da un punto di vista relativistico. La stella è approssimata ad un fluido perfetto a simmetria sferica, e le equazioni che ne governano la struttura vengono ricavate grazie alla risoluzione delle equazioni di campo della relatività generale in questo caso particolare. L'approssimazione di fluido perfetto permette anche di ricavare un'equazione di stato che lega densità di energia e pressione tramite un parametro, detto parametro di rigidità. Un'analisi del comportamento della materia al variare della densità consente di stabilire l'andamento di questo parametro, mentre uno studio delle piccole oscillazioni radiali della stella permette di stabilire quali sono i valori del parametro che consentono un equilibrio stabile. La stabilità risulta possibile in due differenti intervalli di densità, che corrispondono ai due tipici stadi finali dell'evoluzione stellare: nana bianca e stella di neutroni. Grazie alle equazioni che descrivono la struttura stellare è possibile stabilire, nei due intervalli di densità, quale sia il valore che la massa della stella non può superare: si ricavano il limite di Chandrasekhar e il limite di Oppenheimer-Volkoff. Infine viene mostrato come la relatività generale imponga un limite assoluto alla stabilità di una distribuzione di materia, sostenuta da una qualsiasi forza della natura: superato questo confine, la materia non può fare altro che collassare in un buco nero.

# Indice

<b>1</b>	<b>Il teorema di Birkhoff</b>	<b>1</b>
1.1	Dimostrazione del teorema . . . . .	1
1.2	La metrica di Schwarzschild . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Fluidodinamica relativistica</b>	<b>7</b>
2.1	Il tensore energia-impulso . . . . .	7
2.2	Il fluido perfetto . . . . .	8
2.3	Equilibrio idrostatico . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Generalità sulla struttura stellare</b>	<b>10</b>
3.1	Equazioni fondamentali . . . . .	10
3.2	Energia termica e gravitazionale . . . . .	13
3.3	L'equazione di stato . . . . .	14
3.4	L'andamento di $\gamma$ . . . . .	16
3.5	Considerazioni termodinamiche . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Stelle newtoniane politrope</b>	<b>21</b>
4.1	Limite non relativistico ed entropia costante . . . . .	21
4.2	La funzione di Lane-Emden . . . . .	23
4.3	Raggio e massa di un politropo newtoniano . . . . .	23
4.4	Energie di un politropo newtoniano . . . . .	25
4.5	Stabilità di un politropo newtoniano . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Nane bianche</b>	<b>29</b>
5.1	Gas relativistico di elettroni . . . . .	29
5.2	Massa limite di Chandrasekhar . . . . .	31
<b>6</b>	<b>Stelle di neutroni</b>	<b>35</b>
6.1	Oltre la nana bianca . . . . .	35
6.2	Massa limite di Oppenheimer-Volkoff . . . . .	36
6.3	Redshift gravitazionale . . . . .	38

6.4	Configurazioni finali stabili dell'evoluzione stellare . . . . .	39
<b>7</b>	<b>Collasso gravitazionale</b>	<b>41</b>
7.1	Il collasso continua . . . . .	41
7.2	Un limite per l'equilibrio stellare . . . . .	42

# Capitolo 1

## Il teorema di Birkhoff

In questo capitolo viene dimostrato che una distribuzione di massa non statica, ma che preserva nel tempo una simmetria sferica, deforma lo spaziotempo vuoto attorno a sè in modo indipendente dal tempo, ovvero non genera onde gravitazionali. La metrica esterna alla sorgente risulta essere la metrica di Schwarzschild. L'importanza di questo risultato per la costruzione di un modello della struttura interna delle stelle stabili sta nel fatto che queste saranno considerate in prima approssimazione sferiche, quindi la metrica interna dovrà raccordarsi con continuità a quella di Schwarzschild sulla superficie, e che la stella sia statica e che sia pulsante nella direzione radiale.

### 1.1 Dimostrazione del teorema

Per scrivere la metrica che descrive lo spaziotempo all'esterno di una distribuzione di massa a simmetria sferica è conveniente utilizzare come coordinate spaziali quelle polari  $(r, \theta, \phi)$  definite in funzione delle coordinate cartesiane dalle relazioni:

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad (1.1a)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi \quad (1.1b)$$

$$z = r \cos \theta. \quad (1.1c)$$

La particolare simmetria del problema implica che l'intervallo di tempo proprio  $ds^2$  possa dipendere solo dalle seguenti quantità invarianti per rotazione:

$$t, dt, r, \vec{x} \cdot d\vec{x} = r dr, d\vec{x}^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.2)$$

dove  $\vec{x} = (x, y, z)$ ; pertanto la metrica a simmetria sferica più generale che possiamo scrivere è

$$ds^2 = C(r, t)dt^2 - D(r, t)dr^2 - 2E(r, t)drdt - F(r, t)r^2d\Omega^2 \quad (1.3)$$

dove  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$  e dove è stata usata una metrica a segnatura  $(+, -, -, -)$ . Tale espressione può essere semplificata tramite alcune sostituzioni. La funzione  $F$  può essere rimossa definendo come nuova coordinata radiale

$$r' = rF^{1/2}(r, t) \quad (1.4)$$

che riduce la metrica a

$$ds^2 = C'(r', t)dt^2 - D'(r', t)dr'^2 - 2E'(r', t)dr'dt - r'^2d\Omega^2. \quad (1.5)$$

Introducendo una nuova coordinata temporale definita da

$$dt' = \eta(r', t)[C'(r', t)dt - E'(r', t)dr'] \quad (1.6)$$

la metrica si scrive come

$$ds^2 = \frac{dt'^2}{\eta^2 C'} - \left( \frac{E'^2}{C'} + D' \right) dr'^2 - r'^2 d\Omega^2. \quad (1.7)$$

Infine tramite le sostituzioni  $A = E'^2 C'^{-1} + D'$  e  $B = C'^{-1} \eta^{-2}$  e omettendo gli apici sulle nuove coordinate radiale e temporale, otteniamo la metrica:

$$ds^2 = B(r, t)dt^2 - A(r, t)dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (1.8)$$

Nello spazio vuoto all'esterno della massa, cioè nella regione in cui si vuole determinare la metrica, il tensore energia impulso  $T_{\mu\nu}$  è identicamente nullo, per cui l'equazione di Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (1.9)$$

si riduce a

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (1.10)$$

Infatti la (1.12) può essere contratta con  $g^{\mu\nu}$  per dare

$$R - 2R = 8\pi GT_{\mu}^{\mu} \quad \implies \quad R = -8\pi GT_{\mu}^{\mu} \quad (1.11)$$

che sostituita in (1.12) dà

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T_{\lambda}^{\lambda}). \quad (1.12)$$

Nel caso in cui il tensore energia-impulso sia nullo (cioè nel vuoto, all'esterno della distribuzione di massa) si arriva all'espressione (1.10), che è l'equazione che deve essere soddisfatta dalla metrica che cerchiamo.

Per risolvere l'equazione (1.10) è necessario calcolare le componenti del tensore di Ricci  $R_{\mu\nu}$ . Dalla geometria differenziale è noto che questo tensore è legato ai simboli di Christoffel  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  tramite la relazione

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\lambda\sigma}^\lambda - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \quad (1.13)$$

e che i simboli di Christoffel, quando simmetrici (cioè se vale  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$ , che corrisponde al caso fisico) sono legati alla metrica  $g_{\mu\nu}$  tramite la relazione

$$\Gamma_{\mu\rho}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\nu\lambda} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (1.14)$$

In questo caso i simboli di Christoffel risultano (quelli non riportati sono nulli):

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^r &= \frac{\partial_r A}{2A} & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -\frac{r}{A} & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -\frac{r \sin^2 \theta}{A} \\ \Gamma_{tt}^r &= \frac{\partial_r B}{2A} & \Gamma_{rt}^r &= \Gamma_{tr}^r = \frac{\partial_t A}{2A} & \Gamma_{\theta r}^\theta &= \Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta & \Gamma_{\phi r}^\phi &= \Gamma_{r\phi}^r = \frac{1}{r} & \Gamma_{\phi\theta}^\phi &= \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \cot \theta \\ \Gamma_{rr}^t &= \frac{\partial_t A}{2B} & \Gamma_{tt}^t &= \frac{\partial_t B}{2B} & \Gamma_{tr}^t &= \Gamma_{rt}^t = \frac{\partial_r A}{2A}. \end{aligned}$$

Da questi è possibile calcolare le componenti del tensore di Ricci (quelle non riportate sono nulle):

$$\begin{aligned} R_{rr} &= -\frac{\partial_r^2 B}{2A} + \frac{(\partial_r B)^2}{4B^2} + \frac{\partial_r A \partial_r B}{4AB} + \frac{\partial_r A}{Ar} + \frac{\partial_t^2 A}{2B} - \frac{\partial_t A \partial_t B}{4B^2} - \frac{(\partial_t A)^2}{4AB} \\ R_{\theta\theta} &= 1 - \frac{1}{A} + \frac{r \partial_r A}{2A^2} - \frac{r \partial_r B}{2AB} \\ R_{\phi\phi} &= R_{\theta\theta} \sin^2 \theta \\ R_{tt} &= \frac{\partial_r^2 B}{2A} - \frac{(\partial_r B)^2}{4AB} - \frac{\partial_r A \partial_r B}{4A^2} + \frac{\partial_r B}{Ar} - \frac{\partial_t^2 A}{2A} + \frac{\partial_t A \partial_t B}{4AB} + \frac{(\partial_t A)^2}{4A^2} \\ R_{tr} &= R_{rt} = \frac{\partial_t A}{Ar} \end{aligned}$$

Per risolvere l'equazione (1.10) si eguagliano a zero le espressioni appena ricavate. Da quella per la componente  $R_{tr}$  si deduce che

$$\frac{\partial_t A}{Ar} = 0 \quad \implies \quad \partial_t A = 0 \quad (1.15)$$

cioè  $A$  è una funzione che non dipende da  $t$  e di conseguenza le sue derivate temporali spariscono da tutte le equazioni. Dalla combinazione  $A^{-1}R_{tt} + B^{-1}R_{rr} = 0$  si ricava

$$\partial_r(AB) = 0 \implies AB = f(t) \implies B(r, t) = f(t)A^{-1}(r) \quad (1.16)$$

con  $f$  funzione arbitraria. A questo punto possiamo definire una nuova variabile temporale  $\tilde{t}$  tale che

$$d\tilde{t} = \sqrt{f(t)}dt \quad (1.17)$$

e riscrivere la (1.8) come

$$ds^2 = A(r)^{-1}d\tilde{t}^2 - A(r)dr^2 - r^2d\Omega^2. \quad (1.18)$$

Dall'equazione  $R_{\theta\theta} = 0$  moltiplicata per  $A$  si ha

$$A - 1 + \frac{r\partial_r A}{2A} = \frac{r\partial_r B}{2B} = \frac{rf(t)\partial_r(A^{-1})}{2f(t)A^{-1}} = -\frac{r\partial_r A}{2A} \quad (1.19)$$

che porta alla condizione

$$A + \frac{r\partial_r A}{A} = 1. \quad (1.20)$$

Imponendo  $\partial_r\left(\frac{r}{A}\right) = 1$  si ritrova l'equazione (3.24), infatti:

$$\partial_r\left(\frac{r}{A}\right) = 1 \implies \frac{A - r\partial_r A}{A^2} = 1 \implies 1 - \frac{r\partial_r A}{A} = A \quad (1.21)$$

dunque possiamo dire che l'equazione  $R_{\theta\theta} = 0$  porta alla condizione

$$\partial_r\left(\frac{r}{A}\right) = 1 \quad (1.22)$$

che integrata fornisce la soluzione

$$A(r)^{-1} = 1 + \frac{C}{r}. \quad (1.23)$$

Questo è consistente col fatto che con l'aumentare della distanza dalla sorgente gli effetti gravitazionali di quest'ultima diventano sempre più deboli e nel limite  $r \rightarrow \infty$  la metrica (1.18), già indipendente dal tempo, deve tendere a quella piatta di Minkowski:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2d\Omega^2. \quad (1.24)$$

Per determinare  $C$  basta ricordare il risultato che si ottiene dimostrando che la Teoria della Relatività Generale si riduce alla Teoria della Gravitazione di

Newton nel limite di campo gravitazionale debole e velocità non relativistiche. Dimostrando la compatibilità delle due teorie si trova che

$$g_{00} = A(r)^{-1} = 1 + 2V \quad (1.25)$$

dove  $V$  è il potenziale newtoniano:  $V = -\frac{GM}{r}$ . Dunque  $C = -2GM$  e la soluzione è (indicando  $\tilde{t}$  con  $t$  per semplicità):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (1.26)$$

La metrica appena ottenuta è nota come *metrica di Schwarzschild*, dal nome di colui che per primo la trovò come soluzione delle equazioni di campo di Einstein. Nel suo lavoro originale, Schwarzschild trovò questa soluzione cercando di determinare la geometria dello spaziotempo vuoto all'esterno di una distribuzione di massa a simmetria sferica e invariante nel tempo. Il teorema di Birkhoff, che abbiamo appena dimostrato, afferma che questa metrica è quella che si presenta anche all'esterno di una sorgente sferica ma non statica, ovvero la pulsazione radiale di un corpo sferico non produce alcuna modifica sullo spaziotempo circostante (non produce onde gravitazionali).

## 1.2 La metrica di Schwarzschild

La metrica (1.26) presenta due singolarità, una nel punto  $r = 0$  e una nel punto  $r = r_s = 2GM$  (raggio di Schwarzschild). La natura delle due singolarità è però diversa, poichè quella in  $r = r_s$  dipende dalla particolare scelta delle coordinate<sup>1</sup> mentre quella nell'origine è ineliminabile con un cambio di sistema di riferimento e corrisponde ad una curvatura infinita dello spaziotempo.

In ogni caso, la soluzione di Schwarzschild è valida nel vuoto, all'esterno della sorgente di campo gravitazionale che la genera. All'interno di un qualsiasi corpo massivo la metrica (1.26) non è la soluzione corretta, perchè il tensore energia impulso non si annulla e quindi l'equazione che deve essere soddisfatta dalla metrica non è  $R_{\mu\nu} = 0$ . I pianeti e le stelle stabili, in prima approssimazione sferici, hanno di solito un raggio molto maggiore di  $r_s$ : si può dimostrare infatti che il raggio minimo che garantisce la stabilità gravitazionale di un corpo massivo è  $\frac{9}{8}r_s^2$ . Raggi minori di tale valore portano inevitabilmente ad un collasso, cioè alla progressiva concentrazione della materia verso la singolarità centrale  $r = 0$  ed alla formazione di un buco nero.

<sup>1</sup>la metrica di Kruskal-Szekeres non presenta singolarità in  $r_s$ .

<sup>2</sup>si veda l'ultimo capitolo

Pertanto le due singolarità presenti nella metrica di Schwarzschild non saranno fonte di preoccupazione nei successivi capitoli, in cui ci occuperemo della costruzione di un modello fisico per la struttura interna di stelle stabili, sferiche, di raggio costante o pulsante. Infatti la metrica (1.26) vale solo all'esterno di esse, a distanze radiali ben maggiori di  $r_s$ . Si troverà infatti che all'interno della stella la metrica è perfettamente regolare. L'importanza del teorema di Birkhoff, nel nostro caso, sta nel fatto che la metrica interna alla stella dovrà essere tale da raccordarsi con continuità, sulla superficie, alla metrica di Schwarzschild.

# Capitolo 2

## Fluidodinamica relativistica

In questo capitolo vengono introdotti i concetti di fluido perfetto e di equilibrio idrostatico. A partire dalla definizione generale di tensore energia-impulso vengono ricavate le equazioni che descrivono un fluido in queste condizioni. Tali equazioni sono la base dei modelli stellari discussi nei capitoli successivi.

### 2.1 Il tensore energia-impulso

Dato un sistema di particelle etichettate con un indice  $n$ , interagenti solo per contatto, ognuna con quadrimomento  $p_n^\alpha(t)$  si definisce densità di quadrimomento la quantità

$$T^{\alpha 0}(\vec{x}, t) = \sum_n p_n^\alpha(t) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (2.1)$$

e densità di corrente di quadrimomento la quantità

$$T^{\alpha i}(\vec{x}, t) = \sum_n p_n^\alpha(t) \frac{dx_n^i(t)}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)). \quad (2.2)$$

Le due precedenti quantità possono essere riunite in un oggetto tensoriale detto *tensore energia-impulso*:

$$T^{\alpha\beta}(\vec{x}, t) = \sum_n p_n^\alpha(t) \frac{dx_n^\beta(t)}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (2.3)$$

dato che  $p_n^\beta = E_n \frac{dx_n^\beta}{dt}$  il tensore energia impulso può anche essere scritto come:

$$T^{\alpha\beta}(\vec{x}, t) = \sum_n \frac{p_n^\alpha p_n^\beta}{E_n} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (2.4)$$

da cui si nota immediatamente che  $T^{\alpha\beta}$  è simmetrico:

$$T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}. \quad (2.5)$$

Il tensore energia impulso di un sistema di particelle isolato (nessuna forza esterna agisce sul sistema) soddisfa inoltre l'equazione di conservazione

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0. \quad (2.6)$$

Si definisce inoltre quadricorrente di particelle la quantità

$$N^\alpha = nU^\alpha \quad (2.7)$$

dove  $U^\alpha$  è la quadrivelocità delle particelle e  $n$  è la densità di particelle misurata nel sistema di riferimento  $\tilde{O}$  in cui, in un particolare punto dello spaziotempo, il fluido è a riposo. La conservazione del numero totale di particelle implica che

$$N^\alpha_{;\alpha} = 0. \quad (2.8)$$

## 2.2 Il fluido perfetto

Si definisce *fluido perfetto* un fluido che ha in ogni punto una velocità  $\vec{v}$  tale che un osservatore che si muove a tale velocità vede il fluido attorno a sè isotropo. Approssimare un fluido reale ad uno perfetto è ragionevole quando le lunghezze tipiche che si considerano sono molto maggiori del cammino libero medio fra due urti fra le particelle del fluido, cioè quando l'effetto della viscosità è trascurabile.

L'approssimazione di fluido perfetto ci dice che il tensore energia-impulso assume in  $\tilde{O}$ , il sistema di riferimento solidale col fluido, la caratteristica forma a simmetria sferica:

$$\tilde{T}^{ij} = p\delta_{ij} \quad (2.9a)$$

$$\tilde{T}^{i0} = \tilde{T}^{0i} = 0 \quad (2.9b)$$

$$\tilde{T}^{00} = \rho \quad (2.9c)$$

dove  $i$  e  $j$  denotano le coordinate spaziali,  $x^0 = t$  e  $p, \rho$  sono dette rispettivamente *pressione* e *densità di energia*. Sia ora  $O$  il sistema di riferimento in cui il fluido si muove con velocità  $\vec{v}$ . In questo sistema  $T^{\alpha\beta}$  è dato da

$$T^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\gamma(\vec{v})\Lambda^\beta_\delta(\vec{v})\tilde{T}^{\gamma\delta} \quad (2.10)$$

dove  $\Lambda_{\nu}^{\mu}(\vec{v})$  è la matrice di Lorentz. Esplicitamente:

$$T^{ij} = p\delta_{ij} + (p + \rho)\frac{v_i v_j}{1 - \vec{v}^2} \quad (2.11a)$$

$$T^{i0} = (p + \rho)\frac{v_i}{1 - \vec{v}^2} \quad (2.11b)$$

$$T^{00} = \frac{\rho + p\vec{v}^2}{1 - \vec{v}^2} \quad (2.11c)$$

che possono essere scritte in modo più compatto come

$$\boxed{T^{\alpha\beta} = -pg^{\alpha\beta} + (p + \rho)U^{\alpha}U^{\beta}} \quad (2.12)$$

La (2.12) esprime il tensore energia impulso di un fluido perfetto nel sistema di riferimento  $O$  in cui il fluido si muove con quadrivelocità  $U^{\alpha}$ , in funzione di  $p$  e  $\rho$  che sono invece misurate nel sistema di riferimento comovente col fluido.

## 2.3 Equilibrio idrostatico

Se un fluido è in equilibrio idrostatico, è possibile trovare un sistema di riferimento in cui il fluido è globalmente a riposo, cioè in cui tutte le velocità sono nulle. Inoltre  $p$ ,  $\rho$  e  $g_{\mu\nu}$  sono invarianti nel tempo. In queste condizioni l'equazione di conservazione (2.6), calcolata per un fluido perfetto, diventa

$$-\partial_{\lambda}p = (p + \rho)\partial_{\lambda}\ln\sqrt{g_{00}} \quad (2.13)$$

che è una banale identità per  $\lambda = 0$  (componente temporale), ma per le componenti spaziali fornisce la formula relativistica per l'equilibrio idrostatico di un fluido perfetto:

$$\vec{\nabla}p = -\frac{1}{2}(p + \rho)\vec{\nabla}\ln g_{00}. \quad (2.14)$$

In condizioni di simmetria sferica l'unica derivata non nulla è quella rispetto ad  $r$ , per cui, indicando con  $B$  la componente  $g_{00}$  della metrica, la formula precedente si può riscrivere come

$$\boxed{\frac{\partial_r B}{B} = -\frac{2\partial_r p}{p + \rho}} \quad (2.15)$$

# Capitolo 3

## Generalità sulla struttura stellare

In questo capitolo, sulla base delle equazioni fluidodinamiche ricavate nel capitolo 2, viene costruito il modello stellare fondamentale per il proseguimento della trattazione. Il modello interno della stella è coerente con le considerazioni fatte nel capitolo 1 a proposito della metrica esterna. Vengono esposte e discusse le sue principali proprietà, nonché le ipotesi su cui si regge e i limiti della sua applicabilità.

### 3.1 Equazioni fondamentali

Il modello di stella che verrà delineato in questo capitolo e approfondito nei successivi si fonda su alcune ipotesi fondamentali a proposito della geometria spaziale e delle caratteristiche del fluido stellare. Le stelle di cui parleremo sono a simmetria sferica e costituite da un fluido perfetto in equilibrio idrostatico. Quando si parlerà di oscillazione radiale (stabile) della stella si intenderà un passaggio continuo attraverso configurazioni di equilibrio statiche. Questo significa che la metrica interna è del tipo

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (3.1)$$

e che il tensore energia-impulso assume la forma caratteristica di un fluido perfetto (2.12):

$$T^{\alpha\beta} = -pg^{\alpha\beta} + (p + \rho)U^\alpha U^\beta \quad (3.2)$$

dove i quadrivettori velocità soddisfano, per definizione, la relazione  $g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = 1$ . Poichè il fluido è in equilibrio idrostatico, è possibile trovare un sistema di riferimento in cui tutte le velocità spaziali  $U^r, U^\theta, U^\phi$  sono nulle, cioè in

cui vale

$$U^t = (B(r))^{-1/2} \quad (3.3)$$

In analogia con il procedimento svolto nel primo capitolo, dalla metrica a simmetria sferica (3.1) è possibile calcolare i simboli di Christoffel e da questi le componenti del tensore di Ricci. Queste ultime, inserite nell'equazione di campo (1.12), con il tensore energia impulso dato dalla (3.2) e tenendo conto della (3.3) danno luogo alle equazioni:

$$R_{rr} = -\frac{\partial_r^2 B}{2B} + \frac{(\partial_r B)^2}{4B^2} + \frac{\partial_r A \partial_r B}{4AB} + \frac{\partial_r A}{Ar} = 4\pi G(\rho - P)A \quad (3.4a)$$

$$R_{\theta\theta} = 1 - \frac{1}{A} + \frac{r\partial_r A}{2A^2} + \frac{r\partial_r B}{2AB} = 4\pi G(\rho - P)r^2 \quad (3.4b)$$

$$R_{tt} = \frac{\partial_r^2 B}{2A} - \frac{(\partial_r B)^2}{4AB} - \frac{\partial_r A \partial_r B}{4A^2} + \frac{\partial B}{Ar} = 4\pi G(\rho + 3P)B. \quad (3.4c)$$

Per ricavare  $A(r)$  è utile formare la combinazione

$$\frac{R_{tt}}{2B} + \frac{R_{rr}}{2A} + \frac{R_{\theta\theta}}{r^2} = \frac{\partial_r A}{rA^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{Ar^2} = 8\pi G\rho. \quad (3.5)$$

Si giunge così all'equazione differenziale

$$\frac{1}{A} - \frac{r\partial_r A}{A^2} = \partial_r \left( \frac{r}{A} \right) = 1 - 8\pi G\rho r^2 \quad (3.6)$$

che integrata dà

$$\frac{r}{A} = r - 2G \int 4\pi r^2 \rho(r) dr + \text{cost.} \quad (3.7)$$

Imponendo che  $A(r)$  sia finito nell'origine, per  $r = 0$  si trova che la costante di integrazione deve essere nulla.  $A(r)$  vale dunque:

$$A(r) = \left[ 1 - \frac{2G\mathcal{M}(r)}{r} \right]^{-1} \quad (3.8)$$

dove

$$\mathcal{M}(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr'. \quad (3.9)$$

Le equazioni (2.15), (3.8), inserite nella (3.4b) consentono di scrivere una delle equazioni differenziali fondamentali per la struttura stellare:

$$\boxed{-r^2 \frac{dP}{dr} = G\mathcal{M}\rho \left( 1 + \frac{P}{\rho} \right) \left( 1 + \frac{4\pi r^3 P}{\mathcal{M}} \right) \left( 1 - \frac{2G\mathcal{M}}{r} \right)^{-1}} \quad (3.10)$$

in cui compaiono le 3 funzioni incognite  $P(r), \rho(r), \mathcal{M}(r)$ . L'altra equazione fondamentale che lega due di queste tre funzioni è la derivata della (3.9), cioè

$$\boxed{\frac{d\mathcal{M}}{dr} = 4\pi r^2 \rho.} \quad (3.11)$$

Per ricavare le tre funzioni incognite è necessaria un'altra equazione che le leghi: un'equazione di stato  $P(\rho(r))$ , la cui forma generale è ricavata nel paragrafo 3.3. Inoltre, per determinare completamente la soluzione sono necessarie anche tre condizioni iniziali per le tre funzioni. Una di queste è  $\mathcal{M}(0) = 0$ , che segue banalmente dalla (3.9). L'altra è  $P(\rho(R)) = 0$ , che segue dal fatto che la pressione si annulla ad una distanza  $R$  dal centro che corrisponde al raggio della stella. L'ultima condizione iniziale è  $\rho(0)$ , la densità centrale della stella, che non è determinata a priori.  $\rho(0)$  è quindi un parametro fondamentale dal quale dipendono tutte le proprietà della stella: una volta specificata l'entropia per nucleone e la composizione chimica, e risolto il sistema di equazioni che determina a meno delle condizioni iniziali  $\rho(r), P(r), M$ , la densità centrale è il parametro che permette di risolvere esattamente il problema.

L'equazione fondamentale (3.10) consente di riscrivere la (2.15) come

$$\frac{1}{B} \frac{dB}{dr} = -\frac{2G}{r^2} [\mathcal{M} + 4\pi r^3 p] A \quad (3.12)$$

la cui soluzione, per  $B(\infty) = 1$  (metrica di Minkowski) è

$$B(r) = \exp \left\{ - \int_r^\infty \frac{2G}{r'^2} [\mathcal{M}(r') + 4\pi r'^3 p(r')] A(r') dr' \right\}. \quad (3.13)$$

Per  $r > R$ ,  $\mathcal{M}(r)$  è costante e pari ad  $M$ , per cui l'integrale dà

$$B(r) = \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) = A^{-1}(r) \quad (3.14)$$

cioè la metrica di Schwarzschild esterna alla stella che è stata trovata nel capitolo 1. Nel punto  $r=R$  le due soluzioni si raccordano con continuità, e non sono presenti singolarità neanche per  $r < R$ . Dunque stelle con raggio abbondantemente superiore al raggio di Schwarzschild non generano singolarità del campo gravitazionale, ma si limitano ad incurvare lo spaziotempo in maniera regolare.

## 3.2 Energia termica e gravitazionale

Per chiarire il significato fisico di  $M = \mathcal{M}(R)$  è opportuno considerare la massa a riposo degli  $N$  nucleoni che compongono la stella:

$$M_0 = m_N N. \quad (3.15)$$

$M_0$  rappresenta l'energia dei componenti della stella (trascurando gli elettroni e con  $m_N \approx m_n \approx m_p \approx 939$  MeV) quando questi sono dispersi a distanza infinita fra loro, cioè quando il campo gravitazionale fra essi è praticamente nullo.  $M$  invece tiene conto anche dell'energia potenziale gravitazionale  $V$  e dell'energia termica  $T$  presente all'interno della stella. La differenza fra  $M$  ed  $M_0$  costituisce dunque l'energia interna  $E$  della stella:

$$T + V = E = M - m_N N. \quad (3.16)$$

Il numero di nucleoni  $N$  si ottiene integrando su tutto il raggio della stella la densità numerica radiale di nucleoni  $n(r)$ , tenendo conto del fatto che, a causa della curvatura dello spazio, è necessario includere il fattore  $A(r)$  per pervenire al risultato corretto:

$$N = \int_0^R 4\pi r^2 n(r) \sqrt{A(r)} dr = \int_0^R 4\pi r^2 n(r) \left[1 - \frac{2GM(r)}{r}\right]^{-1/2} dr. \quad (3.17)$$

Si definisce densità di energia termica la quantità

$$e(r) = \rho(r) - m_N n(r) \quad (3.18)$$

che integrata fornisce l'energia termica totale:

$$T = \int_0^R 4\pi r^2 e(r) \sqrt{A(r)} dr. \quad (3.19)$$

L'energia potenziale gravitazionale presente all'interno della stella è data dalla differenza fra  $E$  e  $T$ ,

$$V = M - m_N N - T = \quad (3.20a)$$

$$= \int_0^R 4\pi r^2 \{\rho(r) - mn(r) \sqrt{A(r)} - e(r) \sqrt{A(r)}\} dr = \quad (3.20b)$$

$$= \int_0^R 4\pi r^2 (1 - \sqrt{A(r)}) \rho(r) dr \quad (3.20c)$$

e quindi  $E$  risulta essere

$$E = \int_0^R 4\pi r^2 \left[ e\sqrt{A(r)} + \rho(r) - \rho(r)\sqrt{A(r)} \right] dr = \quad (3.21a)$$

$$= \int_0^R 4\pi r^2 \left[ \rho(r) - \sqrt{A(r)}m_N n(r) \right] dr. \quad (3.21b)$$

Nell'integrale che definisce  $\mathcal{M}(r)$  non compare  $\sqrt{A}$  perchè si semplifica: oltre a comparire come fattore che moltiplica  $dr$  come nei casi appena visti, compare anche al denominatore di  $\rho(r) = \frac{\text{energia in } dV}{dV}$  dove  $dV$  è il volume invariante, in cui il fattore  $\sqrt{A}$  compare a causa della metrica che dipende da  $r$ .

Infine, è importante notare che anche  $E, T, V, n(r)$ , essendo funzioni di  $\rho(r)$  sono, in definitiva, funzioni della densità centrale  $\rho(0)$ .

### 3.3 L'equazione di stato

Solitamente, l'equazione di stato che lega densità di energia e pressione coinvolge anche altre due caratteristiche della stella: l'entropia per nucleone  $s = S/N$  e la composizione chimica della stella. In questa trattazione le supporremo entrambe costanti. L'ipotesi di  $s$  invariante è verificata in un oggetto che abbia una temperatura uniforme di  $0^\circ\text{K}$ : l'entropia è nulla ovunque. Questa è la condizione che, almeno in teoria, raggiunge una stella dopo aver esaurito tutto il suo combustibile nucleare: l'assenza di una fonte interna di energia porta alla progressiva diminuzione della temperatura stellare a causa della dispersione del calore all'esterno, e la configurazione finale è composta da materia allo stato fondamentale. Le nane bianche e le stelle di neutroni osservate mostrano temperature superficiali di svariate migliaia di gradi Kelvin, ma questo non deve far pensare che la nostra ipotesi sia infondata: finché la stella non si sarà completamente raffreddata (e questo può richiedere milioni di anni) noi osserveremo sempre un'atmosfera stellare molto calda, tuttavia la struttura interna della stella è in ottima approssimazione formata da nuclei sostanzialmente a riposo ed elettroni negli stati di minor energia. Sarà su questi due tipi di stelle che verrà focalizzata la nostra attenzione. La composizione chimica, in una stella reale, oltre a non essere necessariamente uguale in punti diversi ad un dato istante, non lo è neppure con lo scorrere del tempo a causa, ad esempio, delle reazioni nucleari che bruciano gli elementi più leggeri per crearne di più pesanti per fusione. Tuttavia noi non siamo interessati all'evoluzione stellare sulle scale di tempo che interessano questi fenomeni, ma a situazioni di equilibrio statico su periodi

più brevi. Inoltre, nane bianche e stelle di neutroni hanno una composizione pressochè uniforme, poichè le prime sono composte essenzialmente di  $^{56}\text{Fe}$  e le seconde di neutroni. Dunque, con entropia per nucleone e composizione chimica costanti e fissate, l'equazione di stato può essere vista come una relazione fra le sole  $p$  e  $\rho$ , che consente di scrivere l'una in funzione dell'altra.

In un fluido perfetto, il tensore energia-impulso (2.4) assume la forma a simmetria sferica (2.9), per cui pressione e densità di energia sono date da:

$$p = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 T^{ii} = \frac{1}{3} \sum_N \frac{p_N^2}{E_N} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_N) \quad (3.22a)$$

$$\rho = T^{00} = \sum_N E_N \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_N) \quad (3.22b)$$

mentre la densità numerica di particelle  $n$  è

$$n = \sum_N \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_N). \quad (3.23)$$

In generale, poichè  $E_N^2 = m^2 + p_N^2$  ( $c=1$ ), la pressione è compresa fra 0 (quando  $|p_N| \rightarrow 0$ ) e  $\rho/3$  (quando  $|p_N| \rightarrow E_N$ ):

$$0 \leq p \leq \frac{\rho}{3}. \quad (3.24)$$

Per un gas freddo, non relativistico ( $|p_N| \ll m$ ), vale approssimativamente l'espressione classica

$$E_N \approx m + \frac{p_N^2}{2m} \quad (3.25)$$

per cui la (3.22b) porta a:

$$\rho = \sum_N \left( m + \frac{p_N^2}{2m} \right) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_N) = \quad (3.26a)$$

$$= \sum_N m \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_N) + \sum_N \frac{p_N^2}{2m} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_N) = \quad (3.26b)$$

$$= nm + \sum_N \frac{p_N^2}{2m E_N} E_N \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_N) = \quad (3.26c)$$

$$= nm + \sum_N \frac{p_N^2}{2m E_N} m \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_N) + \sum_N \frac{p_N^2}{2m E_N} \frac{p_N^2}{2m} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_N) = \quad (3.26d)$$

$$= nm + \frac{3}{2}p + \sigma(p_N^4) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\rho \approx nm + \frac{3}{2}p.} \quad (3.26e)$$

Per un gas ultrarelativistico vale invece l'approssimazione

$$E_N \approx |\vec{p}_N| \gg m \quad (3.27)$$

per cui le (3.22) danno

$$\boxed{\rho \approx 3p \gg nm} \quad (3.28)$$

Le due espressioni appena ricavate possono essere incorporate in un'unica equazione di stato che lega  $\rho$  e  $p$  tramite un parametro  $\gamma$  variabile, il cui valore determina le caratteristiche del gas:

$$\boxed{\rho - mn \approx (\gamma - 1)^{-1}p} \quad (3.29)$$

$$\text{con } \gamma = \begin{cases} \frac{5}{3} & \rightarrow \text{gas non relativistico} \\ \frac{4}{3} & \rightarrow \text{gas ultrarelativistico} \end{cases}$$

È importante sottolineare che l'espressione precedente ci fornisce solo il valore di  $\gamma$  in due casi limite, non i valori massimo e minimo che può assumere. Infatti questi risultati sono validi nelle situazioni in cui il fluido stellare può essere considerato non solo perfetto, ma anche composto da particelle interagenti solo per urti. Quest'approssimazione è lecita in un contesto non relativistico, ma non è adeguata per fluidi composti da materia ultrarelativistica. Infatti, a densità di energia elevate, quelle che nel caso non relativistico erano le particelle (nuclei ed elettroni costituenti il fluido stellare) subiscono diverse trasformazioni che ne cambiano la natura. Queste trasformazioni sono dovute a particolari processi fisici che si manifestano a densità sempre più elevate, e che alterano la natura puramente atomica della materia. Il valore  $\gamma = \frac{4}{3}$  è adeguato solo fino alle densità per cui questi processi non entrano in gioco. L'andamento di  $\gamma$  ad energie maggiori è esposto qualitativamente nel prossimo paragrafo.

### 3.4 L'andamento di $\gamma$

Al variare della densità di energia  $\rho$ , la materia all'interno della stella (in prima approssimazione consideriamo solo protoni, neutroni ed elettroni) subisce diverse trasformazioni e l'equazione di stato, di conseguenza, varia. La variabilità è data da  $\gamma$ , l'unico parametro libero dell'equazione, che quindi può essere espresso in funzione di  $\rho$ .  $\gamma$  è detto anche *parametro di rigidità*, perchè data la densità di energia determina la pressione del fluido e quindi la rigidità dello stesso. Calcolare il suo comportamento, sia analiticamente che numericamente, non è affatto semplice, perchè bisogna considerare col variare della densità i vari processi fisici e le interazioni fondamentali coinvolti.

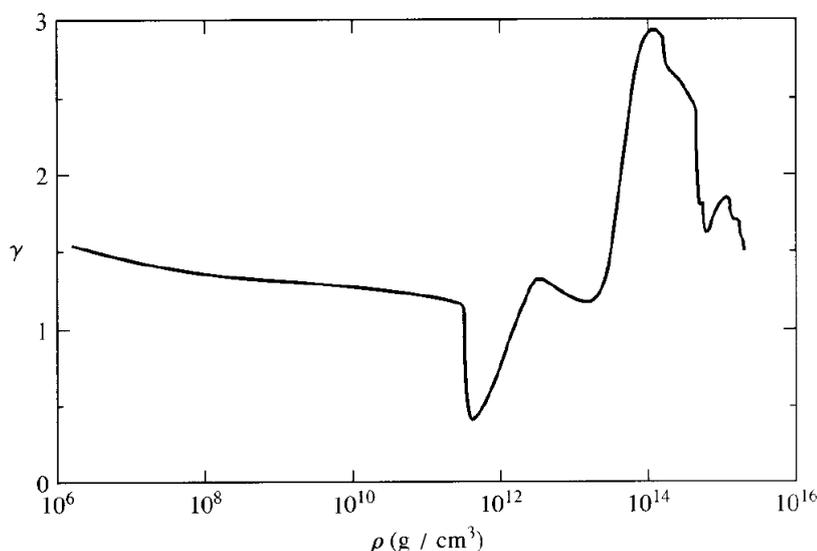


Figura 3.1: Andamento di gamma in funzione di  $\rho$ , per  $\rho > 10^6 \text{ g/cm}^3$ , ottenuto dalla combinazione del calcolo di Harrison e Wheeler (1965) e Glendenning (1985). Per  $\rho \ll 10^6 \text{ g/cm}^3$  il parametro  $\gamma$  vale circa  $\frac{5}{3}$ . Immagine tratta da *J.B. Hartle, Gravity - an introduction to Einstein's general relativity, Pearson Education*.

Qui viene presentata una spiegazione qualitativa che si basa sul calcolo<sup>1</sup> il cui risultato è mostrato graficamente in Figura 3.1.

Fino a densità di energia di circa  $10^4 \text{ g/cm}^3$  gli elettroni sono generalmente legati ai nuclei formando atomi stabili. Queste densità non sono per noi molto interessanti perchè, nelle nane bianche e nelle stelle di neutroni, potrebbero verificarsi solo in regioni superficiali, che non contribuiscono in modo determinante alla struttura stellare. In questa situazione non relativistica  $\gamma$  vale circa  $\frac{5}{3}$ .

A densità  $\rho \sim 10^4 \text{ g/cm}^3$  gli elettroni non sono più confinati negli atomi. Lo stato della materia che caratterizza densità maggiori di questa è il cosiddetto stato di *materia degenera*. La forma di pressione dominante in questo stato della materia, detta *pressione di degenerazione*, è quella dovuta al principio di esclusione di Pauli che impedisce a due fermioni di occupare lo stesso stato quantico. In questo caso il principio si applica al gas di elettroni sostanzialmente liberi che pervade la stella, mentre la densità di energia è quella dei nuclei di ferro praticamente fermi. L'equilibrio della stella dipende da due

<sup>1</sup>Maggiori dettagli sul calcolo mostrato in Figura 3.1 possono essere trovati in *B.K. Harrison, K.S. Thorne, M. Wakano, J.A. Wheeler, Gravitation Theory and Gravitational Collapse, Chicago University Press, 1965* ed in *P. Glendenning, Neutron Stars Are Giant Hypernuclei?, Ap.J., 293, 470*

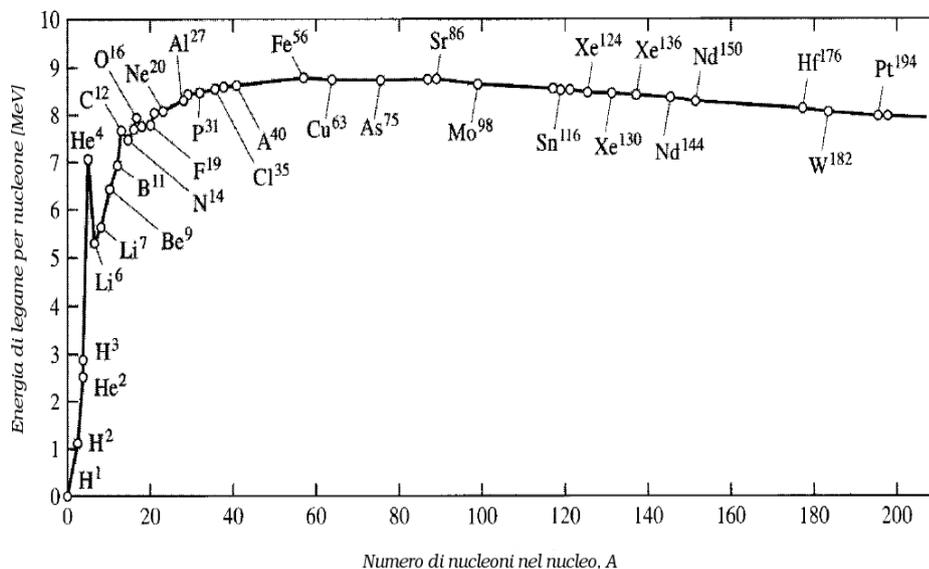


Figura 3.2: Energia di legame per nucleone in funzione del numero di nucleoni nel nucleo. Il  $^{56}\text{Fe}$  è il nucleo più legato. Immagine tratta da *J.B. Hartle, Gravity - an introduction to Einstein's general relativity, Pearson Education*.

fattori contrastanti, la pressione e l'attrazione gravitazionale, che hanno due sorgenti diverse: rispettivamente gli elettroni e i nuclei. Questo è il caso delle nane bianche, stelle che hanno esaurito completamente la loro fonte interna di energia diventando composte sostanzialmente da nuclei di  $^{56}\text{Fe}$ . Il ferro infatti è il nucleo con la più alta energia di legame per nucleone ed è l'ultimo che, a partire dall'idrogeno, può essere creato per fusione di nuclei più leggeri tramite una reazione che liberi energia (si veda la Figura 3.2).

A queste densità,  $\gamma$  è una funzione monotona decrescente <sup>2</sup> di  $\rho$ : dal valore non relativistico  $\frac{5}{3}$ , raggiunge il valore  $\frac{4}{3}$  a densità  $\rho \sim 10^6 \text{g/cm}^3$ , cioè quando gli elettroni diventano relativistici (con energia  $\sim m_e \sim 0,5 \text{MeV}$ ). Qui termina la validità delle considerazioni fatte nel paragrafo precedente. L'equazione di stato continuerà ad avere la stessa forma, ma  $\gamma$  subirà notevoli variazioni.

Con l'aumentare di  $\rho$ , l'energia media degli elettroni raggiunge e supera la differenza di energia di massa a riposo fra neutrone e protone (dell'ordine del MeV) e diventa energeticamente favorevole la reazione di cattura elettronica da parte dei protoni legati nei nuclei, con emissione di un neutrone e un

<sup>2</sup>Un'esposizione dettagliata, basata sulla teoria del gas degenere di elettroni, che giunge a questa conclusione può essere trovata in *Y.B. Zel'dovich, I.D. Novikov, Stars and Relativity, Dover Publications, 1971*.

neutrino per interazione debole:



Lo scomparire degli elettroni e dei protoni, con il formarsi di nuclei sempre più ricchi di neutroni, ha come effetto un'ulteriore abbassamento del valore di  $\gamma$  con l'aumentare della densità.

Ad una densità di circa  $4 \cdot 10^{11} \text{g/cm}^3$ , la materia diventa così ricca di neutroni che una parte di questi (i più energetici) riesce a sfuggire dai nuclei. Questa "fuga neutronica" provoca un repentino e precipitoso abbassamento del valore di  $\gamma$ : la materia diventa infatti molto più comprimibile, perchè scompaiono gli elettroni che forniscono la pressione a causa del principio di Pauli. Il valore di  $\gamma$  decresce finchè non si sono creati abbastanza neutroni da far aumentare nuovamente la pressione, sempre a causa del principio di esclusione ma stavolta applicato ai neutroni.

A densità sempre maggiori il numero di neutroni liberi cresce, mentre elettroni e protoni sono sempre più rari a causa della reazione (3.30) che procede indisturbata. La densità di neutroni liberi arriva ad eguagliare la densità dei neutroni nei nuclei. Si viene quindi a creare un fluido di neutroni con piccole ed uguali percentuali di elettroni e protoni, e  $\gamma$  torna a superare il valore  $\frac{4}{3}$ : è il caso delle stelle di neutroni. In questa situazione sono i neutroni gli unici fautori dell'equilibrio: è la loro massa che determina l'attrazione gravitazionale (i protoni sono ormai pochissimi) ed è a causa della loro natura fermionica che, per il principio di Pauli, contrastano il collasso con una pressione. La densità della materia in questo stato è comparabile con la densità nucleare: una stella di neutroni è, in questo senso, un gigantesco nucleo atomico.

### 3.5 Considerazioni termodinamiche

In questo paragrafo presentiamo una versione alternativa del primo principio della termodinamica che consente di trovare un'utile espressione dell'ipotesi di entropia costante nella stella. Consideriamo la prima legge della termodinamica

$$dE = dQ - PdV \quad (3.31)$$

applicata ad un elemento del fluido stellare di energia  $E$ , volume  $V$ , contenente  $N$  nucleoni, con densità di energia  $\rho = E/V$ , densità di nucleoni  $n = N/V$  e entropia per nucleone  $s = S/N$  considerati costanti.

$$V = \frac{N}{n} \quad , \quad N = \text{cost.} \quad \implies \quad dV = -\frac{N}{n^2} dn \quad (3.32)$$

$$E = \rho V \quad \Longrightarrow \quad dE = \rho dV + V d\rho \quad (3.33)$$

Dalla prima legge della termodinamica risulta allora

$$dQ = \rho dV + V d\rho + P dV = -(P + \rho) \frac{N}{n^2} dn + V d\rho. \quad (3.34)$$

Sia  $q = Q/N$  il calore assorbito dall'elemento di fluido per nucleone; ne segue che  $dq = dQ/N = T ds$  per cui

$$T ds = -(P + \rho) \frac{1}{n^2} dn + \frac{V}{N} d\rho = P d\left(\frac{1}{n}\right) + \rho d\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} d\rho = \quad (3.35a)$$

$$= P d\left(\frac{1}{n}\right) + d\left(\frac{\rho}{n}\right). \quad (3.35b)$$

La condizione di entropia per nucleone uniforme è  $ds/dr = 0$ , cioè

$$0 = \frac{d}{dr} \left(\frac{\rho}{n}\right) + p \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{n}\right) \quad (3.36)$$

# Capitolo 4

## Stelle newtoniane politrope

In questo capitolo viene applicato il modello costruito nel capitolo 3 alle stelle newtoniane ad entropia costante, o politrope. Ne vengono calcolate le proprietà fisiche principali e vengono stabilite le condizioni che ne consentono la stabilità.

### 4.1 Limite non relativistico ed entropia costante

In condizioni newtoniane, la pressione è molto minore della densità di energia (si ricordi la (3.24) ) e quest'ultima è data sostanzialmente dalla densità di massa a riposo delle particelle:

$$p \ll \rho \approx m_N n \quad (4.1)$$

che comporta la seguente disuguaglianza:

$$4\pi r^3 p(r) \ll \mathcal{M}(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr'. \quad (4.2)$$

Inoltre il potenziale gravitazionale è ovunque piccolo:

$$\frac{2GM}{r} \ll 1 \quad (4.3)$$

per cui l'equazione fondamentale (3.10) si riduce a

$$-r^2 \frac{dp(r)}{dr} = GM(r)\rho(r) \quad (4.4)$$

che in effetti è l'equazione fondamentale dell'astrofisica newtoniana. Differenziando la precedente equazione rispetto a  $r$  e dividendo per  $\rho$ , si giunge

ad un'equazione differenziale del secondo ordine per le sole  $\rho$  e  $p$ , eliminando la presenza di  $\mathcal{M}(\rho(r))$ :

$$\boxed{\frac{d}{dr} \left[ \frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dp(r)}{dr} \right] = -4\pi Gr^2 \rho(r).} \quad (4.5)$$

La precedente equazione ci dice che affinché valga  $\rho(0) \neq 0$  deve essere  $\frac{dp}{dr} \neq 0$ ; da questo e dal fatto che generalmente  $\frac{dp}{d\rho}$  è diverso da zero (segue dall'equazione di stato) si ha che una condizione iniziale per la (4.5) è  $\frac{d\rho}{dr}|_{r=0} = 0$ :

$$\frac{dp}{dr}|_{r=0} = \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{dr}|_{r=0} = 0 \quad \implies \quad \frac{d\rho}{dr}|_{r=0} = 0. \quad (4.6)$$

La seconda condizione iniziale è, al solito,  $\rho(0)$ . Come equazione di stato si consideri la (3.29),

$$e = \rho - m_N n = (\gamma - 1)^{-1} p \quad (4.7)$$

su cui va imposta l'ipotesi di entropia per nucleone costante, espressa dall'equazione (3.36). Si trova:

$$0 = \frac{d}{dr} \left( \frac{\rho}{n} \right) + p \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{n} \right) = \frac{d}{dr} \left( \frac{e}{n} \right) + p \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{n} \right) = \quad (4.8a)$$

$$= \frac{1}{\gamma - 1} \left[ \frac{1}{n} \frac{dP}{dr} + p \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{n} \right) \right] + p \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{n} \right) = \quad (4.8b)$$

$$= \frac{1}{\gamma - 1} \left[ \frac{1}{n} \frac{dP}{dr} + \gamma p \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{n} \right) \right] \quad (4.8c)$$

da cui si ricava

$$-\frac{\gamma \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{n}} = \frac{dP}{dr} \quad (4.9)$$

$$-\gamma \frac{d}{dr} \ln \left( \frac{1}{n} \right) = \frac{d}{dr} \ln(P) \quad (4.10)$$

$$\gamma \ln(n) = \ln(P) + \text{cost} \quad (4.11)$$

da cui si deduce  $n^\gamma \propto P$  e ricordando che  $n = \rho/m$

$$\boxed{P = K \rho^\gamma} \quad (4.12)$$

con la costante  $K$  che dipenderà dalla particolare composizione chimica della stella e dall'entropia per nucleone, ma non da  $r$  (deriva dalla costante di integrazione) nè da  $\rho(0)$ . Ogni stella la cui equazione di stato assume la forma (4.12) si dice un *politropo*. La (4.12) è stata ricavata unicamente dall'equazione di stato (4.7) con la condizione di entropia uniforme. Un fluido politropo è dunque un fluido perfetto a entropia costante.

## 4.2 La funzione di Lane-Emden

Per risolvere la (4.5) nel caso dei politropi conviene effettuare il cambio di variabile  $r \rightarrow \xi$  definito da

$$r = \sqrt{\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)}} \rho(0)^{(\gamma-2)/2} \xi \quad (4.13)$$

e definire una nuova funzione  $\theta(\xi)$  che soddisfi

$$\rho(r) = \rho(0)\theta(\xi)^{1/(\gamma-1)} \quad p(r) = K\rho(0)^\gamma \theta(\xi)^{\gamma/(\gamma-1)}. \quad (4.14)$$

L'equazione (4.5) diventa quindi

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} + \theta^{1/(\gamma-1)} = 0 \quad (4.15)$$

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} + \theta^{1/(\gamma-1)} = 0 \quad (4.16)$$

con le nuove condizioni al contorno:

$$\rho(0) = \rho_0 \Rightarrow \theta(0) = 1 \quad \frac{d\rho}{dr}(0) = 0 \Rightarrow \frac{d\theta}{d\xi}(0) = 0. \quad (4.17)$$

Queste determinano in maniera univoca la soluzione  $\theta(\xi)$  di questa equazione differenziale ordinaria non lineare del secondo ordine, ben nota in astrofisica: la *funzione di Lane-Emden*. Questa funzione ammette uno sviluppo regolare attorno a  $\xi = 0$ :

$$\theta(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{6} + \frac{\xi^4}{120(\gamma-1)} - \dots \quad (4.18)$$

e, soprattutto, è una funzione monotona decrescente di  $\xi$  che, con le condizioni iniziali (4.17) e per  $\gamma > \frac{6}{5}$ , si annulla per un certo  $\xi_1$  finito per poi restare negativa per  $\xi \rightarrow \infty$ . Per  $\gamma < \frac{6}{5}$  invece non si hanno zeri poichè  $\theta$  resta sempre positiva.

## 4.3 Raggio e massa di un politropo newtoniano

Il raggio della stella è quel valore di  $r$  per il quale densità e pressione si annullano. Poichè dalla (4.14) densità e pressione sono proporzionali a  $\theta$ , il raggio della stella è dato dalla (4.13) calcolata in  $\xi_1$ :

$$R = \sqrt{\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)}} \rho(0)^{(\gamma-2)/2} \xi_1 \quad (4.19)$$

Per quanto detto poc'anzi,  $R$  è definito solo se  $\gamma > \frac{6}{5}$ , perchè altrimenti non esiste alcun punto  $\xi_1$  che annulla  $\theta$ . L'interpretazione fisica di questo fatto è che se  $\gamma < \frac{6}{5}$  la pressione del gas è troppo elevata per far sì che esso stia confinato in una regione finita di spazio sotto l'azione della forza di gravità: la stella non si forma perchè il gas si disperde nello spazio. Si noti però che quando nel paragrafo (3.3) è stata ricavata l'equazione di stato (3.29), utilizzata anche sopra nel caso dei politropi, si era trovato che questa assume la forma non relativistica per  $\gamma = \frac{5}{3} > \frac{6}{5}$ . Poichè l'equazione (4.5) è stata ricavata in regime newtoniano, possiamo affermare che un gas non relativistico a entropia uniforme è sempre confinato, sotto l'effetto dell'attrazione gravitazionale, in una regione di spazio finita costituendo un politropo. Anche il valore di  $\gamma$  per cui la (3.29) assume la forma ultrarelativistica ( $\frac{4}{3}$ ) è maggiore di  $\frac{6}{5}$ , però la soluzione con le funzioni di Lane-Emden è stata ricavata in approssimazione non relativistica per cui non si possono trarre conclusioni per questo caso. Una volta noto il raggio di un politropo, è possibile calcolarne la massa:

$$M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) dr = \quad (4.20a)$$

$$= 4\pi \rho_0^{\frac{3\gamma-4}{2}} \left( \frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\xi_1} \xi^2 \theta^{1/(\gamma-1)}(\xi) d\xi = \quad (4.20b)$$

$$= 4\pi \rho_0^{\frac{3\gamma-4}{2}} \left( \frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\xi_1} -\frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) d\xi = \quad (4.20c)$$

$$= -4\pi \rho_0^{\frac{3\gamma-4}{2}} \left( \frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)} \right)^{\frac{3}{2}} \xi_1^2 \frac{d\theta}{d\xi}(\xi_1) \quad (4.20d)$$

da cui

$$\boxed{M = 4\pi \rho_0^{\frac{3\gamma-4}{2}} \left( \frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)} \right)^{\frac{3}{2}} \xi_1^2 \left| \frac{d\theta}{d\xi}(\xi_1) \right|} \quad (4.21)$$

in cui si è fatto uso delle relazioni (4.13), (4.14), (4.15), (4.17) e del fatto che la derivata di  $\theta$  è negativa in  $\xi_1$ .

Sostituendovi  $\rho_0$ , ricavato dalla formula per  $R$ , si ottiene la relazione  $M(R)$ :

$$\boxed{M = 4\pi R^{(3\gamma-4)/(\gamma-2)} \left( \frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)} \right)^{\frac{1}{(\gamma-2)}} \xi_1^{-(3\gamma-4)/(\gamma-2)} \xi_1^2 \left| \frac{d\theta}{d\xi}(\xi_1) \right|} \quad (4.22)$$

Nella tabella seguente sono indicati alcuni valori di  $\xi_1$  e  $-\xi_1^2 \theta'(\xi_1)$  corrispondenti ad alcuni valori tipici di  $\gamma$ .

$\gamma$	$\xi_1$	$-\xi_1^2 \theta'(\xi_1)$
<b>6/5</b>	$\infty$	<b>1.73205</b>
<b>11/9</b>	<b>31.83646</b>	<b>1.73780</b>
<b>5/4</b>	<b>14.97155</b>	<b>1.79723</b>
<b>9/7</b>	<b>9.53581</b>	<b>1.89056</b>
<b>4/3</b>	<b>6.89685</b>	<b>2.01824</b>
<b>7/5</b>	<b>5.35528</b>	<b>2.18720</b>
<b>3/2</b>	<b>4.35287</b>	<b>2.41105</b>
<b>5/3</b>	<b>3.65375</b>	<b>2.71406</b>
<b>2</b>	$\pi$	$\pi$
<b>3</b>	<b>2.7528</b>	<b>3.7871</b>
$\infty$	$\sqrt{6}$	$2\sqrt{6}$

Figura 4.1: Tabella tratta da *S. Weinberg, Principles and Applications of the General Theory of Relativity, Wiley, 1972*

## 4.4 Energie di un politropo newtoniano

Le espressioni generali (3.19), (3.20c) per  $T$  e  $V$  possono essere sviluppate per  $2GM/r$  (potenziale newtoniano) piccolo ottenendo:

$$T = \int_0^R 4\pi r^2 \left[ 1 + \frac{GM(r)}{r} + \dots \right] e(r) dr \quad (4.23)$$

$$V = - \int_0^R 4\pi r^2 \left[ \frac{GM(r)}{r} + \frac{3G^2 M^2(r)}{2r^2} + \dots \right] \rho(r) dr \quad (4.24)$$

che troncate al primo ordine forniscono le espressioni valide in stelle newtoniane:

$$T = \int_0^R 4\pi r^2 e(r) dr \quad V = - \int_0^R 4\pi r GM(r) \rho(r) dr. \quad (4.25)$$

Dalla (4.4) è possibile riscrivere l'espressione di  $V$  come

$$V = \int_0^R 4\pi r^3 \frac{dp}{dr} dr \quad (4.26)$$

che integrata per parti dà

$$V = 4\pi [r^3 p(r)]_0^R - 12\pi \int_0^R r^2 p(r) dr = -12\pi \int_0^R r^2 p(r) dr. \quad (4.27)$$

Moltiplicando e dividendo per  $\rho$  si ottiene

$$V = -3 \int_0^R \frac{4\pi r^2 \rho(r)}{\rho(r)} p(r) dr = -3 \int_0^M \frac{p(r)}{\rho(r)} d\mathcal{M} \quad (4.28)$$

che integrato ancora per parti fornisce

$$V = -3 \left[ \frac{p\mathcal{M}}{\rho} \right]_0^M + 3 \int_0^M \frac{d}{d\mathcal{M}} \left( \frac{p}{\rho} \right) \mathcal{M} d\mathcal{M} = \quad (4.29a)$$

$$= 3 \int_0^R \mathcal{M}(r) d \left( \frac{p(r)}{\rho(r)} \right). \quad (4.29b)$$

Il precedente integrale può essere valutato calcolando

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{p}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dr} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} - K \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr} \quad (4.30)$$

in cui si è fatto uso dell'equazione di stato dei politropi (4.12), e notando che

$$\frac{dp}{dr} = K \gamma \rho^{\gamma-1} \frac{d\rho}{dr} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{dr} = \frac{1}{K \gamma \rho^{\gamma-1}} \frac{dp}{dr} \quad (4.31)$$

per cui facendo uso anche della (4.4) risulta

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{p}{\rho} \right) = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{GM}{r^2} \quad (4.32)$$

per cui

$$V = -3 \frac{\gamma-1}{\gamma} \int_0^R \frac{GM^2}{r^2} dr \quad (4.33)$$

Un'ulteriore integrazione per parti porta a

$$V = 3 \frac{\gamma-1}{\gamma} \left\{ \left[ \frac{GM^2}{r} \right]_0^R - \int_0^{M^2} \frac{G}{r} d(\mathcal{M}^2) \right\} \quad (4.34)$$

e dato che

$$\frac{d\mathcal{M}^2}{dr} = 2 \left[ \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr' \right] 4\pi r^2 \rho = 2\mathcal{M} 4\pi r^2 \rho \quad (4.35)$$

risulta

$$V = 3 \frac{\gamma-1}{\gamma} \left\{ \frac{GM^2}{R} - 2 \int_0^R 4\pi r G \mathcal{M} \rho dr \right\} = \quad (4.36a)$$

$$= 3 \frac{\gamma-1}{\gamma} \left\{ \frac{GM^2}{R} - 2V \right\} \quad (4.36b)$$

che risulta per  $V$  dà

$$\boxed{V = -\frac{3(\gamma - 1)}{5\gamma - 6} \frac{GM^2}{R}} \quad (4.37)$$

Dalle (4.25), (3.29), (4.27) si trova l'energia termica totale:

$$T = \int_0^R 4\pi r^2 (\gamma - 1)^{-1} p(r) dr = -\frac{V}{3(\gamma - 1)} \quad (4.38)$$

quindi:

$$\boxed{T = \frac{1}{5\gamma - 6} \frac{GM^2}{R}} \quad (4.39)$$

$$\boxed{E = T + V = \frac{3\gamma - 4}{5\gamma - 6} \frac{GM^2}{R}} \quad (4.40)$$

## 4.5 Stabilità di un politropo newtoniano

La soluzione delle equazioni fondamentali (3.10), (3.11) rappresenta uno stato di equilibrio della stella, che però può essere sia stabile che instabile. Noi siamo interessati alle soluzioni di equilibrio stabile, che assicurano che la stella non si disgreghi alla minima perturbazione. Abbiamo quindi bisogno di un criterio che ci permetta di distinguere queste due tipologie di soluzione. Di solito, nei problemi di questo genere, è necessario calcolare i quadrati delle frequenze  $\omega_n$  dei modi normali di oscillazione; se questi sono positivi la configurazione è stabile, se sono negativi le oscillazioni o crescono esponenzialmente nel tempo (distruggendo la stella, che è quindi instabile) oppure vengono smorzate fino ad annullarsi.

In questo paragrafo viene presentata una semplice analisi dei modi di oscillazione di una stella newtoniana. Il risultato a cui si giunge è comunque corretto ed è lo stesso che si trova con analisi più dettagliate.

Sia  $\bar{\rho} = 3M/4\pi R^3$  la densità media di energia e  $\bar{p}$  la pressione media all'interno della stella. In una situazione di equilibrio idrostatico la forza gravitazionale per unità di volume è controbilanciata da una forza di galleggiamento per unità di volume proporzionale alla pressione del fluido stellare:

$$\bar{F}_{gall} = \frac{\bar{p}}{R} = \bar{F}_{grav} = G \frac{\bar{\rho} M}{R^2} = G \frac{4}{3} \pi \bar{\rho}^2 R. \quad (4.41)$$

L'equazione dei politropi (4.12), in questo caso approssimata con le quantità medie, può essere messa in una forma equivalente ma più adatta ai nostri scopi:

$$\bar{p} = K \bar{\rho}^\gamma \quad \implies \quad \frac{\bar{\rho}}{\bar{p}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\rho}} = \frac{\bar{\rho}}{\bar{p}} K \gamma \bar{\rho}^{\gamma-1} = \gamma \quad (4.42)$$

Quando un'oscillazione radiale provoca una modifica del raggio da  $R$  a  $R + dR$ , la densità media e la pressione media cambiano:

$$\bar{\rho} + d\bar{\rho} = \frac{3M}{4\pi R^3} + \frac{3M}{4\pi} d(R^{-3}) = \bar{\rho} + \frac{3M-3}{4\pi R^4} dR = \bar{\rho} - 3\frac{\bar{\rho}}{R} dR \quad (4.43)$$

$$\bar{p} + d\bar{p} = \bar{p} + \gamma \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} d\bar{\rho} = \bar{p} - 3\frac{\gamma\bar{p}}{R} dR \quad (4.44)$$

dove nella seconda equazione si è fatto uso delle due precedenti. Il corrispondente cambiamento nelle forze è

$$d\bar{F}_{gall} = \frac{d\bar{p}}{R} - \frac{\bar{p}}{R^2} dR = -(3\gamma + 1) \frac{\bar{p}}{R} \frac{dR}{R} = -(3\gamma + 1) \bar{F}_{gall} \frac{dR}{R} \quad (4.45)$$

$$d\bar{F}_{grav} = G \frac{4\pi}{3} (2\bar{\rho} R d\bar{\rho} + \bar{\rho}^2 dR) = G \frac{4\pi}{3} (2\bar{\rho} R (-3) \frac{\bar{\rho}}{R} dR + \bar{\rho}^2 dR) \quad (4.46a)$$

$$= -5\bar{F}_{grav} \frac{dR}{R}. \quad (4.46b)$$

Poiché  $\bar{F}_{gall} = \bar{F}_{grav}$ , c'è una forza netta

$$d\bar{F}_{grav} - d\bar{F}_{gall} = 3 \left( \gamma - \frac{4}{3} \right) \bar{F}_{grav} \frac{dR}{R} \quad (4.47)$$

che produce un'accelerazione:

$$d\bar{F}_{grav} - d\bar{F}_{gall} = -\bar{\rho} \ddot{R}. \quad (4.48)$$

L'equazione del moto per l'oscillazione è quindi

$$\ddot{R} = -3 \left( \gamma - \frac{4}{3} \right) \left( \frac{4\pi}{3} \right) \bar{\rho} dR \quad (4.49)$$

che corrisponde all'equazione di un oscillatore armonico di costante elastica  $k = M\omega^2$  e di frequenza angolare di oscillazione  $\omega^2 = 4\pi(\gamma - 4/3)\bar{\rho}$ . Le oscillazioni stabili ( $\omega^2 > 0$ ) corrispondono quindi a

$$\boxed{\gamma > \frac{4}{3}} \quad (4.50)$$

# Capitolo 5

## Nane bianche

Uno dei possibili stati finali dell'evoluzione stellare è quello di nana bianca. La catena di reazioni nucleari interne alla stella porta alla formazione di una struttura composta prevalentemente da  $^{56}\text{Fe}$ . Alla densità caratteristiche di queste stelle gli elettroni sono liberi dai nuclei e formano un gas di Fermi, la cui pressione contrasta la forza di gravità dovuta ai massivi nuclei di Ferro. L'equilibrio di una stella sotto forma di nana bianca è possibile solo la sua massa è minore del *limite di Chandrasekhar*.

### 5.1 Gas relativistico di elettroni

Come già accennato nel paragrafo 3.4, le nane bianche sono il risultato del progressivo raffreddamento e della contrazione di una stella che, diventata essenzialmente composta da  $^{56}\text{Fe}$ , ha esaurito tutto il suo combustibile nucleare. Ad una densità di energia  $\rho \sim 10^4 \text{ g/cm}^3$ , che è circa il limite inferiore per la densità di una nana bianca, gli elettroni non sono più confinati negli atomi, per cui si ha un gas di elettroni sostanzialmente liberi. Inoltre, alle bassissime temperature tipiche di una nana bianca, gli elettroni hanno le energie più basse consentite dal principio di Pauli. In questo paragrafo consideriamo il problema del gas relativistico di elettroni liberi.

Dal principio di indeterminazione di Heisenberg sappiamo che l'indeterminazione sulla posizione  $x$  e sull'impulso  $k$  di una particella sono legate dalla relazione  $\Delta x \Delta k \sim h$ , dove  $h$  è la costante di Planck. Lo spazio delle fasi del sistema può quindi essere idealmente suddiviso in cellette di lato  $h$ , ognuna della quali rappresenta uno stato quantico disponibile. Se le particelle sono elettroni, cioè fermioni, ognuna di queste cellette è occupabile da due soli elettroni con spin opposto. Il numero di elettroni  $d\mathcal{N}_k$  che, per unità di volume, hanno impulso compreso fra  $k$  e  $k + dk$  si ottiene calcolando il

volume della corona sferica compresa fra i raggi  $k$  e  $k + dk$  nello spazio degli impulsi, dividendo per il volume  $h^3$  di una celletta e moltiplicando per due per tenere conto dello spin:

$$d\mathcal{N}_k = \frac{8\pi k^2}{h^3} dk. \quad (5.1)$$

Il numero di elettroni per unità di volume  $n$  si ottiene integrando nello spazio degli impulsi  $d\mathcal{N}_k$  fino all'impulso massimo  $k_F$ , l'impulso di Fermi:

$$n = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{k_F} k^2 dk = \frac{8\pi}{3h^3} k_F^3 \quad \Longrightarrow \quad k_F = \left( \frac{3h^3}{8\pi} \right)^{1/3} n^{1/3}. \quad (5.2)$$

Ogni elettrone ha energia  $\mathcal{E}(k) = \sqrt{k^2 + m_e^2}$  per cui la densità di energia (energia per unità di volume) è data da

$$\rho = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{k_F} k^2 \sqrt{k^2 + m_e^2} dk \quad (5.3)$$

mentre la pressione è, dalla (3.22a),

$$p = \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^{k_F} k^2 \frac{k^2}{(k^2 + m_e^2)^{1/2}} dk. \quad (5.4)$$

I due precedenti integrali possono essere risolti analiticamente: con il cambio di variabile  $u = \frac{k}{m}$  e ricordando che  $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \operatorname{arcsinh}(x)$  si giunge ai risultati:

$$\rho = \frac{\pi m_e^4}{h^3} \left\{ \frac{k_F}{m_e} \left[ 2 \left( \frac{k_F}{m_e} \right)^2 + 1 \right] \sqrt{\left( \frac{k_F}{m_e} \right)^2 + 1} - \operatorname{arcsinh} \frac{k_F}{m_e} \right\} \quad (5.5)$$

$$p = \frac{\pi m_e^4}{3h^3} \left\{ \frac{k_F}{m_e} \left[ 2 \left( \frac{k_F}{m_e} \right)^2 - 3 \right] \sqrt{\left( \frac{k_F}{m_e} \right)^2 + 1} + 3 \operatorname{arcsinh} \frac{k_F}{m_e} \right\} \quad (5.6)$$

da cui è possibile verificare la validità della relazione

$$p = \frac{k_F}{3} \frac{d\rho}{dk_F} - \rho. \quad (5.7)$$

Si può giungere allo stesso risultato tramite considerazioni termodinamiche: dal primo principio  $dE = dQ - PdV$ , con  $dQ = 0$  (non essendoci differenza di entropia fra i diversi elementi  $dV$  della stella, li consideriamo sistemi isolati che non si scambiano entropia, quindi  $TdS = dQ = 0$ ) si ha:

$$P = -\frac{dE}{dV} = -\frac{d}{dV}(V\rho) = -V \frac{d\rho}{dV} - \rho = -V \frac{d\rho}{dk_F} \frac{dk_F}{dV} - \rho. \quad (5.8)$$

Poichè la densità di elettroni  $n = \frac{N}{V}$  si ha  $dV = Nd(\frac{1}{n}) = -\frac{N}{n^2}dn$ , quindi

$$-V \frac{dk_F}{dV} = n \frac{dk_F}{dn} = \frac{1}{3} \left( \frac{3h}{8\pi} \right)^{1/3} n^{1/3} = \frac{k_F}{3} \quad (5.9)$$

perciò otteniamo di nuovo la (5.7). L'equazione di stato è data in forma implicita, nel senso che è descritta dalla curva parametrica

$$\begin{cases} p &= p(k_F) \\ \rho &= \rho(k_F) \end{cases}$$

che in generale non rappresenta una relazione politropica del tipo  $p \propto \rho^\gamma$ . Se vale la relazione  $m \ll k$ , quindi nel caso di fotoni, neutrini ma anche per particelle massive ultrarelativistiche, le formule per densità e pressione si semplificano in

$$\rho = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{k_F} k^3 dk = \frac{2\pi}{h^3} k_F^4 \quad (5.10)$$

$$p = \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^{k_F} k^3 dk = \frac{2\pi}{3h^3} k_F^4 = \frac{\rho}{3} \quad (5.11)$$

per cui l'equazione di stato per un gas di fermioni relativistici (non interagenti, se non per urti elastici) è

$$p = \frac{1}{3}\rho \quad (5.12)$$

cioè è quella di un politropo con  $K = \frac{1}{3}$  e  $\gamma = 1 < \frac{6}{5}$ , in accordo con quanto già trovato nel paragrafo 3.3.

## 5.2 Massa limite di Chandrasekhar

Per ottenere un modello fisico delle nane bianche, dobbiamo integrare il modello a gas di elettroni liberi con i nuclei di ferro, che sono determinanti in quanto dominano la densità di energia, a causa della massa dei nucleoni che è circa 2000 volte maggiore di quella degli elettroni. I nuclei sono approssimativamente fermi, per cui il contributo dei nucleoni alla densità di energia è

$$\rho_N = \mu m_N n = \frac{8\pi}{3h^3} \mu m_N k_F^3 \quad (5.13)$$

in cui è stata usata la (5.2) e dove  $\mu$  indica il numero di nucleoni per elettrone. La stella è supposta neutra, per cui  $\mu$  è dato dal rapporto medio fra numero di massa e numero atomico dei nuclei che compongono la stella. Se la stella fosse

composta totalmente di ferro, si avrebbe  $\mu = 56/26 = 2,154$ ; in realtà sono presenti in misura minore anche residui di altri elementi. Si può comunque accettare, in prima approssimazione,  $\mu \sim 2$ .

La densità ha anche una componente elettronica  $\rho_e$  data dalla (5.5), per cui la densità di energia totale è:

$$\rho = \frac{\pi}{h^3} \left\{ \frac{8\mu m_N k_F^3}{3} + k_F(2k_F^2 + m_e^2)\sqrt{k_F^2 + m_e^2} - m_e^4 \operatorname{arcsinh} \frac{k_F}{m_e} \right\}. \quad (5.14)$$

La pressione totale coincide con quella elettronica, perchè i nuclei sono fermi:

$$p = \frac{\pi}{h^3} \left\{ k_F(2k_F^2 - 3m_e^2)\sqrt{k_F^2 + m_e^2} + 3m_e^4 \operatorname{arcsinh} \frac{k_F}{m_e} \right\}. \quad (5.15)$$

Anche in questo caso l'equazione di stato è data in forma implicita, ma ci si rende comunque conto che in generale non è una semplice relazione politropica. È possibile ridurre l'equazione di stato a quella di un politropo in due casi, non-relativistico e ultrarelativistico, che corrispondono rispettivamente alle condizioni  $\rho \ll \rho_c$  e  $\rho \gg \rho_c$ , dove  $\rho_c$  è la densità critica alla quale  $m_e = k_F$ :

$$\rho_c \sim \frac{8\pi m_N \mu m_e^3}{3h^3} \sim 10^6 \text{ g/cm}^3. \quad (5.16)$$

Questa densità corrisponde al valore minimo rappresentato nel grafico 3.1.

**Regime non relativistico:**  $\rho \ll \rho_c \rightarrow k_F \ll m_e$ . L'espansione delle (5.14), (5.15) per  $\frac{k_F}{m_e} \rightarrow 0$  dà

$$\rho \sim \frac{\pi m_e^4}{h^3} \left( \mu \frac{m_n}{m_e} + 1 \right) \frac{8}{3} \left( \frac{k_F}{m_e} \right)^3, \quad p \sim \frac{\pi m_e^4}{3h^3} \frac{8}{5} \left( \frac{k_F}{m_e} \right)^5. \quad (5.17)$$

In questo limite si ha quindi un relazione politropica con  $\gamma = \frac{5}{3}$ , risultato in accordo con l'andamento del parametro di rigidità discusso nel paragrafo 3.4 per  $\rho < 10^6 \text{ g/cm}^3$ .

**Regime ultrarelativistico:**  $\rho \gg \rho_c \rightarrow k_F \gg m_e$ . In questo caso, la (5.14) si riduce a

$$\rho = \frac{8\pi}{3h^3} \left( \mu m_N k_F^3 + \frac{3k_F^4}{4} \right) \quad (5.18)$$

mentre la (5.15) diventa

$$p = \frac{2\pi k_F^4}{3h^3}. \quad (5.19)$$

Ricordando la figura 3.1, il valore di  $\gamma$  che corrisponde a  $\rho \gg \rho_c$  (restando nel dominio di densità in cui ha ancora senso la trattazione a gas di elettroni, cioè fino a  $\rho \sim 10^{10}$  g/cm<sup>3</sup>) è  $\frac{4}{3}$ . In effetti esaminando le espressioni per  $\rho$  e  $p$  in questo limite si nota che corrispondono a quelle di un politropo con  $\gamma = \frac{4}{3}$ :

$$\rho = \left(\frac{p}{K}\right)^{3/4} \quad \text{con} \quad K^{3/4} = \frac{1}{(4\mu m_n + 3k_F)\left(\frac{2\pi}{3h^3}\right)^{1/4}}. \quad (5.20)$$

A densità maggiori entra in gioco il processo di cattura elettronica esposto nel paragrafo 3.4 per cui la trattazione poc'anzi esposta inizia a non essere più valida; ma soprattutto  $\gamma$  scende sotto il valore  $\frac{4}{3}$ , cioè sotto il valore che garantisce la stabilità della stella. Il limite ultrarelativistico per il gas di elettroni liberi che compone la nana bianca corrisponde alla situazione limite per la stabilità di queste stelle.

Facendo uso delle (4.19), (4.21) è possibile calcolare il raggio e la massa massimi della stella, che si hanno nel caso relativistico in cui la densità è maggiore. Si ottiene

$$R = 5,3 \times 10^4 \frac{1}{\mu} \left(\frac{\rho_c}{\rho_0}\right) \text{ km} \quad , \quad M = 5,87 \frac{1}{\mu^2} M_\odot \quad (5.21)$$

dove  $M_\odot$  è la massa solare. Nell'ipotesi che la nana bianca sia composta di solo Ferro ( $\mu = \frac{56}{26}$ ) si ha

$$M_{Ch} = 1,26 M_\odot \quad (5.22)$$

che è il valore della *massa limite di Chandrasekhar*, ovvero la massa più elevata che può avere una nana bianca stabile. Ovviamente una nana bianca non è composta di solo Ferro ed è solitamente anche rotante, fatto che migliora la stabilità. Un limite più realistico oggi accettato è

$$M_{Ch} = 1,4 M_\odot. \quad (5.23)$$

Il Sole è quindi destinato a terminare la sua evoluzione stellare come nana bianca. Stelle di massa maggiore di  $M_{Ch}$  possono comunque diventare nane bianche, a causa dei processi esplosivi che accompagnano le diverse fasi evolutive delle stelle e che provocano una dispersione di massa tale da avere un equilibrio sotto forma di nana bianca. Stelle con massa molto maggiore del limite di Chandrasekhar comunque trovano difficilmente un equilibrio sotto forma di nana bianca; la pressione interna non è in grado di supportare la stella e quindi il collasso continua. Questo processo può determinare un grande

riscaldamento della stella ed una sua esplosione, fenomeno detto *supernova*. L'esplosione determina una consistente perdita di massa, e il raggiungimento di un equilibrio in una *stella di neutroni*. L'altra possibilità è che il collasso continui ininterrottamente, senza che nessuna forza possa opporsi alla gravità: si crea così un *buco nero*. Nei successivi due capitoli vengono trattate le stelle di neutroni ed esaminate le condizioni in cui è inevitabile la formazione di un buco nero.

# Capitolo 6

## Stelle di neutroni

Le stelle di neutroni, ipotizzate teoricamente negli anni '30, trovarono conferma osservativa negli anni '60. Sono fra gli oggetti dalle caratteristiche fisiche più estreme che si trovino in natura: hanno diametri dell'ordine di qualche chilometro, ma la loro densità è dello stesso ordine di grandezza di quella del nucleo atomico.

### 6.1 Oltre la nana bianca

Se la massa della stella è superiore al limite di Chandrasekhar, una volta esaurito il suo combustibile nucleare essa non può trovare un equilibrio sotto forma di nana bianca. La sua massa è troppo elevata perchè la pressione degli elettroni sostenga i nuclei di Ferro in una struttura stabile: la stella si collapse e la densità di energia  $\rho$  di conseguenza aumenta, a valori maggiori di  $10^{10}$  g/cm<sup>3</sup>, il massimo per le nane bianche. Diventa così energeticamente favorevole il processo di cattura elettronica e la materia stellare cambia gradualmente composizione, diventando composta soprattutto di neutroni (si veda il paragrafo 3.4). Restano un numero sufficiente di protoni ed elettroni che, occupando i livelli energetici più bassi, inibiscono la reazione di decadimento del neutrone



per il principio di Pauli. Durante questa fase però  $\gamma$  è minore di  $\frac{4}{3}$  (figura 3.1), per cui durante il collasso la stella attraversa una fase di instabilità che causa una perdita di massa. Una volta raggiunta densità  $\rho$  dell'ordine di  $10^{13}$  g/cm<sup>3</sup> si ha di nuovo stabilità ma solo se, analogamente alle nane bianche, la massa è scesa sotto il *limite di Oppenheimer-Volkoff* attraversando la fase di instabilità.

## 6.2 Massa limite di Oppenheimer-Volkoff

Densità di energia e pressione sono calcolabili analogamente a quanto fatto per le nane bianche, con una fondamentale differenza: in questo caso non abbiamo nucleoni a riposo il cui contributo alla densità totale di energia è dominante ed un gas di elettroni liberi che determinano la pressione, ma un gas di soli neutroni i quali determinano sia la pressione che la densità di energia. Le formule sono formalmente identiche alle (5.5), (5.6) con  $m_n$  al posto di  $m_e$ :

$$\rho = \frac{\pi m_n^4}{h^3} \left\{ \frac{k_F}{m_n} \left[ 2 \left( \frac{k_F}{m_n} \right)^2 + 1 \right] \sqrt{\left( \frac{k_F}{m_n} \right)^2 + 1} - \operatorname{arcsinh} \frac{k_F}{m_n} \right\} \quad (6.2)$$

$$p = \frac{\pi m_n^4}{3h^3} \left\{ \frac{k_F}{m_n} \left[ 2 \left( \frac{k_F}{m_n} \right)^2 - 3 \right] \sqrt{\left( \frac{k_F}{m_n} \right)^2 + 1} + 3 \operatorname{arcsinh} \frac{k_F}{m_n} \right\} \quad (6.3)$$

ed in questo caso la densità critica  $\rho_c$  è data da

$$\rho_c = \rho(k_F = m_n) \sim 3,36 \frac{\pi m_n^4}{h^3} \sim 10^{15} \text{ g/cm}^3 \quad (6.4)$$

che è circa 9 ordini di grandezza maggiore della densità critica per le nane bianche, e si colloca nella regione ad alta densità in cui  $\gamma > \frac{4}{3}$  nella figura 3.1.

**Regime non relativistico:**  $\rho \ll \rho_c \longrightarrow k_F \ll m_n$ . L'espansione delle espressioni che danno densità e pressione per  $\frac{k_F}{m_n} \rightarrow 0$  dà

$$\rho \sim \frac{\pi m_n^4}{h^3} \frac{8}{3} \left( \frac{k_F}{m_n} \right)^3, \quad p \sim \frac{\pi m_n^4}{3h^3} \frac{8}{5} \left( \frac{k_F}{m_n} \right)^5 \quad (6.5)$$

per cui si trova una relazione politropica con  $\gamma$  che assume il valore non relativistico  $\frac{5}{3}$ :

$$p = K \rho^{5/3} \quad \text{con} \quad K = \frac{1}{5} \left( \frac{8\pi m_n^4}{3h^3} \right)^{-2/3}. \quad (6.6)$$

**Regime ultrarelativistico:**  $\rho \gg \rho_c \longrightarrow k_F \gg m_n$ . In tal caso si ha:

$$\rho = \frac{2\pi}{h^3} k_F^4, \quad p = \frac{2\pi}{3h^3} k_F^4 \quad (6.7)$$

cioè, come ci si poteva aspettare, si ritrova la relazione valida in un gas relativistico con  $\gamma = 1$ :

$$p = \frac{\rho}{3}. \quad (6.8)$$

Se si inserisce la precedente equazione di stato nell'equazione della struttura stellare (3.10), si trova la soluzione esatta

$$\rho(r) = \frac{3}{56\pi Gr^2}. \quad (6.9)$$

Questo profilo di densità predice che la densità scenda sotto al valore critico  $\rho_c$  per  $r \sim 3$  Km, per cui in una stella di neutroni di raggio maggiore le particelle possono essere ultrarelativistiche solo negli strati interni della stella. La soluzione esatta si avrebbe inserendo l'equazione di stato completa, ottenuta eliminando  $k_F$  dalle (6.2), (6.2), nella equazione della struttura stellare. Integrazioni numeriche<sup>1</sup> di queste equazioni rivelano che anche per  $\rho(0) \rightarrow \infty$  raggio e massa della stella sono finiti e forniscono il risultato

$$M_\infty = 0,342M_\odot \quad , \quad R_\infty = 3,18 \text{ Km} \quad (6.10)$$

Per  $\rho(0) \ll \rho_c$  si ha quindi un politropo stabile. In questo regime  $M(\rho(0))$  è una funzione monotona crescente, ma per  $\rho(0) = 0,016\rho_c$  essa è già superiore a  $M_\infty$ . È quindi probabile che la massa cresca fino ad un massimo corrispondente a  $\rho_{max}$  e poi decresca fino a  $M_\infty$ . Il calcolo esatto<sup>2</sup> conferma questa ipotesi, fornendo in corrispondenza di  $\rho_{max}$  i valori

$$M_{OV} = 0,7M_\odot \quad , \quad R_{OV} = 9,6 \text{ Km} \quad (6.11)$$

$M_{OV}$  è nota come *massa limite di Oppenheimer-Volkoff*. Il gas di soli neutroni è comunque un modello troppo semplice per descrivere realisticamente la materia all'interno di una stella di neutroni; in realtà è presente anche una bassa percentuale di protoni ed elettroni sufficiente, per il principio di Pauli, a bloccare la reazione di decadimento del neutrone o comunque tale che le due reazioni

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (6.12)$$

$$p + e^- \rightarrow n + \nu_e \quad (6.13)$$

siano in equilibrio. Si hanno così 3 gas di Fermi

$$\rho_i = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{k_{F,i}} k^2 \sqrt{k^2 + m_i^2} dk \quad , \quad n_i = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{k_{F,i}} k^2 dk = \frac{8k_{F,i}^3}{3h^3} \quad (6.14)$$

<sup>1</sup>J.R. Oppenheimer, G.M. Volkoff, Phys. Rev., **55**, 374 (1939)

<sup>2</sup>si veda la nota 1.

con  $i = p, n, e^-$ . Carica elettrica e numero barionico sono conservati, perciò  $n_n + n_p = n_N$  (numero di nucleoni) e  $n_p - n_e = 0$ . Fissato  $n_N$ ,  $\rho$  si può scrivere come

$$\rho = \rho_n + \rho_p + \rho_e = \frac{8\pi}{h^3} \left\{ \int_0^{Cn_n^{1/3}} k^2 \sqrt{k^2 + m_n^2} dk + \right. \quad (6.15a)$$

$$\left. + \int_0^{C[n_e - n_n]^{1/3}} k^2 \sqrt{k^2 + m_p^2} dk + \int_0^{C[n_N - n_n]^{1/3}} k^2 \sqrt{k^2 + m_e^2} dk \right\} \quad (6.15b)$$

dove  $C = \sqrt[3]{\frac{8\pi}{3h^3}}$ . L'equilibrio chimico si ha per  $\frac{d\rho}{dn_n} = 0$ . Imponendo questa condizione si trova che il limite di Oppenheimer-Volkoff è una sottostima. Il valore preciso del limite dipende dal modello di fisica nucleare utilizzato per descrivere la materia stellare; le stime oggi più accreditate fissano il limite a

$$M_{OV} \sim (1,8 \div 2,7) M_{\odot}. \quad (6.16)$$

È inoltre possibile che nel nucleo di una stella di neutroni si manifestino densità di energia così elevate da rendere possibile il *deconfinamento*, ovvero la formazione di un plasma di quarks. In quest'ottica, almeno internamente, la stella di neutroni non sarebbe più un gigantesco nucleo atomico, ma un enorme nucleone formato da un gran numero di quarks. Tuttavia, data la bassa conoscenza del comportamento della materia e della teoria della Cromodinamica Quantistica a queste energie, non si hanno conferme di questo fatto.

### 6.3 Redshift gravitazionale

Per quantificare l'intensità del campo gravitazionale generato da una stella di neutroni, e quindi l'influenza della relatività generale sulla struttura stellare, è utile calcolare il redshift gravitazionale  $z$  subito da un fotone che si allontana dalla superficie della stella. Utilizzando la massa e il raggio di Oppenheimer-Volkoff dati dalla (6.11) si ottiene:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{B(R_{OV})}} - 1 = \left(1 - \frac{2GM_{OV}}{R_{OV}}\right)^{-1/2} - 1 \sim 0,13. \quad (6.17)$$

Il redshift gravitazionale causato da una stella di neutroni è dell'ordine del 10%, un valore non trascurabile che dimostra come la relatività generale abbia un ruolo importante non solo nello studio della fisica dei buchi neri, ma anche per la comprensione delle strutture stellari più estreme.

## 6.4 Configurazioni finali stabili dell'evoluzione stellare

L'analisi sin qui compiuta ci ha permesso di individuare le configurazioni stabili in cui una stella può terminare il suo percorso evolutivo. Queste configurazioni si dividono in due classi: le prime caratterizzano le nane bianche, le seconde le stelle di neutroni. Una delle grandezze fondamentali utilizzate per questa analisi è il parametro di rigidità  $\gamma$ : solo quando esso è maggiore di  $\frac{4}{3}$  la stella può essere stabile. Questo comporta la divisione nelle due classi, poichè la stabilità è possibile solo per densità minori di circa  $10^{10}$  g/cm<sup>3</sup> o comprese fra  $10^{13}$  e  $10^{15}$  g/cm<sup>3</sup> circa (si veda la Figura 3.1). All'interno di ogni

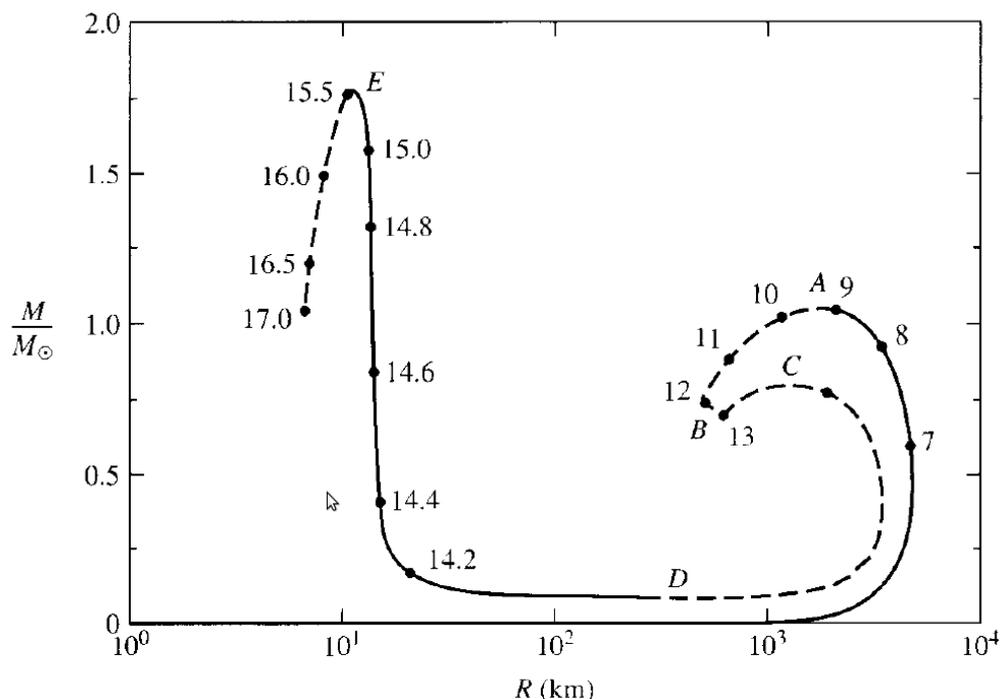


Figura 6.1: Relazione fra massa e raggio negli stadi finali dell'evoluzione stellare. La curva descrive una famiglia di configurazioni in funzione della densità centrale  $\rho_0$ . Lungo la curva sono riportati i valori di  $\log_{10}(\rho_0)$  espressi in g/cm<sup>3</sup>. Le configurazioni di equilibrio stabile sono indicate con una linea continua, quelle instabili con una linea tratteggiata. Le densità che consentono la stabilità corrispondono a quelle di Figura 3.1 per cui  $\gamma > \frac{4}{3}$ . Il tratto fra i punti D ed E rappresenta le stelle di neutroni, quello prima di A le nane bianche. A causa della scala della figura risulta indistinguibile dall'asse orizzontale un tratto della curva, che rappresenta le densità non relativistiche non rappresentate in Figura 3.1, per cui  $\gamma \sim \frac{5}{3}$ . Immagine tratta da *J.B. Hartle, Gravity - an introduction to Einstein's general relativity*, Pearson Education.

classe, le diverse proprietà fisiche della materia alle varie densità impongono differenti relazioni fra massa, raggio e densità della stella. In particolare, si possono individuare le masse limite oltre le quali la stella non può essere stabile sotto forma di nana bianca o di stella di neutroni: la massa limite di Chandrasekhar e la massa limite di Oppenheimer-Volkoff. La Figura 6.1 illustra la relazione fra massa e raggio alle varie densità, distinguendo le situazioni di stabilità da quelle di instabilità.

# Capitolo 7

## Collasso gravitazionale

La Teoria della Relatività Generale prevede un limite assoluto per l'esistenza di qualsiasi struttura stabile. Se una distribuzione di massa sferica è concentrata in un raggio minore di  $\frac{9}{8}r_s$ , dove  $r_s$  è il suo raggio di Schwarzschild, nessuna forza della natura può opporsi alla gravità. La massa è destinata a contrarsi indefinitamente, dando luogo alla predizione più estrema della teoria: una singolarità spaziotemporale, o *buco nero*.

### 7.1 Il collasso continua

Una stella di grande massa, che durante le fasi di instabilità non perde abbastanza massa per trovare un equilibrio sotto forma di nana bianca o di stella di neutroni, prosegue il collasso. Neanche la pressione di degenerazione dei neutroni è sufficiente a contrastare la forza di gravità. Esiste uno stato della materia ancor più esotico del gas di neutroni che consente un equilibrio?

Trovare un'equazione di stato per la materia a densità maggiori di quelle presenti in una stella di neutroni, diciamo per  $\rho \gtrsim 10^{15}\text{g/cm}^3$ , non è affatto banale. A queste densità la distanza relativa fra i neutroni può essere anche inferiore a  $10^{-13}$  cm, e quindi diventare importante il contributo della forza forte; il sistema di neutroni potrebbe diventare un plasma di quarks. Indipendentemente dalle caratteristiche delle forze che potrebbero opporsi alla gravità per formare questo stato esotico della materia, peraltro oggetto di discussione e ricerca attuale, è comunque possibile trovare un risultato che sancisce un limite oltre il quale nessuna forza immaginabile può opporsi alla gravità. Questo risultato è dovuto unicamente alla Relatività Generale e non ha un analogo in fisica classica.

## 7.2 Un limite per l'equilibrio stellare

Consideriamo un distribuzione radiale di densità di energia  $\rho(r) \geq 0$  per ogni  $r$ , tale che:

- $\rho(r) = 0$  per  $r > R$ ;
- $M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) dr$ ;
- $A(r) = \left[1 - \frac{2GM(r)}{r}\right]^{-1}$  non sia mai singolare e sia sempre positivo, cioè:

$$\mathcal{M}(r) < \frac{r}{2G}; \quad (7.1)$$

- $\rho$  sia una funzione non crescente del raggio:  $\rho'(r) \leq 0$ .

Questa distribuzione di densità si adatta perfettamente al modello stellare che è stato sin qui esposto. Data  $\rho(r)$ , è possibile calcolare ovunque  $A(r)$  e quindi  $p(r)$  dall'equazione di equilibrio (3.10), con la condizione  $p(R) = 0$ . La regolarità e le caratteristiche di  $\rho$  ed  $A$  garantiscono che sia  $p(r) \geq 0$ ,  $p(r) < \infty$ . Inoltre, dalla (3.13), anche  $B(r)$  risulta regolare e positivo per ogni  $r$ , per cui la metrica è ovunque priva di singolarità. Dalla (3.13)  $B(r)$  è non nullo grazie al fatto che  $p(r) \neq \infty$ .

Consideriamo ora le due equazioni di campo (3.4a), (3.4c), ricavate per un fluido perfetto in equilibrio idrostatico:

$$R_{rr} = -\frac{\partial_r^2 B}{2B} + \frac{(\partial_r B)^2}{4B^2} + \frac{\partial_r A \partial_r B}{4AB} + \frac{\partial_r A}{Ar} = 4\pi G(\rho - P)A \quad (7.2a)$$

$$R_{tt} = \frac{\partial_r^2 B}{2A} - \frac{(\partial_r B)^2}{4AB} - \frac{\partial_r A \partial_r B}{4A^2} + \frac{\partial_r B}{Ar} = 4\pi G(\rho + 3P)B. \quad (7.2b)$$

e formiamo la combinazione

$$3R_{rr}B + R_{tt}A = -\frac{3B''}{2} + \frac{3B'^2}{4B} + \frac{3A'B'}{4A} + \quad (7.3a)$$

$$+ \frac{3A'B}{Ar} + \frac{B''}{2} - \frac{B'^2}{4B} - \frac{A'B'}{4A} + \frac{B'}{r} = \quad (7.3b)$$

$$= 12\pi G(\rho - p)AB + 4\pi G(\rho + 3p)AB = 16\pi G\rho AB \quad (7.3c)$$

da cui

$$-B'' + \frac{B'^2}{2B} + \frac{A'B'}{2A} + \frac{3A'B}{Ar} + \frac{B'}{r} = 16\pi G\rho AB \quad (7.4)$$

$$-B'' + \frac{B'}{2} \left( \frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} + \frac{2}{r} \right) = \frac{B}{rA} (-3A' + 16\pi G\rho A^2). \quad (7.5)$$

Poichè  $B$  è sempre positivo, possiamo definire  $B = \epsilon^2$ , e ricordando che  $A(r) = (1 - \frac{2GM}{r})^{-1}$  si ottiene

$$2 \frac{d}{dr} \left( \epsilon \frac{d\epsilon}{dr} \right) - \epsilon \frac{d\epsilon}{dr} \left( \frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dr} - 8AG\pi\rho r + \frac{2GAM}{r^2} + \frac{2}{r} \right) = \quad (7.6a)$$

$$= \frac{\epsilon^2}{r} \left( -16A\pi Gr\rho - 24AGr\rho\pi + 6A \frac{GM}{r} \right) \quad (7.6b)$$

da cui, con alcune manipolazione algebriche, si giunge infine a

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{2GM(r)}{r} \right)^{1/2} \frac{d\epsilon}{dr} \right] = G \left( 1 - \frac{2GM(r)}{r} \right)^{-1/2} \frac{d}{dr} \left( \frac{\mathcal{M}(r)}{r^3} \right) \epsilon(r). \quad (7.7)$$

Nel punto  $r = R$  si ha il raccordo con la soluzione di Schwarzschild valida all'esterno della stella, per cui vale  $\epsilon^2(R) = B(R) = A^{-1}(R)$ , cioè

$$\epsilon(R) = \sqrt{1 - \frac{2GM}{R}} \quad , \quad \epsilon'(R) = \frac{MG}{R} \left( 1 - \frac{2GM}{R^2} \right)^{-1/2}. \quad (7.8)$$

Poichè  $B$  è strettamente positivo per ogni  $r$ , la funzione  $\epsilon$  deve essere o strettamente negativa o strettamente positiva. Poichè in  $R$  è positiva, si conclude che  $\epsilon(r) > 0 \forall r$ . La densità media della sfera di raggio  $r$ , cioè  $\frac{3\mathcal{M}(r)}{4\pi r^3}$ , non può crescere con  $r$  perchè  $\rho'(r) \leq 0$ ; la derivata della densità media, un cui multiplo compare nella (7.7), è quindi negativa o al più nulla. Allora dalla (7.7) segue che

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{2GM(r)}{r} \right)^{1/2} \frac{d\epsilon}{dr} \right] \leq 0. \quad (7.9)$$

Integrando da  $r$  a  $R$  si ottiene

$$\left[ \frac{1}{r'} \left( 1 - \frac{2GM(r')}{r'} \right)^{1/2} \frac{d\epsilon}{dr'} \right]_r^R \leq 0 \quad (7.10)$$

ovvero, utilizzando la (7.8):

$$\frac{MG}{R^3} \leq \frac{1}{r} \sqrt{1 - \frac{2GM(r)}{r}} \frac{d\epsilon}{dr} \quad \implies \quad \frac{d\epsilon}{dr} \geq \frac{MGr}{R^3} \left( 1 - \frac{2GM(r)}{r} \right)^{-1/2} \quad (7.11)$$

che integrata nuovamente fra 0 e  $R$  dà

$$\epsilon(R) - \epsilon(0) \geq \int_0^R \frac{MGr}{R^3} \left( 1 - \frac{2GM(r)}{r} \right)^{-1/2} dr \quad (7.12)$$

$$\epsilon(0) \leq \sqrt{1 - \frac{2GM}{R}} - \frac{GM}{R^3} \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{1 - \frac{2GM(r)}{r}}}. \quad (7.13)$$

Quando  $\mathcal{M}(r)$  è ovunque la più piccola possibile, l'integrale precedente assume il valore minore possibile, e dunque il membro di destra della equazione precedente è massimo. Fissato il raggio  $R$  e la massa totale  $M$ , e dato che  $\rho'(r) \leq 0$ , la configurazione che rende *ovunque*  $\mathcal{M}(r)$  il più piccolo possibile è quella a  $\rho(r)$  costante. In questo caso

$$\mathcal{M}(r) = 4\pi\rho\frac{r^3}{3}, \quad M = 4\pi\rho\frac{R^3}{3} \quad \implies \quad \mathcal{M}(r) = \frac{Mr^3}{R^3} \quad (7.14)$$

e inoltre

$$\int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{1 - \frac{2GM(r)}{r}}} = \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{1 - \frac{2GM r^2}{R^3}}} = \frac{R^3}{2GM} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2GM}{R}} \right). \quad (7.15)$$

Pertanto, dalla (7.13) e dal fatto che  $\epsilon(r) > 0$  si ha

$$0 < \epsilon(0) \leq \frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{2GM}{R}} - \frac{1}{2} \quad (7.16)$$

da cui

$$\frac{GM}{R} < \frac{4}{9}. \quad (7.17)$$

Poichè  $2GM$  è il raggio di Schwarzschild  $r_s$ , la precedente disuguaglianza è equivalente a

$$\boxed{R > \frac{9}{8} r_s}. \quad (7.18)$$

Solo una distribuzione di massa-energia di raggio  $R > \frac{9}{8} r_s$  può essere sostenuta da una pressione finita generando una metrica non singolare. La distribuzione a densità costante è un caso particolare che in realtà difficilmente si potrebbe verificare, per cui il limite è in realtà più alto. Modelli più dettagliati di stelle di neutroni suggeriscono un limite di circa  $3r_s$ .

# Bibliografia

- [1] S.Weinberg, *Gravitation and Cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*, Wiley, 1972
- [2] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman and Company, 1973
- [3] J.B. Hartle, *Gravity - an introduction to Einstein's general relativity*, Pearson Education, 2003
- [4] B.K. Harrison, K.S. Thorne, M. Wakano, J.A. Wheeler, *Gravitation Theory and Gravitational Collapse*, Chicago University Press, 1965
- [5] Y.B. Zel'dovich, I.D. Novikov, *Stars and Relativity*, Dover Publications, 1971
- [6] J.R. Oppenheimer, G.M. Volkoff, *Phys. Rev.*, **55**, 374 (1939)