ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Applicazioni della Geometria Simplettica alla risoluzione delle equazioni iconali

Relatore:
Chiar.mo Prof.
André Martinez

Presentata da:
Luca Oddis

Sessione IV
Anno Accademico 2013-2014

Indice

Introduzione

Equazione Iconale: dal tedesco Eikonal, che a sua volta viene dal greco $\epsilon\iota\kappa\omega\nu$ (pronuncia:eikon), ovvero immagine.

Si chiama *equazione iconale* ogni equazione differenziale alle derivate parziali del primo ordine che nella sua forma più generale si scrive:

$$\Phi(x, \nabla\varphi(x)) = 0 \tag{1}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, e dove $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, di classe almeno $\mathcal{C}^1$, è l'incognita. Le problematiche nella risoluzione di questa equazione alle derivate parziali sorgono dal fatto che, a priori, $\Phi(x, \xi)$ non è necessariamente lineare rispetto a ξ; il caso non lineare è proprio quello che spinge ad adottare le metodologie che verranno presentate nel seguente elaborato. Il nome deriva dal fatto che queste equazioni compaiono frequentemente in studi di ottica geometrica, ma più in generale quando si affrontano problemi legati a fenomeni ondulatori. Quindi ricorrono spesso anche in studi di meccanica quantistica, dato che in quest'ultima si è interessati a funzioni che hanno di norma una componente di oscillazione.
Un primo esempio di equazione di tipo iconale presentato emerge proprio dallo studio del noto *operatore differenziale di Schrödinger*, che è l'operatore associato all'energia di una particella:

$$P = -h^2\Delta + V(x) \quad (h\ costante\ di\ Plank,\ h << 1) \tag{2}$$

Δ rappresenta l'operatore Laplaciano in $\mathbb{R}^n$ e $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ è un potenziale. Siamo interessati a studiare le autofunzioni[1] di questo operatore lineare, cioè,

[1] Una *Autofunzione* di un dato operatore differenziale estende il concetto di autovettore in uno spazio funzionale, quindi, dato l'operatore lineare A che agisce su uno spazio funzionale, un'autofunzione sarà una funzione f dello spazio tale che $A(f) = \lambda f$,con λ scalare che è coerentemente detto autovalore.

se $E \in \mathbb{R}$ è l'energia del sistema, le funzioni che soddisfano $P(u) = Eu$. Per la risoluzione si cercano approssimazioni locali del tipo

$$u(x,h) \approx [a_0(x) + ha_1(x) + h^2 a_2(x) + \dots]e^{\frac{i\varphi(x)}{h}} = a(x,h)e^{\frac{i\varphi(x)}{h}}$$

In questo modello di soluzione è possibile riconoscere il prodotto di una componente *non oscillante*, ovvero la serie formale $\sum_{i=0}^{\infty} h^i a_i(x)$ (si intende $\partial_x^\alpha a = \mathcal{O}(1)$ *per* $h \to 0^+$) per una *oscillante* costituita dall'esponenziale complesso di destra. Fatta questa breve introduzione, al fine di testare questo tipo di soluzioni, si procede ad analizzare il caso unidimensionale dell'equazione iconale, per cui la ricerca di una soluzione locale è di misura più semplice rispetto al caso in più variabili.

0.1 Approssimazioni WKB per l'operatore di Schrödinger unidimensionale

In questa sezione, come anticipato si studia l'operatore (2) per funzioni di una variabile reale, cioè si ha $x \in \mathbb{R}, V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la norma euclidea è il valore assoluto e il laplaciano si riduce all'operatore di derivazione seconda in una variabile. Le soluzioni che si estrarranno usando la tecnica che segue sono dette *soluzioni WKB*, che sono le iniziali di tre fisici: Wentzel, Kramers, and Brillouin che nel 1926 hanno sviluppato questo metodo risolutivo. Nella letteratura questo metodo viene a volta denotato con JWKB per includere il matematico Harold Jeffreys. Infatti Jeffreys aveva sviluppato un metodo che approssimava soluzioni di equazioni lineari al secondo ordine (tra cui la celebre *equazione di Schrodinger*) già nel 1923.
Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $V(x_0) < E$. Si considera, per x sufficientemente vicino a x_0, la coppia di funzioni $\mathcal{C}^\infty$:

$$\varphi_\pm(x) = \pm \int_x^{x_0} \sqrt{E - V(y)}dy$$

Entrambe le funzioni soddisfano l'equazione (1) cioè $\varphi'_\pm(x) = E - V(x)$. Osserviamo che $\varphi'_\pm(x) \neq 0$ intorno a x_0, dunque $\sqrt{|\varphi'_\pm(x)|}$ è ivi liscia. Per avere una autofunzione di (2) relativa all'autovalore energia E, data una funzione $a = a(x)$ liscia intorno a x_0 si deve avere che:

$$(-h^2 \frac{d^2}{dx^2} + V - E)(a(x,h)e^{\frac{i\varphi_\pm(x)}{h}}) = 0$$

Calcoliamo quindi ora la derivata seconda di $a(x,h)e^{\frac{i\varphi_\pm(x)}{h}}$

$$\frac{d^2}{dx^2}(ae^{\frac{i\varphi_\pm}{h}}) = \frac{d}{dx}(a'e^{\frac{i\varphi_\pm}{h}} + a\varphi'_\pm \frac{i}{h} e^{\frac{i\varphi_\pm}{h}}) = a''e^{\frac{i\varphi_\pm}{h}} + 2a'\varphi'_\pm \frac{i}{h} e^{\frac{i\varphi_\pm}{h}} - \frac{1}{h^2} a\varphi'^2_\pm e^{\frac{i\varphi_\pm}{h}} + \frac{i}{h} a\varphi''$$

Dunque, andando a sostituire:

$$(-h^2\frac{d^2}{dx^2}+V-E)(ae^{\frac{i\varphi_\pm}{h}}) = (-h^2(a''+2a'\varphi'_\pm\frac{i}{h}-\frac{1}{h^2}a\varphi'^2_\pm)+Va-Ea)e^{\frac{i\varphi_\pm}{h}}$$
$$= ((\varphi'^2_\pm+V-E)a-2iha'\varphi'_\pm-iha\varphi''_\pm-h^2a'')e^{\frac{i\varphi_\pm}{h}}$$

utilizzando che $\varphi_\pm$ soddisfa l'equazione iconale:

$$= -ih(2a'\varphi'_\pm+a\varphi''_\pm-iha'')e^{\frac{i\varphi_\pm}{h}}$$
$$= -2ih\sqrt{\varphi'_\pm}(a'\sqrt{\varphi'_\pm}+\frac{a\varphi''_\pm}{2\sqrt{\varphi'_\pm}}-\frac{iha''}{2\sqrt{\varphi'_\pm}})e^{\frac{i\varphi_\pm}{h}}$$

Per la regola di derivazione di un prodotto si ha $a'\sqrt{\varphi'_\pm}+\frac{a\varphi''_\pm}{2\sqrt{\varphi'_\pm}}=(a\sqrt{\varphi'_\pm})'$ ottenendo infine

$$= -2ih\sqrt{\varphi'_\pm}((a\sqrt{\varphi'_\pm})'-\frac{iha''}{2\sqrt{\varphi'_\pm}})e^{\frac{i\varphi_\pm}{h}}$$

A questo punto si considera una successione di funzioni $(a_k^\pm)$ che risolvono le cosiddette *equazioni di trasporto*. Vengono definite in maniera ricorsiva nel modo seguente:

$$(a_0^\pm\sqrt{\varphi'_\pm})'=0$$
$$(a_k^\pm\sqrt{\varphi'_\pm})'-\frac{i(a_{k-1}^\pm)''}{2\sqrt{\varphi'_\pm}}=0 \quad \forall k\in\mathbb{N}-\{0\}$$

La funzione $a_\pm(x,h)$ sarà la *somma asintotica* della serie formale $\sum_{k=0}^\infty h^k a_k^\pm$. La serie formale $\sum_{k=0}^\infty h^j[(a_k^\pm\sqrt{\varphi'_\pm})'-\frac{ih(a_k^\pm)''}{2\sqrt{\varphi'_\pm}}]$ per come è stata costruita si annulla identicamente, quindi si ha, una volta chiamata $u_\pm=a_\pm e^{\frac{i\varphi_\pm}{h}}$, la stima:

$$(-h^2\frac{d^2}{dx^2}+V(x)-E)u_\pm=\mathcal{O}(h^\infty)$$

per $h<<1$ e x vicino a x_0, ovvero che $a\sim 0$ come serie formali.[2] Si procede ora determinando le a_j, quindi si risolvono le equazioni di trasporto. La

[2]Si definisce la *somma asintotica* di una serie formale come l'unico (modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$) simbolo a tale che a$\sim\sum_{n=0}^\infty h^n a_n$, intendendo che $\forall N\in\mathbb{N}$ e $\forall\alpha\in\mathbb{N}^d$ $\exists h_{N,\alpha}\geq h>0$ e $C_{N,\alpha}>0$ tali che $|\ \partial^\alpha(a-\sum_{n=0}^N h^j a_j)\ |\leq C_{N,\alpha}h^N$ uniformemente su $\mathbb{R}^d\times(0,h_{N,\alpha}]$. L'esistenza e l'unicità (modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$ per ogni successione di simboli di una tale a e quindi anche della *somma asintotica* non sono qui affrontate nel dettaglio, ma se ne usano semplicemente le conseguenze. Per approfondire questa parte e guardare le dimostrazioni si può consultare [Martinez(2011)]

scelta della a_0 non è obbligata e si può scegliere:

$$a_0^{\pm}(x) = \frac{\sqrt{\varphi'_{\pm}(x_0)}}{\sqrt{\varphi'_{\pm}(x)}} = \frac{(E - V(x_0))^{\frac{1}{4}}}{(E - V(x))^{\frac{1}{4}}}$$

per i $j > 1$

$$a_j^{\pm}(x) = \frac{i}{\sqrt{\varphi'_{\pm}(x)}} \int_{x_0}^{x} \frac{(a_{j-1}^{\pm})''(y)}{\sqrt{\varphi'_{\pm}(y)}} dy$$

Così si ottiene una soluzione $u_{\pm}(x; h)$, che soddisfa in più la condizione: $u_{\pm}(x_0; h) = 1$.

Il caso dell'operatore (2) in $\mathbb{R}^n$ non differisce di molto come procedura. Va però cercata un'altra via per estrarre la funzione φ che risolve l'equazione iconale, poiché non è possibile ricavarla tramite una radice quadrata come nel caso appena presentato. Qui entra in gioco lo studio della *forma canonica simplettica* e delle *sottovarietà Lagrangiane*. Prima di presentare queste nozioni, tuttavia, si è scelto di introdurre il formalismo delle k-forme, molto utile per rileggere i risultati della geometria simplettica.

Capitolo 1

Richiami

1.1 Nozioni di Calcolo differenziale esterno in $\mathbb{R}^n$

In $\mathbb{R}^n$ indichiamo con dx_j *con* $j = 1, \dots, n$ la funzione lineare che associa ad ogni vettore $\alpha \in \mathbb{R}^n$ la sua j-esima componente:

$$dx_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \;\; ove \; dx_j(\alpha) = \alpha_j$$

Per ogni $j_1, \dots, j_k \in 1, \dots, n$ indico con

$$dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \cdots \wedge dx_{j_k}$$

la **funzione k-lineare** $dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \cdots \wedge dx_{j_k} : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \mathbb{R}^n}_{\text{k-volte}} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che: $dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \cdots \wedge dx_{j_k}(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(k)}) = \begin{vmatrix} \alpha^{(1)}_{j_1} & \alpha^{(1)}_{j_2} & \cdots & \alpha^{(1)}_{j_k} \\ \alpha^{(2)}_{j_1} & \alpha^{(2)}_{j_2} & \cdots & \alpha^{(2)}_{j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^{(k)}_{j_1} & \alpha^{(k)}_{j_2} & \cdots & \alpha^{(k)}_{j_k} \end{vmatrix}$

Nella formula abbiamo indicato con $\alpha^{(i)}_j$ la j-esima componente del vettore $\alpha^{(i)}$

Il simbolo $\wedge$ viene detto *wedge* e l'operazione a lui associata *wedge product.*

Osservazione 1. *Dalle proprietá del determinante possiamo immediatamente osservare che:*

1. $dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k} = 0$ *se* $j_i = j_p$ *per qualche* $i, p \in \{1, \dots, k\}$
   Dunque se $k > n$ *una k-forma in* $\mathbb{R}^n$*è necessariamente la forma nulla.*

2. *Se gli indici $j_1, \dots, j_k$ sono a due a due diversi tra loro vale:*

$$dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \cdots \wedge dx_{j_k} = (-1)^{p(j_1,\dots,j_k)} dx_{l_1} \wedge dx_{l_2} \cdots \wedge dx_{l_k}$$

con $\{j_1, \dots, j_k\} = \{l_1, \dots, l_k\}$
$p(j_1, \dots, j_k) = 0$ *se* $j_1, \dots, j_k$ *è una permutazione pari di* $l_1, \dots, l_k$*,vale 1 altrimenti.*

Definizione 1 (k-forma canonica)**.** *Le funzioni* $dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \cdots \wedge dx_{j_k}$ *(fatta eccezione per quella identicamente nulla) sono chiamate* ***k-forme canoniche*** *di* $\mathbb{R}^n$*.*

Lo spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$*) generato dalle k-forme canoniche su* $\mathbb{R}^n$ *con le operazioni classiche di somma di funzioni e prodotto per scalare viene detto* ***Spazio delle k-forme alternanti*** *e viene indicato con:*

$$A^p(\mathbb{R}^n)$$

Esempio 1. *Fissiamo n=3*
Le 1-forme canoniche sono $dx_1,\ dx_2,\ dx_3$
Le 2-forme canoniche sono $dx_1 \wedge dx_2,\ dx_1 \wedge dx_3,\ dx_2 \wedge dx_3,\ dx_2 \wedge dx_1,\ dx_3 \wedge dx_1,\ dx_3 \wedge dx_2$
Le 3-forme canoniche sono $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3, dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_2, dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3, dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1,\ dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2,\ dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_1$
$A^1(\mathbb{R}^3) = \{\lambda_1 dx_1 + \lambda_2 dx_2 + \lambda_3 dx_3 |\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\}$
$A^2(\mathbb{R}^3) = \{\lambda_1 dx_2 \wedge dx_3 + \lambda_2 dx_3 \wedge dx_1 + \lambda_3 dx_1 \wedge dx_2 |\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\}$
$A^3(\mathbb{R}^3) = \{\lambda dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 |\ \lambda \in \mathbb{R}\}$

Per quanto detto finora *è* immediato osservare che $dim_{\mathbb{R}}\ A^p(\mathbb{R}^n) = \binom{n}{k}$

Definizione 2. *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^n$*. Sia* k *un intero* $0 \le k \le n$*. Una funzione* $\theta : \Omega \longrightarrow A^p(\mathbb{R}^n)$
si chiama ***k-forma differenziale****. Si scrive dunque nel modo seguente:*

$$\theta = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} f_{\mathrm{i}_1}, \dots, f_{\mathrm{i}_k}(x) dx_{\mathrm{i}_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mathrm{i}_k} \tag{1.1}$$

ove $f_{\mathrm{i}_1}, \dots, f_{\mathrm{i}_k} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *è una funzione differenziabile di dominio* Ω

Esempio 2.

- *Una 1-forma differenziale in* $\mathbb{R}^n$ *ha un'espressione del tipo:*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, \dots, x_n)\ dx_i \tag{1.2}$$

  ove $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *e* f_i *è una funzione differenziabile* $\forall i = 1, \dots, n$.
  Ad esempio in $\mathbb{R}^3$ *sono 1-forme:* $\sigma_1 = 5dx + ydy + e^x dz$ *e* $\sigma_2 = (x + y)dy$

- *Un esempio particolare di una 2-forma in $\mathbb{R}^{2n}$ è la seguente:*

$$\sigma = \sum_{j=1}^{n} d\xi_j \wedge dx_j = d\xi \wedge dx$$

ove (x_i) sono le prime n coordinate (ξ_i) le restanti. Siamo interessati a questa particolare forma nella nostra trattazione.

Osservazione 2. *L'insieme delle k-forme differenziali definite in un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$ con le operazioni di somma e prodotto per scalare forma uno spazio vettoriale. Le funzioni scalari che compaiono al secondo membro della (1.1) sono dette* componenti *di θ.*
Diremo che θ è di classe $\mathcal{C}^1$ se lo sono tutte le sue componenti.

Per le nostre esigenze abbiamo la necessità di introdurre anche il concetto di *differenziale* di una k-forma differenziale. L'operazione di *Derivazione Esterna* estende la nozione di differenziale di una funzione (che può essere pensata come una 0-forma differenziale e inglobata in questa teoria) e porta una k-forma differenziale in una $k+1$ forma differenziale. La sua formulazione attuale è dovuta a *Élie Joseph Cartan.*

Definizione 3. *Conservando le notazioni della (1.1) definisco il differenziale della forma θ:*

$$d\theta = \sum_{i=1}^{n} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \frac{\partial f_{\mathrm{i}_1}, \ldots, f_{\mathrm{i}_\mathrm{k}}(x)}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{\mathrm{i}_1} \wedge \cdots \wedge dx_{\mathrm{i}_\mathrm{k}}$$

Esempio 3. *Nel caso in particolare della 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^{2n}$:*

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} \xi_j dx_j$$

otteniamo:

$$d\omega = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(\xi_j)}{\partial \xi_j} d\xi_j \wedge dx_j = \sum_{j=1}^{n} d\xi_j \wedge dx_j$$

che è proprio la 2-forma dell'esempio precedente.

Per questo capitolo si è deciso di seguire l'impostazione e le notazioni del testo [Lanconelli(1997)].

Capitolo 2

Geometria Simplettica

2.1 La Forma Canonica Simplettica in $\mathbb{R}^{2n}$

Dati due vettori $u=(u_x,u_\xi),v=(v_x,v_\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ si pone:

$$\sigma(u,v) = u_\xi \cdot v_{\mathrm{x}} - u_{\mathrm{x}} \cdot v_\xi = \langle \mathcal{J}u, v\rangle \quad ove\ \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

Nell'espressione di sopra abbiamo indicato con $(\cdot)$ il *prodotto scalare eucliedeo in* $\mathbb{R}^{n}$; con $< \cdot, \cdot >$ *il prodotto scalare euclideo in* $\mathbb{R}^{2n}$
Questa formula definisce una *forma bilineare* $\sigma : \mathbb{R}^{2n}$ x $\mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$

Osservazione 3. *La σ così definita risulta essere antisimmetrica*

$$\sigma(u,v) = -\sigma(v,u)$$

e non degenere

$$i.e \qquad \sigma(u,v) = 0 \ \ \forall v \in \mathbb{R}^{2n} \quad \Leftrightarrow \qquad u = 0.$$

Infatti, se si prendono come v i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^{2n}$ $(e_j)_{j=1,\dots,2n}$ si ha che tutte le componenti di u devono essere uguali a 0.

La mappa σ è chiamata **2-forma canonica simplettica** su $\in \mathbb{R}^{2n}$, infatti, con il formalismo delle k-forme si può anche scrivere

$$\sigma = \sum_{j=1}^{n} d\xi_j \wedge dx_j = d\xi \wedge dx \tag{2.1}$$

In particolare si ha che questa forma ammette una primitiva ω nel senso delle k-forme, cioè tale che:

$$\sigma = d\omega \tag{2.2}$$

Per quanto visto nella sezione precedente questa primitiva è la 1-forma:

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} \xi_j dx_j$$

che viene detta **1-forma canonica** su $\mathbb{R}^{2n}$. Dall'identità (4) si ricava che σ è esatta nel senso delle 2-forme. Fatto da cui si ha che σ è *chiusa*, cioè vale $d\sigma = 0$.
La σ va interpretata come un elemento di $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}_\rho; \mathcal{B}_2(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R}))$ (con $\mathcal{B}_2(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R})$ si denota lo spazio delle forme bilineari su $\mathbb{R}^{2n}$), che risulta costante al variare di $\rho \in \mathbb{R}^{2n}$:

$$\forall \rho \in \mathbb{R}^{2n} \quad \sigma_\rho = d\xi \wedge dx$$

Osservazione 4. *Di certo in questo contesto anche lo spazio $\mathbb{R}^{2n}$ che appare nell'espressione $\mathcal{B}_2(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R})$ deve essere pensato in una maniera speciale, vale a dire come lo* spazio tangente $T_\rho(\mathbb{R}^{2n})$.
Tutto il discorso può essere fatto, rimpiazzando $\mathbb{R}^{2n}_\rho$ con un varietà $\mathcal{M}$ di dimensione 2n. In quel caso $\mathcal{B}_2(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R})$ va rimpiazzato con $\mathcal{B}_2(T_\rho\mathcal{M}; \mathbb{R})$ avendo indicato con $T_\rho\mathcal{M}$ lo spazio vettoriale tangente ad $\mathcal{M}$. Comunque per le nostre questioni, noi continueremo a trattare il caso dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{2n}$

2.2 Trasformazioni Simplettiche

Una volta introdotta la nozione di forma simplettica, può risultare utile studiare una classe di funzioni che ne preservano la struttura. Si tratta delle *Trasformazioni simplettiche (o canoniche)*. Esistono varie maniere equivalenti per introdurle. Qui si è scelto di definirle usando la nozione di *prodotto esterno (wedge product)*.

Definizione 4. *Siano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ due sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}^{2n}$ e sia*

$$\kappa : \quad \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$$
$$(x, \xi) \longmapsto (y(x, \xi), \eta(x, \xi))$$

un diffeomorfismo $\mathcal{C}^\infty$ da $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$ κ si dice essere ***canonica (o simplettica)*** *se sull'aperto $\mathcal{U}$*

$$d\eta \wedge dy = d\xi \wedge dx$$

dove abbiamo posto

$$d\eta \wedge dy = \sum_{j=1}^{n} d\eta_j \wedge dy_j$$

In maniera equivalente si può dire che:

$$\boxed{\kappa^*\sigma = \sigma} \tag{2.3}$$

dove $(\kappa^*\sigma)_\rho(u,v) := \sigma(d\kappa(\rho)\cdot u, d\kappa(\rho)\cdot v)$
In altre parole κ preserva σ. In particolare, se n=1, -σ è il determinante in $\mathbb{R}^2$ (ovvero la lunghezza orientata del prodotto vettoriale tra u e v), infatti in questo caso (2.3) dice che κ preserva le aree in $\mathbb{R}^2$.

Esempio 4 (Cambiamento di Variabile in $\mathbb{R}^n$)**.** *Si considera il cambiamento di variabile in $\mathbb{R}^n$:*

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \longmapsto y(x)$$

e si pone:

$$\kappa(x,\xi) = (y(x),{}^t dy(x)^{-1}\xi)$$

con $\eta(x,\xi) ={}^t dy(x)^{-1}\xi$.
A questo punto si può calcolare il differenziale di $\eta(x,\xi)$ (che sarà una 1-forma differenziale).

$$d\eta ={}^t dy(x)^{-1}d\xi + \frac{\partial({}^t dy(x)^{-1})}{\partial x}\xi dx$$

$$dy \wedge d\eta = dy(x)dx \wedge {}^t dy(x)^{-1}d\xi + dy(x)dx \wedge \frac{\partial({}^t dy(x)^{-1})}{\partial x}\xi dx$$

$$= dx \wedge {}^t dy(x){}^t dy(x)^{-1}d\xi + dx \wedge {}^t dy(x)\frac{\partial({}^t dy(x)^{-1})}{\partial x}\xi dx$$

$$= dx \wedge d\xi + \sum_{j=1}^n dx_j \wedge (\sum_{k=1}^n a_{j,k}(x,\xi)dx_k)$$

$$= dx \wedge d\xi + \sum_{j<k}(a_{j,k}(x,\xi) - a_{k,j}(x,\xi))dx_j \wedge dx_k$$

dove $a_{j,k}(x,\xi)$ rappresenta il coefficiente (j,k) della matrice ${}^t dy(x)\frac{\partial({}^t dy(x)^{-1})}{\partial x}\xi$. Dato che questa matrice dipende linearmente da ξ, se vogliamo provare che è simmetrica basta provarlo sostituendo a ξ solo i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$. S.p.g assumiamo $\xi = (1,0,\dots,0)$. Denotando poi $(m_{i,j}) ={}^t dy(x)^{-1}$ e $(n_{i,j}) ={}^t dy(x)$ si ha:

$$a_{j,k} = \sum_{l=1}^n n_{j,l}\frac{\partial m_{l,1}}{\partial x_k}$$

A questo punto si osserva che le due matrici $(m_{i,j})$ *e* $(n_{i,j})$ *sono l'una l'inversa dell'altra e dunque si ha* $\sum_{l=1}^{n} n_{j,l}m_{l,1} = \delta_{j,1}$. *Se si differenzia questa uguaglianza si ottiene:*

$$a_{j,k} = -\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial n_{j,l}}{\partial x_k} m_{l,1} = -\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_k \partial x_j} m_{l,1}$$

L'ultima uguaglianza viene dalla definizione stessa di $(n_{i,j})$. *Questa espressione chiaramente rimane uguale se vengono scambiati* j *e* k *(Schwarz) e siccome lo stesso calcolo funziona analogamente per tutti i vettori della base canonica di* $\mathbb{R}^n$*, che, per quanto detto sopra, basta per dire che* $a_{j,k}(x,\xi) = a_{k,j}(x,\xi)$ *in* $\mathbb{R}^n$. *Come conseguenza si ottiene che*

$$dy \wedge d\eta = dx \wedge d\xi$$

e quindi che κ *è canonica.*

Esempio 5 (Altre trasformazioni canoniche note)**.**

- *Sia* $(a,b) \in \mathbb{R}^{2n}$*, la traslazione associata a questo vettore, ovvero la funzione:*

$$\kappa_{(a,b)} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$$
$$(x,\xi) \mapsto (x+a, \xi+b)$$

  è una trasformazione canonica

- *Data la funzione liscia* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*; la funzione*

$$\kappa_G : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$$
$$(x,\xi) \mapsto (x, \xi + \nabla\varphi(x))$$

  è una trasformazione canonica detta Trasformazione di Gauge *(globale)*

-

$$\kappa_F : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$$
$$(x,\xi) \mapsto (\xi, -x)$$

  è una trasformazione canonica detta Trasformazione di Fourier.
  Questa trasformazione a differenza delle precedenti è un'applicazione lineare, che ha per matrice associata:

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

  ovvero la stessa matrice $\mathcal{J}$ *associata alla forma canonica simplettica. Questa trasformazione verrà ripresa più avanti quando si porrà il problema di prolungare soluzioni, a priori locali, in zone in cui non si avrebbe la buona definizione di queste.*

2.3 Campo Hamiltoniano

Sia $f = f(x,\xi) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R})$. Allora per ogni $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, il suo differenziale df(x,ξ) appartiene a $(\mathbb{R}^{2n})^* \cong T^*_{x,\xi}\mathbb{R}^{2n}$. In altre parole, l'applicazione:

$$\mathbb{R}^{2n} \cong T_{x,\xi}\mathbb{R}^{2n} \ni u \longmapsto df(x,\xi) \cdot u$$

è una forma lineare su $T_{x,\xi}\mathbb{R}^{2n}$. Di conseguenza, dal fatto che σ è non degenere, il Teorema di Riesz ci da l'esistenza e l'unicità di $H_f(x,\xi) \in T_{(x,\xi)}\mathbb{R}^{2n}$ tale che per qualunque $u \in T_{(x,\xi)}\mathbb{R}^{2n}$:

$$df(x,\xi) \cdot u = \sigma(u, H_f(x,\xi))$$

In coordinate Cartesiane si prova facilmente che:

$$H_f = \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi}$$

che corrisponde alla definizione di Campo Hamiltoniano data in gran parte dei testi di meccanica hamiltoniana. Queste considerazioni mostrano come questa sia una *nozione simplettica*, cioè che non dipende dalla particolare scelta di coordinate, ma solamente dalla forma simplettica σ. In particolare H_f avrà la stessa forma in qualsiasi sistema di coordinate simplettiche, cioè le coordinate (y,η) tali che $\sigma = d\eta \wedge dy$

Osservazione 5. *La* Parentesi di Poisson *di due funzioni f e g si può scrivere*

$$\{f, g\} = \sigma(H_f, H_g)$$

e di conseguenza anch'essa risulta essere una nozione simplettica. Nello specifico, se ho κ trasformazione simplettica, allora $\{f \circ \kappa g, g \circ \kappa\}$

A questo punto parliamo di una proprietà significativa del Campo Hamiltoniano, mostrando la seguente:

Proposizione 1. *Sia $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R})$, sia poi $\mathcal{U}$ un aperto limitato di $\mathbb{R}^{2n}$ e siano T_+ e T_- positivi tali che $\exp t H_f(x)\xi$ sia ben definita per $t \in (-T_-, T_+)$ e per (x,ξ) $\in \mathcal{U}$. Allora si ha che $\forall t \in (-T_-, T_+)$ l'applicazione*

$$\mathcal{U} \ni (x,\xi) \to \exp t H_f(x,\xi) \in \exp t H_f(\mathcal{U})$$

è una trasformazione canonica.

Dimostrazione. Si pone $\phi_t(x,\xi) = \exp tH_f(x,\xi)$. Così da avere

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi_t^*\sigma(u,v)) = \frac{\partial}{\partial t}\sigma(d\phi_t\cdot u, d\phi_t\cdot v) = \sigma(dH_f(\phi_t)\cdot u, d\phi_t\cdot v)+\sigma(d\phi_t\cdot u, dH_f(\phi_t)\cdot v) \tag{2.4}$$

Ma per ogni $\lambda \in \mathbb{R}^{2n}$, si ha:

$$\sigma(\lambda, H_f) = \langle df, \lambda\rangle$$

e quindi, applicando l'operatore differenziale esterno $d = d_{(x,\xi)}$ a questa uguaglianza, si ottiene che:

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}^{2n} \qquad d[\sigma(\lambda, H_f)]\cdot \mu = \langle d^2 f\cdot \mu, \lambda\rangle$$

da cui, dato che $d^2 f = 0$,

$$\sigma(dH_f\cdot\lambda, \mu) + \sigma(\lambda, dH_f\cdot\mu) = 0$$

Otteniamo in particolare, usando la (2.3)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi_t^*\sigma) \mid_{t=0} = 0$$

a quindi anche,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi_t^*\sigma) = \frac{\partial}{\partial s}(\phi_{t+s}^*\sigma) \mid_{s=0} = \frac{\partial}{\partial s}(\phi_t^*\phi_s^*\sigma) \mid_{s=0} = \phi_t^*\frac{\partial}{\partial s}(\phi_s^*\sigma) \mid_{s=0} = 0$$

Infine come conseguenza $\phi_t^*\sigma = \phi_t^*\sigma \mid_{t=0} = \sigma$ □

2.4 Sottovarietà Lagrangiana

Definizione 5. *Una* sottovarietà Λ *in* $\mathbb{R}^{2n}$ *si dice essere una* ***Sottovarietà Lagrangiana*** *se ha dimensione n e se* $\sigma \mid_\Lambda = 0$
(intendendo che $\forall \rho \in \Lambda, \sigma \mid_{T\rho A} = 0$*)*
In modo equivalente, Λ *è Lagrangiana se* $\forall \rho \in \Lambda$ *si ha:*

$$(T_\rho\Lambda)^{\perp\sigma} = T_\rho\Lambda$$

ove con $(T_\rho\Lambda)^{\perp\sigma}$ *si indica lo spazio ortogonale a* $T_\rho\Lambda$ *in* $\mathbb{R}^{2n}$ *rispetto alla 2-forma* σ*.*

Osservazione 6. *L'equivalenza di sopra viene come diretta conseguenza del fatto che* σ *non è degenere su* $\mathbb{R}^{2n}$

Osservazione 7. *Da questa definizione e dalla (2.3) si deduce immediatamente che se ho κ trasformazione canonica definita su un intorno di una sottovarietà Lagrangiana Λ, allora anche $\kappa(\Lambda)$ è Lagrangiana.*

Esempio 6. *Per ogni funzione arbitraria $\mathcal{C}^\infty \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, poniamo*

$$\Lambda_\varphi := \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}; \xi = \nabla\varphi(x)\}$$

Dico che Λ_φ è una sottovarietà Lagrangiana, infatti:

$$dx \wedge d\xi \mid_{\Lambda_\varphi} = \sum_i dx_i \wedge d\xi_i \mid_{\Lambda_\varphi} = \sum_i (dx_i \wedge \sum_j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i} dx_j)$$

$$= \sum_{i<j} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i} (dx_i \wedge dx_j + dx_i \wedge dx_i) = 0$$

Ovviamente vale analogamente per $\tilde{\Lambda_\varphi} := \{(x, \xi); x = \nabla\varphi(\xi)\}$.

Questo esempio ha in qualche modo un significato più generale, come mostrato nel seguente importante risultato, nel quale possiamo iniziare ad intravedere come queste varietà che abbiamo definito possano esserci utili nella risoluzione della nostra equazione iconale.

Proposizione 2. *Sia Λ una sottovarietà di $\mathbb{R}^{2n}$ di dimensione n tale che la proiezione*

$$\pi_1 : \Lambda \to \mathbb{R}^n$$

$$(x, \xi) \mapsto x$$

sia un diffeomorfismo locale. Allora Λ è Lagrangiana se e solo se Λ si descrive localmente tramite un'equazione del tipo $\xi = \nabla\varphi(x)$ con $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty$.

Dimostrazione. Per assunzione sappiamo di già che Λ è localmente definita da un'equazione del tipo $\xi = F(x)$ per qualche funzione $\mathcal{C}^\infty$ F. Dire che Λ a dire che $\sigma \mid_\Lambda = d\omega \mid_\Lambda = 0$; quindi la 1-forma $\omega \mid_\Lambda$ è chiusa. Questo, d'altro canto è equivalente a dire che $\xi dx \mid_\Lambda$ è localmente esatta. Perciò $F(x)dx = d\varphi$ per qualche funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$ $\varphi = \varphi(x)$ definita localmente intorno a x. Questo conclude la prova. □

Una trattazione approfondita delle sottovarietà Lagrangiane e delle applicazioni relative si trova nel [V.Guillemin/S.Stemberg(1990)].

Capitolo 3

Risoluzione Equazioni Iconali

3.1 Esistenza locale

Torniamo alla risoluzione della nostra equazione iconale nella sua forma generale del tipo:

$$p(x, \nabla\varphi(x)) = 0 \tag{3.1}$$

ove avevamo richiesto $p \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ *e* $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Quello che ci accingiamo a fare non è risolvere direttamente l'equazione, ma usare quanto abbiamo detto nel capitolo precedente sulle Sottovarietà Lagrangiane. In particolare andremo a costruire in modo geometrico la Sottovarietà Lagrangiana $\Lambda_\varphi = \{\xi = \nabla\varphi(x)\}$ associata a φ. Di certo l'equazione (3.1) equivale a chiedere che:

$$\Lambda_\varphi \subseteq p^{-1}(0) \tag{3.2}$$

Immediatamente possiamo osservare che la (3.2) implica che $\forall \rho \in \Lambda_\varphi$ si ha:

$$(T_p p^{-1}(0))^{\perp_\sigma} \subseteq (T_\rho \Lambda_\varphi)^{\perp_\sigma} = T_\rho \Lambda_\varphi$$

e visto che $(T_p p^{-1}(0))^{\perp_\sigma}$ ha dimensione 1 ed è generata da $H_p(\rho)$ (dato che $\sigma(u, H_p\rho) = \langle dp(\rho), u\rangle$), il vettore $H_p(\rho)$ sarà necessariamente tangente a Λ_φ. In altri termini, il campo vettoriale H_p rimane tangente ad ogni soluzione Λ_φ di (3.2). Il prossimo risultato ci dice approssimativamente che questa condizione è essenzialmente sufficiente e presenta un modo per costruire la soluzione di (3.2).

Teorema 1. *Sia $\Lambda' \subseteq p^{-1}(0)$ una sottovarietà di dimensione n-1 tale che $\sigma \mid_{\Lambda'} = 0$ e che H_p sia trasversale a Λ'. Allora per ogni $\rho_0' \in \Lambda'$ esiste $t_0 > 0$ ed un intorno Λ_0' di ρ in Λ' tale che l'insieme*

$$\Lambda = \bigcup_{|t|<t_0} \exp t H_p(\Lambda_0')$$

sia Sottovarietà Lagrangiana di $\mathbb{R}^{2n}$ che soddisfa

$$\Lambda' \subseteq \Lambda \subseteq p^{-1}(0)$$

Dimostrazione. Essendo H_p trasverso a Λ', la nostra Λ sarà una Sottovarietà di di dimensione n a patto che Λ'_0 e t_0 siano presi piccoli a sufficienza. Inoltre, se $\rho = exptH_p(\rho') = \phi_t(\rho') \in \Lambda$ si ha:

$$\sigma|_{T_\rho \Lambda} = \phi_t^* \sigma|_{T_{\rho'}\Lambda' \oplus \langle H_p(\rho') \rangle}$$

denotando con $\langle H_p(\rho') \rangle$ lo spazio vettoriale di dimensione 1 generato da $H_p(\rho')$ Ora, applicando la proposizione (1), che ci da la canonicità del flusso, otteniamo

$$\sigma|_{T_\rho \Lambda} = \sigma|_{T_{\rho'}\Lambda' \oplus \langle H_p(\rho') \rangle}$$

Ora se $u, v \in T_{\rho'}\Lambda'$, abbiamo $\sigma(u, v) = 0$ per l'ipotesi su Λ', come anche □

Osservazione 8. *Una qualsiasi sottovarietà $\Lambda' \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ tale che la forma simplettica sia nulla se ivi valutata si dice essere* isotropa. *In particolare la sua dimensione sarà al più n. Nel caso contrario, ovvero quando $(T_\rho \Lambda')^{\perp\sigma} \subset T_\rho \Lambda'$ la sottovarietà Λ' è detta* involutiva *e la sua dimensione è almeno n.*

Come conseguenza di questo teorema si ottiene il risultato di esistenza di soluzione locale per l'equazione iconale.

Teorema 2 (Esistenza locale)**.** *Sia $p \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, se si ha che $p(x_0, \xi_0) = 0$, che $\frac{\partial p}{\partial \xi_n}(x_0, \xi_0) \neq 0$ e se $\psi = \psi(\hat{x})$ è $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ intorno a $\hat{x_0} \in \mathbb{R}^{n-1}$ (ove abbiamo indicato con $\hat{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ e analogamente indicheremo $\hat{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$) tale che $\frac{\partial \psi}{\partial \hat{x}}(\hat{x_0}) = \hat{\xi_0}$ in $\mathbb{R}$*
allora esiste $\varphi = \varphi(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$vicino a x_0 tale che:

- $\varphi'(x_0) = \xi_0$
- $\varphi(\hat{x}, x_n^0) = \psi(\hat{x})$
- $p(x, \nabla\varphi_x) = 0$ *intorno a* x_0

Dimostrazione. Si prova il risultato scegliendo un'opportuna sottovarietà di dimensione $n - 1$:

$$\Lambda' = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}\, ;\, x_n = x_n^0,\, \hat{\xi} = \frac{\partial \psi}{\partial \hat{x}}(\hat{x}),\, \xi_n = g(\hat{x}, \hat{\xi})\}.$$

Qui la funzione $g(\hat{x}, \hat{\xi})$ è la soluzione locale definita implicitamente da

$$p(\hat{x}, x_n^0; \hat{\xi}, g(\hat{x}, \hat{\xi})) = 0.$$

La prima condizione fissa l'ultima coordinata delle x, la terza fissa l'ultima coordinata delle ξ e la seconda è un uguaglianza vettoriale che elimina $n-1$ gradi di libertà. Dunque la dimensione è effettivamente $n-1$. Ora si procede provando che σ si annulla su Λ'

$$d\xi \wedge dx \,|_{\Lambda'} = \sum_{i=1}^{n-1} (\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i) + \frac{\partial \xi_n}{\partial \xi_n} d\xi_n \wedge \frac{\partial x_n^0}{\partial x_n} dx_n = 0$$

Si usa la simmetria della matrice Hessiana e il fatto che $\frac{\partial x_n^0}{\partial x_n} = 0$ essendo x_n^0 una costante. Per quanto riguarda la trasversalità del flusso Hamiltoniano, si può osservare che $T_{\Lambda'}$ è sempre contenuto nell'iperpiano di $\mathbb{R}^{2n}$ di equazione $x_n = 0$, si conclude dunque grazie all'ipotesi di $\frac{\partial p}{\partial \xi_n}(x_0, \xi_0) \neq 0$. □

3.2 Applicazione all'operatore di Schrödinger in $\mathbb{R}^n$

Riprendiamo il caso dell'operatore di Schrödinger P in dimensione n. Questa volta ad ogni ψ tale che $\frac{\partial \psi}{\partial \hat{x}}(\hat{x_0}) = \hat{\xi_0}$ in $\mathbb{R}^{n-1}$ corrisponde una φ estratta con il teorema che soddisfa:

$$\|\varphi\|^2 = E - V$$

con $V(x_0) < E$ (x_0 nella regione classicalmente permessa) Si ricorda che le soluzioni cercate sono del tipo $a(x;h)e^{\frac{i\varphi(x)}{h}}$; dunque si assume preliminarmente che che $\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x_0) \neq 0$ e che $a \,|_{x_n = \hat{x_n}} = 1$ si procede andando a sostituire nell'operatore,

$$(-h^2 \Delta + V - E)(ae^{\frac{i\varphi}{h}}) = 0$$

dalla valutazione del laplaciano

$$\Delta(ae^{\frac{i\varphi}{h}}) = (\Delta a)e^{\frac{i\varphi}{h}} + \frac{2i}{h} \nabla a \cdot \nabla \varphi e^{\frac{i\varphi(x)}{h}} - \frac{1}{h^2} a (\nabla \varphi)^2 e^{\frac{i\varphi(x)}{h}} + \frac{i}{h} a \Delta \varphi e^{\frac{i\varphi(x)}{h}}$$

per cui

$$(P - E)(ae^{\frac{i\varphi(x)}{h}}) = e^{\frac{i\varphi}{h}}(-h^2(\Delta a) - 2ih \nabla a \cdot \nabla \varphi - iha \Delta \varphi + a((\nabla \varphi)^2 + V - E))$$

Utilizzando che φ risolve l'equazione iconale si arriva all'equazione

$$-h^2(\Delta a) - 2ih \nabla a \cdot \nabla \varphi - iha \Delta \varphi = 0$$

Per determinare a le sostituiamo la sua serie nell'equazione precedente, passando ad un uguaglianza tra serie formali:

$$-h^2(\Delta\sum_{k=0}^{\infty}h^k a_k(x)) - 2ih\nabla\sum_{k=0}^{\infty}h^k a_k(x)\cdot\nabla\varphi - ih\sum_{k=0}^{\infty}h^k a_k(x)\Delta\varphi = 0$$

E da questa otteniamo le equazioni di trasporto:

$$\boxed{2\nabla a_0\nabla\varphi + a_0\Delta\varphi = 0}$$

è la prima, ottenuta annullando i coefficienti di h, A questo punto per $k \geq 2$ si possono cambiare gli indici nelle sommatorie come segue:

$$\sum_{k=2}^{\infty}h^k\Delta a_{k-2}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}2ih^k\nabla a_{k-1}(x)\cdot\nabla\varphi + \sum_{k=1}^{\infty}ih^k a_{k-1}(x)\Delta\varphi = 0$$

Annullando i coefficienti di h^k con $k \geq 2$ si ottiene

$$\boxed{2\nabla a_{k-1}(x)\cdot\nabla\varphi + a_{k-1}(x)\Delta\varphi = i\Delta a_{k-2}(x)}$$

Dunque risolta la $k-2$ esima equazione di trasporto, il laplaciano di a_{k-2} sarà una funzione già determinata e quindi si potrà risolvere quella successiva. Queste equazioni sono tutte al primo ordine.

Come si era precedentemente visto nel caso unidimensionale sono state trovate tutte le equazioni differenziali che descrivono le a_k e possono essere risolte in maniera ricorsiva e la sua serie formale $\sum_{k=0}^{\infty}h^k a_k(x))$ può essere risommata asintoticamente.
Definita ora $u(x,h) = a(x,h)e^{\frac{i\varphi(x)}{h}}$ si ha infine che per x vicino a x_0

$$(h^2\Delta + V - E)u = \mathcal{O}(h^{\infty})$$

Cioè abbiamo approssimato la soluzione dell'operatore di Schrödinger multidimensionale (localmente).

Osservazione 9. *Le equazioni di trasporto si possono risolvere. In teoria dei campi per equazioni di questo tipo si raddrizza il campo vettoriale, in modo da ottenere un'equazione che dipende da una sola derivata parziale. Grazie al raddrizzamento, si possono risolvere in maniera ricorsiva le equazioni di trasporto e costruire così la serie formale, per poi sommarla in modo*

asintotico analogamente a quanto fatto nel caso unidimensionale. Alla fine si ottiene(localmente) una soluzione approssimata dell'equazione agli autovalori. Da notare che la somma asintotica non è unica, come già osservato, ma solo modulo $O(h^\infty)$.
Per concludere anche se queste soluzioni sono solo di tipo approssimativo, possono essere risolte con arbitrari dati di Cauchy $a_k \mid_{x_n}= x_n^0$ e possono essere inoltre utili per studiare determinate proprietà delle soluzioni.

Bibliografia

[Lanconelli(1997)] Ermanno Lanconelli. *Lezioni di Analisi Matematica 2 seconda parte*. 1997.

[Martinez(2011)] André Martinez. *An introduction to semiclassical and Microlocal Analysis*. 2011.

[V.Guillemin/S.Stemberg(1990)] V.Guillemin/S.Stemberg. *Geometric Asymptotics*. 1990.