

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Corso di Laurea in Fisica

MASSIMA ESTENSIONE DELLA SOLUZIONE DI
SCHWARZSCHILD E DIAGRAMMI DI PENROSE

Relatore:
Prof. Roberto Balbinot

Presentata da:
Francesca Del Bonifro

Sessione II
Anno Accademico 2013/2014

Indice

1. Introduzione alla Relatività Generale.....	2
2. Singolarità e sistemi di coordinate.....	10
3. Compattificazione e diagrammi di Penrose.....	27
Bibliografia.....	39

1. Introduzione sulla Relatività Generale

“Le leggi fisiche sono le stesse per tutti gli osservatori”

Il precedente enunciato è conosciuto come il principio di Relatività Generale ed è quello che permette di estendere lo studio della fisica a tutti i tipi di sistemi di riferimento, inerziali e non, rappresenta quindi una generalizzazione rispetto al principio di Relatività Ristretta:

“Le leggi della fisica sono le stesse per tutti gli osservatori inerziali”.

Matematicamente il passaggio da un sistema di riferimento ad un altro implica un cambiamento di coordinate. Se, come nel caso della Relatività Ristretta, ci si limita a considerare i sistemi di riferimento inerziali, le uniche trasformazioni permesse affinché le leggi fisiche non mutino la loro forma a causa del cambiamento del riferimento sono quelle appartenenti al gruppo di Lorentz $SO(3,1)$ o al massimo, aggiungendo anche le traslazioni spaziotemporali, ammettendo quelle del gruppo di Poincaré.

Se ci si sposta nell'ambito di sistemi di riferimento generici, non necessariamente inerziali, le trasformazioni delle coordinate possono essere rappresentate da trasformazioni generiche.

In sostanza un sistema di riferimento è un insieme di strumenti che permette di effettuare delle misure e quindi, non hanno una carattere globale come nell'astrazione matematica, ma sono locali nello spaziotempo.

Esiste una branca della matematica, la geometria differenziale, che studia proprio i sistemi di coordinate (carte) che descrivono solo localmente una generica varietà e che nel loro insieme la ricoprono tutta.

Studiando la geometria differenziale si ottengono gli strumenti per lo studio della fisica in sistemi di riferimento generici (le carte) che utilizziamo per descrivere localmente lo spaziotempo (la varietà quadridimensionale).

Per cominciare lo studio dei sistemi di riferimento generici è bene individuare quali sono effettivamente quelli che consideriamo inerziali. I sistemi di riferimento inerziali sono quelli in cui un corpo soggetto ad una forza risultante nulla segue una linea retta a velocità costante (o resta fermo $v=0$).

Gli unici sistemi in cui si verifica questa condizione sono quelli solidali con osservatori in caduta libera, infatti, essendo la carica gravitazionale l'unica a non poter essere eliminata tramite l'utilizzo di cariche di segno opposto, ricorriamo alla caduta libera per eliminare gli effetti dell'interazione gravitazionale.

Localmente, in un sistema di riferimento inerziale, le leggi fisiche sono quelle date dalla Relatività Ristretta e contengono grandezze che, sottoposte a trasformazioni del gruppo di Lorentz, si trasformano come tensori in modo tale che sia rispettato il principio di Relatività Ristretta.

Per poterci spostare nell'ambito della Relatività Generale è necessario reinterpretare le leggi fisiche date dalla Relatività Ristretta in termini della geometria differenziale, infatti, il principio di Relatività Generale richiede in pratica

che le leggi fisiche non cambino la loro forma se sottoposte a una trasformazione generica. Ciò è possibile se le grandezze in gioco hanno carattere tensoriale secondo la geometria differenziale. Allora, partendo dalle leggi ottenute nell'ambito della Relatività Ristretta, otteniamo quelle della Relatività Generale rimpiazzando le quantità tensoriali secondo le trasformazioni di Lorentz con quelle tensoriali della varietà spaziotemporale (principio di Covarianza Generale).

In un sistema di riferimento inerziale la metrica è sempre quella di Minkowski con l'elemento di linea dato da:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (1.1)$$

E tensore metrico:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Per passare al caso generale devo sostituire $\eta_{\mu\nu}$ con un tensore metrico generico $g_{\mu\nu}$ che abbia la stessa segnatura del tensore metrico di Minkowski e utilizzare al posto della derivata parziale ∂_μ la derivata covariante ∇_μ dove vale:

$$\nabla_\gamma V^\alpha = \partial_\gamma V^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha V^\beta \quad (1.3)$$

(usando questo formalismo la presenza di indici ripetuti implica che in realtà si ha a che fare con una sommatoria)

I $\Gamma_{j\mu}^i$ sono i cosiddetti simboli di Christoffel delle quantità che dipendono dalla scelta della carta infatti, essi sono dati da

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} \left(\frac{d}{dx^\gamma} g_{\beta\mu} + \frac{d}{dx^\beta} g_{\gamma\mu} - \frac{d}{dx^\mu} g_{\beta\gamma} \right) \quad (1.4)$$

Essi sono nulli in un sistema inerziale e non nulli in uno generico.

In un sistema inerziale quindi abbiamo che su una particella di prova in caduta libera agisce una forza risultante nulla e vale:

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} = 0 \quad (1.5)$$

Dato che in Relatività Ristretta abbiamo:

$$\tau = \frac{t}{\gamma} = t \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \quad (1.6)$$

vale anche

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0 \quad (1.7)$$

nel caso in esame i $\Gamma_{j\mu}^i$ sono nulli, si ha:

$$u^\alpha \nabla_\alpha u^\gamma = \frac{d^2 x^\gamma}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad (1.8)$$

La precedente equazione rappresenta l'equazione di una particolare curva della varietà: una geodetica.

Una geodetica è una curva continua e differenziabile tale che dato un vettore tangente ad essa in un suo punto, se lo si trasporta in un altro punto parallelamente a se stesso lungo la curva, risulta essere ancora tangente alla curva. In una varietà piatta le geodetiche corrispondono alle rette.

La particella di prova segue quindi una geodetica (di tipo tempo) dello spaziotempo che, per un osservatore inerziale, è data dalla traiettoria rettilinea.

I simboli di Christoffel sono non nulli per un osservatore non inerziale e quindi la stessa particella risulta avere un comportamento differente secondo questo osservatore. Per questa ragione i $\Gamma_{j\mu}^i$ sono interpretati come i responsabili dell'interazione gravitazionale.

Dato che vale

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \sim \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} g_{\beta\gamma} \quad (1.9)$$

Il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ è interpretato come potenziale gravitazionale.

Nel caso di particelle a massa nulla come i fotoni (per i quali vale $u^i u_i = 0$ e $\vec{u} = \frac{d}{d\lambda}$) abbiamo:

$$\nabla_{\vec{u}} \vec{u} = \frac{d^2 x^{\mu}}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\alpha}^{\mu} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} \frac{dx^{\alpha}}{d\lambda} = 0 \quad (1.10)$$

Anche i fotoni (e quindi la luce) seguono delle geodetiche dello spaziotempo.

Il tensore metrico ha quindi anche la funzione di determinare la struttura causale dello spaziotempo visto che questa è determinata modo in cui si propaga la luce.

Quindi, in generale, ne fotoni ne corpi massivi vedono uno spaziotempo piatto, abbiamo uno spaziotempo curvo e tale curvatura è dovuta agli effetti gravitazionali generati da una sorgente (massa). La metrica dello spaziotempo è determinata dalla presenza di un campo gravitazionale.

Una sorgente può essere descritta opportunamente in termini di densità di energia e impulso utilizzando il tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}$. Tale tensore è simmetrico e conservato per covarianza ovvero vale

$$\nabla_{\mu} T^{\mu}_{\nu} = 0 \quad (1.11)$$

A partire da questo tensore si costruiscono le equazioni di campo che legano la sorgente alla metrica che essa determina. Il tensore più semplice che abbia le stesse caratteristiche di $T_{\mu\nu}$ e che contenga fino alle derivate parziali seconde del potenziale gravitazionale (parallelamente al caso newtoniano) è il tensore di Einstein $G_{\mu\nu}$:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \quad (1.12)$$

Dove $R_{\mu\nu}$ è il tensore di Ricci che deriva da una contrazione del tensore di Riemann $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$ ovvero

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} \quad (1.13)$$

Con

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} + \Gamma^{\gamma}_{\beta\nu} \Gamma^{\alpha}_{\gamma\mu} - \Gamma^{\gamma}_{\beta\mu} \Gamma^{\alpha}_{\gamma\nu} \quad (1.14)$$

R è lo scalare di Ricci (o scalare di curvatura) dato da una ulteriore contrazione degli indici

$$R^{\mu}_{\mu} = R \quad (1.15)$$

Il collegamento tra il tensore di Einstein e quello energia-impulso è quello che determina le equazioni di campo di Einstein e avviene tramite la seguente relazione:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_g}{c^2} T_{\mu\nu} \quad (1.16)$$

Dove G_g è una costante (di gravitazione universale) che serve per risolvere il problema delle unità di misura.

Data una certa sorgente con delle determinate caratteristiche, la risoluzione delle equazioni di campo fornisce la metrica che deriva dalla presenza di una sorgente di quel tipo.

Storicamente, la prima soluzione delle equazioni di Einstein venne trovata da Karl Schwarzschild e si riferisce al caso dello spaziotempo esterno ad una sorgente non carica, non rotante e a simmetria sferica con la richiesta che la metrica sia statica (in pratica l'elemento di linea non deve contenere termini misti in dt).

Altre soluzioni delle equazioni sono ad esempio:

- Soluzione di Kerr (sorgente a simmetria sferica, rotante, non carica)
- Soluzione di Reissner-Nordsrøm (sorgente a simmetria sferica, non rotante, carico)
- Soluzione di Kerr-Newman (sorgente a simmetria sferica, rotante,carico).

Nel seguito ci limiteremo allo studio della sola soluzione di Schwarzschild in cui la risoluzione del problema viene facilitata dalle simmetrie presenti. In una situazione come quella considerata da Schwarzschild sono presenti dei vettori di Killing, ovvero vettori appartenenti ad un campo vettoriale lungo il quale la metrica risulta invariata, nel caso specifico abbiamo un vettore di Killing di tipo tempo e tre vettori di Killing di tipo spazio.

Comunque l'elemento di linea che risulta dalla soluzione trovata è:

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= \left(1 - \frac{2MG}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \\
 &= \left(1 - \frac{2MG}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2
 \end{aligned}
 \tag{1.17}$$

Dove M è la massa della sorgente, θ e ϕ hanno il significato di angolo azimutale e polare dei sistemi di coordinate sferiche, mentre r è il raggio areolare ovvero il valore del raggio di una sfera di superficie $4\pi r^2$ ma non rappresenta la distanza da tale superficie al centro della sfera visto che questa è data dalla lunghezza propria:

$$\int_0^r \left(1 - \frac{2MG}{r'}\right)^{-\frac{1}{2}} dr' \quad (1.18)$$

L'integrale eguaglierebbe il valore di r solo se si avesse $\left(1 - \frac{2MG}{r'}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1$ cosa che si verifica solo negli spazi piatti mentre, in generale, le due grandezze non coincidono a causa della curvatura dello spaziotempo.

La metrica trovata presenta però dei problemi, infatti essa risulta degenerare in corrispondenza di due valori del parametro r : $r = 2GM$ e $r = 0$.

Quello di cui ci occuperemo nel seguito riguarda proprio la risoluzione di tali problemi (ove possibile), in più introdurremo un utilissimo strumento che renderà possibile la visualizzazione dell'infinito spaziotempo all'interno di una regione finita senza che questa operazione di **compattificazione** ne modifichi la struttura causale.

2. Singolarità e sistemi di coordinate

In questo capitolo focalizziamo la nostra attenzione sulla soluzione di Schwarzschild che, come abbiamo visto, prevede un elemento di linea del tipo:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2MG}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (2.1)$$

Ovvero un tensore metrico:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2MG}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Vediamo innanzi tutto che per grandi r questa soluzione diventa sempre più prossima ad una soluzione di spaziotempo piatto, infatti per $r \rightarrow \infty$ si ottiene la situazione dello spaziotempo di Minkowski (un osservatore infinitamente lontano dalla sorgente è in un sistema di riferimento inerziale in cui valgono i risultati della Relatività Ristretta). Si dice allora che la soluzione è asintoticamente piatta.

Notiamo ora che l'elemento di linea presenta dei problemi, in particolare, la metrica introdotta ha un comportamento peculiare per $\theta = 0$, $\theta = \pi$ e, se la sorgente sferica ha un raggio $R < 2GM$, anche in $r = 2MG$ (**raggio di**

Schwarzschild r_H) e $r = 0$. In corrispondenza di questi valori delle coordinate abbiamo delle **singolarità.**

Le singolarità in $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ sono proprie dei sistemi di coordinate sferiche e sono eliminabili tramite un cambio di coordinate, ad esempio passando a quelle cartesiane. Rappresentano delle singolarità rimovibili, non rivelano una singolarità fisica dello spaziotempo ma sono dovute solo a problemi relativi alla scelta delle coordinate.

Vedremo tra poco che anche la singolarità in $r = 2GM$ è una singolarità di questo tipo, legata al sistema di coordinate scelto da Schwarzschild (curvatura finita) mentre quella in $r = 0$ rappresenta una singolarità fisica, comune ad ogni sistema di coordinate e per questo non eliminabile (curvatura infinita).

Il fatto che la curvatura sia finita o infinita in un certo punto della varietà ci viene suggerito dal valore che lo scalare (invariante) di curvatura assume in un quel punto. Dato che nel nostro caso lo scalare ha la forma

$$R_{\alpha\beta\gamma\mu} R^{\alpha\beta\gamma\mu} = 48 \frac{M^2 G^2}{r^6} \quad (2.3)$$

Vediamo che per $r \neq 0$ la curvatura è sempre finita, l'unico punto in cui si ha una curvatura infinita è in $r = 0$ in cui si ha l'unica singolarità fisica.

La ipersuperficie $r = 2GM$ divide la varietà spaziotemporale in due regioni distinte in cui le coordinate hanno ruoli differenti, vengono praticamente definite due diverse carte sulla varietà:

- $r > 2GM$ in cui t è una coordinata di tipo tempo ed r una coordinata di tipo spazio ($g_{tt} > 0$ e $g_{rr} < 0$);
- $0 < r < 2GM$ in cui t è una coordinata di tipo spazio ed r una coordinata di tipo tempo ($g_{tt} < 0$ e $g_{rr} > 0$);

Se la singolarità in $r = 2GM$ è rimovibile allora dobbiamo essere in grado di unire le due regioni introducendo una carta che includa anche r_H . Per verificare la rimovibilità di questa singolarità basta studiare il comportamento di una particella che cade radialmente verso la sorgente, se non si presentano problemi nell'attraversare r_H allora non abbiamo una singolarità intrinseca, in caso contrario si avrà una singolarità fisica.

Esaminiamo quindi le geodetiche radiali di tipo tempo (la particella ha massa non nulla $m_p \neq 0$) e utilizziamo prima il tempo proprio τ della particella e poi la coordinata t di Schwarzschild.

Tra le proprietà delle geodetiche vi è quella di essere delle curve estremali per quanto riguarda la lunghezza e le loro equazioni possono essere trovate applicando il principio variazionale e le equazioni di Eulero-Lagrange.

La lunghezza della curva (il funzionale) è data da

$$l = \int_0^\tau \sqrt{g^{\alpha\beta} \dot{x}_\alpha \dot{x}_\beta} d\tau' = \int_0^\tau \sqrt{2T} d\tau' \quad (2.4)$$

$$2T = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\phi}^2)$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } m_p \neq 0 \\ 0 & \text{se } m_p = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

La condizione di estremalità si traduce in quella di stazionarietà:

$$\delta l = \delta \int_0^\tau \sqrt{2T} d\tau' = \int_0^\tau \frac{\delta T}{\sqrt{2T}} d\tau' = \delta \int_0^\tau T d\tau' = 0 \quad (2.6)$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (2.7)$$

La condizione di caduta radiale implica $\dot{\theta} = 0$ e $\dot{\phi} = 0$ quindi

$$2T = \left(1 - \frac{2MG}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 = 1 \quad (2.8)$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange portano a:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\left(1 - \frac{2MG}{r}\right) \dot{t} \right) = 0 \quad (2.9)$$

Quindi

$$\left(1 - \frac{2MG}{r}\right) \dot{t} = C = \text{costante} \quad (2.10)$$

La costante di integrazione C contiene le informazioni sulle condizioni iniziali e la poniamo pari ad 1 (che corrisponde alla condizione in cui la particella parte dall'infinito con velocità nulla) e sostituiamo quest'ultimo risultato nell'equazione per $2T$

$$\left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 = \dot{t}^2 = \frac{2MG}{r} \dot{t} \quad (2.11)$$

$$\dot{r}^2 = \frac{2MG}{r} \quad (2.12)$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\tau} = \pm \sqrt{\frac{2MG}{r}} \quad (2.13)$$

La radice negativa è quella che riguarda la caduta, risolvendo la equazione differenziale otteniamo:

$$\tau - \tau_0 = \frac{2}{3\sqrt{2MG}} \left(\sqrt{r_0^3} - \sqrt{r^3} \right) \quad (2.14)$$

Utilizzando il tempo proprio l'equazione della geodetica non presenta alcun problema per $r = 2GM$: la particella raggiunge il raggio di Schwarzschild in un tempo (proprio) finito e continua la caduta verso $r = 0$.

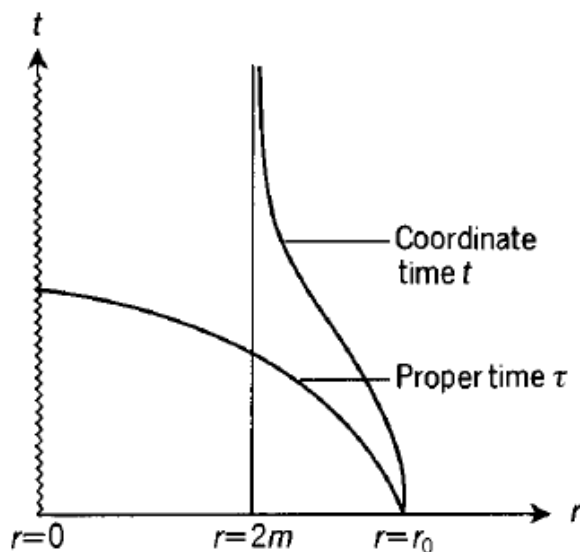
Studiando la stessa situazione utilizzando la coordinata t si ottiene un risultato completamente diverso:

$$\frac{dt}{dr} = \frac{\dot{t}}{\dot{r}} = -\frac{\sqrt{\frac{r}{2MG}}}{1 - \frac{2MG}{r}} \quad (2.15)$$

La cui integrazione porta al risultato

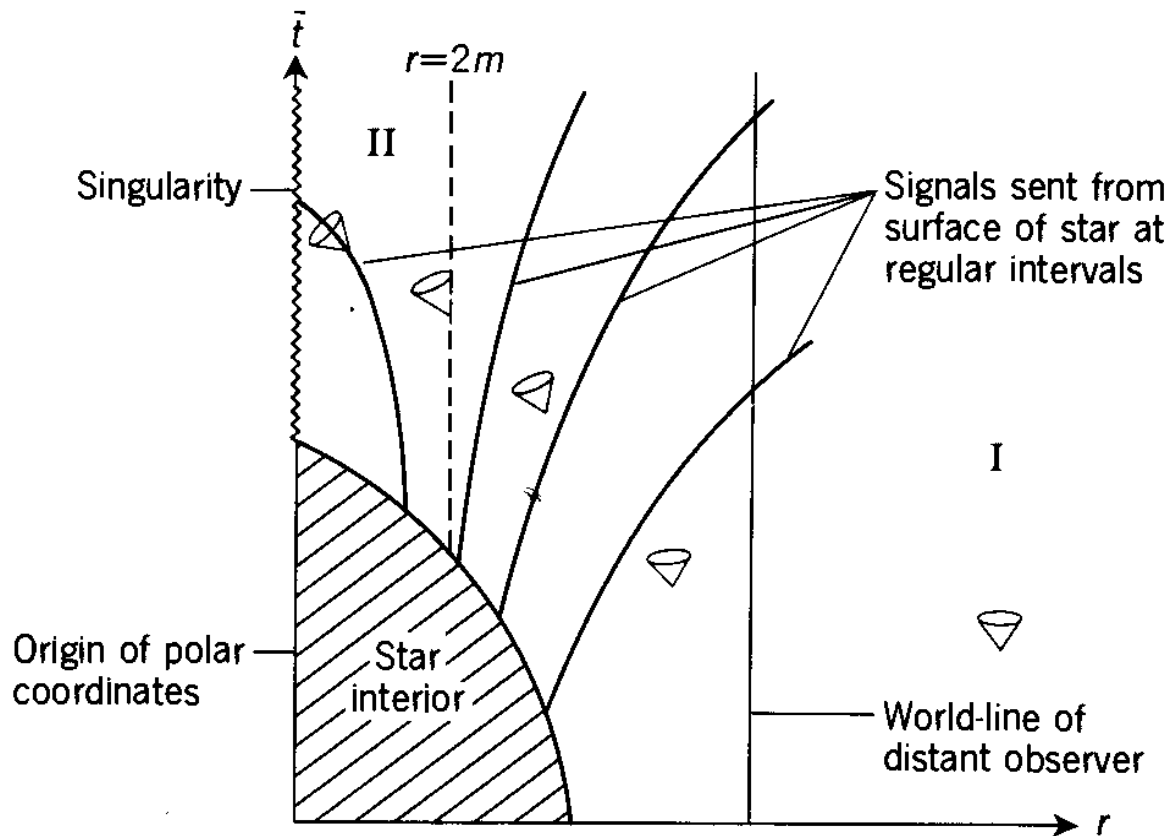
$$\begin{aligned} t - t_0 &= -\frac{2}{3\sqrt{2MG}} \left(\sqrt{r^3} - \sqrt{r_0^3} + 6MG\sqrt{r} - 6MG\sqrt{r_0} \right) \\ &+ 2MG \ln \left(\frac{(\sqrt{r} + \sqrt{2MG})(\sqrt{r_0} - \sqrt{2MG})}{(\sqrt{r_0} + \sqrt{2MG})(\sqrt{r} - \sqrt{2MG})} \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Se r tende al valore $2MG$ il parametro t va all'infinito, questo vuol dire che la particella, vista da un osservatore che misura un tempo t , si avvicina al raggio di Schwarzschild senza mai riuscire a raggiungerlo.



L'osservatore "vede" l'oggetto tramite la ricezione della radiazione elettromagnetica emessa da quest'ultimo. I fotoni inviati dall'oggetto risulteranno sempre meno energetici man mano che il corpo si avvicina al raggio di Schwarzschild a causa del redshift gravitazionale e il corpo apparirà sempre più

rosso. Inoltre questi fotoni sono ricevuti a tempi sempre più distanti tra loro (si veda nella figura seguente il comportamento dei fotoni di una stella che sta collassando oltre il proprio raggio di Schwarzschild), per questi motivi l'osservatore vedrà comunque l'oggetto scomparire ma per una ragione diversa da quella dell'attraversamento del raggio di Schwarzschild.



Abbiamo mostrato che in $r = 2GM$ non si trova una singolarità fisica, passiamo ora alla ricerca di un sistema di coordinate che ricopra l'intera regione $r > 0$. A tale scopo introduciamo i diagrammi spaziotemporali il cui studio renderà evidente la trasformazione delle coordinate che sarà opportuno applicare.

I diagrammi spaziotemporali mostrano la struttura causale dello spaziotempo, sono costruiti tramite le geodetiche radiali nulle ovvero le traiettorie radiali dei fotoni e

servono a stabilire quali eventi dello spaziotempo possono essere messi tra loro in contatto causale e quali no.

Come prima usiamo il metodo variazionale e le equazioni di Eulero-Lagrange per ottenere le equazioni delle geodetiche ma questa volta abbiamo che $m_p = 0$ e le nostre condizioni sono:

$$2T = 0, \dot{\theta} = 0, \dot{\phi} = 0$$

Otteniamo così

$$\left(1 - \frac{2MG}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 = 0 \quad (2.17)$$

le equazioni di Eulero-Lagrange danno:

$$\frac{d}{du} \left(\left(1 - \frac{2MG}{r}\right) \dot{t} \right) = 0 \quad (2.18)$$

(Si utilizza il parametro u visto che per una particella di massa nulla non è possibile usare il tempo proprio)

La risoluzione della precedente equazione porta al risultato:

$$\left(1 - \frac{2MG}{r}\right) \dot{t} = C = \text{costante} \quad (2.19)$$

E infine

$$\dot{r}^2 = C^2 \quad (2.20)$$

$$\dot{r} = \pm C \quad (2.21)$$

Il segno positivo riguarda le geodetiche radiali nulle uscenti mentre il segno negativo le entranti.

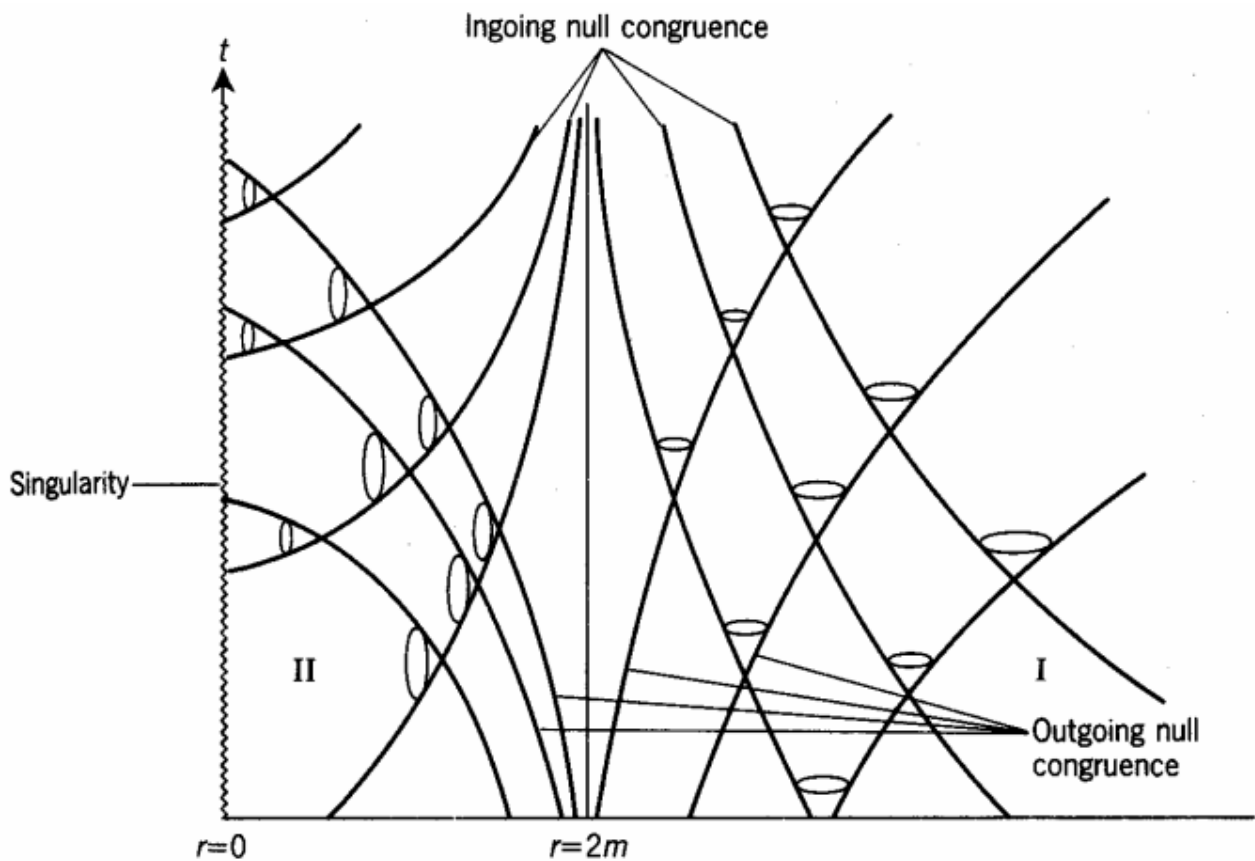
Procedendo come prima

$$\frac{dt}{dr} = \frac{\dot{t}}{\dot{r}} = \pm \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} \quad (2.22)$$

Integrando otteniamo le equazioni delle geodetiche radiali nulle uscenti ed entranti:

$$t = \pm(r + 2MG \ln|r - 2MG| + k) \quad (2.23)$$

Il risultato è rappresentato nella figura seguente:



Per grandi r le geodetiche radiali nulle descrivono i coni spaziotemporali di Minkowski (composti da rette a $\pm 45^\circ$), se r si avvicina a r_H i coni vengono deformati e per $r < 2GM$ vengono rovesciati. Risulta chiaro che il sistema di coordinate che è stato utilizzato non è capace di descrivere adeguatamente la regione $r \approx r_H$.

Per trovare il sistema di coordinate “buono” osserviamo la forma delle geodetiche nella figura precedente. Per eliminare il problema in corrispondenza del raggio di Schwarzschild applichiamo una trasformazione che rende le geodetiche radiali nulle entranti delle linee rette, in questo modo viene meno il comportamento asintotico in r_H .

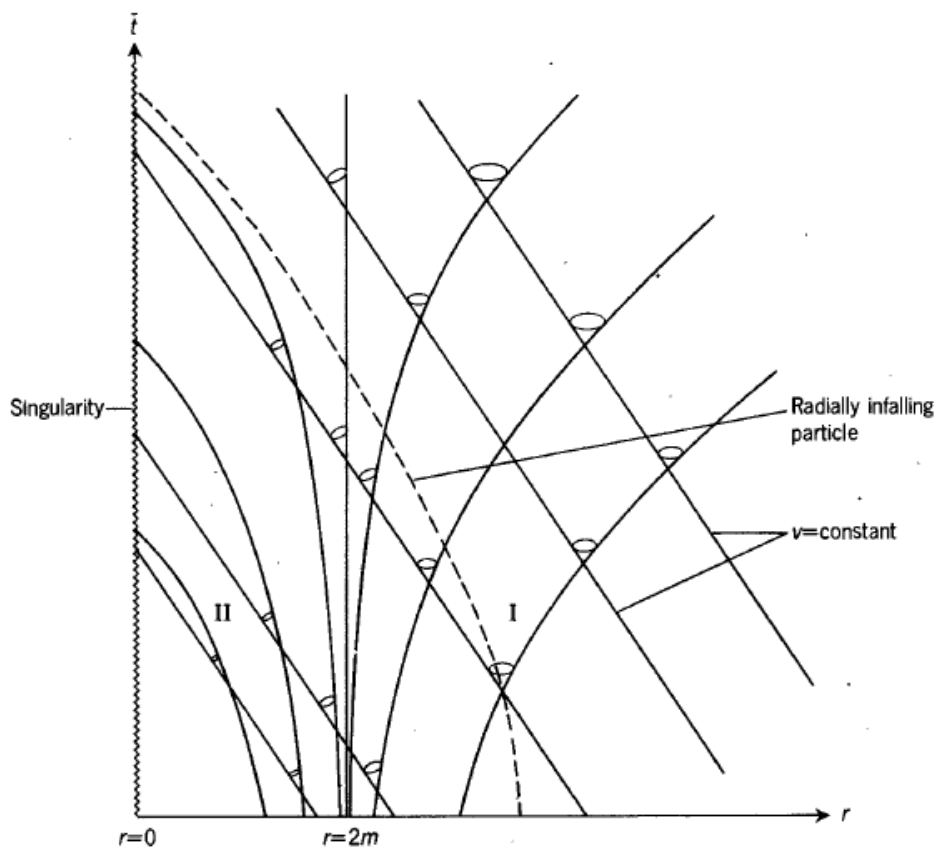
La trasformazione da applicare è:

$$t \rightarrow \bar{t} = t + 2MG \ln(r - 2GM) \quad (2.24)$$

Infatti la equazione delle geodetiche nulle (con il segno negativo) dopo la trasformazione diventa:

$$\bar{t} = -r + A \quad (2.25)$$

Dove A è una costante.



Con questa nuova coordinata un osservatore che viene dalla regione $r > 2GM$ in caduta radiale verso il centro riesce a raggiungere $r = r_H$ per un valore di \bar{t} finito e prosegue il suo moto verso la singolarità nell'origine. Per il valore di $r = 2GM$ tutto viene attratto verso l'origine tranne i fotoni, soltanto a questi ultimi è permesso rimanere sulla 2-sfera a $r = 2GM$ costante.

Tutto ciò che si trova nella regione $r < 2GM$ è in moto verso la singolarità centrale, nulla può avere un moto nel senso degli r crescenti e nulla può rimanere fermo ad un certo valore di r , nemmeno i fotoni.

Per questa ragione l'ipersuperficie $r = 2GM$ viene denominata **orizzonte degli eventi**.

Nell'universo strutture di questo tipo sono attribuite a stelle collassate oltre il proprio raggio di Schwarzschild e sono denominate **buchi neri**.

Tornando al problema dell'elemento di linea nelle nuove coordinate è sufficiente notare che:

$$t = \bar{t} - 2GM \ln(r - 2GM) \quad (2.26)$$

$$dt = d\bar{t} - \frac{2GM}{r - 2GM} dr \quad (2.27)$$

Che sostituito al dt nell'elemento di linea di Schwarzschild porta all'elemento di linea espresso nelle nuove coordinate $(\bar{t}, r, \theta, \phi)$:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) d\bar{t}^2 - \frac{4MG}{r} d\bar{t}dr - \left(1 + \frac{2GM}{r}\right) dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (2.28)$$

Questa rappresenta la soluzione di **Eddington-Finkelstein** regolare in $r = 2GM$ e singolare in $r = 0$.

In questo modo si è ottenuta una estensione della soluzione di Schwarzschild.

È possibile ottenere una diversa estensione introducendo il **parametro temporale avanzato di Eddington-Finkelstein** v attraverso la trasformazione:

$$\bar{t} \rightarrow v = \bar{t} + r \quad (2.29)$$

Da cui

$$\bar{t} = v - r \quad (2.30)$$

$$d\bar{t} = dv - dr \quad (2.31)$$

Che porta alla forma più compatta

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dv^2 - 2dvdr - r^2 d\Omega^2 \quad (2.32)$$

Questa è conosciuta come **soluzione avanzata di Eddington-Finkelstein** in cui le geodetiche radiali nulle entranti sono date dalle equazioni

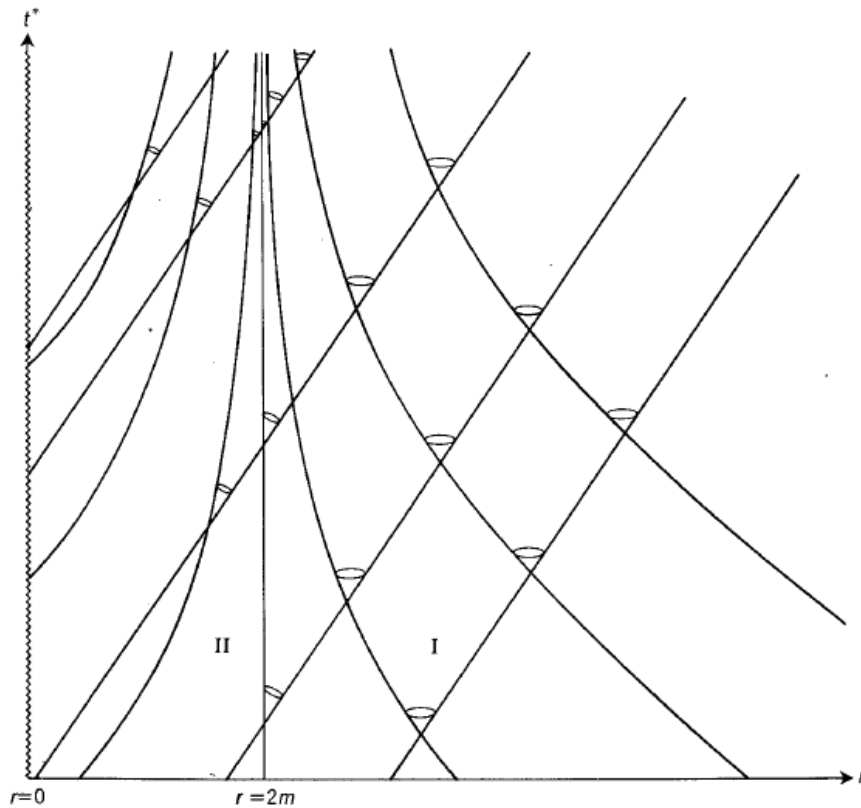
$$v = A \quad (2.33)$$

È possibile applicare lo stesso ragionamento alle geodetiche radiali nulle uscenti applicando la trasformazione:

$$t \rightarrow t^* = t - 2GM \ln(r - 2GM) \quad (2.34)$$

Dove le equazioni delle geodetiche con segno positivo diventano

$$t^* = r + A \quad (2.35)$$



Anche con questa coordinata otteniamo la regolarità in $r = 2GM$ ma si ha una situazione opposta in quanto tutto ciò che si trova nella regione $r < 2GM$ tende ad essere allontanato dall'origine. Rappresenta in poche parole una soluzione di buco nero con tempo invertito: il cosiddetto **buco bianco**.

Quindi

$$t = t^* + 2GM \ln(r - 2GM) \quad (2.36)$$

$$dt = dt^* + \frac{2GM}{r - 2GM} dr \quad (2.37)$$

Che porta all'elemento di linea

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^{*2} + \frac{4MG}{r} dt^* dr - \left(1 + \frac{2GM}{r}\right) dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (2.38)$$

Esso può essere espresso in una forma più comoda dopo aver applicato la trasformazione

$$t^* \rightarrow w = t^* - r \quad (2.39)$$

Dove w è il **parametro temporale ritardato** che porta alla **soluzione ritardata**

di Eddington-Finkelstein

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dw^2 + 2dwdr - r^2 d\Omega^2 \quad (2.40)$$

Le geodetiche radiali nulle uscenti sono ora

$$w = A \quad (2.41)$$

Possiamo estendere ulteriormente la soluzione facendo in modo che le soluzioni di Eddington-Finkelstein ritardata e avanzata siano rappresentabili all'interno di un unico diagramma.

Si giunge in questo modo alla **estensione di Kruskal** ovvero una soluzione le cui geodetiche possono essere prolungate per valori arbitrari del parametro affine oppure terminano in una singolarità essenziale della varietà.

Per arrivare a questo risultato utilizziamo sia il parametro temporale ritardato che quello avanzato introdotti in precedenza. In questo modo il sistema di coordinate è dato da (v, w, θ, ϕ) e l'elemento di linea che ne deriva è:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dvdw - r^2 d\Omega^2 \quad (2.41)$$

In cui r è in realtà una funzione di v e w determinata dalle trasformazioni di coordinate che sono state finora applicate

$$r = r(v, w) \quad (2.42)$$

$$\frac{1}{2}(v - w) = r + 2GM \ln(r - 2GM) \quad (2.43)$$

(elemento di linea singolare in $r = r_H$).

Generiche trasformazioni sulle coordinate v e w possono essere

$$v' = v'(v) \quad (2.44)$$

$$w' = w'(w) \quad (2.44)$$

Per la soluzione di Kruskal tali trasformazioni sono

$$v \rightarrow v' = e^{\frac{v}{4MG}} \quad (2.45)$$

$$w \rightarrow w' = -e^{-\frac{w}{4MG}} \quad (2.46)$$

Che comportano le opportune modifiche sull'elemento di linea e sulla condizione del raggio

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{dv}{dv'} \frac{dw}{dw'} dv' dw' - r^2 d\Omega^2 \quad (2.47)$$

$$\frac{dv}{dv'} = \frac{4GM}{v'} \quad (2.48)$$

$$\frac{dw}{dw'} = -\frac{4GM}{w'} \quad (2.49)$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{16(GM)^2}{v'w'} dv' dw' - r^2 d\Omega^2 \quad (2.50)$$

$$v' w' = -(r - 2GM) e^{\frac{r}{2GM}} \quad (2.51)$$

Applico infine le trasformazioni

$$t' = \frac{1}{2}(v' + w') \quad (2.52)$$

$$x' = \frac{1}{2}(v' - w') \quad (2.53)$$

Essendo

$$v' = t' + x' \rightarrow dv' = dt' + dx' \quad (2.54)$$

$$w' = t' - x' \rightarrow dw' = dt' - dx' \quad (2.55)$$

Otteniamo la condizione sul raggio

$$t'^2 - x'^2 = -(r - 2GM) e^{\frac{r}{2GM}} \quad (2.56)$$

E l'elemento di linea della soluzione di Kruskal

$$ds^2 = \frac{16(GM)^2}{r} e^{-\frac{r}{2GM}} (dt'^2 - dx'^2) - r^2 d\Omega^2 \quad (2.57)$$

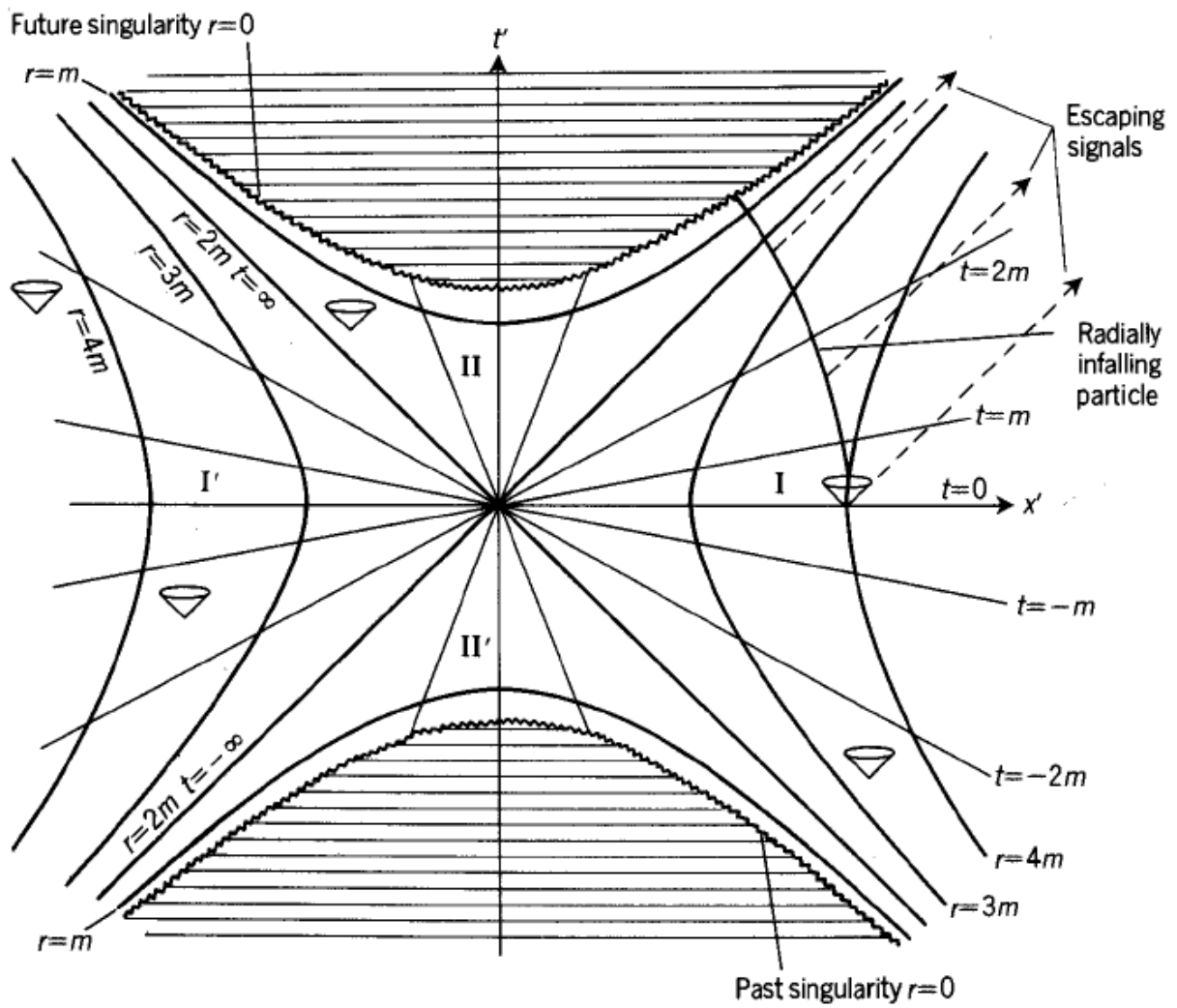
Che risulta regolare e che rappresenta la massima estensione analitica della metrica di Schwarzschild.

Questa forma della soluzione mette in evidenza anche il fatto che per θ e ϕ fissati ci si trova in uno spazio conformemente piatto ovvero ottenuto da uno spazio piatto tramite una trasformazione conforme:

$$ds^2 = \Omega^2 (dt'^2 - dx'^2) \quad (2.58)$$

Nel caso specifico

$$\Omega^2 = \frac{16(GM)^2}{r} e^{-\frac{r}{2GM}} \quad (2.59)$$



Sia le geodetiche radiali nulle entranti che quelle uscenti sono rappresentate da rette nel nuovo sistema di coordinate.

A causa della forma della condizione sul raggio, a ogni valore fissato di r corrispondono due ipersuperfici nel diagramma (t', x', θ, ϕ) .

Per $r = 0$ la condizione sul raggio prende la forma

$$t'^2 - x'^2 = 2GM \quad (2.60)$$

Che rappresenta l'equazione di un'iperbole equilatera come mostrato in figura dalla curva ondulata. Le due ipersuperfici collegate a tale valore di r sono dette singolarità passata (quella con $t' < 0$) e singolarità futura (quella con $t' > 0$).

Per $r = 2GM$ si ha invece la situazione

$$t'^2 - x'^2 = 0 \quad (2.61)$$

$$t' = \pm x' \quad (2.62)$$

Ovvero le ipersuperfici corrispondenti al raggio di Schwarzschild sono delle rette a $\pm 45^\circ$ passanti nell'origine degli assi che dividono lo spaziotempo in quattro regioni distinte. La regione indicata con I rappresenta la soluzione di Schwarzschild per $r > 2GM$ mentre la regione II è il buco nero (Eddington-Finkelstein avanzata).

La regione I' è geometricamente uguale alla I e la II' è il buco bianco (Eddington-Finkelstein ritardata).

(Le regioni I e I' non sono connesse causalmente).

Anche in questa rappresentazione risulta evidente che nessun segnale fisico emesso nella regione II può raggiungere la regione I e che solo i fotoni riescono a rimanere al valore $r = 2GM$ costante.

È importante notare che tutti i diagrammi spaziotemporali rappresentati finora sono delle semplificazioni in quanto in essi sono state necessariamente soppresse due dimensioni. Ogni punto del diagramma bidimensionale è in realtà una 2-sfera di area pari a $4\pi r^2$.

3. **Compattificazione conforme e diagrammi di Penrose**

Nel capitolo precedente è stata descritta l' estensione di Kruskal ovvero la massima estensione della soluzione di Schwarzschild che descrive lo spaziotempo in presenza di una sorgente a simmetria sferica, non rotante e scarica. Essa si basa su un sistema di coordinate che non presenta altre singolarità al di fuori di quella non rimovibile in $r = 0$ e permette di visualizzare contemporaneamente la soluzione di buco nero e quella di buco bianco.

Può risultare utile studiare il comportamento che lo spaziotempo assume nei suoi punti situati all'infinito ma questo è impossibile da fare con la soluzione di Kruskal dal momento che anche in questa rappresentazione esso risulta infinitamente esteso.

Quello che possiamo fare è applicare una ulteriore trasformazione della metrica in modo tale che un punto inizialmente situato all'infinito possa essere rappresentato all'interno di una regione finita.

È fondamentale notare che non basta applicare una trasformazione qualsiasi ma è necessario che non venga alterata la struttura causale dello spaziotempo. Ciò che definisce la causalità dello spaziotempo sono i coni di luce ovvero le geodetiche di

tipo nullo e per questo dobbiamo cercare delle trasformazioni che lascino invariato il carattere delle curve di questo tipo.

Trasformazioni con questa proprietà sono le trasformazioni conformi ovvero trasformazioni del tipo:

$$d\bar{s}^2 = \Omega^2(x^\mu)ds^2 \quad (3.1)$$

Dove $\Omega^2(x^\mu)$ è il fattore conforme che è rappresentato da un numero sempre maggiore di zero (in senso stretto) e dipendente dal punto del quadrispazio in cui viene applicata la trasformazione.

Una trasformazione conforme modifica la distanza tra i punti della varietà ma conserva il tipo di curva, ovvero una curva che nello spazio di partenza è di tipo tempo è mappata dalla trasformazione conforme in una curva di tipo tempo dello spazio trasformato e così anche per le curve di tipo luce e di tipo spazio.

Bisogna tenere a mente che il fatto che una curva sia una geodetica nello spazio iniziale non viene conservato in generale dalla trasformazione conforme a meno che non si tratti di una curva di tipo nullo.

Infatti, l'equazione di una geodetica nella metrica fisica è data da

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \quad (3.2)$$

Passando alla metrica non fisica l'equazione diventa

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} \bar{\nabla}_\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 2 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \nabla_\alpha \ln \Omega - (g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}) g^{\mu\nu} \nabla_\mu \ln \Omega \quad (3.3)$$

Dove $\bar{\nabla}_\mu$ rappresenta la derivata covariante per la metrica non fisica.

Se la geodetica era di tipo nullo allora per la metrica fisica vale

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \quad (3.4)$$

L'equazione per la geodetica si riduce quindi a

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} \bar{\nabla}_\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 2 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \nabla_\alpha \ln \Omega \quad (3.5)$$

che rappresenta l'equazione di una geodetica parametrizzata dal parametro non affine λ . Se la si vuole parametrizzare con un parametro affine, è necessario scalare il parametro λ in modo tale che esso soddisfi la seguente relazione

$$\frac{d\bar{\lambda}}{d\lambda} = c\Omega^2 \quad (3.6)$$

Abbiamo mostrato quindi che se si ha una geodetica di tipo nullo nella metrica fisica essa rimane tale anche nella metrica non fisica.

È proprio questa la caratteristica che fa di queste trasformazioni lo strumento utilizzato nella compattificazione dello spaziotempo infinito.

Applicando una trasformazione conforme alla metrica $g_{\mu\nu}$ si ha il passaggio ad una metrica $\bar{g}_{\mu\nu}$ senza alterare la causalità dello spazio in esame ma perdendo il significato fisico, infatti, $g_{\mu\nu}$ è indicata come metrica fisica mentre $\bar{g}_{\mu\nu}$ è detta metrica non fisica.

La condizione che bisogna rispettare per fare sì che un punto dello spaziotempo iniziale situato all'infinito venga trasportato al finito dalla trasformazione è che il fattore conforme tenda a zero man mano che il punto in considerazione si sposta all'infinito, ovvero:

$$\lim_{x^\mu \rightarrow \infty} \Omega^2 = 0 \quad (3.7)$$

Il risultato della compattificazione conforme è il cosiddetto **diagramma di Penrose**.

Vediamo come ottenere il diagramma di Penrose per lo spaziotempo piatto di Minkowski con le coordinate (t, r, θ, ϕ) in cui l'elemento di linea è dato da:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.8)$$

Introduciamo ora le coordinate nulle v e w attraverso le trasformazioni

$$v = t + r \quad (3.9)$$

$$w = t - r \quad (3.10)$$

le due nuove coordinate variano nel range $(-\infty, +\infty)$ ma in modo tale che si mantenga $v \geq w$ (l'equivalente della condizione $r \geq 0$)

Sostituendo nell'elemento di linea precedente otteniamo:

$$ds^2 = dvdw - \frac{1}{4}(v - w)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.11)$$

Applichiamo ora la trasformazione per effettuare la compattificazione.

Una trasformazione che rispetta i requisiti precedentemente esposti è data:

$$v \rightarrow p = \tan^{-1} v \quad (3.12)$$

$$w \rightarrow q = \tan^{-1} w \quad (3.13)$$

Che trasforma i range infiniti di v e w nei range finiti di p e q del tipo $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$ e la condizione $v \geq w$ nella condizione $p \geq q$.

Con tale trasformazione l'elemento di linea è trasformato in:

$$ds^2 = \frac{1}{(2 \cos p \cos q)^2} (4dpdq - \sin^2(p - q)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)) \quad (3.14)$$

Nella forma

$$(2 \cos p \cos q)^2 ds^2 = 4dpdq - \sin^2(p - q)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.15)$$

Si riconosce che la parte destra rappresenta l'elemento di linea della metrica non fisica

$$d\bar{s}^2 = 4dpdq - \sin^2(p - q)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.16)$$

E il fattore conforme è dato da

$$\Omega^2 = (2 \cos p \cos q)^2 \quad (3.17)$$

A questo punto è possibile includere nella nostra rappresentazione anche i punti dello spaziotempo che si trovano all'infinito.

Vi sono diversi modi in cui l'infinito può essere raggiunto, abbiamo infatti le seguenti situazioni (in cui deve sempre valere la condizione $p \geq q$):

- Il punto i^- caratterizzato dai valori

$$q = \tan^{-1} w = \tan^{-1}(t - r) = -\frac{\pi}{2} \quad (3.18)$$

$$p = \tan^{-1} v = \tan^{-1}(t + r) = -\frac{\pi}{2} \quad (3.19)$$

ovvero quando $t \rightarrow -\infty$ ed r è fissato, esso rappresenta un infinito passato di tipo tempo che può essere raggiunto dalle particelle materiali con $m \neq 0$;

- Il punto i^+

$$q = \tan^{-1} w = \tan^{-1}(t - r) = \frac{\pi}{2} \quad (3.20)$$

$$p = \tan^{-1} v = \tan^{-1}(t + r) = \frac{\pi}{2} \quad (3.21)$$

quando $t \rightarrow +\infty$ ed r è fissato, rappresenta l'infinito futuro di tipo tempo ed è raggiungibile da una particella con $m \neq 0$;

- Il punto i^0

$$q = \tan^{-1} w = \tan^{-1}(t - r) = -\frac{\pi}{2} \quad (3.22)$$

$$p = \tan^{-1} v = \tan^{-1}(t + r) = \frac{\pi}{2} \quad (3.23)$$

con $r \rightarrow +\infty$ e t è fissato, è un infinito di tipo spazio e quindi è raggiunto dalle geodetiche di tipo spazio;

- La superficie nulla I^-

$$q = \tan^{-1} w = \tan^{-1}(t - r) = -\frac{\pi}{2} \quad (3.24)$$

$$p = \tan^{-1} v = \tan^{-1}(t + r) \neq \pm \frac{\pi}{2} \quad (3.25)$$

cioè quando $t \rightarrow -\infty$ ed $r \rightarrow +\infty$ ma in modo tale che si mantenga $t + r$ fissato, essa rappresenta l'infinito passato di tipo nullo ed è raggiunto dai fotoni;

- La superficie nulla I^+

$$q = \tan^{-1} w = \tan^{-1}(t - r) \neq \pm \frac{\pi}{2} \quad (3.26)$$

$$p = \tan^{-1} v = \tan^{-1}(t + r) = \frac{\pi}{2} \quad (3.27)$$

Quindi quando $t \rightarrow +\infty$ ed $r \rightarrow +\infty$ ma con $t - r$ fissato ed è l'infinito futuro di tipo nullo raggiunto dai fotoni.

Per rappresentare la situazione graficamente in modo più agevole utilizziamo delle coordinate più facili da gestire introdotte attraverso la trasformazione:

$$r' = \frac{p - q}{2} \quad (3.28)$$

$$t' = \frac{p + q}{2} \quad (3.29)$$

E quindi con la condizione $p \geq q$ che si trasforma nella condizione $r' \geq 0$.

In questo modo si ha:

- i^-

$$r' = 0 \quad (3.30)$$

$$t' = -\frac{\pi}{2} \quad (3.31)$$

- i^+

$$r' = 0 \quad (3.32)$$

$$t' = +\frac{\pi}{2} \quad (3.33)$$

- i^0

$$r' = +\frac{\pi}{2} \quad (3.34)$$

$$t' = 0 \quad (3.35)$$

- I^-

$$t' = r' - \frac{\pi}{2} \quad (3.36)$$

ovvero una retta a 45° che interseca l'asse t' al valore $-\frac{\pi}{2}$;

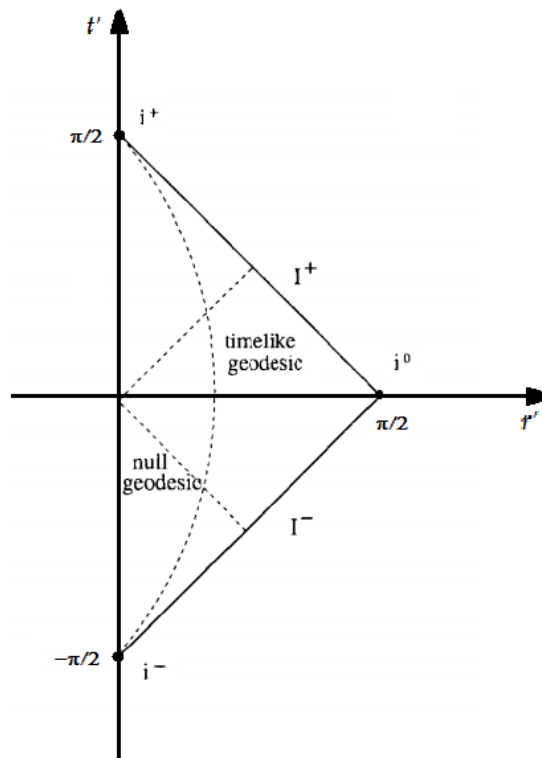
- I^+

$$t' = -r' + \frac{\pi}{2} \quad (3.37)$$

una retta a -45° che interseca l'asse t' al valore $\frac{\pi}{2}$.

Rappresentando la situazione sul piano (r', t') otteniamo il Diagramma di Penrose

per lo spaziotempo di Minkowski, il bordo del diagramma rappresenta l'infinito:



In questa rappresentazione ogni punto del diagramma è una 2-sfera di raggio $\sin 2r'$.

Le geodetiche di tipo tempo partono dal punto i^- e terminano in i^+ (particelle massive), le geodetiche di tipo spazio partono e finiscono in i^0 mentre le geodetiche radiali nulle entranti sono formate da rette che partono da un punto della superficie nulla I^- inclinate a -45° e raggiungono l'asse t' ($r' = 0$) mentre le uscenti sono rette a $+45^\circ$ che partono da un punto dell'asse t' e terminano in un punto della superficie nulla I^+ .

Per ottenere il diagramma di Penrose per la soluzione di Schwarzschild si procede in maniera simile.

Consideriamo innanzi tutto la massima estensione della soluzione, ovvero la soluzione di Kruskal, in cui le coordinate sono (v', w', θ, ϕ) e l'elemento di linea è dato da:

$$ds^2 = 16 \frac{M^2 G^2}{r} e^{-\frac{r}{2MG}} dv' dw' - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.38)$$

Alle coordinate precedenti applico la trasformazione

$$v' \rightarrow v'' = \tan^{-1} \frac{v'}{\sqrt{2MG}} \quad (3.39)$$

$$w' \rightarrow w'' = \tan^{-1} \frac{w'}{\sqrt{2MG}} \quad (3.40)$$

La condizione sul raggio diventa

$$-\tan v'' \tan w'' = e^{\frac{r}{2GM}} \left(\frac{r}{2GM} - 1 \right) \quad (3.41)$$

Dalle trasformazioni inverse otteniamo

$$\frac{dv'}{dv''} = \frac{\sqrt{2MG}}{\cos^2 v''} \quad (3.42)$$

$$\frac{dw'}{dw''} = \frac{\sqrt{2MG}}{\cos^2 w''} \quad (3.43)$$

E l'elemento di linea diventa

$$\begin{aligned} ds^2 &= 16 \frac{M^2 G^2}{r} e^{-\frac{r}{2MG}} \frac{dv'}{dv''} \frac{dw'}{dw''} dv'' dw'' - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\ &= 32 \frac{M^3 G^3}{r (\cos v'' \cos w'')^2} e^{-\frac{r}{2MG}} dv'' dw'' - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Che può essere riportato nella forma

$$\begin{aligned} &\frac{r e^{\frac{r}{2GM}} (\cos v'' \cos w'')^2}{8M^3 G^3} ds^2 \\ &= 4 dv'' dw'' - \frac{r^3 e^{\frac{r}{2GM}} (\cos v'' \cos w'')^2}{8M^3 G^3} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \end{aligned} \quad (3.45)$$

In cui riconosciamo il fattore conforme

$$\Omega^2 = \frac{r e^{\frac{r}{2GM}} (\cos v'' \cos w'')^2}{8M^3 G^3} \quad (3.46)$$

E l'elemento di linea della metrica non fisica definito dalla trasformazione conforme

$$d\bar{s}^2 = 4dv'' dw'' - \frac{r^3 e^{\frac{r}{2GM}} (\cos v'' \cos w'')^2}{8M^3 G^3} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.47)$$

Prima di disegnare il diagramma di Penrose dobbiamo tradurre nel nuovo sistema di coordinate la condizione $r \geq 0$.

Dall'equazione per la condizione sul raggio otteniamo che $r = 0$ corrisponde alla condizione

$$\tan v'' \tan w'' = 1 \quad (3.48)$$

E quindi ho l'equazione che descrive la singolarità di buco nero (o singolarità futura)

$$v'' = -w'' + \frac{\pi}{2} \quad (3.49)$$

E quella che descrive la singolarità di buco bianco (o singolarità passata)

$$v'' = -w'' - \frac{\pi}{2} \quad (3.50)$$

Arriviamo alla conclusione che il nostro diagramma deve essere compreso nella regione del piano (v'', w'') in cui le coordinate soddisfano la condizione:

$$-\frac{\pi}{2} \leq v'' + w'' \leq +\frac{\pi}{2} \quad (3.51)$$

Con v'' e w'' che variano nel range $[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}]$.

L'orizzonte $r = 2MG$ è invece rappresentato dalla condizione

$$\tan v'' \tan w'' = 0 \quad (3.52)$$

Ovvero:

- Orizzonte passato H^-

$$\tan v'' = 0 \rightarrow v'' = 0 \quad (3.53)$$

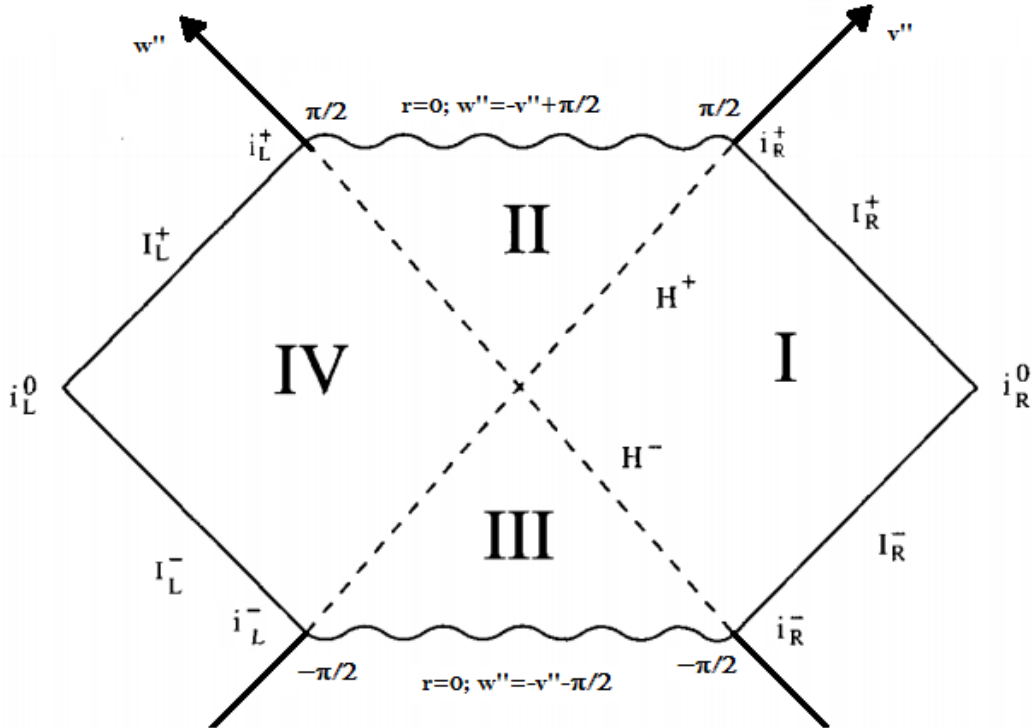
ovvero l'asse w'' nell'intervallo $-\frac{\pi}{2} \leq w'' \leq +\frac{\pi}{2}$;

- Orizzonte futuro H^+

$$\tan w'' = 0 \rightarrow w'' = 0 \quad (3.54)$$

quindi l'asse v'' nell'intervallo $-\frac{\pi}{2} \leq v'' \leq +\frac{\pi}{2}$.

Il diagramma di Penrose per la soluzione di Kruskal è rappresentato nella seguente figura:



Gli orizzonti dividono il digramma in quattro parti distinte che in figura sono indicate con I, II, III, IV .

II e *III* sono rispettivamente la regione di buco nero e quella di buco bianco. *I* è la regione esterna al buco nero asintoticamente piatta e *IV* rappresenta una parte di spazio equivalente alla regione *I* ma a tempo invertito e che non può essere messa in contatto causale con essa.

Dalla figura si nota che queste ultime due regioni, oltre ad essere asintoticamente piatte, hanno all'infinito la stessa forma del diagramma di Penrose per lo spazio di Minkowski con gli stessi infiniti i^- , i^0 , i^+ , I^- , I^+ .

In questa situazione le geodetiche di tipo tempo partono da i^- e, a seconda dei casi, possono sia raggiungere i^+ che attraversare l'orizzonte per poi raggiungere la singolarità in $r = 0$ in un tempo finito.

Le geodetiche radiali nulle entranti sono rette a -45° che partono da I^- e che terminano nella singolarità, quelle uscenti hanno una inclinazione di $+45^\circ$ e, se si trovano nella regione $r > 2GM$ terminano in I^+ altrimenti, se ci si trova nella regione $r \leq 2GM$ terminano nella singolarità.

Bibliografia

Bergia, S., Franco, A.P. (2001), *Le strutture dello spaziotempo (Volume I)*.

Cooperativa Libreria Universitaria Editrice Bologna, Bologna.

d'Inverno, R. (2001), *Introduzione alla Relatività di Einstein*. Cooperativa Libreria

Universitaria Editrice Bologna, Bologna.

Fabrizi, A., Navarro-Salas, J. (2005), *Modeling Black Hole Evaporation*. Imperial

College Press, London. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore.