ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

PROPRIETÀ ASINTOTICHE DELLA VOLATILITÀ IMPLICITA

Tesi di Laurea in Equazioni Differenziali Stocastiche

Relatore:
Chiar.mo Prof.
ANDREA PASCUCCI

Correlatore:
Chiar.mo Prof.
FRANCO NARDINI

Presentata da:
EVA GALLETTI

II Sessione
Anno Accademico 2013-2014

L'importante è non smettere di fare domande.
Albert Einstein

Indice

Introduzione

Nella seguente tesi sono state illustrate alcune proprietà della volatilità implicita, una variabile molto importante nell'ambito finanziario, che viene utilizzata nella formula di Black & Scholes per ottenere il prezzo osservato; infatti essendo il prezzo dell'opzione una funzione invertibile della volatilità: ad ogni prezzo quotato dell'opzione corrisponde un unico valore della volatilità, detta appunto volatilità implicita.
Il lavoro svolto si suddivide principalmente in tre capitoli; nel primo vengono riportate alcune nozioni fondamentali sul modello di Black & Scholes, sulle funzioni prezzo delle opzioni europee e sulla volatilità implicita. Il secondo capitolo gioca un ruolo centrale infatti vengono spiegate tre proprietà della volatilità: la sua pendenza, alcune stime asintotiche nel tempo ed il suo comportamento per grandi e piccoli strikes. La nostra attenzione si sofferma particolarmente sull'ultimo risultato, ovvero la formula del momento studiata da Roger Lee. Mentre nell'ultimo capitolo si considerano alcuni modelli molto conosciuti (modello di Black & Scholes, modello Kou, modello CEV e modello di Heston) ai quali viene applicata la formula di Lee.
Infine in appendice si possono trovare le definizioni ed i risultati fondamentali utilizzati nel corso della tesi.

Capitolo 1

L'esistenza della volatilità implicita

La volatilità implicita viene definita come quel parametro da inserire nella formula di Black & Scholes per ricavare un dato o osservato prezzo di un'opzione Call (o Put) europea. In seguito, dopo aver richiamato il modello di Black & Scholes, daremo una definizione più rigorosa e studieremo alcune sue proprietà.

1.1 Il modello di Black & Scholes

Dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ sul quale il processo del prezzo dell'azione è una vera martingala ed è l'unica soluzione forte della seguente equazione differenziale stocastica:

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t), \quad S_0 > 0$$

dove W è un moto Browniano standard $\mathcal{F}$-adattato, r rappresenta il tasso di interesse e $\sigma > 0$ la volatilità. Sia $B(t, T)$ il prezzo di uno zero-coupon bond al tempo t, con scadenza $T \geq t$. Un'opzione Call europea con strike K e scadenza T ha il payoff pari a $max\{0, S_T - K\} = (S_T - K)_+$ e quindi il suo prezzo al tempo $t \in [0, T]$ risulta essere $\mathbb{E}[(S_T - K)_+/\mathcal{F}_t]$; con la formula di

Black & Scholes possiamo esplicitare questo valore atteso

$$\mathbb{E}[(S_T - K)_+/\mathcal{F}_t] = S_t BS\left(log(KB(t,T)/S_t), \sigma^2(T-t)\right)$$

dove

$$BS(k,v) := \begin{cases} \Phi(d_+(k,v)) - e^k\Phi(d_-(k,v)) & se\ v > 0 \\ 0 & se\ v = 0 \end{cases}$$

dove $d_\pm(k,v) := -\frac{k}{\sqrt{v}} \pm \frac{\sqrt{v}}{2}$ dove Φ indica la funzione di distribuzione normale cumulata, ovvero $\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy$.
Per indicare il prezzo di un'opzione Call useremo la seguente notazione $C_{BS}(K, T-t, \sigma)$, in seguito ci sarà utile usare la notazione con due variabili $C_{BS}(K, v) \equiv C_{BS}(K, 1, \sqrt{v})$, dove $v = \sigma^2(T-t)$.
Introduciamo ora un nuovo sistema di coordinate chiamato "log moneyness", $k = log(KB(t,T)/S_t)$; con un piccolo abuso di notazione scriveremo $C_{BS}(k, T, \sigma) = C_{BS}(K, T, \sigma)$.
Richiamiamo le seguenti identità:

$$\begin{cases} \partial_k BS(k,v) = -e^k\Phi(d_-(k,v)) \\ \partial_{kk} BS(k,v) = -e^k\left[\Phi(d_-(k,v)) - \frac{n(d_-(k,v))}{\sqrt{v}}\right] \\ \partial_v BS(k,v) = \frac{n(d_+(k,v))}{2\sqrt{v}} \\ \partial_{vv} BS(k,v) = \frac{n(d_+(k,v))}{16v^{5/2}}(4k^2 - v^2 - 4v) \\ \partial_{kv} BS(k,v) = -n(d_+(k,v))\partial_v d_-(k,v) = -\frac{n(d_+(k,v))}{4}\frac{2k-v}{v^{3/2}} \end{cases}$$

dove n rappresenta la densità gaussiana.

1.2 Alcune proprietà delle martingale locali non negative

Definizione 1.1 (Martingala locale).
Un processo S, definito sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ si dice essere una *martingala locale* se esiste una successione crescente $(\tau_n)_{n\geq 0}$ di tempi di arresto (detta successione localizzante per S) tale che $\lim_{n\to\infty}\tau_n = \infty$

quasi sicuramente e $(S_{t\wedge\tau_n})_{t\geq 0}$ è una vera martingala rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ $\forall n \geq 0$.

Osservazione 1. Una martingala è una martingala locale, il viceversa non è vero in generale.

Proposizione 1.2.1.
Ogni S martingala locale continua e non negativa è anche una super-martingala e $\mathbb{E}[S_t/\mathcal{F}_u]$ è finito per $0 \leq u \leq t$. Inoltre se $\mathbb{E}[S_T] = \mathbb{E}[S_0]$ allora S è una martingala.

Dimostrazione. Per definizione vale $S_{s\wedge\tau_n} = \mathbb{E}[S_{t\wedge\tau_n}/\mathcal{F}_s]$, $0 \leq s \leq t$ e se S è continua, poichè $\tau_n \to T$ q.s., si ha $\lim_{n\to\infty} S_{t\wedge\tau_n} = S_t$.
Applicando il lemma di Fatou, otteniamo
$\mathbb{E}[S_t/\mathcal{F}_u] = \mathbb{E}[\liminf_{n\to\infty} S_t^{\tau_n}/\mathcal{F}_u] \leq \liminf_{n\to\infty} S_t^{\tau_n} = \liminf_{n\to\infty} S_u = S_u$ con $0 \leq u \leq t$. Così abbiamo dimostrato che è una super-martingala.
Applicando il valore atteso alla precedente relazione abbiamo:
$\mathbb{E}[S_0] \geq \mathbb{E}[S_t] \geq \mathbb{E}[S_T]$ con $0 \leq t \leq T$.
Dall'ultima ipotesi si deduce che $\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}[S_0]$ per $t \in [0, T]$.
Infine poichè $S_u \geq \mathbb{E}[S_t/\mathcal{F}_u]$, se fosse $S_u > \mathbb{E}[S_t/\mathcal{F}_u]$ su un evento di probabilità strettamente positiva allora si avrebbe una contraddizione. □

Proposizione 1.2.2.
Sia S una martingala locale non negativa e $0 \leq t \leq T$. Definiamo la mappa $C_t : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ come $C_t(K) := \mathbb{E}[(S_T - K)/\mathcal{F}_t]$, allora sono soddisfatte le seguenti affermazioni:

1. *C_t è convessa e non crescente in $\mathbb{R}_+$,*
2. *$\lim_{K\to\infty} C_t(K) = 0$ e $\lim_{K\to 0} C_t(K) = C_t(0)$,*
3. *per ogni $K \geq 0$, $(C_t(0) - K)_+ \leq C_t(K) \leq C_t(0)$,*
4. *su $\mathbb{R}_+$, esiste $\partial_K^+ C_t$, è continua da destra, non decrescente e soddisfa $-1 \leq \partial_K^+ C_t(\cdot) \leq 0$,*

5. *per ogni* $K > 0$, $-1 \leq \frac{C_t(K)-C_t(0)}{K} \leq \partial_K^+ C_t(K)$.

Dimostrazione. 1) La prima affermazione segue dalla linearità del valore atteso e dalla convessità della mappa $K \longrightarrow (x-K)_+$. I limiti della 2) seguono dalla convergenza dominata di Lebesgue e dalla proposizione 1.2.1 :
$\lim_{K\to\infty} \mathbb{E}[(S_T - K)_+/\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\lim_{K\to\infty} (S_T - K)_+/\mathcal{F}_t] = 0$
$\lim_{K\to 0} \mathbb{E}[(S_T - K)_+/\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\lim_{K\to 0} (S_T - K)_+/\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[S_T/\mathcal{F}_t]$
3)Per ogni x, $K \geq 0$, abbiamo $(x - K)_+ \leq x_+ = x$ e così per la proposizione 1.2.1 $\mathbb{E}[(S_T - K)_+/\mathcal{F}_t] \leq \mathbb{E}[S_T/\mathcal{F}_t] \leq S_t$.
Inoltre $(\mathbb{E}[S_T - K/\mathcal{F}_t])_+ \leq \mathbb{E}[(S_T - K)_+/\mathcal{F}_t] = C_t(K)$
e $(\mathbb{E}[S_T - K/\mathcal{F}_t])_+ = (\mathbb{E}[S_T/\mathcal{F}_t] - K)_+ = (C_t(0) - K)_+$.
4) Dalla (3.) sappiamo che la mappa C_t è continua da destra all'origine e così l'affermazione segue dalle proprietà analitiche dell'estensione (da $\mathbb{R}_+^*$ a $\mathbb{R}_+$).

□

Introducendo il seguente lemma studiamo il collegamento che c'è fra le vere martingale e i limiti per i prezzi delle opzioni Call europee. Inoltre è una caratterizzazione dell'esistenza della volatilità implicita; infatti la disuguaglianza del secondo punto è verificata poichè si ipotizza sempre un mercato con assenza di arbitraggi e per ogni u quindi per ogni prezzo viene associata una volatilità.

Lemma 1.2.3. *Se S è un processo non negativo, $\mathcal{F}$-adattato su $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *S è una vera martingala,*

2. *S è integrabile e si verifica quasi sicuramente*
   $(S_u - K)_+ \leq \mathbb{E}[(S_t - K)_+/\mathcal{F}_u] \leq S_u$ *per ogni* $u : 0 \leq u \leq t$ *e* $K \geq 0$,

3. *S è una martingala locale non negativa con la stessa disuguaglianza verificata in (2.).*

Dimostrazione. Assumiamo che S sia una vera martingala (1.), allora è integrabile e per ogni $u : 0 \leq u \leq t$ e $K \geq 0$,
poichè la mappa $K \longrightarrow \mathbb{E}[(S_t - K)_+/\mathcal{F}_u]$ è convessa e strettamente crescente, la disuguaglianza di Jensen implica che
$(S_u - K)_+ = (\mathbb{E}[S_t/\mathcal{F}_u] - K)_+ \leq \mathbb{E}[(S_t - K)_+/\mathcal{F}_u] \leq \mathbb{E}[(S_t)_+/\mathcal{F}_u] = S_u$
Chiaramente anche S è una martingala locale non negativa e così la (3.) è verificata. Ora assumiamo la (2.) , il lemma segue da un'applicazione diretta della convergenza dominata:

$$\begin{aligned}S_u = \lim_{K \to 0} (S_u - K)_+ &\leq \lim_{K \to 0} \mathbb{E}[(S_t - K)_+/\mathcal{F}_u] \\ &\leq \mathbb{E}[\lim_{K \to 0} (S_t - K)_+/\mathcal{F}_u] = \mathbb{E}[(S_t)_+/\mathcal{F}_u] = S_u\end{aligned}$$

□

1.3 Caratterizzazione delle funzioni prezzo delle opzioni europee

Ricordiamo la Put-Call parity per le opzioni europee sotto le ipotesi di assenza di arbitraggio e assenza di dividendi:

$$C_t(T, K) - P_t(T, K) = S_t - KB(t, T)$$

dove $B(t, T)$ rappresenta il prezzo al tempo t di uno zero-coupon bond che paga 1 al tempo T. Da questa equazione è immediato ricavare le seguenti disuguaglianze:

$$(S_t - K)_+ \leq (S_t - KB(t, T))_+ \leq C_t(T, K) \leq S_t$$

$$(KB(t, T) - S_t)_+ \leq P_t(T, K) \leq KB(t, T)$$

Osservazione 2. Osserviamo che per ogni $t \leq T$, il prezzo della Call è una funzione decrescente dello strike (un esempio di questo tipo lo mostra: compro una Call con strike K_1 e vendo una Call con strike K_2).
Call e Put sono funzioni convesse dello strike; questa proprietà segue direttamente dalla strategia a farfalla ("butterfly strategy"): compro Call con strike K_1,ne compro una con strike K_2 e vendo due Calls con strike $\frac{K_1+K_2}{2}$ dove $K_1 < K_2$.
La "calendar spread strategy" (per un dato strike, compro una Call con scadenza T_2 e vendo con scadenza $T_1 < T_2$) implica che le Calls sono funzioni crescenti della scadenza; questo non è necessariamente vero per le
Puts europee.
In caso di dividendi, la Put-Call parity non è più verificata dal momento che non c'è bisogno di investire l'importo $S_t - KB(t,T)$ al tempo t al fine di ottenere la differenza tra la Call e la Put alla scadenza.
Supponiamo che si paghino dividendi fissi $D_1, ..., D_n$ durante il periodo $[t,T]$, allora la Put-Call parity diventa:

$$C_t(K,T) - P_t(K,T) = S_t - \sum_{i=1}^{n} D_i B(t,t_i) - KB(t,T)$$

In caso di "dividend yield" [1] continuo, $q > 0$, la Put-Call parity diventa:

$$C_t(K,T) - P_t(K,T) = S_t e^{-q(T-t)} - KB(t,T)$$

Teorema 1.3.1. *Sia $s > 0$, e assumiamo che ci sia la mappa*
$C : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \ni (K,T) \longrightarrow C(K,T) \in \mathbb{R}$ *tale che*

1. $C(\cdot,T)$ *è convessa e non crescente,*

2. $C(K,\cdot)$ *è non decrescente,*

3. $\lim_{K\to\infty} C(K,\cdot) = 0$,

[1]Dividend yield: tasso di rendimento da dividendi, ovvero dividendo espresso in rapporto del titolo.

4. $(s-K)_+ \le C(K,T) \le s,$

5. $C(K,0) = (s-K)_+.$

allora C *può essere estesa in modo continuo a* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$
con $\lim_{K\to 0} C(K,T) = s.$
Inoltre esiste una martingala non negativa $(S_t)_{t\ge 0}$ *tale che*
$C(K,T) = \mathbb{E}[(S_T - K)_+ / S_0 = s].$

Definisco la famiglia di funzioni $\tilde{C}_t(K,T) := S_t - \mathbb{E}[S_T \wedge K/\mathcal{F}_t]$ per ogni K, T ,il processo $(\tilde{C}_t(K,T))_{t\ge 0}$ è una martingala locale non negativa. Non è necessariamente una vera martingala, infatti:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\tilde{C}_T(K,T)/\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[(S_T-K)_+/\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[S_T - S_T\wedge K/\mathcal{F}_t] \\ &\le S_t - \mathbb{E}[S_T \wedge K/\mathcal{F}_t] = \tilde{C}_t(K,T)\end{aligned}$$

Osserviamo che abbiamo l'uguaglianza se e solo se S è una vera martingala. In quel caso, abbiamo $\tilde{C}_t(K,T) = \mathbb{E}[(S_T-K)_+/\mathcal{F}_t]$.

Notiamo che c'è un profondo legame tra i prezzi di Calls e Puts e la distribuzione del prezzo dell'opzione al tempo T.

Lemma 1.3.2. *Per ogni* $K > 0$*, si ha:*

$$\partial_K^+ P(K,T) = \mathbb{P}(S_T \le K); \quad \partial_K^- P(K,T) = \mathbb{P}(S_T < K)$$

$$\partial_K^+ C(K,T) = -\mathbb{P}(S_T > K); \quad \partial_K^- C(K,T) = -\mathbb{P}(S_T \ge K)$$

In particolare $\lim_{K\to 0} \frac{P(K,T)}{K} = \mathbb{P}(S_T = 0)$

Dimostrazione. Proviamo la prima parte del lemma:

$$\begin{aligned}\partial_K^+ P(K,T) &= \partial_K^+ \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t,S_t;T,x)(K-x)^+ \, dx \\ &= \partial_K^+ \int_{-\infty}^{K} \Gamma(t,S_t;T,x)(K-x) \, dx\end{aligned}$$

dove Γ è la densità di transizione del moto Browniano W_t, considerando $S_t = e^{W_t}$.

$$\begin{aligned}\partial_y \int_{-\infty}^{y} g(x)(y-x)\, dx = \; & g(x)(y-x)|_{x=y} + \int_{-\infty}^{y} g(x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{K} \Gamma(t,S_t;T,x)\, dx = \mathbb{P}(S_t \leq K)\end{aligned}$$

In modo analogo si verificano anche le altre tre equivalenze,utilizzando anche la Put-Call parity.
Ora, usando la seguente uguaglianza $P(K,T) = \int_0^K \partial_K^+ P(L,T)\, dL$
(che viene dalla convessità del prezzo dell'opzione Put) e
$\lim_{K\to 0} \partial_K^+ P(K,T) = \mathbb{P}(S_T = 0)$, dimostriamo la seconda parte del lemma $\lim_{K\to 0} K^{-1} \int_0^K \partial_K^+ P(L,T)\, dL = \mathbb{P}(S_T = 0)$. $\square$

1.4 Volatilità implicita

In questa sezione consideriamo un modello di mercato dove il prezzo dell'azione S è un processo non negativo su uno spazio di probabilità adattato alla filtrazione data $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Inoltre supponiamo che esista una misura martingala locale equivalente $\mathbb{P}$, sotto la quale S è una martingala locale non negativa (detta supermartingala).In questo mercato assumiamo l'esistenza di una famiglia di prezzi di opzioni Calls europee $(C_t(K,T))_{t,K,T}$.

Proposizione 1.4.1. *Dato $s \geq 0$, $C : (0,\infty) \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che per ogni $K > 0$, $T \geq 0$ vale: $(s-K)_+ \leq C(K,T) \leq s$.*
Allora l'equazione $C(K,T) = C_{BS}(K,T,\sigma)$ ha un'unica soluzione non negativa, chiamata volatilità implicita.

Dimostrazione. Nel modello di Black & Scholes, iniziando $S_0 = s$, per ogni $K > 0$, $T \geq 0$ la mappa $\sigma \longrightarrow C_{BS}(K, T, \sigma)$ è strettamente crescente e tende a $(s - K)_+$ quando $\sigma \to 0$, mentre tende a s quando $\sigma \to \infty$.

□

<u>Notazione</u>

$\Sigma_t(k, T)$ rappresenta la volatilità implicita a log-moneyness al tempo $t \in [0, T]$, dove $k := \log\left(\frac{KB(t,T)}{S_t}\right)$ e T è la scadenza.

$V_t(k, T) = \Sigma_t(k, T)^2(T - t)$ rappresenta la varianza implicita totale (total implied variance).

Inoltre possiamo scrivere $V(k, T)$ al posto di $V_0(k, T)$ quando $t = 0$.

Vediamo ora alcune proprietà della volatilità implicita.

Proposizione 1.4.2. *La distribuzione di S_T è completamente caratterizzata dalla funzione $k \longrightarrow V(k, T)$.*

Dimostrazione. Dalla definizione di volatilità implicita, conoscere la funzione V equivale a conoscere la funzione C del prezzo della Call. Ma il teorema di Fubini dice che $\partial_k^+ C(k, T) = -e^k \mathbb{P}\left(S_T > e^k\right)$; da cui segue la proposizione.

□

Proposizione 1.4.3. *Sia $T \geq 0$, $[k_-, k_+]$ il più piccolo intervallo contenente il supporto essenziale di $\log(S_T)$, con k che può assumere anche questi valori $k_\pm = \pm\infty$. Allora $V(k, T) > 0$ se e solo se $k \in (k_-, k_+)$.*

Dimostrazione. Poichè S è una $\mathbb{P}$-martingala, $\mathbb{E}[S_T] = S_0 = 1$ e necessariamente $k_- \leq 0 \leq k_+$.

Proviamo ora l'identità $BS(-k, V(k, T)) = \mathbb{E}[(1 - S_T e^{-k})_+]$.

La Put-Call parity afferma che $BS(-k, v) = 1 - e^{-k} + e^{-k} BS(k, v)$ che implica $BS(-k, V(k, T)) = 1 - e^{-k} + e^{-k}\mathbb{E}[(S_T - e^k)_+] = \mathbb{E}[(1 - S_t e^{-k})_+]$.

Considero il caso in cui $k \geq 0$; questa identità dice che $V(k, T) = 0$ se e solo se $\mathbb{E}[(S_T - e^k)_+] = (1 - e^k)_+$, che è chiaramente uguale a 0, così $V(k, T) = 0$

se e solo se $S_T \leq e^k$ quasi sicuramente,per esempio $k \geq k_+$.
Allo stesso modo assumo $k \leq 0$, l'identità sopra implica che $V(k,T) = 0$ se e solo se $\mathbb{E}[(1 - S_T e^{-k})_+] = (1 - e^{-k})_+$,da cui otteniamo $k \leq k_-$. □

Osservazione 3. La volatilità implicita è ben definita in modo unico per ogni martingala vera. Ora studiamo il caso di martingale locali non negative, cioè martingale locali che non sono vere martingale.

Lemma 1.4.4. *Sia S una martingala locale stretta (non negativa); se $T > 0$, allora esiste un qualche strike $K^* \in [S_0 - \mathbb{E}[S_T/\mathcal{F}_0], S_t]$ tale che la volatilità implicita è mal definita per tutti gli strikes nell'intervallo $[0, K^*)$.*

Dimostrazione. La proprietà di martingala locale stretta implica che per ogni $t, \tau > 0$ $\mathbb{E}[S_{t+\tau}/\mathcal{F}_t] < S_t$.
Poichè la mappa $K \longrightarrow C_t(K) := \mathbb{E}[(S_T - K)_+/\mathcal{F}_t]$ è decrescente, continua, non negativa in tutto l'asse reale positivo, e $C_t(K) \leq \mathbb{E}[S_T/\mathcal{F}_t] < S_t$; esiste un $K^* \in [S_t - \mathbb{E}[S_T/\mathcal{F}_t], S_t]$ tale che $C_t(K^*) = S_t - K^*$. Quindi, per ogni $\hat{K} \geq K^*$, abbiamo $(S_t - \hat{K})_+ \leq C_t(\hat{K}) \leq S_t$ che segue dal fatto che C_t è non negativa con $-1 \leq \partial_K^+ C_t(K) \leq 0$.

□

Ricordiamo che per martingale locali strette, la volatilità implicita è ben definita per ogni $K \geq S_t$.

Il seguente teorema fornisce alcune condizioni per definire correttamente la superficie della volatilità implicita.

Teorema 1.4.5. *Se la mappa in 2-dimensioni $w : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ soddisfa:*

1. *$w(\cdot, T)$ è di classe C^2,*

2. *$w(k,T) > 0$ per ogni $(k,T) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$,*

3. *$w(k, \cdot)$ è non decrescente,*

4. *per ogni* $(k,T) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$

$$g(k,T) := \left(\left(1 - \frac{k \partial_k w}{2w} \right)^2 - \frac{(\partial_k w)^2}{4} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{w} \right) + \frac{\partial_{kk} w}{2} \right) \Bigg|_{(k,T)} \geq 0$$

5. $w(k,0) = 0$ *per ogni* $k \in \mathbb{R}$,

6. $\lim_{k\to\infty} d_+(k, w(k,T)) = -\infty$.

Allora la corrispondente superficie del prezzo della Call definita da $(k,T) \longrightarrow C_{BS}(k,T,w(k,T))$ *è libera da arbitraggi statici.*[2]

Nota. Sia p_T la funzione densità di probabilità del prezzo dell'azione al tempo T; allora derivando due volte il prezzo della Call otteniamo:

$$\begin{aligned} p_T(k) &= \frac{\partial^2 C(k,T)}{\partial K^2}\Bigg|_{K=S_0 e^k} = \frac{\partial^2 \tilde{C}_{BS}\left(k, \sqrt{w(k,T)}\right)}{\partial K^2}\Bigg|_{K=S_0 e^k} \\ &= \frac{g(k,T)}{\sqrt{2\pi w(k,T)}} exp\left(-\frac{d_-(k,w(k,T))^2}{2} \right) \end{aligned}$$

dove $d_-(k,w) = -\frac{k}{\sqrt{w}} - \frac{\sqrt{w}}{2}$ e g è la funzione definita nel punto 4) del teorema precedente; la condizione $\lim_{k\to\infty} d_+(k,w) = -\infty$ garantisce che il prezzo dell'opzione Call tenda a 0 quando lo strike tende a ∞.

Dimostrazione. Per il teorema 1.3.1 basta verificare che i punti (1.)-(5.) siano soddisfatti per la superficie dell'opzione Call
$\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \ni (k,T) \longrightarrow C_{BS}(k, w(k,T))$.
Poichè il prezzo dell'opzione è una funzione convessa e di classe C^2, posso scrivere $\partial_{KK} C(K,T) \geq 0$ per ogni $(K,T) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.
Indicheremo con w' la derivata prima rispetto a k e con w'' la derivata seconda

[2] Arbitraggio statico: un arbitraggio che non richiede il riequilibrio delle posizioni.

rispetto a k; usando il fatto che $\partial_K k = \frac{1}{K}$, otteniamo
$\partial_K C = \partial_K k \cdot D_k BS = \frac{1}{K}(\partial_k + w'\partial_w)BS$ e

$$\partial_{KK} C = \frac{n(d_+(k,w))}{K^2\sqrt{w}}\left\{1 + \frac{w''}{2} - \frac{w'}{2} - (w')\frac{2k-w}{2w} + (w')^2\frac{4k^2 - w^2 - 4w}{16w^2}\right\}$$

Osserviamo che il termine fuori dalla parentesi è strettamente positivo per ogni $(K,T) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ ed essendo la funzione C(K,T) convessa (quindi $\partial_{KK} C \geq 0$), abbiamo che la parentesi graffa dovrà essere maggiore e uguale a zero che è esattamente il punto (4.). $\square$

Capitolo 2

Proprietà della superficie della volatilità implicita

2.1 La pendenza della volatilità implicita

Proposizione 2.1.1. *Sia $T \geq 0$, allora la derivata destra $\partial_k^+ V(k,T)$ (rispettivamente la derivata sinistra $\partial_k^- V(k,T)$) esiste per ogni $k = k_-$ (rispettivamente per ogni $k \neq k_+$) e*

$$\partial_k^- V(k,T) \leq \partial_k^+ \leq \frac{4V(k,T)}{V(k,T)+2k} \leq 4 \quad \forall k \geq 0$$

$$-4 \leq -\frac{4V(k,T)}{V(k,T)-2k} \leq \partial_k^- V(k,T) \leq \partial_k^+ V(k,T) \quad \forall k \leq 0$$

Dimostrazione. La proposizione è ovvia quando k non è nel supporto di $\log(S_T)$; dall' equazione implicita che definisce la volatilità implicita $C(k,T) = C_{BS}(k, \sqrt{V(k,T)})$ otteniamo:
$\partial_k^+ C(k,T) = \partial_k^+ \partial_V C_{BS}(k, V(k,T)) + \partial_k^+ C_{BS}(k, V(k,T))$ e così

$$\begin{aligned}
\partial_k^+ V(k,T) &= \frac{\partial_k C(k,T) - \partial_k C_{BS}(k, V(k,T))}{\partial_V C_{BS}(k, V(k,T))} \\
&= 2\sqrt{V(k,T)} \frac{\mathcal{N}(d_-(k, V(k,T))) - \mathbb{P}(S_T > e^k)}{n(d_-(k, V(k,T)))} \\
&\geq 2\sqrt{V(k,T)} \frac{\mathcal{N}(d_-(k, V(k,T))) - \mathbb{P}(S_T \geq e^k)}{n(d_-(k, V(k,T)))} = \partial_k^- V(k,T)
\end{aligned}$$

Usando questa relazione $\frac{\mathcal{N}(-x)}{n(-x)} < x^{-1}$ per $x > 0$, otteniamo

$$\partial_k^+ V(k,T) < -\frac{2\sqrt{V(k,T)}}{d_-(k,V(k,T))} = \frac{4V(k,T)}{V(k,T)+2k} \leq 4 \quad \forall k \geq 0$$

Derivando l'identità $BS(-k,V(k,T)) = \mathbb{E}[(1-S_T e^{-k})_+]$ otteniamo

$$\partial_k^- BS(-k,V(k,T)) + \partial_k^- V(k,T)\partial_V BS(-k,V(k,T)) = e^{-k}\mathbb{E}[S_T \mathbf{1}_{S_T<e^k}]$$

che posso anche leggere così:

$$\begin{aligned}\partial_k^- V(k,T) &= \frac{\mathbb{E}[S_T \mathbf{1}_{S_T<e^k}] - \partial_k^- BS(-k,V(k,T))}{\partial_V BS(-k,V(k,T))} \\ &= 2\sqrt{V(k,T)}\frac{\mathbb{E}[S_T \mathbf{1}_{S_T<e^k}] - \mathcal{N}(-d_+(k,V(k,T))}{n(-d_+(k,V(k,T)))} \\ &> -\frac{2\sqrt{V(k,T)}}{d_+(k,V(k,T))} = -\frac{4V(k,T)}{V(k,T)-2k} \geq -4\end{aligned}$$

quando $k \leq 0$.

□

Richiamando la disuguaglianza della media aritmetica/geometrica $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ per due numeri reali non negativi, risulta

$$\partial_k^+ V(k,T) < \frac{4V(k,T)}{V(k,T)+2k} \leq \sqrt{\frac{2V(k,T)}{k}} \quad per \quad k \geq 0$$

$$\partial_k^- V(k,T) > -\frac{4V(k,T)}{V(k,T)-2k} \geq -\sqrt{\frac{2V(k,T)}{k}} \quad per \quad k < 0$$

integrando abbiamo

$$\sqrt{V(k,T)} \leq \sqrt{V(0,T)} + \sqrt{2k} \quad quando \quad k \geq 0$$

$$\sqrt{V(k,T)} \leq \sqrt{V(0,T)} + \sqrt{-2k} \quad quando \quad k \leq 0$$

2.2 Time asymptotics

Considero un processo $(S_t)_{t\geq 0}$ (del prezzo dell'azione) che è una martingala non negativa su un qualche spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$.

Proposizione 2.2.1. *Per ogni $T > 0$, sono soddisfatte le seguenti uguaglianze:*

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sqrt{V(k,T)} - \sqrt{2k}\right) = +\infty$$

$$\lim_{k\to-\infty}\left(\sqrt{V(k,T)} - \sqrt{-2k}\right) = \Phi^{-1}\mathbb{P}(S_T = 0)$$

dove Φ è la funzione di distribuzione cumulata. Notiamo che nel caso in cui il processo è dato come una martingala strettamente positiva, allora $\mathbb{P}(S_T = 0) = 0$ e il secondo limite è $= -\infty$.

Dimostrazione. Notiamo che $\lim_{k\to 0}\frac{P(K,T)}{K} = \mathbb{P}(S_T = 0)$ (risultato già visto precedentemente). Ora andiamo a dimostrare le seguenti affermazioni:

$$\lim_{k\to-\infty} d_+(k, V(k,T)) = +\infty \quad se \quad \mathbb{P}(S_T) = 0$$

$$\lim_{k\to-\infty} d_+(k, V(k,T)) = -\Phi^{-1}[\mathbb{P}(S_T)] \quad se \quad \mathbb{P}(S_T) > 0$$

Richiamiamo l'identità $BS(-k, V(k,T)) = \mathbb{E}[(1 - S_T e^{-k})_+]$; poichè $\mathbb{E}[(1 - S_T e^{-k})_+] = \mathbb{P}(S_T = 0) + \mathbb{E}[(1 - S_T e^{-k})_+ \mathbf{1}_{S_T>0}]$ allora $BS(-k, V(k,T)) \longrightarrow \mathbb{P}(S_T = 0)$ quando $k \to -\infty$ per la convergenza dominata. Così per ogni $k < 0$

$$\Phi(d_+(-k, V(k,T))) = BS(-k, V_T(x)) + e^{-k}\Phi(d_-(-k, V(k,T))) \tag{2.1}$$

$$\leq BS(-k, V(k,T)) + e^{-k}\Phi(-\sqrt{2|k|}) \tag{2.2}$$

Dove il termine a destra dell'uguaglianza converge a $\mathbb{P}(S_T = 0)$ per $k \to -\infty$, mentre il termine della seconda riga segue dalla disuguaglianza aritmetica-geometrica:

$$d_-(-k, V(k,T)) = -\frac{|k|}{\sqrt{V(k,T)}} - \frac{\sqrt{V(k,T)}}{2} \leq -\sqrt{2|k|}$$

e dal fatto che $e^{\frac{z^2}{2}}\Phi(-z) \longrightarrow 0$ per $z \to \infty$.
Allora le uguaglianze definite all'inizio della dimostrazione seguono dall'identità: $d_+(-k, V(k,T)) = -d_-(k, V(k,T))$.
Ora definisco $p := \Phi^{-1}\mathbb{P}(S_T = 0)$ e assumo che $p = -\infty$. La stima 2.2 implica che per ogni $M > 0$ abbiamo

$$d_+(-k, V(k,T)) = \frac{k}{\sqrt{V(k,T)}} + \frac{\sqrt{V(k,T)}}{2} < -M$$

per k abbastanza piccolo o anche $\sqrt{V(k,T)} < -M + \sqrt{M^2 + 2|k|}$. Quindi

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to-\infty}(\sqrt{V(k,T)} - \sqrt{2|k|}) &< -M + \limsup_{k\to-\infty}(\sqrt{M^2+2|k|} - \sqrt{2|k|}) \\ &= -M\end{aligned}$$

per ogni $M > 0$, il che prova la prima uguaglianza della proposizione.
Ora assumiamo che $p > -\infty$, allora per un $\varepsilon > 0$ fissato, abbiamo $p - \varepsilon < d_+(-k, V(k,T)) < p + \varepsilon$ per k abbastanza piccolo. Segue che:

$$\begin{aligned} p - \varepsilon + \sqrt{2|k|} < \sqrt{V(k,T)} &= d_+(-k, V(k,T)) \qquad (2.3)\\ &= d_+(-k, V(k,T)) - d_-(-k, V(k,T)) \qquad (2.4)\\ &< p + \varepsilon + \sqrt{(p+\varepsilon)^2 + 2|k|} \qquad (2.5)\end{aligned}$$

dove la disuguaglianza 2.3 viene dalla disuguaglianza aritmetica-geometrica per d_-, mentre la disuguaglianza 2.5 viene dall'identità $d_-(-k, v)^2 = d_+(-k, v)^2 + 2|k|$. Così $\lim_{k\to-\infty}\left(V(k,T) - \sqrt{2|k|}\right) = p$ ed è provata la seconda identità della proposizione. $\square$

Teorema 2.2.2. *Per ogni $M > 0$, è soddisfatta la seguente equazione:*

$$\lim_{\tau\to\infty} \sup_{k\in[-M,M]} \left| \Sigma(k,\tau) - \left(-\frac{8}{\tau}\log \mathbb{E}[1 \wedge S_\tau]\right)^{\frac{1}{2}} \right| = 0$$

Per dimostrare questo teorema abbiamo bisogno di alcuni risultati:

Lemma 2.2.3. *Sia S una vera martingala su uno spazio di probabilità con filtrazione dato.Allora le affermazioni seguenti sono equivalenti quando $\tau \to \infty$:*

1. S_τ *converge a 0 in distribuzione,*

2. S_τ *converge a 0 quasi sicuramente,*

3. $\mathbb{E}[(S_\tau - K)_+]$ *converge a 1 dal basso,*

4. $\lim_{\tau\to\infty} V(k,T) = +\infty$.

Dimostrazione. Dal teorema di convergenza delle martingale, esiste una variabile aleatoria $S_\infty \in L^1$ alla quale S_τ converge quasi certamente, così che le prime due affermazioni sono equivalenti. Per provare il resto notiamo l'identità seguente: $\mathbb{E}[(S_\tau \wedge K)] = 1 - \mathbb{E}[(S_\tau - K)_+]$ e usiamo la formula di Black & Scholes. □

Corollario 2.2.4. *Se* $\mathbb{P}(\lim_{\tau\to\infty} S_\tau > 0) > 0$ *allora* $\lim_{\tau\to\infty} \Sigma(k,\tau) = 0$ *per ogni* $k \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. (del teorema).Sull'insieme $\{\mathbb{P}(\lim_{\tau\to\infty} S_\tau = 0) < 1\}$
il lemma è verificato poichè in tal caso $\lim_{\tau\to\infty} \Sigma(k,\tau) = 0$ dal corollario e $lim_{\tau\to\infty}\mathbb{E}[1 \wedge S_\tau] > 0$. Ora assumiamo che S_τ converga a 0 quasi sicuramente quando $\tau \to \infty$. Definiamo la funzione $\psi(x) = 1 - \frac{x(1-\mathcal{N}(x))}{n(x)}$ dove
$n(x)$= funzione di densità della gaussiana
$\mathcal{N}(x)$= funzione di distribuzione normale standard
I seguenti limiti possono essere provati integrando per parti:
$0 \le \psi(x) \le (1+x^2)^{-1}$. Pertanto, per ogni $v > 2k$ possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[1 \wedge S_\tau] = 1 - \mathbb{E}[(S_\tau - K)_+] &= 1 - \mathcal{N}(d_+) + e^k \mathcal{N}(d_-) \\
&= 1 - \mathcal{N}(d_+) + e^k(1 - \mathcal{N}(-d_-)) \\
&= 1 - \mathcal{N}(d_+) + \frac{n(d_+)}{n(d_-)}[1 - \mathcal{N}(-d_-)] \\
&= n(d_+)\left(\frac{1-\psi(d_+)}{d_+} + \frac{1-\psi(-d_-)}{-d_-}\right) \\
&= n(d_+)\left(\frac{v^{\frac{3}{2}}}{\frac{v^2}{4-k^2}} - \frac{\psi(d_+)}{d_+} - \frac{\psi(-d_-)}{-d_-}\right)
\end{aligned}$$

Ora per τ abbastanza grande abbiamo: $\frac{\psi(d_+)}{d_+} \leq \frac{2}{d_+^{-3}} \leq \frac{50}{v^{\frac{3}{2}}}$ e $\frac{\psi(-d_-)}{-d_-} \leq \frac{50}{v^{\frac{3}{2}}}$ e pertanto

$$-8 \log \mathbb{E}[1 \wedge S_\tau] = \frac{(v-2k)^2}{v} + 4 \log v + \delta(v) + c = v + \eta(v)$$

dove c=costante reale , δ=funzione decrescente fino a 0 all'∞ e
$|\eta(v)| \leq A + B\log(v)$ per t grande e per alcuni A, B reali positivi. □

Teorema 2.2.5. *Se S_τ è strettamente positiva quasi sicuramente per ogni $\tau \geq 0$, allora per ogni $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $0 \leq s \leq t$ abbiamo*
$\limsup_{\tau\to\infty} (\Sigma_t(k_1,\tau) - \Sigma_s(k_2,\tau)) = 0$.

Dimostrazione. Consideriamo $s = 0$, definisco il processo $(M_t(\tau))_{t\geq 0}$ con $M_t(\tau) := \mathbb{E}_t[S_\tau \wedge 1] = \mathbb{E}[S_\tau \wedge 1/\mathcal{F}_t]$ così che $\left(\frac{M_t(\tau)}{M_0(\tau)}\right)_{t\geq 0}$ è una martingala. Introduciamo ora un lemma che utilizzeremo in seguito:

Lemma 2.2.6. *Se $(X_n)_{n\geq 0}$ è una famiglia di variabili aleatorie non negative con media finita, allora* $\liminf_{n\to\infty} X_n^{\frac{1}{n}} \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[(X_n)]^{\frac{1}{n}}$.

A questo punto andiamo ad applicare il lemma a $M_t(\tau)$ ed otteniamo:

$$\limsup_{\tau\to\infty} \left\{ -\frac{8}{\tau}\log(M_t(\tau)) + \frac{8}{\tau}\log(M_0(\tau)) \right\} \geq 0$$

Quindi il teorema 2.2.2 implica che
$\limsup_{\tau\to\infty}\{\Sigma_t(k_1,\tau-t) - \Sigma_t(k_2,\tau-t)\} \geq 0$ per ogni $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.
Poichè la mappa $\tau \longrightarrow V(\cdot,\tau)$ è crescente sotto l'assenza di arbitraggio, allora $\Sigma_t(k_1,\tau) \geq \sqrt{\frac{\tau-t}{\tau}}\Sigma_t(k_1,\tau)$. □

2.3 Wing properties

In questa sezione parleremo dell'importante risultato studiato da Roger Lee: la formula del momento per la volatilità implicita agli strikes estremi. Tale formula caratterizza il comportamento della volatilità implicita per grandi e piccoli strikes in termini degli ordini critici nei quali i momenti della distribuzione del prezzo dell'azione "esplodono". In altre parole, stabilisce un preciso legame tra le code (per piccoli e grandi strikes) del grafico smile della volatilità implicita e il comportamento della coda del processo del prezzo dell'azione.

Ricordiamo alcuni risultati precedenti: Hodges(1996) [3] e Gatheral(1999) [1] fornirono dei limiti per la pendenza $\frac{\partial I}{\partial x}$ della volatilità implicita, che derivavano dalla monotonia rispetto allo strike dei prezzi di Calls e Puts. Mentre Lipton(2001) affermò che i limiti di I sono $O\left(|x|^{\frac{1}{2}}\right)$ per $|x|$ grande.

Lemma 2.3.1. *Per ogni $p > 0$ vale la seguente stima dall'alto per il prezzo di una Call, per tutti i $K > 0$:*

$$C(K) \leq \frac{B_0 \mathbb{E}\left[S_T^{p+1}\right]}{p+1} \left(\frac{p}{p+1}\right)^p \frac{1}{K^p}$$

Per ogni $q > 0$ vale la seguente stima dall'alto per il prezzo di una Put, per tutti i $K > 0$:

$$P(K) \leq \frac{B_0 \mathbb{E}\left[S_T^{-q}\right]}{1+q} \left(\frac{q}{q+1}\right)^q K^{1+q}$$

.

Dimostrazione. Per ogni $s \geq 0$ abbiamo

$$s - K \leq \frac{s^{p+1}}{p+1} \left(\frac{p}{p+1}\right)^p \frac{1}{K^p}$$

poichè la parte sinistra e destra della disequazione , come funzioni di s, hanno lo stesso valore e le derivate prime quando $s = \frac{(p+1)K}{p}$, ma la parte destra ha la derivata seconda positiva. Inoltre, dato che la parte destra è non negativa, la parte sinistra può essere migliorata scrivendo $(s-K)^+$. Ora sostituendo s con S_T, applicando l'attesa e moltiplicando per B_0 otteniamo la prima stima

del lemma.
In modo analogo, con la proprietà di convessità si mostra che per ogni $s > 0$

$$(K - s)^+ \leq \frac{s^{-q}}{1+q}\left(\frac{q}{1+q}\right)^q K^{1+q}$$

dimostra la seconda stima del teorema. □

Osservazione 4. Sebbene le stime del lemma precedente siano vere per tutti i K, la prima viene usata principalmente per grandi strikes mentre la seconda per piccoli strikes.

Corollario 2.3.2. *Se* $\mathbb{E}\left[S_T^{p+1}\right] < \infty$*, allora* $C(K) = O(K^{-p})$ *quando* $K \to \infty$*. Se* $\mathbb{E}\left[S_T^{-q}\right] < \infty$*, allora* $P(K) = O(K^{1+q})$ *quando* $K \to 0$.

Osservazione 5. Definendo $x = \log\left(\frac{K}{S}\right)$ come la log-moneyness, introduciamo le seguenti identità che saranno utili in seguito, per ogni $\beta > 0$ e $x > 0$:

$$C^{BS}\left(x, \sqrt{\frac{\beta|x|}{T}}\right) = B_0 S_0 \Phi\left(-\sqrt{f_-(\beta)|x|}\right) - B_0 S_0 e^x \Phi\left(-\sqrt{f_+(\beta)|x|}\right)$$

e per ogni $\beta > 0$ e $x < 0$:

$$P^{BS}\left(x, \sqrt{\frac{\beta|x|}{T}}\right) = B_0 S_0 e^x \Phi\left(-\sqrt{f_-(\beta)|x|}\right) - B_0 S_0 \Phi\left(-\sqrt{f_+(\beta)|x|}\right)$$

dove $f_\pm(\beta) := \frac{1}{\beta} + \frac{\beta}{4} \pm 1$.

A questo punto consideriamo la coda destra (caso in cui lo strike K è grande) del quadrato della volatilità implicita di Black & Scholes denotata con $I(x)$. Per prima cosa mostriamo che la pendenza di tale coda non è maggiore di 2.

Lemma 2.3.3. *Esiste* $x^* > 0$ *tale che per ogni* $x > x^*$ *vale* $I(x) < \sqrt{\frac{2|x|}{T}}$.

Dimostrazione. Dalla monotonia stretta della funzione C^{BS} nel suo secondo argomento, ci basta stabilire che $C^{BS}(x, I(x)) < C^{BS}\left(x, \sqrt{\frac{2|x|}{T}}\right)$ ogni volta che $x > x^*$. Osserviamo che

$$\lim_{x\to\infty} C(K(x)) = \lim_{K\to\infty} B_0\mathbb{E}\left[(S_T - K)^+\right] = 0$$

per la convergenza dominata, poichè $\mathbb{E}[S_T] < \infty$.
D'altra parte con De L'Hopital vediamo che

$$\lim_{x\to\infty} C^{BS}\left(x, \sqrt{\frac{2|x|}{T}}\right) = B_0S_0\left[\Phi(0) - \lim_{x\to\infty} e^x\Phi\left(-\sqrt{2|x|}\right)\right] = \frac{B_0S_0}{2}$$

Questo prova il lemma. □

Teorema 2.3.4. *Fissato un tempo $T \geq 0$, si definisce*

$$p^* := sup\left\{p \geq 0 : \mathbb{E}\left[S_T^{1+p}\right] < \infty\right\} \quad e \quad \beta_R := \limsup_{k\to\infty}\left(\frac{I^2(x)}{|x|/T}\right)$$

allora

$$p^* = \frac{1}{2\beta_R} + \frac{\beta_R}{8} - \frac{1}{2} \quad o \quad \beta_R = 2 - 4\left(\sqrt{p^*(1+p^*)} - p^*\right)$$

e $\beta_R \in [0, 2]$,(formula del momento con strike grande).
Quando $p^* = \infty$ allora $\beta_R = 0$.

Dimostrazione. Il lemma 3.3.3 implica che $\beta_R \in [0, 2]$.Dobbiamo mostrare che $p^* = \frac{f_-(\beta_R)}{2}$. Per ogni $\beta \in [0, 2]$, la regola di De L'Hopital implica che

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-cx}}{C^{BS}\left(x, \sqrt{\frac{\beta|x|}{T}}\right)} = \begin{cases} 0 & se \quad c > \frac{f_-(\beta)}{2} \\ \infty & se \quad c \leq \frac{f_-(\beta)}{2} \end{cases}$$

Per dimostrare $p^* \leq \frac{f_-(\beta_R)}{2}$, osserviamo che la funzione $f_- : (0, 2) \longrightarrow (0, \infty)$ è strettamente decrescente. Quindi basta far vedere che per ogni $\beta \in (0, 2)$ con $\frac{f_-(\beta)}{2} < p^*$, si ha $\beta_R \leq \beta$. Prendiamo $p \in \left(\frac{f_-(\beta)}{2}, p^*\right)$,per il corollario 3.3.2, quando $x \to \infty$:

$$\frac{C^{BS}(x, I(x))}{C^{BS}\left(x, \sqrt{\frac{\beta|x|}{T}}\right)} = \frac{O(e^{-px})}{C_{BS}\left(x, \sqrt{\frac{\beta|x|}{T}}\right)} \longrightarrow 0$$

Ora per dimostrare che $p^* \geq \frac{f_-(\beta_R)}{2}$ basta mostrare che per ogni $p \in \left(0, \frac{f_-(\beta_R)}{2}\right)$ si ha $\mathbb{E}\left[S_T^{1+p}\right] < \infty$. Si sceglie un β tale che $Q := \frac{f_-(\beta)}{2} \in \left(p, \frac{f_-(\beta_R)}{2}\right)$.
Per x abbastanza grande si ha:

$$\frac{C(K(x))}{e^{-Qx}} \leq \frac{C^{BS}\left(x, \sqrt{\frac{\beta|x|}{T}}\right)}{e^{-Qx}} \longrightarrow 0 \quad \textit{quando} \quad x \to \infty$$

così esiste K_* tale che per tutti i $K > K_*$ si ha $C(K) < K^{-Q}$. Allora

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[S_T^{1+p}\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^\infty (p+1)pK^{p-1}(S_T - K)^+ \, dK\right] \\ &\leq p(p+1)B_0^{-1}\left[\int_0^{K_*} K^{p-1}C(K)\, dK + \int_{K_*}^\infty K^{p-Q-1}\, dK\right] < \infty\end{aligned}$$

□

Ora consideriamo la coda sinistra (caso in cui lo strike è piccolo) del quadrato della volatilità implicita e mostriamo che anche tale coda ha pendenza non maggiore di 2.

Lemma 2.3.5. *Per ogni $\beta > 2$ esiste x^* tale che per tutti gli $x < x^*$,*

$$I(x) < \sqrt{\frac{\beta|x|}{T}}$$

Nel caso in cui $\beta = 2$ il lemma è ancora valido se e solo se S_T soddisfa $\mathbb{P}(S_T = 0) < \frac{1}{2}$.

Dimostrazione. Nel caso in cui $\beta > 2$ e nel “se“ del caso $\beta = 2$: esiste x^* tale che per tutti gli $x < x^*$,

$$\mathbb{P}(S_T < S_0 e^x) < \Phi\left(-\sqrt{f_-(\beta)|x|}\right) - e^{-x}\Phi\left(-\sqrt{f_+(\beta)|x|}\right)$$

poichè quando $x \to -\infty$, la parte sinistra della disuguaglianza si approssima con $\mathbb{P}(S_T = 0)$, mentre la parte destra si approssima con 1 (nel caso in cui

$\beta > 2$) o con $\frac{1}{2}$ (nel caso in cui $\beta = 2$). Così

$$\begin{aligned} P^{BS}(x, I(x)) &= B_0 \mathbb{E}\left[K(x) - S_T)^+\right] \\ &\leq B_0 K(x) \mathbb{P}(S_T < S_0 e^x) \\ &< P^{BS}\left(x, \sqrt{\frac{\beta|x|}{T}}\right) \end{aligned}$$

per tutti gli $x < x^*$. La tesi segue dalla monotonia stretta di P^{BS} nel suo secondo argomento. Nel caso del "solo se" con $\beta = 2$: per la monotonia di P^{BS} abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{B_0 K(x)}{2} &> P^{BS}\left(x, \sqrt{\frac{2|x|}{T}}\right) \\ &> B_0 \mathbb{E}\left[(K(x) - S_T)^+\right] \\ &\geq B_0 K(x) \mathbb{P}(S_T = 0) \end{aligned}$$

per $x > x^*$ arbitrario. Dividendo per $B_0 K(x)$ si ottiene la tesi. □

Teorema 2.3.6. *Fissato un tempo T, si definisce*

$$q^* := sup\{q \geq 0 : \mathbb{E}\left[S_T^{-q}\right] < \infty\} \quad e \quad \beta_L := \limsup_{k \to -\infty} \left(\frac{I^2(x)}{|x|/T}\right)$$

allora

$$q^* = \frac{1}{2\beta_L} + \frac{\beta_L}{8} - \frac{1}{2} \quad o \quad \beta_L = 2 - 4\left(\sqrt{q^*(1+q^*)} - q^*\right)$$

e $\beta_L \in [0, 2]$,*(formula del momento quando K è piccolo).*
Quando $q^* = \infty$ *allora* $\beta_L = 0$.

Dimostrazione. Il lemma 3.3.5 implica che $\beta_L \in [0, 2]$. Dobbiamo mostrare che $q^* = \frac{f_-(\beta_L)}{2}$. Per ogni $\beta \in (0, 2)$, la regola di De L'Hopital implica che

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{(1+c)x}}{P^{BS}\left(x, \sqrt{\frac{\beta|x|}{T}}\right)} = \begin{cases} 0 & se \quad c > \frac{f_-(\beta_L)}{2} \\ \infty & se \quad c \leq \frac{f_-(\beta_L)}{2} \end{cases}$$

Per dimostrare $q^* \leq \frac{f_-(\beta_L)}{2}$, osserviamo che la funzione $f_- : (0,2) \longrightarrow (0,\infty)$ è strettamente decrescente. Così basta far vedere che per ogni $\beta \in (0,2)$ tale che $\frac{f_-(\beta)}{2} < q^*$, si ha $\beta_L \leq \beta$. Scegliendo un $q \in \left(\frac{f_-(\beta)}{2}, q^*\right)$; per il corollario 3.3.2, quando $x \to -\infty$

$$\frac{P^{BS}(x, I(x))}{P^{BS}\left(x, \sqrt{\frac{\beta|x|}{T}}\right)} = \frac{O\left(e^{(1+q)x}\right)}{P^{BS}\left(x, \sqrt{\frac{\beta|x|}{T}}\right)} \longrightarrow 0$$

La tesi segue dalla monotonia della funzione P^{BS} nel suo secondo argomento. Ora per mostrare $q^* \geq \frac{f_-(\beta_L)}{2}$, è sufficiente far vedere che per ogni $q \in \left(0, \frac{f_-(\beta_L)}{2}\right)$ si ha $\mathbb{E}\left[S_T^{-q}\right]$. Si sceglie β tale che $Q := \frac{f_-(\beta)}{2} \in \left(q, \frac{f_-(\beta_L)}{2}\right)$. Per $|x|$ abbastanza grande,

$$\frac{P(K(x))}{e^{(1+Q)x}} \leq \frac{P^{BS}\left(x, \sqrt{\frac{\beta|x|}{T}}\right)}{e^{(1+Q)x}} \longrightarrow 0 \quad \textit{quando} \quad x \to -\infty$$

così esiste K_* tale che per tutti i $K < K_*$ si ha $P(K) < K^{1+Q}$. Allora

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[S_T^{-q}\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^\infty -q(-q-1)K^{-q-2}(K-S_T)^+\,dK\right]\\ &\leq q(q+1)B_0^{-1}\left[\int_0^{K_*} K^{Q-q-1}\,dK + \int_{K_*}^\infty K^{-q-2}P(K)\,dK\right] < \infty\end{aligned}$$

□

Notiamo che p^* e q^* in generale dipendono dal tempo t.

Osservazione 6. Dalla formula di Black & Scholes osserviamo che il comportamento della coda della pendenza della volatilità implicita contiene la stessa informazione del comportamento della coda dei prezzi dell'opzione. A sua volta, il comportamento della coda dei prezzi dell'opzione contiene la stessa informazione del numero di momenti finiti. Intuitivamente, i prezzi dell'opzione sono limitati dai momenti (come descritto dal lemma 3.3.1); dall'altra parte, i momenti sono limitati dai prezzi dell'opzione.

Esempio 2.1. Modello di Black & Scholes
In questo modello il prezzo dell'azione , rispetto la misura neutrale al rischio,

soddisfa la seguente equazione differenziale stocastica $\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t$ con $S_0 > 0$. Possiamo calcolare per ogni $t \geq 0$:

$$\mathbb{E}\left[S_t^u\right] = S_0 \mathbb{E}\left[e^{u\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+u\sigma W_t}\right] = S_0 e^{urt+\frac{\sigma^2 t}{2}u(u-1)}$$

che è ben definito per ogni $u \in \mathbb{R}$.
Perciò $p^* = \infty$ e $q^* = \infty$ e deduciamo che $\beta_L = \beta_R = 0$, il che non è sorprendente poichè la volatilità implicita in Black & Scholes non dipende dallo strike.

Esempio 2.2. Processi di Levy esponenziali
Nel modello Kou, il processo $X := \log(S)$ soddisfa la seguente dinamica:

$$X_t = \gamma t + \sigma W_t + \sum_{n=1}^{N_t} Y_n$$

dove $\gamma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, W =moto Browniano standard,
N= processo di Poisson con parametro $\lambda > 0$,
$(Y_n)_n$= famiglia di variabili aleatorie indipendenti con stessa distribuzione:
$\mu(dx) = p\lambda e^{-\lambda_+ x}\mathbf{1}_{\{x>0\}}dx + (1-p)\lambda_- e^{-\lambda_-|x|}\mathbf{1}_{\{x<0\}}dx$
dove λ_+, λ_- sono strettamente positive e $p \in [0,1]$.
La costante γ è scelta in modo che il processo del prezzo dell'azione rimanga una vera martingala. Per ogni fissato $t \geq 0$, posso calcolare:

$$\mathbb{E}\left[e^{uX_t}\right] = e^{u\gamma t+\frac{\sigma^2 u^2}{2}t+\lambda t\left(e^{uY_1}-1\right)}$$

$$\mathbb{E}\left[e^{uY_1}\right] = p\frac{\lambda_+}{\lambda_+ - u} + (1-p)\frac{\lambda_-}{\lambda_- + u}$$

Perciò $q^* = \lambda_-$ e $p^* = \lambda_+ - 1$.

Nota. Poichè i processi esponenziali di Levy hanno la proprietà che esiste una certa funzione ϕ tale che $\mathbb{E}\left[e^{uX_t}\right] = e^{\phi(u)t}$; i momenti superiore ed inferiore p^* e q^* non dipendono mai da t.

Capitolo 3

Applicazione delle proprietà su alcuni modelli

Finora i modelli utilizzati per valutare le opzioni si basano sull'ipotesi di Black-Scholes-Merton che la dinamica del prezzo delle azioni sia ben rappresentata dal moto geometrico Browniano.
In questo capitolo andiamo ad esaminare alcuni processi che sono stati proposti per descrivere la dinamica dei prezzi azionari in alternativa al moto geometrico Browniano.
La dinamica ipotizzata dal modello di Black & Scholes implica la log-normalità del prezzo delle azioni in ogni istante futuro. In alternativa possiamo scegliere molti altri processi; vediamone alcuni:

- **MODELLI DIFFUSIVI**: modelli in cui il prezzo dell'azione si modifica continuamente, ma si assume un processo diverso dal moto geometrico Browniano.
- **MODELLI DIFFUSIVI A SALTI**: modelli nei quali la dinamica a salti viene sovrapposta alla dinamica continua.
- **MODELLI A SALTI PURI**: modelli nei quali è prevista solo la dinamica a salti, ovvero tutte le variazioni di prezzo sono rappresentate da salti.

Tutti questi processi sono noti come **processi di Levy**[1].
Inoltre possiamo fare un'ulteriore classificazione dei modelli tenendo conto che la volatilità non sia più costante ma dipendente da parametri, o a sua volta, caratterizzata da un processo stocastico. A grandi linee i modelli con volatilità non costante possono essere suddivisi in due gruppi:

- modelli a *volatilità endogena* in cui la volatilità è descritta da un processo stocastico che dipende dagli stessi fattori di rischio del sottostante;
- modelli a *volatilità esogena* in cui la volatilità è descritta da un processo stocastico guidato da uno o più fattori di rischio aggiuntivi.

I più popolari modelli a volatilità endogena sono i cosiddetti modelli a *volatilità locale* in cui si assume che σ sia funzione del tempo e del prezzo del sottostante:

$$dS_t = \mu(S_t, t)S_t dt + \sigma(S_t, t)S_t dW_t$$

Mentre i modelli più realistici sono quelli a volatilità esogena, tra questi la classe più studiata è quella dei modelli a *volatilità stocastica* in cui la volatilità segue appunto un processo stocastico σ_t ed il processo del sottostante S_t è così definito:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma_t S_t dW_t$$

3.1 Modello CEV (Constant Elasticity of Variance)

Il modello CEV, proposto per la prima volta da John Cox nel 1975, è un modello a volatilità locale. Si introduce un processo che segue la dinamica fornita dall'equazione differenziale stocastica:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_0 S_t^\gamma dW_t$$

[1]Processi di Levy: sono processi stocastici in tempo continuo a incrementi aleatori stazionari e indipendenti.

dove $\sigma, \gamma \geq 0$, $\mu = r - q$ dove r è il tasso privo di rischio e q è il dividend yield.
In questo modello, il prezzo dell'azione ha una volatilità pari a $\sigma_0 S_t^{\gamma-1} = \sigma(S_t, t)$:

1. se $\gamma = 1$ il processo S_t coincide con il moto geometrico Browniano

2. se $0 < \gamma < 1$ la volatilità diminuisce quando il prezzo dell'azione aumenta

3. se $\gamma > 1$ la volatilità aumenta quando il prezzo dell'azione aumenta

La funzione volatilità ha elasticità costante rispetto ad S_t, il che significa:

$$\frac{\partial \log \sigma(S_t, t)}{\partial \log S_t} = \gamma - 1$$

Osserviamo come la formula del momento di Lee viene applicata in questo modello: si ha $p^* = \infty$ e $q^* = 2(1-\gamma)$ quindi il comportamento della volatilità implicita quando K tende a 0 è regolare mentre quando K tende a infinito non lo è.

3.2 Modelli a volatilità stocastica

Nel modello Black-Scholes-Merton assume che la volatilità sia costante, ma in realtà la volatilità non lo è, varia nel tempo. I modelli a volatilità stocastica sono modelli più complessi in quanto compaiono due variabili stocastiche: il prezzo dell'azione e la sua volatilità. Infatti la volatilità segue un processo stocastico σ_t ed il processo del sottostante S_t è così definito:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma_t S_t dW_t, \quad S_0 > 0$$

dove r è il tasso di interesse e W è un moto Browniano standard $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.
Modello di Heston
Il modello di Heston (1993) è uno dei più popolari modelli a volatilità stocastica utilizzati nella valutazione di strumenti finanziari derivati. La struttura

del modello risponde ad alcune evidenze empiriche rilevabili nelle quotazioni reali dei titoli: la distribuzione dei rendimenti non è gaussiana ed esiste una sostanziale correlazione tra il prezzo e la volatilità. L'efficienza di tale modello nella valutazione dei titoli derivati è fortemente dipendente dalla stima dei parametri. L'idea, suggerita principalmente da osservazioni del mercato, è che l'andamento della volatilità del prezzo di un titolo non sia indipendente dall'andamento del prezzo stesso. Il modello di Heston soddisfa il seguente sistema di equazioni differenziali stocastiche, con $X := \log(S)$:

$$\begin{cases} dX_t = -\frac{1}{2}V_t dt + \sqrt{V_t}dW_t, & X_0 = x_0 \in \mathbb{R} \\ dV_t = k(\theta - V_t)dt - \xi\sqrt{V_t}dZ_t, & V_0 = v_0 > 0 \\ d < W, Z >_t = \rho dt \end{cases}$$

dove il parametro di correlazione $\rho \in (-1, 1)$, W e Z sono due moti Browniani e $k, \theta, \xi > 0$.

Osservazione 7. Grazie al lavoro svolto da Gulisashvili e Stein [2] possiamo riportare il seguente risultato: la volatilità implicita in questo modello può essere scritta così: per $k = \log K \to \infty$

$$\sigma_{BS}(k,T)\sqrt{T} = \beta_1 k^{\frac{1}{2}} + \beta_2 + \beta_3 \frac{\log k}{k^{\frac{1}{2}}} + O\left(\frac{\varphi(k)}{k^{\frac{1}{2}}}\right)$$

dove φ è una funzione arbitraria che tende a infinito.

Quindi nel modello di Heston la formula del momento di Lee viene così applicata:

$$p^* := \frac{1}{2\beta_1^2} + \frac{\beta_1^2}{8} + \frac{1}{2}$$

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\sigma_{BS}(k,T)\sqrt{T}}{\sqrt{k}} = \beta_1$$

Appendice A

Nozioni di base

Riportiamo alcune definizioni e teoremi che saranno utilizzati nella seguente tesi.

Definizione A.1. Per i processi stocastici si considera $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ dove $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ è una *filtrazione*:

1. $\mathcal{F}_n$ è una σ-algebra per ogni $n \geq 0$

2. $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$ per ogni $n > 0$

3. $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$

Definizione A.2. Se $(X_n)_{n\geq 0}$ è un processo stocastico, $\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_0, ..., X_n)$ è la più piccola σ-algebra che contiene le controimmagini dei borelliani rispetto a $X_0, .., X_n$. E' la più piccola σ-algebra tale che $X_0, .., X_n$ siano misurabili. Essa si chiama *filtrazione associata ad* X.

Definizione A.3. Un processo X si dice *adattato* a $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ se X_n è $\mathcal{F}_n$ misurabile per ogni n.

Definizione A.4. $(X_n)_{n\geq 0}$ processo adattato su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0})$ si dice essere una *martingala* se:

1. $(X_n)_{n\geq 0}$ è sommabile

2. vale $X_n = \mathbb{E}[X_{n+1}/\mathcal{F}_n]$ per ogni $n \geq 0$

Sub-martingala se $X_n \leq \mathbb{E}[X_{n+1}/\mathcal{F}_n]$ per ogni $n \geq 0$.
Super-martingala se $X_n \geq \mathbb{E}[X_{n+1}/\mathcal{F}_n]$ per ogni $n \geq 0$.

Definizione A.5. Un processo stocastico misurabile in $\mathbb{R}^N$ è una famiglia $(X_t)_{t\in I}$ di variabili aleatorie a valori in $\mathbb{R}^N$ tale che l'applicazione

$$X : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N, \quad X(t,\omega) = X_t(\omega)$$

è misurabile rispetto alla σ-algebra prodotto $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(I)$.
Dove $I = [0,T]$ o $[0,+\infty[$.
Un processo stocastico X è *continuo* se le traiettorie $t \longrightarrow X_t(\omega)$ sono funzioni continue per ogni $\omega \in \Omega$.

Definizione A.6. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0})$ uno spazio di probabilità con filtrazione. Un *moto Browniano reale* è un qualsiasi processo stocastico
$W = (W_t)_{t\in[0,+\infty[}$ in $\mathbb{R}$ tale che

1. $W_0 = 0$
2. W è un processo continuo e adattato alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$
3. per ogni $t, h \geq 0$, $W_{t+h} - W_t \sim \mathcal{N}_{0,h}$ ed è indipendente da $(\mathcal{F}_t)$

Definizione A.7. Siano dati $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $b : [0,T] \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ detto coefficiente di drift, $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N \times d$ matrice $N \times d$ detto coefficiente di diffusione. Diciamo che un processo stocastico $(X_t)_{t\in[0,T]}$ è soluzione dell'equazione differenziale stocastica di coefficienti (x_0, b, σ) relativamente al moto Browniano (W_t) fissato su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0})$ se: $b(t, X_t)$, $\sigma(t, X_t) \in \mathbb{L}^2_{loc}$ e vale $dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$ con $X_0 = x_0$.

Definizione A.8. L'equazione di coefficienti (x_0, b, σ) ammette *soluzione in senso forte* se per ogni W moto Browniano esiste una soluzione relativa a W.

Definizione A.9. Sia X una variabile aleatoria definita sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0})$. La funzione che fa corrispondere ai valori di x, le probabilità cumulate $\mathbb{P}(X \leq x)$ viene detta *funzione di ripartizione* ed è così definita:

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] \quad F(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$$

La funzione F è crescente, continua a destra e soddisfa le seguenti identità $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$. Se la funzione F è assolutamente continua, allora la variabile aleatoria X ha una funzione di densità $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ definita da $f(x) = F'(x)$. Notiamo che questo implica la seguente uguaglianza $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\, du$.

Definizione A.10. Una funzione $F : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è detta *assolutamente continua* se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$\sum_n |b_n - a_n| < \delta \Longrightarrow \sum_n |F(b_n) - F(a_n)| < \delta$$

per ogni intervallo $(a_n, b_n) \subset \mathcal{D}$.

Definizione A.11. La *funzione caratteristica* $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ della variabile aleatoria X è $\phi(u) := \mathbb{E}\left[e^{iuX}\right]$. Osserviamo che è bene definita per ogni numero reale u e vale sempre $|\phi(u)| \leq 1$.

Definizione A.12. Una variabile aleatoria X ha una *distribuzione gaussiana (o normale)* con media $\mu \in \mathbb{R}$ e varianza $\sigma^2 > 0$, e si scrive $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ se e solo se la sua densità è

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^2\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

La funzione caratteristica è $\mathbb{E}\left[e^{iuX}\right] = exp\left(i\mu u - \frac{1}{2}u^2\sigma^2\right)$.

Lemma A.0.1. *(di Fatou in analisi). Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili non negative, definite su uno spazio di misura (S, Σ, μ) e vale $f(x) := \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ per ogni $x \in S$. Allora anche f è misurabile e vale*

$$\int_S f(x)\mu(dx) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_S f_n(x)\mu(dx)$$

.

Lemma A.0.2. *(di Fatou in probabilità). Per una data famiglia di variabili aleatorie non negative $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definita su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, vale per ogni sotto σ-algebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$:*

$$\mathbb{E}\left[\liminf_{n\to\infty} X_n/\mathcal{G}\right] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n/\mathcal{G}\right]$$

Richiamiamo ora le diverse definizioni di **convergenza** per una famiglia di varibili aleatorie $(X_n)_{n\geq 1}$ definita su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$; denoteremo con $F_n : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ le funzioni di ripartizione e con
$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ la loro densità quando esiste.

Definizione A.13. Sia $(h_n)_{n\geq 1}$ una famiglia di funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, diciamo che la famiglia *converge puntualmente* alla funzione $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se e solo se vale $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = h(x)$ per ogni numero reale x.

Definizione A.14. La famiglia $(X_n)_{n\geq 1}$ *converge in distribuzione (o debolmente o in legge)* a una variabile aleatoria X se e solo se $(F_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente alla funzione $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$, ovvero vale per ogni numero reale x, dove F è continua:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

dove F è la funzione di ripartizione della variabile aleatoria X.

Definizione A.15. La famiglia $(X_n)_{n\geq 1}$ *converge in probabilità* alla variabile aleatoria X se, per ogni $\varepsilon > 0$, vale

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$$

Definizione A.16. La famiglia $(X_n)_{n\geq 1}$ *converge quasi sicuramente* alla variabile aleatoria X se $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$.

Definizione A.17. Sia $r \in \mathbb{N}^*$, la famiglia $(X_n)_{n\geq 1}$ converge nella norma L^r alla variabile aleatoria X se il momento assoluto r-esimo di X_n e X esiste per ogni $n \geq 1$ e se $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^r] = 0$.

Osservazione 8. :

- la convergenza q.s. implica la convergenza in probabilità,
- la convergenza in probabilità implica la convergenza debole,

- la convergenza nella norma L^r implica la convergenza in probabilità,
- per ogni $r \geq s \geq 1$, la convergenza in L^r implica la convergenza in norma L^s.

Teorema A.0.3. *(Convergenza dominata di Lebesgue)*
Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio di misura, (f_n) una successione di funzioni misurabili su X tale che esiste il limite: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ per ogni $x \in X$.
Se esiste una funzione $g \in L^1(\mu)$ tale che: $|f_n(x)| \leq g(x)$ allora (f_n) si dice dominata da g.
Inoltre segue che:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0$$

ovvero f_n converge a f in L^1.

Definizione A.18. (disuguaglianza di Jensen) Siano X,$Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e $\mathcal{G}$,$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ σ-algebre di Ω, se φ è una funzione convessa tale che
$\varphi(X) \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$ allora

$$\mathbb{E}[\varphi/\mathcal{G}] \geq \varphi(\mathbb{E}[X/\mathcal{G}])$$

Definizione A.19. Il *processo di Poisson* è un processo stocastico in cui la variabile è soggetta a discontinuità; la probabilità di un salto nel periodo Δt è pari a $\lambda \Delta t$, dove λ è l'intensità del processo. Inoltre è uno dei più famosi processi di Levy.

Definizione A.20. I cosiddetti "sorrisi di volatilità" (*volatility smiles*) sono grafici che rappresentano le volatilità implicite delle opzioni in funzione dei prezzi d'esercizio (strikes).

Definizione A.21. Un'opzione viene chiamata *Call* se dà il diritto di acquistare il sottostante al tempo T e al prezzo strike K; il suo valore finale (payoff) è uguale a $\max(0, K - S_T)$.
Mentre un'opzione viene chiamata *Put* se dà il diritto di vendere il sottostante al tempo T e al prezzo K; il suo valore finale è pari a $\max(0, S_T - K)$.

Bibliografia

[1] Jim Gatheral. The volatility skew: Arbitrage constraints and asymptotic behaviour. *Merrill Lynch*, 1999.

[2] Archil Gulisashvili and Elias M. Stein. Asymptotic Behavior of the Stock Price Distribution Density and Implied Volatility in Stochastic Volatility Models. *Applied Mathematics and Optimization*, 61:287–315, 2010.

[3] Hardy M Hodges. Arbitrage bounds of the implied volatility strike and term structures of european-style options. *The Journal of Derivatives*, 3(4):23–35, 1996.

[4] John C Hull. *Opzioni, futures e altri derivati. Con CD-ROM.* Pearson Italia Spa, 2006.

[5] Antoine Jacquier. Volatility modelling. futura pubblicazione.

[6] Roger W. Lee. The moment formula for implied volatility at extreme strikes. *Mathematical Finance*, 14(3):469–480, 2004.

[7] Andrea Pascucci. *Calcolo stocastico per la finanza.* Springer, 2008.