Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Distribuzioni temperate e loro applicazioni a problemi per operatori differenziali a coefficienti costanti

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Paolo Negrini

Presentata da:
Simona Lettieri

II Sessione
Anno Accademico 2013/2014

Alla mia Bologna..

Introduzione

La teoria delle distribuzioni è uno strumento fondamentale dell'Analisi moderna, con applicazioni amplissime che vanno dalla teoria delle equazioni a derivate parziali alla Fisica Teorica.
Essa fu introdotta da L. Schwartz negli anni quaranta del Novecento, ma ebbe importanti precursori: citiamo solo il calcolo simbolico di O. Heaviside negli ultimi anni dell'Ottocento e la teoria delle derivate deboli di L. Sobolev negli anni '30 del Novecento.
Il punto di partenza è quello di ampliare il concetto di funzione con l'obiettivo di comprendere oggetti che non possono essere considerati in alcun modo funzioni di tipo classico: è possibile generalizzare il concetto di funzione sostituendolo con quello di funzionale, ovvero una regola che assegna un numero reale o complesso ad ogni funzione appartenente ad un certo insieme di funzioni test.
Le distribuzioni sono funzionali lineari continui definiti su un opportuno spazio di funzioni test; con una scelta un po' diversa delle funzioni test si definiscono similmente le distribuzioni temperate.

I primi due capitoli di questa tesi sono introduttivi: nel primo esponiamo le definizioni di base utili per affrontare la teoria delle distribuzioni, mentre nel secondo introduciamo la nozione di distribuzione, le operazioni fondamentali tra esse e le proprietà più importanti.
Questi due capitoli contengono gli strumenti necessari per analizzare l'argomento principale della tesi: la ricerca di soluzioni fondamentali per certi operatori differenziali lineari e la risoluzione di alcuni problemi differenziali.
Nel terzo capitolo studiamo equazioni differenziali alle derivate parziali

lineari a coefficienti costanti, del tipo

$$P(\partial)u = v$$

dove u e v sono distribuzioni, $P(\partial)$ è un operatore differenziale di ordine m:

$$P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$$

con ∂^α operatore differenziale definito come:

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$$

e i coefficienti a_α sono costanti.
Definiremo la soluzione fondamentale di $P(\partial)$ e la studieremo in particolare per l'operatore dell'onde.
Successivamente ci occupiamo in generale della risoluzione di problemi per un operatore differenziale lineare con coefficienti costanti, mostrando alcuni teoremi e proposizioni utili. Di questi esponiamo alcune applicazioni all'operatore delle onde.
Nell'ultima parte della tesi consideriamo in particolare le distribuzioni a simmetria radiale. Anche di queste ci serviamo per applicazioni relative all'operatore delle onde.

Indice

Capitolo 1

Definizioni fondamentali

1.1 Spazi numerabilmente normati

In questo capitolo presenteremo le definizioni e le proposizioni fondamentali che occorre premettere alla definizione e allo studio delle distribuzioni.

Definizione 1.1. Sia X uno spazio vettoriale e sia $\| \|_1$ e $\| \|_2$, ..., un'infinità numerabile di norme per X.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $\| \|_n$ più debole di $\| \|_{n+1}$ [1] e siano $\| \|_n$ e $\| \|_{n+1}$ concordanti. [2]
Poniamo $V_{\epsilon,n}(x) = \{y \in X; \|y - x\|_n < \epsilon \quad \epsilon \in \mathbb{R}^+\}$, e
$\mathcal{B} = \{\emptyset, V_{\epsilon,n}(x), \text{ con } \epsilon \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}, x \in X\}$.
Allora B è base di una topologia per X.
X munito di questa topologia, si denota con $(X, \| \|_1, \| \|_2, ...)$ e si chiama **spazio numerabilmente normato**.

Osservazione 1. Affinchè la definizione sia ben posta, bisogna provare che $\mathcal{B}$ è base di una topologia per X, ossia verificare le seguenti condizioni:

- $\emptyset \in \mathcal{B}$;
- $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$;

[1] Una norma $\| \|_1$ si definisce più debole di una norma $\| \|_2$ se esiste $C \in \mathbb{R}^+$ tale che $\|x\|_1 \leq C\|x\|_2, \quad \forall x \in X$.

[2] Due norme sono concordanti se ogni successione in X che sia di Cauchy rispetto a $\| \|_1$ e a $\| \|_2$ e che converga a zero rispetto a $\| \|_1$, converge a zero anche rispetto a $\| \|_2$

- $B_1, B_2 \in \mathcal{B}, x \in B_1 \cap B_2 \to \exists B_3, x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Dimostrazione. Notiamo che:

- $\emptyset \in \mathcal{B}$ per definizione di $\mathcal{B}$;
- $x \in V_{\epsilon,n}(x)$, quindi $X = \bigcup_{x \in X, \epsilon \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}} V_{\epsilon,n}(x) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$;
- Sia $x \in V_{\epsilon_1,n_1}(a) \cap V_{\epsilon_2,n_2}(b)$, proviamo l'esistenza di $V_{\epsilon_3,n_3}(x)$ tale che $V_{\epsilon_3,n_3}(x) \subset V_{\epsilon_1,n_1}(a) \cap V_{\epsilon_2,n_2}(b)$.
  Sia
  $$0 < \epsilon_3 \leq \min\{\epsilon_1 - \|x-a\|_{n_1}, \epsilon_2 - \|x-b\|_{n_2}\} \tag{1.1}$$
  e $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$; cosi se $y \in V_{\epsilon_3,n_3}(x)$ allora $\|y-x\|_{n_3} < \epsilon_3$ e quindi
  $$\|y-a\|_{n_1} \leq \|y-x\|_{n_1} + \|x-a\|_{n_1} \leq \|y-x\|_{n_3} + \|x-a\|_{n_1} < \epsilon_3 + \|x-a\|_{n_1} \leq \epsilon_1$$
  per (1.1);
  $$\|y-b\|_{n_2} \leq \|y-x\|_{n_2} + \|x-b\|_{n_2} \leq \|y-x\|_{n_3} + \|x-b\|_{n_2} < \epsilon_3 + \|x-b\|_{n_2} \leq \epsilon_2$$
  per (1.1);

  Da cui $y \in V_{\epsilon_1,n_1}(a)$ e $y \in V_{\epsilon_2,n_2}(b)$, perciò $y \in V_{\epsilon_1,n_1}(a) \cap V_{\epsilon_2,n_2}(b)$.
  Segue che $x \in V_{\epsilon_3,n_3}(x) \subset V_{\epsilon_1,n_1}(a) \cap V_{\epsilon_2,n_2}(b)$.

□

Osservazione 2. X è sottospazio di $\overline{X}^{\|\ \|_n}$, $\forall n$, dove con $\overline{X}^{\|\ \|_n}$ si indica il *completamento* di X rispetto alla norma $\|\ \|_n$ [3]

Enunciamo, ora due risultati sugli spazi numerabilmente normati, le cui dimostrazioni si trovano in [1]: Teorema 1-4 a pag.12 e Teorema 1-6 a pag.16:

Teorema 1.1.1. *Sia* $(X.\|\ \|_1, \|\ \|_2, ...)$ *uno spazio numerabilmente normato. E' completo* $\Longleftrightarrow X = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{X}^{\|\ \|_n}$

[3] Sia X uno spazio vettoriale reale, e $\|\ \|$ una norma su X. Si può allora definire uno spazio normato completo $\overline{X}$ come segue: l'insieme $\overline{X}$ è l'insieme di tutte le successioni di Cauchy fatte con elementi di X, con la seguente relazione di equivalenza: $\{x_h\}\rho\{y_h\}$ se $\|x_h - y_h\| \to 0$. Per ogni elemento $\{x_h\}$ di $\overline{X}$ si ha che $\|x_h\|$ tende ad un limite finito: definito questo limite come $\|\{x_h\}\|_{\overline{X}}$, si vede facilmente che $\|\ \|_{\overline{X}}$ è una norma su $\overline{X}$.

Definizione 1.2. Sia X uno spazio vettoriale e siano $\| \|_1, \| \|_2, ...$ e $\| \|'_1, \| \|'_2, ...$ due sistemi di norme tali che $\|x\|_p \leq \|x\|_{p+1}$ e $\|x\|'_p \leq \|x\|'_{p+1} \quad \forall p \in \mathbb{N}$.
Si dice che il primo sistema è più debole del secondo se $\forall p \in \mathbb{N}$ esiste $q(p) \in \mathbb{N}$ tale che $\| \|_p$ è più debole di $\| \|'_{q(p)}$.
I due sistemi si dicono equivalenti se ciascuno di essi è più debole dell'altro.

Teorema 1.1.2. *Condizione necessaria e sufficiente che due spazi numerabilmente normati $(X, \| \|_1, \| \|_2, ...)$ e $(X'', \| \|'_1, \| \|'_2, ..)$ coincidano è che i due sistemi di norme $\| \|_1, \| \|_2, ...$ e $\| \|'_1, \| \|'_2, ...$ siano equivalenti.*

1.1.1 Esempi di spazi numerabilmente normati

Lo spazio delle funzioni a decrescenza rapida

Definizione 1.3. Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ si dice **a decrescenza rapida** se:

- $f \in C^\infty$;
- $\lim_{\|x\| \to +\infty} x^\alpha D^\beta f(x) = 0 \quad \forall \alpha, \beta$ multi-indici [4].

Indichiamo con $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ lo spazio delle funzioni a decrescenza rapida.

Poniamo per $p \in \mathbb{N}$, e $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\|f\|_p = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{|\alpha \,| \leq p} (1 + \|x\|)^p \; |D^\alpha f(x)|.$$

$\| \|_p$ è una norma e $\|f\|_p \leq \|f\|_{p+1} \quad \forall p \in \mathbb{N}$.
Indichiamo con $\mathcal{S}_p(\mathbb{R}^n)$ lo spazio vettoriale delle funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ di classe C^p e per ciascuna delle quali è $\|f\|_p < +\infty$.

Osservazione 3. $(\mathcal{S}_p(\mathbb{R}^n), \| \|_p)$ è completo

Dimostrazione. Sia $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ una successione di $\mathcal{S}_p(\mathbb{R}^n)$ di Cauchy rispetto a $\| \|_p$, allora

$$\lim_{\mu, \nu \to +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \sup_{|\alpha \,| \leq p} (1 + \|x\|)^p \; |D^\alpha f_\mu(x) - D^\alpha f_\nu(x) \,| = 0$$

[4]Se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ e α_j è un intero non negativo per $j = 1, 2, ..., n$ diciamo che α è un multi-indice. La lunghezza di α è definita così: $|\alpha \,| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$.

Così ogni $(D^\alpha f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ con $|\alpha| \leq p$ converge uniformemente su $\mathbb{R}^n$.
Ne segue che:

$$\exists f_0 \in C^p : D^\alpha f_m \xrightarrow[m\to+\infty]{uniformemente} D^\alpha f_0$$

su $\mathbb{R}^n$.
Inoltre

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+, \quad \exists m_\epsilon \in \mathbb{N} : (1+\|x\|)^p \ |D^\alpha f_m(x) - D^\alpha f_\mu(x)\ | < \epsilon$$

per $|\alpha\ | \leq p \quad m, \mu > m_\epsilon$. e $\forall x \in \mathbb{R}^n$ per $\mu \to \infty$

$$(1+\|x\|)^p \ |D^\alpha f_m(x) - D^\alpha f_0(x)\ | \leq \epsilon \tag{1.2}$$

per $m > m_\epsilon \quad |\alpha\ | \leq p \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.
Se una successione è di Cauchy rispetto a una norma, la successione delle norme è limitata, ossia

$$\exists C \in \mathbb{R}^+ \quad \text{tale che} \quad \|f_m\|_p = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{|\alpha|\leq p} (1+\|x\|)^p \,|D^\alpha f_m(x)\ | \leq C, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Ne segue:

$$\|f_0\|_p = (1+\|x\|)^p \ |D^\alpha f_0(x)| = (1+\|x\|)^p \ |(D^\alpha f_0(x) - D^\alpha f_m(x)) + D^\alpha f_m(x)| \leq$$

$$\leq (1+\|x\|)^p \ |D^\alpha f_0(x) - D^\alpha f_m(x)| + (1+\|x\|)^p |D^\alpha f_m(x)| \leq \epsilon + C$$

se $m > m_\epsilon, \quad |\alpha| \leq p, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.
Da qui per l'arbitrarietà di ϵ ho: $\|f_0\|_p \leq C$, da cui $f_0 \in \mathcal{S}_p(\mathbb{R}^n)$.
Da (1.2) segue che

$$\|f_m - f_0\|_p \leq \epsilon$$

ossia

$$f_m \xrightarrow[m\to\infty]{\|\ \|_p} f_0$$

da cui la tesi: $(\mathcal{S}_p(\mathbb{R}^n), \|\ \|_p)$ è completo. □

Osservazione 4. Le norme $\|\ \|_p$ sono concordanti.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che ogni successione di Cauchy che converge a zero rispetto $\|\ \|_p$, converge a zero anche rispetto $\|\ \|_{p+1}, \quad \forall p$.
Sia $p < q$ e sia $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ di Cauchy rispetto a $\|\ \|_q$, e convergente a zero rispetto a $\|\ \|_p$.

Dimostriamo che $\|f_m\|_q \to 0$.
Sappiamo che $(S_q(\mathbb{R}^n), \| \ \|_q)$ è completo:

$$\exists f_o \in \mathcal{S}_q(\mathbb{R}^n) : \|f_m - f_0\|_q \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0.$$

Ma per ipotesi, $\|f_m\|_p \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$.
Segue che $f_m(x) \to 0$ per $m \to +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.
Ma allora $f_0 = 0$.
Da cui:

$$\|f_m\|_q \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$$

Segue la tesi. □

Poiché $\mathcal{S}_p(\mathbb{R}^n)$ è completo rispetto a $\| \ \|_p$, $\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}^{\| \ \|_p}$ è un sottospazio di $\mathcal{S}_p(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{p=1}^{\infty} \mathcal{S}_p(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}^{\| \ \|_p} \quad \forall p$, si ha:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{p=1}^{\infty} \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}^{\| \ \|_p}$$

ossia $((\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \| \ \|_1, \| \ \|_2, ...)$ è uno spazio numerabilmente normato completo (per teorema 1.1.1) e lo denotiamo con $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Lo spazio delle funzioni a supporto compatto

Sia $a_j > o, \quad j = 1, 2, ..., n$ e $K = \prod_{j=1}^{n} [-a_j, a_j]$.
Indichiamo con $C_K^\infty(\mathbb{R}^n)$ lo spazio vettoriali delle funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ tali che

- f è di classe C^∞
- $supp(f) \subseteq K$.

Poniamo per $p \in \mathbb{N}$ e $f \in C_K^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\|f\|_p = \max_{x\in\mathbb{R}^n} \max_{|\alpha \ |\leq p} |D^\alpha f(x) \ |.$$

$\| \ \|_p$ è una norma e $\|f\|_p \leq \|f\|_{p+1} \quad \forall p \in \mathbb{N}$.
Allo stesso modo, si possono dimostrare le seguenti osservazioni:

Osservazione 5. Le norme $\| \ \|_p$ e $\| \ \|_{p+1}$ sono concordanti.

Osservazione 6. $C_K^p(\mathbb{R}^n), \| \ \|_p$ è completo

Pertanto $(C_K^\infty(\mathbb{R}^n), \| \ \|_1, \| \ \|_2, ...)$ è uno spazio numerabilmente normato completo e lo denotiamo con $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$.

1.2 Applicazioni lineari tra spazi numerabilmente normati

Definizione 1.4. Siano $(X, \| \ \|_1, \|\|_2, ...)$ e $(X', \| \ \|'_1, \|\|'_2, ...)$ due spazi numerabilmente normati (X e X' sullo stesso campo K).
Un'applicazione $T : X \to X'$ si dice **lineare** se

$$T(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1T(x_1) + a_2T(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X \quad \forall a_1, a_2 \in K.$$

Essa si dice **continua** nel punto x_0 se

$$\forall\, V'_{\epsilon,n}(0) = \{y \in X' : \|y\|'_n < \epsilon, \quad \epsilon \in R^+\},\ \exists\, V_{\delta,p}(0) = \{x \in X, \|x\|_p < \delta, \quad \delta \in R^+\}$$

tale che

$$x - x_0 \in V_{\delta,p}(0) \Longrightarrow T(x - x_0) \in V'_{\epsilon,n}(0).$$

Osservazione 7. Se T è continua in un punto di X, allora è continua in ogni altro punto.

Teorema 1.2.1. *Siano $(X, \| \ \|_1, \| \ \|_2, ...)$ e $(X', \| \ \|'_1, \| \ \|'_2, ...)$ due spazi numerabilmente normati (sullo stesso campo) e sia $T : X \to X'$ lineare.*
T è continua se e solo se

$$x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \quad in \quad (X, \| \ \|_1, \| \ \|_2, ...) \Longrightarrow T(x_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \quad in \quad (X', \| \ \|'_1, \| \ \|'_2, ...).$$

Dimostrazione. Necessità: Supponiamo che T sia continua.
Per definizione allora, fissato ad arbitro $V'_{\epsilon,p}(0)$ esiste $V_{\delta,q}(0)$ tale che

$$x \in V_{\delta,q}(0) \Longrightarrow T(x) \in V'_{\epsilon,p}(0).$$

Dunque se $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ in $(X, \| \ \|_1, \| \ \|_2, ..)$ allora esiste $k_{\epsilon p} \in \mathbb{N}$ tale che

$x_k \in V_{\delta,q}(0)$ per ogni $k > k_{\epsilon p}$; pertanto se $k > k_{\epsilon p}$ risulta $T(x_k) \in V'_{\epsilon,p}(0)$ perché T continua.
Dunque $T(x_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ in $(X', \| \|'_1, \| \|'_2)$.

Sufficienza: Supponiamo

$$x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \text{ in } (X, \| \|_1, \| \|_2, ..) \Rightarrow T(x_k) \xrightarrow[k\to n+\infty]{} 0 \text{ in } (X', \| \|'_1, \| \|'_2, ..).$$

Proviamo che T è continua.
Se ciò non fosse, esisterebbe un p tale che per nessun q, T è continua da $(X, \| \|_q)$ a $(X', \| \|'_p)$; esiste allora una successione $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X tale che $\|T(x_k)\|'_p > k\|x_k\|_k$ e quindi

$$\|T(\frac{x}{k\|x_k\|_k})\|'_p > 1; \tag{1.3}$$

fissato ad arbitrio m, per $k > m$ si ha

$$\|\frac{x_k}{k\|x_k\|_k}\|_m = \frac{\|x_k\|_m}{k\|x_k\|_k} \leq \frac{\|x_k\|_k}{k\|x_k\|_k} = \frac{1}{k}$$

e quindi, posto

$$y_k = \frac{x_k}{k\|x_k\|_k}$$

risulta

$$\|y_k\|_m \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

ossia

$$y_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \quad \text{in} \quad (X, \| \|_1, \| \|_2, ..);$$

per ipotesi si ha quindi

$$T(y_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \quad \text{in} \quad (X', \| \|'_1, \| \|'_2, ..)$$

e quindi, in particolare,

$$\|T(y_k)\|'_p \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

ma questo è assurdo per (1.3). □

1.2.1 Esempi di applicazioni lineari continue tra spazi numerabilmente normati

Moltiplicazione per una funzione

Sia Φ uno qualsiasi degli spazi $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ o $\mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n)$.

Definizione 1.5. Un funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ si dice **moltiplicatore** per Φ se:

- $f\phi \in \Phi \quad \forall \phi \in \Phi$;
- l'applicazione $\phi \to f\phi$ da Φ a Φ è continua, cioè

$$\phi_k \xrightarrow[k\to\infty]{\Phi} 0 \Longrightarrow f\phi_k \xrightarrow[k\to\infty]{\Phi} 0$$

Consideriamo ora $\Phi = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
Proviamo che se $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\forall\alpha$ esistono $C_\alpha \in \mathbb{R}^+$ e $p_\alpha \in N$ tali che

$$|D^\alpha f(x)| \leq C_\alpha (1 + \|x\|)^{p_\alpha},$$

allora f è moltiplicatore per $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
Se $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, risulta $f\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Inoltre per $|\alpha| \leq p$ si ha

$$(1 + \|x\|)^p |D^\alpha(f(x)\phi(x))| \leq {}^{5} \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} (1 + \|x\|)^p |D^{\alpha-\beta} f(x)||D^\beta \phi(x)| \leq$$

$$\leq \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} C_{\alpha-\beta} (1 + \|x\|)^{p+p_{\alpha-\beta}} |D^\beta \phi(x)| \leq \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} C_{\alpha-\beta} \|\phi\|_{p+q}$$

con $q = \max_{\beta\leq\alpha} p_{\alpha-\beta}$.
Dunque esiste una costante C'_p tale che

$$\|f\phi\|_p \leq C'_p \|\phi\|_{p+q}.$$

Ciò assicura che $f\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
Inoltre se

$$\phi_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} 0 \quad \text{allora} \quad f\phi_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} 0.$$

[5] Ricordiamo la formula di Leibnitz: $D^\alpha(fg) = \sum_{\beta\leq\alpha} D^{\alpha-\beta} f D^\beta g$.

Trasformata di Fourier

Sia $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
Si definisce **trasformata di Fourier** di f,

$$(\mathcal{F}(f))(x) = \tilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,y>} f(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

dove $< x, y >= \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$

Proviamo che se $f \in S(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \tilde{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
Osserviamo che

$$(1 + \|x\|)^p \leq 2^p \quad \text{se} \quad \|x\| \leq 1 \quad \text{e}$$

$$(1 + \|x\|)^p < (2\|x\|)^p \quad \text{se} \quad \|x\| > 1;$$

quindi in ogni caso risulta

$$(1 + \|x\|)^p < 2^p(1 + \|x\|^p);$$

inoltre

$$\|x\|^p = (\sum_{j=1}^{n} x_j^2)^{p/2} \leq (n \max_j x_j^2)^{p/2} = n^{p/2}(\max_j |x_j|)^p \leq n^{p/2} \sum_{j=1}^{n} |x_j|^p,$$

quindi

$$(1 + \|x\|)^p < 2^p(1 + n^{p/2} \sum_{j=1}^{n} |x_j|^p) < 2^p n^{p/2} \sum_{|\gamma| \leq p} |x^\gamma|.$$

Allora per $|\alpha| \leq p$ si ha

$$(1 + \|x\|)^p |D^\alpha \tilde{f}(x)| = (1 + \|x\|)^p |\int_{\mathbb{R}^n} i^{|\alpha|} y^\alpha e^{i<x,y>} f(y)\, dy| \leq$$

$$\leq C_p \sum_{|\gamma| \leq p} |\int_{\mathbb{R}^n} x^\gamma e^{i<x,y>} y^\alpha f(y)\, dy| =$$

$$= C_p \sum_{|\gamma| \leq p} |\int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,y>} D^\gamma (y^\alpha f(y))\, dy| \leq$$

$$\leq C_p \sum_{|\gamma| < p} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\gamma (y^\alpha f(y))|\, dy =$$

$$= C_p \sum_{|\gamma| \leq p} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + \|y\|)^{n+1}} (1 + \|y\|)^{n+1} |D^\gamma (y^\alpha f(y))|\, dy$$

D'altra parte

$$|D^\gamma(y^\alpha f(y))| \leq \sum_{\beta\leq\gamma} \binom{\gamma}{\beta} |D^{\gamma-\beta} y^\alpha||D^\beta f(y)|$$

e quindi esiste C'_p tale che

$$|D^\gamma(y^\alpha f(y))| \leq C'_p(1+\|y\|)^p \sum_{\beta\leq\gamma} |D^\beta f(y)|$$

e quindi

$$(1+\|x\|)^p |D^\alpha \tilde{f}(x)| \leq C''_p \|f\|_{n+1+p'}$$

con C''_p preso convenientemente.
Dunque $\tilde{f}(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, e $\mathcal{F}$ è un'applicazione lineare da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
Inoltre è iniettiva e suriettiva perché se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, posto

$$g(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,y>} f(y) dy \tag{1.4}$$

risulta $\mathcal{F}(g) = f$.
Da quanto osservato in precedenza segue anche che:

$$f_m \xrightarrow[m\to+\infty]{S(\mathbb{R}^n)} 0 \Longrightarrow \tilde{f}_m \xrightarrow[m\to+\infty]{S(\mathbb{R}^n)} 0$$

Dunque:

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow[1-1]{su} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

è lineare, continua e dotata di inversa continua, poichè

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(-x) = (2\pi)^n f(x).$$

Derivazione

L'operazione $\phi \to D^\alpha\phi$ è evidentemente lineare.
Consideriamo $\Phi = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, allora, $\forall\alpha \quad D^\alpha\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\|D^\alpha\phi\|_p \leq \|\phi_p\|_{p+|\alpha|}$.
Da qui segue che:

$$\phi_k \xrightarrow[k\to+\infty]{S(\mathbb{R}^n)} 0 \Longrightarrow D^\alpha\phi_k \xrightarrow[k\to+\infty]{S(\mathbb{R}^n)} 0$$

cioè l'operazione di derivazione è continua da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Capitolo 2

Le distribuzioni temperate

Prima di affrontare la definizione di distribuzione temperata, ci limitiamo a enunciare questo importante risultato su X', spazio vettoriale duale di X.
Per la dimostrazione del seguente teorema, si veda il Teorema 1-12 a pag. 36 di [1].

Teorema 2.0.2. *Sia* $(X, \| \ \|_1, \| \ \|_2, ..)$ *uno spazio numerabilmente normato. Sia* X'_p *il duale di* $(X, \| \ \|_p)$ *, cioè lo spazio vettoriale dei funzionali lineari continui su* $(X, \| \ \|_p)$*.*
Se $f \in X'_p$*, posto*

$$\|f\|'_p = \sup_{\|x\|_p \leq 1} |f(x)|.$$

$\| \ \|'_p$ *risulta una norma e* $(X'_p, \| \ \|'_p)$ *uno spazio di Banach.*
E'

$$X'_p \subseteq X'_{p+1} \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

e, se X' *è il duale di* $(X, \| \ \|_1, \| \ \|_2, ...)$*, risulta*

$$X' = \bigcup_{p=1}^{+\infty} X'_p.$$

2.1 Definizione degli spazi di distribuzioni

Indichiamo con Φ uno qualunque degli spazi $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n)$.

Definizione 2.1. Sia Φ' l'insieme dei funzionali lineari continui su Φ. Se $T \in \Phi'$ si dice che T è una **distribuzione**; in particolare se $\Phi = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si dice che T è una **distribuzione temperata**.
Il valore di T in $\phi \in \Phi$ si denota con $< T|\phi >$ o anche con $< T_x, \phi(x) >$.

Osservazione 8. Per il teorema 1.2.1, se $T \in \Phi^*$ (insieme dei funzionali lineari su Φ, $\Phi' \subseteq \Phi^*$), T è una distribuzione se e solo se

$$\phi_k \xrightarrow[k\to\infty]{\Phi} 0 \quad \Longrightarrow \quad < T, \phi_k > \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

Invece per il teorema 2.0.2 $\Phi^* = \cup_{p=1}^{\infty} \Phi_p^*$, così se $T \in \Phi^*$ $\exists p \in \mathbb{N}$ tale che $T \in \Phi_p^*$, allora T è continua se e solo se T è limitata; tutto questo ci assicura che se T è una distribuzione se e solo se esistono $C \in \mathbb{R}^+$ e $p \in \mathbb{N}$ tali che

$$\forall \phi \in \Phi \qquad | < T|\phi > | \leq C\|\phi\|_p$$

così

$$T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow \exists C > 0 \quad \text{e} \quad p \in \mathbb{N} \quad \text{tali che} \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

$$| < T|\phi > | \leq C \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{|\alpha|\leq p} (1 + \|x\|)^p \; |D^\alpha \phi(x)|$$

Osservazione 9. Se $T_1, T_2 \in \Phi'$, $T_1 = T_2$ significa

$$< T_1|\phi >=< T_2|\phi > \qquad \forall \phi \in \Phi.$$

Se $T_1, T_2 \in \Phi'$ e $c_1, c_2 \in C$, $c_1T_1 + c_2T_2$ è la distribuzione definita ponendo:

$$< c_1T_1 + c_2T_2|\phi >= c_1 < T_1|\phi > +c_2 < T_2|\phi > \qquad \forall \phi \in \Phi$$

$T_1 + T_2$ si chiama **somma** di T_1 e T_2 e c_1T_1 si chiama **prodotto** di c_1 per T_1.

In tal modo, Φ' è uno spazio vettoriale.

Definizione 2.2. $K_p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < +\infty$ è definito come lo spazio delle funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ L-misurabili e tale che per ciascuna di esse esiste un $M \geq 0$ per cui

$$x \to \frac{|f(x)|^p}{(1 + \|x\|^2)^M}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

è sommabile.

$K_\infty(\mathbb{R}^n)$ è lo spazio delle funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ L-misurabili e tali che per ciascuna di esse esiste un $M \geq 0$ per cui

$$\operatorname{ess\,sup}{}^1{}_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{(1+\|x\|^2)^M} < +\infty$$

Osservazione 10. $f \in K_p(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f \in \mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R}^n)$. [2].

Dimostrazione. Sia A un compatto di $\mathbb{R}^n$; allora se $1 \leq p < +\infty$, otteniamo

$$\int_A |f(x)|\,dx = \int_A \frac{|f(x)|}{(1+\|x\|^2)^{\frac{M}{p}}}(1+\|x\|^2)^{\frac{M}{p}}\,dx \leq$$

per la disuguglianza di Holder [3]

$$\leq (\int \frac{|f(x)|}{(1+\|x\|^2)^M}\,dx) \begin{cases} (\int_A (1+\|x\|^2)^{\frac{M}{p-1}}\,dx)^{\frac{p-1}{p}} & p>1 \\ \sup_{x\in A}(1+\|x\|^2)^M & p=1 \end{cases}$$

Invece se $p = +\infty$, allora

$$\int_A |f(x)|\,dx \leq \operatorname{ess\,sup} \frac{|f(x)|}{(1+\|x\|^2)^M} \int_A (1+\|x\|^2)^M\,dx$$

$\square$

Un risultato utile è il seguente:

Teorema 2.1.1. *Se f in $K_1(\mathbb{R}^n)$ e $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx = 0 \quad \forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, allora $f(x) = 0$ q.d.*

Più in generale vale: Sia $f \in \mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx = 0 \quad \forall g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Allora $f(x) = 0$ q.d.

[1]Sia (X, M, μ) spazio misurabile e $f : X \to \mathbb{R}$ misurabile. Definiamo l'estremo superiore essenziale di f nel modo seguente: $\operatorname{ess\,sup}(f) = \inf_R\{a : \mu(\{x \in X : f(x) > a\}) = 0$ con la convenzione $\inf \emptyset = +\infty$.

[2]Insieme delle $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ misurabili e integrabili su ogni sottoinsieme compatto del loro dominio di definizione. $\mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ misurabili, tali che $f|_A \in \mathcal{L}(A) \quad \forall A \subset \Omega$ compatto$\}$

[3]La disuguaglianza di Holder per gli integrali afferma che: se $p, q > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ allora $\int fg\,dx \leq (\int f^p\,dx)^{\frac{1}{p}}(\int g^q\,dx)^{\frac{1}{q}}$

Dimostrazione. Notiamo per prima cosa che $fg \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, poiché

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{(1+\|x\|^2)^M}(1+\|x\|^2)^M g(x)$$

e

$$x \to \frac{f(x)}{(1+\|x\|^2)^M} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

è sommabile, e

$$x \to (1+\|x\|^2)^M g(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

è continua e limitata, e quindi sommabile. Fissiamo un intervallo compatto:

$$I = \prod_{j=1}^{n} [\, a_j, b_j] \qquad a_j, b_j \in \mathbb{R}, a_j < b_j \quad \text{per} \quad j = 1, ..., n$$

Sia $m \in \mathbb{N}$ e sia

$$g_m(x) = \begin{cases} \prod_{j=1}^{n} e^{-\frac{1}{m}\left(\frac{1}{x_j - a_j} + \frac{1}{b_j - x_j}\right)} & x \in I \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n - I \end{cases}$$

Si osserva che $g_m(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, quindi $g_m(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
Fissiamo $\epsilon > 0$ e scegliamo $\eta > 0$ tale che $2\eta < b_j - a_j$. per $j = 0, 1, ..., n$.
Sia $I_\eta = \prod_{j=1}^{n} [\, a_j + \eta, b_j - \eta]$.
Poiché

$$\mu(I - I_\eta) \xrightarrow[\eta \to 0^+]{} 0$$

si può scegliere η tale che

$$\int_{I - I_\eta} |f(x)|\, dx < \frac{\epsilon}{2} \tag{2.1}$$

Ora $g_m \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, allora per ipotesi abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) g_m(x)\, dx = \int_I f(x) g_m(x)\, dx = 0$$

ossia

$$\int_I f(x)\, dx = \int_I f(x)\, dx - \int_I f(x) g_m(x)\, dx =$$

$$\int_I f(x)(1 - g_m(x))\, dx$$

Poiché $0 \leq g_m < 1$

$$|\int_I f(x)\, dx| \leq \int_{I - I_\eta} |f(x)|\, dx + \int_{I_\eta} |f(x)|(1 - g_m(x))\, dx <$$

$$< \int_{I_\eta} |f(x)|(1 - g_m(x))\, dx + \frac{\epsilon}{2} \quad \text{per (2.1)}$$

Fissato η, poiché

$$g_m \xrightarrow[m\to\infty]{uniformemente} 1 \quad \text{su} \quad I_\eta$$

si può scegliere m tale che

$$\int_{I_\eta} |f(x)|(1 - g_m(x))\, dx \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Quindi

$$|\int_I f(x)\, dx| < \epsilon$$

Per l'arbitrarietà di ϵ otteniamo

$$|\int_I f(x)\, dx| = 0$$

Ne segue che $\int_A f(x)\, dx = 0$ per ogni A aperto di $\mathbb{R}^n$ e quindi per ogni sottoinsieme L-misurabile di $\mathbb{R}^n$. Pertanto

$$f(x) = 0 \quad \text{q.o.}$$

□

2.1.1 Esempi di distribuzioni temperate

Distribuzioni di tipo funzione

Se $f \in K_p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq +\infty$ allora

$$g \to \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\, dx$$

con $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, è una distribuzione temperata.

Proviamolo:

Sia $p = +\infty$ e $\operatorname{ess\,sup} \frac{|f(x)|}{(1 + \|x\|^2)^M} < +\infty$, allora se $2M + n + 1 \leq q \in \mathbb{N}$,

$$|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\, dx| \leq \operatorname{ess\,sup} \frac{|f(x)|}{(1 + \|x\|^2)^M} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + \|x\|)^{n+1}})\|g\|_q.$$

Sia $p = 1$, allora se $2M \leq q \in \mathbb{N}$,

$$|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\, dx| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{(1 + \|x\|^2)^M}\, dx\|g\|_q$$

Sia $1 < p < +\infty$, allora, se $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ e $\frac{2M}{p} + \frac{n+1}{p} \leq q \in \mathbb{N}$,

$$|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx| \leq (\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^p}{(1+\|x\|^2)^M}\,dx)^{\frac{1}{p}} (\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+\|x\|)^{n+1}})^{\frac{1}{p'}} \|g\|_q.$$

Dunque, in ogni caso $g \to \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx$ è un funzionale lineare su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Inoltre notiamo che tale funzionale è continuo, infatti da quanto sopra abbiamo che

$$g_m \xrightarrow[m\to\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} 0 \quad \text{allora} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

Abbiamo quindi dimostrato che esso è una distribuzione temperata T.
Osserviamo che se $g \sim f$ (ossia $g(x) = f(x)$ q.d), allora

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\phi(x)\,dx \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

perchè i due integrali differiscono di un insieme di misura nulla.
Allora preso f come rappresentante della classe di equivalenza si pone

$$< [\ f]\ |\phi >= T_f(\phi) =< T_f|\phi >= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\,dx.$$

T_f è detta **distribuzione temperata regolare, o di tipo funzione**.

Distribuzione di Dirac

Sia δ definita ponendo

$$< \delta|\phi >= \phi(0) \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{2.2}$$

δ è un funzionale lineare su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
Si osserva che

$$\phi_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} 0 \Longrightarrow \phi_k(0) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0;$$

perciò δ risulta continua e $\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
Questa distribuzione prende il nome di **distribuzione di Dirac**.
Osserviamo che non esiste una funzione $f \in \mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$< \delta|\phi >= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\,dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Infatti se così fosse, per la definizione (2.2) si avrebbe

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\,dx = 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

con $supp\phi \subset \mathbb{R}^n - \{0\}$ e quindi per il teorema 2.1.1 sarebbe $f(x) = 0$ q.d. e quindi $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\,dx = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ contrariamente a (2.2).

2.2 Operazioni con distribuzioni temperate

2.2.1 Prodotto di una distribuzione per una funzione

Se $T \in \Phi'$ e f è un moltiplicatore per Φ allora fT definita ponendo:

$$< fT|\phi >=< T|f\phi > \quad \forall \phi \in \Phi$$

appartiene a Φ', poiché

$$f\phi \in \Phi \quad \text{e}$$

$$\phi_k \xrightarrow[k\to\infty]{\Phi} 0 \Longrightarrow f\phi_k \xrightarrow[k\to\infty]{\Phi} 0.$$

fT si chiama **prodotto di una distribuzione T per una funzione f.**

Notazione 1. Indichiamo con $\mathcal{O}_m(\mathbb{R}^n)$ lo spazio vettoriale delle funzioni $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tali che $\forall a$ esistono due costanti $C_{\alpha f}$ e $p_{\alpha f}$ (dipendenti da a e f) tali che

$$|D^\alpha f(x)| \leq C_{\alpha f}(1 + \|x\|)^{p_{\alpha f}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Ogni elemento di $\mathcal{O}_m(\mathbb{R}^n)$ è un moltiplicatore per $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e quindi per $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

2.2.2 α-derivata di una distribuzione

Sia $T \in \Phi'$ e sia α un multi-indice. Chiamiamo **α-derivata di** T, e la denotiamo con $\partial^\alpha T$, l'elemento di Φ' definito ponendo:

$$< \partial^\alpha T|\phi >= (-1)^{|\alpha|} < T|D^\alpha \phi > \quad \forall \phi \in \Phi$$

La definizione è ben posta poiché D^α è un'operazione lineare da Φ a Φ.
La continuità di $\partial^\alpha T$ è dimostrata dal fatto che

$$\phi_k \xrightarrow[k\to\infty]{\Phi} 0 \Longrightarrow D^\alpha\phi_k \xrightarrow[k\infty]{\Phi} 0$$

Riportiamo le seguenti proprietà dell'operazione della α-derivata di una distribuzione: [4]

Teorema 2.2.1. • *Se α, β sono due multi-indici e $T \in \Phi'$, si ha:*

$$\partial^\alpha(\partial^\beta T) = \partial^{\alpha+\beta} T = \partial^\beta(\partial^\alpha T)$$

[4] Le dimostrazioni di queste proprietà si trovano nel primo capitolo di [1] a pag. 44.

- *Se T_1 e $T_2 \in \Phi'$, si ha:*

$$\partial^\alpha (T_1 + T_2) = \partial^\alpha T_1 + \partial^\alpha T_2$$

- *Se $T \in \Phi'$ e $D^\gamma f$ è moltiplicatore per $\Phi \quad \forall \gamma, 0 \leq \gamma \leq \alpha$ si ha*

$$\partial^\alpha (fT) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} f \partial^\beta T$$

Osservazione 11. Se f è dotata di $D^\alpha f$ e queste hanno una certa regolarità, allora

$$\partial^\alpha f = D^\alpha f.$$

In particolare questo è vero se $f \in \Phi$.

Esempio 2.1 (La funzione di Heaviside). Sia H la funzione di Heaviside da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ tale che:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Poiché per $M = 0$, $\operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|H(x)|}{(1 + \|x\|^2)^M} < +\infty$, $H \in K_\infty(\mathbb{R})$ e quindi H è una distribuzione temperata.
Si ha:

$$< \partial H | g >= - < H | g' >= - \int_{\mathbb{R}} H(x) g'(x) \, dx = - \int_0^\infty g'(x) \, dx = g(0)$$

Perciò

$$\partial H = \delta$$

Notiamo che ∂H non è la derivata ordinaria di H, infatti H è discontinua in 0 e $DH(x) = 0$ se $x \neq 0$ e non esiste in $x = 0$ perchè $D^+ H(0) = +\infty$ e $D^- H(0) = 0$.

Un altro risultato importante è il seguente:

Teorema 2.2.2. *Sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $T' = 0$. Allora $T = cost$.*

Dimostrazione. Per ipotesi si ha che

$$0 =< T' | g >= - < T | g' > \quad g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Proviamo che poiché $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$$\exists g_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \text{tale che} \quad g_1' = g \Longleftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt = 0.$$

Infatti vediamo che se $g_1' = g$ allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g'(t)\,dt = [\ g_1(t)]_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

Viceversa, sia $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt = 0.$
Allora poniamo

$$g_1(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\,dt = -\int_{x}^{+\infty} g(t)\,dt$$

così

$$g_1' = g.$$

Si tratta di provare che $g_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Se $p \geq 1$ allora $\forall k \geq 0$

$$|x|^k |D^p g_1(x)| = |x|^k |D^{p-1} g(x)| \xrightarrow[x\to\infty]{} 0.$$

Se $p = 0$, con $x > 0$, si ha

$$x^k |g_1(x)| = x^k |\int_{x}^{+\infty} g(t)\,dt| \leq x^k \int_{x}^{+\infty} \frac{C_k}{(1+t^2)^{k+1}}\,dt$$

per una certa C_k costante positiva, questo perché $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Ma per $t > x$ vale

$$\frac{1}{(1+t^2)^k} \leq \frac{1}{(1+x^2)^k}$$

quindi

$$x^k |g_1(x)| \leq C_k \frac{x^k}{(1+x^2)^k} \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)}\,dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Il caso di $x < 0$ è analogo.

Con tali premesse, se $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, fissiamo $g_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_0(t)\,dt = 1.$$

Si ha

$$g(x) = [g(x) - g_0(x) \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt] + g_0(x) \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt;$$

poiché
$$\int_{-\infty}^{+\infty} [g(x) - g_0(x) \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, dt]\, dx = 0$$
esiste $g_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tale che
$$g_1' = g - (\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, dt) g_0;$$
allora
$$< T|g >=< T|g_1' > + < T|(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, dt) g_0 >=$$
$$< T|(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, dt) g_0 >= \int_{-\infty}^{+\infty} < T|g_0 > g(t)\, dt =<< T|g_0 > |g >$$
e quindi
$$T =< T|g_0 >= cost.$$

□

2.2.3 Traslazione e cambiamento di scala di una distribuzione

Sia $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \neq 0$ e $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbb{R}^n$.

Sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Definiamo la **distribuzione traslata** come la distribuzione $T(x - \beta)$ tale che
$$< T(x - \beta)|g >=< T|g(x + \beta) > \quad \forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Data la distribuzione $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la distribuzione $T(\alpha x)$ è definita come
$$< T(\alpha x)|g >= \frac{1}{|\alpha_1 ... \alpha_n|} < T|g(\frac{x}{\alpha}) > \quad \forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$
dove $\frac{x}{\alpha} = (\frac{x_1}{\alpha_1}, ..., \frac{x_n}{\alpha_n})$.

2.2.4 Trasformata di Fourier di una distribuzione

Sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Definiamo $\mathcal{F}(T)$ ponendo
$$< \mathcal{F}(T)|\phi >=< T|\tilde{\phi} > \quad \forall \tilde{\phi} \in \mathcal{S}$$
con
$$\tilde{\phi}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,y>} \phi(y)\, dy.$$

La definizione è corretta, infatti la trasformazione di Fourier è un'applicazione

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{1-1} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

lineare continua: pertanto se

$$\phi_k \xrightarrow[k\to]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} 0 \Longrightarrow \tilde{\phi}_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} 0.$$

Dunque se $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ allora anche $\mathcal{F}(T) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
Riportiamo le seguenti proprietà della trasformata di Fourier di una distribuzione:

Teorema 2.2.3.
- *Se T_1 e $T_2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, allora:*

$$\mathcal{F}(T_1 + T_2) = \mathcal{F}(T_1) + \mathcal{F}(T_2).$$

- *Se $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ allora*

$$\partial^\alpha \mathcal{F}(T) = \mathcal{F}((ix)^\alpha T_x)$$

- *Se $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ allora*

$$(\mathcal{F}(\partial^\alpha T))_x = (-ix)^\alpha (\mathcal{F}(T))_x$$

Esempio 2.2 (La trasformata di Fourier della distribuzione di Dirac).

$$\tilde{\delta}(\phi) = \delta\tilde{\phi} = \tilde{\phi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix0}\phi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\,dx = 1(\phi).$$

La trasformata di Fourier della distribuzione di Dirac è la distribuzione 1, ossia

$$\tilde{\delta} = 1.$$

Osservazione 12. Se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ considerando f e $\tilde{f}$ come distribuzioni temperat [5], si ha

$$\mathcal{F}(f) = \tilde{f}.$$

Dimostrazione. Risulta $\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$< \mathcal{F}(f)|\phi > = < f|\tilde{\phi} > = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\tilde{\phi(x)}\,dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,y>}\phi(y)\,dy)\,dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)(\int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,y>} f(x)\,dx)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(y)\phi(y)\,dy = < \tilde{f}|\phi > .$$

□

[5]Possiamo considerarle tali poiché $\tilde{f}$ è continua e limitata.

2.2.5 Successioni e serie di distribuzioni

Sia Φ uno dei qualunque degli spazi $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.
Se $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione di distribuzioni appartenenti a Φ', si dice che essa è **di Cauchy** se e solo se $\forall\phi \in \Phi$ risulta

$$\lim_{p,q\to\infty} < T_p - T_q|\phi >= 0;$$

$(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è **convergente** se e solo se esiste $T \in \Phi'$ tale che

$$\lim_{k\to\infty} < T_k - T|\phi >= 0 \quad \forall\phi \in \Phi.$$

Scriveremo $T_k \xrightarrow[k\to\infty]{\Phi'} T$.

Esempio 2.3. Se $T_k \xrightarrow[k\to\infty]{\Phi'} T$ e f è un moltiplicatore per Φ allora

$$fT_k \xrightarrow[k\to\infty]{\Phi'} fT.$$

Infatti

$$< fT_k - fT|\phi > \, = \, < T_k - T|f\phi > \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \quad \forall\phi \in \Phi.$$

Esempio 2.4. Sia $T_k \xrightarrow[k\to\infty]{\Phi'} T$. Allora

$$\partial^\alpha T_k \xrightarrow[k\to\infty]{\Phi'} \partial^\alpha T \quad \forall\alpha.$$

Infatti $\forall\phi \in \Phi$ risulta

$$< \partial^\alpha T_k - \partial^\alpha T|\phi >=$$

$$< \partial^\alpha(T_k - T)|\phi >= (-1)^{|\alpha|} < T_k - T|D^\alpha\phi > \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

Definizione 2.3. Sia Φ uno dei qualunque degli spazi $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.
Se $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione di distribuzioni appartenenti a Φ'.
La successione $(\sum_{j=1}^{k} T_j)_{k\in\mathbb{N}}$ si chiama **serie** di termini $T_1, T_2, ...$ e si denota col simbolo $\sum_{k=1}^{\infty} T_k$.
Se essa converge, la distribuzione limite si chiama **somma della serie**.
La serie è convergente se e solo se $\sum_{k=1}^{\infty} < T_k|\phi >$ è convergente $\forall\phi \in \Phi$.

2.2.6 Prodotto tensoriale e convoluzione di distribuzioni temperate

Prima di definire l'operazione di prodotto tensoriale tra due distribuzioni temperate, riportiamo un risultato importante sulla struttura dello spazio di distribuzioni $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.2.4. *Se $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ allora esiste $f \in C(\mathbb{R}^n)$ tale che $|f(x)| \leq C(1+\|x\|)^r$ per certe costanti $C > 0$ e $r \geq 0$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, e un multi-indice α per cui*

$$T = \partial^\alpha f.$$

Questo teorema assicura che, sia $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e fissato ad arbitrio un multi-indice β, esiste $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\partial^\beta T = S.$$

Infatti $S = \partial^\alpha f$ e si può supporre $\alpha \geq \beta$; allora basta considerare:

$$T = \partial^{\alpha-\beta} f.$$

A questo punto definiamo il prodotto tensoriale (o prodotto diretto) tra due distribuzioni temperate:

Definizione 2.4. Sia $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^p)$.
Indichiamo con x un punto di R^n e con y un punto di $\mathbb{R}^p$.
Si definisce **prodotto tensoriale, o diretto** di S per T la distribuzione temperata

$$S \otimes T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+p})$$

definita ponendo

$$< S_x \otimes T_y|\phi(x,y) >=< S_x| < T_y|\phi(x,y) >> \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+p})^6$$

$S_x \otimes T_y$ è evidentemente un funzionale lineare su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+p})$.
Inoltre se

$$\phi_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+p})} 0 \Longrightarrow < T_y|\phi_k(x,y,) > \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+p})} 0$$

[6] Osserviamo che $y \to \phi(x,y) \in \mathcal{S}_y(\mathbb{R}^p)$ e $x \to < T_y, \phi(x,y) > \in \mathcal{S}_x(\mathbb{R}^n)$. Poiché la funzione $< T_y, \phi(x,y) > \in \mathcal{S}_x(\mathbb{R}^n)$ ha senso studiare la distribuzione
$< S_x| < T_y|\phi(x,y) >>$.

e quindi

$$< S_x| < T_y|\phi_k(x, y,) >> \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Dunque $S_x \otimes T_y \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+p})$.

Osservazione 13. Se $S = \partial^\alpha f$ allora

$$< S_x| < T_y|\phi(x, y,) >>=$$

$$(-1)^{|\alpha|+|\beta|} \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p} f(x)g(y)D_x^\alpha D_y^\beta \phi(x, y)\, dx\, dy =$$

$$< \partial^{(\alpha,\beta)}(f(x)g(x)|\phi(x, y) >$$

e quindi

$$S_x \otimes T_y = \partial^{(\alpha,\beta)}(f(x)g(y)).$$

Senza particolari difficoltà si prova che: [7]

Teorema 2.2.5. *Se* $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $T, T_1, T_2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^p)$, $U \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^q)$

- $S_x \otimes T_y = T_y \otimes S_x$
- $S \otimes (T_1 + T_2) = S \otimes T_1 + S \otimes T_2$
- $(S \otimes T) \otimes U = S \otimes (T \otimes U)$
- $\partial^{(\alpha,\beta)}(S \otimes T) = (\partial^\alpha S) \otimes (\partial^\beta T)$
- *Se* $\mathcal{F}_{(x,y)}, \mathcal{F}_x, \mathcal{F}_y$ *indicano le trasformate di Fourier in* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+p}), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^p)$ *allora*
$$\mathcal{F}_{(x,y)}(S \otimes T) = \mathcal{F}_x(S) \otimes \mathcal{F}_y(T)$$
- $S_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)} S \Longrightarrow S_k \otimes T \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+p})} S \otimes T.$
- $supp(S \otimes T) = (suppS) \times (suppT)$.

Per le dimostrazioni si veda il capitolo 1 di [1].

[7]Le dimostrazioni di queste proprietà si trovano nel primo capitolo di [1] a pag. 116.

2.2.7 Convoluzione di distribuzioni temperate

Ricordiamo la seguente definizione:

Definizione 2.5. Sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Sia Ω_1 un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$. Dire che T è nulla su Ω_1 significa che

$$< T|\phi >= 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), supp\phi \subset \Omega_1.$$

Sia Ω l'unione di tutti gli aperti limitati di $\mathbb{R}^n$ sui quali T è nulla.
Allora $\mathbb{R}^n - \Omega$ si chiama supporto di T.

Notazione 2. Denotiamo con $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, l'insieme delle distribuzioni temperate con supporto compatto. $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Definizione 2.6. Siano $S, T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
Se $\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ esiste

$$< S_x \otimes T_y|\phi(x + y) >;$$

possiamo definire **convoluzione** di S e T la distribuzione temperata

$$< U|\phi >:=< S_x \otimes T_y|\phi(x + y) > .$$

Si denota con la scrittura $S * T$.

Teorema 2.2.6. *Se $S, T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e almeno una delle due appartiene a $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, allora esiste la convoluzione $S * T$.*

Dimostrazione. Per prima cosa notiamo che se esiste

$$< S_x \otimes T_y|\phi(x + y) >$$

deve esistere

$$< S_x| < T_y|\phi(x + y) >>, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Sia $S = \partial^\alpha f, T = \partial^\beta g$ con $f, g \in C(\mathbb{R}^n)$ tali che:

$$|f(x)| \le C_1(1 + \|x\|)^p$$

e

$$|g(x)| \le C_2(1 + \|x\|)^q \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ fissato, la funzione $y \to \phi(x+y)$ appartiene a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e

$$< T_y|\phi(x+y) >= (-1)^{|\beta|} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) D_y^\beta \phi(x+y)\, dy =$$

$$= (-1)^\beta \int_{\mathbb{R}^n} g(y)(D^\beta \phi)(x+y)\, dy$$

La funzione $x \to < T_y|\phi(x+y) >$ appartiene a $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ma in generale non a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$;

per esempio se $\beta = 0$ e $g(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ risulta

$$< T_y|\phi(x+y) >=< 1_y|\phi(x+y) >=$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x+y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(t)\, dt = cost$$

e una costante appartiene a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ solo se è zero.

Se $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\omega(x) = 1$ in un intorno di supp$S$, allora $S = \omega S$ e quindi

$$< S_x| < T_y|\phi(x+y) >>=< S_x|\omega(x) < T_y|\phi(x+y) >>;$$

questa è ben definita perché $x \to \omega(x) < T_y|\phi(x+y) >$ appartiene a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ perché appartiene a $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Se $T \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ allora $x \to< T_y|\phi(x+y) >$ appartiene a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Infatti se $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\omega(x) = 1$ in un intorno di supp$T$, allora

$$T = \omega T = \omega \partial^\alpha f$$

e quindi

$$< T_y|\phi(x+y) >= (-1)^{|\alpha|} < f(y)|D_y^\alpha(\omega(y)\phi(x+y)) >=$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \int_K f(y) D_y^\alpha(\omega(y)\phi(x+y))\, dy$$

se supp $\omega \subseteq K$.

D'altra parte poiché $(x, y) \to \omega(y)\phi(x+y)$ appartiene a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ esiste una costante $C_{p,\gamma}$ tale che

$$(1 + \|(x, y)\|)^p |D_x^\gamma D_y^\alpha(\omega(y)\phi(x+y))| \le C_{p,\gamma} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n;$$

se $|f(y)| \le M \quad \forall y \in K$ si ha allora

$$(1 + \|x\|)^p |D_x^\gamma < T_y|\phi(x+y) > | \le \int_K M \frac{(1 + \|x\|)^p}{(1 + \|(x, y)\|)^p} C_{p,\gamma}\, dy \le C'_{p,\gamma}$$

Ciò prova che $x \to < T_y|\phi(x+y) >$ appartiene a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
Inoltre se

$$\phi_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} 0$$

allora

$$< T_y|\phi_k(\cdot + y) > \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} 0$$

e quindi

$$< S * T|\phi_k > \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

$\square$

Riportiamo le seguenti proprietà dell'operazione di convoluzione tra due distribuzioni temperate.

Teorema 2.2.7. *Se* $S, S_1, S_2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $T, T_1, T_2, U \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, *risulta*

- $S * T = T * S$
- $S * (T_1 + T_2) = S * T_1 + S * T_2$
- $(S * T) * U = S * (T * U)$
- $\partial^\alpha(S * T) = (\partial^\alpha S) * T = S * (\partial^\alpha T) \quad \forall\alpha$
- $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n), T_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)} T \Longrightarrow S * T_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)} S * T.$
- $\mathcal{F}(S * T) = \mathcal{F}(S)\mathcal{F}(T)$
- $supp(S * T) \subseteq suppS + suppT$

Osservazione 14. Siano S e T due distribuzioni temperate di tipo funzione ($S = S_f, T = T_g$); allora vale:

$$< S * T|\phi > = < S_y| < T_x|\phi(x+y) >> \qquad \forall\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

cioè

$$< S * T|\phi > = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\phi(x+y)\,dx)\,dy =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)(\int_{\mathbb{R}^n} g(z-y)\phi(z)\,dz)\,dy =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\phi(x)\,dx\,dy.$$

Osservazione 15. $T * \delta = T$.

Dimostrazione. Osserviamo che:

$$< T * \delta | \phi > = < T_x | < \delta_y | \phi(x + y) >> = < T_x | \phi(x) >$$

così

$$< T * \delta | \phi > = < T_x | \phi > \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

$\square$

Capitolo 3

Applicazioni di distribuzioni temperate

3.1 Soluzioni fondamentali di operatori differenziali a coefficienti costanti

I primi capitoli di introduzione ci forniscono tutti gli strumenti necessari per cominciare ad analizzare le soluzioni fondamentali di operatori differenziali a coefficienti costanti.

Definizione 3.1. Sia

$$P(\partial) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha$$

un operatore differenziale lineare con coefficienti costanti. Si chiama **soluzione elementare o fondamentale** di $P(\partial)$ una $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$P(\partial)E = \delta.$$

Osservazione 16. Qualunque sia $P(\partial)$ esiste una soluzione elementare appartenente a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
Se E è una soluzione elementare e $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ è una soluzione di $P(\partial)T = 0$, allora anche $E + T$ è una soluzione elementare.
Pertanto la soluzione elementare non è unica.
Inoltre se E è soluzione elementare di $P(\partial)$ e $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, allora $E * S$ è

soluzione di

$$P(\partial)T = S.$$

Infatti la convoluzione $E * S$ esiste e

$$P(\partial)(E * S) = (P(\partial)E) * S = \delta * S = S.$$

Dalla natura di una soluzione elementare si possono dedurre proprietà delle soluzioni dell'equazione $P(\partial)T = 0$ e dell'equazione $P(\partial)T = S$, come ad esempio la seguente proposizione la cui dimostrazione si può trovare in [1], Teorema 3-10 a pag.304.

Proposizione 3.1.1. *Sia $P(\partial)$ un operatore differenziale lineare con coefficienti costanti. Supponiamo che esista una soluzione elementare $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ relativa a tale operatore e tale che $E \in C^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\})$. Allora $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $P(\partial)T = 0$ in un aperto Ω (cioè $< P(\partial)T|\phi >= 0 \quad \forall\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ con supp$(\phi) \subset \Omega$) implica che T su Ω è una funzione appartenente a $C^\infty(\Omega)$.*

3.1.1 L'operatore delle onde

Sia

$$P(\partial) = \partial_1\partial_2...\partial_n.$$

Allora una soluzione elementare è

$$E(x) = H(x_1)..H(x_n).$$

Infatti questa è una funzione appartente a $K_\infty(\mathbb{R}^n)$ (cioè $\operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{|H(x_1)...H(x_n)|}{(1 + \|x\|^2)^M} < +\infty$), e quindi a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
Inoltre $\forall\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ risulta:

$$< \partial_1...\partial_n E|\phi >= (-1)^n < H(x_1)...H(x_n)|D_1...D_n\phi(x) >=$$
$$(-1)^n \int_0^{+\infty} ... \int_0^{+\infty} D_1...D_n\phi(x)\, dx_1 ...\, dx_n =$$
$$= (-1)^{n-1} \int_0^{+\infty} ... \int_0^{+\infty} D_1...D_{n-1}\phi(x_1, ..., x_{n-1}, 0)\, dx_1 ...\, dx_{n-1} =$$
$$= \phi(0) =< \delta|\phi >$$

e quindi

$$\partial_1...\partial_n E = \delta$$

Consideriamo ora **l'operatore delle onde**

$$\partial_x^2 - \partial_t^2 \qquad x, t \in \mathbb{R}$$

Effettuando il cambio di variabili $\xi = x + t$ e $\tau = x - t$, otteniamo:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \tau}$$

Otteniamo:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \tau}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \tau}$$

per cui l'operatore diventa:

$$\partial_x^2 - \partial_t^2 = 4\partial_\xi \partial_\tau$$

Una soluzione elementare E, cioè tale che $P(\partial)E = \delta$, pertanto è:

$$E(\xi, \tau) = \frac{1}{2}H(\xi)H(\tau)$$

ossia

$$E(x, t) = \frac{1}{2}H(x+t)H(x-t) = \frac{1}{2}H(x - |t|).$$

Infatti $\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ risulta

$$< (\partial_x^2 - \partial_t^2)E(x,t)|\phi(x,t) > = < E(x,t)|(D_x^2 - D_t^2)\phi(x,t) > =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} E(x,t)(D_x^2 - D_t^2)\phi(x,t)\,dx\,dt = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} H(x-|t|)(D_x^2 - D_t^2)\phi(x,t)\,dx\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (D_x^2 - D_t^2)\phi(x,t)\,dx\,dt =$$

poiché $H(x - |t|)$ è non nullo solo se $x - |t| > 0$, cioè $x > |t|$.

Effettuiamo un cambio di variabili ponendo: $x = \frac{1}{2}(\xi + \tau)$ e $t = \frac{1}{2}(\xi - \tau)$.

Allora la jacobiana di tale cambiamento è:

$$|J| = |\frac{\partial(x,t)}{\partial(\xi,\tau)}| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = |-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$$

e indichiamo

$$\phi(x,t) = \phi(\frac{1}{2}(\xi+\tau), \frac{1}{2}(\xi-\tau)) = \psi(\xi,\tau)$$

Otteniamo quindi:

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} 4D_\xi D_\tau \psi(\xi,\tau)\frac{1}{2}\, d\xi\, d\tau =$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} D_\xi D_\tau \psi(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau =$$

$$= \int_0^{+\infty} (\int_0^{+\infty} D_\xi D_\tau \psi(\xi,\tau)\, d\xi)\, d\tau = \int_0^{+\infty} [D_\tau \psi(\xi,\tau)]_0^{+\infty}\, d\tau$$

$$= -\int_0^{+\infty} D_\tau \psi(0,\tau)\, d\tau = -[\psi(o,\tau)]_0^{+\infty} = \psi(0,0)$$

da cui

$$< (\partial_x^2 - \partial_t^2)E(x,t)|\phi(x,t) >= \psi(0,0) = \phi(0,0)$$

quindi

$$(\partial_x^2 - \partial_t^2)E = \delta$$

Ne segue che se $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ con $supp\phi$ compatto, esiste la convoluzione

$$U(x,t) = (E*\phi)(x,t) = \int_{\mathbb{R}^2} E(x-\xi, t-\tau)\phi(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} H(x-\xi-|t-\tau|)\phi(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} (\int_{-\infty}^{x-|t-\tau|} \phi(\xi,\tau)\, d\xi)\, d\tau$$

che è soluzione di

$$(\partial_x^2 - \partial_t^2)u = \phi(x,t)$$

3.2 Problemi per un operatore differenziale lineare con coefficienti costanti

In questa sezione, affronteremo la risoluzione di problemi per un operatore differenziale lineare con coefficienti costanti, prima teoricamente, attraverso alcuni teoremi utili e poi vedremo l'applicazione all'operatore delle onde.

Teorema 3.2.1. *Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ e $s \to T(s) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ una funzione su A. Supponiamo che $T(s)$ sia debolmente limitata, cioè $\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ esista $C_\phi > 0$ tale che*

$$|<T(s)|\phi>| \leq C_\phi \quad \forall s \in A$$

Allora esistono $C > 0$ e p intero non negativo tali che

$$|<T(s)|\phi>| \leq C\|\phi\|_p = C \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{|\alpha|\leq p} (1 + \|x\|)^p |D^\alpha \phi(x)|$$

pe ogni $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\forall s \in A$.

Dimostrazione. L'insieme $\{T(s); s \in A\}$ è debolmente limitato e quindi è un insieme equicontinuo [1], cioè

$$\forall C > 0 \quad \exists U_\epsilon \quad \text{intorno dello zero di} \quad \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

tale che

$$\sup_{s\in A, \phi\in U_c} |<T(s)|\phi>| \leq C.$$

Ora come intorno U_c possiamo prendere $\{\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n); \|\phi\|_p \leq \delta\}$; pertanto sarà

$$|<T(s)|\phi>| \leq 1 \quad \forall s \in A, \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \text{con} \quad \|\phi\|_p \leq \frac{1}{C}$$

[1]Ricordiamo che $A \subset X'$ con $X' = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si dice **debolmente limitato** se $\forall x \in X$ risulta
$\sup_{u\in A} |<u|x>| < +\infty$.
$A \subset X'$ si dice **equicontinuo** se $\forall \epsilon > 0 \quad \exists U_\epsilon$ intorno dello zero di X tale che
$\sup_{u\in A, x\in U_\epsilon} |<u|x>| < \epsilon$.
Una generalizzazione del teorema di Banach - Steinhaus o principio dell'uniforme limitatezza, afferma che se $A \subset X'$ è debolmente limitato, allora è equicontinuo.

e di conseguenza

$$| < T(s)|\frac{\phi}{\|\phi\|_p}\frac{1}{C} > | \leq 1 \quad \forall s \in A \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

ossia

$$| < T(s)|\phi > | \leq C\|\phi\|_p \quad \forall s \in A \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

In particolare se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $s \to T(s) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ è continua su Ω, allora ad ogni compatto $K \subset \Omega$ si possono associare una costante $C_k > 0$ e un intero non negativo p_k tali che

$$| < T(s)|\phi > | \leq C_k\|\phi\|_{p_k} \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \forall s \in K.$$

Infatti $\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), s \to< T(s)|\phi >$ è limitata su K. □

Teorema 3.2.2. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $s \to T(s) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), s \in \Omega$, di classe C^k, cioè esista $D_s^\alpha < T(s)|\phi > \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\forall s \in \Omega$ per $|\alpha| \leq k$, e $s \longrightarrow D_s^\alpha < T(s)|\phi >$ sia continua su Ω.*
Indicata con $D_s^\alpha T(s)$ la distribuzione temperata tale che

$$< D_s^\alpha T(s)|\phi >= D_s^\alpha < T(s)|\phi > \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \forall s \in \Omega \tag{3.1}$$

supponiamo che esistano $C > 0$ e r, p interi non negativi tali che

$$| < D_s^\alpha T(s)|\phi > | \leq C(1 + \|s\|)^r\|\phi\|_p \quad per \quad |\alpha| \leq k, \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), s \in \Omega \quad ^2 \tag{3.2}$$

Supponiamo anche che $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ e $\forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sia

$$\int_\Omega < T(s)|g > D^\alpha f(s)\, ds = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega < D_s^\alpha T(s)|g > f(s)\, ds, \quad |\alpha| \leq k \tag{3.3}$$

Allora esiste $S \in S'(\mathbb{R}^{m+n})$ con supp$T \subseteq \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n$ tale che

$$< S|\psi >= \int_\Omega < T(t)|\psi(t, \cdot) > \, dt \quad \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{m+n}) \tag{3.4}$$

$$< \partial_s^\alpha S|\psi >= \int_\Omega < D_t^\alpha T(t)|\psi(t, \cdot) > \, dt \quad \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{m+n}), \quad |\alpha| \leq k \tag{3.5}$$

Dimostrazione. Procediamo per passi:

[2] questa ipotesi assicura che $\psi \to \int_\Omega < D_s^\alpha T(s)|\psi(s, \cdot) > \, ds$ appartiene a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{m+n})$

- Proviamo prima la (3.4) nell'ipotesi (3.2) con $\alpha = 0$, ossia

$$| < T(s)|\phi > | \leq C(1 + \|s\|)^r \|\phi\|_p \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), s \in \Omega$$

Se $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{m+n})$, per ogni fissato $s \in \mathbb{R}^n$, $\psi(s, \cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e quindi $< T(s)|\psi(s, \cdot) >$ è definita su Ω.
Inoltre $s \longrightarrow < T(s)|\phi(s, \cdot) >$ è una funzione misurabile su Ω: infatti, supponiamo dapprima $\phi(s, x) = f(s)g(x)$ con $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, allora

$$< T_x(s)|\psi(s, x) >= f(s) < T_x(s)|g(x) >;$$

Poiché per ipotesi $s \longrightarrow < T_x(s)|g(x) >$ è una funzione continua, lo è anche $f(s) < T_x(s)|g(x) >$, cioè $s \longrightarrow < T_x(s)|\phi(s, x) >$; d'altra parte, se $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{m+n})$, esiste una successione del tipo $(\sum_{j=1}^{N_k} f_{k_j} g_{k_j})_{k \in \mathbb{N}}$ con $f_{k_j} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ e $g_{k_j} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ convergente a ϕ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$.
Da qui segue che $s \longrightarrow < T_x(s)|\phi(s, x) >$ è misurabile perché limite di una successione di funzioni continue.
Dalla (3.2) segue anche che:

$$| < T(s)|\psi(s, x) > | \leq C(1 + \|s\|)^r \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{|\alpha| \leq p} (1 + \|x\|)^p |D_x^\alpha \psi(s, x)| \leq$$

$$\leq C(1 + \|s\|)^{-m-1} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{|\alpha| \leq p} (1 + (\|x\|^2 + \|s\|^2)^{\frac{1}{2}})^{p+r+m+1} |D_x^\alpha \psi(s, x)| \leq$$
$$C(1 + \|s\|)^{-m-1} \|\psi\|_{p+r+m+1},$$

da cui segue che $s \longrightarrow < T_x(s)|\phi(s, x) >$ è sommabile su Ω.
Allora $\psi \longrightarrow \int_\Omega < T(s)|\phi(s, \cdot) > ds$ è un funzionale lineare su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{m+n})$; inoltre

$$\psi_\nu \xrightarrow[\nu \to \infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})} 0 \Longrightarrow$$
$$\|\psi_\nu\|_{p+r+m+1} \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0 \Longrightarrow$$
$$\int_\Omega < T(s)|\phi_\nu(s, \cdot) > ds \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0.$$

Ciò assicura la continuità di tale funzionale.
Pertanto esiste $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{m+n})$ per cui vale la (3.4).

- Ora proviamo la (3.5) nel caso di $|\alpha| = 1$ nell'ipotesi (3.2) con $|\alpha| \leq 1$ e (3.3) con $|\alpha| = 1$, ossia

$$\int_\Omega < T(s)|g > Df(s)\, ds = (-1) \int_\Omega < D_s T(s)|g > f(s)\, ds,$$

Sia $\psi = fg$ con $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ e $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; allora per $j = 1, 2, ..., n$ si ha

$$< \partial_j T|\psi >= - < T|D_j\psi >= - \int_\Omega < T(s)|g > \frac{\partial f(s)}{\partial s_j}\, ds =$$

$$= \int_\Omega < \frac{\partial T(s)}{\partial s_j}|g > f(s) = \int_\Omega < \frac{\partial T(s)}{\partial s_j}|\psi(s,\cdot) > \, ds$$

Sia poi $\psi_\nu = \sum_{j=1}^{N_\nu} f_{\nu_j} g_{\nu_j}, f_{\nu_j} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m), g_{\nu_j} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\psi_\nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})} \psi;$$

Allora da $< \partial_j T|\psi_\nu >= \int_\Omega < \frac{\partial T(s)}{\partial s_j}|\psi_\nu(s,\cdot) > \, ds$ segue la tesi (3.5).

□

Definizione 3.2. Sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$, m, n interi positivi.
Fissiamo $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Supponiamo che $\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ e $\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ esista finito il

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} < T|\frac{1}{\epsilon^m}\phi(\frac{x - x_0}{\epsilon})\psi(y) >$$

ed esista $T_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} < T|\frac{1}{\epsilon^m}\phi(\frac{x - x_0}{\epsilon})\psi(y) >=< T_0|\psi > \int_{\mathbb{R}^m} \phi(x)\, dx.$$

Diremo allora che T_0 è **la distribuzione temperata sezione** di T per $x = x_0$, e scriveremo

$$T_0 = T|_{x=x_0}$$

Definizione 3.3. Sia $\mathcal{S}_+(\mathbb{R}^{n+1})$ il sottospazio di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ delle $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ tali che $supp\chi \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$.
Sia T un funzionale lineare su $\mathcal{S}_+(\mathbb{R}^{n+1})$, continuo.
Supponiamo che $\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ e $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ esista finito

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} < T \mid \frac{1}{\epsilon}\ \phi(\frac{t}{\epsilon})\ \psi(x) >$$

ed esista $T_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} < T \mid \frac{1}{\epsilon}\ \phi(\frac{t}{\epsilon})\psi(x) >=< T_0|\psi > \int_0^{+\infty} \phi(t)\, dt$$

Allora diremo che T ammette **limite temperato** per $t \to 0^+$:

$$T_0 = \lim \mathrm{temp}_{t\to 0^+} T$$

Osservazione 17. Osserviamo che se $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{1+n})$ ed esiste $T|_{t=0}$ allora esiste anche $\lim\mathrm{temp}_{t\to 0^+} T = T|_{t=0}$.

Teorema 3.2.3. *Valgano le ipotesi del teorema precedente* (3.2.2) *con* $\Omega = \mathbb{R}^m$.
Allora, se T *è definito da* (3.4) *si ha*

$$\partial_s^\alpha T|_{s=s_0} = D_s^\alpha T(s_0) \quad per \quad |\alpha| \leq k$$

Dimostrazione. Ci basterà dimostrare che $T|_{s=s_0} = T(s_0)$.
Sia $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ e $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Risulta

$$< T \mid \frac{1}{\epsilon^m}\, \phi(\frac{s-s_0}{\epsilon})\psi(x) >= \int_{\mathbb{R}^m} < T(s) \mid \frac{1}{\epsilon^m}\, \phi(\frac{s-s_0}{\epsilon})\psi(x) > \, ds =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{\epsilon^m}\, \phi(\frac{s-s_0}{\epsilon}) < T(s) \,|\psi > \, ds = \int_{supp\phi} \phi(t) < T(s_0+\epsilon t) \mid \psi > \, dt.$$

Poiché $s \longrightarrow T(s)$ è continua, risulta

$$< T(s_0+\epsilon t)|\psi > \underset{\epsilon\to 0^+}{\longrightarrow} < T(s_0)|\psi > .$$

l'ipotesi (3.2) permette il passaggio al limite sotto il segno dell'integrale; allora esiste finito il

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} < T \mid \frac{1}{\epsilon^m}\, \phi(\frac{s-s_0}{\epsilon})\psi(x) >$$

ed esso coincide con

$$< T(s_0)|\psi > \int_{\mathbb{R}^m} \phi(s)\, ds.$$

Dunque

$$T|_{s=s_0} = T(s_0).$$

□

Teorema 3.2.4. *Sia* $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $U, V \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$.
Allora la condizione

$$T|_{t=t_0} = U \tag{3.6}$$

è equivalente alla condizione

$$\mathcal{F}_x(T)|_{t=t_0} = \mathcal{F}(U). \tag{3.7}$$

Analogamente, la condizione

$$\partial_t T|_{t=t_0} = V \tag{3.8}$$

è equivalente alla condizione

$$\partial_t \mathcal{F}_x(T)|_{t=t_0} = \mathcal{F}(V) \tag{3.9}$$

e analogamente per quanto riguarda derivate successive.

Dimostrazione. Siano $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ e $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
Se vale la (3.6) allora

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} < \mathcal{F}_x(T) \mid \frac{1}{\epsilon}\ \phi(\frac{t-t_0}{\epsilon})\ \psi(x) >= \lim_{\epsilon \to 0^+} < T \mid \frac{1}{\epsilon}\ \phi(\frac{t-t_0}{\epsilon})\ \mathcal{F}(\psi) >=$$

$$=< U|\mathcal{F}(\psi) > \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\, dt =< \mathcal{F}(U)|\psi > \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\, dt$$

ossia la (3.7).
Il ragionamento per provare che da (3.7) segue (3.6) è analogo.
Si prova invece l'equivalenza di (3.8) e (3.9) osservando che dalla (3.8) per definizione di derivata di una distribuzione, segue:

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} < T \mid \frac{1}{\epsilon^2}\phi'(\frac{t-t_0}{\epsilon})\psi(x) >= - < V|\psi > \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\, dt.$$

□

Teorema 3.2.5. *Sia* $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$.
Indichiamo con s *un punto di* $\mathbb{R}^m$ *e con* x *un punto di* $\mathbb{R}^n$*; supponiamo:*

- $D_x^\alpha f$ *continua su* $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \quad \forall \alpha$

- $f(s,\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \forall s \in \mathbb{R}^m$
- $f(s,\cdot) \xrightarrow[s\to s_0]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} f(s_0,\cdot) \quad \forall s_0 \in \mathbb{R}^m$

Sia poi $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ *e* $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$*. Allora:*

$$\int_{\mathbb{R}^m} \omega(s) < T_x|f(s,x) > \, ds =< T_x| \int_{\mathbb{R}^m} \omega(s) f(s,x)\, ds > . \tag{3.10}$$

Dimostrazione. Osserviamo che per la terza ipotesi, la funzione

$$s \to < T_x \mid f(s.x) >$$

è continua e quindi esiste l'integrale al primo membro di (3.10).

Sia K un intervallo cubico compatto tale che supp $\omega \subseteq K$.

Per $p = 1, 2, ...$ sia $\{K_{pj}; j = 1, 2, ..., p^m\}$ una scomposizione di K in cubi congruenti; se $s_{pj} \in K_{pj}$ si ha

$$\int_K \omega(s) < T_x|f(s,x) > \, ds = \lim_{p\to\infty} \sum_{j=1}^{p^m} \omega(s_{pj}) < T_x|f(s_{pj},x) > \mu(K_{pj}) =$$

$$\lim_{p\to\infty} < T_x| \sum_{j=1}^{p^m} \omega(s_{pj}) f(s_{pj},x)\mu(K_{pj}) > .$$

Proviamo che

$$\sum_{j=1}^{p^m} \omega(s_{pj}) f(s_{pj},\cdot)\mu(K_{pj}) \xrightarrow[p\to\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \int_K \omega(s) f(s,\cdot)\, ds$$

o, ciò che è lo stesso

$$\lim_{p\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+\|x\|)^k \mid \sum_{j=1}^{p^m} \omega(s_{pj}) D_x^\alpha f(s_{pj},x)\mu(K_{pj}) - \int_K \omega(s) D_x^\alpha f(s,x)\, ds \mid \; = 0 \tag{3.11}$$

$\forall k \geq 0 \quad \forall \alpha$. E'

$$\int_K \omega(s) D_x^\alpha f(s,x)\, ds = \sum_{j=1}^{p^m} \int_{K_{pj}} \omega(s) D_x^\alpha f(s,x)\, ds = \sum_{j=1}^{p^m} \omega(\bar{s_{pj}}) D_x^\alpha f(\bar{s_{pj}},x)\mu(K_{pj})$$

essendo $\bar{s_{pj}}$ un conveniente punto di $K_{p,j}$ (dipendente da x); supponiamo ω e f a valori reali.

L'espressione sotto al segno di limite in (3.11) si maggiora con

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+\|x\|)^k \; \sum_{j=1}^{p^m} |\omega(s_{pj})| |D_x^\alpha f(s_{pj},x) - D_x^\alpha f(\bar{s_{pj}},x)| \; \mu(K_{pj}) +$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+\|x\|)^k \sum_{j=1}^{p^m} |\omega(s_{pj}-\omega(\bar{s_{pj}})||D_x^\alpha f(\bar{s_{pj}},x)|\ \mu(K_{pj}) = I_1 + I_2$$

Sia $M = \sup_{s\in\mathbb{R}^n}|\omega(s)|$.

La terza ipotesi del teorema assicura che, $\forall\epsilon > 0$ risulta

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+\|x\|)^k\ |D_x^\alpha f(s_{pj},x) - D_x^\alpha f(\bar{s_{pj}},x)| \leq \frac{\epsilon}{2\mu(K)M}$$

per $p \geq p_\epsilon$, opportuno.

Inoltre esiste $C > 0$ tale che $\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+\|x\|)^k\ |D_x^\alpha f(s,x)| < C \quad \forall s \in K$.

Per $p \geq p'_\epsilon$ opportuno, risulta:

$$|\omega(s_{pj}) - \omega(\bar{s_{pj}})| \leq \frac{\epsilon}{2\mu(K)C} \quad j = 1, 2, ..., p^m$$

Pertanto, per $p > \max\{p_\epsilon, p'_\epsilon\}$ risulta:

$$I_1 + I_2 \leq \frac{\epsilon}{2\mu(K)M}\ \mu(K)M + \frac{\epsilon}{2\mu(K)C}\ \mu(K)C = \epsilon$$

Ciò prova il teorema e in più osserviamo che dalla dimostrazione segue che:

$$x \to \int_{\mathbb{R}^n}\omega(s)f(s,x)\,ds \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

$\square$

Teorema 3.2.6. *Sia* $s \longrightarrow T(s) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n), s \in \mathbb{R}$, *continua; esistano* $a \in \mathbb{R}^+$ *e* K *compatto di* $\mathbb{R}^n$ *tali che:*

$$T(s) = 0 \quad per \quad |s| \geq a, \quad suppT(s) \subseteq K, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{3.12}$$

Sia $t \to S(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \quad t \in \mathbb{R}^+$ *continua e tale che*

$$| < S(t)|\phi > | \leq C(1+t)^r\|\phi\|_k \quad \forall\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \tag{3.13}$$

per certi $C > 0$ *e* r, k *interi non negativi.*

Poniamo

$$< T \mid \psi >= \int_{-\infty}^{+\infty} < T(t) \mid \psi(t,\cdot) > \,dt \tag{3.14}$$

$$< S \mid \psi >= \int_0^{+\infty} < S(t)|\psi(t,\cdot) > \,dt \quad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1}) \tag{3.15}$$

Allora $s \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1}), T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{n+1})$.
Esiste $U \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *tale che*

$$< U \mid \phi >= \int_0^a < S(t) * T(-t)|\phi > \, dt \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \tag{3.16}$$

Risulta

$$S * T|_{t=t_0} = U \tag{3.17}$$

Se poi $T(s)$ *e* $S(t)$ *sono di classe* C^1,

$$S(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)} 0 \tag{3.18}$$

e $S'(t) = \frac{dS(t)}{dt}$ *soddisfa la condizione*

$$| < S'(t)|\phi > | \leq \bar{C}(1+t)^{\bar{r}} \|\phi\|_{\bar{k}} \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{3.19}$$

per certi $\bar{C} > 0$ *e* $\bar{r}$ *e* $\bar{k}$ *interi non negativi, allora*

$$\partial_t (S * T)|_{t=t_0} = V \tag{3.20}$$

dove V *e la distribuzione temperata definita da:*

$$< V \mid \phi >= \int_0^{+\infty} < S'(t) * T(-t)|\phi > \, dt \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \tag{3.21}$$

Per la dimostrazione si veda [1], Teorema 3.16 pag.327.

3.2.1 Problemi differenziali

Sia $P(\partial_x)$ un polinomio differenziale:

$$P(\partial_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial_x^\alpha$$

con a_α costante.

- **PROBLEMA P:**
  Assegnate $U \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ e $S_j \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad j = 0, 1, ..., k-1$, trovare $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ tale che sia

$$\partial_t^k \, T + P(\partial_x) T = U, \tag{3.22}$$

esista $\partial_t^j\, T|_{t=t_0}$ per $j = 0, 1, ..., k-1$, e sia

$$\partial_t^j\, T|_{t=t_0} = S_j \quad j = 0, 1, ..., k-1.$$

In base al teorema (3.2.4) il problema P è equivalente al seguente problema:

- **PROBLEMA P'**:
  Trovare $W \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ tale che

$$\partial_t^k\, W + P(-ix)W = \mathcal{F}_x(U) \tag{3.23}$$

$$\partial_t^j\, W\, |_{t=t_0} = \mathcal{F}(S_j) \quad j = 0, 1, ..., k-1. \tag{3.24}$$

Infatti si passa dal problema P al problema P' mediante la trasformata di Fourier parziale rispetto a x di T e quindi da P' a P antitrasformando.

Osservazione 18. Supponiamo che esista una soluzione elementare $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ di $\partial_t^k + P(\partial_x)$; sia $U \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{n+1})$; esistano le sezioni temperate $\partial_t^j(E * U)|_{t=t_0}$ per $j = 0, 1, ..., k-1$; esista una soluzione $V \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ di

$$\begin{cases} \partial_t^k V + P(\partial_x)V = 0 \\ \partial_t^j V|_{t=0} = S_j - \partial_t^j(E * U)|_{t=0}, \quad j = 0, 1, ..., k. - 1 \end{cases}$$

Allora il problema P ha soluzione

$$T = E * U + V$$

Infatti

$$\partial_t^k T + P(\partial_x)T = (\partial_t^k + P(\partial_x))E * U = \delta * U = U$$

e

$$\partial_t^j T|_{t=0} = S_j \quad j = 0, 1, ..., k-1$$

Osservazione 19. Supponiamo che esista una soluzione elementare $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ relativa all'operatore $\partial_t^k + P(\partial_x)$.
Indichiamo con $\mathcal{M}$ la classe delle distribuzioni temperate $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ per ciascuna delle quali esiste $E * S$ e

$$\partial^\alpha(E * S) = (\partial^\alpha E) * S = E * \partial^\alpha S \quad \forall \alpha.$$

Allora esiste al più una $T \in \mathcal{M}$ soluzione di $\partial_t^k\, T + P(\partial_x)\, T = U$.
Infatti supponendo che ne esistano due, T e $\bar{T}$, si ha:

$$0 = E*((\partial_t^k+P(\partial_x))(T-\bar{T}) = ((\partial_t^k+P(\partial_x))E)*(T-\bar{T}) = \delta*(T-\bar{T}) = T-\bar{T}.$$

Osservazione 20. Siano $S_j \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad j = 0, 1, ..., k-1$ ed esista $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ tale che

$$\begin{cases} \partial_t^k T + P(\partial_x) T = -\sum_{j=0}^{k-1} P(\partial) S_j \otimes \frac{t^j}{j!} \\ \partial_t^j T|_{t=0} = 0 \quad j = 0, 1, ..., k. - 1 \end{cases}$$

Allora il problema P ha come soluzione

$$T + \sum_{j=0}^{k-1} S_j \otimes \frac{t^j}{j!}$$

Infatti è immediato che

$$(\partial_t^k + P(\partial_x))(T + \sum_{j=0}^{k-1} S_j \otimes \frac{t^j}{j!}) = 0.$$

E' poi

$$\partial_t^j (\sum_{h=0}^{k-1} S_j \otimes \frac{t^h}{h!}) = \sum_{h=j}^{k-1} S_h \otimes \frac{t^{h-j}}{(h-j)!}$$

e per $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ e $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si ha

$$< S_h \otimes t^{h-j} \mid \frac{1}{\epsilon}\, \phi(\frac{t}{\epsilon}) \psi(x) >=< S_h|\psi > \int_{-\infty}^{+\infty} t^{h-j} \frac{1}{\epsilon} \phi(\frac{t}{\epsilon})\, dt =$$

$$=< S_h|\psi > \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon^{h-j} t^{h-j} \phi(t)\, dt \xrightarrow[\epsilon\to 0^+]{} \begin{cases} 0 & j < h \\ < S_j \mid \psi > \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\, dt & h = j \end{cases}$$

Perciò esiste

$$\partial_t^j \left(\sum_{h=0}^{k-1} S_h \otimes \frac{t^h}{h!}\right)|_{t=t_0}$$

ed è uguale a S_j.

- **PROBLEMA Q:**

  Assegante $S_j \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $j = 0, 1, ..., k-1$, trovare $t \to T(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $t \in \mathbb{R}$ di classe C^k tale che

$$\frac{d^k\, T(t)}{dt^k} + P(\partial_x) T(t) = 0 \quad t \in \mathbb{R} \tag{3.25}$$

$$\frac{d^j\, T(0)}{dt^j} = S_j \quad j = 0, 1, ..., k-1 \tag{3.26}$$

  Il problema Q è equivalente al seguente problema:

- **PROBLEMA Q'**

  Trovate $t \to W(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ con $t \in \mathbb{R}$, tale che

$$\frac{d^k\, W(t)}{dt^k} + P(-ix) W(t) = 0 \tag{3.27}$$

$$\frac{d^j\, W(0)}{dt^j} = \mathcal{F}(S_j) \quad j = 0, 1, ..., k-1 \tag{3.28}$$

Teorema 3.2.7. *Supponiamo che il problema Q abbia una soluzione $t \to T(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ di classe C^k e che esistano $C > 0$ e r, p interi non negativi tali che sia*

$$| < \frac{d^j T(t)}{dt^j} |\phi > | \leq C(1 + |t|)^r \|\phi\|_p \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \tag{3.29}$$

per j=0,1,...k.

Allora $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ definita da

$$< T \mid \psi >= \int_{-\infty}^{+\infty} < T(s)|\psi(s, \cdot) > \, ds, \quad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1}) \tag{3.30}$$

è soluzione del problema P con $U = 0$.

Dimostrazione. Per prima cosa la (3.30) definisce una distribuzione temperata su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$.

$$\forall \chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1}), \quad < \partial_t^j T|\chi >= \int_{-\infty}^{+\infty} < \frac{d^j T(s)}{ds^j}|\chi(s,\cdot) > \, ds \quad j = 0, 1, ..., k \tag{3.31}$$

Se $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$< P(\partial_x)T|\phi\psi >= \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha < T|\phi(t) D_x^\alpha \psi(x) >=$$

$$= \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} < T(t)|\phi(t) D_x^\alpha \psi(x) > \, dt =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} < P(\partial_x)T(t)|\phi(t)\psi(x) > \, dt;$$

Da qui e dalla (3.31) con $j = k$ segue che

$$< \partial_t^k T + P(\partial_x)T|\phi\psi >= \int_{-\infty}^{+\infty} < \frac{d^k T(t)}{dt^k} + P(\partial_x)T(t)|\phi\psi > \, dt = 0$$

e quindi

$$< \partial_t^k T + P(\partial_x)T|\phi\psi >= 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

poiché lo spazio vettoriale generato da $\{\phi\ \psi; \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\}$ è denso in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$, si ha

$$< \partial_t^k T + P(\partial_x)T|\chi >= 0 \quad \forall \chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$$

e quindi

$$\partial_t^k T + P(\partial_x)T = 0.$$

Per il Teorema(3.2.3) risulta

$$\partial_t^j T|_{t=0} = \frac{d^j T(0)}{dt^j} = S_j \quad j = 0, 1, ..., k-1$$

Dunque T è soluzione del problema P con $U = 0$.

□

Teorema 3.2.8. *Sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ soluzione del problema P con $U = 0$.*
Allora esiste una e una sola $t \to T(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\quad t \in \mathbb{R}$ di classe C^k, soluzione del problema Q tale che:

$$| < \frac{d^j T(t)}{dt^j} | \psi > | \leq C(1 + |t|)^r \|\psi\|_p \quad j = 0, 1, ..., k \quad \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \tag{3.32}$$

per certi $C > 0$ e r, p interi non negativi, e

$$< T \mid \chi >= \int_{-\infty}^{+\infty} < T(t) | \chi(t, \cdot) > dt, \quad \chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1}) \tag{3.33}$$

Questi due teoremi provano che i problemi P con $U = 0$ e Q sono equivalenti.

- **PROBLEMA CP:**

  Sia $f_j \in C^{k-1-j}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\quad j = 0, 1, ..., k-1$.
  Trovare u definita su tutto $\mathbb{R}^{n+1}$, continua con tutte le derivate che figurano nell'operatore $D_t^k + P(D_x)$ appartenente a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ e tale che

$$\begin{cases} D_t^k u + P(D_x) u = 0 & \text{in} \quad \mathbb{R}^{n+1} \\ D_t^j u(0, x) = f_j(x) \quad x \in \mathbb{R}^n \quad j = 0, 1, ..., k-1 & \end{cases}$$

  Poiché le derivate classiche coincidono con le derivate nel senso delle distribuzioni, una u con la regolarità dichiarata è soluzione del problema CP se e solo se è soluzione del problema P.

- **PROBLEMA P_+:**

  Assegnate $S_j \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad j = 0, 1, ..., k-1$ trovare $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ soluzione di $\partial_t^k T + P(\partial_x) T = 0$ in $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, cioè tale che, $\forall \chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ con *supp*$\chi \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$,

$$< \partial_t^k T + P(\partial_x) T \mid \chi >= 0 \tag{3.34}$$

  e sia

$$\lim \mathrm{temp}_{t \to 0+} \partial_t^j T = S_j \quad j = 0, 1, ..., k-1. \tag{3.35}$$

- **PROBLEMA CP_+:**

  Assegnate le f_j come nel problema CP classico, trovare $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ continua con tutte le derivate che figurano nell'operatore $D_t^k u + P(D_x)$ tale che

$$D_t^k u + P(D_x)u = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \tag{3.36}$$

$$\lim_{t\to 0^+} D_t^j u = f_j \quad j = 0, 1, ..., k-1 \tag{3.37}$$

  e che sia prolungabile su tutto $\mathbb{R}^{n+1}$ in una distribuzione temperata.
  Se il problema P ha una soluzione u che è funzione continua su tutto $\mathbb{R}^{n+1}$ con tutte le derivate che figurano nell'operatore $D_t^k + P(D_x)$, allora essa è soluzione del problema CP_+.

- **PROBLEMA Q_+:**

  Assegnate le S_j come nel problema P_+, trovare $t \to T(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ $t \in \mathbb{R}^+$ di classe C^k, tale che

$$\frac{d^k T(t)}{dt^k} + P(\partial_x)T(t) = 0 \quad \text{per } t \in \mathbb{R}_+ \tag{3.38}$$

$$\frac{d^j T(t)}{dt^j} \xrightarrow[t\to 0^+]{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)} S_j \quad j = 0, 1, ..., k-1 \tag{3.39}$$

Teorema 3.2.9. *Sia $t \to T(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\quad t > 0$, una soluzione di Q_+ tale che*

$$| < \frac{d^j T(t)}{dt^j} |\psi > | \leq C(1+t)^r \|\psi\|_p \quad t > 0, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \tag{3.40}$$

per $j = 0, 1, ..., k$.
Posto:

$$< T|\chi >= \int_0^{+\infty} < T(t)|\chi(t, \cdot) > dt, \quad \chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1}) \tag{3.41}$$

risulta $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1}), suppT \subseteq \bar{R_+} \times \mathbb{R}^n$ e

$$\partial_t^k T + P(\partial_x)T = \sum_{j=0}^{k-1} \delta_t^{(j)} \otimes S_{k-j-1}. \tag{3.42}$$

In particolare se $S_0 = ...S_{k-2} = 0$ e $S_{k.1} = \delta_x$, allora T è una soluzione elementare relativa all'operatore $\partial_t^k + P(\partial_x)$.

Dimostrazione. La (3.40) con $j = 0$ assicura che, in base al teorema (3.2.2) che (3.41) definisce $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ con $suppT \subseteq \bar{R}_+ \otimes \mathbb{R}^n$.
Prendiamo $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; allora per la (3.40) con $j = 0, 1$ si ha

$$< \partial_t T|\phi\psi >= - < T|\phi'\psi >= - \int_0^{+\infty} < T(s)|\phi'(s)\psi > ds =$$

$$= -[\phi(s) < T(s)|\psi >]_{s\to 0}^{s\to\infty} + \int_0^{+\infty} \phi(s) < \frac{dT(s)}{ds}|\psi > ds =$$

$$= \phi(0) < S_0|\psi > + \int_0^{+\infty} < \frac{dT(s)}{ds}|\phi\psi > ds =$$

$$< \delta_t \otimes S_0|\phi\psi > + \int_0^{+\infty} < \frac{dT(s)}{ds}|\phi\psi > ds$$

Successivamente si ha

$$< \partial_t^2 T|\phi\psi >=< \delta_t \otimes S_1 + \delta_t' \otimes S_0|\phi\psi > + \int_0^{+\infty} < \frac{d^2T(s)}{ds^2}|\phi\psi > ds$$

$$< \partial_t^k T|\phi\psi >=< \sum_{j=0}^{k-1} \delta_t^{(j)} \otimes S_{k-1-j}|\phi\psi > + \int_0^{+\infty} < \frac{d^kT(s)}{ds^k}|\phi\psi > ds.$$

Poiché

$$< P(\partial_x)T|\phi\psi >= \int_0^{+\infty} < P(\partial_x)T(s)|\phi(s)\psi > ds$$

si conclude che T è soluzione di (3.42) □

3.2.2 Esempio: L'operatore delle onde

Sia $\partial_t^2 - \sum_{k=1}^{3} \partial_{x_k}^2 = \partial_t^2 - \Delta_x$ l'operatore delle onde.

- **PROBLEMA P OMOGENEO:**

  Trovare $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tale che:

$$\begin{cases} \partial_t^2 T - \Delta_x T = 0 \\ T|_{t=t_0} = S_0, \quad \partial_t T|_{t=0} = S_1, \quad S_0, S_1 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3) \end{cases} \tag{3.43}$$

  Per i teoremi (3.2.7), (3.2.8), il problema P è equivalente al seguente problema Q:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2T}{dt^2} - \Delta_x T(t) = 0 & t \in \mathbb{R} \\ T(0) = S_0, \quad \dfrac{\partial T(0)}{dt} = S_1, \end{cases} \tag{3.44}$$

e quindi al problema Q':

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\mathcal{F}_x(T(t))}{dt^2} + \|s\|^2\mathcal{F}_x(T(t)) = 0 \\ \mathcal{F}_x T(0) = \mathcal{F}(S_0), \quad \mathcal{F}_x(\dfrac{\partial T(0)}{dt}) = \mathcal{F}(S_1) \end{cases} \tag{3.45}$$

Consideriamo il caso in cui $S_0 = 0$ e $S_1 = \delta$.

In questo caso la soluzione di (3.45) risulta: [3]

$$s \to \frac{\sin(\|s\|t)}{\|s\|}$$

da cui otteniamo la soluzione del problema Q:

$$T(t) = \mathcal{F}_s^{-1}\frac{\sin(\|s\|t)}{\|s\|} \tag{3.46}$$

Si ha, ora, $\forall\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$

$$< T\, |\psi > = < \mathcal{F}_s^{-1}\,(\frac{\sin(\|s\|t)}{\|s\|})\mid \psi > = < (\frac{\sin(\|s\|t)}{\|s\|}\mid \mathcal{F}^{-1}\,(\psi) > =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\sin(\|s\|t)}{\|s\|}\ (\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-i<s,\xi>}\psi(\xi)\,d\xi)\,ds = {}^4$$

$$= \lim_{r\to\infty}\int_{\|s\|\le r} \frac{\sin(\|s\|t)}{\|s\|} \times (\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-i<s,\xi>}\psi(\xi)\,d\xi)\,ds =$$

$$= \lim_{r\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\psi(\xi)(\int_{\|s\|\le r} e^{-i<s,\xi>}\frac{\sin(\|s\|t)}{\|s\|}\,ds)\,d\xi.$$

Passiamo a coordinate polari l'ultimo integrale, ponendo:

$$s = (\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\theta),$$

e otteniamo:

$$\int_0^r\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-i\rho<y,\xi>}\frac{\sin(\rho t)}{\rho}\rho^2\sin\phi\,d\phi\,d\rho\,d\theta$$

$$\int_0^r \rho\sin(\rho t)(\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-i\rho<y,\xi>}\sin\phi\,d\phi\,d\theta)\,d\rho$$

[3]Si veda l'appendice per approfondimento

[4]per (1.4) definita al Cap.1

in cui integriamo l'ultima funzione su una sfera, e, sapendo che, $dS = R^2 \sin\phi d\phi d\theta$ (e in questo caso $R = 1$), otteniamo:

$$\int_0^r \rho \sin(\rho t)(\int_{\|y\|=1} e^{-i\rho<y,\xi>}\, dy)\, d\rho;$$

Se $\mathcal{A}$ è un matrice ortogonale 3×3 si ha, posto $y = \mathcal{A}z$

$$\int_{\|y\|=1} e^{-i\rho<y,\xi>}\, dy = \int_{\|z\|=1} e^{-i\rho<z,\mathcal{A}^T\xi>}\, dz.$$

Scegliamo $\mathcal{A}$ in modo che sia $\mathcal{A}^T\xi = \|\xi\|e_3$, si ha $< z, \mathcal{A}^T\xi >= \|\xi\|z_3$;
Sia $z_1 = \sin(\theta)\cos(\phi)$, $z_2 = \sin(\theta)\sin(\phi)$ e $z_3 = \cos(\theta)$;
Allora:

$$\int_{\|y\|=1} e^{-i\rho<z,\mathcal{A}^t\xi>}\, dz = 2\pi \int_0^\pi e^{-i\rho\|\xi\|\cos(\theta)} \sin(\theta)\, d(\theta) =$$

$$= \frac{2\pi}{i\rho\|\xi\|}[\ e^{-i\rho\|\xi\|\cos(\theta)}]\ _0^\pi =^5$$

$$\frac{2\pi}{\rho\|\xi\|}(e^{-i\rho\ \|\xi\|} - e^{i\rho\|\xi\|}) = \frac{4\pi}{\rho\|\xi\|}\sin(\rho\|\xi\|)$$

per la definizione esponenziale della funzione $\sin(\rho\|\xi\|)$.
Pertanto

$$< \mathcal{F}_s^{-1}(\frac{\sin(\|s\|t)}{\|s\|}) \mid \psi >=$$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi^2} \int_0^r \sin(\rho t)(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\sin(\rho\|\xi\|)}{\|\xi\|}\psi(\xi)\, d\xi)\, d\rho.$$

L'ultimo integrale scritto è uguale a:

$$\int_0^{+\infty} \sigma \sin(\rho\sigma)(\int_{\|y\|=1} \psi(\sigma y)\, dy)\, d\sigma$$

e quindi

$$< \mathcal{F}_s^{-1}(\frac{\sin(\|s\|t)}{\|s\|}) \mid \psi >=$$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} \sigma(\int_{\|y\|=1} \psi(\sigma y)(\int_0^r \sin(\rho t)\sin(\rho\sigma)\, d\rho)\, dy)\, d\sigma.$$

Per la formula di Werner

[5] Ricordando la formula di integrazione delle funzioni esponenziali del tipo: $\int e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$ e $\int e^{f(x)} f'(x)\, dx = e^{f(x)} + C$

$$\int_0^r \sin(\rho t)\sin(\rho\sigma)\,d\rho = \frac{1}{2}\int_0^r [\ \cos((t-\sigma)\rho) - \cos((t+\sigma)\rho)]\ \ d\rho =$$

$$\frac{1}{2}[\ \frac{\sin((t-\sigma)r)}{t-\sigma} - \frac{\sin((t+\sigma)r)}{t+\sigma}]$$

Quindi:

$$< \mathcal{F}_s^{-1}(\frac{\sin(\|s\|t)}{\|s\|}) \mid \psi >=$$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{+\infty}\sigma(\int_{\|y\|=1}\psi(\sigma y)[\ \frac{\sin((t-\sigma)r)}{t-\sigma} - \frac{\sin((t+\sigma)r)}{t+\sigma}]\ dy)\,d\sigma =$$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma(\int_{\|y\|=1}[\ \frac{\sin((t-\sigma)r)}{t-\sigma}]\ \psi(\sigma y)\,dy)\,d\sigma =$$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(t-\tau)\frac{\sin(\tau r)}{\tau}(\int_{\|y\|=1}\psi(t-\tau)y)\,dy)\,d\tau.$$

in cui abbiamo sostituito $\sigma = t-\tau$.

Chiamiamo $\phi(\tau) = (t-\tau)\int_{\|y\|=1}\psi((t-\tau)y)\,dy$ e otteniamo quindi:

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(\tau r)}{\tau}\phi(\tau)\,d\tau.$$

La funzione $\tau \longrightarrow \phi(\tau)$ è evidentemente di classe C^1, $\phi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}), \tau\phi' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Ricordando che

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = 1$$

dimostriamo che

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(\tau r)}{\tau}\phi(\tau)\,d\tau \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{1}{4\pi}\phi(0)$$

Infatti:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(r\tau)}{\tau}\phi(\tau)\,d\tau - \phi(0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(\tau)}{\tau}[\ \phi(\frac{\tau}{r}) - \phi(0)]\ \ d\tau =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-A}^{+A}\frac{\sin(\tau)}{\tau}[\ \phi(\frac{\tau}{r}) - \phi(0)]\ \ d\tau + \frac{1}{\pi}\int_{+A}^{+\infty}\frac{\sin(\tau)}{\tau}[\ \phi(\frac{\tau}{r}) - \phi(0)]\ \ d\tau +$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-A}\frac{\sin(\tau)}{\tau}[\ \phi(\frac{\tau}{r})-\phi(0)]\ d\tau = I_1+I_2+I_3$$

$I_1 \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 \quad \forall A>0;$

$$I_2 = -\frac{1}{\pi}[\ \frac{\cos(\tau)}{\tau}[\ \phi(\frac{\tau}{r})-\phi(0)]\ ]\ _{\tau=A}^{\tau=+\infty}+$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{-A}^{+\infty}\frac{\cos(\tau)}{\tau^2}[\ \frac{\tau}{r}\phi'(\frac{\tau}{r})-\phi(\frac{\tau}{r})+\phi(0)]\ d\tau \xrightarrow[r\to\infty]{} 0;$$

Analogamente $I_3 \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$.

Dunque
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(\tau r)}{\tau}\phi(\tau)\,d\tau \xrightarrow[r\to\infty]{} \phi(0)$$

e quindi

$$< \mathcal{F}_s^{-1}(\frac{\sin(\|s\|t)}{\|s\|})\ |\ \psi >= \frac{1}{4\pi}t\int_{\|y\|=1}\psi(ty)\,dy.$$

Ne segue che la $t\to T(t) \quad t\in\mathbb{R}$, definita da:

$$< T(t)|\psi >= \frac{t}{4\pi}\int_{\|y\|=1}\psi(ty)\,dy \tag{3.47}$$

è soluzione di (3.44) con $S_0=0, S_1=\delta$.

Se supp$\psi\subset\mathbb{R}^3-\partial S(0,|t|)$ allora

$$< T(t)|\psi >= 0$$

e quindi $\forall t\in\mathbb{R}$ è supp$T(t)\subseteq\partial S(0,|t|)=\{x\in\mathbb{R}^3;\|x\|=|t|\}$; perciò

$$T(t)\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^3) \quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

Si ha:

$$|< T(t)\ |\ \psi >|\le |t|\sup_{\|x\|=|t|}|\psi(x)|\le(1+|t|)\|\psi\|_0 \quad \forall\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \tag{3.48}$$

$$|< \frac{dT(t)}{dt}\ |\ \psi >| = |\frac{t}{4\pi}\int_{\|y\|=1}\psi(ty)\,dy+\frac{t}{4\pi}\int_{\|y\|=1}\sum_{j=1}^{3}(D_j\psi)(ty)y_j\,dy|\le$$

$$\le(1+|t|)\sup_{\|x\|=|t|}\sum_{|\alpha|\le1}(1+\|x\|)|D^\alpha\psi(x)|\le C_1(1+|t|)\|\psi\|_1 \tag{3.49}$$

$\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3), C_1$ opportuno.

$$| < \frac{d^2T(t)}{dt^2} \mid \psi > | = | < T(t)|\Delta_x \psi > | \leq C_2(1+|t|)\|\psi\|_2 \qquad (3.50)$$

$\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3), C_2$ opportuno.

La (3.48), (3.49) e la (3.50) in base al teorema (3.2.7) assicurano che la $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$ definita da:

$$< T \mid \chi >= \int_{-\infty}^{+\infty} < T(s) \mid \chi(s,\cdot) > \, ds \quad \chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$$

è soluzione di (3.43) con $S_0 = 0, s_1 = \delta$.
Osserviamo che $t \longrightarrow T(t)$ è di classe C^∞ e:

$$T(t) \xrightarrow[|t| \to +\infty]{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)} 0, \qquad (3.51)$$

$$| < \frac{d^mT(t)}{dt^m} \mid \psi > | \leq C_m(1+|t|)\|\psi\|_{p_m} \quad \forall m \in \mathbb{N}, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \quad (3.52)$$

$$supp \frac{d^mT(t)}{dt^m} \subseteq \partial S(0,|t|). \qquad (3.53)$$

Infatti:

$$| < T(t)|\psi > | = \frac{|t|}{4\pi} | \int_{\|y\|=1} \psi(ty)\, dy | \leq$$

$$\frac{|t|}{4\pi} \int_{\|y\|=1} \frac{C_\psi}{(1+|t|\|y\|)^2}\, dy \xrightarrow[|t| \to \infty]{} 0$$

e quindi vale la (3.51).
La (3.52) è stata provata per $m = 0,1,2$; per $m > 2$ segue dal fatto che

$$\frac{d^{2k}T(t)}{dt^{2k}} = \Delta_x^k T(t) \quad \text{e} \quad \frac{d^{2k+1}T(t)}{dt^{2k+1}} = \Delta_x^k \frac{dT(t)}{dt}.$$

Poniamo ora

$$V(t) = \frac{dT(t)}{dt} \qquad (3.54)$$

allora

$$\begin{cases} \frac{d^2V(t)}{dt^2} - \Delta_x V(t) = 0 \\ V(0) = \delta, \quad \frac{dV(0)}{dt} = 0 \end{cases} \qquad (3.55)$$

Infatti

$$0 = \frac{d}{dt} < \frac{d^2T(t)}{dt^2} - \Delta_x T(t)|\psi >=< \frac{d^2V(t)}{dt^2} - \Delta_x V(t)|\psi > \quad \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$$

e
$$V(0) = \frac{dT(0)}{dt} = \delta, \quad \frac{dV(0)}{dt} = \frac{d^2T(0)}{dt^2} = \Delta_x T(0) = 0$$
Proviamo ora che la soluzione di (3.44) è:
$$W(t) = T(t) * S_1 + V(t) * S_0 \tag{3.56}$$

Ricordiamo che le convoluzioni esistono come distribuzioni temperate perché $T(t)$ e $V(t)$ hanno supporto compatto.
Risulta:
$$\frac{d^2W(t)}{dt^2} = \frac{d^2T(t)}{dt^2}*S_1+\frac{d^2V(t)}{dt^2}*S_0 = \Delta_x T(t)*S_1+\Delta_x V(t)*S_0 = \Delta_x W(t),$$
$$W(0) = T(0) * S_1 + V(0) * S_0 = \delta * S_0 = S_0$$
$$\frac{dW(0)}{dt} = \frac{dT(0)}{dt} * S_1 + \frac{dV(0)}{dt} * S_0 = \delta * S_1 = S_1;$$
Questo vale perché $T(t)$ per t in un intorno di t_0 ha supporto contenuto in un compatto, si ha quindi
$$\frac{T(t) * S_! - T(t_0) * S_1}{t - t_0} = \frac{T(t) - T(t_0)}{t - t_0} * S_1 \quad \xrightarrow[t\to t_0]{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)} \quad \frac{dT(t_0)}{dt} * S_1;$$
perciò esiste $(\frac{d}{dt}(T(t) * S_1))_{t=t_0}$ che è uguale a $\frac{dT(t_0)}{dt} * S_1$.
Osserviamo che, fissato ad arbitrio t, se $(S_{0,m})_{m\in\mathbb{N}}$ e $(S_{1,m})_{m\in\mathbb{N}}$ sono due successioni in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ convergenti a S_0 e a S_1, posto
$$W_m(t) = T(t) * S_{1,m} + V(t) * S_{0,m}$$

risulta
$$W_m(t) \xrightarrow[m\to\infty]{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)} W(t)$$
Ciò prova che $W(t)$ dipende con continuità dai dati nella topologia di $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$.

Sia ora $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$; esistono C e p tali che:
$$| < S|\psi > | \leq C\|\psi\|_p \quad \forall\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$$

Allora

$$| < T(t) * S|\psi > | = | < S_x| < (T(t))_y|\psi(x + y) >> | =$$

$$= |\frac{t}{4\pi} < S_x| \int_{\|y\|=1} \psi(x+ty)\, dy > | \leq \frac{|t|}{4\pi} C \| \int_{\|y\|=1} \psi(\cdot + ty)\, dy\|_p =$$

$$= \frac{C|t|}{4\pi} \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \sup_{|\alpha|\leq p} (1+\|x\|)^p \int_{\|y\|=1} |D_x^\alpha \psi(x+ty)|\, dy \leq$$

$$\frac{C|t|}{4\pi} \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \sup_{|\alpha|\leq p} \frac{(1+\|x\|)^p}{(1+\|x+ty\|)^p} =$$

$$\frac{C|t|}{4\pi} \sup_{z\in\mathbb{R}^3} \sup_{\|y\|=1} (\frac{(1+\|z-ty\|)}{1+\|z\|})^p \leq$$

$$C'(1+|t|)^{p+1} \|\psi\|_p$$

Analogamente

$$| < \frac{d^j W(t)}{dt^j} |\psi > | \leq C(1+|t|)^k \|\psi\|_k \quad \forall \psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Per il teorema (3.2.7) segue che $W \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ definita da:

$$< W|\chi >= \int_{-\infty}^{+\infty} < W(t)|\chi(t,\cdot) > \, dt \quad \chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \tag{3.57}$$

è soluzione di (3.43).

Osserviamo che se $(S_{0,m})_{m\in\mathbb{N}}$ e $(S_{1,m})_{m\in\mathbb{N}}$ sono due successioni in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ convergenti a S_0 e a S_1, posto

$$W_m(t) = T(t) * S_{1,m} + V(t) * S_{0,m}$$

come sopra, e per $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$

$$< W_m|\chi >= \int_{-\infty}^{+\infty} < W_m(t)|\chi(t,\cdot) > \, dt$$

allora

$$W_m \xrightarrow[m\to\infty]{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)} W.$$

Questo prova la dipendenza continua di W dai dati.

- **PROBLEMA CP OMOGENEO:**
  Sia $t \to T(t)$ la funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ definita da (3.47).
  Sia $f \in C(\mathbb{R}^3) \cap K_1(\mathbb{R}^3)$.
  Poiché $suppT(t)$ è compatto $\quad \forall t \in \mathbb{R}$, esiste $T(t) * f$ e $\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ risulta

$$< T(t)*f|\psi >=< (T(t)_x| < f(y)|\psi(x+y) >>=< (T(t))_x| \int_{\mathbb{R}^3} f(y)\psi(x+y)\, dy >=$$

$$=< (T(t))_x| \int_{\mathbb{R}^3} \psi(y)f(y-x)\, dy >= \frac{t}{4\pi} \int_{\|y\|=1} (\int_{\mathbb{R}^3} \psi(\xi)f(\xi-ty)d\xi)\, dy =$$

$$= \frac{t}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \psi(x)(\int_{\|y\|=1} f(x-ty)\, dy)\, dx.$$

Dunque

$$((T(t) * f)(x) = \frac{t}{4\pi} \int_{\|y\|=1} f(x-ty)\, dy \tag{3.58}$$

La funzione $(t,x) \to (T(t) * f)(x)$ è quindi una funzione continua su $\mathbb{R}^4$.

Poiché $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ esistono C e p tali che $| < f|\psi > | \leq C\|\psi\|_p \quad \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$; allora da (3.48) segue:

$$| < T(t) * f|\psi > | \leq (1+|t|) \sup_{\|x\|=|t|} | < f(y)|\psi(x+y) > | \leq$$

$$\leq C(1+|t|) \sup_{\|x\|=|t|} \sup_{y\in\mathbb{R}^3} \sup_{|\alpha|\leq p} (1+\|y\|)^p |D^\alpha \psi(x+y)| \leq$$

$$\leq C(1+|t|)^{p+1} \|\psi\|_p \quad \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$$

Pertanto l'uguaglianza

$$< R|\chi >= \int_{-\infty}^{+\infty} < T(t) * f|\chi(t,\cdot) > \, dt, \quad \chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \tag{3.59}$$

definisce una distribuzione $R \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$.

Risulta:

$$< R|\chi >= \int_{-\infty}^{+\infty} < \frac{t}{4\pi} \int_{\|y\|=1} f(x-ty)\, dy|\chi(t,x) > \, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{4\pi} (\int_{\mathbb{R}^3} (\int_{\|y\|=1} f(x.ty)\, dy)\chi(t,x)\, dx)\, dt) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^4} \chi(t,x)(\frac{t}{4\pi} \int_{\|y\|=1} f(x-ty)\, dy)\, dx\, dt;$$

Dunque R è la funzione

$$(t, x) \to R(t, x) = \frac{t}{4\pi} \int_{\|y\|=1} f(x - ty)\, dy, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^4.$$

Sostituendo $T(t)$ con $\frac{dT(t)}{dt}$ si ha analogamente che l'uguaglianza

$$< Q|\chi >= \int_{-\infty}^{+\infty} < \frac{dT(t)}{dt} * f|\chi(t, \cdot) > \, dt \quad \chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \qquad (3.60)$$

definisce $Q \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$.

Per il teorema (3.2.2) è

$$Q = \partial_t P.$$

A questo punto, dimostriamo che: se $f_0 \in C^3(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ e
$f_1 \in C^2(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ allora:

$$W(t, x) = \frac{t}{4\pi} \int_{\|y\|=1} f_1(x - ty)\, dy + \frac{\partial}{\partial_t}(\frac{t}{4\pi} \int_{\|y\|=1} f_0(x - ty)\, dy) =$$

$$= \frac{1}{4\pi t} \int_{\|x-y\|=|t|} f_1(y)\, dy + \frac{\partial}{\partial_t}(\frac{1}{4\pi t} \int_{\|x-y\|=|t|} f_0(y)\, dy) \qquad (3.61)$$

è soluzione del problema CP, cioè: $W \in C^2(\mathbb{R}^4)$ è tale che

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \Delta_x W = 0 \quad \text{per} \quad (t, x) \in \mathbb{R}^4$$

$$W(0, x) = f_0(x), \frac{\partial W(0, x)}{\partial t} = f_1(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Per quanto provato nel problema P, la W definita da (3.57) è soluzione di P; ma adesso risulta

$$< W|\chi >= \int_{-\infty}^{+\infty} < T(t) * f_1 + \frac{dT(t)}{dt} * f_0|\chi(t, \cdot) > \, dt =< R|\chi > + < Q|\chi > .$$

Sia ora R_j la R definita in (3.59) con f_j al posto di f, $j = 0, 1, ..$ e Q_0 la Q definita da (3.60) con f_0 al posto di f.

Allora la W definita da:

$$< W|\chi >= \int_{-\infty}^{+\infty} < T(t) * f_1 + \frac{dT(t)}{dt} * f_0|\chi(t, \cdot) > \, dt$$

cioè la $W = R_1 + Q_0 = R_1 + \partial_T R_0$ risulta soluzione del problema P.

Se f_0 e f_1 hanno la regolarità dichiarata allora W è la funzione (3.61) che risulta di classe C^2 ed è quindi soluzione del problema CP.

- **SOLUZIONE ELEMENTARE**:

  Sia $t \to T(t)$ la funzione da R a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ definita da (3.47).

  Il teorema (3.2.9) assicura che è soluzione elementare relativa all'operatore

$$\partial_t^2 - \Delta_x$$

  la $E_+ \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$ definita da:

$$< E_+|\chi >= \int_0^{+\infty} < T(t)|\chi(t,\cdot) > \, dt =$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{+\infty} t(\int_{\|y\|=1} \chi(t,ty)\,dy)\,dt =$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1}{t}(\int_{\|y\|=t} \chi(t,y)\,dy)\,dt \quad \chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4).$$

  Risulta supp$E_+ = \{(t,x) \in \mathbb{R}^4; t \geq 0, \|x\| = t\}$ che è la superficie di un semicono col vertice nell'origine e avente per asse il semiasse delle t positive.

  Come abbiamo osservato nella sezione dedicata alle soluzioni elementari, sommando con E_+ una soluzione di $\partial_t T - \Delta_x T = 0$ si ha ancora una soluzione elementare: quindi risulta soluzione elementare anche $E_- = E_+ - T$ con

$$< T|\chi >= \int_{-\infty}^{+\infty} < T(t)|\chi(t,\cdot) > \, dt$$

  dunque

$$< E_-|\chi >= -\int_{-\infty}^{0} < T(t)|\chi(t,\cdot) > \, dt \tag{3.62}$$

  e supp $E_- = \{(t,x) \in \mathbb{R}^4; t \leq 0, \|x\| = t\}$

- **CONVOLUZIONE CON** E^{+}:

Trattando la convoluzione nel Capitolo 2, l'abbiamo definita in modo che essa esista se una delle due distribuzioni temperate ha supporto compatto. In questo paragrafo consideriamo invece convoluzioni con E_{+}, che come abbiamo visto precedentemente, non ha supporto compatto.

Poniamo in $\mathbb{R}^n$ e consideriamo i coni

$$\mathcal{K}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 - a \geq (\sum_{j=2}^{n} x_j^2)^{\frac{1}{2}}\} \quad a \in \mathbb{R}$$

e

$$\mathcal{K}_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq b\} \quad b \in \mathbb{R}.$$

Supponiamo $a, b \in \mathbb{R}_{-}$.

Sia $f_j \in K_\infty(\mathbb{R}^n)$, $\quad suppf_j \subseteq \mathcal{K}_j \quad j = 1, 2.$

Fissiamo $x \in \mathbb{R}^n$, allora

$$\mathcal{K}_1 \cap (x - \mathcal{K}_2) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n ; (\sum_{j=2}^{n} y_j^2)^{\frac{1}{2}} \leq y_1 - a \leq x_1 - a - b \right\}$$

Questo insieme è vuoto se $x_1 - a - b < 0$ e in caso contrario è un compatto perché

$$y \in \mathcal{K}_1 \cap (x - \mathcal{K}_2) \Longrightarrow \|y\|^2 = y_1^2 + \sum_{j=2}^{n} y_j^2 \leq 3(x_1 - b)^2 + 2a^2.$$

Pertanto

$$(f_1 * f_2) = \int_{\mathbb{R}^n} f_1(y) f_2(x-y)\, dy =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x_1 < a + b \\ \displaystyle\int_{\mathcal{K}_1 \cap (x - \mathcal{K}_2)} f_1(y) f_2(x-y)\, dy & \text{se} \quad x_1 \geq a + b \end{cases}$$

Per ipotesi esistono $C > 0$ e $M \geq 0$ tali che

$$|f_j(x)| \leq C(1 + \|x\|)^M \quad \forall x \in \mathbb{R}^n;$$

allora

$$|\int_{\mathcal{K}_1 \cap (x - \mathcal{K}_2)} f_1(y) f_2(x-y)\, dy| \leq C^2 \int_{\mathcal{K}_1 \cap (x - \mathcal{K}_2)} (1+\|y\|)^M (1+\|x-y\|)^M\, dy \leq$$

$$C^2(1+(3(x_1-b)^2+2a^2)^{\frac{1}{2}})^M \times (1+\|x\|+(3(x_1-b)^2+2a^2)^{\frac{1}{2}})^M \mu(S(0,(3(x_1-b)^2+2a^2)^{\frac{1}{2}}))$$
$$\leq C'(1+\|x\|)^{2M+n}$$

Ciò prova che $f_1 * f_2$ esiste, appartiene a $K_\infty(\mathbb{R}^n)$ e
$\mathrm{supp}(f_1 * f_2) \subseteq \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2$.

Osservazione 21. Per ogni $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si ha

$$< f_1 * f_2|\phi >= \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^n} f_1(y) f_2(x-y)\, dy) \phi(x)\, dx =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} f_1(y) (\int_{\mathbb{R}^n} f_2(x-y)\phi(x)\, dx)\, dy =$$
$$\overset{6}{} \int_{\mathbb{R}^n} f_1(y) (\int_{\mathbb{R}^n} f_2(z)\phi(z+y)\, dz)\, dy =$$
$$=< f_1(y)| < f_2(z)|\phi(y+z) >>=< f_1(x) \otimes f_2(y)|\phi(x+y) > .$$

Notazione 3. Indichiamo con $\mathcal{S}_1'(\mathbb{R}^n)$ l'insieme delle distribuzioni temperate del tipo $\sum_{|\alpha|\leq p} \partial^\alpha f_\alpha$ con $f_\alpha \in C(\mathbb{R}^n) \cap K_\infty(\mathbb{R}^n)$ supp $f_\alpha \subseteq \mathcal{K}_1$ e con $\mathcal{S}_2'(\mathbb{R}^n)$ l'insieme delle distribuzioni temperate del tipo $\sum_{|\beta|\leq q} \partial^\beta g_\beta$ con $g_\beta \in C(\mathbb{R}^n) \cap K_\infty(\mathbb{R}^n)$ supp $g_\beta \subseteq \mathcal{K}_2$.

Se $S \in \mathcal{S}_1'(\mathbb{R}^n)$ e $T \in \mathcal{S}_2'(\mathbb{R}^n)$ definiamo la convoluzione

$$S * T = \sum_{|\alpha|\leq p} \sum_{|\beta|\leq q} (\partial^\alpha f_\alpha) * (\partial^\beta g_\beta) =$$
$$\sum_{|\alpha|\leq p} \sum_{\beta\leq q} \partial^{\alpha+\beta} (f_\alpha * g_\beta). \tag{3.63}$$

e $(f_\alpha * g_\beta) \in K_\infty(\mathbb{R}^n)$ e supp $(f_\alpha * g_\beta) \subseteq \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2$.
Ci limitiamo a enunciare alcune proprietà utili:

$$S * T = T * S \tag{3.64}$$

$$(\partial^\mu S) * T = S * \partial^\mu T = \partial^\mu (S * T) \tag{3.65}$$

$$< S * T|\phi >=< S_x| < T_y|\phi(x+y) >> . \tag{3.66}$$

[6] Per il teorema di Fubini- Tonelli

- **UNICITA' DELLE SOLUZIONI DEI PROBLEMI P E CP**:
Sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$, supp $T \subseteq \{(t,x) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3; t \geq 0\}$; si sa che $T = \partial^\mu g$ per un certo multiindice μ e una $g \in C(\mathbb{R}^4) \cap K_\infty(\mathbb{R}^4)$.
Sia $\omega \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R}^4)$ [7] tale che $\omega(t,x) = 1$ per $t \geq 0$ e $\omega(t,x) = 0$ per $t \leq a$; risulta
$$T = \omega T.$$
D'altra parte, $\omega \partial^\mu g$ si può scrivere come una somma finita di addendi del tipo: $\partial^\alpha(\omega_\alpha g)$ dove ω_α è una derivata di ω.
Dunque $T \in \mathcal{S}'_2(\mathbb{R}^4)$.
Analogamente se $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$, supp$S \subseteq \{(t,x) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3; t \geq \|x\|\}$ allora $S \in \mathcal{S}'_1(\mathbb{R}^4)$.
Da questa osservazione, dal fatto che se $U \in \mathcal{S}'_1(\mathbb{R}^4)$, supp$U \subseteq \bar{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}^3$ allora esiste $E_+ * U$, e vale quindi la (3.65), e dall'osservazione (19), si ha che: se $U \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$ è tale che supp $U \subseteq \bar{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}^3$ e $\partial_t^2 U - \Delta_x U = 0$, allora è $U = 0$.
Da qui segue che il problema:
$$\begin{cases} \partial_t^2 T - \Delta_x T = 0 \\ T|_{t=0} = \partial_t T|_{t=0} = 0 \end{cases}$$
ha solo la soluzione nulla.
Sia infatti T una soluzione per il problema precedente.
Allora per il teorema (3.2.8) esiste $t \to T(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ di classe C^∞ tale che
$$< T|\chi >= \int_{-\infty}^{+\infty} < T(t)|\chi(t,\cdot) > \, dt \quad \chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4).$$
Per il teorema (3.2.3) è
$$T(0) = T|_{t=t_0} = 0 \quad \frac{dT(0)}{dt} = \partial_t T|_{t=0} = 0.$$
Allora per teorema (3.2.2) [8] poiché $\frac{d^2T(t)}{dt^2} - \Delta_x T(t) = 0$ anche la distribuzione $\bar{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$ definita da
$$< \bar{T} \mid \chi >= \int_0^{+\infty} < T(t)|\chi(t,\cdot) > \, dt, \quad \chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$$

[7] vedi notazione (1) nel Capitolo 2
[8] con $\Omega = \mathbb{R}^4$

è soluzione di $\partial_t^2 T - \Delta_x \bar{T}$; ma supp $\bar{T} \subseteq \bar{R}_+ \times \mathbb{R}^3$. Dunque $\bar{T} = 0$.
Ne segue che

$$\int_0^{+\infty} \phi(t) < T(t)|\psi > \ dt = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3).$$

Per la continuità di $t \to < T(t)|\psi >$ si ha allora $< T(t)|\psi >= 0 \quad \forall t > 0$ e $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ e quindi $T(t) = 0 \quad \forall t > 0$.
Ora anche la seguente:

$$< \bar{\bar{T}}|\psi >= \int_{-\infty}^{0} < T(t)|\chi(t, \cdot) > \ dt \quad \chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$$

definisce una distribuzione $\bar{\bar{T}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$ con $supp \bar{\bar{T}} \subseteq \bar{\mathbb{R}}_- \times \mathbb{R}^3$ tale che

$$\partial_t^2 \bar{\bar{T}} - \Delta_x \bar{\bar{T}} = 0;$$

questa ammette quindi la convoluzione con la soluzione elementare E_- e quindi è nulla.
Allora $T(t) = 0$ per $t < 0$ e quindi $T(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ e quindi $T = 0$.
Da questa proposizione segue che il problema P, e quindi anche il problema CP, ha al più una soluzione.

- **PROBLEMA P NON OMOGENEO**

Sia $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$ definita da

$$< F|\chi >= \int_{-\infty}^{+\infty} < F(t)|\chi(t, \cdot) > \ dt \quad \chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$$

essendo $t \to F(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3), \quad t \in \mathbb{R}$ di classe C^1 ed esista $a \in \mathbb{R}^+$ e un compatto $K \subset \mathbb{R}^3$ tale che $F(t) = 0$ per $|t| \geq a$,
supp $F(t) \subseteq K \quad \forall t \in \mathbb{R}$.
Allora $V = E_+ * F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$ soddisfa l'equazione $\partial_t^2 V - \Delta_x V = F$ ed esistono le sezioni temperate $V|_{t=0}$ e $\partial_t V|_{t=0}$.
Riferiamoci al teorema (3.2.6) con $F(t)$ al posto di $T(t)$ e con la $T(t)$ definita da (3.47) al posto di $S(t)$.
Poiché $F(t)$ soddisfa tutte le ipotesi del teorema, risulta supp F compatto; allora esiste $v = E_+ * F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$ e quindi $\partial_T^2 V - \Delta_x V = F$.
Per le (3.48), (3.49), (3.50), la $T(t)$ che genera E_+ soddisfa le condizioni richieste a $S(t)$ nel teorema (3.2.6); ne segue che esistono le sezioni

temperate $V|_{t=t_0}$ e $\partial_T V|_{t=t_0}$ e precisamente:

$$< V|_{t=t_0} \mid \psi >= \int_0^a < T(t) * F(-t) \mid \psi > \, dt \tag{3.67}$$

$$< \partial_t V|_{t=t_0} \mid \psi >= \int_0^{+\infty} < T'(t) * F(-t) \mid \psi > \, dt \tag{3.68}$$

Allora, se $S_0, S_1 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$, la sola soluzione del problema

$$\begin{cases} \partial_t^2 W - \Delta_x W = F \\ W|_{t=t_0} = S_0 \quad \partial_t W|_{t=0} = S_1 \end{cases}$$

è la distribuzione temperata

$$< W|\chi >=< E_+ * F|\chi > + \int_{-\infty}^{+\infty} < W(t)|\chi(t,\cdot) > \, dt \quad \chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

con $W(t) = T(t) * (S_1 - \partial_t V|_{t=0}) + T'(t) * (S_0 - V|_{t=0})$.

Ciò segue dalla (3.56) e dalla discussione del problema P omogeneo.

Se, oltre alle ipotesi fatte su $F(t)$, supponiamo $F(t) = 0$ per $t \leq 0$, allora risulta supp $F \subseteq \bar{R}_+ \times \mathbb{R}^3$.

Dalle (3.67), (3.68), segue in questo caso che $V|_{t=t_0} = \partial_t V|_{t=t_0} = 0$.

Poiché il problema P ha al più una soluzione, la V è in questo caso la sola distribuzione temperata tale che

$$(\partial_t^2 - \Delta_x)V = F, \quad V|_{t=t_0} = 0, \partial_t V|_{t=t_0} = 0.$$

Supponiamo ora che $t \to F_m(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$, $\quad t \in \mathbb{R}$, $\quad m \in \mathbb{N}$, sia di classe C^1 e tale che $F_m(t) = 0$ per $|t| \geq a$, supp $F_m(t) \subset K$, compatto di $\mathbb{R}^3$ $\quad \forall t \in \mathbb{R} \quad$ e $\quad \forall m \in \mathbb{N}$.

Sia F_m la distribuzione di $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$ generata da $F_m(t)$ cosi come F è generata da $F(t)$, e sia $V_m = E_+ * F_m$; allora

$$(\partial_t^2 - \Delta_x)V_m = F_m$$

e

$$F_m \xrightarrow[m\to\infty]{\mathcal{E}'(\mathbb{R}^4)} F \Longrightarrow v_m \xrightarrow[m\to\infty]{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)} V.$$

Da questo risultato e dalle osservazioni fatte sul problema P omogeneo, segue che:
Se $F(t)$ soddisfa tutte le condizioni dichiarate precedentemente ed è $F(t) = 0$ per $t \leq 0$, allora la soluzione del problema P dipende con continuità dai dati S_0, S_1 e F.

Appendice A

Alcuni complementi sulle distribuzioni

Indichiamo con $\Phi'(\mathbb{R}^n)$ lo spazio delle distribuzioni su $\mathbb{R}^n$, con $B(x_0, \delta)$ denotiamo l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \delta\}$ e con ω_n la misura $(n-1)$ dimensionale della sfera $\partial B(0,1)$.

Definizione A.1. Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ si dice **a simmetria radiale** se e solo se esiste: $v : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ tale che $f(x) = v(|x|)$. Spesso, nel seguito, indicheremo con la stessa lettera f e v, e scriveremo brevemente: $f(x) = f(|x|)$.
Equivalentemente f è a simmetria radiale se e solo se $f(Ax) = f(x)$ per ogni A matrice unitaria $n \times n$.

Denotiamo con $\mathcal{R}$ il sottospazio di $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni a simmetria radiale. Questo è chiuso, e dal teorema delle proiezioni ortogonali segue che ogni $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ si scompone in modo univoco nella somma di una funzione a simmetria radiale e di una funzione in $\mathcal{R}^\perp$. Data una generica $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ indicheremo con f_r la proiezione di f su $\mathcal{R}$ e la chiameremo *parte radiale.* Cerchiamo ora di dare una rappresentazione esplicita di f_r in funzione di f: cominciamo con l'osservare che , per una qualsiasi $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ vale la seguente formula di integrazione:

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx = \int_0^{+\infty} d\rho \int_{\partial B(0,\rho)} g(s)\,ds = \omega_n \int_0^{+\infty} \rho^{n-1}\,d\rho ⨍_{\partial B(o,\rho)} g(s)\,ds$$

in cui con il simbolo $⨍_A f\,d\mu$ abbiamo indicato la media f su A, cioè $\frac{1}{\mu(A)} \int_A f\,d\mu$.

In particolare, se f e $\phi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ e $\phi(x) = \phi(|x|)$ ha simmetria radiale,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\, dx = \omega_n \int_0^\infty \rho^{n-1}\phi(\rho)\, d\rho \fint_{\partial B(0,\rho)} f(s)\, ds \tag{A.1}$$

Dunque posto $h(x) = \fint_{\partial B(0,|x|)} f(s)\, ds$ si ha che

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - h(x))\phi(x)\, dx = 0 \quad \forall \phi \in \Phi_r \text{[1]}$$

pertanto $f - h \in \mathcal{R}^\perp$, da cui $f_r = h$, ovvero

$$f_r(x) = f_r(|x|) = \fint_{\partial B(0,|x|)} f(s)\, ds. \tag{A.2}$$

Se $\phi \in \Phi_r$, valgono le seguenti regole:

$$(\nabla \phi_r(x) \cdot x) = |x|\phi_r'(|x|) \tag{A.3}$$

$$\nabla \phi_r(x) = \phi''(|x|) + \frac{n-1}{|x|}\phi_r'(|x|) \tag{A.4}$$

Definizione A.2. Sia ora $T \in \Phi'$.
Diremo che T è **a simmetria radiale** se $< T, \phi(Ax) >=< T, \phi(x) >$ per ogni $\phi \in \Phi$ e per ogni A matrice unitaria $n \times n$.
Indicheremo con Φ_r' lo spazio delle distribuzioni a simmetria radiale.

Consideriamo qualche esempio di distribuzione a simmetria radiale che ci sarà utile in seguito:
Sia $t \in \mathbb{R}^+$.
Definiamo

$$\delta_0 = \delta \quad \text{e} \quad \forall t > 0 \ \ < \delta_t, \phi >= \phi_r(t) = \fint_{\partial B(0,t)} \phi(s)\, ds$$

e analogamente si può definire

$$< \delta_t', \phi >= \phi_r'(t); \quad < \delta_t'', \phi >= \phi_r''(t); \quad < \delta_t^{(k)}, \phi >= \phi_r^{(k)}(t)$$

In generale le distribuzioni a simmetria radiale $\delta_t^{(k)}$ sono distribuzioni di ordine k, aventi come supporto la superficie sferica $\partial B(0,t)$.
Il nostro obiettivo è quello di calcolare la trasformata di Fourier delle distribuzioni $\delta_t^{(k)}$.
Essendo δ_t una distribuzione a supporto compatto, la funzione

$$\tilde{\delta}_t(\xi) =< \delta_t(x), e^{-i\xi x} >= \fint_{\partial B(0,t)} e^{-i\xi s}\, ds.$$

[1] Indichiamo così lo spazio numerabilmente normato delle funzioni a simmetria radiale.

è una funzione olomorfa intera, a simmetria radiale e inoltre

$$\tilde{\delta}_t(0) =< \delta_t, 1 >= 1.$$

Osserviamo ora che, essendo $supp\delta_t = \partial B(0,t)$ si ha

$$(|x|^2 - t^2)\delta_t = 0 \Longrightarrow -\Delta\tilde{\delta}_t - t^2\tilde{\delta}_t = 0$$

e quindi ci siamo ricondotti a cercare soluzioni a simmetria radiale dell'equazione

$$-\Delta u - t^2 u = 0 \tag{A.5}$$

su tutto $\mathbb{R}^n$.

Se f risolve $-\Delta f - f = 0$ allora $u(x) = f(tx)$ risolve la $(A.5)$; pertanto da $(A.4)$ e indicando con $\psi_n(\rho)$ la soluzione del problema di Cauchy seguente

$$\begin{cases} \psi_n'' + \frac{n-1}{\rho}\psi_n' + \psi_n = 0 \\ \psi_n(0) = 1 \quad \psi_n'(0) = 0 \end{cases} \tag{A.6}$$

risulta

$$\tilde{\delta}_t(\xi) = \fint_{\partial B(0,t)} e^{-i\xi s}\, ds = \psi_n(t|\xi|). \tag{A.7}$$

Il problema $(A.6$ è risolvibile per serie, e le funzioni ψ_n così definite sono esplicabili in termini di una classe di funzioni che va sotto il nome di **funzioni di Bessel**. Indichiamo con $J_\lambda(z)$ la funzione di Bessel di prima specie, così definita:

$$J_\lambda(z) = \sum_{h=0}^{\infty}(-1)^h \frac{(\frac{z}{2})^{\lambda+2h}}{h!\Gamma(\lambda+h+1)}.^2 \tag{A.8}$$

Posto $\nu = \frac{n}{2} - 1$ risulta

$$\psi_n(\rho) = 2^\nu \Gamma(\nu+1)\rho^{-\nu} J_\nu(\rho) \tag{A.9}$$

Quando n è dispari, le funzioni di Bessel $J_\lambda(z)$ si esprimono in termini di funzioni trigonometriche; ad esempio:

[2]Ricordiamo che la Γ di Eulero è definita da

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}\, dx$$

con la proprietà che $\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\psi_n(\rho) = \begin{cases} \cos\rho & n = 1 \\ \frac{\sin\rho}{\rho} & n = 3 \\ 3\frac{\sin\rho - \rho\cos\rho}{\rho^3} & n = 5 \end{cases}$$

Infine dalla definizioni di $\delta_t^{(k)}$ ricaviamo subito l'espressione della trasformata di Fourier per questa famiglia di distribuzioni:

$$\tilde{\delta}_t^{(k)}(\xi) = |\xi|^k \psi_n^{(k)}(t|\xi|) \tag{A.10}$$

Scriviamo esplicitamente le trasformate di Fourier di δ_t quando $n = 3$.
Sappiamo che

$$\psi_3(\rho) = \frac{\sin\rho}{\rho}$$

e quindi, in dimensione $n = 3$,

$$\tilde{\delta}_t(\xi) = \frac{\sin t|\xi|}{|\xi|} \tag{A.11}$$

A.1 Trasformata di Fourier a simmetria radiale

Sia ora $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ una funzione $f(x) = f(|x|)$ a simmetria radiale.
Ci proponiamo di dare una formula esplicita di $\tilde{f}(\xi)$ che tenga conto di questa simmetria.
Dalla definizione

$$\tilde{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\xi x}\,dx$$

Da $(A.1)$ si ha che

$$\tilde{f}(\xi) = \omega_n \int_0^{+\infty} d\rho\ \rho^{n-1} f(\rho) \fint_{\partial B(0,\rho)} e^{-i\xi s}\,ds$$

e quindi da $(A.7)$ segue

$$\tilde{f}(\xi) = \omega_n \int_0^{+\infty} \rho^{n-1} f(\rho)\psi_n(\rho|\xi|)\,d\rho \tag{A.12}$$

Dunque $\tilde{f}(\xi) = \tilde{f}(|\xi|)$, cioè la trasformata di Fourier di una funzione a simmetria radiale è ancora a sua volta una funzione a simmetria radiale.
Naturalmente, se $\tilde{f}(\xi) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, sussiste la formula di inversione che,

essendo $\tilde{f}$ a simmetria radiale, è perfettamente analoga a $(A.12)$; si ha infatti

$$f(x) = f(|x|) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \int_0^{+\infty} \rho^{n-1} \tilde{f}(\rho) \psi_n(\rho|x|)\, d\rho$$

A.2 Il problema di Cauchy per l'equazione delle onde

Consideriamo il problema di Cauchy per l'equazione delle onde in $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + f(t,x) \quad \text{in } \mathbb{R}^n_x \times [0,\infty)_t \\ u(0,x) = \phi_0(x) \\ u_t(0,x) = \phi_1(x) \end{cases} \tag{A.13}$$

Effettuiamo una trasformata di Fourier parziale di $u(t,x)$ rispetto alle variabili spaziali x, e denotiamo con $v(t,\xi)$. Allora v risolve la seguente famiglia di problemi differenziali ordinari, parametrizzata da ξ:

$$\begin{cases} v'' + |\xi|^2 v = \tilde{f}(t,\xi) \\ v(0,\xi) = \tilde{\phi_0}(\xi) \\ v'(0,\xi) = \tilde{\phi_1}(\xi). \end{cases} \tag{A.14}$$

Quest'ultimo problema si può risolvere esplicitamente.
Osserviamo infatti che le funzioni

$$v_1(t,\xi) = \frac{\sin|\xi|t}{|\xi|}; \quad v_0(t,\xi) = \frac{\partial}{\partial t} v_1(t,\xi) = \cos|\xi|t \tag{A.15}$$

risolvono l'equazione $v'' + |\xi|^2 v = 0$ con condizioni di Cauchy $(0,1)$ per v_1 e $(1,0)$ per v_0.
Inoltre, un'applicazione del principio della variazione delle costanti arbitrarie mostra che la funzione

$$v_2(t,\xi) = \int_0^t \frac{\sin|\xi|\tau}{|\xi|} \tilde{f}(t-\tau,\xi)\, d\tau = \int_0^t v_1(\tau,\xi) \tilde{f}(t-\tau,\xi)\, d\tau \tag{A.16}$$

risolve l'equazione

$$v'' + |\xi|^2 v = f$$

con condizioni di Cauchy $(0,0)$.

Dunque, da $(A.15)$ e $(A.16)$ si ricava che la soluzione di $(A.14)$ è data da:

$$v(t,\xi) = \frac{\partial}{\partial t} v_1(t,\xi)\tilde{\phi}_0(\xi) + v_1(t,\xi)\tilde{\phi}_1(\xi) + \int_0^t v_1(\tau,\xi)\tilde{f}(t-\tau,\xi)\, d\tau \quad \text{(A.17)}$$

e quindi $u(t,x)$ si può ricavare da $(A.17)$ antitrasformando rispetto a ξ.

Se definiamo $E : \mathbb{R}_t \to \Phi'$ come soluzione del problema

$$\begin{cases} E_{tt} = \Delta E \\ E(0,x) = 0 \\ E_t(0,x) = \delta. \end{cases} \quad \text{(A.18)}$$

allora $\tilde{E}(t,\xi) = v_1(t,\xi) = \sin\frac{(t|\xi|)}{|\xi|}$.

Dunque conoscere $E(t)$ permette di risolvere esplicitamente il problema $(A.13)$, e ciò spiega come mai la distribuzione $E(t)$ dipendente dal parametro t prende il nome di *soluzione fondamentale* dell'equazione delle onde. Di $E(t)$, sappiamo la trasformata di Fourier; il problema quindi, consiste nell'effettuare una trasformata inversa. In altre parole, per ogni fissato t, occorre calcolare

$$E(t) = \mathcal{F}^{-1}\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}.$$

Bibliografia

[1] B. PINI, *Lezioni sulle distribuzioni: Distribuzioni temperate* CLUEB, Bologna, 1979

[2] E. BELARDINELLI, C.BONIVENTO *Teoria delle distribuzioni* PATRON, Bologna, 1968

[3] F.TREVES *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels.* Dover Publications Inc., Mineola New York, 2006

[4] V.S VLADIMIROV, *Le distribuzioni nella fisica matematica*, Editori Riuniti, Roma, 1981

[5] J. BELTRAMI, *Distributions and the Boundary value of Analytic function* Academic Press, New York-London, 1966.

[6] G. EVANS, *Analityc methods for partial differential equation*, Springer-Verlag, New York- Berlin, 2001.

[7] H. BREZIS, *Analisi funzionale: teoria e applicazioni* Ed. Liguori, Napoli, 2006

[8] W. RUDIN, *Analisi reale e complessa* Ed. Boringhieri, Torino, 1974.