

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI  
BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea in Matematica

**Studio geometrico differenziale  
dell'evoluzione storica del simbolo  
dello Yin-Yang**

Tesi di Laurea in Geometria

Relatore:

Prof.

Massimo Ferri

Presentata da:

Chiara Gentile

Correlatore:

Carlo Cottafava

II Sessione

A.a. 2013/2014



*Ai miei genitori  
e alle mie sorelle*



# Introduzione

Filosofia, religione, arte e matematica: a primo impatto potrebbe sembrare impossibile, data la diversità delle discipline, trovare un qualcosa che le leghi l'una con l'altra; in realtà questo non è assolutamente vero. Innanzitutto, come sappiamo, il confine tra religione e filosofia è sottilissimo: ne sono la testimonianza le religioni orientali quali buddhismo, taoismo e confucianesimo, vere e proprie filosofie di pensiero. L'arte, invece, può essere concepita come mezzo per esprimere in termini più semplici e immediati concetti religiosi che potrebbero apparire troppo astratti e quindi poco comprensibili. L'esempio più rappresentativo sono i simboli: disegni, di solito semplici e facili da ricordare, che rappresentano un concetto complesso. E la matematica? Sono anni ormai che si discute riguardo il rapporto tra arte e matematica, numerosi gli artisti appassionati di matematica e i matematici amanti dell'arte autori di libri e saggi trattanti questo argomento (per esempio [D 2014, E 2006, GC 2011]). Nell'arte classica occidentale è abbastanza semplice trovare un senso matematico: basta prendere in considerazione, per esempio, le numerose regole di proporzioni e di misure nella rappresentazione dell'anatomia umana, che seguono canoni geometrico-matematici ben precisi, oppure quelle delle strutture architettoniche, basate sul rapporto aureo. Nell'arte più moderna, invece, la matematica è diventato uno strumento per rappresentare la realtà in modo più veritiero: l'esempio più eclatante è sicuramente l'avvento della prospettiva, dapprima con Giotto e poi con Piero della Francesca. La matematica nell'arte è un po' ovunque: nelle proporzioni, nelle misure, nelle simmetrie; possiamo coglierla nella grandiosa perfezione

del Partenone greco, nell'equilibrio di una statua neoclassica, nel realismo di un dipinto moderno e non solo.

La stretta connessione tra religione, filosofia, arte e matematica è alla base di questo elaborato che tratta dello studio geometrico dell'evoluzione storica di un simbolo religioso: il Taijitu. Esso è uno dei simboli fondamentali della religione taoista e rappresenta l'espressione nel mondo dell'essenza del Tao. Tuttavia, al giorno d'oggi questo simbolo è stato spesso banalizzato e pochi conoscono il suo significato più profondo. Osservando questo simbolo da un punto di vista matematico, ciò che si nota è sicuramente una certa simmetria, nelle misure, nei colori, nelle dimensioni. Dopodiché un occhio più attento potrebbe soffermarsi sulla curva centrale del simbolo: due semicirconferenze tangenti nel punto centrale. La prima osservazione che si potrebbe fare riguarda la differenziabilità di tale curva: essa è solamente di classe  $C^1$ . A questo punto ci si potrebbe chiedere se esiste un motivo per cui la curva è stata concepita in questo modo e soprattutto se il diagramma supremo dello Yin e Yang veniva rappresentato in questo modo anche nel 2000 a.C. alle origini della filosofia taoista. La mia tesi parte proprio da questa semplice curiosità. Mi sono dunque documentata a riguardo, ho indagato sul vero significato del simbolo e scoperto che in realtà i primissimi esemplari di Taijitu erano molto lontani dalle due semicirconferenze raccordate e le versioni più moderne non sono altro che estreme semplificazioni del simbolo originale. Osservando i diversi simboli raccolti mi sono chiesta come potessi confrontarli in termini matematici e ho deciso prima di tutto di approssimare la curva interna con particolari curve polinomiali, le curve di Bézier, per poi studiarne le differenze.

Il mio lavoro si sviluppa in 3 capitoli: nel primo capitolo sono riportati riferimenti al contesto storico e culturale nel quale si sviluppò la religione taoista e viene spiegato il significato filosofico del simbolo in questione; il secondo capitolo invece è dedicato interamente agli strumenti matematici utilizzati: polinomi di Bernstein e curve di Bézier; infine, nel terzo capitolo, il più importante, viene descritto nello specifico il lavoro sperimentale svolto.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>i</b>
<b>1 Premesse storico-filosofiche</b>	<b>1</b>
1.1 Origine e sviluppo della filosofia taoista . . . . .	1
1.2 Simbolo del Taijitu . . . . .	3
<b>2 Curve di Bézier</b>	<b>5</b>
2.1 Polinomi della base di Bernstein . . . . .	6
2.1.1 Polinomi di Bernstein generalizzati . . . . .	7
2.1.2 Alcune proprietà dei polinomi della base di Bernstein . . . . .	8
2.1.3 Formula ricorrente . . . . .	9
2.1.4 Formula ricorsiva per la derivata . . . . .	9
2.1.5 Algoritmo di de Casteljau . . . . .	10
2.2 Curve di Bézier . . . . .	11
2.2.1 Alcune proprietà delle curve di Bézier . . . . .	13
<b>3 Studio geometrico della curva del Taijitu</b>	<b>15</b>
3.1 Varianti del simbolo raccolte . . . . .	16
3.2 Approssimazione con le curve di Bézier . . . . .	19
3.2.1 Programma Matlab implementato . . . . .	19
3.3 Curve approssimanti trovate . . . . .	21
3.4 Osservazioni . . . . .	25
3.4.1 Analisi di altri aspetti geometrici individuati . . . . .	25

Bibliografia

31



# Elenco delle figure

1.1	Taijitu . . . . .	3
2.1	Polinomi di Bernstein di quarto grado . . . . .	7
2.2	Esempio di curva di Bézier di grado 1 . . . . .	11
2.3	Esempio di curva di Bézier di grado 2 . . . . .	11
2.4	Esempi di curve di Bézier di grado 3 . . . . .	12
3.1	Prima incisione in pietra del Taijitu nel tempio di Chendgdu .	16
3.2	Seconda incisione in pietra del Taijitu nel tempio di Chendgdu	17
3.3	Pannello dipinto con Taijitu . . . . .	17
3.4	Disegno con inchiostro del Taijitu . . . . .	18
3.5	Coppa bicolore con Taijitu . . . . .	18
3.6	Esemplari moderni di Taijitu . . . . .	19
3.7	Curva approssimante di grado 9 . . . . .	21
3.8	Curva approssimante di grado 6 . . . . .	22
3.9	Curva approssimante di grado 5 . . . . .	23
3.10	Curva approssimante di grado 3 . . . . .	24



# Capitolo 1

## Premesse storico-filosofiche

In questo primo capitolo ho ritenuto opportuno dare alcune indicazioni storiche riguardo il Taoismo, questa religione così complessa che accompagna la Cina da secoli; per poi cercare di spiegare il significato filosofico del simbolo (detto Taichitu o Taijitu, che rappresenta l'espressione dello Yin e dello Yang nel mondo e che è l'oggetto di studio geometrico di questa tesi [AS 2007] ) e inquadrarlo all'interno di questo stile di pensiero.

### 1.1 Origine e sviluppo della filosofia taoista

Il taoismo (o daoismo) è un movimento filosofico e religioso che ha radici nella più remota antichità cinese. Comincia a svilupparsi sotto la dinastia degli Zhou orientali (770-256 a.C.); in quegli anni, infatti, la Cina attraversò momenti di instabilità politica e culturale e fu proprio questo clima di cambiamento a favorire la nascita di nuove correnti di pensiero; ma si cominciò effettivamente a parlare di taoismo con i suoi più grandi esponenti: Laozi (VI-V sec. a.C.) e Zhuang Zhou (IV-III sec. a.C.). Fin da subito, si distinse dalle filosofie occidentali per la sua impronta fortemente individualista: alla base della filosofia vi era l'importanza della crescita personale nel mondo, che doveva essere raggiunta tramite il non agire, l'annullamento di sé, il vivere in conformità con le leggi della natura ed in sintonia con il Dao, principio

ineffabile dell'universo, quiete perfetta, origine e impulso vitale di ogni essere vivente. Le prime testimonianze del pensiero taoista sono testi ricchi di parabole, allegorie ed immagini fantastiche; tra i più famosi c'è il *Daodejiing*, attribuito a Laozi, uno dei primissimi maestri. Quest'ultimo incarnava l'ideale di saggio: colui che viveva in conformità col Dao, al di là dei concetti di bene e male, colui che disponeva di uno stato mentale armonico e imperturbato ed era in grado di accedere all'immortalità mediante tecniche corporali e spirituali.

Rifuggendo ogni forma di dogmatismo e attinenza a regole ben precise, il pensiero taoista venne tramandato per secoli solo oralmente o nell'intimità del rapporto discepolo-maestro; ciò favorì il confronto diretto con altre scuole come quella buddhista quella dei cosmologi, dalla quale il taoismo assorbì le teorie sull'origine dell'universo, la teoria dello Yin e Yang e la teoria della cinque fasi. Soltanto sotto la dinastia degli Han Orientali (25-220 d.C.) assunse finalmente i tratti di una vera e propria chiesa con un clero organizzato secondo un proprio apparato liturgico, furono canonizzati i testi che si erano andati strutturando secoli prima ed elaborate le biografie degli autori. Da questo momento in poi si alternarono nella storia del taoismo momenti in cui tale religione venne osteggiata dalla corte imperiale del tempo, con momenti in cui invece venne favorita da tutte le istituzioni: per esempio durante la dinastia Tang (618-907 a.C.) vennero costruiti numerosi templi taoisti, come il tempio di Chengdu, poi successivamente distrutto ed in seguito ristrutturato, dove si trovano interessanti rappresentazioni del simbolo in questione [AS 2007, B 2009, B 1996].

## 1.2 Simbolo del Taijitu

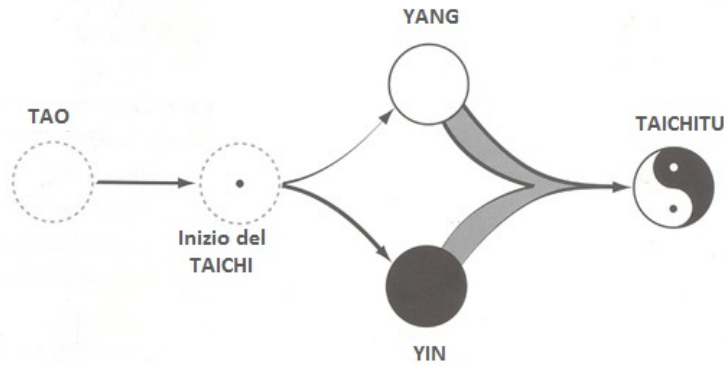


Figura 1.1: Taijitu

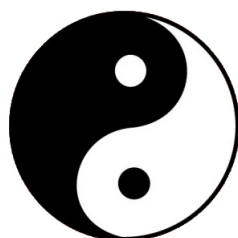
Come abbiamo già detto il taoismo inglobò nella propria filosofia la dottrina dello Yin e dello Yang. Originariamente l'ideogramma Yin indicava il lato in ombra di una collina, mentre l'ideogramma Yang il lato esposto al sole; a questi significati se ne sono aggiunti altri nel corso del tempo ed ora l'ideogramma Yin rappresenta il principio femminile, passivo e recettivo, il buio, la luna, l'acqua, il colore nero e lo Yang il principio maschile, attivo e creativo, la luce, il sole, il fuoco, il colore bianco. Possono dunque essere visti come due facce della stessa medaglia, non può esistere l'uno senza l'altro e dalla complementarità delle due energie scaturisce tutto l'esistente. Secondo un modello di creazione dell'universo, in principio vi era il Dao, immobile; ad un certo punto esso ha dato origine alle due polarità che si fondono, in modo dinamico, senza perdere la propria identità generando tutto ciò che ci circonda. Il simbolo che stiamo studiando è chiamato Taijitu: diagramma del supremo ultimo. Abbiamo già introdotto il concetto di Tao (o Dao), essenza ineffabile ma allo stesso tempo presente in ogni cosa; cerchiamo adesso di chiarire il concetto di Taiji: può essere visto come sorgente da cui il Tao scaturisce. Guardiamo adesso il simbolo e diamogli un senso: il cerchio rappresenta il Dao immutabile, all'interno di esso interagiscono lo Yin e lo Yang: zona nera

e zona bianca; le due zone sono divise da una curva che si sviluppa a partire dal punto centrale, il quale abbiamo ipotizzato possa rappresentare proprio il Taiji. I due cerchi più piccoli, invece, mostrano visivamente la necessaria correlazione fra i due principi, ciascuno dei quali è presente in germe nel suo opposto. Significativo è anche che, come si vede dal simbolo, il momento di massimo Yin coincida con il momento di minimo Yang e viceversa; questo è espressione dei movimenti di espansione e contrazione che caratterizzano il dinamismo delle due energie. Ma veniamo alla parte interessante: la curva che separa la parte nera dalla parte bianca. Essa rappresenta l'espressione mutevole del Dao immobile, la continua interazione di queste due energie da cui deriva tutto lo scibile. E' dunque evidente quanto questa curva si carichi di significato; quindi, ora che l'abbiamo inquadrata a livello astratto e filosofico è interessante osservarla e studiarla anche da un punto di vista matematico, per cogliere al meglio le variazioni subite nel corso dei secoli [AS 2007, B 2009, C 2000].

## Capitolo 2

# Curve di Bézier

Il nostro obiettivo è cercare una curva matematica ‘rappresentante’ per la curva del Taijitu. Se guardiamo la curva delle varianti più moderne del simbolo, matematicamente parlando è l’unione di due semicirconferenze tangenti nell’origine;



Mentre, se andiamo per esempio ad osservare altre varianti del simbolo, quali ad esempio questa incisione in pietra ritrovata in un tempio taoista di Chengdu



vediamo che non è più così immediato trovare una curva matematica rappre-

sentante. A questo proposito ci siamo serviti delle Curve di Bézier.

Le Curve di Bézier furono scoperte da Paul de Casteljaud e Pierre E. Bézier negli anni '50-'60. L'idea di Bézier, ingegnere francese impiegato presso l'azienda automobilistica della Renault, fu quella di ottenere delle curve dall'andamento 'dolce' a partire da un numero finito di punti, i quali individuano il così detto 'poligono di controllo'. Le curve di Bézier sono largamente usate nella computer grafica grazie ai loro numerosi vantaggi: ad esempio sono realizzabili mediante un algoritmo numericamente stabile e matematicamente semplice, l'algoritmo di de Casteljaud ed è possibile manipolare intuitivamente la curva scegliendo i punti di controllo, poiché, come vedremo, essa è sempre racchiusa nel guscio convesso di tali punti. Alcune delle proprietà delle curve di Bézier sono legate alle proprietà dei polinomi di Bernstein; andremo quindi a raccogliere le principali proprietà di questi polinomi per poi applicarle nella realizzazione delle curve di Bézier [S 2013].

## 2.1 Polinomi della base di Bernstein

I polinomi della base di Bernstein nacquero nell'ambito del problema della valutazione di un polinomio di grado  $n$ . Dal punto di vista numerico, infatti, una rappresentazione polinomiale mediante una certa base piuttosto che un'altra porta a differenti risultati. A questo proposito si introduce il concetto di condizionamento di una base: quanto è grande l'errore inerente nella valutazione del polinomio cambiando la base di rappresentazione. Per esempio, il problema della valutazione di un polinomio di grado  $n$  scritto nella base monomiale (base formata dai monomi  $1, x, x^2, x^3, \dots, x^n$ ) in un intervallo  $[a, b]$  con  $\frac{a}{b} \simeq 1$  è un problema malcondizionato [C 2010]. Le basi di rappresentazione polinomiale sono infinite e numerose sono quelle associate a problemi di valutazione ben condizionati, tra queste vi è la base di Bernstein, che ha trovato larga applicazione nell'approssimazione di funzioni tramite polinomi.

La definizione di polinomio di Bernstein di grado  $n$  deriva dall'espressione



binomiale:

$$1 = (t + (1 - t))^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1 - t)^{n-i}$$

ove

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

**Definizione 2.1.** I polinomi di Bernstein di grado  $n$  sono definiti in questo modo:

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1 - t)^{n-i}, \quad t \in [0, 1], \quad i = 0, \dots, n \quad (2.1)$$

con  $B_{i,n} \equiv 0$  se  $i < 0$  o  $i > n$ .

Vediamo per esempio il grafico dei polinomi di Bernstein di quarto grado

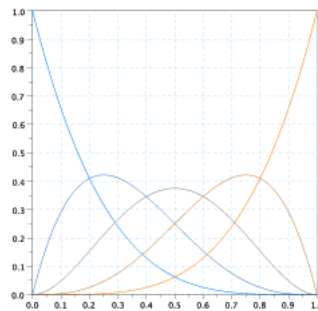


Figura 2.1: Polinomi di Bernstein di quarto grado

I polinomi  $B_{i,n}$  con  $i = 0, \dots, n$  formano una base per lo spazio delle funzioni polinomiali di grado minore o uguale a  $n$ , che chiameremo base di Bernstein. Un polinomio scritto nella base di Bernstein sarà del tipo  $p(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_{i,n}(t)$  dove i  $b_i$  sono i coefficienti di Bernstein.

### 2.1.1 Polinomi di Bernstein generalizzati

**Definizione 2.2.** Definiamo i polinomi di Bernstein su un intervallo qualsiasi  $[a, b]$  in questo modo:

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} \frac{(x - a)^i (b - x)^{n-i}}{(b - a)^n}, \quad x \in [a, b] \quad (2.2)$$

Si dimostra facilmente che i polinomi di Bernstein godono della proprietà di essere invarianti per traslazione e scala dell'intervallo di definizione o cambio di variabile; in particolare quindi, dato un polinomio  $p(t)$  definito in  $[0, 1]$  ed un intervallo traslato e scalato  $[a, b]$  è possibile effettuare un cambio di variabile del tipo

$$x = a + t(b - a),$$

che determina un polinomio  $q(x)$  che  $\forall x \in [a, b]$  assume gli stessi valori di  $p(t)$  per la  $t$  corrispondente. E' facile vedere che  $B_{i,n}(t) = B_{i,n}(x)$ , questo implica che, se  $p(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_{i,n}(t)$  con  $t \in [0, 1]$ , allora  $q(x) = \sum_{i=0}^n b_i B_{i,n}(x)$  con  $x \in [a, b]$ . Dunque, poichè i coefficienti associati alla base rimangono invariati per traslazione e scalatura dell'intervallo, d'ora in poi useremo sempre i polinomi di Bernstein nell'intervallo  $[0, 1]$ .

### 2.1.2 Alcune proprietà dei polinomi della base di Bernstein

Come abbiamo già detto, i polinomi di Bernstein godono di numerose proprietà. Ne elenchiamo qui di seguito solo alcune che ci saranno utili per spiegare delle proprietà delle curve di Bézier.

- **Invarianza per traslazione e scalatura:**

$$B_{i,n}(t) = B_{i,n}(x) \quad \text{con } x \in [a, b], \quad t \in [0, 1], \quad x = a + t(b - a)$$

- **Positività:**

$$B_{i,n}(t) \geq 0 \quad \forall t \in [a, b]$$

- **Partizione dell'unità:**

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = 1 \quad \forall t \in [0, 1]$$

- Dalle precedenti proprietà segue che  $p(t)$  nella base di Bernstein è una **combinazione convessa** dei  $b_i$ , da cui segue

$$\min b_i \leq p(t) \leq \max b_i \quad \forall t \in [0, 1].$$

- **Simmetria:**

$$B_{i,n}(t) = B_{n-i,n}(1-t).$$

- **Condizioni agli estremi:**

$$B_{i,n}(0) = \begin{cases} 1 & i = 0; \\ 0 & i \neq 0; \end{cases} \quad B_{i,n}(1) = \begin{cases} 1 & i = n; \\ 0 & i \neq n; \end{cases}$$

### 2.1.3 Formula ricorrente

Vediamo adesso una formula che ci sarà utile per l'algoritmo di de Casteljau.

I polinomi di Bernstein possono essere definiti ricorsivamente, tramite la seguente formula che lega polinomi di Bernstein di grado  $n$  con polinomi di Bernstein di grado  $n-1$ .

$$B_{i,n}(t) = (1-t)B_{i,n-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t) \quad (2.3)$$

con  $B_{0,0} \equiv 1$  e  $B_{i,n} \equiv 0 \quad \forall i \notin [0, n]$ .

$$\begin{aligned} \text{Dim: } & (1-t)B_{i,n-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t) = \\ & = (1-t)\binom{n-1}{i}t^i(1-t)^{n-1-i} + t\binom{n-1}{i-1}t^{i-1}(1-t)^{n-1-(i-1)} = \\ & = \binom{n-1}{i}t^i(1-t)^{n-i} + \binom{n-1}{i-1}t^i(1-t)^{n-i} = \\ & = \left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}\right]t^i(1-t)^{n-i} = \\ & = \binom{n}{i}t^i(1-t)^{n-i} = \\ & = B_{i,n}(t). \end{aligned}$$

### 2.1.4 Formula ricorsiva per la derivata

Esiste anche una formula molto utile per scrivere la derivata dell' $i$ -esimo polinomio di Bernstein in modo ricorsivo che useremo in seguito per dimostrare un'importante proprietà delle curve di Bézier.

$$\frac{d}{dt}B_{i,n}(t) = n(B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)), \quad 0 \leq i \leq n. \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}
\text{Dim: } \frac{d}{dt} B_{i,n}(t) &= \frac{d}{dt} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \\
&= \frac{in!}{i!(n-i)!} t^{i-1} (1-t)^{n-i} - \frac{(n-i)n!}{i!(n-i-1)!} t^i (1-t)^{n-i-1} = \\
&= \frac{n(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1} (1-t)^{n-i} - \frac{n(n-1)!}{i!(n-i-1)!} t^i (1-t)^{n-i-1} = \\
&= n \left( \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1} (1-t)^{n-i} - \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} t^i (1-t)^{n-i-1} \right) = \\
&= n(B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)).
\end{aligned}$$

### 2.1.5 Algoritmo di de Casteljau

L'algoritmo di de Casteljau è un algoritmo di valutazione di un polinomio scritto nella base di Bernstein, che si basa sull'applicazione ripetuta della formula ricorrente.

$$p(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^n b_i t B_{i-1,n-1}(t) + \sum_{i=0}^n b_i (1-t) B_{i,n-1}(t) =$$

$$\begin{aligned}
&\text{poichè } B_{-1,n-1}(t) = B_{n,n-1}(t) \equiv 0 \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1} t B_{i,n-1}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} b_i (1-t) B_{i,n-1}(t) = \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} [b_{i+1} t + b_i (1-t)] B_{i,n-1}(t) = \\
&\text{ponendo } b_i^{[1]} = b_{i+1} t + b_i (1-t) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} b_i^{[1]} B_{i,n-1}(t) =
\end{aligned}$$

iterando il procedimento, riapplicando più volte la formula ricorrente, si ottiene

$$\sum_{i=0}^0 b_0^{[n]} B_{0,0}(t) = b_0^{[n]}.$$

Calcolando quindi,  $\forall k = 1, \dots, n$  e  $\forall i = 0, \dots, n-k$

$$b_i^{[k]} = t b_{i+1}^{[k-1]} + (1-t) b_i^{[k-1]}$$

si ottiene il valore del polinomio in  $t$ .

## 2.2 Curve di Bézier

Prima di entrare nei dettagli della costruzione generale, facciamo qualche considerazione sulle curve di Bézier di grado basso, per capire il concetto intuitivamente. Guardiamo il caso con due punti di controllo e con tre.

Dati due punti A e B distinti dello spazio affine, si definisce la curva di Bézier determinata da questi due punti come l'interpolazione lineare del segmento che li congiunge, ovvero

$$C_1(t) = (1-t)A + tB, \quad t \in [0, 1]$$

Dati tre punti A, B e C dello spazio affine, possiamo iterare l'interpolazione lineare e, per ogni  $t \in [0, 1]$ , considerare i punti  $D = (1-t)A + tB$  e  $E = (1-t)B + tC$  e fare l'interpolazione lineare di questi, ovvero  $P = (1-t)D + tE$ .

I punti  $P$  così costruiti formano la curva di Bézier determinata dai tre punti A, B, C, ovvero

$$C_2(t) = (1-t)^2A + 2t(1-t)B + t^2C, \quad t \in [0, 1]$$

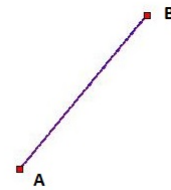


Figura 2.2: Esempio di curva di Bézier di grado 1

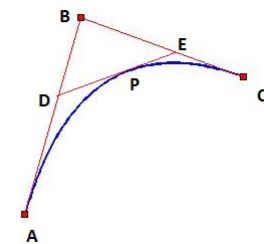


Figura 2.3: Esempio di curva di Bézier di grado 2

In modo analogo si definiscono le curve di Bézier di grado 3, iterando una volta in più il procedimento di interpolazione lineare.

Qui di seguito sono riportati alcuni esempi di curve di Bézier di grado 3, che fanno intuire come possa modificarsi la curva al variare del poligono di controllo.

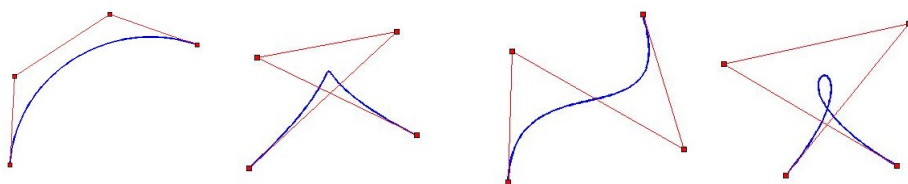


Figura 2.4: Esempi di curve di Bézier di grado 3

Diamo ora una definizione generale di una curva di Bézier di grado  $n$ .

**Definizione 2.3.** Una curva di Bézier di grado  $n$  è una curva parametrica definita da  $n + 1$  punti  $P_i$  con  $i = 0, \dots, n$  detti **punti di Bézier** o **punti di controllo**, così fatta:

$$C(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^n P_i \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad t \in [0, 1].$$

Il poligono che ha come vertici i punti  $P_0, \dots, P_n$  si chiama **poligono di controllo**.

Il procedimento precedentemente utilizzato per valutare le curve, rispettivamente di grado 1 e 2, all'istante  $t$  può essere generalizzato a curve di grado  $n$ :

posti  $P_i^0 = P_j$  per  $i = 0, \dots, n$ , si calcolano per ogni  $t \in [0, 1]$

$$P_i^k = (1-t)P_i^{k-1} + tP_{i+1}^{k-1}, \quad \text{per } i = 0, \dots, n-k$$

fino ad ottenere  $C(t) = P_0^n$

Questo procedimento non è altro che l'algoritmo di De Casteljau che abbiamo visto nella sezione precedente. È un algoritmo numericamente stabile che può essere utilizzato per disegnare curve di Bézier con un calcolatore, per questo si è scelto di utilizzarlo anche in questo contesto.

### 2.2.1 Alcune proprietà delle curve di Bézier

Come abbiamo già detto, molte delle proprietà delle curve di Bézier derivano dalle proprietà dei polinomi di Bernstein. Vediamo perché e quali sono. Ecco alcune delle proprietà di una curva di Bézier di grado  $n$ :

- **interpola** il primo e l'ultimo punto di controllo, infatti:

$$C(0) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(0) = P_0 \quad \text{poichè} \quad B_{i,n}(0) = 0 \quad \forall i \neq 0 \quad \text{e} \quad B_{0,n}(0) = 1$$

$$C(1) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(1) = P_n \quad \text{poiché} \quad B_{i,n}(1) = 0 \quad \forall i \neq n \quad \text{e} \quad B_{n,n}(1) = 1$$

- è **tangente** al primo e all'ultimo lato del poligono di controllo, infatti: Ricaviamo l'espressione della derivata di una curva di Bézier usando la formula ricorsiva per le derivate dei polinomi di Bernstein:

$$\begin{aligned} C'(t) &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t) \right) = \sum_{i=0}^n P_i \frac{dB_{i,n}(t)}{dt} = \\ &= n \sum_{i=0}^n P_i (B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)) = \\ &= n [B_{0,n-1}(t)(P_1 - P_0) + \dots + B_{n-1,n-1}(t)(P_n - P_{n-1})] = \\ &= n \sum_{i=0}^n (P_{i+1} - P_i) B_{i,n-1}(t). \end{aligned}$$

Da questo risultato si ottiene che:

$$C'(0) = n(P_1 - P_0), \quad C'(1) = n(P_n - P_{n-1}).$$

- è compresa nel più piccolo insieme convesso contenente i punti di controllo; infatti, i polinomi della base di Bernstein sono tutti positivi ed hanno somma 1, essi definiscono dunque una **combinazione lineare convessa** dei punti di controllo.
- **precisione lineare**: se i punti di controllo sono allineati, allora la curva di Bézier è la retta su cui essi giacciono
- **simmetria**: le due poligonali di controllo  $P_0, P_1, \dots, P_n$  e  $P_n, P_{n-1}, \dots, P_0$  descrivono la stessa curva

- **invarianza per trasformazioni affini:** se si applica una trasformazione affine  $\vartheta$  vale che

$$\sum_{i=0}^n \vartheta(P_i) B_{i,n}(t) = \vartheta\left(\sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t)\right)$$

Basta cioè applicare la trasformazione ai punti di controllo per ottenere tutta la curva trasformata.



## Capitolo 3

# Studio geometrico della curva del Taijitu

Una volta introdotti gli strumenti matematici necessari, procediamo con l'analisi geometrica vera e propria della nostra curva del Taijitu. Come abbiamo già anticipato, l'obiettivo è quello di, una volta presentate le varianti del simbolo che siamo riusciti a raccogliere e datare, assegnare ad ogni curva una curva di Bézier e studiarne le differenze; principalmente ci siamo concentrati, in base ai punti di controllo che saranno necessari per individuare la curva, sul grado della curva di Bézier, che risulta cambiare ad ogni variante del simbolo.

Come possiamo notare la curva del Taijitu si divide in due rami uguali che partono dal centro del simbolo, dunque per semplificare il lavoro abbiamo scelto di lavorare con un singolo ramo della curva. Questa scelta risulta vantaggiosa anche perché in questo modo scegliendo rispettivamente come primo e ultimo punto di controllo il punto iniziale del ramo e il punto centrale del simbolo ci assicuriamo che la curva di Bézier approssimante interpoli questi due punti e sia tangente in essi al primo e all'ultimo lato del poligono di controllo; un'altra cosa quindi che potrebbe essere oggetto di studio è l'inclinazione della tangente alla curva nel primo o nell'ultimo punto di controllo.

### 3.1 Varianti del simbolo raccolte

Oggi giorno quando si parla di “simbolo di Yin e Yang” la prima immagine che viene in mente è sicuramente la versione più moderna del simbolo del Taijitu, ormai diffusissima in tutto il mondo; il suo significato assai complesso e carico di sfumature è stato semplificato a livelli estremi divenendo semplice rappresentazione della dualità degli opposti nel mondo. In realtà però, questa variante del simbolo, che ormai sembra essere diventato una sorta di logo, era ben diversa mille anni fa. Presentiamo qui di seguito quattro esemplari di Taijitu in ordine cronologico, dalla più antica alla più recente. Le prime sono state pervenute da uno dei più famosi templi taoisti: il tempio di Qing Yang Gong a Chendgdu. Il tempio, come abbiamo già anticipato, è stato costruito durante la dinastia Tang (618-907), poi distrutto in una delle tante persecuzioni religiose e ristrutturato in seguito. Del tempio originario rimangono due incisioni in pietra del Taijitu, che sono state nostro oggetto di studio.



Figura 3.1: Prima incisione in pietra del Taijitu nel tempio di Chendgdu



Figura 3.2: Seconda incisione in pietra del Taijitu nel tempio di Chengde

E' stato rinvenuto nel tempio anche questo pannello, probabilmente di un periodo più tardo rispetto all'incisione in pietra che però ha la stessa struttura della prima incisione, per tanto nello studio della curva prenderemo in considerazione questa figura.



Figura 3.3: Pannello dipinto con Taijitu

Un altro esempio molto interessante di Taijitu è il seguente disegno attribuito

a Zhang Huang (1527-1608).

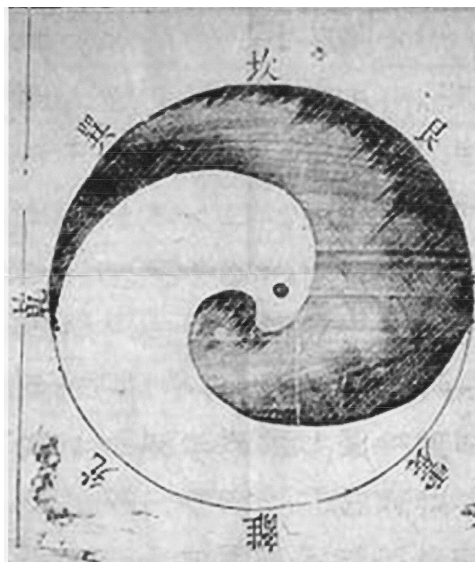


Figura 3.4: Disegno con inchiostro del Taijitu

Durante il periodo Qing (1644-1911), invece, si nota che la maggior parte dei simboli di Taijitu sono già abbastanza semplificati, un'esempio è questa coppa bicolore, molto vicina alle consuete raffigurazioni moderne.



Figura 3.5: Coppa bicolore con Taijitu

Infine ecco due esemplari moderni di Taijitu: il primo si trova su un soffitto di un tempio in Malaysia la cui costruzione è iniziata intorno al 1974 ed è terminata nel 2000, mentre il secondo è stato ritrovato in un tempio a Saigon



Figura 3.6: Esemplici moderni di Taijitu

nel Vietnam.

Come si può facilmente notare questo è proprio il classico simbolo dello yin e yang oggi diffuso in tutto il mondo.

## 3.2 Approssimazione con le curve di Bézier

Ho implementato un programma Matlab che, permette di costruire curve di Bézier scegliendo i punti di controllo in modo interattivo su una data figura. La prima cosa da osservare è il numero di punti di controllo necessari a descrivere la curva; per far ciò si è proceduto ovviamente a tentativi e le curve qui riportate sono le migliori approssimazioni ottenute. Successivamente il programma è stato arricchito con altri frammenti di codice in modo tale da riuscire a disegnare la curva completa con entrambi i due rami che la compongono. Per far ciò è bastato osservare che il secondo ramo non è altro che il primo ramo ruotato di  $180^\circ$ ; dopodichè, sfruttando la proprietà di invarianza per trasformazioni affini delle curve di Bézier, è bastato ruotare di  $180^\circ$  i punti di controllo e costruire la curva di Bézier ad essi associata.

### 3.2.1 Programma Matlab implementato

Il programma prende in input il numero dei punti di controllo che si desidera scegliere sulla figura e restituisce l'immagine del simbolo del Taijitu e della curva di Bézier approssimante (in blu) con il relativo poligono di controllo (in rosso):

```
function bezier(n)
E=zeros(2,n);
M=imread('/taij04.jpg');
B=imresize(M,1);
figure (1)
imagesc(B);
set(gca,'YDir','normal');
for s=1:n
[a,b]=ginput(1)
E(:,s)=[a,b];
G=E(:,1:s);
X=mycasteljau(G);
xx=X(1,:);
yy=X(2,:);
x=G(1,:);
y=G(2,:);
clf
figure (1)
imagesc(B);
set(gca,'YDir','normal');
hold on
plot(xx,yy,'LineWidth',2)
hold on
plot(x,y,'-rs','MarkerEdgeColor','k',...
'MarkerFaceColor','r',...
'MarkerSize',5)
end
```

### 3.3 Curve approssimanti trovate

Partiamo dagli esemplari di curva più antichi, che abbiamo detto essere appunto le due incisioni in pietra. Per quanto riguarda l'incisione in figura 3.1, l'andamento della curva è identico a quello della figura 3.3. Utilizzando il programma matlab su questa figura abbiamo ottenuto:

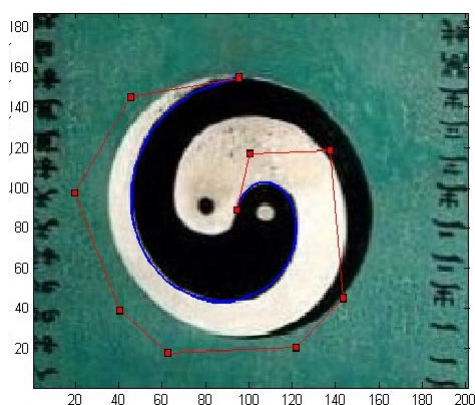
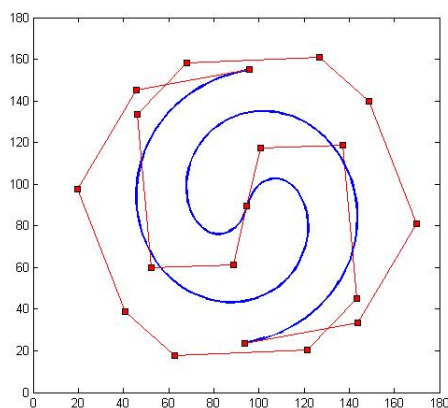


Figura 3.7: Curva approssimante di grado 9

I punti di controllo necessari a descrivere la curva approssimante sono 10, dunque quest'ultima risulta essere una curva di Bézier di grado 9.

Ecco la curva completa con entrambi i rami simmetrici che la compongono:



Per quanto riguarda invece la seconda incisione in pietra, notiamo che il grado della curva approssimante è già più basso: i punti di controllo necessari sono 7 e dunque la curva ha grado 6.

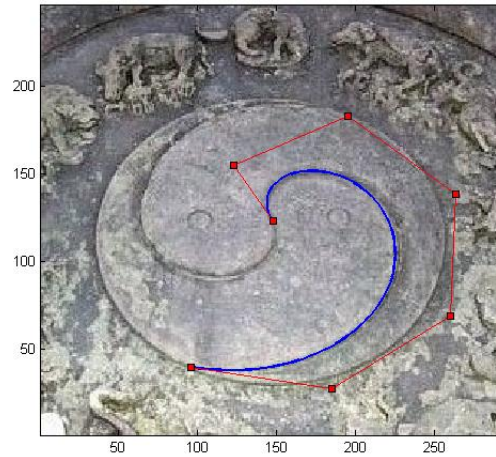
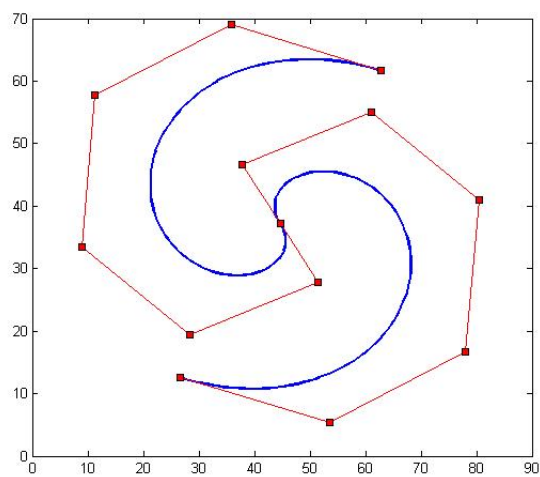


Figura 3.8: Curva approssimante di grado 6

Ecco la curva completa con entrambi i rami simmetrici che la compongono:





Passiamo agli esemplari più recenti; questa è la curva approssimante relativa al disegno di Zhuang Huang:

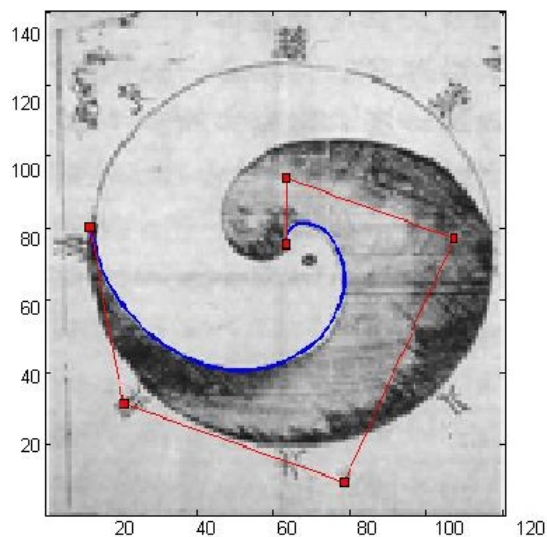
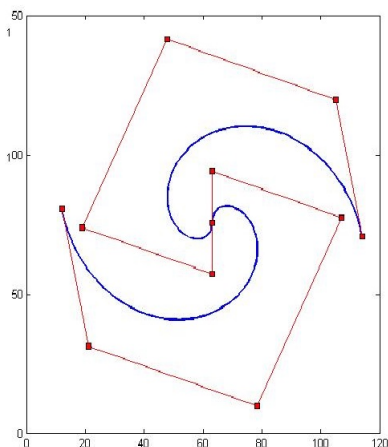


Figura 3.9: Curva approssimante di grado 5

Il grado della curva approssimante è ancora più basso della precedente. I punti di controllo necessari sono 6 e dunque il grado della curva di Bézier associata è 5.

Ecco la curva completa con entrambi i rami simmetrici che la compongono:



Infine, per quanto riguarda l'esemplare più recente tra quelli presi in considerazione, notiamo che la curva del Taijitu è notevolmente semplificata rispetto a quella del primo esemplare studiato:

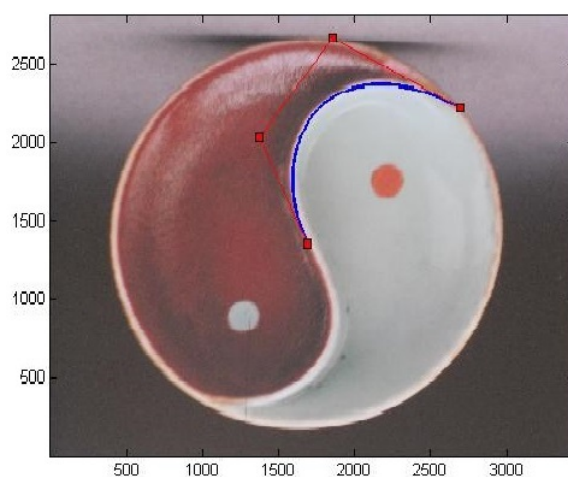
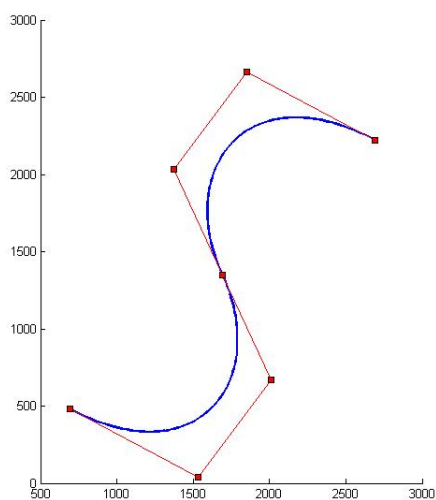


Figura 3.10: Curva approssimante di grado 3

I punti di controllo sono 4 e dunque la curva di Bézier approssimante è di grado 3.

Ecco la curva completa con entrambi i rami simmetrici che la compongono:

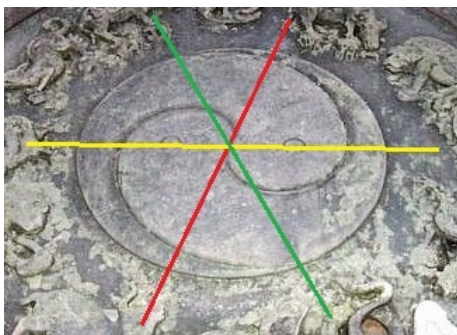


## 3.4 Osservazioni

Possiamo quindi concludere che partendo dall'esemplare di curva più antica fino ad arrivare alla più recente, il numero dei punti di controllo necessari a descrivere la curva di Bézier approssimante diminuisce; questo vuol dire che la curva del Taijitu diminuisce di grado ad ogni singola variante. E' proprio il risultato che ci aspettavamo: è facilmente visibile il fatto che la curva sia stata semplificata nel corso del tempo e questa semplificazione può essere tradotta in termini matematici con una diminuzione del grado della curva. Il processo di semplificazione della curva si è poi concluso con la sostituzione di tali curve polinomiali con una semicirconferenza. Il perché di questo cambiamento possiamo solo immaginarlo: la semicirconferenza è sicuramente una curva più caratteristica rispetto ad una qualunque altra curva polinomiale di terzo grado e diventa più facile rappresentare il simbolo sempre allo stesso modo.

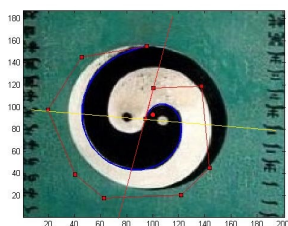
### 3.4.1 Analisi di altri aspetti geometrici individuati

Tre sono le rette principali che passano per il centro e gestiscono la composizione geometrica del simbolo: la retta tangente alla curva nel centro del simbolo (in rosso), la retta congiungente i due cerchi più piccoli interni (in giallo) e la retta che congiunge il punto che rappresenta il massimo Yin con quello che rappresenta il massimo Yang. Andiamo a studiare come varia la loro inclinazione nelle varianti di Taijitu prese in considerazione.

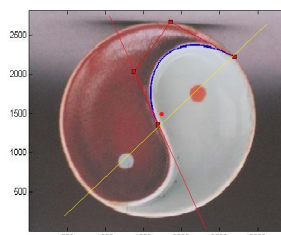


- *Ampiezza dell'angolo formato dalla retta tangente alla curva nel centro con la retta passante per il centro e i due cerchi interni*

Nel primo e nell'ultimo esemplare la tangente forma un angolo  $\alpha$  inferiore ai 90 gradi.

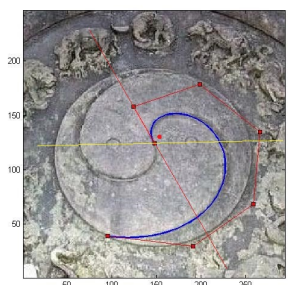


$$\alpha = 79^\circ$$

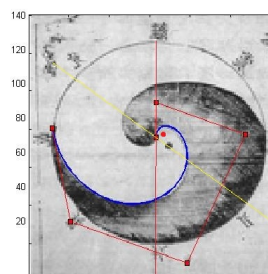


$$\alpha = 71^\circ$$

Mentre per quanto riguarda gli altri due esemplari l'angolo è superiore ai 90 gradi:

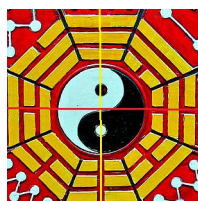


$$\alpha = 119^\circ$$



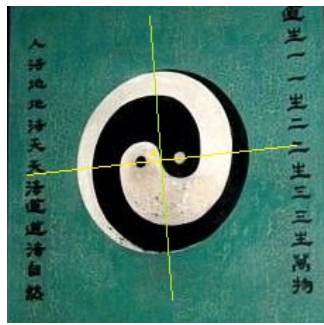
$$\alpha = 125^\circ$$

In ogni caso la tangente alla curva non è mai stata verticale come lo è adesso negli esemplari più moderni.

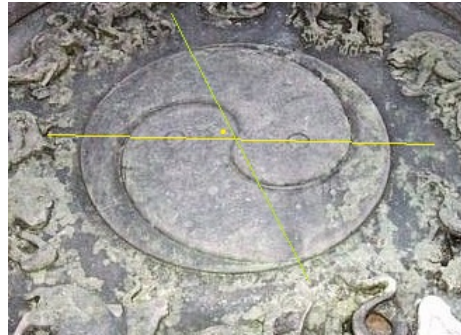


- *Ampiezza dell'angolo tra la retta congiungente il punto di massimo Yin e massimo Yang e la retta passante per il centro e per i due cerchi interni*

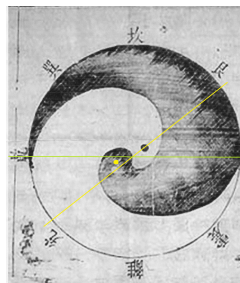
Consideriamo adesso la retta gialla e la retta verde che formano un certo angolo  $\beta$ . A proposito di questo angolo si nota una relazione molto interessante: esso diminuisce progressivamente da un'ampiezza di circa 90 gradi ad un'ampiezza pari a zero.



$$\beta = 90^\circ$$

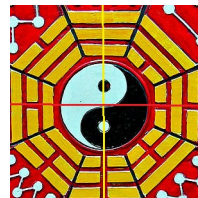
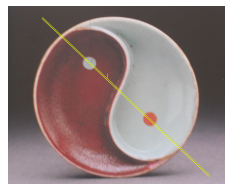


$$\beta = 60^\circ$$



$$\beta = 38^\circ$$

Negli esemplari più moderni l'angolo  $\beta$  è nullo poiché le due rette coincidono:





# Conclusioni

In questa tesi ho dunque ripercorso cronologicamente lo sviluppo geometrico del simbolo dello Yin-Yang, concentrandomi principalmente sulla curva ad esso associata. Ne è emerso che essa è stata semplificata notevolmente e il suo grado si è abbassato nel corso del tempo. Come si è visto precedentemente, ho proceduto ad una analisi di un solo ramo di curva; ma sarebbe interessante, utilizzando magari strumenti di grafica migliori, approssimare l'intera curva con una curva di Bézier. In questo modo si potrebbe evidenziare quanto supposto all'inizio di questa ricerca, cioè il fatto che la curva, nel corso del tempo, risulterebbe aver perso anche di differenziabilità nel punto centrale.





# Bibliografia

- [AS 2007] Andreini A., Scarpari M., *Il daoismo*, Bologna, 2007.
- [B 1996] Bagley R., *La Cina (vol 1)*, UTET, Torino, 1996.
- [B 2009] Bianchi E., *Taoismo*, Mondadori, Milano, 2009.
- [C 2010] Casciola G., *Polinomi nella base di Bernstein e Curve di Bézier*, dispense del corso di Metodi Numerici, Bologna, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, 2010.
- [C 2000] Cheng A., *Storia del pensiero cinese*, Einaudi, Torino, 2000.
- [D 2014] D'Amore B., *Arte e Matematica*, Edizioni Dedalo, 2014.
- [E 2006] Emmer M., *Visibili Armonie*, Bollati Boringhieri, 2006.
- [F 2012] Farouki R.T., *The Bernstein polynomial basis: a centennial retrospective*, Davis, Department of Mechanical and Aerospace engineering, University of California, 2012.
- [GC 2011] Ghione F. Catastini L., *Matematica e Arte*, Springer, 2011.
- [S 2013] Strada A. R., *Polinomi di Bernstein e Curve di Bézier*, Tesi di Laurea in Calcolo numerico, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Bologna, 2012/2013.



# Ringraziamenti

Quando ho iniziato l'università tutto ho pensato tranne che avrei trascorso anni così belli e per questo avrei una lista lunghissima di persone da ringraziare. Innanzitutto vorrei ringraziare il mio professore delle scuole superiori Bruno Jannamorelli, che più di tutti mi ha dato la voglia e il coraggio per iscrivermi a Matematica e ringraziare i miei genitori che mi hanno dato la possibilità di compiere questo bellissimo percorso. Dopodichè ringrazio tutte le persone che mi sono state vicine: le mie sorelle, i miei cognati e i miei nipotini, i vecchi amici che sono rimasti e nonostante la distanza hanno sempre continuato ad interessarsi della mia vita, i nuovi amici che sono arrivati e mi hanno sempre fatta sentire come a casa, le mie sorelle bolognesi e quei matti dei miei compagni di università con cui ho condiviso momenti di studio e delirio. Infine ringrazio il mio relatore perché alla mia richiesta: “mi piacerebbe fare una tesi originale”, non poteva rispondere in modo migliore e al mio correlatore che con la sua pazienza e disponibilità mi ha dato tutto l'aiuto di cui ho avuto bisogno.