

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Le varietà di Seifert

Tesi di Laurea in Topologia

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Stefano Francaviglia

Presentata da:
Filippo Miti

II Sessione
Anno Accademico 2013/14

Indice

| | |
|--|-----------|
| Introduzione | vi |
| 1 Topologia delle varietà | 1 |
| 1.1 Introduzione alle varietà e somma connessa | 1 |
| 1.2 Classificazione di varietà | 8 |
| 1.2.1 Il problema della classificazione | 8 |
| 1.2.2 Classificazione delle superfici | 11 |
| 2 Decomposizione delle 3-varietà | 19 |
| 2.1 Decomposizione in fattori primi | 19 |
| 2.2 Decomposizione JSJ | 26 |
| 2.2.1 Superfici incompressibili | 26 |
| 2.2.2 Introduzione alle varietà di Seifert | 29 |
| 3 Classificazione delle varietà di Seifert | 33 |
| 3.1 Classificazione dei fibrati di Seifert | 33 |
| 3.2 Superfici nelle varietà di Seifert e Classificazione | 37 |
| 3.2.1 Classificazione delle varietà di Seifert | 38 |
| Bibliografia | 43 |
| Ringraziamenti | 45 |

Elenco delle figure

| | | |
|------|--|----|
| 1.1 | Proiezione stereografica della 2-sfera sul piano | 2 |
| 1.2 | Esempio di uno spazio non di Hausdorff che non è una varietà | 3 |
| 1.3 | La sfera tridimensionale | 10 |
| 1.4 | La 2-sfera come unione dei due emisferi | 10 |
| 1.5 | Due esempi di triangolazioni | 12 |
| 1.6 | $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 = \mathbb{K}^2$ | 12 |
| 1.7 | Ecco come dal nastro di Moebius si arriva al piano proiettivo | 13 |
| 1.8 | Esempio di modello planare di una superficie. | 15 |
| 1.9 | Eliminazione di lati opposti adiacenti. | 15 |
| 1.10 | Rimozione di un vertice Q in favore di un vertice P | 15 |
| 1.11 | Come rendere adiacenti due lati twistati | 16 |
| 1.12 | Come rendere adiacenti due coppie di lati opposti | 17 |
| 1.13 | Somma connessa di un toro con un piano proiettivo | 17 |
| 2.1 | Come tagliare lungo cerchi e tappare con dischi | 20 |
| 2.2 | Quattro dei sette modelli a cui le superfici S_j possono essere ricondotte | 20 |
| 2.3 | Una superficie incompressibile | 26 |
| 3.1 | Modifica della sezione s | 35 |
| 3.2 | Una superficie ∂ -incompressibile | 37 |
| 3.3 | Costruzione di $S^1 \tilde{\times} S^1 \tilde{\times} I$ | 39 |

varietà irriducibili lungo tori incompressibili inclusi in esse. I ‘pezzi’ risultanti dalla decomposizione JSJ saranno varietà atoroidali oppure varietà di Seifert.

Si giunge così al terzo capitolo, in cui viene presentata la classificazione dei fibrati di Seifert e, in seguito, delle varietà di Seifert stesse. In quest’ultimo capitolo si è preferito sacrificare qualche dimostrazione per lasciare più spazio ad esempi, in modo da dare al lettore un’idea più concreta degli oggetti di cui si sta parlando.

Capitolo 1

Topologia delle varietà

In questo capitolo, si troveranno alcune nozioni preliminari, molto utili per lo studio delle varietà. Una grande importanza sarà data al concetto di *somma connessa*. In seguito verrà esposto il concetto di *classificazione* e verranno esposti i problemi che la classificazione delle varietà ha generato. Infine sarà lasciato molto spazio al teorema di classificazione delle superfici.

1.1 Introduzione alle varietà e somma connessa

Definizione 1.1. Uno spazio topologico di Hausdorff M è detto varietà topologica di dimensione n se è a base numerabile e se per ogni $x \in M$ vi è un omeomorfismo tra un intorno aperto di x e un disco aperto di dimensione n .

Una varietà di dimensione n sarà in seguito chiamata, più brevemente, *n-varietà*.

Un aperto omeomorfo al disco n -dimensionale verrà spesso chiamato *carta*.

Osservazione 1.2. Poiché un disco aperto di dim n è omeomorfo a \mathbb{R}^n stesso, possiamo dire che in una n -varietà ogni punto ha un intorno omeomorfo a \mathbb{R}^n .

Esempio 1.1. Siccome \mathbb{R}^0 consiste di un solo punto, ogni spazio discreto è una 0-varietà. Infatti, ogni spazio discreto è di Hausdorff e per ogni suo punto x possiamo scegliere $\{x\}$ come suo intorno omeomorfo a \mathbb{R}^0 .

Esempio 1.2. L'esempio più semplice di varietà, a parte la varietà 0-dimensionale, è dato da ogni spazio euclideo. Banalmente, ogni spazio euclideo n -dimensionale è di Hausdorff ed è omeomorfo a se stesso.

Esempio 1.3. Un primo esempio non banale di varietà unidimensionale è dato dalla circonferenza S^1 .

Essa è sicuramente di Hausdorff. Mostriamo che ogni suo punto ha un intorno omeomorfo a $\overset{\circ}{D}^1$.

Rappresentiamo S^1 come l'insieme

$$\{e^{2\pi it} \mid t \in I\}$$

Sia $x = e^{2\pi i\theta}$, con $\theta \in (0, 1)$.

Allora un intorno di x è

$$\begin{aligned} S^1 - \{-x\} &= S^1 - \{e^{2\pi i(\theta-1/2)}\} \\ &= \{e^{2\pi it} \mid \theta - 1/2 < t < \theta + 1/2\} \\ &\cong (\theta - 1/2, \theta + 1/2) \\ &\cong (0, 1) \cong \overset{\circ}{D}^1 \end{aligned}$$

Esempio 1.4. Ogni sfera n -dimensionale S^n è una n -varietà. L'omeomorfismo tra ogni intorno aperto di $x \in S^n$ e \mathbb{R}^n è la classica proiezione stereografica.

Si ha che $S^n - \{(1, 0, \dots, 0)\}$ è intorno aperto di ogni $x \in S^n$, $x \neq (1, 0, \dots, 0)$.

Si prenda quindi S^n immersa nello spazio euclideo \mathbb{R}^{n+1} . Se si considera la semiretta uscente da $(1, 0, \dots, 0)$ e passante per un punto $x \in S^n$, essa incontrerà l'iperpiano \mathbb{R}^n in un unico punto, che chiamiamo $\phi(x)$.

È facile verificare che ϕ è continua e biiettiva. Si può altrettanto facilmente trovare $\psi = \phi^{-1}$ e verificare che essa è continua.

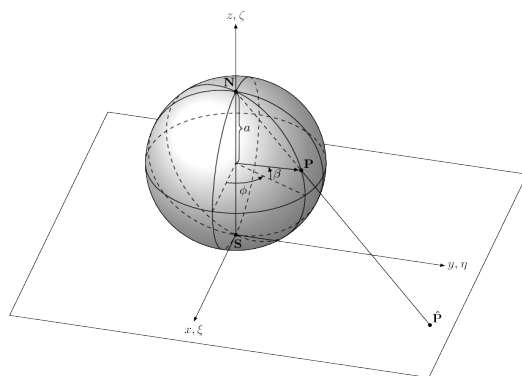


Figura 1.1: Proiezione stereografica della 2-sfera sul piano

Nella figura 1.1, si può osservare la proiezione stereografica della sfera S^2 immersa nello spazio tridimensionale \mathbb{R}^3 . Lì il punto escluso è denominato con N , che indica il polo nord.

Per il punto $(1, 0, \dots, 0)$, invece, si considera il suo intorno aperto costituito da $S^n - (-1, 0, \dots, 0)$ e la proiezione stereografica su \mathbb{R}^n sarà analoga.

Osservazione 1.3. L'ipotesi che lo spazio topologico sia di Hausdorff è necessaria per la definizione di varietà.

Esistono infatti spazi in cui tutti i punti hanno intorni omeomorfi a un disco n -dimensionale aperto, ma che non sono di Hausdorff. Vediamo il seguente esempio.

Esempio 1.5. Si consideri l'insieme

$$X = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 2\}$$

con la topologia \mathcal{U} tale che $U \in \mathcal{U}$ se e solo se $U = \emptyset$, $U = X$ oppure U è unione di insiemi del tipo

$$\begin{aligned} &(\alpha, \beta) \quad \text{con } -1 \leq \alpha < \beta \leq 2 \\ &(\alpha, 0) \cup (\beta, 2] \quad \text{con } -1 \leq \alpha < 0 < -1 \leq \beta < 2. \end{aligned}$$

Si nota subito che la topologia \mathcal{U} non è equivalente alla topologia indotta da quella euclidea su \mathbb{R} , mancano infatti gli insiemi del tipo $(\alpha, 2]$, che sono aperti nella topologia euclidea ma non appartengono a \mathcal{U} .

Lo spazio X , con la topologia \mathcal{U} , appare come nelle figure 1.2. Si vede facilmente che non è di Hausdorff, dato che il punto 2 è arbitrariamente vicino al punto 0 e ogni intorno aperto di 2 interseca ogni intorno di 0.

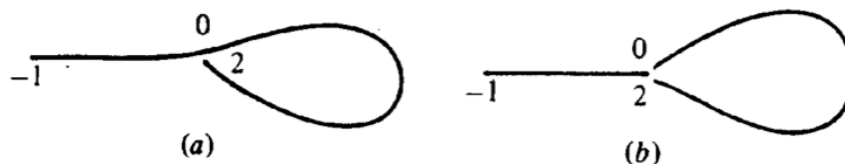


Figura 1.2: Esempio di uno spazio non di Hausdorff che non è una varietà

Però ogni $x \in X$ ha un intorno che sta su una *carta*, cioè su un aperto omeomorfo a $\overset{\circ}{D}^1$. Ciò è banale per ogni $x \neq 2$; per $x = 2$ è vero poiché un intorno aperto di 2 è, ad esempio, $N = (-\frac{1}{2}, 0) \cup (\frac{3}{2}, 2]$, ed esso è una carta. Infatti la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{if } -\frac{1}{2} < x < 0 \\ 4 - 2x, & \text{if } \frac{3}{2} < x \leq 2 \end{cases}$$

è continua e biiettiva da N a $(-1, 1) = \overset{\circ}{D}^1$, e la sua inversa

$$g(y) = \begin{cases} x/2, & \text{if } -1 < x < 0 \\ 2 - x/2, & \text{if } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

è continua. Abbiamo quindi mostrato che anche il punto 2 giace su una carta.

Lo spazio X però non vogliamo che sia una varietà, dato che si vede come non abbia un comportamento localmente euclideo. Ecco perché l'ipotesi che lo spazio sia di Hausdorff è assolutamente necessaria.

Definizione 1.4. Si definisce varietà n -dimensionale con bordo uno spazio topologico a base numerabile e di Hausdorff M tale che ogni suo punto abbia un intorno omeomorfo ad un aperto del semipiano euclideo n -dimensionale $\{(x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0)\}$.

L'insieme $\overset{\circ}{M} \subseteq M$ dei punti che ammettono un intorno omeomorfo al disco aperto $\overset{\circ}{D}^n$ costituisce una n -varietà come definita precedentemente. Inoltre $\partial M = M - \overset{\circ}{M}$ è una varietà $(n-1)$ -dimensionale detta *bordo* di M .

Una varietà si dice chiusa se è compatta e con bordo vuoto.

Prima di dedicarci, nella prossima sezione, al problema della classificazione, introduciamo un concetto fondamentale nello studio delle varietà, quello di *somma connessa*.

Siccome per gli argomenti trattati in questa tesi è sufficiente utilizzare varietà di dimensione 2 e 3, d'ora in poi si consideri sempre $n = 2, 3$. In questo modo la categoria *Top*, delle varietà topologiche e applicazioni continue, e la categoria *Diff*, delle varietà differenziabili (o lisce) e dei diffeomorfismi, sono equivalenti. Ciò significa che non esistono diverse strutture differenziabili su varietà omeomorfe. Così, nel seguito, possiamo parlare indifferentemente di omeomorfismi o di diffeomorfismi tra varietà. Questo non sarebbe stato possibile in dimensione $n > 3$.

Definizione 1.5. Date due n -varietà chiuse e connesse M_1 e M_2 , si considerino due punti $P_1 \in M_1$ e $P_2 \in M_2$ e due intorni aperti di tali punti, $U_1 \subseteq M_1$ e $U_2 \subseteq M_2$, che saranno omeomorfi a due dischi n -dimensionali. Indichiamo con \tilde{M}_i le varietà con bordo $M_i - U_i$, per $i = 1, 2$. Si ha che il bordo di \tilde{M}_i è uguale al bordo di U_i , quindi omeomorfo al bordo di un disco n -dimensionale. Si definisce **somma connessa** di M_1 e M_2 , e si indica $M = M_1 \# M_2$, la varietà n -dimensionale chiusa e connessa data dall'unione di \tilde{M}_1 e \tilde{M}_2 , con i rispettivi bordi identificati tramite un omeomorfismo $f : \partial\tilde{M}_1 \rightarrow \partial\tilde{M}_2$.

Osservazione 1.6. Se M_1 e M'_1 sono varietà omeomorfe, allora anche $M_1 \# M_2$ e $M'_1 \# M_2$ lo sono.

Il nostro obiettivo, ora, è dimostrare che la definizione data è ben posta, cioè che la somma connessa dipende unicamente da M_1 e M_2 . A tal scopo serviranno alcuni lemmi.

Lemma 1.7. *La somma connessa è indipendente dalla scelta dei punti P_i .*

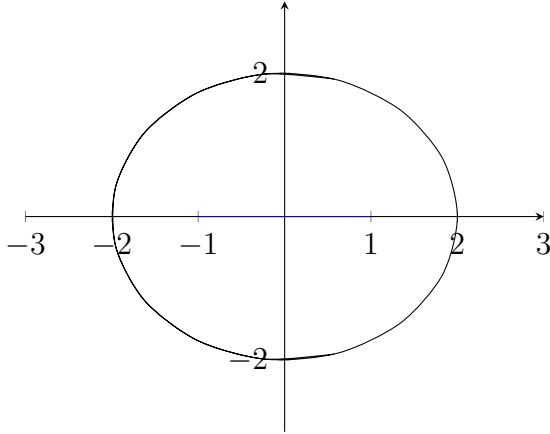
Dimostrazione. Dimostriamo che la scelta dei punti in M_1 non modifica la somma connessa. Per M_2 saranno da fare considerazioni analoghe. Siano P_1 e P'_1 due punti sulla varietà M_1 . Dimostriamo che esiste un omeomorfismo G di M_1 in se stessa che manda P_1 in P'_1 . Dall'osservazione 1.6 ne deriverà la tesi.

Poiché M_1 è connessa, esiste un cammino continuo $\gamma : [-1, 1] \rightarrow M_1$ tale che $\gamma(-1) = P_1$ e $\gamma(1) = P'_1$. Sia V un intorno tubulare di $\gamma([-1, 1])$. Per comodità di notazione, supponiamo per ora $n = 2$. Esiste un omeomorfismo h da V al disco $D^2(2)$ centrato nell'origine e di raggio 2 tale che:

- $h(P_1) = (-1, 0)$;

- $h(P'_1) = (1, 0)$;
- $h(\gamma([-1, 1])) = [-1, 1] \times \{0\}$.

Cioè con h mandiamo V in un disco e γ in un segmento interno ad esso, come mostrato in figura, dove si vede $h(\gamma([-1, 1]))$ in blu.



Indichiamo gli elementi di $h(V)$ con la notazione esponenziale e definiamo un omeomorfismo g da $h(V)$ in se stesso come segue:

$$g(\rho e^{i\theta}) = \rho e^{i(\theta + \pi(2-\rho))}$$

Osserviamo che g , ristretto a ∂V , è l'identità e che, ristretto alla circonferenza di raggio 1, è la rotazione di angolo π . Quindi g è tale che $g(h(P_1)) = h(P'_1)$ e $g(h(P'_1)) = h(P_1)$. Possiamo così in conclusione definire l'omeomorfismo G di M_1 che è l'identità fuori da V e che scambia tra loro P_1 e P'_1 :

$$G(x) = \begin{cases} id & \text{se } x \notin V \\ h^{-1}(g(h(x))) & \text{se } x \in V \end{cases}$$

G è continuo per le considerazioni fatte in precedenza sul fatto che g ristretto al bordo di V è l'identità.

Se invece avessimo a che fare con 3-varietà, il ragionamento sarebbe simile. In questo caso, con h mandiamo l'intorno tubulare V in un cilindro $D^2(2) \times [-1, 1]$; $h(\gamma(t))$ è il segmento parametrizzato da $t \mapsto (t, 0, 0)$ e l'omeomorfismo g di $h(V)$ in se stesso diventa:

$$g(\rho e^{i\theta}, z) = (\rho e^{i(\theta + \pi(2-\rho)(1-|z|))}, z)$$

Si verifica che, anche in questo caso, $g(h(P_1)) = h(P'_1)$, $g(h(P'_1)) = h(P_1)$ e g ristretta al bordo di $h(V)$ è l'identità. Definendo G come prima, si trova un omeomorfismo tra $M_1 - P_1$ e $M_1 - P'_1$ anche nel caso in cui le M_i siano 3-varietà. □

Lemma 1.8. *La somma connessa è indipendente dalla scelta degli intorni U_i .*

Dimostrazione. Siano U_1 e U'_1 due intorni del punto $P_1 \in M_1$. Dimostriamo che $M_1 - U_1 \cong M_1 - U'_1$; ne deriverà dall'osservazione 1.6 che la somma connessa è indipendente dalla scelta degli intorni dei punti.

Sicuramente $U_1 \cap U'_1$ è anch'esso un intorno di P_1 . Esiste perciò una palla B_{P_1} , centrata in P_1 , contenuta in $U_1 \cap U'_1$. Dimostriamo che $M_1 - U_1 \cong M_1 - B_{P_1}$. Lo spazio topologico $U_1 - B_{P_1}$, topologicamente, è una corona circolare il cui bordo esterno è dato da ∂U_1 e il cui bordo interno è ∂B_{P_1} . Tale spazio si può retrarre ad una delle sue due circonferenze di bordo. Ora, la varietà $M_1 - B_{P_1}$ è costituita da $M_1 - U_1$ a cui è incollata sul bordo la corona $U_1 - B_{P_1}$. Ritraendo tale corona sulla circonferenza ∂U_1 , si ottiene proprio $M_1 - U_1$, che risulta quindi omeomorfo a $M_1 - B_{P_1}$. Analogamente si dimostra che $M_1 - U'_1 \cong M_1 - B_{P_1}$. Ne consegue che le due varietà con bordo $M_1 - U_1$ e $M_1 - U'_1$ sono omeomorfe. □

Nella definizione e nel lemma seguenti si parlerà di diffeomorfismi e non di omeomorfismi. Data la considerazione fatta in precedenza, sull'equivalenza delle categorie *Top* e *Diff* in dimensione $n \leq 3$, possiamo fare ciò senza preoccupazioni.

Definizione 1.9. Siano f e g due funzioni C^∞ dallo spazio topologico X allo spazio topologico Y tali che siano due diffeomorfismi con l'immagine. Sia $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ un'omotopia C^∞ tra le due funzioni. Se, per ogni $t \in [0, 1]$, $H(x, t)$ è un diffeomorfismo con l'immagine, allora diremo che H è un'**isotopia** tra f e g , che si diranno quindi isotope.

Lemma 1.10. *La somma connessa non dipende dalla scelta di f , ma soltanto dalla sua classe di isotopia.*

Dimostrazione. Siano f e f' due diffeomorfismi di ∂U_1 in ∂U_2 . Per come sono stati definiti, gli U_i possono essere considerati due palle n -dimensionali aperte generiche su M_i , quindi il loro bordo è una sfera $(n-1)$ -dimensionale. Siano f e f' isotope; esiste quindi una famiglia di diffeomorfismi $\{f_t\}_{t \in [0,1]}$ tale che $f_0 \simeq f$ e $f_1 \simeq f'$. Siano $M = M_1 \#_f M_2$ e $M' = M_1 \#_{f'} M_2$, con nel primo caso le due varietà incollate tramite il diffeomorfismo f e nel secondo caso tramite f' . Dico che M e M' sono diffeomorfe. Lo sono perché entrambe sono diffeomorfe all'insieme $\tilde{M}_1 \cup \tilde{M}_2 \cup [0, 1] \times \partial S^{n-1}$ dove $[0, 1] \times \partial S^{n-1}$ è un collare in cui $\{0\} \times \partial S^{n-1}$ è incollato a $\partial \tilde{M}_1$ con f , $\{1\} \times \partial S^{n-1}$ è incollato a $\partial \tilde{M}_2$ con f' e nell'interno del collare ci sono tutti i diffeomorfismi f_t , che mandano con continuità la f nella f' . □

Proposizione 1.11. *Se una tra M_1 e M_2 è una varietà non orientabile, allora la loro somma connessa è ben definita, indipendentemente dalla scelta di f .*

Dimostrazione. A priori, la somma connessa potrebbe dipendere dalla scelta della classe di isotopia di f . Sia M_1 non orientabile e siano $\tilde{M}_1 = M_1 - U_1$ e $\tilde{M}_2 = M_2 - U_2$. Sia $f : \partial \tilde{M}_1 \rightarrow \partial \tilde{M}_2$ un omeomorfismo. Esistono due classi di isotopia per f : fissata un'orientazione per ∂M_i , sia f l'omeomorfismo che preserva le orientazioni e sia f' l'omeomorfismo che le rovescia le orientazioni. Per il Lemma 3.1 di [5], data una

varietà non orientabile M , esiste un omeomorfismo di M in sé che inverte l'orientazione di una sfera inclusa in essa. Nel nostro caso, dato che M_1 non è orientabile, esiste un omeomorfismo g di M_1 in sé che inverte l'orientazione della sfera $\partial\tilde{M}_1$ inclusa in essa. Ne consegue che la somma connessa $M_1\#_f M_2$ è omeomorfa alla somma $M_1\#_{f'} M_2$ e l'omeomorfismo è dato da g su M_1 e dall'identità su M_2 . □

Proposizione 1.12. *Se M_1 e M_2 sono varietà orientabili e una delle due è tale che esiste un omeomorfismo da se stessa in se stessa che ne inverte l'orientazione, allora la somma connessa è ben definita, indipendentemente da f .*

Dimostrazione. Sia g l'omeomorfismo di $\partial\tilde{M}_1$ in se stesso che ne inverte l'orientazione (per ipotesi esiste in M_1 , g ne sarà la restrizione).

Le due varietà con bordo, \tilde{M}_1 e \tilde{M}_2 , possono essere incollate a priori in due modi diversi: fissata un'orientazione su di esse, f può preservare o rovesciare l'orientazione indotta nei bordi $\partial\tilde{M}_1$ e $\partial\tilde{M}_2$. In realtà, data l'esistenza dell'omeomorfismo g che inverte l'orientazione in $\partial\tilde{M}_1$, si ha che le due somme connesse, a priori differenti, sono omeomorfe. L'omeomorfismo è dato dalla composizione di g con f . □

Corollario 1.13. *La somma connessa di varietà 2-dimensionali è sempre ben definita.*

Dimostrazione. Abbiamo visto che la somma connessa di due varietà è ben definita se una delle due è non orientabile oppure se entrambe sono orientabili e una delle due ammette un omeomorfismo da se stessa in se stessa che ne inverte l'orientazione.

Per il caso in cui una delle 2-varietà sia non orientabile, siamo già alla conclusione della prova. Mostriamo ora il corollario nel caso in cui entrambe le varietà M_1 e M_2 siano orientabili. Nella sezione successiva vedremo che le varietà bidimensionali orientabili sono omeomorfe o alla sfera, o alla somma connessa di n tori. Si dimostra che, in entrambi i casi, la riflessione rispetto ad un piano passante per il centro della varietà è un omeomorfismo che ne inverte l'orientazione. Quindi per tutte le 2-varietà esiste un omeomorfismo che ne inverte l'orientazione e perciò la somma connessa di 2-varietà è sempre ben definita. □

Nel capitolo seguente, dopo la definizione di *varietà prima* e di *decomposizione in fattori primi* si troverà un esempio di due somme connesse di 3-varietà differenti a partire dalle stesse varietà di partenza.

In conclusione, diamo la seguente definizione per la somma connessa di 3-varietà orientabili (in modo che anch'essa sia sempre ben posta):

Definizione 1.14. Siano M_1 e M_2 3-varietà orientabili. Fissata un'orientazione su entrambe, si definisce la somma connessa $M_1\#M_2$ come nella Definizione 1.5, scegliendo come omeomorfismo f quello che inverte le orientazioni fissate.

1.2 Classificazione di varietà

1.2.1 Il problema della classificazione

In una fissata categoria, il *problema della classificazione* consiste nel problema di determinare, in un numero finito di passi, se due dati oggetti siano o meno isomorfi in tale categoria.

Noi, in particolare, siamo interessati alla categoria delle varietà topologiche n -dimensionali e i nostri *morfismi* sono gli omeomorfismi.

La domanda che ci poniamo, quindi, è:

date due varietà n -dimensionali, è possibile determinare se sono o meno omeomorfe?

Dato che gli omeomorfismi mandano componenti connesse in componenti connesse, ci limiteremo ad analizzare il caso di varietà connesse.

Inoltre il caso di varietà con bordo deriva dall'analisi delle componenti di bordo (che sono varietà $(n-1)$ -dimensionali) e dal caso senza bordo. Prenderemo quindi in esame solo varietà senza bordo.

Esempio 1.6. Nel caso 1-dimensionale, l'unica varietà connessa e senza bordo (*curva semplice*) compatta, come abbiamo già visto, è la circonferenza S^1 .

L'unica curva non compatta, invece, è la retta.

Nel caso delle 2-varietà (cioè delle superfici) si è giunti ad un **Teorema di classificazione**, che sarà enunciato e dimostrato nella prossima sezione. La formulazione di tale teorema, nella forma che vedremo noi, è di Von Dick (1888); la dimostrazione riportata è di Brahma (1921).

In dimensione $n > 3$ il problema è stato risolto in senso negativo: nel 1958, Markow ha dimostrato che non può esistere un algoritmo finito di classificazione, utilizzando un risultato di non esistenza di classificazione dei gruppi finitamente generati (Adjan, 1955). I dettagli ciò esulano dagli obiettivi di questa tesi.

Il caso decisamente più interessante è dato dalle 3-varietà. Esso è un problema tutt'ora aperto.

La ricerca di un **Teorema di classificazione** risale agli inizi del '900, con l'opera di Poincaré. In seguito sono stati fatti tentativi con tecniche molto diverse; i più interessanti sono stati ad opera di Montersinos e Hilden, che hanno utilizzato la teoria dei rivestimenti, o di Heegaard, che ha dato il suo contributo con le celebri *decomposizioni di Heegaard*, utili per rappresentare le 3-varietà.

Tra gli anni '70 e '80, poi, il matematico statunitense William Thurston propose un approccio completamente diverso: nel 1982 egli enunciò la *Congettura di geometrizzazione*, che costituisce una sorta di versione tridimensionale del **Teorema di uniformizzazione di Riemann** per le superfici.

Il **Teorema di uniformizzazione** descrive un forte collegamento tra l'analisi complessa e la geometria differenziale delle superfici e afferma che ogni superficie di Rie-

mann ammette una metrica riemanniana a curvatura gaussiana costante 1, 0 o -1. La *Congettura di geometrizzazione* implica la più famosa **Congettura di Poincaré** ed è stata dimostrata nel 2003 dal matematico russo Grigorij Perelman. Tale congettura non dà luogo a una vera e propria classificazione delle 3-varietà ma avvicina decisamente la soluzione del problema.

La *Congettura di geometrizzazione* asserisce che ogni 3-varietà si decompone in pezzi geometrici, dopo averla tagliata lungo sfere e tori non essenziali. Tali concetti non sono per niente banali e saranno enunciati dettagliatamente e per lo più dimostrati nei due capitoli successivi, interamente dedicati alle 3-varietà. Ciascuno dei pezzi in cui la varietà si decompone ammette una metrica riemanniana localmente omogenea completa.

Le geometrie tridimensionali omogenee sono 8; tra queste vi sono le 3 geometrie a curvatura costante, presenti nel Teorema di uniformizzazione di Riemann per le superfici (ellittica, euclidea e iperbolica). Sei di queste otto geometrie sono realizzate topologicamente da varietà di Seifert, argomento del terzo capitolo di questa tesi.

Prima di passare alla classificazione delle superfici, è opportuno ricordare l'importantissimo operato, per lo studio delle 3-varietà, del matematico francese di inizio '900 Henri Poincaré.

Nel 1904 egli stava gettando le fondamenta di quella che sarebbe diventata la topologia algebrica. Grazie allo strumento dell'omologia, riuscì a distinguere (quindi a classificare) tutte le varietà di dimensione 2. Il suo obiettivo era di estendere il suo ragionamento alla dimensione 3; però egli trovò una 3-varietà, chiamata poi *sfera di Poincaré*, che aveva la stessa omologia della sfera tridimensionale, ma non era omeomorfa ad essa.

Allora Poincaré sviluppò un nuovo strumento, il **gruppo fondamentale**, cioè il gruppo delle classi di omotopia di cammini chiusi in un determinato spazio topologico. Egli congetturò che esso fosse sufficiente per distinguere la 3-sfera dalle altre varietà tridimensionali.

In seguito vediamo l'enunciato formale di tale congettura. Siccome è stata dimostrata (da Perelman, insieme alla congettura di geometrizzazione di Thurston), verrà enunciata sotto forma di Teorema.

Definizione 1.15. Uno spazio topologico X si dice semplicemente connesso se il suo gruppo fondamentale è banale.

Esempio 1.7. Cerchiamo, in questo esempio, di capire come è fatta la **sfera tridimensionale**.

Immaginiamo di avere due palle tridimensionali piene D_1^3 e D_2^3 e di incollarle lungo il loro bordo, cioè di far corrispondere tra di loro i punti sulla sfera S_1^2 che borda la prima con analoghi punti su S_2^2 , bordo della seconda. Poco ci importa che per incollare le due palle tra di loro dobbiamo uscire da \mathbb{R}^3 , in cui sono immerse. Quella che otteniamo è sicuramente una varietà tridimensionale senza bordo, che chiamiamo 3-sfera e che indichiamo con S^3 . Immaginiamo infatti di essere immersi in una delle

due palle e di muoverci verso il suo bordo: quando arriviamo ad esso, anziché toccare un confine, anziché trovare un limite, noi ci ritroveremo invece nella seconda palla, dato che i punti delle due sfere di bordo sono stati identificati.

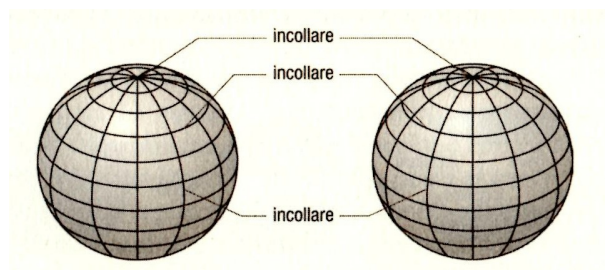


Figura 1.3: La sfera tridimensionale

Si noti che ragionando nello stesso modo con due dischi bidimensionali D_1^2 e D_2^2 , e incollandoli lungo le loro circonferenze di bordo, si ottiene proprio la sfera bidimensionale S^2 . Questa operazione per noi risulta più intuitiva, dato che avviene fuori da \mathbb{R}^2 , spazio in cui sono immersi i due dischi, ma dentro \mathbb{R}^3 , che ancora noi riusciamo a visualizzare, a differenza dello spazio quadridimensionale \mathbb{R}^4 . In tal modo si vede la 2-sfera come unione dei suoi due emisferi, incollati lungo la circonferenza equatoriale.

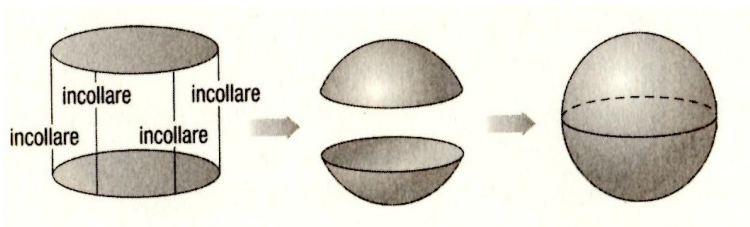


Figura 1.4: La 2-sfera come unione dei due emisferi

Teorema 1.16 (Congettura di Poincaré). *Ogni 3-varietà chiusa e semplicemente connessa è omeomorfa alla 3-sfera.*

Ovviamente, non riportiamo la dimostrazione fatta da Perelman nel 2003. È utile però sapere che egli, nella sua dimostrazione della congettura di geometrizzazione, utilizza il flusso di Ricci, uno strumento analitico studiato principalmente da Richard Hamilton. Vediamo così che, come agli inizi del '900 Poincaré inventò, per così dire, dal nulla la topologia algebrica per venire in soccorso degli analisti, nello stesso modo, cento anni dopo, Perelman dimostra la Congettura di Poincaré, il più grande problema della topologia, grazie al flusso di Ricci, uno strumento dell'analisi.

1.2.2 Classificazione delle superfici

Quelle che noi chiamiamo *superfici* non sono altro che le varietà bidimensionali. Prima di addentrarci nel Teorema vero e proprio, è opportuno introdurre alcuni concetti preliminari.

Definizione 1.17. Si definisce **simpleso affine n-dimensionale**, o n-simpleso, e si indica con Δ^n , l'involuppo convesso di $n + 1$ punti affinemente indipendenti di \mathbb{R}^m , detti vertici.

Con leggero abuso di notazione, uno 0-simpleso verrà confuso con il proprio unico vertice.

Dato un n-simpleso Δ^n , e dato un insieme di $q + 1$ suoi vertici, il q-simpleso da essi generato si dice **faccia** di Δ^n . Una faccia Δ^q di Δ^n si dice propria se $\Delta^q \neq \Delta^n$.

Definizione 1.18. Un **complesso simpliciale** K è un insieme di semplici di uno stesso spazio \mathbb{R}^m tali che:

- se Δ^q è una faccia di Δ^n e $\Delta^n \in K$, allora $\Delta^q \in K$;
- se $\Delta^n, \Delta^p \in K$, allora $\Delta^n \cap \Delta^p$ o è l'insieme vuoto o è una faccia comune dei due semplici;
- ogni simpleso di K è faccia di un insieme finito di semplici di K .

Chiameremo **corpo** di K lo spazio topologico $|K|$ costituito dai punti dell'unione dei semplici di K con la topologia indotta da \mathbb{R}^m .

Definizione 1.19. Una triangolazione di uno spazio topologico X è una coppia (K, f) , dove K è un complesso e $f : |K| \rightarrow X$ è un omeomorfismo. Si dirà che K triangola X .

Un importante risultato, riguardo alle superfici, è il seguente:

Teorema 1.20. *Ogni superficie è triangolabile.*

Questo teorema è dovuto a Radó e risale al 1925. Sarà fondamentale nella dimostrazione del teorema di classificazione. Non ne riportiamo la dimostrazione.

Si noti che nelle triangolazioni delle superfici saranno presenti 0-simplessi (*punti*), 1-simplessi (*lati*) e 2-simplessi (*facce*).

Esempio 1.8. In figura 1.5 si possono vedere le triangolazioni del toro \mathbb{T}^2 e del piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

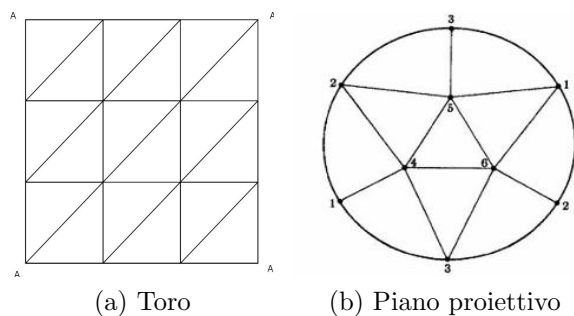


Figura 1.5: Due esempi di triangolazioni

È fondamentale anche il concetto di somma connessa, definito nella sezione precedente. Il prossimo esempio mostra come sia semplice la somma connessa per le superfici, data la possibilità di avere un diagramma planare di esse. Dalle figure, si può anche osservare come funziona il metodo del taglia e cuci, molto utile nella dimostrazione costruttiva del Teorema di Classificazione.

Esempio 1.9. Si può osservare la somma connessa di due piani proiettivi, che dà come risultato la bottiglia di Klein. Il taglia e cuci funziona così: i lati che hanno la stessa lettera vanno associati, lungo le direzioni indicate dalle frecce. Per avere un diagramma planare più semplice, si taglia lungo un segmento che costituirà un nuovo lato e se ne incollano due, identificati dalla stessa lettera.

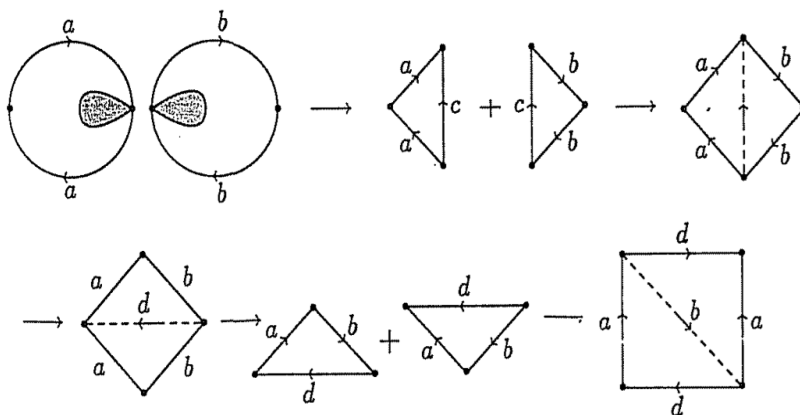


Figura 1.6: $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 = \mathbb{K}^2$.

I due esempi successivi servono per prendere confidenza con la somma connessa tra superfici e con il taglia e cuci (o ‘chirurgia topologica’), utilizzati molto nella dimostrazione del Teorema di Classificazione. Sono tratti da [8], dove sono proposti come esercizi.

Esempio 1.10. La somma connessa tra superfici è un'operazione che ha per elemento neutro la sfera S^2 . Ossia, per qualunque superficie S , vale

$$S \# S^2 \cong S$$

Infatti, sia \tilde{S} la superficie S meno un disco aperto D_1^2 . Rimuovendo dalla sfera un disco aperto, si ha $S^2 - \overset{\circ}{D}_2^2 = D^2$. Quindi fare la somma connessa $S \# S^2$ è equivalente a fare l'unione $\tilde{S} \cup D^2$, incollando tra loro le circonferenze di bordo (abbiamo visto nel capitolo precedente che tale somma è sempre ben definita per le superfici). Fare quell'unione significa attaccare un disco bidimensionale D^2 proprio dove lo si aveva rimosso; si otterrà quindi di nuovo S .

Esempio 1.11. Se si collassa il bordo del nastro di Moebius ad un punto, si ottiene un piano proiettivo \mathbb{P}^2 .

Siccome collassare il bordo del nastro di Moebius ad un punto è come tappare il nastro di Moebius con un disco D^2 , identificando il bordo del disco con il bordo del nastro, allora possiamo dire che, rimuovendo un disco aperto dal piano proiettivo, otteniamo un nastro di Moebius.

Osservare la figura 1.7 per capire come si è arrivati alla soluzione dell'esercizio.

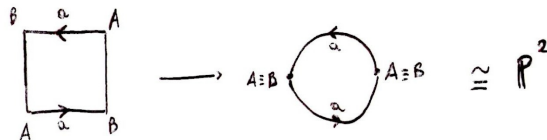


Figura 1.7: Ecco come dal nastro di Moebius si arriva al piano proiettivo

Quello che segue sarà l'ultimo teorema preliminare al Teorema di Classificazione.

Teorema 1.21. *Una superficie S è connessa se e solo se, data una sua triangolazione K costituita dai 2-simplessi (triangoli) T_1, T_2, \dots, T_n , essa può essere ordinata in modo tale che ogni triangolo abbia almeno un lato identificato ad un lato di un triangolo precedente nella successione.*

Dimostrazione. Sia S una superficie connessa e sia data una sua triangolazione. Sia T_1 un qualunque triangolo. Poiché i triangoli sono connessi, T_1 sarà connesso. Ora, per la connessione di S , esisterà almeno un triangolo T_2 che è incollato a T_1 lungo un suo lato. Allora anche l'unione di T_1 e T_2 , incollati lungo il lato che hanno in

comune, sarà connessa. Nuovamente, esisterà un triangolo T_3 che risulta incollato per un lato all'unione di T_1 e T_2 e perciò anche $T_1 \cup T_2 \cup T_3$ sarà connessa. E così via, per la connessione di S , il processo potrà essere ripetuto finché ci saranno lati liberi e triangoli non utilizzati.

Viceversa, sia S non connessa. Allora S ha almeno due componenti connesse. Siano T_1, \dots, T_k i triangoli che triangolano la prima componente e T_{k+1}, \dots, T_n quelli della seconda. Si nota che T_{k+1} non è incollato a nessuno dei triangoli precedenti T_1, \dots, T_k , dato che sta su una componente connessa differente.

□

Possiamo ora finalmente enunciare il Teorema di Classificazione. Classificheremo completamente (a meno di equivalenze topologiche) le superfici connesse, compatte e con bordo vuoto.

Teorema 1.22 (di Classificazione delle Superfici). *Ogni superficie è topologicamente equivalente a una e una sola tra le seguenti:*

- la sfera S^2
- la somma connessa di g tori $\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$
- la somma connessa di g piani proiettivi $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \dots \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Dimostrazione. La dimostrazione di questo teorema è costruttiva, cioè non solo viene provato il risultato, ma viene anche mostrato il modo per determinare, data una superficie, a quale delle tre forme è omeomorfa. È stato preso spunto dalla dimostrazione che si trova in [8].

Data la sua lunghezza, è opportuno procedere per passi.

Passo 1. Sia S una superficie qualunque. Per il Teorema 1.20, essa è triangolabile. Per la compattezza, esiste una triangolazione finita di S ; per la connessione, invece, il Teorema 1.21 implica che i triangoli possono essere ordinati in modo che ciascuno si possa incollare lungo un lato ad uno dei precedenti. Ci saranno più ordinamenti possibili; se ne scelga uno e si incollino i triangoli in tale ordine in modo che formino un poligono che rappresenti il modello planare della superficie S . Ci sono diversi modi per fare questo passo, ma il processo della dimostrazione di questo teorema li riconurrà tutti ad una delle forme canoniche.

Ovviamente i lati del poligono ottenuto saranno associati tra di loro per formare la superficie. Per una proprietà delle superfici, ciascun lato è associato ad uno e un solo altro lato. Allora, siccome gli 1-simplessi interni sono già identificati tra loro, i lati del poligono saranno associati a coppie. Li si indica con lettere minuscole dell'alfabeto e con una freccia che ne indichi il verso in cui andranno associati.

Ogni volta che è possibile, è opportuno semplificare il modello planare costruito. Lo si può fare ripetendo i due passi successivi, ogni volta che se ne presenta l'opportunità. Tutti gli altri passi della dimostrazione, invece, devono essere svolti in ordine.

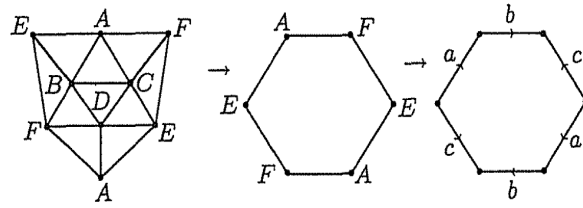


Figura 1.8: Esempio di modello planare di una superficie.

Passo 2. Se nel modello planare della superficie è presente per due volte la stessa sequenza di lati, la si elimina e la si sostituisce con un unico lato: ad esempio, se nel nostro poligono è presente per due volte la sequenza abc^{-1} , la si può sostituire con un unico lato, indicato con la lettera d .

Passo 3. Se sono presenti coppie di lati, associati con orientazione opposta, adiacenti, essi possono essere eliminati. La figura 1.9 mostra l'operazione di chirurgia topologica effettuata.

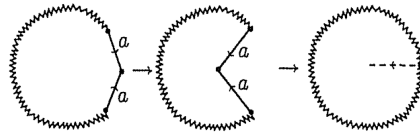


Figura 1.9: Eliminazione di lati opposti adiacenti.

Notiamo che se rimane una sola coppia di lati associati con orientazione opposta, la superficie S è la sfera S^2 . Altrimenti, si procede con i passi seguenti.

Passo 4. Il nostro scopo è fare in modo che nel modello planare sia presente un solo vertice. Per fare questo, occorre ripetere più volte l'operazione di taglia e cuci topologico illustrata nella figura 1.10. Si osserva che con tale operazione viene eliminato un vertice contrassegnato con Q e ne viene aggiunto uno contrassegnato con P . Ripetendo opportunamente questa operazione, si arriva ad avere un modello planare con soltanto vertici P presenti.

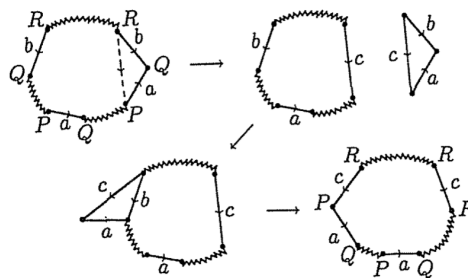


Figura 1.10: Rimozione di un vertice Q in favore di un vertice P

Passo 5. Si noti che in un modello planare di una superficie le coppie di lati possono essere associati con la stessa orientazione o con orientazione opposta. Il primo caso si ha se, percorrendo il bordo del poligono, troviamo i due lati associati contrassegnati da una freccia che va nella medesima direzione; il secondo caso se, viceversa, le frecce relative ai due lati associati vanno in direzioni opposte. Nel primo caso diciamo che due lati sono *twistati*, nel secondo caso diciamo che sono *opposti*. Quello che vogliamo fare ora è rendere adiacenti tra loro tutti i lati twistati. L'operazione di chirurgia topologica da effettuare è illustrata nella figura 1.11.

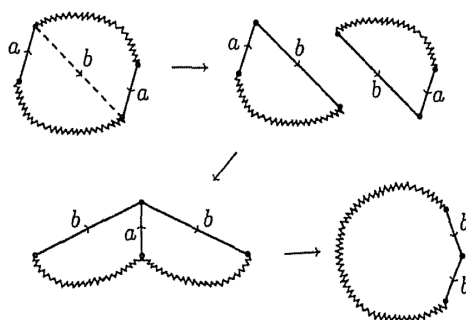
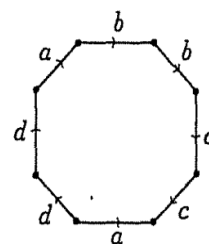


Figura 1.11: Come rendere adiacenti due lati twistati

Si osservi ora che, se a questo punto sono presenti solo g coppie di lati twistati, allora la superficie che stiamo cercando di classificare è la somma di g piani proiettivi $\#_g \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Passo 6. Arrivati a questo punto, le coppie di lati opposti devono per forza comparire in numero pari. Se così non fosse, ci sarebbe la possibilità di avere una coppia di lati opposti soltanto. Questi non potranno essere adiacenti (perché per il Passo 3 andrebbero eliminati) e quindi saranno separati da coppie di lati twistati adiacenti, dato che è stato portato a termine il Passo 5. Ciò risulterà in contraddizione con il Passo 4, poiché in questo modo saranno presenti due vertici distinti. Questa contraddizione si osserva nella figura accanto, dove l'unica coppia di lati opposti è contrassegnata con la lettera a : in tale modello c'è un vertice P , coda di a e testa di d , e un vertice Q , testa di a , testa e coda di b e c .



Quindi ci saranno almeno due coppie di lati opposti, disposti incrociati nel modello planare. Essi possono essere portati insieme come mostrato nella figura 1.12. Si noti che si ottiene la sequenza tipica del toro $cdc^{-1}d^{-1}$.

Se al termine di questo passo non sono presenti coppie twistate ma solo $2g$ coppie di lati opposti, allora la superficie in questione sarà la somma connessa di g tori $\#_g \mathbb{T}^2$.

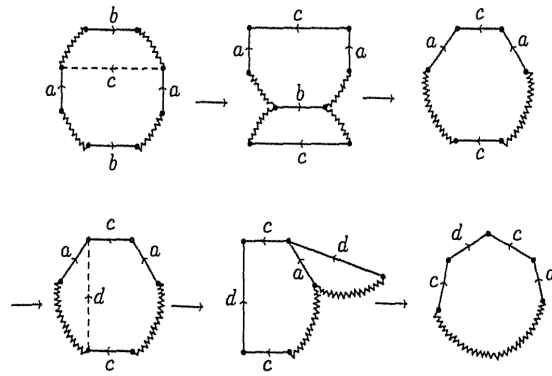


Figura 1.12: Come rendere adiacenti due coppie di lati opposti

Passo 7. Ora, o la superficie S è stata classificata, oppure essa contiene sia coppie twistate sia coppie opposte. Allora essa risulterà essere la somma connessa di tori e piani proiettivi insieme. Questo caso viene risolto grazie al seguente Lemma.

Lemma 1.23. $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \mathbb{T}^2 = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Dimostrazione. La dimostrazione si può osservare nella figura seguente. □

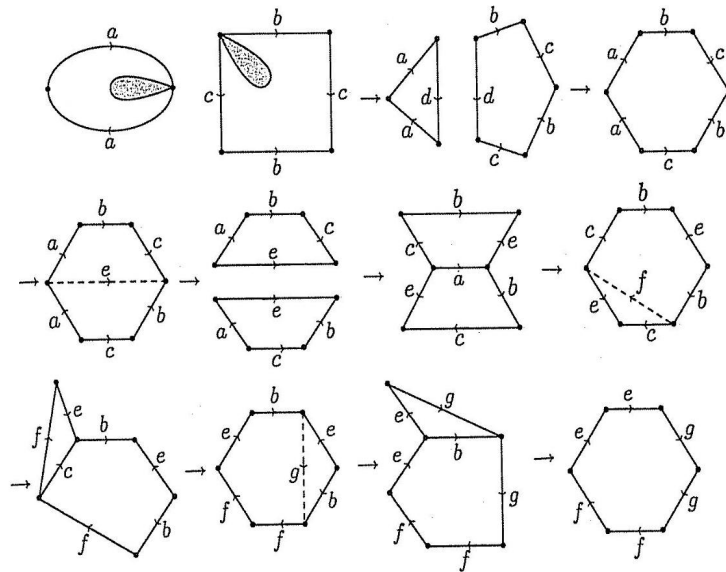


Figura 1.13: Somma connessa di un toro con un piano proiettivo

Dunque, una combinazione di tori e piani proiettivi viene ricondotta ad una combinazione di piani proiettivi soltanto.

Così termina la dimostrazione del Teorema di Classificazione. Ricordiamo l'importanza dell'ordine con cui vengono effettuati i passi, come si è visto per il Passo 6 riguardo il numero pari dei vertici opposti. □

Capitolo 2

Decomposizione delle 3-varietà

2.1 Decomposizione in fattori primi

Abbiamo visto che esiste una completa classificazione delle varietà bidimensionali, o superfici. In dimensione 3, invece, ciò non è più possibile.

Esistono però alcuni *trucchi* per semplificare, tagliando lungo superfici incluse in esse, le 3-varietà più complicate, decomponendole in varietà più semplici.

La prima decomposizione che vedremo è detta Decomposizione in Fattori Primi, o Prime Decomposition in inglese, ed è data dal taglio delle 3-varietà lungo sfere incompressibili, cioè le superfici più semplici che possono essere ivi contenute. Prima di introdurre la Decomposizione in Fattori Primi, è opportuno dare alcune definizioni preliminari.

Definizione 2.1. Una sfera S^2 contenuta in una 3-varietà è detta **essenziale** se non delimita una palla e se non è una componente di bordo.

Una 3-varietà è detta **irriducibile** se ogni sfera contenuta in essa non è essenziale.

Osserviamo quindi che ogni sfera contenuta in una varietà irriducibile o delimita una palla o è una componente di bordo.

Ora enunciamo il seguente teorema, dovuto ad Alexander, che è molto importante. Una dimostrazione completa si può trovare in [3], qui se ne darà soltanto un'idea.

Teorema 2.2 (di Alexander). *Ogni sfera contenuta in \mathbb{R}^3 delimita una palla.*

Dimostrazione. Sia S una superficie contenuta in \mathbb{R}^3 , e sia $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione altezza data dalla coordinata z . Si suppone che h presenti i suoi punti critici tutti a quote differenti (senza perdere di generalità); quindi si scelgono $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ valori non critici della funzione h tali che gli intervalli $(-\infty, a_1)$, (a_1, a_2) , \dots , $(a_n, +\infty)$ contengano al loro interno al più un punto critico.

Ora, per ogni i , si consideri $h^{-1}(a_i)$: è un'unione di curve chiuse disgiunte nel piano $z = a_i$. Per il teorema di Schoenflies, analogo a questo ma per il caso bidimensionale, ognuna di queste curve delimita un disco nel piano. Si scelga ora un cerchio C che

borda un disco D disgiunto da tutti le altre curve; preso un ϵ molto piccolo, si tolga dalla superficie S l'anello dato da C e compreso tra i piani $z = a_i \pm \epsilon$ e si tappi a tali livelli con il disco D . Si ripeta in seguito la stessa operazione con tutti i cerchi che bordano dischi disgiunti dagli altri al livello $z = a_i$ (con ϵ opportuni), come mostra la figura 2.1.

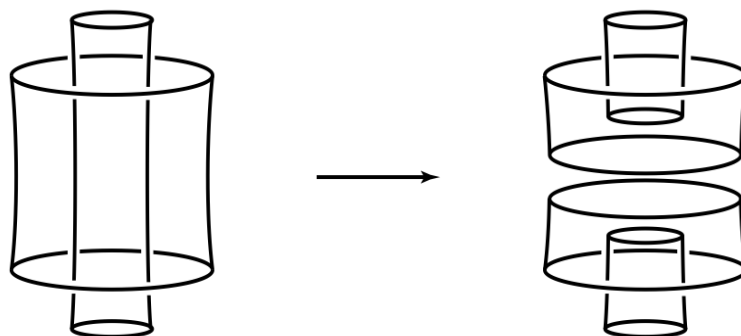


Figura 2.1: Come tagliare lungo cerchi eappare con dischi

Proseguendo poi per ogni $i = 1, \dots, n$, si divide la superficie S di partenza in parti più semplici, S_j , ciascuna delle quali contiene al più un punto critico.

Si dimostra che ciascuna delle S_j è omeomorfa a uno di sette modelli. Quattro sono illustrati nella figura 2.2, gli altri tre sono ottenibili ruotando dall'alto al basso questi.

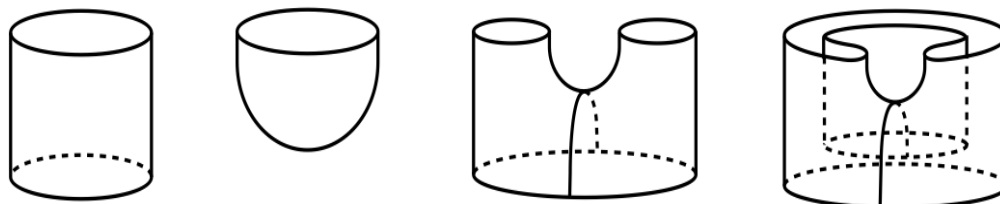


Figura 2.2: Quattro dei sette modelli a cui le superfici S_j possono essere ricondotte

Dunque si osserva che ciascuna delle superfici S_j delimita una palla.

Ora, sia la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ una sfera. Con il procedimento spiegato in precedenza, la abbiamo divisa in superfici più piccole, che in questo caso sono tutte sfere, S_j , ciascuna delle quali delimita una palla. Unendole, con il procedimento inverso di quello fatto in precedenza, si dimostra che ad ogni passo successivo si ottiene una nuova collezione di sfere bordanti palle. Si giunge quindi infine a dimostrare che S , unione di tutte le S_j , delimita una palla.

□

Osservazione 2.3. Il Teorema di Alexander ci dice che lo spazio euclideo \mathbb{R}^3 è una 3-varietà irriducibile. Siccome \mathbb{R}^3 è il modello locale di ogni 3-varietà, accadrà che, in qualunque 3-varietà, ogni punto interno giace in una palla il cui bordo è dato da una

sfera.

Dato che la sfera S^3 è la compattificazione di \mathbb{R}^3 , anch'essa è irriducibile.

Esempio 2.1. Si consideri la 3-varietà $S^2 \times [0, 1]$. In essa le sfere $S^2 \times \{0\}$ e $S^2 \times \{1\}$ non sono essenziali semplicemente perché sono componenti di bordo. La sfera $S^2 \times \{1/2\}$, invece, è essenziale. Se incolliamo le componenti di bordo, possiamo ottenere $S^2 \times S^1$ oppure $S^2 \tilde{\times} S^1$, a seconda che le due sfere di bordo siano incollate con un omeomorfismo che rovesci l'orientazione o che la preservi. Entrambe le varietà così ottenute sono un esempio di 3-varietà senza bordo non irriducibile. La seconda, data dall'incollamento delle due sfere di bordo in modo che la loro orientazione venga preservata, è una varietà non orientabile. Per dare un'idea più semplice, si può spiegare in questo modo: $S^2 \tilde{\times} S^1$ è per $S^2 \times S^1$ quello che, in dimensione 2, la bottiglia di Klein è per il toro.

Siamo ora interessati a capire cosa accade ad una 3-varietà M quando tagliamo lungo una superficie S propriamente contenuta in essa. Con *propriamente contenuta* si intende che $\partial S = S \cap \partial M$. D'ora in poi supponiamo che M sia orientabile.

Indichiamo con $M|S$ la 3-varietà che si ottiene rimuovendo da M un piccolo intorno tubulare di S . Se M è connessa e S è una sfera non essenziale, allora S delimita una palla e $M|S$ ha due componenti, M'_1 e M'_2 . Siano poi M_1 e M_2 le varietà ottenute tappando le sfere di bordo di M'_1 e M'_2 , date da S , con due palle. Per quanto definito nel capitolo precedente, possiamo dire che M è la somma connessa di M_1 ed M_2 :

$$M = M_1 \# M_2$$

Osservazione 2.4. La somma connessa tra 3-varietà è un'operazione commutativa, associativa e con S^3 come elemento neutro.

La dimostrazione che S^3 sia elemento neutro, cioè che valga $M \# S^3 = M$ per ogni M 3-varietà, è analoga a quella mostrata nel capitolo precedente in dimensione 2.

Il fatto che la somma connessa sia commutativa viene dalla definizione.

Riguardo all'associatività, possiamo dire che in una somma $M = M_1 \# M_2 \# \dots \# M_n$ tutte le sfere lungo cui si taglia la varietà M sono disgiunte. Si ha quindi S , collezione di $n - 1$ sfere disgiunte incluse in M , tale che $M|S$ ha n componenti M'_i , con le M_i date da M'_i tappando con delle palle le sfere di bordo. Dunque non conta l'ordine con il quale vengono sommate le M_i o come vengono associate.

Per mostrare quanto il tagliare lungo sfere (e quindi scrivere una varietà M come somma connessa di varietà più semplici) possa semplificare lo studio delle 3-varietà, si veda la seguente proposizione.

Proposizione 2.5. *Sia $M = M_1 \# M_2$. Allora vale: $\pi_1(M) \cong \pi_1(M_1) * \pi_1(M_2)$.*

Dimostrazione. È una diretta conseguenza del Teorema di Seifert-Van Kampen e del fatto che S^2 è semplicemente connessa.

□

Possiamo a questo punto dare la seguente definizione.

Definizione 2.6. Una 3-varietà M è detta **prima** se, ogni volta che si può scrivere come somma connessa $M = M_1 \# M_2$, allora si ha che una tra M_1 ed M_2 è uguale ad S^3 .

Il nostro scopo, ora, è fattorizzare ogni 3-varietà M , scrivendola come somma connessa di varietà prime. Al termine della sezione giungeremo a dimostrare che tale fattorizzazione esiste sempre ed è unica. Osserviamo ora qualche esempio. I più curiosi sono dati dalle varietà con bordo.

Esempio 2.2. Per il Teorema di Alexander ogni 2-sfera in S^3 delimita una palla. Perciò la sfera tridimensionale S^3 è una varietà prima.

Infatti, tagliando lungo S^2 otteniamo M'_1 e M'_2 , ciascuna delle quali è una palla tridimensionale chiusa D^3 . Tappando in seguito con palle tridimensionali le componenti di bordo, si ottengono le varietà M_1 e M_2 ; in particolare, per quanto già detto, vale $M_i = S^3$. Si scrive quindi $S^3 = M_1 \# M_2 = S^3 \# S^3$ e perciò abbiamo mostrato che S^3 è prima.

Esempio 2.3. Fare la somma connessa di una varietà M con un disco D^3 è come togliere da M una palla.

Infatti, noi dobbiamo incollare $M - \overset{\circ}{D^3}$ e $D^3 - \overset{\circ}{D^3}$ lungo il loro bordo. Ma $D^3 - \overset{\circ}{D^3}$ non è nient'altro che $\partial D^3 \cong S^2$, che si identifica proprio con $\partial(M - \overset{\circ}{D^3})$. Quindi la somma connessa cercata è data proprio da $M - \overset{\circ}{D^3}$.

Lemma 2.7. *Sia M una 3-varietà compatta e con esattamente k sfere in ∂M . Sia \hat{M} la varietà ottenuta da M tappando con palle tutte le sfere di bordo. Allora, se $\hat{M} = M_1 \# \dots \# M_n$ è una decomposizione in fattori primi di \hat{M} , ne consegue che $M = M_1 \# \dots \# M_n \# D^3 \# \dots \# D^3$ è una decomposizione in fattori primi di M (con esattamente k fattori D^3).*

Dimostrazione. Viene facilmente ripetendo induttivamente le considerazioni fatte nell'esempio precedente. □

Esempio 2.4. Si ha che $(S^2 \times \hat{[0, 1]})$, cioè la chiusura di $S^2 \times [0, 1]$, è omeomorfa alla 3-sfera S^3 . Dal Lemma appena enunciato, dato che $S^2 \times [0, 1]$ ha per bordo due 2-sfere, otteniamo una decomposizione in fattori primi di essa: $S^2 \times [0, 1] = D^3 \# D^3$.

In effetti, la definizione di varietà prima è pressoché la stessa della precedente definizione di irriducibile, modulo uno degli esempi presentati sopra.

Proposizione 2.8. *Una varietà M è prima se e solo se è irriducibile oppure è omeomorfa a $S^2 \times S^1$.*

Dimostrazione. Sia M prima e sia S una sfera contenuta in essa. Ci sono due casi:

1. Se tagliando lungo S si disconnette M , siano M'_1 e M'_2 le componenti di $M|S$, per cui vale $\partial M'_i \cong S$; siano poi M_i le varietà a bordo vuote ottenute tappando S con una palla tridimensionale. Si ha $M = M_1 \# M_2$. Siccome M per ipotesi è prima, una tra M_1 e M_2 è una 3-sfera. Sia $M_1 = S^3$. Questo implica che $M'_1 = D^3$ e quindi la sfera S delimita una palla in M . Perciò M è irriducibile.
2. Se S non disconnette M , allora esiste una curva chiusa γ in M che interseca S in un solo punto. Sia R un intorno tubulare di $S \cup \gamma$. Si ha che R è omeomorfo a $S^2 \times S^1$ meno una palla e che ∂R è una sfera che disconnette M . Dal caso precedente abbiamo che $M = (S^2 \times S^1) \# N$, per una qualche 3-varietà N . Ma poiché M è prima, si ha che $N = S^3$ e quindi $M = S^2 \times S^1$.

Per l'implicazione inversa:

1. Sia M irriducibile e sia $M = M_1 \# M_2$. Allora M è ottenuta da $N_1 = M_1 - D^3$ e $N_2 = M_2 - D^3$, incollate lungo le loro sfere di bordo. Tale sfera delimita sia N_1 che N_2 in M e, per l'irriducibilità, una di esse è una palla. Sia $N_1 = D^3$; ciò implica che $M_1 = S^3$ e quindi M è prima.
2. Supponiamo ora $S^2 \times S^1 = U \# V$. Per la Proposizione 2.5 si ha $\mathbb{Z} \cong \pi_1(S^2 \times S^1) \cong \pi_1(U) * \pi_1(V)$. Dunque uno spazio tra U e V è semplicemente connesso; sia ad esempio U . Per la definizione di somma connessa, noi abbiamo una 2-sfera $S \subset S^2 \times S^1$ che separa la varietà $S^2 \times S^1$ in due componenti, U' e V' , che si ottengono rispettivamente da U e V rimuovendo da esse una palla tridimensionale D^3 . Poiché S è semplicemente connessa, per Seifert-Van Kampen varrà $\pi_1(U') = \pi_1(U)$ e quindi anche U' è semplicemente connesso. Consideriamo ora il ricoprimento universale di $S^2 \times S^1$, cioè $S^2 \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3 - \{0\}$. In esso U' ha una copia omeomorfa ad esso, che indichiamo con \tilde{U}' . Si ha che $\partial \tilde{U}'$ è una sfera in \mathbb{R}^3 e quindi, per il Teorema di Alexander, delimita una palla. Ne consegue che \tilde{U}' è una palla, e così sarà anche U' . Questo implica che $U \cong S^3$ e quindi $S^2 \times S^1$ è prima.

□

Siamo ora pronti per enunciare il seguente Teorema, fondamentale per lo scopo che ci eravamo proposti all'inizio della sezione.

Teorema 2.9 (Esistenza e unicità della Decomposizione in Fattori Primi). *Sia M una 3-varietà compatta, connessa e orientabile. Allora esiste una decomposizione $M = P_1 \# \dots \# P_n$, con ognuno dei P_i 3-varietà prima. Tale decomposizione è unica a meno dell'ordine e dell'inserimento o toglimento di addendi dati dalla sfera S^3 .*

Dimostrazione. La prova dell'esistenza della decomposizione in fattori primi è più complicata e partiamo da questa. Su [3] e su [5] si trova una dimostrazione completa, che utilizza il seguente Lemma.

Lemma 2.10. *Sia M una 3-varietà compatta. Supponiamo che ogni 2-sfera in $\text{int}(M)$ disconnetta M in due componenti. Allora esiste un numero intero $k(M)$ tale che, se $S = \{S_1, \dots, S_n\}$ è una collezione di 2-sfere disgiunte in $\text{int}(M)$, con $n \geq k(M)$, allora c'è almeno una componente di $M|S$ che è una 3-sfera bucata.*

La dimostrazione di questo Lemma è molto lunga e usa strumenti combinatori. Non sarà riportata in questa Tesi.

Diamo però un'idea della dimostrazione dell'esistenza della Decomposizione in fattori primi.

Se M non contiene sfere essenziali, allora è irriducibile e, perciò, prima. Altrimenti, se M contiene alcune sfere essenziali, iniziamo a tagliare lungo esse. Come mostrato nella prova della Proposizione 2.8, se S è una sfera che non disconnette M , allora tagliando lungo essa la varietà M viene decomposta come $M = M' \# (S^2 \times S^1)$, cioè possiamo portare fuori un fattore primo. Iterando questo procedimento, siamo in grado di decomporre M come $M = N \# (S^2 \times S^1) \# \dots \# (S^2 \times S^1)$, dove N è una 3-varietà in cui ciascuna sfera essenziale disconnette.

Continuando a tagliare N lungo sfere, la decomponiamo in $N = N_1 \# \dots \# N_{k+1}$. C'è quindi una collezione di sfere $S = S_1, \dots, S_k$ tale che $M|S$ ha come componenti R_1, \dots, R_{k+1} e vale $\hat{R}_i = N_i$ per ogni $i = 1, \dots, k+1$.

Dal Lemma 2.10, tra le R_i ci sono al massimo $k(N)$ varietà diverse dalla 3-sfera bucata; quindi nella decomposizione di N ci sono al massimo $k(N)$ fattori diversi dalla 3-sfera (non triviali). In questo modo la dimostrazione dell'esistenza è completata. Rimane da dimostrare il caso in cui sono presenti 2-sfere in ∂M . In tal caso, comunque, si giunge subito alla conclusine applicando il Lemma 2.7.

Passiamo ora a mostrare l'unicità della Decomposizione in fattori primi. Supponiamo che per una varietà non prima M esistano due scomposizioni:

$$M = P_1 \# \dots \# P_n \# l(S^2 \times S^1) = Q_1 \# \dots \# Q_m \# k(S^2 \times S^1)$$

Sia S un sistema di sfere disgiunte in M tale che S riduce M alle P_i , cioè tale che $M|S$ è dato dalle P_i con alcuni buchi, più eventualmente qualche 3-sfera bucata. Si osserva che un tale sistema esiste e che se S' è un sistema di sfere contenente S , allora anch'esso riduce M alle P_i . Analogamente, esiste un sistema di sfere disgiunte T che riduce M alle Q_i .

Se $S \cap T \neq \emptyset$, consideriamo un disco D incluso in T tale che $D \cap S = \partial D$. Usiamo D per tagliare la sfera S_j di S che contiene ∂D . In questo modo abbiamo creato due nuove sfere, S'_j e S''_j , che possiamo rendere disgiunte tra loro e entrambe disgiunte da S_j . In questo modo le tre sfere S_j, S'_j e S''_j sono tali che insieme delimitano una 3-sfera con 3 buchi P . Per un'osservazione fatta in precedenza, anche il sistema $S \cup S'_j \cup S''_j$ riduce M alle P_i . Togliendo la sfera S_j da questo nuovo sistema allargato, si modifica una sola componente di $M|S \cup S'_j \cup S''_j$; in particolare, si attacca P a una delle sue sfere di bordo (semplicemente, si aggiunge un buco a una componente della scomposizione). Si ha perciò che il nuovo sistema riduce comunque M alle P_i .

Abbiamo così costruito un sistema di sfere disgiunte S' che riduce M alle P_i e che incontra il sistema T in un cerchio in meno. Iterando questo procedimento per un

numero finito di volte, si giunge ad avere due sistemi disgiunti S e T . Perciò il sistema $S \cup T$ riduce M sia alle P_i che alle Q_i . Ne deriva che $n = m$ e che le Q_i non sono altro che una permutazione delle P_i .

Resta da mostrare che $l = k$. Si ha: $M = N \# l(S^2 \times S^1) = N \# k(S^2 \times S^1)$, perciò $\pi_1(M) = \pi_1(N) \oplus \mathbb{Z}^l = \pi_1(N) \oplus \mathbb{Z}^k$. Da qui viene che $l = k$. □

Osservazione 2.11. Dare un Teorema di decomposizione in fattori primi per le varietà non orientabili richiede più lavoro. Dall'esempio 2.1 già avevamo visto che ci sono due varietà prime non irriducibili: $S^2 \times S^1$ e $S^2 \tilde{\times} S^1$, il fibrato non orientabile di S^2 su S^1 . Anche quest'ultima varietà deriva dal taglio lungo una sfera che non disconnette. La dimostrazione dell'esistenza della decomposizione in fattori primi funziona quindi nello stesso modo. Per l'unicità, invece, è molto utile osservare che $N \# (S^2 \times S^1) = N \# (S^2 \tilde{\times} S^1)$ se N non è orientabile. Questo fatto è simile a quanto già dimostrato in dimensione 2: la somma connessa di una superficie non orientabile con un toro è uguale alla somma di essa con una bottiglia di Klein (cioè due piani proiettivi). L'unicità della decomposizione si ottiene quindi sostituendo ogni addendo dato da $S^2 \times S^1$ in varietà non orientabili con $S^2 \tilde{\times} S^1$.

Esempio 2.5. Questo è l'esempio promesso nel capitolo 1, che mostra come, date due varietà orientate M_1 e M_2 , $M_1 \# M_2$ non sia omeomorfo a $M_1 \# (-M_2)$, dove con $-M_2$ si denota M_2 con l'orientazione opposta.

Sia M una 3-varietà prima, orientata, che non ammette un omeomorfismo da se stessa a se stessa che inverte l'orientazione. Allora $M \# M$ non è omeomorfo a $M \# (-M)$.

Dimostrazione. Sia per assurdo $h : M \# M \rightarrow M \# (-M)$ un omeomorfismo. Esso preserva l'orientazione oppure la inverte. Quindi esiste un omeomorfismo che preserva l'orientazione tra $M \# M$ e una tra $M \# (-M)$ e $-(M \# (-M)) = (-M) \# M$. In entrambi i casi, dall'unicità della decomposizione in fattori primi, ne deriva un omeomorfismo che preserva le orientazioni tra M e $-M$, e ciò contraddice le ipotesi. □

2.2 Decomposizione JSJ

Oltre alla decomposizione in fattori primi, c'è un'ulteriore decomposizione canonica per le varietà irriducibili, compatte e orientabili. Si trova tagliando la varietà in questione non più lungo sfere, bensì lungo tori. È stata scoperta soltanto a metà degli anni '70 dai matematici Johannson e Jaco-Shalen, da cui il nome *Decomposizione JSJ*. Il motivo di una scoperta così tardiva può essere trovato nel fatto che l'unicità di tale decomposizione dà parecchi problemi. Un enunciato ingenuo dell'unicità della decomposizione JSJ, come vedremo, ha come controesempi le **varietà di Seifert**, così chiamate perché studiate molto approfonditamente dal matematico tedesco Seifert negli anni '30. Quello che è stato veramente difficile, e che infatti venne provato solo negli anni '70, è che tali varietà di Seifert costituiscono l'unico controesempio.

2.2.1 Superfici incompressibili

D'ora in poi con M si indicherà una 3-varietà compatta, connessa e orientabile e con S una superficie compatta, orientabile, inclusa in M , senza componenti connesse date da sfere e non necessariamente connessa.

Definizione 2.12. Sia $S \subset M$ una superficie connessa. Diciamo che S è 2-sided (rispettivamente, 1-sided) se il fibrato normale su S è banale (rispettivamente, non lo è).

Esempio 2.6. Il fatto che una superficie sia 2-sided non è equivalente al fatto che essa sia orientabile, come ad una lettura superficiale ci si potrebbe aspettare. Se M non è orientabile, ciò non è vero.

Infatti:

- $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \times S^1$ non è orientabile ma è 2-sided,
- $S^1 \times S^1 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \times S^1$ è orientabile ma 1-sided.

Definizione 2.13. Una superficie S senza componenti date da dischi D^2 si dice **incompressibile** se è propriamente inclusa (cioè se è tale che $S \cap \partial M = \partial S$) e se, per ogni disco $D \subset M$ tale che $D \cap S = \partial D$, esiste un altro disco $D' \subset S$ tale che $\partial D' = \partial D$.

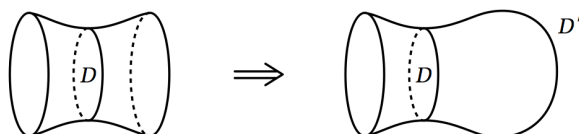


Figura 2.3: Una superficie incompressibile

Come si osserva dalla figura 2.3, tagliare S lungo il disco D e tappare il risultato effettivamente non semplifica la topologia della superficie S , ma taglia via soltanto da essa una sfera.

Proposizione 2.14. *Ecco alcune importanti proprietà delle superfici incompressibili.*

1. Una superficie S è incompressibile se e solo se ogni sua componente connessa lo è.
2. Una superficie 2-sided e connessa S , che non sia una sfera o un disco, è incompressibile se e solo se la mappa $\pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$, indotta dall'inclusione è iniettiva.
3. Non esistono superfici incompressibili in \mathbb{R}^3 o in S^3 diverse da un'unione di sfere.
4. Un toro T 2-sided incluso in una varietà irriducibile M è compressibile se e solo se o T delimita un toro solido $D^2 \times S^1 \subset M$, o T giace in una palla $B \subset M$.
5. Se S è incompressibile, M è irriducibile se e solo se anche $M|S$ lo è.

Dimostrazione. Una prova di tutte le proprietà si trova in [3]. Qui dimostriamo soltanto il punto 2. che è quello più interessante, in quanto dà una traduzione algebrica (di teoria dei gruppi di omotopia) della definizione geometrica data in precedenza.

Sia S una superficie incompressibile e si suppone che $\pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$ non sia iniettiva. Esiste allora un cammino chiuso γ che è omotopo ad un punto in M ma non in S . Sia ora $f: D^2 \rightarrow M$ l'omotopia, in M , di γ ad un punto. Per il Teorema del Loop (si può trovare in [5, capitolo 4]), possiamo scegliere f in modo che sia iniettiva; così, γ borda un disco in M . Poiché per ipotesi S è incompressibile, γ deve bordare un disco anche in S , ma questo è in contraddizione con l'assunzione che γ non sia omotopo ad un punto in S . Perciò $\pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$ deve essere necessariamente iniettiva.

Viceversa, sia $\pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$ iniettiva e sia $D \subset M$ un disco tale che $D \cap S = \partial D$. Si ha che ∂D rappresenta la classe di cammini nulla in $\pi_1(M)$, poiché li borda il disco D . Per l'iniettività dell'applicazione, ∂D è la classe nulla anche in $\pi_1(S)$. Ma un cammino chiuso omotopo ad un punto è sempre il bordo di un disco: ne consegue che S è incompressibile.

Si ha poi che il punto 3. è una diretta conseguenza di quanto appena dimostrato. Sia infatti una superficie S in \mathbb{R}^3 ; perché S sia incompressibile, l'applicazione $\pi_1(S) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^3)$ deve essere iniettiva. Ma $\pi_1(\mathbb{R}^3)$ è il gruppo banale, e così deve essere anche $\pi_1(S)$. L'unica superficie con gruppo fondamentale banale è la sfera, ma dalla definizione di superficie incompressibile, il caso della sfera è stato escluso. \square

Si può ora enunciare la seguente proposizione, che risulta molto importante in quanto ha come caso particolare, come vedremo, proprio la decomposizione JSJ. La dimostrazione non è riportata; basti sapere che è simile alla dimostrazione del Lemma 2.10, utilizzato nella prova dell'esistenza della decomposizione in fattori primi. Come in quest'ultimo, anche qui si fa largo uso di strumenti combinatoriali.

Proposizione 2.15. *Sia M una 3-varietà compatta e irriducibile. Sia $S = S_1 \cup \dots \cup S_n$ un sistema di superfici disgiunte, chiuse, connesse e incompressibili incluse in M . Allora esiste un numero $k(M)$ tale che, se $n \geq k(M)$, allora almeno una componente di $M|S$ risulta essere un prodotto $T \times I$ dove T è una superficie chiusa e I è l'intervallo unitario.*

Per analizzare il caso particolare della decomposizione JSJ, cioè data dal taglio lungo tori incompressibili, occorre dare una definizione ulteriore.

Definizione 2.16. Una superficie S propriamente inclusa in M è detta ∂ -parallela se è isotopa a una sottosuperficie di ∂M . Possiamo dire che una superficie ∂ -parallela S determina in M un prodotto $S \times [0, 1]$ con $S = S \times \{0\}$.

Una 3-varietà M è detta **atoroidale** se ogni toro incompressibile in M è ∂ -parallelo.

Intuitivamente, le varietà atoroidali sono per i tori incompressibili quello che le varietà irriducibili sono per le sfere essenziali. Quello che ci aspettiamo ora (grazie all'analogia con la decomposizione in fattori primi) è di poter tagliare lungo tori finché non abbiamo decomposto la varietà di partenza in pezzi atoroidali. Sottolineiamo il fatto che in questo caso non stiamo tappando il bordo risultante come avevamo fatto per la decomposizione in fattori primi. Questo perché, se si vuoleappare una componente di bordo sferica con una palla, si deve scegliere un automorfismo della sfera in sé e c'è essenzialmente un'unica scelta, a meno di isotopia e di orientazione. Questo perché il gruppo delle classi di automorfismi della sfera è banale. Il gruppo delle classi automorfismi del toro, invece, non lo è: non c'è quindi un modo canonico perappare i bordi.

Ora siamo in grado di dare un primo enunciato dell'esistenza della decomposizione JSJ, sotto forma di corollario della proposizione precedente. Vedremo che, se ci limitassimo a questo enunciato, l'unicità della decomposizione cadrebbe. Infatti, anche nella decomposizione in fattori primi non si tagliava fino ad avere tutti pezzi irriducibili; ci si accontentava di fattori del tipo $S^2 \times S^1$, non irriducibile ma comunque *soddisfacente*. Una volta arrivati a quel fattore, non si proseguiva tagliando lungo una sua sfera essenziale, ma ci si fermava. Nello stesso modo, come vedremo, anche nella decomposizione JSJ ci saranno delle varietà non atoroidali, ma comunque *soddisfacenti*; quando le incontreremo non andremo avanti a tagliare lungo tori incompressibili in esse, ma ci accontenteremo di quelle. Tali varietà non sono altro che le **varietà di Seifert**.

Corollario 2.17. *Sia M una 3-varietà compatta, connessa e irriducibile. Allora esiste una collezione finita T di tori incompressibili disgiunti tale che ogni componente di $M|T$ sia atoroidale.*

Dimostrazione. Si costruisca induttivamente una collezione di tori T_1, T_2, \dots in M , definendo ad ogni passo T_i , toro incompressibile nella varietà $M_i = M|(T_1 \cup \dots \cup T_{i-1})$, tale che non sia ∂ -parallelo in essa, se M_i non è atoroidale. Si deve dimostrare ora che

tale procedimento ha termine in un numero finito di passi.

Siccome M_i è costruita a partire da M_{i-1} tagliando lungo un toro non ∂ -parallelo, allora possiamo dire che ci sono solo due casi in cui qualcuna tra le M_i ha al suo interno una componente $S \times I$, con S superficie chiusa:

1. se $i = 1$ e $M_1 = M = S \times I$;
2. se $i = 2$ e $M_2 = S \times I$, con S un toro.

Nel secondo caso M è un fibrato di tori con T_1 una delle sue fibre.

Quindi, se il procedimento sopra non avrebbe fine in un numero finito di passi, ci sarebbe la possibilità di avere una collezione di tori $T = T_1 \cup \dots \cup T_i$ che soddisfa le condizioni della Proposizione 2.15 ma con i arbitrariamente grande, che è una contraddizione. Necessariamente, allora, il procedimento di taglio lungo tori non ∂ -paralleli si arresta in un numero finito di passi. □

Nella sezione seguente, si partirà da un esempio che mostra come la decomposizione JSJ, enunciata solo nei termini di questo teorema, non dà l'unicità. Poi si introdurranno le varietà di Seifert, grazie alle quali è stato possibile, ma solo nel 1978, enunciare un teorema di esistenza e unicità della decomposizione JSJ. Alla fine della sezione si darà tale enunciato.

L'ultimo capitolo, invece, sarà dedicato alla classificazione delle varietà di Seifert, forse le 3-varietà meglio conosciute ad oggi.

2.2.2 Introduzione alle varietà di Seifert

In questo esempio descriveremo una varietà M irriducibile in cui la decomposizione in pezzi atoroidali non è unica. Le componenti di $M|S$ per i due tagli diversi effettuati non saranno infatti omeomorfe.

Esempio 2.7. Per $i = 1, \dots, 4$, sia M_i un toro solido con il suo bordo dato come l'unione di due anelli A_i e A'_i , ciascuno che ruoti q_i volte attorno al fattore S^1 del toro solido M_i . L'unione di questi quattro tori, con A'_i incollato ad A_{i+1} (mod 4), rappresenta la varietà M . Questa contiene due tori: $T_1 = A_1 \cup A_3$ e $T_2 = A_2 \cup A_4$. Le componenti di $M|T_1$ sono $M_1 \cup M_2$ e $M_3 \cup M_4$; le componenti di $M|T_2$, invece, sono $M_2 \cup M_3$ e $M_4 \cup M_1$. Il gruppo fondamentale di $M_i \cup M_{i+1}$ ha una presentazione del tipo $\langle x_i, x_{i+1} \mid x_i^{q_i} = x_{i+1}^{q_{i+1}} \rangle$. Il centro di questo prodotto amalgamato è ciclico, generato dall'elemento $x_i^{q_i} = x_{i+1}^{q_{i+1}}$. Quozientando sul centro, si ottiene il gruppo dato da $\mathbb{Z}_{q_i} * \mathbb{Z}_{q_{i+1}}$, che ha come abelianizzato $\mathbb{Z}_{q_i} \oplus \mathbb{Z}_{q_{i+1}}$. Prendendo, per esempio, i q_i in modo che siano primi tra loro, si ha che tutte le $M_i \cup M_{i+1}$ risultano non essere omeomorfe.

Si può dimostrare che M è una varietà irriducibile, che i due tori T_1 e T_2 sono incompressibili e che le quattro varietà date da $M_i \cup M_{i+1}$ sono atoroidali. Quindi le due decomposizioni $M|T_1$ e $M|T_2$, nonostante siano differenti, soddisfano entrambe le condizioni del corollario 2.17.

Varietà come questa M , che si ottengono incollando tra loro tori solidi lungo anelli non contraibili ad un punto nel loro bordo, appartengono alla classe speciale delle varietà di Seifert, che ora definiamo.

Definizione 2.18. Siano $p, q \in \mathbb{N}$ due interi primi tra loro. Chiamiamo **toro (p, q) -fibrato** la varietà che si ottiene a partire da $D^2 \times [0, 1]$ incollando tra loro i due dischi di bordo $D^2 \times \{0\}$ e $D^2 \times \{1\}$ dopo una rotazione di angolo $2\pi \frac{p}{q}$. Questa varietà è un toro solido $D^2 \times S^1$ con una foliazione in cerchi disgiunti, che viene dalla foliazione del cilindro di partenza in segmenti.

Tali cerchi sono detti **fibre**. Il segmento $\{0\} \times [0, 1]$ del cilindro di partenza diventa una fibra $\{0\} \times S^1$, mentre ogni altra fibra del toro solido è data da esattamente q segmenti $\{x\} \times [0, 1]$.

Definizione 2.19. Si definisce **fibrato di Seifert** di una 3-varietà M una decomposizione di M in cerchi disgiunti, le fibre, tale che ciascuna fibra ha un intorno diffeomorfo ad un intorno di una fibra in un toro fibrato.

Definizione 2.20. Si definisce **varietà di Seifert** una varietà che ammette un fibrato di Seifert.

Definizione 2.21. Sia C una fibra in una varietà di Seifert. Diciamo che C ha molteplicità q se, preso un disco arbitrariamente piccolo D trasversale rispetto a C , ogni fibra vicina a C , che interseca il disco D , lo interseca in esattamente q punti distinti. Dunque diciamo che la fibra C è semplice (o regolare) se ha molteplicità 1, diciamo che è multipla (o singolare) altrimenti.

Esempio 2.8. In un toro (p, q) -fibrato, la fibra centrale $\{0\} \times S^1$ ha molteplicità q , mentre tutte le altre fibre sono semplici.

Siccome il toro fibrato è il modello locale per ogni varietà di Seifert, da questo esempio si conclude che in ogni varietà di Seifert M le fibre singolari sono isolate e giacciono nell'interno di M .

A questo punto possiamo enunciare finalmente il teorema di esistenza e unicità della decomposizione JSJ.

Teorema 2.22 (Decomposizione JSJ, 1978). *Sia M una 3-varietà compatta, orientabile e irriducibile. Allora esiste una collezione finita $T = T_1, \dots, T_n \subset M$ di tori incompressibili disgiunti tale che ogni componente connessa di $M|T$ è atoroidale o una varietà di Seifert. Una collezione minima di questo tipo è unica a meno di isotopia.*

Osservazione 2.23. Seguono alcune importanti note riguardanti questo fondamentale teorema.

1. Con 'collezione minima' si intende rispetto all'inclusione.

2. Si noti la forza dell'unicità: è a meno di isotopia. Non, ad esempio, soltanto a meno di omeomorfismo di M .
3. Si può eliminare l'ipotesi che la varietà M sia orientabile, permettendo il taglio lungo bottiglie di Klein incluse in M . Si noti che in tal caso la definizione di varietà atoroidale va opportunamente modificata.
4. La varietà $S^2 \times S^1$, che abbiamo visto essere l'unica varietà prima non irriducibile, non contiene tori incompressibili. Poiché un toro contenuto in $S^2 \times S^1$ è sempre 2-sided, questo fatto segue dal punto 2. della proposizione 2.14, dato che $\pi_1(S^2 \times S^1) = \mathbb{Z}$ non può contenere il gruppo fondamentale del toro. Come conseguenza, si può generalizzare il teorema per ogni varietà prima, poiché $S^2 \times S^1$ è essa stessa atoroidale.

Capitolo 3

Classificazione delle varietà di Seifert

Le varietà di Seifert sono alcune tra le 3-varietà meglio conosciute. Nella storia della topologia delle varietà esse compaiono abbastanza presto, agli inizi degli anni '30, quando vennero studiate dal matematico tedesco Herbert Seifert, da cui presero il nome. Già in quegli anni, compare una prima classificazione di queste 3-varietà. Lo scopo di questo capitolo è quello di dare una classificazione delle varietà di Seifert a meno di diffeomorfismi. Non verranno riportate tutte le dimostrazioni, e di alcune ne sarà data solo un'idea; si è seguito, per questo capitolo, molto da vicino il percorso proposto in [3], dove possono essere trovate le dimostrazioni non riportate in questa tesi o non complete. Si è preferito lasciare più spazio agli esempi pratici, che riteniamo siano più utili per chi incontra questi oggetti per la prima volta.

3.1 Classificazione dei fibrati di Seifert

Cominciamo la sezione mostrando una costruzione esplicita di un fibrato di Seifert. Sia B una superficie compatta e connessa (non necessariamente orientabile), e siano D_1, \dots, D_k dischi disgiunti in B . Sia B' la superficie che si ottiene rimuovendo da B gli interni di tali dischi. Sia ora $M' \rightarrow B'$ il fibrato circolare orientabile; cioè, se B' è orientabile, M' risulta uguale al prodotto $B' \times S^1$, mentre se B' non è orientabile M' è il prodotto 'twistato' in cui i cerchi di B' sono coperti da tori o da bottiglie di Klein in M' , a seconda che preservino o invertano l'orientazione.

Sia $s : B' \rightarrow M'$ una sezione, cioè un'inversa destra continua di $M' \rightarrow B'$. La definizione della sezione s , insieme alla scelta di un'orientazione per M' , dà la possibilità di parlare senza ambiguità di *pendenza* di cerchi non banali nei tori presenti in $\partial M'$. In particolare, possiamo definire un diffeomorfismo ϕ che va da ogni componente di $\partial M'$ a $S^1 \times S^1$ in modo che una sezione sia $S^1 \times \{x\}$, di pendenza 0, e invece una fibra sia rappresentata da $\{y\} \times S^1$, di pendenza ∞ . L'orientazione di M' induce un'orientazione su $\partial M'$, e ciò determina completamente ϕ , a meno di una simultanea riflessione dei due fattori S^1 . Osserviamo che vale il fatto che in $S^1 \times S^1$

ogni cerchio non banale è isotopo ad un cerchio ‘lineare’ $y = (p/q)x$ di pendenza p/q nel ricoprimento universale \mathbb{R}^2 .

Da M' costruiamo ora una varietà M attaccando k tori solidi $D^2 \times S^1$ ai tori T_i , componenti di $\partial M'$, che giacciono sopra i cerchi $\partial D_i \subset \partial B'$, attaccando un meridiano $\partial D^2 \times \{y\}$ di $D^2 \times S^1$ ad un cerchio di pendenza finita α_i/β_i dei T_i . Una volta fissato un incollamento per il meridiano $D^2 \times \{y\}$, c'è solo un modo per includere una palla, in modo da completare l'incollamento di $D^2 \times S^1$; ne consegue che possiamo affermare che la varietà M è univocamente determinata dalle k pendenze α_i/β_i . Il fibrato circolare di M' si estende naturalmente ad un fibrato di Seifert di M tramite una fibrazione su ogni toro $D^2 \times S^1$ attaccato al bordo di M' . Si noti che la fibra singolare dell' i -esimo toro $D^2 \times S^1$ ha molteplicità β_i , poiché il meridiano di $D^2 \times S^1$ è attaccato ad un cerchio di pendenza α_i/β_i e perciò incontra ogni fibra di M' β_i volte. Ricordiamo che la molteplicità di una fibra singolare è il numero di volte che un disco trasversale ad essa incontra ogni fibra regolare vicina.

Per questo fibrato di Seifert sulla varietà M usiamo la seguente notazione:

$$M(\pm g, b, \alpha_1/\beta_1, \dots, \alpha_k/\beta_k)$$

In tale notazione si ha che:

- g è il *genere* della superficie B , dove con *genere* si intende, molto intuitivamente, il ‘numero di buchi’ che tale superficie ha. Un altro modo per definire il genere di una superficie S è il numero massimo di curve chiuse semplici che si possono tracciare su S senza disconnetterla. Per le superfici non orientabili, il genere indica anche il numero di piani proiettivi presenti come addendi nella somma connessa. Il segno che precede la g è positivo se B è orientabile, negativo se non lo è.
- b indica il numero delle componenti di ∂B .
- invertendo l'orientazione di $(\pm g, b, \alpha_1/\beta_1, \dots, \alpha_k/\beta_k)$ si ottiene

$$M(\pm g, b, -\alpha_1/\beta_1, \dots, -\alpha_k/\beta_k)$$

Si ha che due fibrati di Seifert sono isomorfi se esiste un diffeomorfismo che porta le fibre del primo fibrato nelle fibre del secondo.

Possiamo a questo punto enunciare un primo importante risultato:

Proposizione 3.1. *Ogni fibrato di Seifert è isomorfo a uno dei modelli*

$$M(\pm g, b, \alpha_1/\beta_1, \dots, \alpha_k/\beta_k)$$

. I fibrati $M(\pm g, b, \alpha_1/\beta_1, \dots, \alpha_k/\beta_k)$ e $M'(\pm g, b, \alpha'_1/\beta'_1, \dots, \alpha'_k/\beta'_k)$ sono isomorfi tramite un diffeomorfismo che preserva le orientazioni se e solo se, dopo un eventuale riordinamento degli indici, vale $\alpha_i/\beta_i \equiv \alpha'_i/\beta'_i \pmod{1}$ per ogni $i = 1, \dots, k$ e, se $b = 0$, $\sum_i \alpha_i/\beta_i = \sum_i \alpha'_i/\beta'_i$.

Dimostrazione. Sia M una varietà di Seifert orientata e siano C_1, \dots, C_k le fibre singolari presenti in M . Sia M' la varietà ottenuta da M rimuovendo i tori solidi fibrati intorno delle fibre C_1, \dots, C_k . Definiamo la relazione di equivalenza tra i punti di M' come segue: $x \sim y \Leftrightarrow x$ e y sono nella stessa fibra. Sia B' il quoziente M'/\sim . Si scelga una sezione s del fibrato circolare $M' \rightarrow B'$. Come descritto in precedenza, la sezione s determina le pendenze delle fibre in $\partial M'$ e abbiamo visto che M ha la forma $M(\pm g, b, \alpha_1/\beta_1, \dots, \alpha_k/\beta_k)$.

Rimane da vedere cosa succede agli α_i/β_i scegliendo una diversa sezione s . Sia a un arco in B' con gli estremi su $\partial B'$. In M' sopra di esso giace un anello A . Guardando nella figura 3.1, si osserva una modifica della sezione s vicino ad A : supponiamo che s attraversi trasversalmente A , noi la modifichiamo facendola ruotare m volte intorno all'anello prima di farla passare oltre.

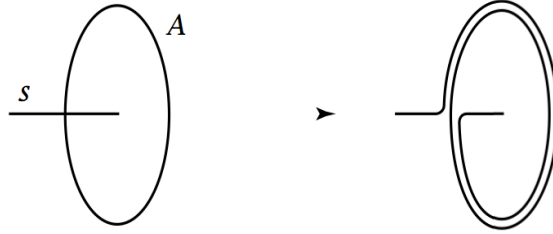


Figura 3.1: Modifica della sezione s

L'effetto di questo cambio della sezione è quello di aggiungere m a tutte le pendenze nel toro di bordo di M' che si trova da un lato di A , mentre di sottrarre m a tutte le pendenze nel toro di bordo dall'altro lato di A . In particolare, se entrambi gli estremi di A giacciono sullo stesso toro di bordo, non ci sono cambi nelle pendenze. Così, se $b \neq 0$, possiamo prendere A che colleghi il toro vicino alla fibra C_i con un toro di ∂M . In questo modo, α_i/β_i cambierà di un intero, mentre tutti gli altri α_j/β_j rimarranno invariati. In modo analogo, se $b = 0$, possiamo aggiungere e sottrarre m da due qualunque α_i/β_i , lasciando invariati gli altri. In tal modo tutti i rapporti α_i/β_i rimangono congrui modulo 1; si aggiunge in questo caso anche la condizione che $\sum_i \alpha_i/\beta_i$ rimanga costante.

Si può dimostrare senza particolari difficoltà (vedi eventualmente [3]) che una qualunque scelta diversa fatta per s subisce sempre una modifica come quella illustrata sopra. □

Osserviamo che questo risultato dà una completa classificazione di tutti i fibrati di Seifert, poiché i valori $\pm g$ e b determinano univocamente la superficie base B e poiché le varietà $M(\pm g, b, \alpha_1/\beta_1, \dots, \alpha_k/\beta_k)$ e $M'(\pm g, b, \alpha_1/\beta_1, \dots, \alpha_k/\beta_k, 0)$ sono isomorfe.

Adesso diamo la seguente definizione.

Definizione 3.2. Sia $M(\pm g, 0, \alpha_1/\beta_1, \dots, \alpha_k/\beta_k)$ un fibrato di Seifert su una varietà chiusa. L'invariante $\sum_i \alpha_i/\beta_i$ viene detto **numero di Eulero** del fibrato.

Questa quantità risulta molto importante per alcuni risultati che vedremo in seguito. Prima però di arrivare alla classificazione delle varietà di Seifert, all'inizio della prossima sezione vedremo alcune definizioni preliminari e alcuni risultati sulle superfici incluse nelle varietà di Seifert, che ci serviranno per arrivare al teorema finale di classificazione.

3.2 Superfici nelle varietà di Seifert e Classificazione

Definizione 3.3. Sia $S \subset M$ una superficie. Si dice che S è ∂ -**incompressibile** se, per ogni disco $D \subset M$ il cui bordo si decompone in due archi a e b , che si incontrano solo nei loro estremi, con $D \cap S = a$ e $D \cap \partial M = b$, esiste un disco $D' \subset S$ tale che $a \subset \partial D'$ e $\partial D' - a \subset \partial S$.

Una superficie incompressibile e ∂ -incompressibile è detta **essenziale**.

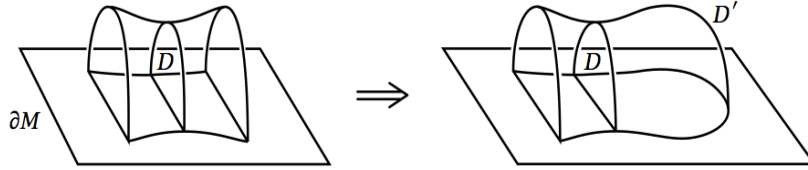


Figura 3.2: Una superficie ∂ -incompressibile

Definizione 3.4. Una superficie S in una varietà di Seifert compatta e connessa M è detta **verticale** se è l'unione di fibre regolari. È detta **orizzontale** se interseca trasversalmente tutte le fibre di M .

Si può provare il seguente risultato:

Proposizione 3.5. Sia M una varietà di Seifert connessa, compatta e irriducibile. Allora ogni superficie essenziale $S \subset M$ è isotopa ad una superficie orizzontale o verticale.

Dimostrazione. Vedi su [3, Proposition 1.11].

□

Esempio 3.1. Le superfici verticali sono facili da capire: per definizione, esse sono disgiunte dalle fibre singolari, dunque sono fibrati di base una circonferenza: anelli, tori o bottiglie di Klein inclusi in M .

Osservazione 3.6. Sia S una superficie orizzontale in una varietà di Seifert. Allora la proiezione $\pi : S \rightarrow B$ sulla superficie base è un rivestimento ramificato con un punto di molteplicità q per ogni intersezione di S con una fibra di molteplicità q . Esiste una formula molto utile che ha a che fare con la caratteristica di Eulero di S e di B :

$$\chi(B) - \chi(S)/n = \sum_i (1 - 1/q_i)$$

Dove n è il numero di fogli del rivestimento e le q_i sono le molteplicità delle fibre singolari di M .

Dimostrazione. Per mostrare tale formula, si dia una triangolazione di B in modo che le immagini delle fibre singolari siano tra i vertici della triangolazione. Poi si estenda questa ad una triangolazione di S . Contando i semplici, la formula valida per ogni rivestimento (non ramificato) è $\chi(S) = n \chi(B)$. In questo caso, però, un vertice in B che è immagine di una fibra singolare di molteplicità q_i ha n/q_i retroimmagini in S , anziché n . Questo porta ad un formula modificata: $\chi(S) = n \chi(B) + \sum_i (-n + n/q_i)$, che è equivalente a quella scritta sopra. □

Possiamo ora dare il seguente risultato, che ci dice quali varietà di Seifert sono irriducibili.

Proposizione 3.7. *Una varietà di Seifert compatta e connessa M è irriducibile se non è $S^2 \times S^1$, $S^2 \tilde{\times} S^1$ o $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione. La dimostrazione si trova su [3] e qui non verrà riportata. Si dimostra che, se M è una varietà di Seifert riducibile, allora in essa c'è una sfera orizzontale che non delimita una palla.

Dunque, M è un fibrato sulla sfera o un semi-fibrato. Questo darà come risultato le tre varietà citate nell'asserto. □

Osservazione 3.8. Si noti che ciascuna delle 3-varietà della proposizione precedente ammette un fibrato di Seifert. In particolare, osserviamo che $S^2 \tilde{\times} S^1$ è $S^2 \times I$ con le sfere di bordo incollate tramite un omeomorfismo che inverte le orientazioni, dunque riceve una struttura di un fibrato a fibre circolari.

3.2.1 Classificazione delle varietà di Seifert

Cominciamo enunciando subito il risultato più importante.

Teorema 3.9. *I fibrati di Seifert sulle varietà di Seifert orientabili sono unici a meno di isomorfismi, con l'eccezione dei seguenti:*

- (a) $M(0, 1, \alpha/\beta)$, il fibrato variabile sul toro $S^1 \times D^2$.
- (b) $M(0, 1, 1/2, 1/2) = M(-1, 1;)$, due fibrati di $S^1 \tilde{\times} S^1 \tilde{\times} I$.
- (c) $M(0, 0, \alpha_1/\beta_1, \alpha_2/\beta_2)$, fibrati variabili di S^3 , $S^1 \times S^2$ e degli spazi lenticolari.
- (d) $M(0, 0, 1/2, -1/2, \alpha/\beta) = M(-1, 0, \beta/\alpha)$, per $\alpha, \beta \neq 0$.
- (e) $M(0, 0, 1/2, 1/2, -1/2, -1/2) = M(-2, 0;)$, due fibrati di $S^1 \tilde{\times} S^1 \tilde{\times} S^1$.

Osservazione 3.10. I due fibrati di $S^1 \tilde{\times} S^1 \tilde{\times} I$ in (b) sono facili da vedere se consideriamo $S^1 \tilde{\times} S^1 \tilde{\times} I$ ottenuta a partire da $S^1 \times I \times I$ identificando $S^1 \times I \times \{0\}$ con $S^1 \times I \times \{1\}$ tramite il diffeomorfismo ϕ che inverte entrambe le orientazioni, in S^1 e in I . Dunque un fibrato di $S^1 \tilde{\times} S^1 \tilde{\times} I$ viene dalle fibre $S^1 \times \{y\} \times \{z\}$ di $S^1 \times I \times I$ e l'altro viene dalle fibre $\{x\} \times \{y\} \times I$ (osservare la figura 3.3).

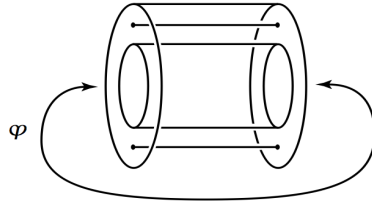


Figura 3.3: Costruzione di $S^1 \times S^1 \times I$

Osservazione 3.11. Gli esempi presentati in **(a)** e in **(b)** generano tutti gli altri esempi. I fibrati in **(c)** sono ottenuti incollando insieme due fibrati in **(a)**; **(d)** è ottenuto incollando un modello di **(a)** ad ognuno dei due fibrati in **(b)** e infine **(e)** è semplicemente due volte **(b)**.

La seguente proposizione è un risultato molto vicino al Teorema di classificazione delle varietà di Seifert. Enunceremo e dimostreremo questa, poi concluderemo la tesi mostrando come la Proposizione e il Teorema siano strettamente collegati, grazie anche a qualche esempio.

Proposizione 3.12. *Siano M_1 e M_2 varietà di Seifert orientabili e irriducibili tali che siano diffeomorfe. Supponiamo che in M_1 siano presenti anelli o tori verticali incompressibili e che in M_2 non siano presenti anelli o tori orizzontali incompressibili. Allora esiste un diffeomorfismo che preserva le fibre.*

Dimostrazione. Supponiamo che M_1 e M_2 siano varietà chiuse. Sia B_1 la superficie base di M_1 . Si possono scegliere due sistemi di cerchi 2-sided e disgiunti C e C' in B_1 , che non passino per punti singolari (proiezioni di fibre singolari) e che si intersechino trasversalmente. Siano T e T' i sistemi di tori incompressibili verticali che giacciono rispettivamente su C e C' . Si scelgano C e C' in modo che rispettino le seguenti tre condizioni:

- (1) Nessun cerchio di C o di C' delimita un disco che punti singolari.
- (2) Le componenti di $B_1|C \cup C'$ sono dischi che contengono al massimo un punto singolare.
- (3) Nessuna componente di $B_1|C \cup C'$ è un disco delimitato da un singolo arco di C e da un singolo arco di C' e non contenente nessun punto singolare.

Sia $f : M_1 \rightarrow M_2$ un diffeomorfismo. Poichè in M_2 non ci sono tori incompressibili orizzontali, tramite un'isotopia possiamo fare in modo che $f(T)$ sia una superficie verticale in M_2 (Proposizione 3.5). Dalla condizione (3) si arriva a dimostrare che f è isotopa ad un diffeomorfismo che preserva le fibre in M' , intorno di $T \cup T'$.

Consideriamo poi le componenti di $M_1 - M'_1$, che da (2) sappiamo essere tori solidi: se definiamo $M'_2 = f(M'_1)$, allora anche le componenti di $M_2 - M'_2$ sono tori solidi. Si scelga un'orientazione su M_1 e una sezione $M'_1 \rightarrow B'_1$; tramite f , tali scelte determinano un'orientazione su M_2 e una sezione $M'_2 \rightarrow B'_2$. Dunque B'_1 e B'_2 sono le superfici base di M'_1 e M'_2 ; f induce quindi un diffeomorfismo da B'_1 a B'_2 . Le due

superfici chiuse B_1 e B_2 sono perciò diffeomorfe. Le frazioni α_i/β_i corrispondenti ai tori solidi di $M_1 - M'_1$ e di $M_2 - M'_2$ devono essere uguali, poiché sono le pendenze dei cerchi che bordano i meridiani e la f (a meno di isotopie) manda meridiani in meridiani.

In questo modo abbiamo mostrato che M_1 e M_2 hanno la stessa forma

$$M(\pm g, 0, \alpha_1/\beta_1, \dots, \alpha_k/\beta_k)$$

e dunque abbiamo provato la proposizione per superfici chiuse.

Il caso delle superfici con bordo è molto simile. Cambia solo la scelta iniziale: in questo caso si parte da una collezione T di anelli incompressibili che spezzano M_1 in un'unione di tori solidi; poi si dimostra che f è un diffeomorfismo che preserva le fibre in un intorno di $T \cup \partial M$; infine si conclude come nel caso di varietà chiuse.

□

Osservazione 3.13. Mostriamo come la proposizione 3.12 conduca alla prova del teorema 3.9.

Consideriamo il caso delle varietà irriducibili con bordo. Anelli verticali incompressibili esistono sempre, eccetto nel caso di $M(0, 1, \alpha/\beta)$. Dunque per la proposizione 3.12 non esistono diffeomorfismi che preservano le fibre tra fibrati di quel tipo (indicati nell'enunciato del Teorema con **(a)**) e altri.

Per vedere quando esistono anelli orizzontali incompressibili applichiamo la formula vista nell'osservazione 3.6:

$$\chi(B) - \chi(S)/n = \sum_i (1 - 1/q_i)$$

In questo caso, S è un anello, quindi ha caratteristica di Eulero uguale a 0. La formula sopra diventa: $\chi(B) = \sum_i (1 - 1/q_i) \geq 0$; dunque la superficie base B è un disco, un anello o un nastro di Moebius (superfici con bordo e caratteristica di Eulero ≥ 0).

- Se $B = D^2$, si ottiene: $1 = \sum (1 - 1/q_i)$, quindi abbiamo una somma di termini del tipo $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$. Perciò l'unica possibilità è $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, che dà il fibrato $M(0, 1, 1/2, 1/2)$.
- Se $B = S^1 \times I$, si ha: $0 = \sum (1 - 1/q_i)$, quindi non ci sono fibre singolari e si ottiene il fibrato $M(0, 2;)$ di $S^1 \times S^1 \times I$.
- Se $B = S^1 \tilde{\times} I$, ragionando nello stesso modo del punto precedente, si ottiene il fibrato $M(-1, 1;)$ di $S^1 \tilde{\times} S^1 \tilde{\times} I$.

Ma le varietà $S^1 \times S^1 \times I$ e $S^1 \tilde{\times} S^1 \tilde{\times} I$ non sono diffeomorfe, poiché hanno come retratto per deformazione rispettivamente il toro e la bottiglia di Klein. In conclusione, possiamo dire che tutti i fibrati di varietà di Seifert con bordo sono unici a meno di isomorfismo, con l'eccezione dei due fibrati $M(-1, 1;)$ e $M(0, 1, 1/2, 1/2)$ su $S^1 \tilde{\times} S^1 \tilde{\times} I$. Abbiamo dimostrato che il Teorema 3.9 segue dalla proposizione 3.12 per le varietà con bordo.

Nel caso delle varietà irriducibili chiuse, si ragiona in modo analogo (leggermente più complicato). Si trovano varietà che hanno come superficie base la sfera S^2 , il piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, oppure il toro $S^1 \times S^1$ o la bottiglia di Klein $S^1 \tilde{\times} S^1$. Per arrivare ad una completa classificazione si usano strumenti che vanno al di fuori degli scopi di questa tesi. Per approfondire, soprattutto per quanto riguarda la classificazione degli spazi lenticolari, che riteniamo molto interessante, si consiglia di guardare tutto il capitolo 2 di [3].

Bibliografia

- [1] Maunder, C.R.F. - Algebraic Topology - Cambridge University Press - 1980
- [2] Spanier, Edwin - Algebraic Topology - McGraw Hill - 1966
- [3] Hatcher, Allen - Notes on Basic 3-Manifold Topology
- [4] Hatcher, Allen - Algebraic Topology - Cambridge University Press - 2002
- [5] Hempel, John - 3-Manifold - Princeton University Press - 1976
- [6] Kosniowski, Csez - Introduzione alla Topologia Agebrica - Zanichelli - 2004
- [7] Scott, Peter - The geometries of 3-manifolds - Bull. London Math. Soc - 1983
- [8] Kinsey, Christine - Topology of surfaces - Springer - 1993
- [9] O'Shea, Donal - La congettura di Poincaré - RCS Libri - 2007

Ringraziamenti

Grazie innanzi tutto al professor Stefano Francaviglia, al gran tempo che mi ha dedicato e alla pazienza che ha avuto con me. Purtroppo io ‘non sono un Milnor’, dunque ho avuto assoluto bisogno dei suoi preziosi consigli per scrivere una tesi che fosse quanto meno comprensibile. Grazie anche per l’interesse che ha saputo suscitare in me verso la sua materia, seppure in poco tempo.

Grazie alla mia famiglia, ai miei genitori e a mia sorella Federica, per il continuo sostegno che mi hanno sempre dato e per la libertà che mi hanno lasciato nelle scelte della mia vita.

Grazie a Linda, per la sua pazienza e perché riesce sempre a risollevarmi il mio morale quando sono giù. Il fatto che io sia riuscito a scrivere questa tesi in così poco tempo è anche merito suo.

Grazie ad Alberto per i tanti consigli che ci siamo scambiati in questi tre anni di università insieme, e che spero continueremo a scambiarci.

Grazie ad Andrea e alla sua grandissima disponibilità; se in questa tesi sono presenti ben 19 figure è anche grazie a lui.

Grazie infine a tutti i miei amici e parenti, perché mi sopportano quando inizio a parlare di topologia, di tori, di nastri e di ‘formiche che camminano su palloni da calcio’ (e non smetto più)!