Alma Mater Studiorum
Università di Bologna

SCUOLA di SCIENZE
Corso di Laurea Triennale in Matematica

FUNZIONI A VARIAZIONE LIMITATA E FUNZIONI ASSOLUTAMENTE CONTINUE

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
ERMANNO LANCONELLI

Co-relatore:
Prof. Andrea Bonfiglioli

Presentata da:
ALBERTO RIGHINI

Sessione II
Anno Accademico 2013-2014

Alla mia famiglia

Indice

Introduzione

In questa Tesi ci occuperemo dello studio delle funzioni a variazione limitata e delle funzioni assolutamente continue.

Quando si studia la teoria di integrazione di Lebesgue, è naturale chiedersi quali risultati già visti nella teoria di Riemann valgano ancora e sotto quali ipotesi. Più nello specifico esamineremo il primo Teorema fondamentale del calcolo integrale: nella teoria di integrazione di Riemann vi è l'ipotesi cruciale della continuità della derivata della funzione alla quale si applica il teorema, cioè in pratica si richiede di lavorare con funzioni di classe $\mathcal{C}^1$. La domanda quindi è: 'si può indebolire l'ipotesi? (o addirittura si può richiedere semplicemente che la derivata della funzione sia Lebesgue-integrabile?)'. Come è noto dal celebre esempio della funzione di Vitali, la semplice integrabilità della derivata non è sufficiente, ma effettivamente, con la teoria di Lebesgue, il teorema è valido per una classe di funzioni più grande di quelle $\mathcal{C}^1$, cioè le funzioni *assolutamente continue*. Di più, la validità del Teorema fondamentale del calcolo integrale la vedremo come una caratterizzazione per l'insieme $\mathcal{AC}$ di tali funzioni.

Volendo studiare le funzioni $\mathcal{AC}$ conviene soffermarsi, dapprima, a parlare delle funzioni a variazione limitata ($\mathcal{BV}$), in quanto, come vedremo, vi sono vari risultati che legano queste due classi di funzioni tra loro (primo tra tutti, il fatto che una funzione a variazione limitata può essere scritta come somma della sua funzione dei salti, di una funzione assolutamente continua e di una funzione singolare).

Questa Tesi si aprirà con lo studio di alcune proprietà delle funzioni monotone, che sfrutteremo per dimostrare i risultati sulle funzioni $\mathcal{BV}$ e $\mathcal{AC}$. Ogni capitolo sarà suddiviso in una prima sezione nella quale verranno fatti dei richiami su risultati in parte già noti e in parte che dimostreremo, e in una seconda sezione nella quale sfrutteremo i risutati acquisiti precedentemente per dimostrare teoremi riguardanti più direttamente l'oggetto di studio.

Nell'ultimo capitolo vedremo ulteriori risultati sulle funzioni monotone e sulle funzioni assolutamente continue utilizzando, per la dimostrazione, a differenza di quanto fatto nei capitoli precedenti, nozioni di Teoria della misura.

Capitolo 1

Funzioni a Variazione Limitata

In questo capitolo analizzeremo nel dettaglio le funzioni a variazione limitata. Come vedremo in seguito, il Teorema di Jordan costituirà un legame fondamentale tra le funzioni $\mathcal{BV}$ e le funzioni monotone, per questo nella prima metà del capitolo richiameremo importanti risultati e proprietà di tali funzioni. Avranno un ruolo importante, anche nei capitoli seguenti, i risultati sulla derivabilità di una funzione monotona e il Teorema sulla sommabilità di tale derivata. Questa parte del capitolo si concluderà con l'esempio della ben nota funzione di Vitali, che è continua, monotona e a variazione limitata, ma, come scopriremo nel capitolo successivo, risulterà non essere assolutamente continua.

Nella seconda parte del capitolo riporteremo, insieme ad un utile risultato sulla continuità della variazione di una funzione $\mathcal{BV}$, il sopracitato Teorema di Jordan. Infine dimostreremo un notevole teorema che ci fornirà un legame tra la derivata di una funzione a variazione limitata e la derivata della sua variazione.

1.1 Richiami sulle funzioni monotone

Richiamiamo, senza dimostrazioni, alcuni fondamentali risultati di Analisi Reale sulle funzioni monotone.

Notazione. Data una funzione f, nel seguito poniamo

$$f(x_0+) := \lim_{x \to x_0^+} f(x) \qquad e \qquad f(x_0-) := \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

È noto il seguente risultato (si veda [4, Cap. III, Teorema 3.3]) sui salti di una funzione monotona.

Teorema 1.1.1 (Salti di una funzione monotona). *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è non decrescente, essa ha al più un'infinità numerabile di punti di discontinuità (di prima specie). Se inoltre $x_1, x_2, \ldots$ sono tutti i punti di discontinuità in $]a,b[$ allora*

$$\{f(a+) - f(a)\} + \sum_{n=1}^{\infty} \{f(x_n+) - f(x_n-)\} + \{f(b) - f(b-)\} \leqslant f(b) - f(a). \tag{1.1}$$

*Definita la **funzione dei salti** s, ponendo $s(a) = 0$ e*

$$s(x) = \{f(a+) - f(a)\} + \sum_{x_k < x} \{f(x_k+) - f(x_k-)\} + \{f(x) - f(x-)\}, \quad x \in \,]a,b]$$

allora la funzione $\phi = f - s$ è non decrescente e continua su $[a,b]$.

Ne segue la rappresentazione

$$f = s + \phi.$$

Traccia della dimostrazione. La dimostrazione non è difficile. Inizialmente si dimostra la disuguaglianza (1.1) per un numero finito n di punti di discontinuità: detti $x_1, \dots, x_n$ tali punti e $x_0 = a, x_{n+1} = b$ si fissano altri punti $y_0, \dots, y_n$ tali che $x_k < y_k < x_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots, n$. Così si maggiora, sfruttando la monotonia della f, il membro di destra della disuguaglianza con una somma telescopica

$$f(y_0) - f(a) + \sum_k (f(y_k) - f(y_{k-1})) + f(b) - f(y_n),$$

e si ottiene quanto voluto.

Si dimostra in seguito che i punti di discontinuità sono un'infinità al più numerabile: si pone B_m l'insieme dei punti di discontinuità della f in cui il salto è maggiore di $1/m$, così, detto B l'insieme di tutti i punti di discontinuità di f, risulta $B = \bigcup B_m$. A questo punto si prendono n punti (siano essi $z_1, \dots, z_n$) appartenenti a B_m; allora per quanto dimostrato nella prima parte $n/m \leqslant f(b) - f(a)$ e quindi n non può essere arbitrariamente grande, perciò B_m è finito per ogni m e quindi B è al più numerabile.

La disuguaglianza (1.1) nella forma non finita si ottiene, a questo punto, come conseguenza di quella finita, che vale per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Manca da dimostrare che $\phi = f - s$ è non decrescente e continua. La monotonia si dimostra considerando la disuguaglianza (1.1) dimostrata relativamente ad $[x, y] \subseteq [a, b]$, così si ottiene che $s(y) - s(x) \leqslant f(y) - f(x)$ e quindi $\phi(x) \leqslant \phi(y)$. Per la continuità, infine, si mostra che $\phi(x-) = \phi(x) = \phi(x+)$. □

Ricordiamo anche il risultato di derivabilità quasi dappertutto di una funzione monotona (si veda [4, Cap. III, Teorema 6.22]):

Teorema 1.1.2 (Lebesgue). *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è monotona, allora quasi-dappertutto su $[a, b]$ la derivata di f esiste ed è finita.*

> Per la dimostrazione, che non è banale, si veda [4, Cap. III, Teorema 6.22]: questa dimostrazione, laboriosa, si basa su una accorta analisi dei cosiddetti quattro numeri derivati
>
> $$\limsup_{x \to x_0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad \liminf_{x \to x_0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
>
> nel caso particolare di una funzione monotona f.

Nel seguito, la notazione '$\mathcal{L}$-misurabile' si riferisce alla misurabilità di insiemi/funzioni rispetto alla misura di Lebesgue. Inoltre, $\overline{\mathbb{R}}$ indica la retta reale estesa $[-\infty, +\infty]$.

Osservazione 1.1.3. Sia $A \subset \mathbb{R}^N$, A $\mathcal{L}$-misurabile. Sia $f_k : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{L}$-misurabile per ogni $k \in \mathbb{N}$. Allora sono $\mathcal{L}$-misurabili le funzioni:

$$\sup_k f_k, \quad \inf_k f_k, \quad \limsup_{k \to +\infty} f_k, \quad \liminf_{k \to +\infty} f_k.$$

Sono ben noti, inoltre, i seguenti risultati:

Lemma 1.1.4 (Fatou). *Siano $A \subset \mathbb{R}^N$ $\mathcal{L}$-misurabile, $f_k \in \mathcal{L}(A)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $g \in \mathcal{L}(A)$. Sia $g(x) \leqslant f_k(x)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in A$. Allora*

$$\int_A \liminf_{k\to+\infty} f_k(x)\,dx \leqslant \liminf_{k\to+\infty} \int_A f_k(x)\,dx.$$

Teorema 1.1.5 (Convergenza Dominata di Lebesgue). *Siano $A \subset \mathbb{R}^N$ un insieme $\mathcal{L}$-misurabile e $f_k \in \mathcal{L}(A)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Esistano inoltre una funzione $g \in \mathcal{L}(A)$ tale che $|f_k(x)| \leqslant g(x)$ per ogni $x \in A$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ e una funzione f tale che $\lim_{k\to+\infty} f_k(x) = f(x)$ q.d. in A. Allora $f \in \mathcal{L}(A)$ e*

$$\lim_{k\to+\infty} \int_A f_k(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx.$$

1.2 Sommabilità della derivata di una funzione monotona

Grazie ai richiami precedenti, non è difficile dimostrare il seguente risultato.

Teorema 1.2.1. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione non decrescente. Sia E l'insieme dei punti di $]a,b[$ nei quali f ha derivata finita.*

Allora la funzione $f' : E \to \mathbb{R}$ è sommabile e

$$\int_E f'(x)\;dx \leqslant f(b-) - f(a+). \tag{1.2}$$

Dimostrazione. La funzione f ha al più un'infinità numerabile di punti di discontinuità (di prima specie) per il Teorema 1.1.1 e q.d. ha derivata in $\mathbb{R}$ per il Teorema 1.1.2. Essa è evidentemente $\mathcal{L}$-misurabile (Osservazione 1.1.3).

Continuiamo a indicare con f la funzione a valori reali di dominio $[a, b+1]$ che coincide con f su $[a,b]$ ed è uguale a $f(b)$ su $[b, b+1]$. Poniamo

$$0 \leqslant \varphi_n(x) := \frac{f(x+1/n) - f(x)}{1/n}, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad x \in [a,b].$$

φ_n è $\mathcal{L}$-misurabile per ogni $n \in \mathbb{N}$ e poichè $\varphi_n(x) \xrightarrow{n\to+\infty} f'(x)$ per ogni $x \in E$, anche f' è $\mathcal{L}$-misurabile come conseguenza della Osservazione 1.1.3. Poichè $\mu([a,b] \setminus E) = 0$ si ha

$$\begin{aligned}
\int_E \varphi_n(x)\,dx &= \int_a^b \varphi_n(x)\,dx = n\Big(\int_a^b f(x+1/n)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\Big) \\
&= n\Big(\int_{a+1/n}^{b+1/n} f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\Big) = n\Big(\int_b^{b+1/n} f(x)\,dx - \int_a^{a+1/n} f(x)\,dx\Big) \\
&= f(b) - n\int_a^{a+1/n} f(x)\,dx \leqslant f(b) - f(a).
\end{aligned}$$

Allora (per il Lemma 1.1.4 di Fatou) f' è sommabile e

$$\int_E f'(x)\,dx = \int_E \liminf_{n\to+\infty} \varphi_n(x)\,dx \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \int_E \varphi_n(x)\,dx \leqslant f(b) - f(a).$$

È immediato ottenere $f(b-)$ e $f(a+)$ al posto di $f(b)$ e $f(a)$, rimpiazzando f iniziale con la funzione

$$\begin{cases} f(a+) & x = a \\ f(x) & a < x < b \\ f(b-) & x = b. \end{cases} \tag{1.3}$$

Questo conclude la prova. $\square$

In (1.2) può valere il segno stretto $\int_E f'(x)\,dx < f(b-) - f(a+)$. Una funzione per cui vale ciò è ad esempio la notevole funzione di Vitali, che si definisce nel modo seguente.

Osservazione 1.2.2 (**La funzione di Vitali**). Sull'intervallo $[0,1]$ consideriamo la funzione

$$f_0 : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f_0(t) = t.$$

Per ricorrenza si definisce una successione di funzioni $(f_n)_{n\geqslant 1}$ ponendo

$$f_1 : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f_1(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}t & \text{se} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \text{se} \quad \frac{1}{3} \leqslant t \leqslant \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2}(t - \frac{2}{3}) & \text{se} \quad \frac{2}{3} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

e definendo f_2 (in generale f_{n+1}) andando a modificare, in modo analogo, i tratti non costanti di f_1 (in generale di f_n) come si vede nella Figura 1.1.

Le funzioni f_n sono continue e monotone non decrescenti, e convergono *uniformemente* su $[0,1]$. La funzione $f := \lim_{n\to+\infty} f_n$ è la funzione di Vitali.

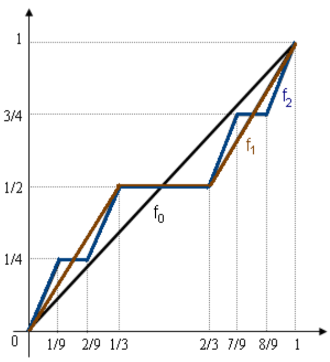

Figura 1.1: Prime tre funzioni della successione

La convergenza uniforme di (f_n) ad f, la continuità e la monotonia di ogni f_n, assicurano che f è continua e monotona. Inoltre $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$. Si dimostra infine che, utilizzando il notevole insieme ternario di Cantor C, f' esiste quasi dappertutto ed è uguale a zero q.d.; infatti per costruzione risulta $f' = 0$ in Ω, dove $\Omega = [0,1]\backslash C$ (e C ha misura nulla nel senso di Lebesgue, come ben noto). Risulta quindi immediata la validità della disuguaglianza stretta

$$0 = \int_E f'(x)\,dx < f(1-) - f(0+) = 1.$$

1.3 Richiami sulle funzioni a variazione limitata

Nella definizione seguente sono introdotte anche le notazioni che useremo nel seguito.

Definizione 1.3.1 (**Funzione a Variazione Limitata**). *Sia* $[a,b]$ *un intervallo di* $\mathbb{R}$, $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *una scomposizione di* $[a,b]$ *e sia* $\Omega_{[a,b]}$ *l'insieme di tutte le scomposizioni di* $[a,b]$. *Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Poniamo*

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f,\sigma) := \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|.$$

Si dice che f è ***a variazione limitata*** *se*

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) := \sup\left\{ \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{v}}}(f,\sigma) \;\middle|\; \sigma \in \Omega \right\} < \infty.$$

In tal caso scriviamo $f \in \mathcal{BV}_{[a,b]}$ e $\mathrm{V}_a^b(f)$ si chiama ***variazione totale*** *di f su $[a,b]$. Diciamo infine che la funzione*

$$[a,b] \ni x \mapsto \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)$$

è la ***funzione variazione totale*** *associata a f.*

Un ovvio esempio di funzione $\mathcal{BV}$ è una funzione monotona f: ad esempio, se f è non decrescente si ha (per telescopia)

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{v}}}(f,\sigma) = f(b) - f(a), \qquad \forall\, \sigma \in \Omega_{[a,b]}.$$

Un altro esempio di funzioni $\mathcal{BV}$ sono le funzioni di classe $\mathcal{C}^1$; infatti se f è una tale funzione allora $|f'| \in \mathcal{C}_{[a,b]}$ e quindi, per il noto Teorema di Weierstrass,

$$\sup_{[a,b]} |f'| < +\infty \tag{1.4}$$

Per concludere basta notare che, per il Teorema del Valor Medio di Lagrange, si ha

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) \leqslant \sup_{[a,b]} |f'| \cdot (b-a). \tag{1.5}$$

Osservazione 1.3.2. Non è difficile[1] dimostrare che, *se f è una funzione $\mathcal{BV}$, allora la sua funzione variazione totale $\mathrm{V}_a^x(f)$ è monotona non decrescente.*

Teorema 1.3.3 (Teorema di Jordan). *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Allora $f \in \mathcal{BV}_{[a,b]}$ se e solo se esistono $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ funzioni monotone non decrescenti tali che $f = \varphi - \psi$.*

Traccia della dimostrazione. L'implicazione '*se*' è ovvia. Viceversa, supponiamo f a variazione limitata e poniamo, per $x \in [a,b]$,

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) + \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f), \tag{1.6}$$

$$\psi(x) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) - f(a). \tag{1.7}$$

È facile osservare che φ e ψ sono come richiesto: vale infatti $f = \varphi - \psi$, e φ, ψ sono non decrescenti.[2] □

Mettendo assieme il Teorema 1.3.3 di Jordan con il Teorema 1.1.2 di Lebesgue, segue che una funzione $\mathcal{BV}$ è derivabile quasi dappertutto.

Osservazione 1.3.4. Nella dimostrazione del teorema precedente si possono definire le funzioni φ, ψ anche nel seguente modo:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\Big(\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) + f(x) \Big),$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\Big(\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) - f(x) \Big).$$

[1] Infatti $\mathrm{V}_a^{x_2}(f) - \mathrm{V}_a^{x_1}(f) = \mathrm{V}_{x_1}^{x_2}(f) \geq 0$ per ogni $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$.

[2] La monotonia di φ segue da $\mathrm{V}_{x_1}^{x_2}(f) \geq |f(x_2) - f(x_1)|$; quella di ψ segue dalla Osservazione 1.3.2.

Così, oltre ad essere $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$, risulta anche

$$\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) = \varphi(x) + \psi(x).$$

Il seguente risultato lega la continuità di f a quella della sua funzione variazione totale.

Teorema 1.3.5. *Se $f \in \mathcal{BV}_{[a,b]}$ è continua in $\overline{x} \in [a,b]$ allora la funzione $x \mapsto \mathrm{V}_a^x(f)$ è continua in $\overline{x}$. In particolare se $f \in \mathcal{C}_{[a,b]}$, allora $x \mapsto \mathrm{V}_a^x(f) \in \mathcal{C}_{[a,b]}$.*

Cenno di dimostrazione. Per dimostrare questo utile risultato bisogna sfruttare, oltre che la continuità di f, anche la definizione (che coinvolge un estremo superiore) della variazione totale: poichè f è continua in $\overline{x}$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che $|f(\overline{x}) - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{3}$ per ogni $x'' \in [a,b]$ tale che $|\overline{x} - x''| < \delta(\varepsilon)$. Ora, per come è definita la variazione totale, esiste $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \Omega_{[a,b]}$ tale che

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{v}}}(f,\sigma) > \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) - \frac{\varepsilon}{3},$$

e tale che ogni suo intervallo componente abbia misura minore di $\delta(\varepsilon)$. A questo punto, supposto che $\overline{x} = x_j$ per un certo $j \in \{0, \ldots, n\}$ (il che non è restrittivo), si prende $x'' \in [x_{j-1}, x_{j+1}]$ e, poichè $[\overline{x}, x''] \subset [x_{j-1}, x_{j+1}]$, si ha

$$\overset{x''}{\underset{\overline{x}}{\mathrm{V}}}(f) \leqslant \overset{x_{j+1}}{\underset{x_{j-1}}{\mathrm{V}}}(f).$$

Si conclude la dimostrazione stimando

$$\begin{aligned}\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{v}}}(f,\sigma) &\leq \overset{x_{j-1}}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) + |f(x_j) - f(x_{j-1})| + |f(x_{j+1}) - f(x_j)| + \overset{b}{\underset{x_{j+1}}{\mathrm{V}}}(f) \\ &< \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) - \overset{x_{j+1}}{\underset{x_{j-1}}{\mathrm{V}}}(f) + \frac{2\varepsilon}{3},\end{aligned}$$

onde

$$\overset{x''}{\underset{\overline{x}}{\mathrm{V}}}(f) \leqslant \overset{x_{j+1}}{\underset{x_{j-1}}{\mathrm{V}}}(f) < \varepsilon.$$

Così è provata la continuità di $x \mapsto \mathrm{V}_a^x(f)$ in x'. □

In analogia con quanto si fa per le funzioni monotone, diamo la seguente

Definizione 1.3.6 (Funzione dei salti di una $\mathcal{BV}$). *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{BV}_{[a,b]}$; sia $f = \varphi_1 - \varphi_2$ con φ_1, φ_2 non negative e non decrescenti su $[a,b]$. Siano s_1 e s_2 le funzioni dei salti relative a φ_1 e φ_2. Allora $\varphi_1 = \psi_1 + s_1$ e $\varphi_2 = \psi_2 + s_2$, con ψ_1 e ψ_2 continue e non decrescenti su $[a,b]$. Ne segue che*

$$f = (\psi_1 - \psi_2) + (s_1 - s_2).$$

*La funzione $\psi_1 - \psi_2$ è continua e a variazione limitata, mentre $s_1 - s_2$ è detta la **funzione dei salti** di f.*

1.4 La derivata della variazione di una funzione $\mathcal{BV}$

Ricordiamo subito una semplice proprietà dei numeri reali.

Dato $z \in \mathbb{R}$, se poniamo $z^+ := \max\{z, 0\}$ e $z^- := \max\{-z, 0\}$, risulta

$$z^+ = \frac{|z| + z}{2}, \quad z^- = \frac{|z| - z}{2}.$$

In modo analogo, se $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\}$ è una scomposizione dell'intervallo $[a, b]$ e se scriviamo $\Delta_k f := f(x_{k+1}) - f(x_k)$, dato che $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f, \sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta_k f|$, possiamo definire

$$\begin{aligned}
\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^+(f, \sigma) &:= \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k(f)^+ = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|\Delta_k f| + \Delta_k f}{2} \\
\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^-(f, \sigma) &:= \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k(f)^- = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|\Delta_k f| - \Delta_k f}{2},
\end{aligned}$$

da cui (per somma telescopica)

$$\begin{aligned}
\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^+(f, \sigma) &= \frac{1}{2} \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f, \sigma) + \frac{1}{2}(f(b) - f(a)) \\
\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^-(f, \sigma) &= \frac{1}{2} \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f, \sigma) - \frac{1}{2}(f(b) - f(a)).
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Poniamo inoltre

$$\begin{aligned}
\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^+(f) &:= \sup_\sigma \left\{ \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^+(f, \sigma) \right\} \\
\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^-(f) &:= \sup_\sigma \left\{ \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^-(f, \sigma) \right\}.
\end{aligned}$$

Si ha, più esplicitamente, da (1.8)

$$\begin{aligned}
\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^+(f) &= \frac{1}{2} \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f, \sigma) + \frac{1}{2}(f(b) - f(a)) \\
\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^-(f) &= \frac{1}{2} \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f, \sigma) - \frac{1}{2}(f(b) - f(a)).
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Inoltre, sempre da (1.8) e da (1.9)

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f, \sigma) = \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^+(f, \sigma) + \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^-(f, \sigma)$$

e

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) = \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^+(f) + \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^-(f). \tag{1.10}$$

Osservazione 1.4.1. Non è difficile[3] provare che le funzioni

$$[a, b] \ni x \mapsto \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^+(f),\ \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^-(f)$$

sono non decrescenti.

[3]Basta osservare che, dati $x_1 \leq x_2$ in $[a, b]$, ad ogni scomposizione $\sigma \in \Omega_{[a,x_1]}$ se ne può associare una in $\Omega_{[a,x_2]}$ unendo a σ il singoletto $\{x_2\}$.

Da (1.9) (per differenza) si ha che, per ogni $x \in [a, b]$,

$$f(x) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^{+}(f) - \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^{-}(f) + f(a). \tag{1.11}$$

Si noti che da (1.11) e dall'Osservazione 1.4.1 si ottiene un'altra decomposizione di f alla Jordan.

Teorema 1.4.2. *Sia $f \in \mathcal{BV}_{[a,b]}$. Sia E l'insieme dei punti di $[a, b]$ nei quali f ha derivata (finita). Allora la funzione $f' : E \to \mathbb{R}$ è sommabile e valgono:*

(1) $\displaystyle\int_E |f'(x)|\, dx \leqslant \overset{b-}{\underset{a+}{\mathrm{V}}}(f)$;

(2) $|f'(x)| = \Big(\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)\Big)'$ *per ogni $x \in E$.*

Se, di più, f è continua, allora:

$$\int_E |f'|(x)\, dx \leqslant \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f).$$

Si noti che la funzione di Vitali nell'Osservazione 1.2.2 fornisce un esempio in cui la disuguaglianza in (1) è stretta. *Le funzioni per cui vale l'uguaglianza sono, come dimostreremo nel Capitolo 2, le funzioni assolutamente continue.*

Dimostrazione. Sia F l'insieme dei punti di $]a, b[$ nei quali esistono le derivate di $\mathrm{V}_a^x{}^{\pm}(f)$; da (1.11), si ha $F \subseteq E$ e su F esiste anche la derivata di $\mathrm{V}_a^x(f)$ in virtù della (1.10). Usando proprio (1.10) e (1.11) si ottiene

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^{+}(f) - \frac{d}{dx}\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^{-}(f) \quad \text{su } F,$$
$$\frac{d}{dx}\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) = \frac{d}{dx}\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^{+}(f) + \frac{d}{dx}\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^{-}(f) \quad \text{su } F.$$

Poiché $x \mapsto \mathrm{V}_a^x{}^{+}(f)$ e $x \mapsto \mathrm{V}_a^x{}^{-}(f)$ sono non decrescenti, le loro derivate, dove esistono, sono non negative, perciò

$$|f'(x)| \leqslant \Big|\frac{d}{dx}\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^{+}(f)\Big| + \Big|\frac{d}{dx}\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^{-}(f)\Big| = \frac{d}{dx}\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^{+}(f) + \frac{d}{dx}\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^{-}(f) = \frac{d}{dx}\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) \quad \text{su } F.$$

Allora per il Teorema 1.2.1 si ha

$$\int_E |f'(x)|\, dx = \int_F |f'(x)|\, dx \leqslant \int_F \frac{d}{dx}\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) \leqslant \overset{b-}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) - \overset{a+}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) = \overset{b-}{\underset{a+}{\mathrm{V}}}(f),$$

da cui segue (1) del teorema. Se, di più, f è continua, allora anche $x \mapsto \mathrm{V}_a^x(f)$ è continua per il Teorema 1.3.5, e quindi $\mathrm{V}_{a+}^{b-}(f) = \mathrm{V}_a^b(f)$ cosicché da (1) segue

$$\int_E |f'(x)|\, dx \leqslant \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f).$$

Ora dimostreremo (2) nel caso più semplice di funzioni di classe $\mathcal{C}^1$ (per la dimostrazione nel caso più generale di funzioni $\mathcal{BV}$ si veda [1, Cap. II, §2.5]). Sia dunque $f \in \mathcal{C}^1{}_{[a,b]}$. Siano $x \in [a, b]$, $h > 0$ e $x + h \in [a, b]$; allora si ha

$$\frac{\overset{x+h}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) - \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)}{h} = \frac{\overset{x+h}{\underset{x}{\mathrm{V}}}(f)}{h}.$$

D'altra parte $|f(b) - f(a)| \leqslant \mathrm{V}_a^b(f)$ (basta prendere come particolare scomposizione di $[a, b]$ $\sigma = \{a, b\}$ e $|f(b) - f(a)| = \mathrm{v}_a^b(f, \sigma) \leqslant \mathrm{V}_a^b(f)$ per definizione); inoltre vale (1.4).

Quindi si ha:

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leqslant \frac{1}{h} \overset{x+h}{\underset{x}{\mathrm{V}}}(f) \overset{(1.5)}{\leqslant} \sup_{[x,x+h]} |f'|.$$

Inoltre

$$\lim_{h\to 0^+} \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| = |f'(x)| = \lim_{h\to 0^+} \Big(\sup_{[x,x+h]} |f'|\Big).$$

Pertanto

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\overset{x+h}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) - \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)}{h} = |f'(x)|.$$

Analogamente, se $x \in [a, b]$, $h < 0$ e $x + h \in [a, b]$, si ha

$$\frac{\overset{x+h}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) - \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)}{h} = \frac{\overset{x}{\underset{x+h}{\mathrm{V}}}(f)}{-h},$$

ma

$$\left|\frac{f(x) - f(x+h)}{-h}\right| \leqslant \frac{1}{-h} \overset{x}{\underset{x+h}{\mathrm{V}}}(f) \leqslant \sup_{[x+h,x]} |f'|.$$

Inoltre

$$\lim_{h\to 0^-} \left|\frac{f(x) - f(x+h)}{-h}\right| = |f'(x)| = \lim_{h\to 0^-} \Big(\sup_{[x+h,x]} |f'|\Big).$$

Quindi anche

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\overset{x+h}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) - \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)}{h} = |f'(x)|.$$

Questo completa la prova del teorema. $\square$

Capitolo 2

Funzioni Assolutamente Continue

In questo capitolo studieremo le funzioni assolutamente continue. Nella prima parte dimostreremo alcuni notevoli risultati, come il Teorema di Severini-Egorov e il Teorema di Fubini sulla derivabilità per serie che saranno necessari per la dimostrazione dei teoremi successivi.

Nella seconda parte introdurremo le funzioni $\mathcal{AC}$ e dimostreremo dei risultati che le legano alle funzioni $\mathcal{BV}$ (più precisamente faremo vedere che $\mathcal{AC}_{[a,b]} \subset \mathcal{BV}_{[a,b]}$) e dimostreremo un utile risultato sull'assoluta continuità della variazione di una funzione $\mathcal{AC}$. In seguito enunceremo e dimostreremo due teoremi di caratterizzazione per le funzioni assolutamente continue, che mostreranno come, in disuguaglianze 'larghe' viste nei teoremi del capitolo precedente, l'uguaglianza caratterizza proprio l'insieme delle funzioni $\mathcal{AC}$. Infine dimostreremo un importante risultato di decomposizione di una funzione $\mathcal{BV}$ come somma della sua funzione dei salti (introdotta nel capitolo precedente), di una funzione $\mathcal{AC}$ e di una funzione singolare (introdotta in questo capitolo).

2.1 Alcuni prerequisiti

In questo importante capitolo faremo uso cruciale del seguente risultato:

Teorema 2.1.1 (Assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue). *Sia A un sottoinsieme $\mathcal{L}$-misurabile di $\mathbb{R}^N$ e sia $f \in \mathcal{L}(A)$.*

Allora per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che $\left|\int_E f(x)dx\right| < \varepsilon$ per ogni $E \subseteq A$, E $\mathcal{L}$-misurabile tale che $\mu(E) < \delta(\varepsilon)$.

Utilizzeremo inoltre il fondamentale risultato

Teorema 2.1.2 (Teorema di Severini-Egorov). *Siano A un sottoinsieme $\mathcal{L}$-misurabile di $\mathbb{R}^N$, con $\mu(A) < +\infty$, e $f : A \to \mathbb{R}$, $f_k : A \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$ siano funzioni $\mathcal{L}$-misurabili con*

$$\lim_{k\to+\infty} f_k(x) = f(x) \quad q.d.\ su\ A.$$

Allora per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $E_\varepsilon \subseteq A$, E_ε $\mathcal{L}$-misurabile, con $\mu(E_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ tale che $f_k \to f$ ***uniformemente*** *su $A \setminus E_\varepsilon$.*

Dimostrazione. Si costruisce una successione crescente di insiemi $\mathcal{L}$-misurabili

$$A_{i,k} = \left\{x \in A \setminus A_0 \ :\ |f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{2^i}\ \forall\, m > k\right\},$$

ove A_0 è l'insieme dei punti $x \in A$ in cui $(f_k(x))_k$ non converge a $f(x)$. Per ipotesi $\mu(A_0) = 0$ e inoltre si ha

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{i,k} = A \setminus A_0, \quad \forall\, i \in \mathbb{N}.$$

Allora

$$\mu(A) = \mu(A \setminus A_0) = \lim_{k \to +\infty} \mu(A_{i,k}).$$

Ora A ha misura finita, quindi, fissato i, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n(i) \in \mathbb{N}$ tale che

$$\mu(A_{i,n(i)}) > \mu(A) - \frac{\varepsilon}{2^i},$$

da cui

$$\mu(A \setminus A_{i,n(i)}) < \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

A questo punto si pone

$$E_\varepsilon = A \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_{i,n(i)} = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \setminus A_{i,n(i)}),$$

e si ha

$$\mu(E_\varepsilon) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon.$$

Infine, per ogni $i \in \mathbb{N}$, per ogni $x \in A \setminus E_\varepsilon = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_{i,n(i)}$, si ha

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{2^i} \quad \text{per ogni } m > n(i) \text{ e ogni } x \in A \setminus E_\varepsilon.$$

Così è provata la convergenza uniforme di $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ad f su $A \setminus E_\varepsilon$. □

Useremo inoltre la seguente versione del Teorema di integrazione per parti, semplice conseguenza del Teorema di Fubini:[1]

Teorema 2.1.3 (Teorema di integrazione per parti). *Siano $I = (a, b)$ intervallo di $\mathbb{R}$ (con $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$) e $f, g \in \mathcal{L}(I)$. Posto*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \quad e \quad G(x) = \int_a^x g(t)\, dt$$

si ha

$$\int_I F(x)g(x)\, dx + \int_I f(x)G(x)\, dx = F(b)G(b).$$

Useremo anche il seguente noto teorema.

Teorema 2.1.4. *Siano A un sottoinsieme $\mathcal{L}$-misurabile di $\mathbb{R}^N$ e $f \in \mathcal{L}(A)$. Se $f(x) \geqslant 0$ per ogni $x \in A$ e $\int_A f(x)\, dx = 0$, allora $f(x) = 0$ q.d. in A.*

---

[1] Infatti $\int_a^b F(x)g(x)\, dx = \int_a^b \Big(\int_a^x f(t)\, dt\Big) g(x)\, dx \overset{\text{Fubini}}{=} \int_a^b f(t) \Big(\int_t^b g(x)\, dx\Big)\, dt$. Rinominando opportunamente le variabili e sfruttando le proprietà dell'integrale si ottiene facilmente quanto voluto.

Teorema 2.1.5 (Fubini, sulla derivabilità per serie). *Sia $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Le funzioni f_n siano tutte monotone dello stesso tipo e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converga per ogni $x \in [a,b]$. Allora q.d. su $[a,b]$ si ha*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = S'(x), \quad \text{con} \quad S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Dimostrazione. I passaggi chiave sono i seguenti:

1. Supponiamo f_n non-decrescenti e (non restrittivo) $f_n(a) = 0$ per ogni n cosicché $f_n \geq 0$;
2. si pone $S_n(x) := \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ e si osserva che $S_{n+1} = S_n + f_{n+1}$ da cui
$$\frac{S_n(x+h) - S_n(x)}{h} \leq \frac{S_{n+1}(x+h) - S_{n+1}(x)}{h} \leq \frac{S(x+h) - S(x)}{h};$$
3. al limite si ha $S'_n \leq S'_{n+1} \leq S'$ (laddove tali derivate esistono) quindi $(S'_n)_n$ è convergente poiché monotona non decrescente e limitata dall'alto;
4. per provare che è proprio $\lim_{n\to\infty} S'_n(x) = S'(x)$ q.d., si gioca sul fatto che $S - S_n = f_{n+1} + f_{n+2} + \cdots$ è una funzione monotona non-decrescente (e ≥ 0) da cui
$$0 \leq S(x) - S_{n_k}(x) \leq S(b) - S_{n_k}(b) < 1/2^k,$$
per una opportuna sottosuccessione $(n_k)_k$;
5. si termina considerando la nuova serie $\sum_k (S(x) - S_{n_k}(x))$, che è una serie convergente di funzioni non-decrescenti a cui si può applicare quanto precede, in particolare (punto (3)) che $\sum_k (S'(x) - S'_{n_k}(x))$ è q.d. convergente;
6. in particolare (per q.o. x) $S'(x) - S'_{n_k}(x) \longrightarrow 0$ per $k \to \infty$ e quindi abbiamo trovato una sottosuccessione di $(S'_n(x))$ (che sappiamo convergere) che converge a $S'(x)$, il che termina la prova.

□

2.2 Funzioni $\mathcal{AC}$: caratterizzazioni e proprietà

Definizione 2.2.1 (Funzione Assolutamente Continua). *Una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ si dice* ***assolutamente continua*** *su $[a,b]$ se: per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, esiste $\delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+$ tale che, qualunque sia $n \in \mathbb{N}$ e qualunque siano i sottointervalli $[\alpha_j, \beta_j]$ di $[a,b]$ tali che $(\alpha_i, \beta_i) \cap (\alpha_j, \beta_j) = \varnothing$ per ogni $i \neq j$, risulta*

$$\sum_{j=1}^{n} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| < \varepsilon$$

purché $\sum_{j=1}^{n} (\beta_j - \alpha_j) < \delta(\varepsilon)$.

Osservazione 2.2.2. Se f è assolutamente continua, allora è (uniformemente) continua e a variazione limitata.

Infatti, fissato $\varepsilon > 0$, sia $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{b-a}{\nu} < \delta(\varepsilon)$, con $\delta(\varepsilon)$ come nella Definizione 2.2.1. Sia $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\} \in \Omega_{[a,b]}$ e σ' la scomposizione ottenuta da σ aggiungendo i punti $a + k\frac{b-a}{\nu}, k = 1, 2, \dots, \nu - 1$. Si ha così (per associatività)

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f, \sigma) \leqslant \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f, \sigma') < \nu\varepsilon.$$

Esempio 2.2.3. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione lipschitziana allora f è assolutamente continua.

Infatti, sia f lipschitziana di costante c. Dato $\varepsilon > 0$, sia $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che $c\delta(\varepsilon) < \varepsilon$. Allora si ha

$$\sum_{j=1}^{n} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| \leqslant c \sum_{j=1}^{n} (\beta_j - \alpha_j) \leqslant c\delta(\varepsilon) < \varepsilon$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni sottointervallo preso come da definizione di assoluta continuità e con l'ipotesi che $\sum_{j=1}^{n}(\beta_j - \alpha_j) < \delta(\varepsilon)$.

Indichiamo con $\mathcal{AC}_{[a,b]}$ l'insieme delle funzioni $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ assolutamente continue.

Osservazione 2.2.4. L'esempio precedente *non* si può generalizzare alle funzioni α-Holderiane. Ad esempio, si può provare che la funzione di Vitali è Hölderiana (ma non è $\mathcal{AC}$, come vedremo in seguito, Teorema 2.2.8-(1)).

Alternativamente si può provare che la funzione $x \sin(1/x)$ è $1/2$-Hölderiana[2] su $[0, 1]$ ma non è assolutamente continua (il che è semplice da provare usando la divergenza della serie armonica semplice).

Osservazione 2.2.5. $\mathcal{AC}_{[a,b]}$, munito delle operazioni di addizione, moltiplicazione e moltiplicazione per scalare, è un'algebra lineare commutativa.

Teorema 2.2.6 (Variazione totale di una funzione $\mathcal{AC}$). *Sia $f \in \mathcal{AC}_{[a,b]}$. Allora anche $x \mapsto \mathrm{V}_a^x(f), \mathrm{V}_a^{x\,\pm}(f)$ appartengono ad $\mathcal{AC}_{[a,b]}$ e quindi f si può esprimere come differenza di due funzioni non decrescenti assolutamente continue.*

Dimostrazione. Sia $f \in \mathcal{AC}_{[a,b]}$. Allora $f \in \mathcal{BV}_{[a,b]}$ per l'Osservazione 2.2.2. Come da definizione di assoluta continuità, per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esiste $\delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$\sum_{j=1}^{n} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| < \varepsilon$$

qualunque siano i sottointervalli $[\alpha_j, \beta_j]$ di $[a, b]$ purché in numero finito e $(\alpha_i, \beta_i) \cap (\alpha_j, \beta_j) = \varnothing$ per $i \neq j$ e $\sum_{j=1}^{n}(\beta_j - \alpha_j) < \delta(\varepsilon)$. Sia ora $\{x_{k,0}, x_{k,1}, \ldots, x_{k,n(k)}\}$ una scomposizione finita di $[\alpha_k, \beta_k]$ per $k = 1, 2, \ldots, n$. Risulta

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n(k)} (x_{k,j} - x_{k,j-1}) = \sum_{j=1}^{n} (\beta_j - \alpha_j) < \delta(\varepsilon),$$

e quindi

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n(k)} |f(x_{k,j}) - f(x_{k,j-1})| < \varepsilon.$$

Prendendo allora gli etremi superiori di tutte le somme interne (in corrispondenza di tutte le scomposizioni finite di $[\alpha_k, \beta_k]$) si ha

$$\sum_{k=1}^{n} \Big| \overset{\beta_k}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) - \overset{\alpha_k}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) \Big| = \sum_{k=1}^{n} \overset{\beta_k}{\underset{\alpha_k}{\mathrm{V}}}(f) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{\sigma \in \Omega_{[\alpha_k, \beta_k]}} \sum_{j=1}^{n(k)} |f(x_{k,j}) - f(x_{k,j-1})| \leqslant \varepsilon.$$

Questo prova che $x \mapsto \mathrm{V}_a^x(f)$ appartiene ad $\mathcal{AC}_{[a,b]}$.

[2] Si veda ad esempio la prova all'url `http://www.math.psu.edu/pesin/papers_www/HW7-solutions.pdf`

Ora, poiché

$$\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^{+}(f) = \frac{1}{2}\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) + \frac{1}{2}[f(x) - f(a)], \quad \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^{-}(f) = \frac{1}{2}\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) - \frac{1}{2}[f(x) - f(a)],$$

anche $x \mapsto \mathrm{V}_a^{x\,+}(f)$ e $x \mapsto \mathrm{V}_a^{x\,-}(f)$ appartengono a $\mathcal{AC}_{[a,b]}$. Pertanto, essendo

$$f(x) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^{+}(f) - \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^{-}(f) + f(a),$$

il teorema è completamente provato. □

Proviamo il seguente utile

Lemma 2.2.7 (Assoluta continuità della funzione integrale). *Sia $\varphi \in \mathcal{L}_{[a,b]}$. Allora la funzione integrale*

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \int_a^x \varphi(t)\,dt$$

è assolutamente continua su $[a,b]$.

Dimostrazione. Segue immediatamente dal Teorema 2.1.1 osservando che

$$\sum_{j=1}^{n} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| = \sum_{j=1}^{n} \Big| \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \varphi \Big| \le \int_{\bigcup_{j=1}^{n}[\alpha_j,\beta_j]} |\varphi|,$$

ove gli intervalli $[\alpha_j, \beta_j]$ sono scelti come al solito. □

Siamo pronti per la prima caratterizzazione delle funzioni assolutamente continue:

Teorema 2.2.8 (Prima caratterizzazione di $\mathcal{AC}$). *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si hanno i due seguenti risultati:*

1. *Se $f \in \mathcal{AC}_{[a,b]}$ allora esiste $f'(x)$ per quasi ogni $x \in [a,b]$ e, posto E l'insieme dei punti di $]a,b[$ nei quali f ha derivata, si ha*

$$\int_E f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

2. *Se f è derivabile q.d. su $[a,b]$, se $f' \in \mathcal{L}_{[a,b]}$ e se*

$$\int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a) \quad \textit{per ogni } x \in [a,b],$$

allora $f \in \mathcal{AC}_{[a,b]}$.

Osservazione 2.2.9. La parte (1) dell'asserto dimostra che la funzione di Vitali f non è $\mathcal{AC}$, poiché per essa $\int_0^1 f' = 0 \neq f(1) - f(0)$.

Dimostrazione. L'asserto (2) segue immediatamente dal Lemma 2.2.7.

Passiamo ora alla prova di (1) e sia $f \in \mathcal{AC}_{[a,b]}$. Allora per il Teorema 2.2.6, f è la differenza di due funzioni assolutamente continue non decrescenti. Possiamo quindi limitarci a provare il teorema nell'ipotesi che f sia assolutamente continua e non decrescente. Continuiamo a indicare con f la funzione a valori reali di dominio $[a, b+1]$ che coincide con la precedente su $[a,b]$ ed è uguale a $f(b)$ su $[b, b+1]$. Se

$$\varphi_n(x) = \frac{f(x + 1/n) - f(x)}{n},$$

poiché f è continua e poiché $\mu([a,b]\setminus E)=0$ si ha

$$\int_E \varphi_n(x)\,dx = \int_a^b \varphi_n(x)\,dx = n\int_b^{b+1/n} f(x)\,dx - n\int_a^{a+1/n} f(x)\,dx,$$

e anche

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_a^{a+1/n} f(x)\,dx = f(a), \qquad \lim_{n\to+\infty} n\int_b^{b+1/n} f(x)\,dx = f(b)$$

quindi

$$\lim_{n\to+\infty}\int_E \varphi_n(x)\,dx = f(b)-f(a).$$

Il teorema risulterà quindi dimostrato non appena si sarà provato che

$$\int_E f'(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_E \varphi_n(x)\,dx.$$

La f, così come è stata prolungata, è ancora non decrescente e assolutamente continua, perciò fissato $\varepsilon>0$, esiste $\delta(\varepsilon)>0$ tale che, qualunque siano i sottointervalli $[\alpha_j,\beta_j]$ di $[a,b{+}1]$ tali che $(\alpha_i,\beta_i)\cap(\alpha_j,\beta_j)=\varnothing$ per $i\neq j$ purché in numero finito n con $\sum_{j=1}^{n}(\beta_j-\alpha_j)<\delta(\varepsilon)$, risulta

$$\sum_{j=1}^{n}(f(\beta_j)-f(\alpha_j))<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Inoltre, per il Teorema 2.1.1 esiste $\delta_1(\varepsilon)>0$ tale che

$$\int_F f'(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{3},$$

per ogni $F\subset E$, F $\mathcal{L}$-misurabile con $\mu(F)<\delta_1(\varepsilon)$. Supponiamo $\delta_1(\varepsilon)<\delta(\varepsilon)$.

Per il Teorema 2.1.2 di Severini-Egorov esiste $G_\varepsilon\subseteq E$, G_ε $\mathcal{L}$-misurabile con $\mu(G_\varepsilon)<\delta_1(\varepsilon)$ tale che $\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f'$ uniformemente su $E\setminus G_\varepsilon$; allora esiste $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tale che

$$\int_{E\setminus G_\varepsilon}|\varphi_n(x)-f'(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{3},\quad \forall\, n\in\mathbb{N},\quad n>n_\varepsilon.$$

Ne segue che, se $n>n_\varepsilon$,

$$\begin{aligned}\Big|\int_E \varphi_n(x)\,dx - \int_E f'(x)\,dx\Big| &= \Big|\int_{E\setminus G_\varepsilon}[\varphi_n(x)-f'(x)]\,dx + \int_{G_\varepsilon}[\varphi_n(x)-f'(x)]\,dx\Big| \\ &\leqslant \int_{E\setminus G_\varepsilon}|\varphi_n(x)-f'(x)|\,dx + \int_{G_\varepsilon}\varphi_n(x)\,dx + \int_{G_\varepsilon} f'(x)\,dx < \frac{2\varepsilon}{3} + \int_{G_\varepsilon}\varphi_n(x)\,dx.\end{aligned}$$

Poiché $\mu(G_\varepsilon)<\delta_1(\varepsilon)<\delta(\varepsilon)$, esiste un aperto O di $]a,b[$ tale che $G_\varepsilon\subset O$ e $\mu(O)<\delta(\varepsilon)$. O è unione numerabile di intervalli chiusi $[\alpha_k,\beta_k]$ tali che $(\alpha_h,\beta_h)\cap(\alpha_k,\beta_k)=\varnothing$ per $h\neq k$. Per ogni $x\in[0,1]$ e per ogni $m\in\mathbb{N}$, $[\alpha_k+x,\beta_k+x]$, per $k=1,2,\dots,m$ sono m intervalli di $[a,b+1]$ tali che $\sum_{j=1}^{m}((\beta_j+x)-(\alpha_j+x))<\delta(\varepsilon)$ per cui

$$\sum_{j=1}^{m}(f(\beta_j+x)-f(\alpha_j+x))<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Si ha ora

$$\begin{aligned}\int_{\alpha_j}^{\beta_j} \varphi_n(x)\,dx &= n\Big(\int_{\alpha_j}^{\beta_j} f(x+\frac{1}{n})\,dx - \int_{\alpha_j}^{\beta_j} f(x)\,dx\Big)\\ &= n\Big(\int_{\beta_j}^{\beta_j+\frac{1}{n}} f(x)\,dx - \int_{\alpha_j}^{\alpha_j+\frac{1}{n}} f(x)\,dx\Big)\\ &= n\int_0^{\frac{1}{n}} (f(\beta_j+x)-f(\alpha_j+x))\,dx,\end{aligned}$$

da cui

$$\sum_{j=1}^m \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \varphi_n(x)\,dx = n\int_0^{\frac{1}{n}} \sum_{j=1}^m (f(\beta_j+x)-f(\alpha_j+x))\,dx < \frac{\varepsilon}{3},$$

e quindi

$$\int_{G_\varepsilon} \varphi_n(x)\,dx \leqslant \int_O \varphi_n(x)\,dx = \sum_{j=1}^\infty \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \varphi_n(x)\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Il teorema è così dimostrato. □

Corollario 2.2.10. *Sia $f \in \mathcal{AC}_{[a,b]}$; allora esiste $g \in \mathcal{L}_{[a,b]}$ tale che*

$$f(x) = \int_a^x g(t)\,dt + f(a), \quad x \in [a,b].$$

Dimostrazione. Sia g tale che $g(x) = f'(x)$ nei punti $x \in]a,b[$ nei quali esiste $f'(x)$ e $g(x) = 0$ nei restanti punti di $[a,b]$. Allora per il Teorema 2.2.8 si ha

$$\int_a^x g(t)\,dt = f(x) - f(a).$$

Questo conclude la prova. □

Corollario 2.2.11. *Se $f \in \mathcal{AC}_{[a,b]}$ e $f'(x) = 0$ q.d. allora f è costante.*

Dimostrazione. Se g ha il significato del Corollario 2.2.10 allora $g(x) = 0$ q.d., e quindi $f(x) = f(a)$ per ogni $x \in [a,b]$. □

Teorema 2.2.12 (Cambiamento di variabile assolutamente continuo). *Consideriamo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sommabile e $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ assolutamente continua. Sia $\varphi([\alpha,\beta]) \subseteq [a,b]$ e $(f \circ \varphi)\,\varphi'$ sia sommabile su $[\alpha,\beta]$. Allora*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx.$$

Dimostrazione. Sia $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ uniformemente lipschitziana, cioé esista $M \in \mathbb{R}^+$ tale che, per ogni $x', x'' \in [a,b]$

$$|F(x') - F(x'')| \leqslant M|x' - x''|.$$

Allora F è assolutamente continua. Anche $F \circ \varphi$ è assolutamente continua perché φ è assolutamente continua e

$$\sum_{j=1}^n |F(\varphi(\beta_j)) - F(\varphi(\alpha_j))| \leqslant M \sum_{j=1}^n |\varphi(\beta_j) - \varphi(\alpha_j)|.$$

Sia t un punto di $]\alpha,\beta[$ nel quale esistano reali $\varphi'(t)$ e $(F\circ\varphi)'(t)$ e sia $\varphi'(t)\neq 0$, per esempio $\varphi'(t)>0$; allora esiste un intervallo $[t_1,t_2]\subset[\alpha,\beta]$ tale che $t\in]t_1,t_2[$ e $\varphi(t')>\varphi(t)$ per ogni $t'\in]t,t_2]$, $\varphi(t'')<\varphi(t)$ per ogni $t''\in[t_1,t[$. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $]\varphi(t_1),\varphi(t_2)[$ convergente a $\varphi(t)$, con $x_n\neq\varphi(t)$ per ogni $n\in\mathbb{N}$; per ogni $n\in\mathbb{N}$ esiste $\tau_n\in]t_1,t_2[$ tale che $\varphi(\tau_n)=x_n$; risulta allora

$$\lim_{n\to+\infty}\tau_n=t$$

infatti, in caso contrario, da $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si potrebbe estrarre una sottosuccessione $(\tau_{\nu_n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a un punto $t^*\neq t$; ma allora si avrebbe che

$$\lim_{n\to+\infty}x_{\nu_n}=\varphi(t^*)\neq\varphi(t),$$

il che è assurdo perché $x_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\varphi(t)$. Ne segue che

$$F'(\varphi(t))=\lim_{n\to+\infty}\frac{F(\varphi(t))-F(x_n)}{\varphi(t)-x_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{F(\varphi(t))-F((\varphi(\tau_n))}{t-\tau_n}}{\dfrac{\varphi(t)-\varphi(\tau_n)}{t-\tau_n}}=\frac{(F\circ\varphi)'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Se invece è $\varphi'(t)=0$ allora $F'(\varphi(t))\varphi'(t)=0$ e inoltre $F\circ\varphi$ è derivabile in t con derivata zero perché

$$\Big|\frac{F(\varphi(t))-F(\varphi(t'))}{t-t'}\Big|\leqslant M\Big|\frac{\varphi(t)-\varphi(t')}{t-t'}\Big|,\quad \forall t'\in[\alpha,\beta].$$

Pertanto

$$(F\circ\varphi)'(t)=(F'\circ\varphi)(t)\varphi'(t)\quad q.d.$$

Supponiamo ora che f sia L-misurabile e limitata, $|f(x)|\leqslant M$ per ogni $x\in[a,b]$, allora $(f\circ\varphi)\varphi'$ è sommabile; quindi

$$x\mapsto F(x)=\int_a^x f(y)dy,\quad x\in[a,b],$$

è uniformemente lipschitziana. Il risultato precedente assicura che

$$(F\circ\varphi)'(t)=(f\circ\varphi)(t)\varphi'(t),\quad q.d.$$

e quindi, integrando su $[\alpha,\beta]$,

$$\int_\alpha^\beta\frac{d}{dt}\Big(\int_a^{\varphi(t)}f(x)\,dx\Big)=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

e, per il Teorema 2.2.8

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Supponiamo infine che f non sia limitata ma sommabile e che $(f\circ\varphi)\varphi'$ sia sommabile. Poniamo $f_n(x)=f(x)$ per $x\in\{y;t\in[a,b],|f(y)|\leqslant n\}$, $f_n(x)=n$ per $x\in\{y;y\in[a,b],f(y)>n\}$, $f_n(x)=-n$ per $x\in\{y;y\in[a,b],f(y)<-n\}$. Allora

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}f_n(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f_n(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Essendo $|f_n(x)| \leqslant |f(x)|$ per ogni $x \in [a,b]$ e $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a,b]$, per il Teorema 1.1.5, si ha

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx &= \lim_{n\to+\infty}\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_{\alpha}^{\beta} f_n(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.\end{aligned}$$

Questo conclude la prova. □

Lemma 2.2.13. *Se la funzione $f : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ è sommabile e $\int_a^x f(t)\,dt = 0$ per ogni $x \in [a,b]$ allora $f(x) = 0$ q.d.*

Dimostrazione. Sia $[\alpha,\beta]$ un arbitrario sottointervallo di $[a,b]$; allora

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_a^{\beta} f(x)\,dx - \int_a^{\alpha} f(x)\,dx = 0.$$

Sia ora E un arbitrario sottoinsieme $\mathcal{L}$-misurabile di $[a,b]$. Proviamo che

$$\int_E f(x)\,dx = 0.$$

Infatti supponiamo che E sia tale che $\int_E f(x)\,dx \neq 0$; sia ad esempio

$$\Big|\int_E f(x)\,dx\Big| = \lambda > 0.$$

Esiste $\delta > 0$ tale che $\left|\int_F f(x)\,dx\right| < \lambda$ per ogni $F \subseteq [a,b]$, F $\mathcal{L}$-misurabile con $\mu(F) < \delta$.

Sia ora O un aperto di $\mathbb{R}$ tale che $E \subseteq O$ e $\mu(O) < \mu(E)+\delta$; risulta essere $O = \bigcup_{j=1}^{\infty}[\alpha_j,\beta_j]$ con $(\alpha_i,\beta_i)\cap(\alpha_j,\beta_j) = \varnothing$ per $i \neq j$. Poniamo $I_n = [\alpha_n,\beta_n]\cap[a,b]$ e $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Allora, per quanto detto finora

$$\int_V f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{I_n} f(x)\,dx = 0.$$

D'altra parte $E \subseteq V \subseteq O$ per cui $\mu(V\setminus E) < \delta$ e quindi $\left|\int_{V\setminus E} f(x)\,dx\right| < \lambda$. Ma da

$$0 = \int_V f(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx + \int_{V\setminus E} f(x)\,dx$$

segue che

$$\Big|\int_{V\setminus E} f(x)\,dx\Big| = \Big|\int_E f(x)\,dx\Big| = \lambda.$$

Siamo perciò giunti a una contraddizione. Dunque per ogni $E \subseteq [a,b]$, E $\mathcal{L}$-misurabile, risulta

$$\int_E f(x)\,dx = 0.$$

Posto allora $E^+ = \{x : x \in [a,b], f(x) \geqslant 0\}$ e $E^- = \{x : x \in [a,b], f(x) < 0\}$, si ha

$$\int_{E^+} f(x)\,dx = \int_{E^-} f(x)\,dx = 0$$

e quindi per il Teorema 2.1.4 si ha $f(x) = 0$ q.d. $\square$

Teorema 2.2.14 (**Derivata della funzione integrale di una funzione sommabile**). *Sia $f : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ sommabile e $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ sia la funzione integrale definita ponendo, per ogni $x \in [a,b]$,*

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Allora $\varphi'(x) = f(x)$ q.d.

Dimostrazione. La funzione φ è assolutamente continua, per il Teorema 2.1.1. Sia dunque $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ la funzione così definita: $g(x) = \varphi'(x)$ nei punti $x \in]a,b[$ per i quali esiste $\varphi'(x)$ e $g(x) = 0$ nei restanti punti di $[a,b]$. Allora, per il Teorema 2.2.8 risulta

$$\int_a^x g(t)\,dt = \varphi(x) - \varphi(a) = \varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

e quindi

$$\int_a^x (g(t) - f(t))\,dt = 0 \qquad \forall\, x \in [a,b]$$

e quindi, per il Lemma 2.2.13, $g(x) = f(x)$ q.d. ossia $\varphi'(x) = f(x)$ q.d. $\square$

Definizione 2.2.15 (**Punto di Lebesgue**). *Sia $f : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione sommabile. Un punto $x \in]a,b[$ si chiama **punto di Lebesgue** di f se $f(x) \in \mathbb{R}$ e*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\,dt = 0.$$

Osservazione 2.2.16. Nelle notazioni precedenti, se φ è la funzione integrale $\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, con $x \in [a,b]$ e se x è un punto di Lebesgue di f si ha $\varphi'(x) = f(x)$.

Infatti, si ha

$$\Big|\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - f(x)\Big| = \Big|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} [f(t) - f(x)]\,dt\Big| \leqslant \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\,dx$$

Quindi passando al limite si ottiene che

$$|\varphi'(x) - f(x)| = 0.$$

Definizione 2.2.17 (**Funzione singolare**). *Se $\varphi \in \mathcal{BV}_{[a,b]} \cap \mathcal{C}_{[a,b]}$, φ non costante e $\varphi'(x) = 0$ q.d., si dice che φ è una **funzione singolare**.*

Un esempio di funzione singolare è la funzione di Vitali, descritta nell'Osservazione 1.2.2.

Teorema 2.2.18 (**Decomposizione di una funzione $\mathcal{BV}$**). *Se $f \in \mathcal{BV}_{[a,b]}$ risulta*

$$f = g + h + s$$

essendo s la funzione dei salti di f, $g \in \mathcal{AC}_{[a,b]}$, con $g(a) = f(a)$ e $h \equiv 0$ oppure h singolare. Inoltre g e h sono univocamente determinate.

Dimostrazione. Sia s la funzione dei salti di f e sia g la funzione definita ponendo

$$g(x) = \int_a^x f'(t)\,dt + f(a) \qquad x \in [a,b]$$

e

$$h = (f - s) - g.$$

Allora $g \in \mathcal{AC}_{[a,b]}$ e $g(a) = f(a)$, $f - s \in \mathcal{BV}_{[a,b]}$, $f - s \in \mathcal{C}_{[a,b]}$ e quindi $h \in \mathcal{BV}_{[a,b]}$, $h \in \mathcal{C}_{[a,b]}$; inoltre

$$h'(x) = f'(x) - s'(x) - g'(x)$$

e $s'(x) = 0$ q.d., $g'(x) = f'(x)$ q.d., quindi

$$h'(x) = f'(x) - f'(x) = 0 \quad \text{q.d.}$$

e quindi h è singolare, se non è $= 0$. Risulta $f'(x) = g'(x)$ q.d. per il Teorema 2.2.14. Risulta inoltre $s'(x) = 0$ q.d. perchè, supposta ad esempio f non decrescente (il che non è restrittivo), facendo riferimento alla definizione di funzione dei salti (Teorema 1.1.1), posto

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < x_n \\ f(x_n) - f(x_n-) & \text{se} \quad x = x_n \\ f(x_n+) - f(x_n-) & \text{se} \quad x > x_n \end{cases}$$

risulta

$$s(x) = f(a+) - f(a) + \sum_n f_n(x), \qquad a < x < b.$$

Allora per il Teorema 2.1.5 si ha q.d. $s'(x) = \sum_n f'_n(x) = 0$.

Proviamo ora che g e h sono univocamente determinate. Supponiamo che sussista anche la decomposizione $f = g_1 + h_1 + s$ con $g_1 \in \mathcal{AC}_{[a,b]}$, $g_1(a) = f(a)$, h_1 singolare. Si ha $g - g_1 = h_1 - h \in \mathcal{AC}_{[a,b]}$ e $g'(x) - g_1'(x) = h_1'(x) - h'(x) = 0$ q.d. Allora, per il Corollario 2.2.11, $g - g_1$ è costante e qindi $g = g_1$ perchè $g(a) = g_1(a) = f(a)$; quindi anche $h = h_1$ e questo conclude la dimostrazione. $\square$

Teorema 2.2.19 (Seconda caratterizzazione di $\mathcal{AC}$). *Sia $f \in \mathcal{BV}_{[a,b]}$. Allora*

$$f \in \mathcal{AC}_{[a,b]} \iff \int_a^b |f'(x)|\,dx = \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f).$$

Dimostrazione. Supponiamo $f \in \mathcal{AC}_{[a,b]}$. Sia g la funzione definita ponendo

$$g(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{nei punti di } [a,b] \text{ nei quali esiste } f'(x) \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Siano h_1 e h_2 le funzioni definite ponendo

$$h_1(x) = \int_a^x g^+(t)\,dt, \quad h_2(x) = \int_a^x g^-(t)\,dt, \quad x \in [a,b].$$

h_1 e h_2 sono assolutamente continue e non decrescenti; risulta $h_1'(x) = g^+(x)$ q.d. e $h_2'(x) = g^-(x)$ q.d., percui $f'(x) = h_1'(x) - h_2'(x)$ q.d. ($f' = g^+ - g^-$). Allora per il Teorema 2.2.8

$$f(x) - f(a) = h_1(x) - h_2(x).$$

Essendo h_1 e h_2 non decrescenti e $h_1(a) = h_2(a) = 0$ si ha

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(h_1) + \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(h_2) = h_1(b) - h_1(a) + h_2(b) - h_2(a) = \int_a^b (g^+(x) + g^-(x))\, dx = \int_a^b |f'(x)|\, dx$$

e quindi

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) \leqslant \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(h_1) + \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(h_2) = \int_a^b |f'(x)|\, dx.$$

D'altra parte, per il Teorema 1.4.2 è

$$\int_a^b |f'(x)|\, dx \leqslant \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f).$$

Dunque

$$\int_a^b |f'(x)|\, dx = \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f).$$

Viceversa, supponiamo che sia

$$\int_a^b |f'(x)|\, dx = \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f).$$

Poichè

$$f(x) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^+(f) - \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^-(f) \text{ e } \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^+(f) + \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^-(f),$$

si ha

$$|f'(x)| = \left| \frac{d}{dx} \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^+(f) - \frac{d}{dx} \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^-(f) \right| \leqslant \frac{d}{dx} \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^+(f) + \frac{d}{dx} \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}{}^-(f) = \frac{d}{dx} \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) \text{ q.d.},$$

da cui, per l'ipotesi e per il Teorema 1.4.2, si ha

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) = \int_a^b |f'(x)|\, dx \leqslant \int_a^b \frac{d}{dx} \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)\, dx \leqslant \overset{b-}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) - \overset{a+}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) = \overset{b-}{\underset{a+}{\mathrm{V}}}(f) \leqslant \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)$$

e quindi sono tutte uguaglianze, perciò

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) = \int_a^b \frac{d}{dt} \overset{t}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)\, dt = \int_a^x \frac{d}{dt} \overset{t}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)\, dt + \int_x^b \frac{d}{dt} \overset{t}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)\, dt \leqslant \overset{x-}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) + \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) - \overset{x+}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)$$

e quindi

$$0 \leqslant \overset{x+}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) - \overset{x-}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) \leqslant 0,$$

da cui

$$\overset{x+}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) = \overset{x-}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f).$$

Allora, sempre per il Teorema 1.4.2

$$\int_a^x \frac{d}{dt} \overset{t}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)\, dt \leqslant \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f).$$

Ma tale disuguaglianza non può essere stretta perchè altrimenti sarebbe

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) = \int_a^x \frac{d}{dt} \overset{t}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)\, dt + \int_x^b \frac{d}{dt} \overset{t}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)\, dt < \overset{x-}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) + \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) - \overset{x+}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f),$$

il che è assurdo.

Allora, per ogni $x \in [a, b]$ si ha

$$\int_a^x \frac{d}{dt} \overset{t}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)\, dt = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f).$$

Ciò assicura, per il Teorema 2.2.8, che la funzione $x \mapsto \mathrm{V}_a^x(f)$ è assolutamente continua e quindi lo è anche f perchè: presi $x, y \in [a, b], x < y$ si ha

$$\big|f(y) - f(x)\big| \leqslant \overset{y}{\underset{x}{\mathrm{V}}}(f) = \overset{y}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) - \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)$$

e quindi

$$\sum_{j=1}^{n} \big|f(\beta_j) - f(\alpha_j)\big| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \overset{\beta_j}{\underset{\alpha_j}{\mathrm{V}}}(f).$$

Questo termina la dimostrazione. $\square$

Capitolo 3

Ulteriori risultati

In questo ultimo capitolo mostreremo altri risultati: un teorema sulle funzioni monotone e uno sulle funzioni assolutamente continue.

Per dimostrare il primo dei due teoremi faremo uso cruciale del Teorema di rappresentazione di Riesz, mentre per la prova del secondo servirà anche il Teorema di Radon-Nikodym.

Date queste esigenze, nella prima parte del capitolo richiameremo alcune nozioni di base di Teoria della misura (in particolare riporteremo definizioni e alcuni risultati riguardanti gli Spazi di misura, le funzioni misurabili e l'integrazione). Inoltre richiameremo risultati un pò più sofisticati, come il sopracitato Teorema di rappresentazione di Riesz, per arrivare infine a parlare della decomposizione di una misura nella somma di una 'misura assolutamente continua' e di una 'misura singolare'. Infine introdurremo la derivata di Radon-Nikodym e l'omonimo Teorema.

3.1 Richiami di Teoria della misura

Ricoridamo ora alcune note definizioni, con le quali fisseremo le notazioni che useremo in tutto il capitolo.

3.1.1 Spazi di misura

Definizione 3.1.1 (**σ-algebra**). *Sia X un insieme. Diciamo che una famiglia $\mathfrak{M}$ di sottoinsiemi di X è una **σ-algebra** in X, se sono essa soddisfa le seguenti proprietà:*

(i) $\varnothing \in \mathfrak{M}$;

(ii) per ogni $E \in \mathfrak{M}$ *si ha* $X \setminus E \in \mathfrak{M}$;

(iii) se (E_h) *è una successione in* $\mathfrak{M}$, *risulta* $\displaystyle\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h \in \mathfrak{M}$.

*Un sottoinsieme E di X si dice **$\mathfrak{M}$-misurabile** (o, più semplicemente, misurabile) se $E \in \mathfrak{M}$.*

Definizione 3.1.2 (**Spazio misurabile**). *Uno **spazio misurabile** è una coppia $(X, \mathfrak{M})$, in cui X è un insieme e $\mathfrak{M}$ è una σ-algebra in X.*

Definizione 3.1.3 (**σ-algebra di Borel**). *Sia X uno spazio metrico. Denotiamo con $\mathfrak{B}(X)$ la σ-algebra in X generata dagli aperti di X. Gli elementi di $\mathfrak{B}(X)$ si chiamano **sottoinsiemi boreliani** di X*

Definizione 3.1.4 (**Misura e spazio di misura**). *Sia* $(X, \mathfrak{M})$ *uno spazio misurabile. Diciamo che una funzione* $\mu : \mathfrak{M} \to [0, +\infty]$ *è una* ***misura*** *su* $\mathfrak{M}$ *se valgono:*

(i) $\mu(\varnothing) = 0$;

(ii) se (E_h) *è una successione in* $\mathfrak{M}$ *costituita da insiemi a due a due disgiunti, si ha*

$$\mu\Big(\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h\Big) = \sum_{h=0}^{\infty} \mu(E_h).$$

Uno ***spazio di misura*** *è una terna* $(X, \mathfrak{M}, \mu)$, *in cui* X *è un insieme,* $\mathfrak{M}$ *una* σ*-algebra in* X *e* μ *una misura su* $\mathfrak{M}$.

Ci servirà anche la seguente

Definizione 3.1.5 (**Misura σ-finita**). *Sia* $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ *uno spazio di misura. Diciamo che* μ *è* σ*-finita, se esiste una succession* (E_h) *in* $\mathfrak{M}$ *con* $\mu(E_h) < +\infty$ *e* $X = \bigcup_{h=1}^{\infty} E_h$.

Osserviamo che, a meno di sostituire E_h con $\widehat{E}_h = E_0 \cup \cdots \cup E_h$, si può supporre che (E_h) sia una successione crescente.

Teorema 3.1.6 (**Misura esterna di uno spazio di misura**). *Sia* $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ *uno spazio di misura. Per ogni* $E \subseteq X$ *poniamo*

$$\mu^*(E) := \inf\{\mu(G) : G \in \mathfrak{M}, E \subseteq G\}.$$

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) μ^* *è un misura esterna*[1] *su* X;

(b) per ogni $E \in \mathfrak{M}$ *si ha che* E *è* μ^**-misurabile e* $\mu^*(E) = \mu(E)$;

(c) μ^* *è finita se e solo se* μ *è finita;*

(d) per ogni $E \subseteq X$ *esiste* $G \in \mathfrak{M}$ *tale che* $E \subseteq G$ *e* $\mu(G) = \mu^*(E)$.

> Per la dimostrazione, che non è difficile, si sfruttano le proprietà della misura esterna e l'importante definizione di insieme misurabile di **Carathodory**[2].

Nel seguito, dato $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ spazio di misura, con μ^* si denoterà sempre la misura esterna introdotta nel teorema precedente.

Ricordiamo ora, senza dimostrarle, alcune propietà della misura esterna.

Teorema 3.1.7 (**Proprietà della misura esterna**). *Sia* μ *una misura esterna su uno spazio metrico* X. *Allora sono fatti equivalenti:*

(a) ogni aperto di X *è* μ*-misurabile;*

(b) ogni boreliano di X *è* μ*-misurabile;*

[1]Cioè μ^* è definita sui sottoinsiemi di X, nulla su $\varnothing$, monotona e per cui vale la proprietà di subadditività numerabile

[2]Dato $A \subset X$, si dice che A è $\mu*$-misurabile se e solo se, per ogni $E \subset X$, $\mu*(E)$=$\mu*(E \cap A)$+$\mu*(E \cap A')$, dove A' è il complementare di A

(c) per ogni coppia E, F di sottoineiemi non vuoti di X con

$$\inf\{d(x,y) : x \in E, y \in F\} > 0$$

si ha $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$.

Ci servirà infine la seguente

Definizione 3.1.8 (Misura di Radon). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$. Denotiamo com $\mathcal{M}(\Omega)$ la famiglia delle misure boreliane su Ω che siano finite sui compatti di Ω. Gli elementi di $\mathcal{M}(\Omega)$ si chiamano anche* ***misure di Radon*** *(positive) su Ω.*

3.1.2 Funzioni misurabili e integrazione

Definizione 3.1.9 (Funzione misurabile). *Sia Y uno spazio metrico. Un'applicazione $f : X \to Y$ si dice* ***$\mathfrak{M}$-misurabile*** *(o, più semplicemente, misurabile), se per ogni aperto A in Y l'insieme $f^{-1}(A)$ è $\mathfrak{M}$-misurabile.*

Ricordiamo ora alcune note caratterizzazioni per le funzioni misurabili a valori reali

Teorema 3.1.10. *Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione. Allora sono equivalenti:*

(a) f è $\mathfrak{M}$-misurabile;

(b) per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}(]c, +\infty])$ è $\mathfrak{M}$-misurabile;

(c) per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}([c, +\infty])$ è $\mathfrak{M}$-misurabile;

(d) per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}([-\infty, c[)$ è $\mathfrak{M}$-misurabile;

(e) per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}([-\infty, c])$ è $\mathfrak{M}$-misurabile.

Definizione 3.1.11 (Funzione boreliana). *Siano Y_1, Y_2 due spazi metrici. Un'applicazione $f : Y_1 \to Y_2$ si dice* ***boreliana*** *se è $\mathfrak{B}(Y_1)$-misurabile.*

Esempio 3.1.12. Un immediato esempio di funzione boreliana è una funzione continua.
Infatti se $f : Y_1 \to Y_2$ è continua allora per ogni aperto A in Y_2, l'insieme $f^{-1}(A)$ è aperto in Y_1 e quindi è boreliano.

Definizione 3.1.13 (Funzione caratteristica). *Sia E un sottoinsieme di X. Si chiama* ***funzione caratteristica*** *di E la funzione $\chi_E : X \to \mathbb{R}$ definita da*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \in X \setminus E. \end{cases}$$

Definizione 3.1.14 (Funzione semplice). *Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice* ***$\mathfrak{M}$-semplice*** *(o, se non c'è rischio di confusione, semplice), se f è $\mathfrak{M}$-misurabile e $f(X)$ è un insieme finito.*

Vale inoltre il noto risultato

Teorema 3.1.15. *Se $f : X \to \mathbb{R}$ è $\mathfrak{M}$-semplice, allora esistono $t_0, \dots, t_k \in f(X)$ ed esistono $E_0, \dots, E_k \in \mathfrak{M}$ tali che*

$$f = \sum_{h=0}^{k} t_h \chi_{E_h}.$$

Ricordiamo ora alcune nozioni, già note per la misura di Lebesgue, che noi utilizzeremo per una generica misura.

Definizione 3.1.16 (**Funzione integrabile**). *Sia $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Una funzione $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ si dice μ-**integrabile** (o, più semplicemente, integrabile), se f è μ-misurabile e almeno uno degli integrali $\int f^+ \, d\mu^*$ e $\int f^- \, d\mu^*$ è finito.*

In tal caso si pone

$$\int f(x)\, d\mu(x) = \int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu.$$

Definizione 3.1.17 (**Funzione sommabile**). *Sia $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice μ-**sommabile** (o, più semplicemente, sommabile), se f è μ-integrabile e $\int f \, d\mu$ è finito.*

Evidentemente f è sommabile se è misurabile e se entrambi gli integrali $\int f^+ \, d\mu^*$ e $\int f^- \, d\mu^*$ sono finiti.

Definizione 3.1.18 (**Integrale su E**). *Sia $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $E \in \mathfrak{M}$. Data una funzione $f : X \in \overline{\mathbb{R}}$, si pone*

$$\int_E f(x)\, d\mu(x) = \int_E f \, d\mu := \int \chi_E f \, d\mu,$$

quando l'ultimo integrale è definito.

Infine introduciamo il seguente insieme

Definizione 3.1.19 (**Insieme** $M(X, \mu; Y)$). *Siano $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura ed Y uno spazio metrico. Nell'insieme delle applicazioni $\mathfrak{M}$-misurabili da X ad Y, introduciamo una relazione di equivalenza, ponendo*

$$f \sim g \Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad \text{per } \mu - q.o. \ x \in X.$$

Denotiamo con $M(X, \mu; Y)$ ***lo spazio quoziente associato****.*

3.1.3 Teorema di rappresentazione di Riesz e decomposizione di misure

Prima di arrivare ai teoremi che ci interessano, abbiamo bisogno di altri risultati. Il primo è il Teorema di rappresentazione di Riesz, che dimostreremo utilizzando il seguente

Lemma 3.1.20 (**Partizione dell'unità**). *Siano $A_0, \dots, A_k$ degli aperti di $\mathbb{R}^N$ e sia K un compatto in $\bigcup_{h=0}^{k} A_h$. Allora esistono $\psi_0 \in \mathcal{C}_0^\infty(A_0), \dots, \psi_k \in C_0^\infty(A_k)$ tali che*

$$\forall\, x \in A_h : \qquad 0 \leqslant \psi_h(x) \leqslant 1,$$
$$\forall\, x \in K : \qquad \sum_{h=0}^{k} \psi_h(x) = 1.$$

Teorema 3.1.21 (**Teorema di rappresentazione di Riesz**). *Sia $T : \mathcal{C}_0^\infty(\Omega; \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ una funzione lineare e monotona. Allora esiste una ed una sola $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ tale che*

$$\forall\, f \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega; \mathbb{C}) : \ \langle T, f \rangle = \int_\Omega f \, d\mu. \tag{3.1}$$

Traccia. Per la dimostrazione dettagliata si veda [1, Cap. I, Teorema 4.8]. Qui saranno riportati solamente i passaggi chiave.

1. Si pone $\mu(E) := \inf\left\{ \lim_{h\to+\infty} \langle T, f_h\rangle \ : \ f_h \in \mathcal{C}_0^\infty,\, 0 \leqslant f_h \leqslant f_{h+1},\, \lim_{h\to+\infty} f_h \geqslant \chi_E \right\}$ e si dimostra che μ è una misura esterna su Ω;
2. si prova che ogni aperto di Ω è μ-misurabile e per farlo si sfrutta il punto (c) del Teorema 3.1.7;
3. se $E \subseteq \Omega, \psi \in \mathcal{C}_0^\infty$ e $\chi_E \leqslant \psi$, si ha $\mu(E) \leqslant \langle T, \psi\rangle$: per provare ciò basta considerare, nella definizione di μ, la successione $(f_h)_h$ costantemente uguale a ψ;
4. si ha $\mu|_{\mathfrak{B}(\Omega)} \in \mathcal{M}(\Omega)$. Per il passo 2. si ha che $\mu|_{\mathfrak{B}(\Omega)}$ è una misura boreliana su Ω; inoltre, se K è compatto, esiste $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty$ tale che $\psi \geqslant \chi_K$, quindi dal passo 3. segue che $\mu(K) \leqslant \langle T, \psi\rangle < +\infty$;
5. se $K \subseteq \Omega$ è compatto, $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty$ e $\psi \leqslant \chi_K$, si ha $\langle T, \psi\rangle \leqslant \mu(K)$;
6. vale la (3.1): in questo passaggio si utilizza il Lemma 3.1.20;
7. si dimostra infine l'unicità della misura μ e per farlo si sfrutta il Teorema di B.Levi sulla convergenza monotona e il fatto che se due misure coincidono sugli aperti $A \subseteq \Omega$, allora esse coincidono su tutti gli insiemi $E \in \mathfrak{B}(\Omega)$. Così è conclusa la dimostrazione.

□

Serviranno anche dei risultati sulla decomposizione di misure, ma prima ricordiamo qualche definizione.

Definizione 3.1.22 (**Misura assolutamente continua**). *Siano $(X, \mathfrak{M})$ uno spazio misurabile e λ, μ due misure su $\mathfrak{M}$. Diciamo che μ è **assolutamente continua** rispetto a λ (e scriveremo $\mu << \lambda$), se*

$$\text{per ogni } E \in \mathfrak{M} \text{ tale che } \lambda(E) = 0, \quad \text{si ha} \quad \mu(E) = 0.$$

Definizione 3.1.23 (**Misura singolare**). *Siano $(X, \mathfrak{M})$ uno spazio misurabile e λ, μ due misure su $\mathfrak{M}$. Diciamo che μ è **singolare** rispetto a λ (e scriveremo $\mu \perp \lambda$), se esiste $S \in \mathfrak{M}$ tale che*

$$\lambda(S) = \mu(X \setminus S) = 0.$$

Teorema 3.1.24 (**Decomposizione della misura**). *Siano $(X, \mathfrak{M})$ uno spazio misurabile e λ, μ due misure σ-finite su $\mathfrak{M}$. Valgono allora i seguenti fatti:*

(i) esiste una ed una sola coppia $(\mu_{a,\lambda}, \mu_{s,\lambda})$ di misure su $\mathfrak{M}$ tale che $\mu = \mu_{a,\lambda} + \mu_{s,\lambda}$, $\mu_{a,\lambda} << \lambda$ e $\mu_{s,\lambda} \perp \lambda$;

(ii) esiste una ed una sola $\varphi \in M(X, \lambda; \mathbb{R})$ tale che $\varphi > 0$ e

$$\mu_{a,\lambda}(E) = \int_E \varphi \, d\lambda,$$

per ogni $E \in \mathfrak{M}$. Inoltre si ha

$$\int f \, d\mu = \int f\varphi \, d\lambda + \int f \, d\mu_{s,\lambda},$$

per ogni $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, f μ-integrabile e per ogni $f : X \to \mathbb{C}$, f μ-sommabile.

Per la dimostrazione, piuttosto laboriosa, si veda [1, Cap. I, Teorema 5.4].

All'inizio si pone $\nu = \lambda + \mu$ e si verifica che ν è una misura σ-finita su $\mathfrak{M}$. Inoltre, poichè una funzione misurabile è limite di una successione di funzioni semplici posirive e poichè vale il Teorema 3.1.15, non è difficile verificare[3] che

$$\int f\,d\nu = \int f\,d\lambda + \int f\,d\mu$$

per ogni $f : X \to [0, +\infty]$ $\mathfrak{M}$-misurabile.

Da qui in poi si sfruttano risultati, che non abbiamo riportato in questa Tesi, sulle distribuzioni di ordine zero.

Definizione 3.1.25 (**Decomposizione di Lebesgue e derivata di Radon-Nikodym**). *Siano $(X, \mathfrak{M})$ uno spazio misurabile e λ, μ due misure σ-finite su $\mathfrak{M}$. La coppia $(\mu_{a,\lambda}, \mu_{s,\lambda})$ di funzioni in $\mathcal{M}(\Omega)$, caratterizzata nel teorema precedente, si chiama **decomposizione di Lebesgue** di μ rispetto a λ.*

*Inoltre $\mu_{a,\lambda}$ si chiama **parte assolutamente continua** di μ rispetto a λ, mentre $\mu_{s,\lambda}$ si chiama **parte singolare** di μ rispetto a λ.*

Se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^N$ e $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, poniamo $\mu_a := \mu_{a,\mathcal{L}}$ e $\mu_s := \mu_{s,\mathcal{L}}$.

*Infine la $\varphi \in M(X, \lambda)$, caratterizzata nel teorema precedente, si chiama **derivata di Radon-Nikodym** di μ rispetto a λ e si denota con $\frac{d\mu}{d\lambda}$.*

Faremo uso anche del seguente importante

Teorema 3.1.26 (**Teorema di Radon-Nikodym**). *Siano $(X, \mathfrak{M})$ uno spazio misurabile e λ, μ due misure σ-finite su $\mathfrak{M}$ con $\mu << \lambda$.*

Allora si ha

$$\int f\,d\mu = \int f \frac{d\mu}{d\lambda}\,d\lambda,$$

per ogni $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, f μ-inregrabile e per ogni $f : X \to \mathbb{C}$, f μ-sommabile.

Dimostrazione. La coppia $(\mu, 0)$ verifica la (i) del Teorema 3.1.24, quindi $\mu_{a,\lambda} = \mu$ e $\mu_{s,\lambda} = 0$. Dal punto (ii), invece, discende la tesi. $\square$

3.2 Ulteriori proprietà delle funzioni monotone

Abbiamo ora gli strumenti per dimostrare il seguente risultato.

Teorema 3.2.1. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione crescente. Allora f è boreliana ed esiste una ed una sola misura $\mu \in \mathcal{M}(]a, b[)$ tale che*

$$\text{per ogni } g \in \mathcal{C}_0^\infty(]a, b[),\ -\int_a^b g' f\,d\mathcal{L} = \int_{]a,b[} g\,d\mu. \tag{3.2}$$

Inoltre per ogni $\alpha, \beta \in [a, b]$ con $\alpha \leqslant \beta$ risulta

$$f(\beta) - f(\alpha) \geqslant \mu(]a, b[)$$

e si ha l'uguaglianza se f è continua da destra in α e da sinistra in β;

[3]Infatti $\int \chi_E\,d\nu = \nu(E) = \lambda(E) + \mu(E) = \int \chi_E\,d\lambda + \int \chi_E\,d\mu$

Dimostrazione. Evidentemente
$$g \mapsto -\int_a^b g' f \, d\mathcal{L}$$
è una funzione lineare su $\mathcal{C}_0^\infty(]a,b[)$. Vogliamo utilizzare il Teorema 3.1.21 di rappresentazione di Riesz, perchiò adesso proviamo che quella funzione è monotona.

Sia $g \in \mathcal{C}_0^\infty(]a,b[)$, $g \geqslant 0$ e sia $g = 0$ fuori da un sottointervallo $[\alpha,\beta] \subseteq]a,b[$. Risulta
$$\begin{aligned}
&-\int_a^b h\big(g(x+1/h) - g(x)\big) f(x)\, d\mathcal{L}(x)\\
&= h\Big(-\int_\alpha^\beta g(x) f(x-1/h)\, d\mathcal{L}(x) + \int_\alpha^\beta g(x) f(x)\, d\mathcal{L}(x)\Big)\\
&= h\int_\alpha^\beta g(x)\big(f(x) - f(x-1/h)\big)\, d\mathcal{L}(x) \geqslant 0.
\end{aligned}$$
Passando ora al limite per $h \to \infty$, si deduce che
$$\text{per ogni } g \in \mathcal{C}_0^\infty(]a,b[),\ g \geqslant 0 \text{ si ha } -\int_a^b g' f \, d\mathcal{L} \geqslant 0,$$
quindi
$$\text{per ogni } g_1, g_2 \in \mathcal{C}_0^\infty(]a,b[),\ g_1 \leqslant g_2 \text{ si ha } -\int_a^b g_1' f \, d\mathcal{L} \leqslant -\int_a^b g_2' f \, d\mathcal{L}.$$
Ora, per il Teorema di rappresentazione di Riesz, esiste una ed una sola $\mu \in \mathcal{M}(]a,b[)$ tale che
$$\text{per ogni } g \in \mathcal{C}_0^\infty(]a,b[),\ \langle T, g\rangle = -\int_a^b g' f \, d\mathcal{L} = \int_{]a,b[} g \, d\mu.$$
Abbiamo dimostrato la prima parte del teorema.

Ora dimostriamo la seconda parte. Siano $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$ con f continua da destra in α e da sinistra in β. Sia $(\rho_h)_h$ una successione regolarizzante in $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ e sia $g_h \in \mathcal{C}_0^\infty(]a,b[)$ definita da
$$g_h(x) = \int_a^x \big(\rho_{3h^2}(\xi - \alpha - 1/h) - \rho_{3h^2}(\xi - \beta + 1/h)\big)\, d\mathcal{L}(\xi).$$
Allora $(g_h)_h$ è una successione di funzioni positive in $\mathcal{C}_0^\infty(]a,b[)$ che converge crescendo a $\chi_{]a,b[}$. Allora, per il ben noto Teorema di B.Levi sulla convergenza monotona, si ha
$$\lim_{h\to+\infty} \int_a^b g_h \, d\mu = \mu(]a,b[).$$
D'altronde (per ipotesi), per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che
$$\text{se } \alpha \leqslant x < \alpha + \delta, \text{ allora } f(x) - f(\alpha) < \varepsilon.$$
Allora per $h > 2/\delta$ si ha
$$\begin{aligned}
&\Big|\int_a^b \rho_{3h^2}(x - \alpha - 1/h) f(x)\, d\mathcal{L}(x) - f(\alpha)\Big|\\
&= \int_\alpha^{\alpha+\frac{2}{h}} \rho_{3h^2}(x - \alpha - 1/h)(f(x) - f(\alpha))\, d\mathcal{L}(x) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\lim_{h\to+\infty}\int_a^b \rho_{3h^2}(x-\alpha-1/h)f(x)\,d\mathcal{L}(x)=f(\alpha).$$

Con un ragionamento analogo su β, si prova che

$$\begin{aligned}\mu(]\alpha,\beta[) &= \lim_{h\to+\infty}\int_a^b g_h\,d\mu \overset{(3.2)}{=} \lim_{h\to+\infty} -\int_a^b g_h' f\,d\mathcal{L}\\ &= \lim_{h\to+\infty}\Big[\int_a^b \rho_{3h^2}(x-\beta+1/h)f(x)\,d\mathcal{L}(x) - \int_a^b \rho_{3h^2}(x-\alpha-1/h)f(x)\,d\mathcal{L}(x)\Big]\\ &= f(\beta)-f(\alpha).\end{aligned}$$

In generale, se $a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b$, esistono una successione (α_h) decrescente ad α ed una successione (β_h) crescente a β con f continua in α_h e in β_h. Allora si ha

$$f(\beta)-f(\alpha)\geqslant \lim_{h\to+\infty}(f(\beta_h)-f(\alpha_h)) = \lim_{h\to+\infty}\mu(]\alpha_h,\beta_h[)=\mu(]\alpha,\beta[).$$

Questo conclude la prova del teorema. □

3.3 Ulteriori proprietà delle funzioni $\mathcal{AC}$

Utilizzeremo, ora, il Teorema 3.2.1 appena dimostrato, insieme al Teorema 3.1.26 di Radon-Nikodym, per provare la seguente nuova caratterizzazione per le funzioni assolutamente continue.

Teorema 3.3.1 (Terza caratterizzazione di $\mathcal{AC}$). *Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione. Allora sono fatti equivalenti:*

(a) f è assolutamente continua;

(b) f è continua in a e b, a variazione limitata e $\mu<<\mathcal{L}$, dove μ è la misura associata a $x\mapsto \mathrm{V}_a^x(f)$ dal Teorema 3.2.1;

(c) f è derivabile $\mathcal{L}$-q.d. in $]a,b[$, f' è sommabile e

$$\text{per ogni } x\in[a,b]:\ f(x)=f(a)+\int_a^x f'\,d\mathcal{L}.$$

Dimostrazione. Partiamo dalla prima implicazione.

(a)⇒(b) Per quanto visto nel capitolo precedente, sappiamo che f è a variazione limitata. Sia E un boreliano $\mathcal{L}$-trascurabile in $]a,b[$. Allora esistono una successione crescente di compatti (K_n) ed un boreliano E_0 $\mathcal{L}$-trascurabile tali che

$$E=\Big(\bigcup_n K_n\Big)\cup E_0.$$

Per provare che $\mu<<\mathcal{L}$ è quindi sufficiente verificare che $\mu(K_n)=0$. Per il Teorema 2.2.6, la funzione variazione totale è assolutamente continua. Sia dunque $\varepsilon>0$ e sia $\delta(\varepsilon)>0$ conforme alla definizione di assoluta continuità. Poichè $\mathcal{L}(K_n)=0$, esiste un aperto A in $]a,b[$ tale che $K_n\subseteq A$ e $\mathcal{L}(A)<\delta(\varepsilon)$. Inoltre per la compattezza di K_n, possiamo supporre

$$A=\bigcup_{h=1}^k]x_h,y_h[,$$

con $a \leqslant x_1 < y_1 \leqslant \cdots \leqslant x_k < y_k \leqslant b$. Allora si ha

$$\sum_{h=1}^{k}(y_k - x_k) < \delta(\varepsilon),$$

quindi

$$\mu(K_n) \leqslant \mu(A) = \sum_{h=1}^{k} \mu(]x_h, y_h[) = \sum_{h=1}^{k} \Big(\overset{y_h}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) - \overset{x_h}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) \Big) < \varepsilon.$$

Ne segue che $\mu(K_n) = 0$ per l'arbitrarietà di ε.

(b)⇒(c) Essendo a variazione limitata, la funzione f è derivabile $\mathcal{L}$-q.d. in $]a, b[$ e f' è sommabile (per il Teorema di Jordan f è differenza di funzioni monotone). Siano

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\Big(\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) + f(x) \Big), \qquad f_2(x) = \frac{1}{2}\Big(\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) - f(x) \Big).$$

Se μ_1, μ_2 sono le misure associate a f_1 e f_2 dal Teorema 3.2.1, si ha

$$\begin{aligned} \text{per ogni } g \in \mathcal{C}_0^\infty(]a, b[),\ -\int_a^b g'(x) \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)\, d\mathcal{L}(x) &= -\int_a^b g'(f_1 + f_2)\, d\mathcal{L} \\ &= \int_{]a,b[} g\, d\mu_1 + \int_{]a,b[} g\, d\mu_2. \end{aligned}$$

Essendo unica la misura associata a $x \mapsto \mathrm{V}_a^x(f)$, deve essere

$$\text{per ogni } E \in \mathfrak{B}(]a, b[):\ \ \mu_1(E) + \mu_2(E) = \mu(E).$$

In particolare, poichè $\mu << \mathcal{L}$, si ha che $\mu_1 << \mathcal{L}$ e $\mu_2 << \mathcal{L}$ e inoltre f_1 e f_2 sono continue su $[a, b]$. Combinando il Teorema 3.2.1 con il Teorema 3.1.26, si deduce che

$$\begin{aligned} f(x) = f_1(x) - f_2(x) &= f_1(a) + \mu_1(]a, x[) - f_1(a) - \mu_1(]a, x[) \\ &= f_1(a) + \int_a^x f_1'\, d\mathcal{L} - f_2(a) + \int_a^x f_2'\, d\mathcal{L} = f(a) + \int_a^x f'\, d\mathcal{L}. \end{aligned}$$

Questo completa la dimostrazione poichè nel capitolo precedente avevamo già dimostrato che (c)⇒(a). □

Bibliografia

[1] Degiovanni M., *Istituzioni di analisi superiore. II modulo*, Brescia, a.a. 1997/98

[2] Lanconelli E., *Lezioni di analisi matematica 1*, Bologna, Pitagora Editrice Bologna, 1998

[3] Lanconelli E., *Lezioni di analisi matematica 2*, Bologna, Pitagora Editrice Bologna, 2000

[4] Pini B., *Primo corso di analisi matematica*, Bologna, CLUEB, 1971

[5] Pini B., *Secondo corso di analisi matematica*, Bologna, CLUEB, 1972

[6] Pini B., *Terzo corso di analisi matematica*, Bologna, CLUEB, 1977