

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Corso di Laurea in Fisica

MISURE DI CARATTERIZZAZIONE SU
UN PROTOTIPO DI LIDAR BASATO SU
MODULAZIONE PSEUDOCASUALE

Relatore:
Prof. Marco Prevedelli

Presentata da:
Mauro Borghesi

Sessione II
Anno Accademico 2013/2014

*A Paolo e Agostina, i miei genitori,
per il loro sostegno e il loro amore.*

Sommario

Un LiDAR è uno strumento di misura che sta vedendo uno sviluppo enorme negli ultimi decenni e sta dando risultati di grande utilità pratica. Abbiamo svolto alcune misure di distanza utilizzando uno strumento realizzato con materiale di recupero e un semplice software scritto da noi.

In una prima parte del lavoro, più teorica, si illustrerà il funzionamento dello strumento, basato sull'invio di fasci laser su bersagli opachi e sulla ricezione della loro riflessione. Si presterà particolare attenzione ai metodi sviluppati per poter sfruttare laser continui piuttosto che impulsati, che risulterebbero più costosi: le sequenze pseudocasuali di bit.

Nella parte sperimentale invece si mostrerà l'analisi dei dati effettuata e si commenteranno i risultati ottenuti osservando le misure, con lo scopo di verificare alcune ipotesi, fra cui si darà particolare attenzione al confronto delle diverse sequenze.

Lo scopo di questo lavoro è caratterizzare lo strumento tramite l'analisi delle misure e verificare l'asserzione dell'articolo [1] secondo cui particolari sequenze di bit (A1 e A2) darebbero risultati migliori se utilizzate al posto della sequenza pseudocasuale di lunghezza massima, M-sequence.

Indice

I	Introduzione	3
1	LiDAR	5
1.1	Principio di funzionamento	5
1.2	Usi del LiDAR	6
1.2.1	Climatologia	7
1.2.2	Controllo ambientale	8
1.2.3	Geologia e Paleontologia	8
II	Parte teorica	10
2	Sequenze pseudocasuali	11
2.1	Correlazione incrociata ed autocorrelazione	11
2.2	Linear-feedback shift register	13
2.3	Generazione di sequenze pseudocasuali con un LFSR	15
2.3.1	Sequenze massimali nel campo di Galois $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	16
2.3.2	L'autocorrelazione di sequenze pseudocasuali	18
2.4	Diverse sequenze	19
2.4.1	Le sequenze di lunghezza massima	19
2.4.2	Le sequenze A1 e A2	21
3	Il processo di misurazione	24
3.1	Ottica del processo	24
3.2	Migliorie delle sequenze A1 e A2	28
III	Parte sperimentale	31
4	Il nostro strumento	32
4.1	Ottiche	34

4.2	Elettronica e software	35
4.3	Conteggio dei fotoni	37
5	Analisi dati	40
5.1	Potenza in funzione della distanza	42
5.2	Numero di sequenze L	47
5.3	Confronto fra sequenze M ed A2	54
IV	Epilogo	59
6	Conclusioni	60
6.1	Altezza del picco in funzione della distanza	60
6.2	Variazione del numero L di sequenze	61
6.3	Diverse sequenze pseudocasuali	61

Parte I
Introduzione

Prefazione

IL PRESENTE LAVORO DI TESI è finalizzato a studiare le caratteristiche di uno strumento LiDAR allo scopo di mandarne uno con componenti migliori al CNR in Antartide per fare misure di concentrazione del pulviscolo atmosferico. Le misure realizzate da noi erano semplici misure di distanza, ma abbiamo comunque potuto verificare diverse ipotesi legate al funzionamento dello strumento.

Il LiDAR PRN-cw è dotato di una elettronica molto semplice che permette di modulare il segnale con cui si effettuano le misurazioni. Questa modulazione è basata sulle *sequenze pseudocasuali*, che permettono di effettuare queste misure con un laser continuo (non impulsato). La caratteristica di queste sequenze pseudocasuali è che seguono una matematica che ci permette di riconoscere da un segnale apparentemente casuale l'informazione che in realtà questo trasporta con sé, ovvero il tempo trascorso dalla sua emissione all'assorbimento da parte del rilevatore.

I risultati che cerchiamo sono in particolare:

- l'andamento dell'altezza del segnale rilevato dal rilevatore (un fotodiodo a valanga) in funzione della distanza;
- il comportamento del segnale in funzione del numero di misure;
- un test di sequenze pseudocasuali diverse da quella più comunemente usata, proposte al fine di eliminare il rumore di fondo dalle misure.

In merito al punto 3, ci riferiremo ad un articolo in cui un gruppo di ricerca ha proposto nuove sequenze denominate A1 e A2 che dovrebbero teoricamente eliminare del tutto il termine di rumore dal segnale ricevuto e ne testeremo una a titolo di esempio.

Abbiamo effettuato misure di distanza con il nostro LiDAR dal tetto del Dipartimento di Fisica e Astronomia di Bologna mirando bersagli a diverse distanze, con diversi numeri di sequenze lanciate e diverse sequenze pseudocasuali (massimale e A2). In questo modo abbiamo potuto raccogliere abbastanza dati per verificare le leggi che li regolano.

Presenteremo l'analisi dei dati raccolti con le nostre misure e mostreremo le conclusioni che abbiamo tratto basandoci su essa.

Capitolo 1

LiDAR

LiDAR È UN ACRONIMO per l'inglese *Light Detection and Ranging*, in perfetta analogia con RADAR.

Difatti, il funzionamento è sostanzialmente lo stesso: si lancia un fascio laser verso un bersaglio, il fascio viene diffuso e una piccola parte torna al mittente, dove un rilevatore la acquisisce. L'uso della luce visibile permette di “vedere” oggetti molto più piccoli rispetto alle onde radio, il che rende il LiDAR più adatto per svariate applicazioni. Vanno però sottolineate anche le difficoltà che sorgono nell'usare lunghezze d'onda visibili per la misurazione: infatti, la luce che colpisce un bersaglio non viene totalmente riflessa (i bersagli non sono completamente riflettenti ma soltanto opachi), ma diffusa su un angolo solido; la diffusione è peraltro prevalente sulla luce visibile più che sulle onde radio.

1.1 Principio di funzionamento

Il funzionamento dello strumento è, in linea di principio, estremamente semplice.

La sorgente laser spara un raggio verso il bersaglio, per esempio a distanza d ; il raggio viene diffuso e in parte torna al mittente dopo aver percorso nuovamente la stessa distanza d . Il tempo che intercorre dall'emanazione alla ricezione del segnale è quindi:

$$t_{\text{ric}} = \frac{2d}{c}. \quad (1.1)$$

Per i principi della fisica quantistica il fotodiodo non può rilevare una quantità di luce inferiore a un fotone. Bisogna perciò introdurre una valutazione della potenza retrodiffusa basata sul numero di fotoni. Infatti, ricordando il confronto con il RADAR introdotto precedentemente, va sottolineato che a parità di potenza una sorgente radio emette molti più fotoni di un laser, perché, essendo l'energia trasportata proporzionale alla frequenza e perciò inversamente proporzionale alla lunghezza d'onda, onde più lunghe - come le onde radio - saranno meno energetiche di onde corte. In più realizzare o

procurarsi un trasmettitore radio ad alta potenza (anche kW) è più facile che un laser di pari potenza. Con un laser che emana meno fotoni abbiamo dunque minore probabilità di poter rilevare un fotone retrodiffuso.

Sarebbe opportuno utilizzare laser impulsati, i quali, tramite meccanismi ottici, emanano impulsi luminosi estremamente brevi nel tempo (tipicamente pochi nanosecondi) e lasciano un “lungo” intervallo fra un impulso e l’altro. Tramite questi impulsi si potrebbe “riconoscere” un segnale in ingresso e valutarne il tempo di “andata e ritorno” dal dispositivo in modo da misurare la distanza. Tuttavia i laser impulsati hanno due inconvenienti: sono molto costosi e i rivelatori devono avere una banda dell’ordine dell’inverso della durata dell’impulso, cioè molto grande; perciò sono stati escogitati dei metodi per utilizzare laser “continui” (*continuous wave*, cw).

In pratica si modula il segnale in uscita accendendo e spegnendo l’alimentazione (senza cioè ricorrere a costose tecniche ottiche) con una sequenza pseudocasuale (detta in questa situazione rumore pseudocasuale o *pseudo-random noise*, PRN), di cui discuteremo nel capitolo successivo: questa tecnica si chiama dunque LiDAR PRN-cw.

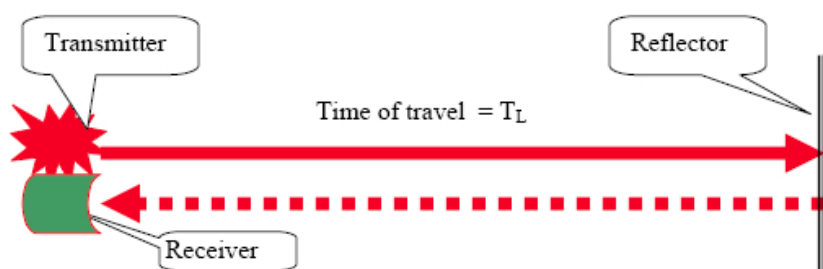


Figura 1.1: Semplice schema di funzionamento di un LiDAR. *Transmitter* indica il diodo laser, T_L quello che noi abbiamo chiamato t_{ric} , *Reflector* il bersaglio opaco e *Receiver* il fotodiodo rilevatore.

1.2 Usi del LiDAR

I LiDAR sono strumenti in una fase di grande sviluppo, specialmente negli ultimi decenni, in quanto i settori in cui possono essere utilizzati sono numerosi.

Ne è testimone la crescita esponenziale di servizi, anche pubblici in America, che ne fanno uso. Allo stesso modo, droni che trasportano LiDAR sono stati messi in commercio e stanno riscuotendo un discreto successo.^{[2][3][4][5][6]}

1.2.1 Climatologia

Questi strumenti possono essere usati per misurare diverse grandezze relative alle nuvole: altezza dal suolo, spessore, densità. Si tratta di una misurazione importante che sarebbe difficile fare con altri strumenti e che invece con buone ottiche risulta estremamente semplice ed efficace.

Questa applicazione è la più importante agli scopi della presente trattazione, visto che l'esemplare utilizzato in questa prova è un prototipo per un modello che sarà posto in Antartide presso il CNR locale per misurare e studiare il pulviscolo atmosferico fino a ~ 3 km di altezza.

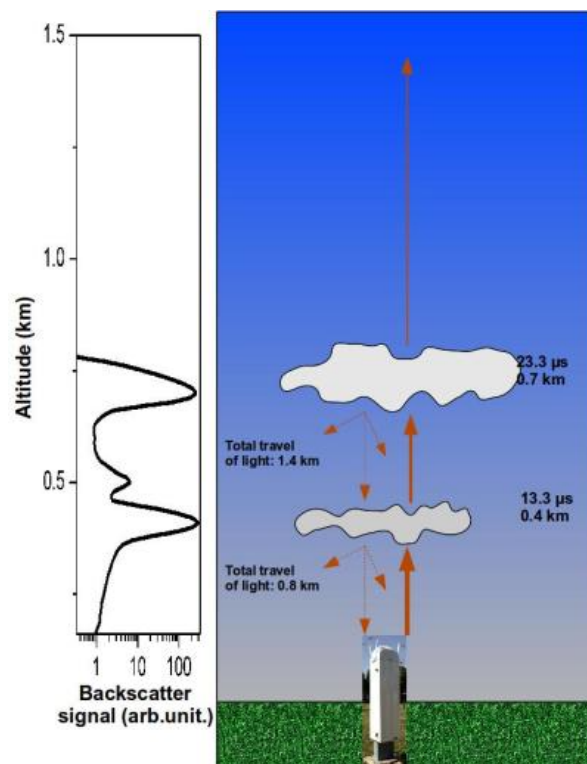


Figura 1.2: Nella misurazione delle nuvole il LiDAR approfitta della non completa opacità delle stesse, le quali lasciano che il segnale le attraversi parzialmente fino a una grande profondità. Attraverso la capacità della nuvola di riflettere si può anche valutarne la densità.

Si sfrutta in questa situazione la non completa opacità delle nuvole alla luce visibile: come si può vedere in figura 1.2, il segnale viene riflesso parzialmente e non totalmente, quindi attraversa la nuvola con potenza esponenzialmente decrescente ma comunque non nulla. In questo modo si riesce a ricostruire una sorta di spettro altimetrico della densità della nuvola, ricostruito basandosi sulla quantità di riflessione in funzione dell'altezza.

Addirittura, utilizzando per il laser sistemi di movimentazione controllati tramite gli angoli polari si può disegnare una mappa 3D di ciò che si misura.

1.2.2 Controllo ambientale

Grazie all'uso di onde relativamente corte è possibile realizzare un rilevatore di polveri sottili e gas serra tramite la tecnica LiDAR. Si usano due laser di lunghezze d'onda differenti per affinare la misura, cosicché l'assorbimento differente delle due lunghezze d'onda testimonia la presenza di diverse sostanze, che possono essere riconosciute tramite l'analisi del segnale ricevuto. Questo tipo di misure viene detto DIAL dall'acronimo *Differential absorption LiDAR*^[7].

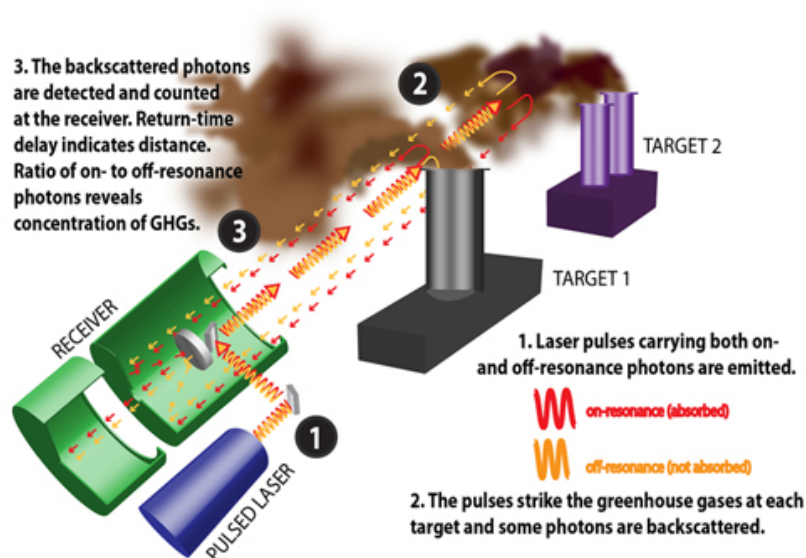


Figura 1.3: Misure DIAL applicate al rilevamento di polveri sottili e gas serra. Fonte: NIST.^[7]

1.2.3 Geologia e Paleontologia

Un LiDAR caricato su un velivolo può effettuare scansioni altimetriche di un territorio anche molto vasto in un breve lasso di tempo con una grande semplicità, mentre le misure geomorfologiche e altimetriche sono complicate e spesso richiedono un lungo

tempo per raggiungere tutti i punti del terreno (zone impervie, alte montagne, profondità acquatiche...). Addirittura, con una lunghezza d'onda adatta - una luce verde - si può osservare al di sotto della superficie acquatica ed effettuare misure di batimetria dal cielo. Si arriva a misurare asperità del terreno, vegetazione e costruzioni umane con una precisione fino a 10 cm, molto migliore di qualsiasi sistema a GPS. Con queste misure, un software adatto può ricostruire il profilo 3D di un terreno in formato compatibile con programmi di grafica (e.g. CAD)^[8].

In questo modo si possono perlustrare in breve tempo grandi aree inesplorate anche alla ricerca di terrapieni o altre opere paleoantropiche, come è stato fatto ad esempio per la città di Angkor nell'impero Khmer in Cambogia^[9], operazione che richiederebbe ad una osservazione diretta un lasso di tempo di decine di anni.

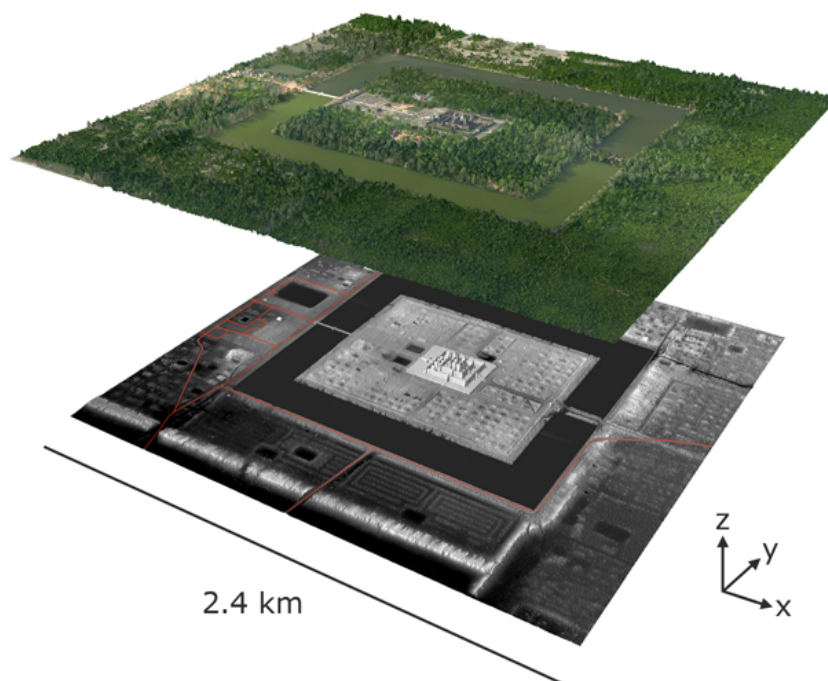


Figura 1.4: Ricostruzione del profilo altimetrico della città di Angkor realizzata dai dati raccolti con un LiDAR. Fonte: Nature News Blog.^[9]

Parte II
Parte teorica

Capitolo 2

Sequenze pseudocasuali

2.1 Correlazione incrociata ed autocorrelazione

È UTILE, ai fini di conoscere le proprietà delle sequenze pseudocasuali, di cui discuteremo ampiamente nel seguito, definire l'operazione di *correlazione incrociata* o *cross-correlation* che indicheremo con il simbolo \star . Date due funzioni f e g di dominio \mathcal{D} , la loro funzione di correlazione è:

$$(f \star g)(y) = \int_{x, x+y \in \mathcal{D}} f^*(x)g(x+y) dx \quad (2.1)$$

Le caratteristiche dell'operazione di cross-correlation sono simili a quelle della convoluzione. Infatti, c'è una stretta relazione fra le due applicazioni:

$$f(t) \star g(u) = f^*(-t) * g(u), \quad (2.2)$$

e addirittura, se f è Hermitiana, le due operazioni si equivalgono:

$$f \star g = f * g, \quad (2.3)$$

dove il simbolo $*$ indica l'operazione di convoluzione. In analogia al teorema della convoluzione, la cross-correlation è legata alla trasformata di Fourier:

$$\mathfrak{F}(f \star g) = (\mathfrak{F}f)^* \times (\mathfrak{F}g). \quad (2.4)$$

Questa proprietà particolare si abbina ottimamente all'algoritmo FFT (Fast Fourier Transform) e si utilizza spesso per il calcolo numerico.

Naturalmente, come per la convoluzione si può definire la stessa operazione per funzioni discrete sostituendo l'integrale con una sommatoria:

$$(f \star g)(y) = \sum_{\mathcal{D}} f(x)g(x+y). \quad (2.5)$$

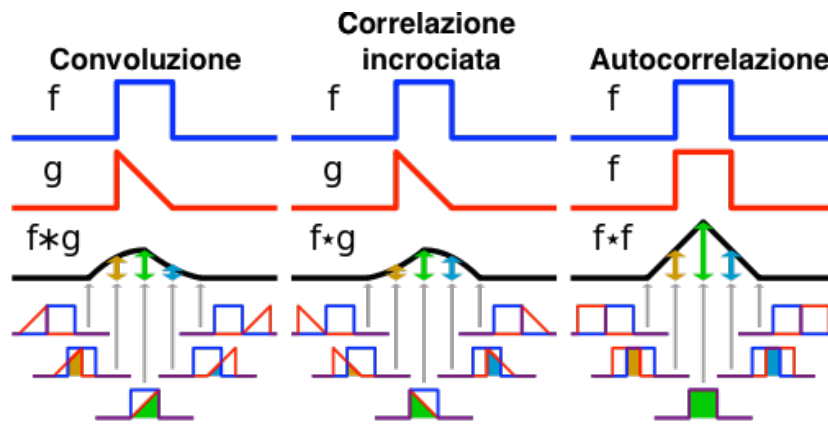


Figura 2.1: Da sinistra a destra: convoluzione, cross-correlation e autocorrelazione di semplici funzioni a supporto compatto. Fonte: Wikipedia^[10]

La funzione di *autocorrelazione* è semplicemente la correlazione incrociata di una funzione (o una successione, come nel nostro caso) con se stessa.

L'autocorrelazione ha alcune proprietà curiose:

1. è una funzione pari per funzioni reali:

$$(f \star f)(t) = (f \star f)(-t) \quad \text{se } f(t) \in \mathbb{R}; \quad (2.6)$$

2. è una funzione hermitiana per funzioni complesse:

$$(f \star f)(t) = (f \star f)(-t)^* \quad \text{se } f(t) \in \mathbb{C}; \quad (2.7)$$

3. è piccata nell'origine, cioè $|(f \star f)(t)| \leq (f \star f)(0) \forall t \in \mathcal{D}$ sia per funzioni continue che discrete;
4. per funzioni periodiche è anch'essa periodica con lo stesso periodo;
5. è perfettamente analoga a una δ di Dirac per segnali di rumore bianco (vedremo più avanti che questa proprietà risulta nel nostro caso fondamentale).

Questa operazione gode della seguente proprietà "distributiva": l'autocorrelazione della correlazione di due funzioni f e g è la correlazione delle autocorrelazioni di f e g , ovvero:

$$(f \star g) \star (f \star g) = (f \star f) \star (g \star g). \quad (2.8)$$

È una funzione che trova applicazioni in geostatistica, econometria, ma a noi interessa solamente l'utilizzo che se ne fa in elettronica, nell'analisi dei segnali. Questa infatti permette di confrontare un segnale in un istante t con lo stesso segnale traslato di un intervallo di tempo Δt ^[10].

2.2 Linear-feedback shift register

Un registro a scorrimento (*shift register*) è una sequenza di memorie a 1-bit - tipicamente flip-flop di tipo D, *delay* - che ad ogni ciclo di clock fanno, appunto, *scorrere* ogni bit da una cella alla successiva.

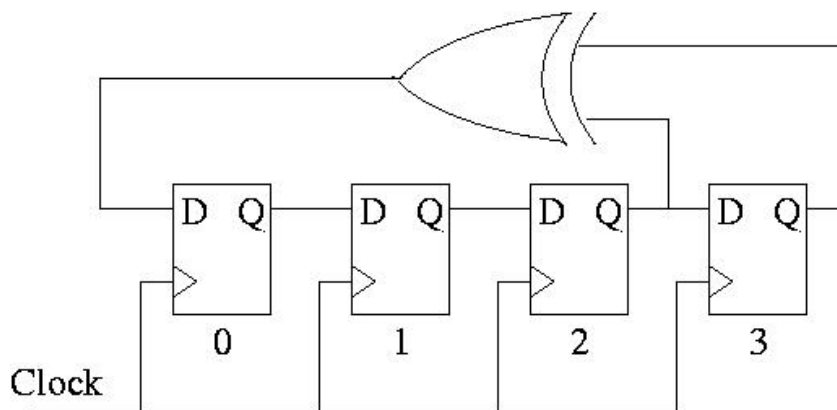
Si tratta di registri comunemente utilizzati in numerosissime applicazioni informatiche, specie nelle operazioni di lettura/scrittura, nelle conversioni di processi da seriali a paralleli e viceversa o nel trasferimento di dati da un dispositivo lento a uno veloce, dove fungono da buffer di memoria temporanea o circuiti di delay.

I registri a scorrimento a retroazione lineare (*linear-feedback shift register*, LFSR) sono shift register in cui l'input è una funzione lineare dello stato precedente del registro. Esistono LFSR in cui l'input modifica non solo il bit iniziale, ma più bit in posizioni arbitrarie, fissate al momento della costruzione del dispositivo. In questa trattazione tuttavia non ci interesseremo a quest'ultimo tipo di dispositivi.

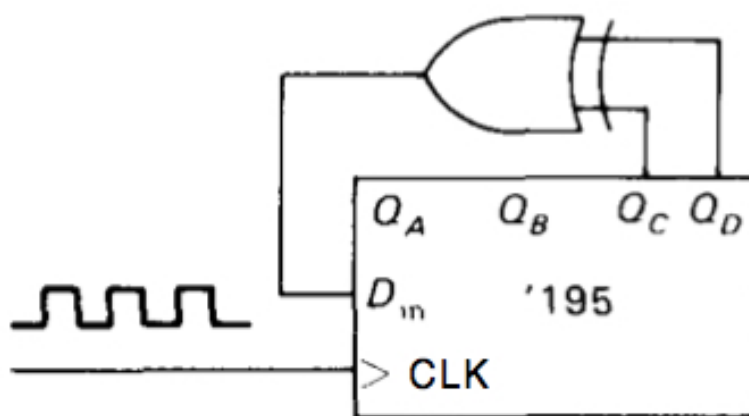
Come funzione dello stato precedente si utilizza spesso l'*or esclusivo* XOR di alcuni dei bit appartenenti allo stato precedente. Le posizioni di questi ultimi vengono chiamate *tap positions*. Se fra i bit nelle tap positions quelli accesi sono in numero pari lo XOR darà come risultato 0; viceversa, se sono in numero dispari il risultato è 1: la funzione XOR ha dunque una funzione di riconoscimento di parità. Allo stesso modo si può usare, anche se più raramente, la funzione complementare, cioè XNOR.

Lo stato dello shift register ad un determinato istante è determinato dallo stato dei flip-flop. Uno shift register da n flip-flop ha quindi 2^n stati disponibili. Prendendo ad esempio il LFSR descritto in figura 2.2 che sarà ripreso nel seguito in cui l'input del MSB (*most significant bit*) è l'XOR dei due bit meno significativi bisogna stare attenti ad escludere da questa trattazione lo stato del LFSR tutto nullo, in quanto questo non può mutare perché $\oplus 0 = 0$ (allo stesso modo, se si usa XNOR non si può permettere lo stato "tutti 1"). Allora gli stati possibili per un LFSR si riducono a $N = 2^n - 1$.

Anche questi dispositivi sono utilizzati per molte applicazioni, in informatica ma soprattutto in elettronica. Si tratta infatti di dispositivi programmabili sia in software che in hardware ed utilizzati per la produzione di numeri pseudocasuali e perciò utili per algoritmi di riconoscimento come il codice di Hamming o tipici di tecnologie quali UMTS (a partire dal più vecchio GSM, basato su A5/1, un dispositivo composto proprio da tre LFSR, lunghi 18, 21 e 22 bit, collegati) e GPS. Quest'ultimo celebre sistema di geolocalizzazione si basa sul riconoscimento del segnale differente proveniente dai vari satelliti in orbita attorno al pianeta: ognuno invia la propria differente sequenza



(a) *LFSR visto come shift register.*



(b) *LFSR visto come PROM. Fonte: The art of electronics^[12]*

Figura 2.2: Un esempio di LFSR a 4-bit. In un LFSR da 4 bit gli stati possibili sono $2^4 = 16$. Tuttavia bisogna scartare lo stato “0000” (o “1111” se il feedback fosse un XNOR: non è questo il caso). Questo semplice esemplare ha come feedback al bit 0 la funzione XOR operata fra gli ultimi due bit, 2 e 3 nell’immagine sopra, Q_C e Q_D in quella sotto.

pseudocasuale che viene riconosciuta dal dispositivo. Si utilizzano per questo scopo sequenze pseudocasuali “ortogonali”, cioè scorrelate fra loro, in modo che i segnali non interferiscano l’uno con l’altro e il ricevitore possa “riconoscere” qual è l’emettitore da cui sta ricevendo.

Inoltre più LFSR collegati in parallelo possono comporre cifrari a flusso. Non si può usare un singolo shift register in crittografia perché troppo facile da decrittare. Tuttavia, presi più LFSR si può dare vita a un cifrario sufficientemente complesso: si sceglie arbitrariamente un output da ogni LFSR e si combina con gli altri tramite un’operazione possibilmente non lineare per dare in output una sequenza di bit difficilmente riconoscibile (pseudocasuale). Si è accennato alla non-linearità della funzione che dà l’output perché l’attacco più comune a un sistema di cifratura è un attacco di correlazione: un’operazione non lineare rende più difficoltoso il riconoscimento di una sequenza tramite un attacco di questo genere. Un attacco del genere, ha lo scopo di conoscere lo stato interno di un LFSR in modo da decrittare pezzo per pezzo tutto il sistema: difatti, per esempio, un cifrario composto da tre LFSR da 16 bit ha $2^{16+16+16} = 2^{48}$ stati possibili, ma se conosciamo lo stato di uno degli shift register questo numero si riduce a $2^{16+16} + 2^{16}$ e se ne decrittassimo due si ridurrebbe addirittura a $2^{16} + 2^{16} + 2^{16} = 3 \times 2^{16}$, il che rende estremamente più facile la decrittazione.^[11]

La funzione però più importante ai fini della presente trattazione, tuttavia, non è di tipo informatico ma piuttosto elettronico: i LFSR infatti sono largamente utilizzati come generatori di sequenze pseudocasuali e quindi, con un filtro passa-basso opportunamente applicato, di rumore bianco gaussiano limitato in banda. Scegliendo un filtro passa-basso opportuno, cioè a frequenza circa 5-10% della frequenza di clock^[12], la sequenza pseudocasuale generata realizza un rumore di voltaggio analogico limitato in banda (fra la frequenza di clock divisa per N e la frequenza di clock originale, regolabile dunque variando il segnale di clock) con spettro e ampiezza fissati a prescindere dal resto del circuito a cui è collegato. Questo è un dato importante, perché ci sono altri generatori di rumore bianco (particolari diodi e transistori), ma nessuno è così stabile e versatile come le sequenze pseudocasuali generate con LFSR. Essendo lo spettro di questo rumore piatto fino a diversi MHz, si può usare questo rumore analogico anche come filtro.

2.3 Generazione di sequenze pseudocasuali con un LFSR

Preso uno stato iniziale del LFSR, quest’ultimo continua a scorrere da uno stato all’altro. Tali stati si possono deterministicamente prevedere conoscendo la funzione feedback e la posizione del bit di output (solitamente è il LSB, *least significant bit*, ma non sempre). Tuttavia, non conoscendo queste informazioni l’output del dispositivo può sembrare casuale: questa apparenza è data dalla lunghezza della sequenza a_i di output, che ha

un periodo così grande che riconoscerne la ripetitività è molto difficile. In sostanza presa una porzione qualsiasi di una sequenza è impossibile riconoscere un algoritmo di previsione dell'elemento successivo: si tratta della simulazione di una macchina ideale lancia-monete, cioè senza memoria dell'uscita precedente. Per questa apparente casualità queste sequenze di bit vengono chiamate *sequenze pseudocasuali*.

Assegnato un valore iniziale (che, ricordiamo, deve essere non nullo) chiamato *seed* al LFSR e avviato il clock si dà quindi luogo in output ad una sequenza di bit, appunto, pseudocasuale. Questa può avere diverse lunghezze, dipendenti dalla funzione feedback del LFSR. Si dice che la sequenza è *massimale* quando assume il massimo numero di valori possibile per il LFSR e il numero n di flip-flop disponibili, cioè $2^n - 1$ (va sempre escluso lo stato "tutti 0"); va però sottolineato che non tutti i feedback danno sequenze massimali.

2.3.1 Sequenze massimali nel campo di Galois $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Introduciamo alcune definizioni utili per la comprensione della matematica legata a queste applicazioni.

Definizione 1 (Numero primo di Mersenne). Un numero scrivibile nella forma $2^k - 1$ viene detto *numero di Mersenne*. Se si scopre che un numero di Mersenne è primo, questi viene indicato con il simbolo M_k secondo la notazione precedente.

Numerosi di questi numeri sono primi, tant'è che si è creato un progetto chiamato *GIMPS*, ovvero *Great Internet Mersenne Prime Search*, per la ricerca dei numeri primi di Mersenne. Ad oggi il numero primo più grande conosciuto, proprio grazie a GIMPS, è un numero di Mersenne^[13].

Una proprietà importante dei numeri di Mersenne è che se $2^q - 1$ è primo \Rightarrow anche q è primo, ma non è sempre vero il viceversa: infatti, 11 è primo ma $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$.

Definizione 2 (Campo di Galois o campo finito). Si dice *campo di Galois* o *campo finito* un campo dotato di un numero finito di elementi. Si dice *ordine* di tale campo il numero di elementi in esso contenuti. Un campo di Galois di ordine p si indica con la notazione $\text{GF}(p)$.

I campi di Galois più utilizzati sono gli insiemi di numeri interi *modulo- n* , cioè $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Limiteremo per l'interesse di questo lavoro lo studio al solo campo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, cioè gli interi a modulo-2.

Definizione 3 (Polinomi primitivi). In $\text{GF}(p^m)$ si dice *primitivo* (nella teoria matematica dei campi) un polinomio di grado m che ha come radice $\gamma \in \text{GF}(p^m)$ tale che $\{0, 1, \gamma, \gamma^2, \gamma^3, \dots, \gamma^{p^m-2}\} \equiv \text{GF}(p^m)$. Si indica con $\mathbb{F}_n[x]$ lo spazio dei polinomi primitivi nello spazio degli interi a modulo- n $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Seguono da questa definizione alcune proprietà:

- ogni polinomio primitivo è irriducibile;
- il termine noto è sempre non nullo, perché altrimenti si potrebbe raccogliere x , in conflitto con quanto affermato sinora;
- un polinomio irriducibile di grado m su $\text{GF}(p)$ dove p è primo è primitivo se l'intero n più piccolo affinché sia divisore di $x^n - 1$ è $n = p^m - 1$.
- su $\text{GF}(p)$ ci sono esattamente ν polinomi primitivi, dove $\nu = \varphi(p^m - 1)/m$ e $\varphi(j)$ è la *funzione totiente* di Euler che ha come valore il numero di interi coprimi con j minori di j .
- ogni polinomio primitivo ha m radici in $\text{GF}(p^m)$ e ognuna di queste radici è di ordine $p^m - 1$. Sia γ una delle suddette radici; risulta dunque che γ è una radice $(p^m - 1)$ -esima dell'unità in $\text{GF}(p^m)$.

$$\gamma^{p^m - 1} = 1; \quad (2.9)$$

$$\gamma^j \neq 1 \quad 0 < j < p^m - 1. \quad (2.10)$$

Risultano particolarmente efficienti nell'uso come polinomi primitivi e semplici i trinomi^[14]. Questi infatti hanno una caratteristica importante:

- se r è un numero che genera un numero primo di Mersenne (i.e. $2^r - 1$ è primo), un trinomio di grado r è primitivo se e solo se è irriducibile.

Questa matematica applicata ai LFSR ci permette di valutare a priori se una determinata configurazione di feedback darà una sequenza massimale o meno.

Diciamo che il polinomio $g(x)$ in $\mathbb{F}_2[x]$ è *caratteristico*, *generatore* o *di feedback* del LFSR se ha come coefficienti di x^n 1 o 0 a seconda che l'elemento n -esimo (contato a partire dal MSB, *most significant bit*) del registro entri o meno nell'XOR che gestisce il feedback. In più deve essere 1 anche il termine noto perché rappresenta il bit in cui si andrà a scrivere. Ad esempio, in uno shift register in cui il feedback è l'XOR degli ultimi due bit abbiamo il polinomio caratteristico $g(x) = x^n + x^{n-1} + 1$.

Va sottolineato che il polinomio deve sempre essere di grado massimo consentito dal LFSR ($2^n - 1$) e che il termine noto deve sempre essere 1. Definiamo allora il polinomio $p(x) = x^{2^n - 1} + 1$, il più semplice che soddisfa queste condizioni.

In uno shift register da n bit abbiamo quindi polinomi di grado $2^n - 1$ che si possono fattorizzare fino al grado n . Ad esempio, sia $n = 3 \Rightarrow 2^3 - 1 = 7$, $p(x) = x^7 + 1 = (x + 1)(x^3 + x^2 + 1)(x^3 + x + 1)$, in cui compaiono tre diversi polinomi. Il primo va scartato perché ha grado troppo basso; gli altri due sono buoni candidati come polinomi generatori. In sintesi, fattorizzando il binomio $p(x)$ ottengo polinomi di grado n

che generano sequenze massimali e altri di grado più basso: i primi sono i candidati polinomi caratteristici del LFSR. Le sequenze non massimali sono generate dai polinomi riducibili^[15].

I polinomi generatori si chiamano così perché in essi è contenuta l'informazione per costruire il LFSR: difatti, i coefficienti non nulli del polinomio (escluso il termine noto) rappresentano le tap positions che generano una sequenza pseudocasuale di lunghezza massimale. Per l'esempio precedente del LFSR di dimensione 4, infatti, le sequenze di lunghezza massimale vengono generate usando come tap positions [2,3] o [1,3] (contando a partire da 0).

Si può osservare che, scelto un polinomio primitivo $g(x)$, gli stati del LFSR determinato da questo polinomio sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi del campo di Galois $\mathbb{F}_2[x]/g(x)$, cioè lo spazio di tutti i polinomi di $\mathbb{F}_2[x]$ modulo $g(x)$. Allora risulta che ogni polinomio primitivo di $\text{GF}(2^n - 1)$ è generatore di un LFSR che dà una sequenza massimale, mentre i polinomi riducibili danno sequenze brevi.

Scelto un LFSR che genera una sequenza massimale con le sue tap positions univocamente determinate dal suo polinomio caratteristico, si può trovare un altro polinomio triviale. Sia m il grado del polinomio e $[m, A, B, C]$ il set delle tap positions del LFSR. "Riflettendo" le tap positions otteniamo un nuovo set di tap positions altrettanto massimale:

$$[m, A, B, C] \longrightarrow [m, m - C, m - B, m - A]$$

$$g(x) = x^m + x^A + x^B + x^C + 1 \longrightarrow h(x) = x^m + x^{m-C} + x^{m-B} + x^{m-A} + 1$$

In questo modo otteniamo due risultati molto importanti:

1. dato un polinomio caratteristico di un LFSR che genera una sequenza massimale possiamo trovare un altro polinomio che genera un'altra sequenza analoga, perciò altrettanto lunga semplicemente "riflettendo" le tap positions;
2. gli spazi generati applicando l'operazione di modulo a $\mathbb{F}_2[x]$ con i due polinomi sono esattamente lo stesso spazio in cui possiamo enumerare tutti gli stati disponibili per uno shift register di dimensione data dal grado m dei polinomi: risulta cioè che $\mathbb{F}_2[x]/g(x) = \mathbb{F}_2[x]/h(x)$.

2.3.2 L'autocorrelazione di sequenze pseudocasuali

La caratteristica delle sequenze pseudocasuali massimali che le rende così adatte per la presente applicazione è che esse sono " δ -correlate", vale a dire la loro autocorrelazione è una δ di Kronecker. Infatti, definita $a'_i = 2a_i - 1$ (cioè una sequenza dove al posto di ogni 0 si è messo -1), risulta:

$$\sum_{i,j} a'_i a'_j = \delta_{i,j}. \quad (2.11)$$

Questo risultato nasce dalla matematica della trasformata di Fourier. È infatti noto che la trasformata di una funzione costante approssima una funzione δ quanto più il dominio è grande. Di conseguenza, quanto più è larga la banda costante di spettro del rumore, tanto più la funzione approssimerà la δ . Come si chiarificherà nel Capitolo successivo, una sequenza pseudocasuale si comporta come un rumore bianco: ha cioè spettro piatto su un dominio ridotto, in questo caso il campo di Galois dei primi N numeri interi, $\text{GF}(N)$. Studiando la cross-correlazione su questo spazio toroidale in cui tutti i numeri sono in modulo N , lo spettro appare interamente piatto, perciò la δ -correlazione non è approssimata, ma è analitica.

L'importanza di questa proprietà delle sequenze pseudocasuali è la capacità di demodulare facilmente il segnale. Il segnale ricevuto è per coerenza modulato con la stessa sequenza del segnale in uscita; allora il calcolatore processa i dati e riconosce, proprio tramite l'operazione di autocorrelazione, quanto tempo (in termini di cambi dell'elemento della sequenza) è passato dall'invio alla ricezione dello stesso segnale. L'applicazione raccoglie i dati e li grafica mostrando il picco della δ , permettendoci di misurare in numero di variazioni dell'elemento di successione la distanza temporale fra il segnale inviato (di sequenza nota) e il segnale ricevuto (misurato).

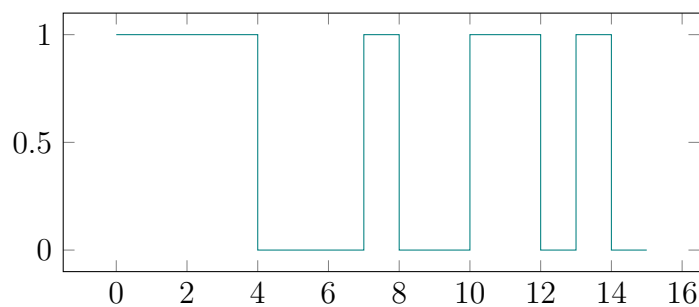
Nel caso di sequenze pseudocasuali massimali la funzione di autocorrelazione è una δ , ma sono state proposte, come si illustrerà nel prossimo paragrafo, nuove sequenze non massimali ma con funzioni di autocorrelazione particolari, anch'esse adatte al riconoscimento di un segnale modulato.

2.4 Diverse sequenze

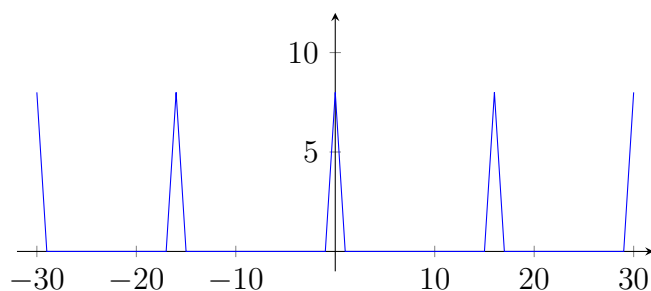
2.4.1 Le sequenze di lunghezza massima

Riprendiamo alcune caratteristiche delle sequenze pseudocasuali massimali, che da ora in avanti chiameremo *sequenze di lunghezza massima* o *M-sequence*, aggiungendo qualche proprietà non ancora dichiarata.

- Viene generata dall'applicazione delle regole dei polinomi primitivi del campo di Galois $\mathbb{F}_2[x]$ ai polinomi caratteristici del LFSR.
- Una M-sequence generata da un LFSR da n celle è lunga $2^n - 1$, ovvero ha un numero N di elementi pari al numero di stati non nulli disponibili per lo shift register.
- Il numero di elementi di una M-sequence è sempre, per costruzione, dispari: ciò significa che gli 1 sovrabbondano rispetto agli 0. Per la precisione, abbiamo 2^{n-1} “uni” e $2^{n-1} - 1$ “zeri”.



(a) Un esempio di sequenza M .



(b) L'autocorrelazione della sequenza M , ripetuta alcune volte.

Figura 2.3: Sequenza M generata da un LFSR a 4-bit, perciò a 15 elementi.

- Se si osservano le sequenze di 1 consecutivi (“*runs*”) esse seguono la seguente legge: metà sono lunghe 1, un quarto sono lunghe 2, un ottavo 3 e così via. Praticamente la probabilità di una run di essere lunga η è $2^{-\eta}$. Le runs di 0 seguono circa la stessa legge, ma va sistemata per sopperire all’assenza di uno 0. In pratica questo significa che la probabilità di uscita di uno stato piuttosto che l’altro non dipende dallo stato precedente ma è sempre $\frac{1}{2}$.
- Le sequenze pseudocasuali possono essere usate come generatori di rumore di tensione bianco, cioè con spettro di potenza piatto entro un certo dominio che però si può considerare l’intero spazio utilizzando l’operazione di modulo- N e riducendo così lo spazio a un campo finito di ordine N .
- L’autocorrelazione di una funzione a spettro “bianco” come questa è a δ .

Data una M-sequence a_i , ricordiamo la sequenza a'_i , in cui ad ogni 0 è sostituito -1. Allora risulta:

$$\sum_{i=0}^{N-1} a_i = \frac{N+1}{2}, \quad (2.12)$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} a'_i = 1. \quad (2.13)$$

Riportiamo la proprietà di δ -correlazione per le M-sequence in forma più esplicita:

$$\phi_{a,a'}(j) = (a \star a')_j = \sum_{i=0}^{N-1} a_i a'_{i+j} = \begin{cases} \frac{N+1}{2}, & j = 0 \\ 0, & j \neq 0 \end{cases}. \quad (2.14)$$

2.4.2 Le sequenze A1 e A2

Si sono cercate nuove sequenze per avere lo stesso numero di 0 e di 1, caratteristica che dovrebbe permettere di eliminare del tutto il rumore che il fondo imporrebbe alle misure (v.paragrafo 3.2).

Le sequenze A1 e A2 proposte nel riferimento [1] sono delle sofisticazioni della sequenza M. Al confronto con quest'ultima, risultano dotate di funzioni di autocorrelazione con picchi più alti e sia positivi che negativi.

La sequenza A1 b_i è definita, a partire dalla sequenza M a'_i :

$$b'_i = (-1)^i a'_i \quad i = 0, 1, \dots, 2N - 1 \quad (2.15)$$

(si ricorda che l'apice ' indica che gli 0 sono sostituiti da -1).

La funzione di autocorrelazione ha una forma diversa dalla δ :

$$\phi_{b,b'}(j) = \begin{cases} N & j = 0 \\ 1 & j = 2i - 1 \\ -1 & j = 2i \\ -N & j = N \end{cases}. \quad (2.16)$$

La sequenza A2 c_i è definita in modo molto simile:

$$c'_i = \begin{cases} a'_i & i = 4m, 4m + 1 \\ -a'_i & i = 4m + 2, 4m + 3 \end{cases} \quad m = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (2.17)$$

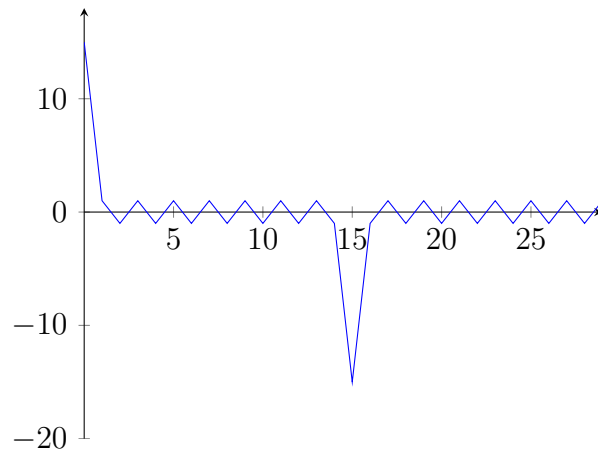


Figura 2.4: Autocorrelazione di una sequenza A1 generata con una M -sequence da 15 elementi.

La funzione di autocorrelazione ha la forma:

$$\phi_{c,c'}(j) = \begin{cases} 2N & j = 0 \\ 2 & j = 4i + 2 \\ 0 & j = 2i - 1 \\ -2 & j = 4i \\ -2N & j = 2N \end{cases} \quad (2.18)$$

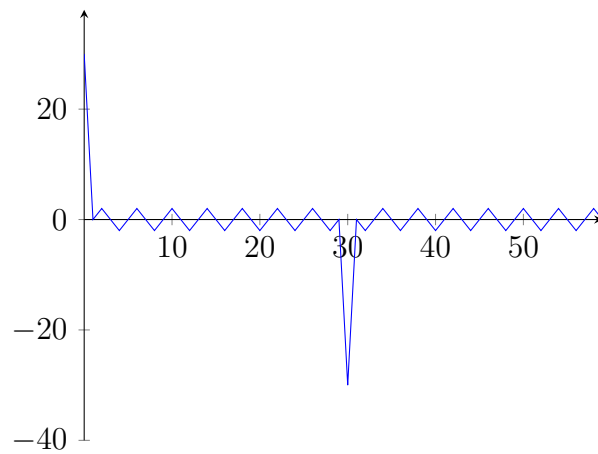


Figura 2.5: Autocorrelazione di una sequenza A2 generata con una M -sequence da 15 elementi.

Queste due sequenze risultano, oltre che dotate di un numero pari di elementi, più lunghe della sequenza M da cui nascono: infatti, detto N il numero di elementi della sequenza M , la $A1$ è lunga $2N$ e la $A2$ addirittura $4N$.

Risulta dunque relativamente semplice generare queste due sequenze a partire da una sequenza di lunghezza massima.

Capitolo 3

Il processo di misurazione

3.1 Ottica del processo

SIAMO ORA PRONTI a studiare la fisica del LiDAR. Ciò che analizzeremo è l'interazione della luce inviata dal laser con i bersagli (nel nostro caso alberi ed edifici, ma anche pulviscolo, aerosol, costruzioni, fondali marini. . .) nell'analisi del segnale ricevuto dal fotodiodo.

La luce retrodiffusa verso il fotodiodo sarà funzione della potenza emessa e della capacità di riflessione del bersaglio. Siano $y(t)$ il segnale ricevuto dal fotodiodo all'istante t ; $x(t)$ il segnale inviato dal laser, opportunamente modulato attraverso l'uso delle sequenze pseudocasuali^[16]. La legge per y è:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t')g(t') dt' + R(t) = (x * g)(t) + R(t), \quad (3.1)$$

dove g è la funzione di risposta del bersaglio e R è il rumore di fondo. In questa scrittura facciamo già un'ipotesi, ovvero che il rumore sia di tipo additivo: esistono infatti altri tipi di rumore, ad esempio moltiplicativo, di cui tuttavia non ci occuperemo in questa trattazione.

Essendo questa tecnica basata su laser non impulsati, non ci interessa la potenza di picco ma la potenza che il laser riesce ad emanare continuamente: il nostro diodo laser ha una buona potenza, ma per rimanere generici la indicheremo con il simbolo P_0 . Il segnale inviato dal laser $x(t)$ è dunque la potenza P_0 , continua, modulata da una sequenza pseudocasuale con la forma di funzioni a gradino:

$$x(t) = P_0 \sum_{j=0}^{N-1} a_j \chi_{[0, \tau_c]}(t - j\tau_c), \quad \chi_{\Gamma}(s) = \begin{cases} 1 & \text{se } s \in \Gamma \\ 0 & \text{se } s \notin \Gamma \end{cases} \quad (3.2)$$

dove si è indicato con a_i la sequenza pseudocasuale, con χ_{Γ} la funzione caratteristica dell'insieme Γ (in questo caso i Γ sono intervalli di larghezza τ_c) e con τ_c la durata di

ogni elemento di sequenza, cioè l'inverso della frequenza ω di funzionamento del LiDAR; quest'ultima definisce la risoluzione dello strumento, come si vedrà nel Capitolo 4. N è sempre il numero di elementi nella sequenza, $2^n - 1$.

Allo stesso modo possiamo rappresentare in serie anche le funzioni y , R e g , opportunamente sostituita da $G = \tau_c \times g$:

$$y(t) = \sum_{j=0}^{N-1} y_j \chi_{[0, \tau_c]}(t - j\tau_c), \quad (3.3)$$

$$R(t) = \sum_{j=0}^{N-1} R_j \chi_{[0, \tau_c]}(t - j\tau_c), \quad (3.4)$$

$$G(t) = \tau_c g(t) = \sum_{j=0}^{N-1} \tau_c g_j \chi_{[0, \tau_c]}(t - j\tau_c) \quad (3.5)$$

dove y_j, R_j, g_j sono i valori delle rispettive funzioni presi all'istante $t = j \cdot \tau_c$. Le successioni sono "circolari" su modulo N , cioè dopo l' N -esimo elemento si riparte dal primo.

L'equazione per la potenza retrodiffusa y (3.1) si semplifica quindi in:

$$y_n = P_0 \sum_{j=0}^{N-1} a_{n-j} G_j + R_n. \quad (3.6)$$

Come è noto dall'analisi statistica, se l'errore statistico è più influente di quello stimato direttamente "a priori" allora mediare un valore su un grande numero di misure assicura una stima più precisa del suddetto valore. Si ripete dunque la stessa sequenza L volte e si usa la media come miglior stima della misurazione:

$$\bar{y}_n = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L y_{n+N(j-1)}. \quad (3.7)$$

Allo stesso modo possiamo definire i valori medi di G e R :

$$\bar{G}_n = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L G_{n+N(j-1)}, \quad \bar{R}_n = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L R_{n+N(j-1)}. \quad (3.8)$$

La grandezza che ora ci fornirà l'informazione importante - la distanza del bersaglio che stiamo cercando - è il correlato incrociato S_n di y_n con la sequenza pseudocasuale a'_j :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{j=0}^{N-1} y_j a'_{j-n} \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} x_{j-k} G_k + R_j \right) a'_{j-n} \\
&= P_0 \sum_{k=0}^{N-1} \phi_{a,a'}(k-n) G_k + \sum_{j=0}^{N-1} a'_{j-n} R_j.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Utilizzeremo quest'ultima grandezza calcolata sulla media degli y_n , \bar{y}_n :

$$\bar{S}_n = \sum_{j=0}^{N-1} \bar{y}_j a'_{j-n}. \tag{3.10}$$

Quando il laser colpisce un bersaglio la luce viene diffusa da questo non solo nella direzione di provenienza. In mancanza di ipotesi più precise supponiamo che questa diffusione sia isotropa su tutte le direzioni e che l'angolo solido Ω su cui si sparpaglia sia $\leq 2\pi$ sterad, cioè non più ampio della semisfera che si espande "all'indietro" rispetto alla direzione del laser (abbiamo ipotizzato che i bersagli fossero opachi, perciò supponiamo che la luce non li possa attraversare). Consideriamo, seppur grossolanamente, il nostro fascio laser perfettamente collimato. Chiaramente è un'approssimazione, infatti già la sorgente ha una divergenza θ di circa 10° , sebbene sia stata corretta con un collimatore. Non esiste una collimazione perfetta, ma noi approssimeremo ad una radiazione laser che si propaga linearmente, per poi essere diffusa ed espandersi come un cono con apertura data dall'angolo solido Ω .

Praticamente la luce si espande sempre su calotte sferiche che sottendono angoli più o meno grandi, ma ciò che interessa per la presente trattazione è che la potenza luminosa decresce al crescere della distanza con una legge descritta da questa geometria: come l'inverso della superficie della calotta Ωd^2 , essa risulta proporzionale a d^{-2} .

Ci occupiamo ora di dare qualche indicazione sul rumore. Tutta la trattazione seguente si basa sull'ipotesi che il rumore si comporti come la funzione più semplice che possa descriverne il comportamento, in quanto non abbiamo ipotesi più precise o più valide. Abbiamo già specificato che il rumore è di tipo additivo, in (3.1). Supponiamo che sia un *rumore gaussiano invariante bianco*.

GAUSSIANO segue l'andamento di una funzione normale:

$$N(\bar{x}, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \tag{3.11}$$

In particolare,

- prendiamo per ipotesi la media a 0,

$$\langle R(x) \rangle = 0; \quad (3.12)$$

- la deviazione standard rms (*root mean squared*) σ^2 è calcolata come radice della media del quadrato,

$$\sqrt{\langle R(x)^2 \rangle} = \sqrt{\sigma^2}. \quad (3.13)$$

INVARIANTE (O STAZIONARIO) I parametri della Gaussiana non variano col tempo, cioè $\bar{x} = 0 \forall t, \sigma^2 \neq \sigma^2(t)$.

BIANCO Ha spettro costante.

Per quest'ultima proprietà si tratta di una approssimazione. Presa l'autocorrelazione di $x(t)$, $\phi_{x,x}(t, t') = \langle x(t)x(t') \rangle$, l'invarianza temporale impone $\phi(t, t') = \phi(t - t') = \phi(\tau)$. L'unica funzione ad avere spettro (cioè trasformata di Fourier \mathfrak{F}) costante è la δ di Dirac:

$$\phi(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau) \implies \mathfrak{F}\phi = \text{costante} \quad (3.14)$$

Per il teorema di Wiener-Khintchin, la densità spettrale di energia del segnale è la trasformata dell'autocorrelazione. Valutiamo perciò lo spettro di potenza di x come trasformata di $\phi_{x,x} = \langle |x|^2 \rangle$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\tau) d\tau = \sigma^2. \quad (3.15)$$

Un rumore fatto così è in ogni istante completamente indipendente dal valore che aveva negli istanti precedenti. La realtà è generalmente diversa: la correlazione più verosimile decade esponenzialmente, ad esempio con periodo di decadimento T , ed è una funzione pari ($\phi(t) = \phi(-t)$), perciò ha la forma:

$$R(t) = \sigma^2 e^{-\frac{|t|}{T}}. \quad (3.16)$$

In questo caso la trasformata $\mathfrak{F}R$ è la lorentziana (che scriviamo normalizzata a 1):

$$L(\bar{\omega}, T) = \frac{T}{\pi} \frac{1}{1 + T^2(\omega - \bar{\omega})^2}. \quad (3.17)$$

Per il nostro interesse è utile sapere che lo spettro di una sequenza pseudocasuale è una funzione sinc², dove $\text{sinc}(\omega) = \sin(\omega)/\omega$.

Evidentemente, una funzione con spettro a sinc non può essere un rumore bianco. Ma se si limita con un filtro passa-basso il dominio di frequenze alle sole frequenze sufficientemente basse da ridurre la porzione visibile della funzione a un tratto approssimativamente piano, allora il rumore si può considerare bianco. Bisogna dunque generare

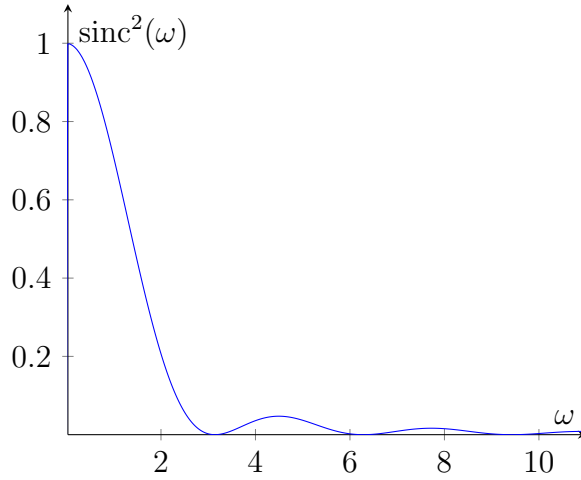


Figura 3.1: La funzione *sinc*.

una sequenza pseudocasuale abbastanza veloce da rendere la sinc sufficientemente larga e poi limitare il dominio alle sole basse frequenze con un filtro e si ottiene un rumore in buona approssimazione bianco.

Nelle nostre misure abbiamo verificato il collegamento fra la potenza ricevuta che, come abbiamo appena visto, scala come d^{-2} , e l'altezza del segnale ricevuto dal fotodiodo che fa da rilevatore. Si approfondirà questa discussione nel Capitolo successivo.

3.2 Migliorie delle sequenze A1 e A2

Basandoci su (3.9) e (2.12), possiamo dare una stima di \bar{S}_n :

$$\bar{S}_n = P_0 \frac{N+1}{2} G_n + \bar{R}, \quad (3.18)$$

dove \bar{R} è il rumore “demodulato” al pari del segnale, ovvero il rumore misurato mediato sulle L misure \bar{R}_j cross-correlato con la sequenza a'_j ($\bar{R} = \sum_{j=0}^{N-1} \bar{R}_j a'_{j-n}$).

La caratteristica “parità” del numero di bit 0 ed 1 delle sequenze A1 e A2 ha un effetto molto importante sulla fisica del processo descritta nel paragrafo 3.1. Questa infatti porta il seguente risultato:

$$\sum_j b'_j = \sum_j c'_j = 0. \quad (3.19)$$

Allora possiamo analizzare la potenza rilevata dal fotodiodo per le due nuove sequenze, basandoci su (3.9), (2.16) e (2.18). Per prima analizziamo la sequenza A1 (si

denomina con S'_j il segnale per questa sequenza):

$$\begin{aligned}
S'_j &= P_0 \sum_k \phi_{b,b'}(k-j)G_k + \sum_l b'_{l-j}R_l \\
&= NP_0G_j - NP_0G_{j+N} + P_0 \sum_{i=1}^{(N-1)/2} (G_{2i-1+j} - G_{2i-1+j+N}) \\
&\quad - P_0 \sum_{i=1}^{(N-1)/2} (G_{2i+j} - G_{2i+j+N}) + \sum_{i=1}^{2N-1} b'_{i-j}R_i \\
&\simeq NP_0G_j.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Il primo termine dà l'unico contributo rilevante; il secondo viene trascurato se la sequenza è abbastanza lunga, in quanto rappresenta il segnale di un bersaglio a grande distanza (N "bit" più lontano del primo termine) e l'intensità scala come una potenza negativa di d (da ipotesi, d^{-2}) perciò è molto piccolo; i termini terzo e quarto (nella seconda e terza riga) si elidono a vicenda, in quanto si considera un intervallo di tempo sufficientemente breve affinché la funzione $G(t)$ non vari apprezzabilmente; rimandiamo a più avanti la giustificazione della cancellazione del termine di rumore.

Osserviamo ora la sequenza A2.

$$\begin{aligned}
S''_j &= P_0 \sum_k \phi_{c,c'}(k-j)G_k + \sum_l c'_{l-j}R_l \\
&= 2NP_0G_j - 2NP_0G_{j+N} + 2P_0 \sum_{i=1}^{(N-1)/2} (G_{4i-2+j} - G_{4i-2+j+2N}) \\
&\quad - 2P_0 \sum_{i=1}^{(N-1)/2} (G_{4i+j} - G_{4i+j+2N}) + \sum_{i=1}^{4N-1} c'_{i-j}R_i \\
&\simeq 2NP_0G_j.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Nelle (3.20) e (3.21) si è cancellato il termine di rumore dalla terza alla quarta riga: è l'aspetto più interessante di questo procedimento. Ricordiamo per $R(t)$ tutte le caratteristiche di cui al paragrafo 3.1. Consideriamo il rumore come una funzione poco variabile di valore medio 0 ma deviazione standard $R = \sqrt{\sigma^2} \neq 0$. Con la M-sequence l'ampiezza di questo rumore viene ridotta a R/N a causa dell'1 che c'è in più degli 0. Con le sequenze A1 e A2 la cancellazione è perfetta perché la formula (3.19) ci assicura di poter eliminare totalmente il rumore. Va però considerato che il rumore si è assunto costante sulla scala di tempi della misura, vale a dire che la misura deve essere eseguita in un

arco di tempo breve abbastanza da impedire al rumore di variare significativamente. Nel nostro caso le misure più lunghe erano eseguite su scale di tempo dell'ordine della decina di minuti, in cui ragionevolmente l'illuminazione giornaliera non varia apprezzabilmente.

Altra caratteristica importante delle sequenze A1 ed A2 è che non sono correlate alla M-sequence né l'una all'altra, vale a dire che le loro funzioni di cross-correlation sono identicamente nulle:

$$\phi_{b,c'}(k) = \phi_{c,b'}(k) = 0 \quad \forall k \in \mathcal{N}, \quad (3.22)$$

con \mathcal{N} insieme dei primi $4N$ numeri naturali, dove la sequenza A1 è ripetuta due volte e la M quattro.

Grazie a questa peculiarità queste sequenze dovrebbero essere ideali anche per effettuare misure DIAL (v. paragrafo 1.2.2): infatti due misure diverse possono essere effettuate in contemporanea grazie all'uso di due sequenze non correlate, in quanto questo permette loro di non interferire l'una con l'altra, visto che il segnale ricevuto deve essere cross-correlato con la sequenza ricercata.

Parte III
Parte sperimentale

Capitolo 4

Il nostro strumento

IL LIDAR CHE NOI ABBIAMO UTILIZZATO è stato prodotto con ottiche di riciclo gentilmente offerte dai laboratori del LENS di Firenze.

Lo scopo dell'esperienza era verificare la fattibilità di elettronica e software e testarli allo scopo di realizzare uno strumento che misuri il pulviscolo atmosferico fino a 3 km di altezza in Antartide. Chiaramente quest'altro strumento sarà dotato di migliori ottiche - un raccoglitore più grande, un laser più adatto, un fotorilevatore più grande... - per eseguire misure con maggiore precisione.

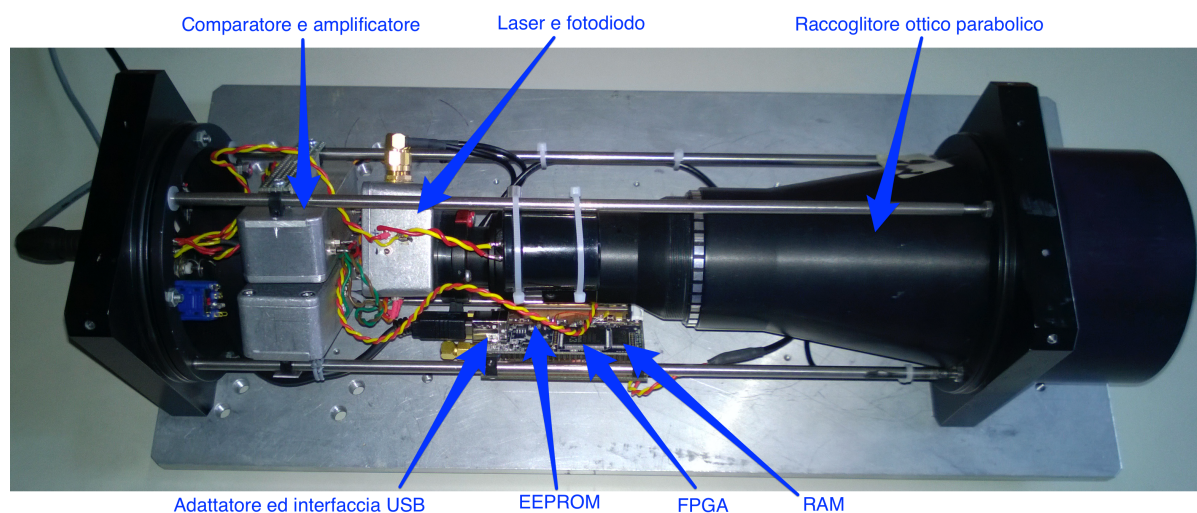


Figura 4.1: Una foto del nostro strumento. Sono indicate alcune componenti al fine di chiarificarne la costruzione.

Lo strumento è costituito da una parte di ottica e una parte di elettronica montata su un modulo.

L'ottica è composta dall'emettitore, un diodo laser, coassiale con il rivelatore, un fotodiodo a valanga. Entrambi hanno un'ottica composta da lenti mobili atta a collimare il segnale rispettivamente inviato e ricevuto. Questi due elementi si trovano, come indicato in figura 4.1, all'interno di un raccogliitore ottico parabolico che ha lo scopo di raccogliere più luce possibile e farla convergere verso il fotodiodo, che converte i fotoni in corrente che poi verrà analizzata tramite l'elettronica. Il laser è collegato all'alimentazione attraverso un modulatore che riceve un segnale dalla FPGA che implementa al suo interno il LFSR (per la sequenza M) e una sua variazione (per la sequenza A2) ed accende e spegne l'alimentazione. Davanti al fotodiodo è inoltre presente un filtro interferenziale con lo scopo di ridurre la luce ambientale limitando la luce entrante nel fotodiodo in una finestra attorno a 810 nm.

L'elettronica consiste in un circuito montato su un modulo le cui componenti principali sono una FPGA, una piccola RAM da 128 kB come memoria, una EEPROM contenente il codice per programmare la FPGA e un'interfaccia USB che permette di collegarsi a un calcolatore.

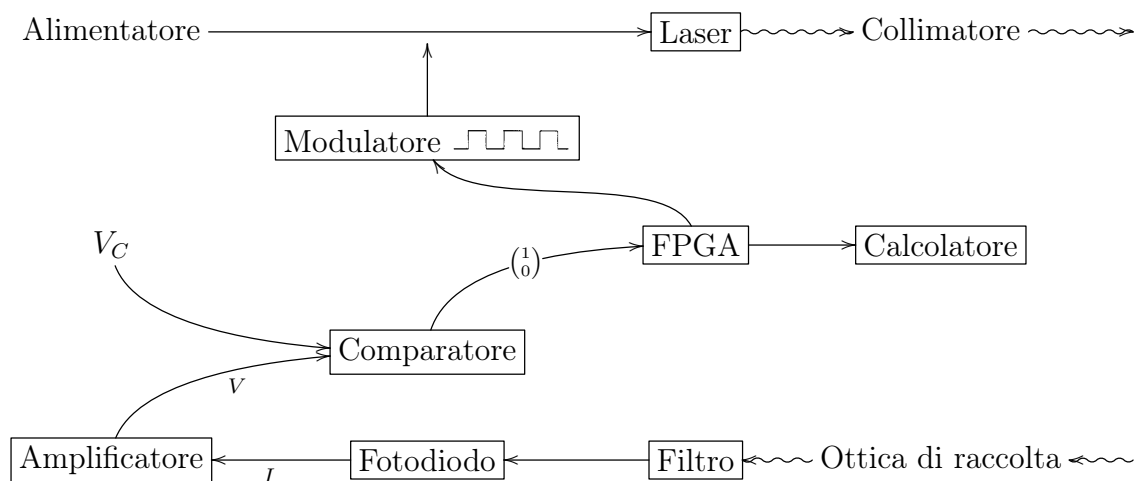


Diagramma a blocchi dell'apparato. In alto la parte di emissione del segnale, in basso quella di ricezione. V_C rappresenta il potenziale di confronto che determina se il segnale ricevuto è "alto" o "basso". La parte di elettronica è sulla destra per convogliare i dati ricevuti da entrambe.

4.1 Ottiche

L'emettitore laser utilizzato è un diodo L808P200. Si tratta di un laser dotato di una buona potenza (v. tabella 4.1) ma con un modo spaziale inadatto al nostro scopo. La divergenza del diodo laser è irrilevante perché abbiamo posto nelle immediate vicinanze un collimatore composto da un gruppo di lenti mobile con la funzione di collimare, per quanto possibile, il fascio.

Tabella 4.1: Caratteristiche principali del laser

Potenza P_0	200 mW
Lunghezza d'onda λ	(808 ± 3) nm
Divergenza θ	$(10 \pm 2)^\circ$

L'ottica di raccolta ha un diametro ℓ molto ridotto: (10.4 ± 0.1) cm. Si tratta di un limite consistente per il nostro strumento, in quanto la luce raccolta dipende fortemente da questa misura, essendo proporzionale a ℓ^2 .

La luce raccolta viene focalizzata sul fotorilevatore. Successivamente un filtro taglia via buona parte delle lunghezze d'onda della luce ambientale. Siccome il nostro laser è a 808 nm, abbiamo usato un filtro a 810 nm abbastanza stretto affinché la luce ambientale del giorno non ci infastidisse troppo. Riportiamo un grafico con la risposta del filtro.

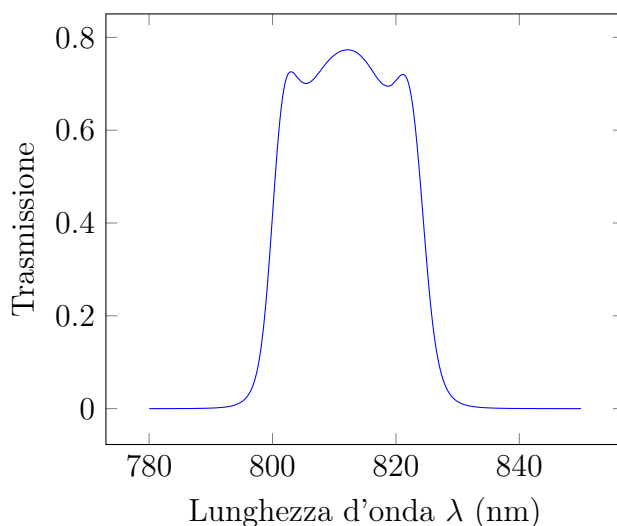


Figura 4.2: La curva di trasmissione del filtro posto dinanzi al fotodiodo.

Il rivelatore è un fotodiodo a valanga (*avalanche photodiode*). Ciò significa che un fotoelettrone può dare vita tramite un meccanismo a cascata ad una grande quantità di fotoelettroni. Il nostro è un fotodiodo sensibile con un guadagno di circa 0.1 A/W per il fotodiodo (riceve potenza luminosa ed emette una fotocorrente) e 100 per l'effetto valanga, ma le sue dimensioni ($100\ \mu\text{m} \times 100\ \mu\text{m}$) sono troppo ridotte per questa applicazione: per lo strumento da spedire in Antartide si vuole utilizzare un fotodiodo almeno 100 volte più grande, cioè da $1\ \text{mm}^2$. Nella scelta del fotodiodo da utilizzare per uno specifico utilizzo bisogna fare un compromesso: infatti, un fotodiodo con una grande superficie è lento e non permette misure ad alte frequenze; d'altra parte, su un fotodiodo troppo piccolo è difficile focalizzare tutta la luce raccolta.

Successivo al fotodiodo, un amplificatore trasforma il segnale del rivelatore, una fotocorrente, in una differenza di potenziale. In pratica, l'amplificatore riceve un segnale in corrente e restituisce un segnale in tensione: il guadagno dell'amplificatore non si misura quindi con un numero puro, ma con un'unità di misura.

$$\frac{[V]}{[A]} = [\Omega] \quad (4.1)$$

Questo amplificatore ha quindi lo stesso comportamento di un resistore, infatti il suo guadagno si misura come una resistenza. A una grande resistenza corrisponde un grande guadagno. Il guadagno in questo amplificatore è di $20\ \text{k}\Omega$. Il guadagno totale dell'apparato è quindi $0.1 \cdot 100 \cdot 20 \cdot 10^3 = 2 \times 10^5\ \text{V/W}$.

L'ultimo pezzo che compone questa parte di rivelazione è il comparatore. Si tratta di un discriminatore che confronta il segnale amplificato proveniente dal fotorivelatore con un potenziale fissato e stabilisce se è stato rilevato un segnale alto o meno restituendo una variabile binaria che si accende nel primo caso e si spegne nel secondo. Qui abbiamo la parte più critica della misura:

- un segnale perfetto in un mondo ideale (dove cioè non esiste rumore nelle misure) genererebbe una nuova sequenza pseudocasuale perfetta, esattamente identica a quella inviata dal laser, ma ritardata a seconda della distanza del bersaglio;
- un segnale pessimo in un mondo di solo rumore non permetterebbe al dispositivo di riconoscere alcun segnale e il comparatore darebbe un valore casuale alla variabile in uscita, come se lanciasse una moneta; il risultato della somma di molte misure sarebbe allora una costante a metà fra 0 e il numero di sequenze lanciate.

A questo livello la misura potrebbe perdere di linearità, in quanto la comparazione è una scelta a due possibilità sull'intensità del segnale. Osserveremo qualche misura di questo nel Capitolo 5.

4.2 Elettronica e software

L'elettronica dell'apparato è alimentata a $\pm 5\ \text{V}$ utilizzando due alimentatori. A $+5\ \text{V}$ è richiesta una corrente di circa $1\ \text{A}$, mentre l'alimentazione a $-5\ \text{V}$ è richiesta solo dal comparatore, che assorbe una corrente di pochi mA.

La EEPROM (*Electrically Erasable Programmable Read-Only Memory*) ha il compito di contenere le istruzioni per “insegnare” alla FPGA a generare una sequenza piuttosto che l’altra. Queste sono scritte tramite un linguaggio di programmazione specifico per questa applicazione. Alla compilazione viene prodotto un file in formato .bit contenente le istruzioni per quali interruttori devono essere chiusi e quali no nella FPGA. Le istruzioni verranno poi caricate sulla FPGA al momento dell’esecuzione delle misure.

La FPGA (*Field Programmable Gate Array*) è un integrato che contiene numerose porte logiche (anche qualche milione) programmabili tramite l’apertura e chiusura di interruttori, anch’essi interni all’integrato. È all’interno della FPGA che viene implementato il LFSR per la sequenza M e le variazioni per la sequenza A2. Inoltre contiene una piccola memoria.

I compiti della FPGA sono:

- generare la sequenza per il modulatore;
- acquisire l’output del comparatore;
- sommare i risultati delle L misure (si lanciano molte sequenze per fare una media delle misure, v. paragrafo 5.2);
- trasmettere i risultati al calcolatore quando quest’ultimo ne fa richiesta.

Sul modulo è stata montata anche una RAM (*Random Access Memory*) che dovrebbe fungere da memoria temporanea e veloce per i dati acquisiti: il dispositivo lancia una certa quantità di sequenze e ne acquisisce altrettante, ma non invia dati al calcolatore finché la misura non è terminata. Nel frattempo le misure acquisite verrebbero processate dalla FPGA e immagazzinate nella RAM. La realtà della nostra esperienza è diversa: ad archiviare temporaneamente i nostri dati è stata sufficiente la memoria interna della FPGA. Infatti, presa una sequenza lunga 2047 punti (la nostra sequenza M) e ripetuta 10^5 volte, la memoria necessaria è 2047 posti ampi almeno 10^5 . In questa memoria registreremo quante volte il comparatore ha letto uno stato alto sui 2047 bin temporali che compongono il range massimo di distanza dello strumento (sebbene difficilmente ci si possa spingere così lontano). La memoria della FPGA contiene $2^{11} = 2048$ celle di 2^{32} bit (4 byte), che possono contenere un numero fino a $2^{32} - 1 \simeq 4 \cdot 10^9$, abbondantemente superiore a 10^5 .

Passiamo alla parte software dell’apparato. Abbiamo usato due programmi per il funzionamento dello strumento.

Il primo si chiama *bitload* e ha la funzione di caricare sulla EEPROM il codice che contiene le istruzioni per la FPGA. Tramite l’esecuzione di questo programma si sceglie se modulare il laser con la sequenza M o A2.

L’altro, *glidar*, è un programma che “*triggera*” l’invio delle sequenze, acquisisce i dati dalla FPGA, calcola la correlazione e ne mostra a display un plot.

Il programma ha due controlli, ovvero il numero di sequenze L e la frequenza a cui variare l’elemento di sequenza: 10 o 9 MHz. Purtroppo le misure a 9 MHz erano molto rumorose, probabilmente per problemi hardware, perciò non sono state riportate in questo lavoro. La possibilità di fare misure a due frequenze distinte ma vicine era stata introdotta allo scopo di provare ad affinare un po’ la precisione delle misure tramite l’uso di un “trucco” simile a quello

del nonio sul calibro ventesimale. I file in output da *glidar* sono sempre in coppia: un file *raw*, grezzo, in cui era contenuto su quante sequenze il comparatore aveva scelto l'1 per bin (intervallo di tempo τ_c) e quindi per unità di lunghezza (illustreremo fra breve come abbiamo stimato questa “unità”), cioè esattamente il contenuto della memoria dell RAM; un file *corr*, per correlato, in cui il calcolatore opera la correlazione incrociata con la sequenza pseudocasuale. I file output sono in formato ASCII, leggibile con qualsiasi editor di testo.

Utilizzando la nostra frequenza di clock $\omega = 10$ MHz e basandoci sul meccanismo illustrato nel paragrafo 1.1, illustriamo come l'apparato riconosce tramite cross-correlation la distanza.

$$i - j = \frac{2d}{c} \cdot 10 \text{ MHz}, \quad i, j \in \mathbb{N}, \quad (4.2)$$

dove i e j sono gli indici degli elementi della successione.

In questo modo risulta facile anche stimare la risoluzione del nostro LiDAR: basta fissare a 1 la suddetta differenza e si ottiene:

$$1 = \frac{2\Delta d}{c} \cdot 10 \text{ MHz} \implies \Delta d \simeq 15 \text{ m}. \quad (4.3)$$

Diventano dunque trascurabili gli errori associati alle misure di tempo: il nostro LiDAR misura “quanti” di lunghezza da 15 m, mentre l'errore associato alla misura di frequenza modificerebbe qualche cifra decimale che, a ben guardare, è ininfluente su un'incertezza del genere.

Nella nostra esperienza abbiamo testato la differenza fra la “nuova sequenza” A2 e la tradizionale M-sequence. Il nostro apparato realizza sequenze di lunghezza molto simile: la sequenza M usa un registro di lunghezza 11, perciò la sua lunghezza è $N = 2^{11} - 1 = 2047$, mentre la A2 è generata da un'altra sequenza M più breve, 9 registri, quindi la sua lunghezza è $N = 4 \cdot (2^9 - 1) = 4 \cdot 511 = 2044$. Il *seed* è per la sequenza A2 `0x1fc`, cioè, in binario, 111111100, mentre per la M-sequence è `0x7f8`, cioè 11111111000. Per scegliere quale delle due sequenze lanciare si avvia quindi *bitload* caricando sulla EEPROM e sulla FPGA la sequenza giusta, poi bisogna utilizzare una versione compatibile di *glidar* affinché la demodulazione sia eseguita con la stessa sequenza.

Sullo schermo ogni pixel corrisponde a un cambiamento dell'elemento della sequenza, cioè a un'“unità” di lunghezza misurata, perciò a 15 m nel mondo reale. Risulta evidente che con uno strumento del genere non si possono fare misure di elevata risoluzione come quelle che misurano la topografia dei territori in 3D ma è facile aumentare la precisione semplicemente agendo sulla frequenza di aggiornamento della sequenza di modulazione. Non è di nostro interesse, visto lo scopo del nostro strumento (una precisione di 15 m è sufficiente), ma se si potesse modulare finemente la frequenza si potrebbe osservare con precisione quando il picco si “sposta” da n a $n+1$ punti di distanza e allora la misura si potrebbe stimare abbastanza precisamente valutando l'incertezza sulla frequenza. Tuttavia, anche aumentare la frequenza sino a 100 MHz potrebbe affinare la precisione assoluta di un ordine di grandezza.

4.3 Conteggio dei fotoni

Diamo in questa sezione un accenno a un'osservazione più “quantica” alla nostra misura: proviamo a dare una valutazione del numero di fotoni in gioco nell'ottica.

Il laser ha una potenza $P_0 = 200 \text{ mW}$, perciò emana $200 \times 10^{-3} \text{ J s}^{-1}$. Ogni fotone ha lunghezza d'onda nota $\lambda = 808 \text{ nm}$, cioè $\nu = c/\lambda = 3.00 \cdot 10^8 / 808 \cdot 10^{-9} \simeq 371 \text{ THz}$. Allora risulta facile dare una valutazione del numero di fotoni: ogni fotone ha energia $E_1 = h\nu = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J s} \cdot 3.71 \times 10^{14} \text{ Hz} = 2.46 \times 10^{-19} \text{ J}$. Allora dividendo l'energia emessa per l'energia di ogni fotone otteniamo il numero $\dot{\Phi}$ di fotoni emanati per unità di tempo (diamo una stima molto approssimativa dei valori, in quanto molte ipotesi sono basate su informazioni intuitivamente verosimili ma non verificate):

$$\dot{\Phi} = \frac{P_0}{E_1} = \frac{200 \cdot 10^{-3}}{2.46 \cdot 10^{-19}} = 8.13 \cdot 10^{17} \text{ s}^{-1} \quad (4.4)$$

È importante notare, come sottolineato nel paragrafo 1.1, che il rivelatore non può misurare meno di un fotone. Molti dei fotoni vengono perduti nella diffusione del fascio laser da parte del bersaglio perché il nostro raccoglitore ottico è molto piccolo (diametro $\ell = (10.4 \pm 0.1) \text{ cm}$). La potenza emanata invece si diffonde su un angolo solido Ω per costruzione minore di una semisfera. Si dà una stima dei fotoni raccolti dalla nostra ottica:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_{\text{raccolta}} &= \dot{\Phi} \cdot \frac{S_{\text{raccolta}}}{S_{\text{diffusione}}} = \dot{\Phi} \cdot \frac{\pi \left(\frac{\ell}{2}\right)^2}{\Omega d^2} \\ &= 8.13 \cdot 10^{17} \cdot \frac{\pi 0.052^2}{\Omega d^2} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Prendiamo, come esempio, il bersaglio più lontano che abbiamo misurato, il gasometro a circa 315 m di distanza; fissiamo l'intervallo di tempo $\Delta t = 1/\omega = 100 \text{ ns}$, cioè il tempo τ_c di cambio di elemento della sequenza e ipotizziamo che l'angolo di diffusione sia 1 sterad. Si dà una stima del numero di fotoni che si rileva:

$$\dot{\Phi}_{\text{raccolta}} = 8.13 \cdot 10^{17} \cdot \frac{\pi 0.052^2}{315^2} = 6.95 \times 10^{10} \text{ s}^{-1} \quad (4.6)$$

I fotoni raccolti in realtà non sono ben focalizzati sul rivelatore: stimiamo che il fascio sia collimato su una superficie di 1 mm^2 , perciò quelli rilevati dal fotodiodo saranno solo 1% del numero stimato sinora, cioè circa $6.95 \cdot 10^8$ al secondo.

Basandoci allora su questa stima e sul guadagno del nostro apparato stimato nella sezione precedente possiamo dare una stima della tensione in ingresso al comparatore:

$$\begin{aligned} V_{\text{comparatore}} &= 6.95 \times 10^8 \text{ s}^{-1} E_1 \cdot 2 \times 10^5 \text{ V/W} \\ &= 1.71 \times 10^{-10} \text{ W} \cdot 2 \times 10^5 \text{ V/W} = 3.42 \times 10^{-5} \text{ V} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Signal-to-noise ratio

Un parametro importante per stimare la qualità della misura è SNR, *signal-to-noise ratio*. Si tratta del rapporto fra il segnale ricevuto in un intervallo di tempo τ_c , cioè entro il bin i , diviso per la varianza, sommata su tutti i rumori influenti sulla misura, sotto radice.

$$\text{SNR}(i) = \frac{\bar{S}_i}{\sqrt{\sum_{\text{rumori}} \sigma^2}} \quad (4.8)$$

Si può dare una valutazione del parametro basandoci sul conteggio dei fotoni e sul numero di sequenze lanciate L (v. paragrafo 5.2). Definiamo $\bar{\nu}_i$ il valor medio del numero di fotoni retrodiffusi cross-correlato sul bin i ; $\bar{\nu}$ il valor medio del numero di fotoni retrodiffusi per bin; $\bar{\rho}$ il valor medio del numero di fotoni di rumore di fondo per bin. Allora vale:

$$\text{SNR}(i) = \sqrt{L} \frac{\bar{\nu}_i}{\sqrt{N(\bar{\nu} + \bar{\rho})}} \quad (4.9)$$

Il denominatore in (4.9) è la radice del valor medio di fotoni totali davanti al fotodiode per sequenza lanciata: è perciò indipendente dal bin i in cui stiamo calcolando. Difatti, in un LiDAR PRN-cw il rumore è indipendente dalla distanza a cui stiamo misurando, rappresentata dall'indice i del bin. La varianza cross-correlata è la somma di tutte le varianze dei vari bin, in quanto questi sono indipendenti fra loro. Si può giustificare così l'equivalenza delle due formule, (4.8) e (4.9).

Capitolo 5

Analisi dati

IN QUESTO CAPITOLO approfondiremo l'approccio più sperimentale di questo lavoro, ovvero l'analisi dei dati raccolti con le misure.

Per eseguire queste ultime ci siamo disposti in un'aula al terzo piano del Dipartimento di Fisica e Astronomia in via Irnerio 46, Bologna e abbiamo puntato il laser verso alcuni bersagli a distanze diverse (prevalentemente alberi nel giardino di ex-Agraria in via Filippo Re, una casa in direzione della stazione e il gasometro dietro via Ranzani).

Le misure ci hanno confermato la distanza stimata tramite la mappa satellitare, senza grosse sorprese.

Per ottenere una misura il più possibile accurata abbiamo misurato, oltre ai bersagli, anche il cosiddetto fondo: abbiamo puntato il laser verso il cielo (dove certamente non avrebbe trovato alcun ostacolo) e misurato il rumore di fondo. Al termine delle misurazioni, con un semplice programma scritto in C++ abbiamo sottratto dalle misure dei bersagli il rumore del fondo.

Mostriamo innanzitutto come anche con il nostro strumento poco preciso siamo riusciti ad effettuare misure che non si limitassero a un solo picco, le quali cioè nascono da una riflessione non totale ma parziale. Su questo fenomeno si basano misure come quella delle nuvole - bersagli non totalmente riflettenti - (v.figura 1.2) o della geomorfologia a cui non interessano le chiome degli alberi (v.riferimento [9]).

Anche noi siamo riusciti (con un po' di fortuna) a misurare la distanza di un albero tramite le sue foglie che però non hanno riflesso completamente il nostro raggio laser, permettendoci dunque di misurare anche la distanza di un altro albero più lontano.

Si riporta la rappresentazione grafica della misura in figura 5.2.

Definiamo, per comodità di rappresentazione sui grafici, la variabile $\xi = d/\Delta d$ con Δd definito nella (4.3), adimensionale.



Figura 5.1: Mappa satellitare della zona sondata. Le linee rosse indicano le traiettorie del laser per i bersagli scelti: i tre più vicini sono gli alberi, poi c'è il palazzo e infine il gasometro

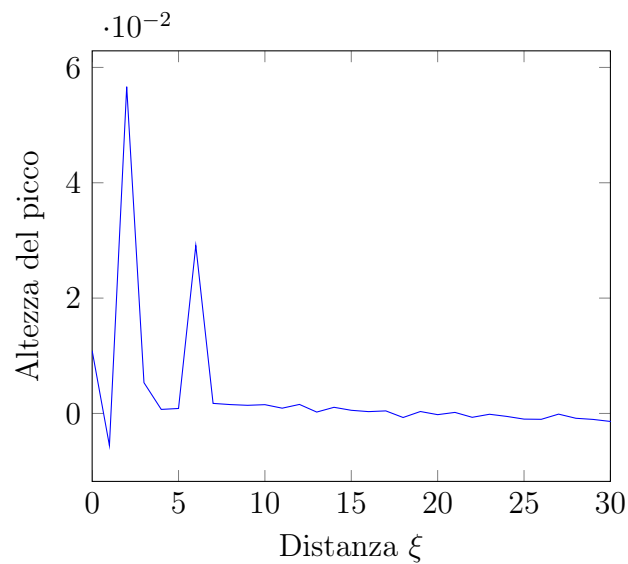


Figura 5.2: Misura di riflessione non totale: si attraversano le foglie di un albero a ~ 30 m e si colpisce un altro albero a ~ 120 m.

5.1 Potenza in funzione della distanza

La prima analisi dei dati raccolti è stata una verifica che l'altezza dei picchi di correlazione seguisse la stessa legge della potenza che li genera, ovvero che fosse proporzionale come la potenza luminosa a d^{-2} (v. paragrafo 3.1). Sebbene apparentemente questa linearità sia triviale, bisogna ricordare come il sistema acquisisce il dato dell'altezza del picco: il segnale luminoso viene acquisito tramite un comparatore che ogni $\Delta t = (10 \text{ MHz})^{-1} = 100 \text{ ns}$ deve "decidere" se ciò che ha ricevuto è uno 0 o un 1 (rumore ambientale o luce retrodiffusa dal bersaglio) e questo processo è decisamente non lineare. A giudicare dall'effettiva comparsa dei picchi di correlazione nelle nostre misure, il comparatore sicuramente rileva e riconosce un buon segnale piuttosto che decidere di sua sponte.

Abbiamo eseguito alcune misure dei bersagli sia con la sequenza M che con la sequenza A2 e con diversi numeri L di sequenze inviati (v. (3.7)) - ovvero 10^4 e 10^5 - con le quali abbiamo stimato tramite le regole standard del calcolo della retta di *best fit* il valore di questo esponente.

La proporzionalità doveva essere del tipo:

$$S \propto d^\alpha, \quad (5.1)$$

per cui abbiamo linearizzato questa legge di potenza tramite l'uso del logaritmo:

$$\ln S \propto \ln(d^\alpha) = \alpha \ln d \quad (5.2)$$

di modo che α fosse il parametro di best fit della retta. Se fosse comparsa un'intercetta non sarebbe stato un problema grave, in quanto riportando l'equazione alla forma originale (senza logaritmo) sarebbe stata solamente una costante di proporzionalità di cui non ci siamo curati in quanto non era il nostro scopo.

$$S \propto kd^\alpha \quad (5.3)$$

$$\ln S \propto \alpha \ln d + q, \quad q = \ln k \quad (5.4)$$

Per il calcolo dei parametri di *best fit* abbiamo usato le formule standard. Per alleggerire la notazione e conformarci ad una più comune, indicheremo nelle formule seguenti il logaritmo dell'intensità con y , il logaritmo della distanza con x ed A e B sono rispettivamente l'intercetta e l'esponente della distanza.

$$y = A + Bx \quad (5.5)$$

Per dare una visualizzazione grafica di questa funzione, si rimanda alle figure 5.3, 5.4, 5.5.

Per l'errore abbiamo considerato che l'errore su Bx (in cui consideriamo $B = -2$) fosse molto più grande di quello su y , una stima ragionevole considerando che sulle distanze più corte l'errore relativo su x arriva sino al 50%. Allora per valutare l'errore di A e B dobbiamo scambiare gli assi. Dunque da qui in avanti x sarà il logaritmo dell'altezza dei picchi e y quello della distanza. Aggiungiamo il parametro $w = \delta y^{-2}$, l'inverso del quadrato dell'errore sul

logaritmo della distanza, che utilizziamo come peso per le varie misure nel calcolo del fit.

$$y = A' + B'x \quad (5.6)$$

$$w_i = \delta x_i^{-2} \quad (5.7)$$

$$B' = \frac{\sum w \sum wxy - \sum wx \sum wy}{\sum w \sum wx^2 - (\sum wx)^2} \quad (5.8)$$

$$\sigma_{B'} = \sqrt{\frac{\sum w}{\sum w \sum wx^2 - (\sum wx)^2}} \quad (5.9)$$

$$A' = \frac{\sum wx^2 \sum wy - \sum wx \sum wxy}{\sum w \sum wx^2 - (\sum wx)^2} \quad (5.10)$$

$$\sigma_{A'} = \sqrt{\frac{\sum wx^2}{\sum w \sum wx^2 - (\sum wx)^2}} \quad (5.11)$$

Abbiamo valutato l'accettabilità dei nostri fit con il *test del* χ^2 . Detto x_i^T il valore teorico di x_i , definiamo:

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - x_i^T)^2}{(\delta x_i)^2} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - A' - B'y_i)^2}{(\delta x_i)^2}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

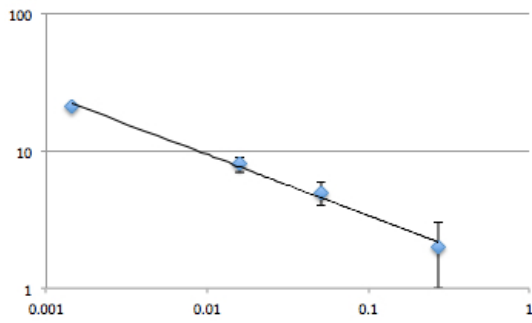
I gradi di libertà sono il numero di misure (N) meno il numero di parametri coinvolti nel fit (2, A' e B'). I valori del χ^2 rappresentano la confidenza con cui consideriamo adatto il fit. I valori sono raccolti in tabelle.

Si riportano nella tabella 5.1 i fit e i χ quadrati calcolati dalle nostre misure.

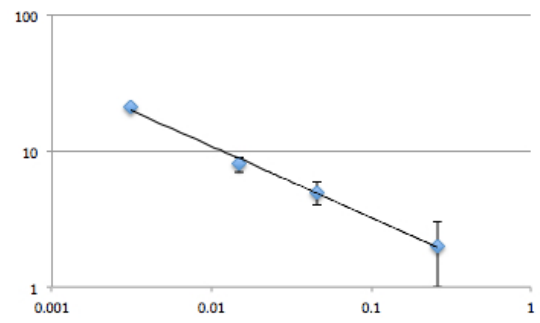
Tabella 5.1: Parametri di *best fit* e χ^2 per le misure con le sequenze M e A2 a 10^4 e 10^5 sequenze.

Sequenza	L	$B' = \alpha^{-1}$	α	$\frac{\sigma_\alpha}{\alpha}$	χ^2
M	10^4	-0.410	-2.44	9%	0.2
M	10^5	-0.563	-1.78	9%	0.7
A2	10^4	-0.434	-2.30	9%	1.2
A2	10^5	-0.578	-1.73	9%	0.19

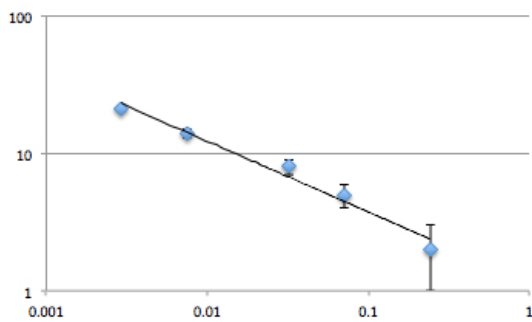
I fit si adattano alle misure con un errore accettabile (inferiore al 10%). Il test del χ^2 ci assicura più o meno confidenza fra una serie di misure e l'altra (10^4 sequenze M e 10^5 sequenze A2 hanno una confidenza del 90%, ma per le altre il χ^2 assume valori troppo alti). Osserviamo dunque che il lavoro del comparatore è svolto con una buona efficienza: secondo la nostra stima l'altezza del picco scala similmente alla potenza luminosa. Addirittura sembra esserci un aumento di tale efficienza con l'aumento del numero L di sequenze lanciate. Tuttavia



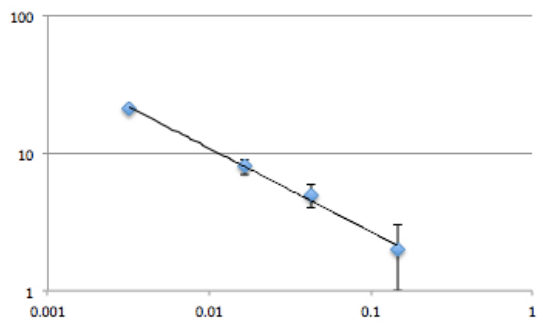
(a) 10^4 sequenze M



(b) 10^5 sequenze M



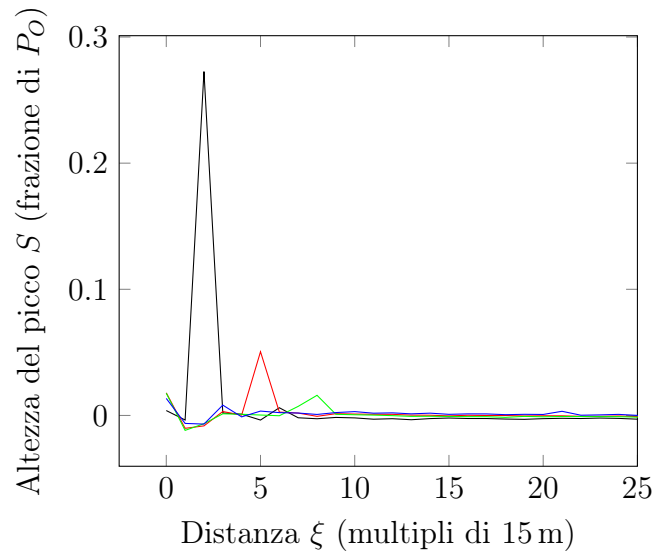
(c) 10^4 sequenze A2



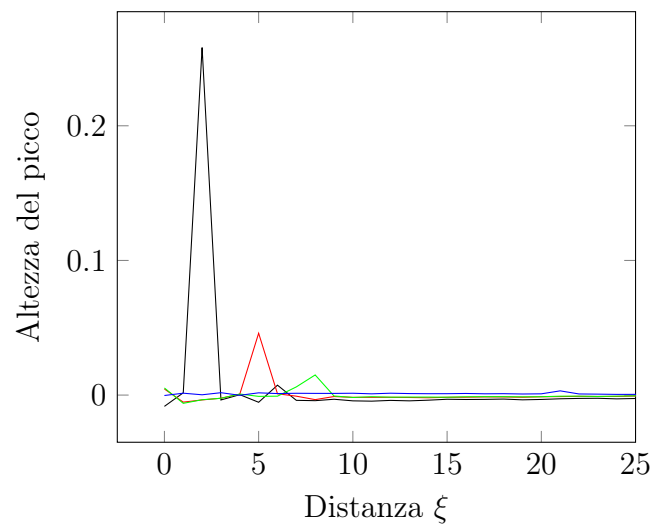
(d) 10^5 sequenze A2

Figura 5.3: Grafici dei fit dei logaritmi. In tutti i grafici sono rappresentati in ascissa le altezze dei picchi e in ordinata le distanze ξ , affette da errore.

non bisogna lasciarsi ingannare da questi numeri: l'altezza del picco rappresenta (più o meno fedelmente) la potenza luminosa rilevata dal fotodiodo. Se la potenza decresce come d^{-2} non è possibile rilevare una potenza più alta di quella presente.

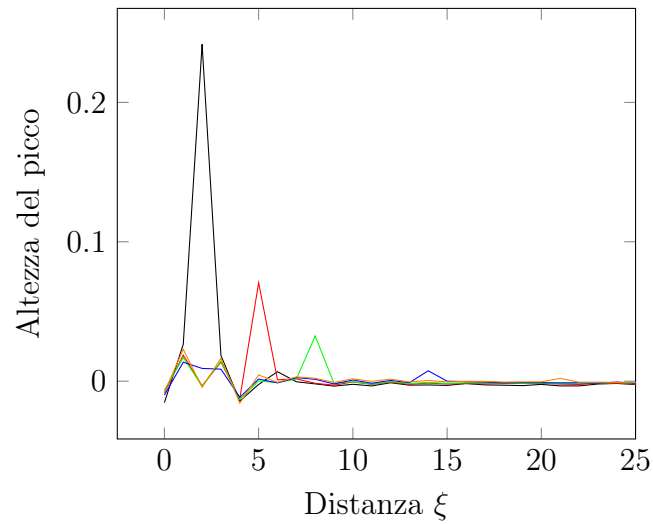


(a) $L = 10^4$, sequenza M

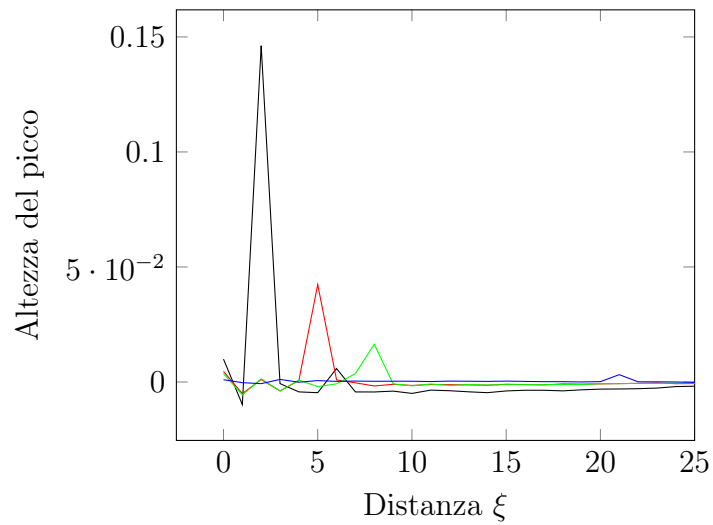


(b) $L = 10^5$, sequenza M

Figura 5.4: Si mostrano i picchi di bersagli colpiti nella nostra esperienza misurati con 10^4 e 10^5 sequenze M. In nero, rosso, verde alberi a distanze diverse; in blu il gasometro.



(a) $L = 10^4$, sequenza A2

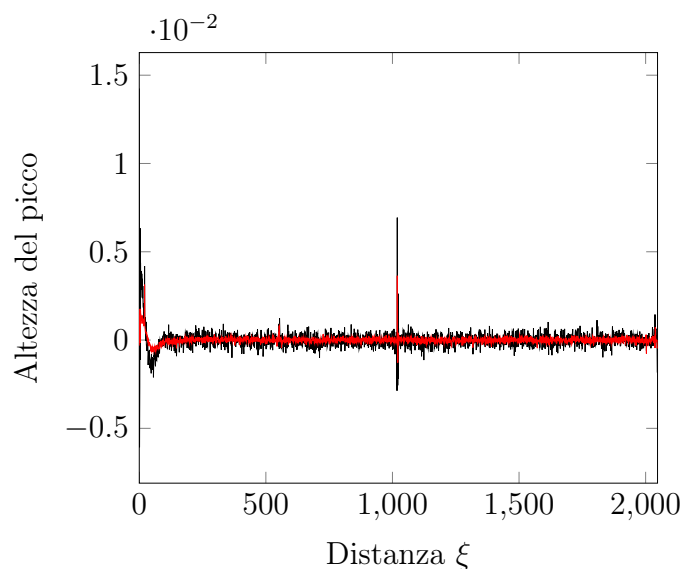


(b) $L = 10^5$, sequenza A2

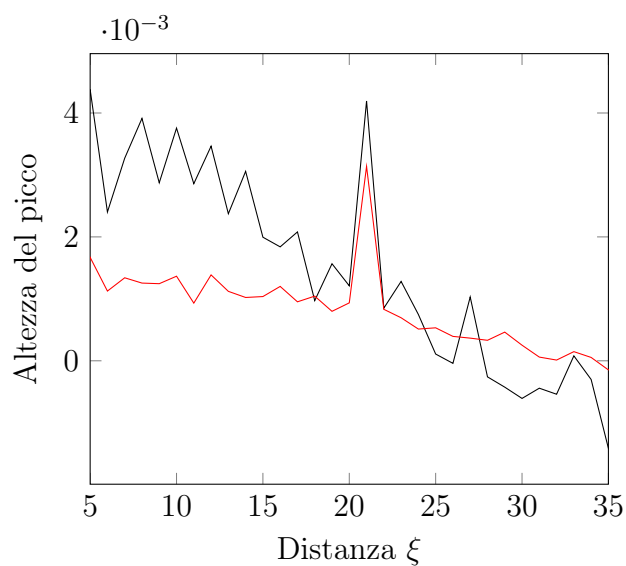
Figura 5.5: Si mostrano i picchi di tutti i bersagli colpiti nella nostra esperienza misurati con 10^4 sequenze A2. Nella prima, in nero, rosso, verde alberi a distanze diverse; in blu le case; in arancione il gasometro. Nella seconda, In nero, rosso, verde alberi a distanze diverse; in blu il gasometro.

5.2 Numero di sequenze L

Osserviamo ora la differenza causata dal numero di sequenze utilizzato.



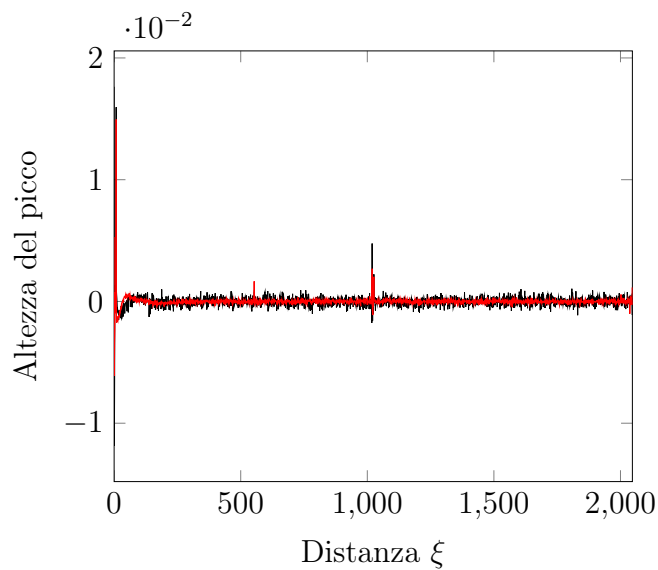
(a) *L'intero set di misure*



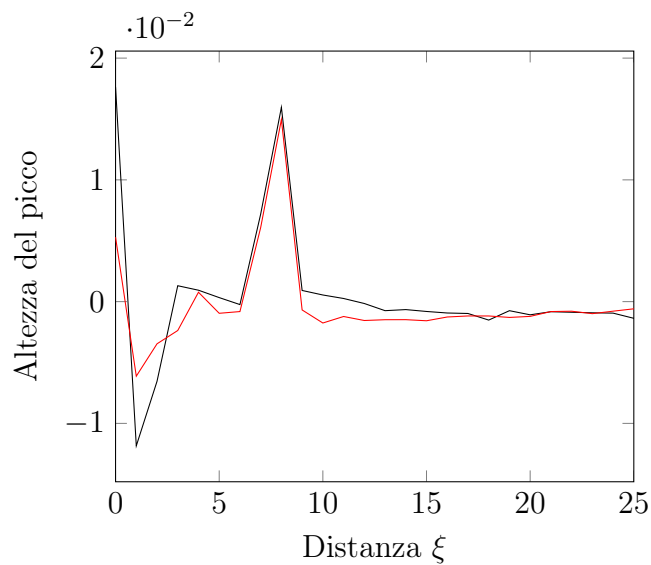
(b) *Zoom sul picco di correlazione*

Figura 5.6: Rappresentazioni più e meno ingrandite delle misure di un bersaglio a ~ 315 m (il gasometro) con 10^4 (nero) e 10^5 (rosso) sequenze M .

Il rumore di fondo a regime - esclusa cioè la parte iniziale, dove ottenere qualche informazione è molto difficile - viene ridotto sensibilmente aumentando questo numero. La migliore stima



(a) *L'intero set di misure.*



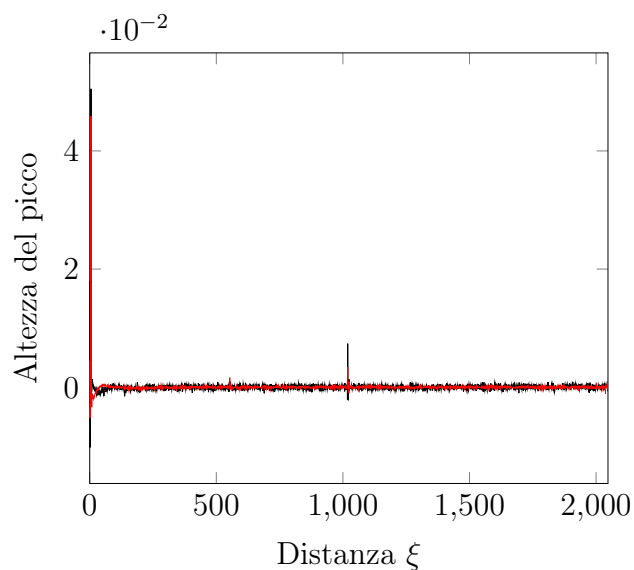
(b) *Zoom sul picco di correlazione.*

Figura 5.7: Rappresentazioni più e meno ingrandite delle misure del bersaglio a ~ 120 m con 10^4 (in nero) e 10^5 (in rosso) sequenze M.

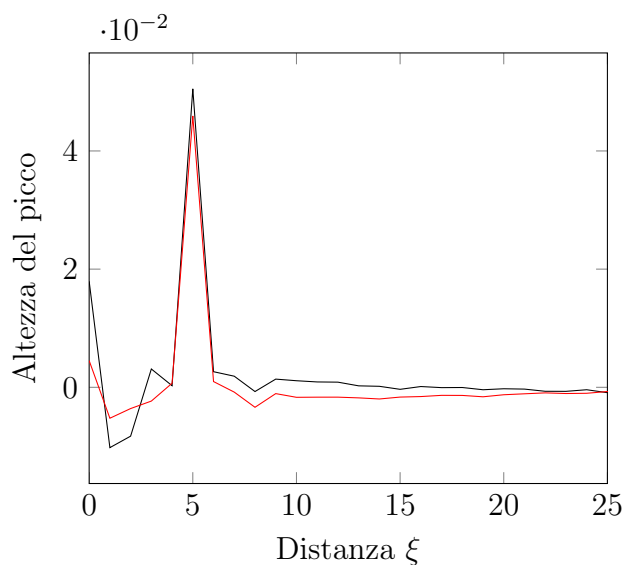
del miglioramento della misura si può dare stimando il valore rms della varianza del rumore. Basta osservare le immagini per vedere il rumore ridursi sensibilmente. Secondo le previsioni, la Deviazione Standard σ dovrebbe diminuire come $1/\sqrt{N}$.

Mostriamo in tabella 5.2 alcuni esempi calcolati utilizzando le misure fra i bin 500 e 700.

Le immagini 5.6, 5.7, 5.8, 5.9, 5.10, 5.11 mostrano come il rumore si riduca, come atteso,



(a) *L'intero set di misure.*

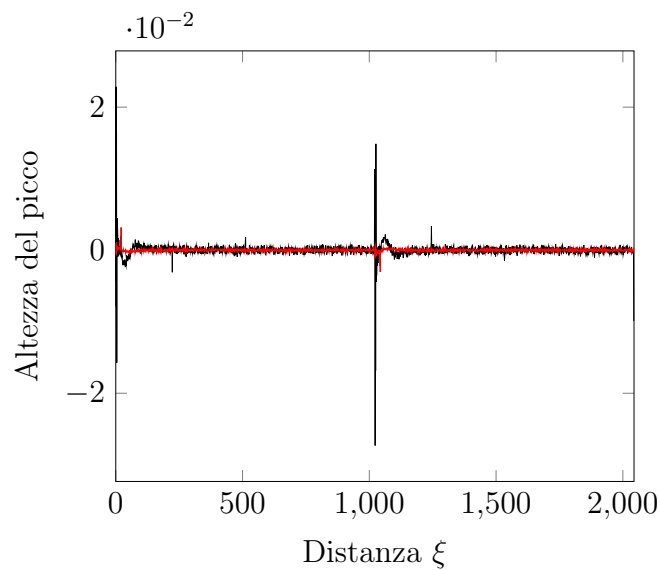


(b) *Zoom sul picco di correlazione.*

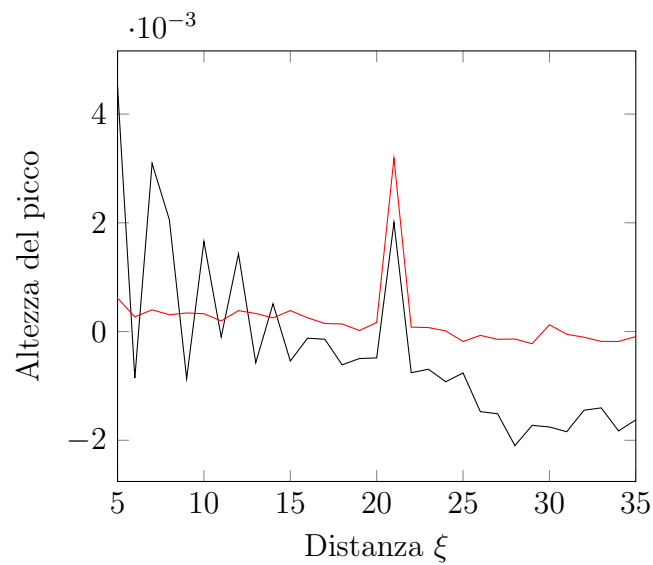
Figura 5.8: Rappresentazioni più e meno ingrandite delle misure del bersaglio a ~ 75 m con 10^4 (in nero) e 10^5 (in rosso) sequenze M.

con un numero di misure maggiore. Tutti i particolari sono zoom sui picchi relativi ai bersagli posti a diverse distanze (gli alberi e il gasometro).

La previsione quantitativa della riduzione del rumore all'aumentare del numero L di misure è sottostimata: l'andamento non è come atteso. Ci aspettavamo che la varianza diminuisse di 10 volte passando da 10^4 a 10^5 misure mentre la diminuzione è di circa la metà. Tuttavia si vede



(a) *L'intero set di misure*

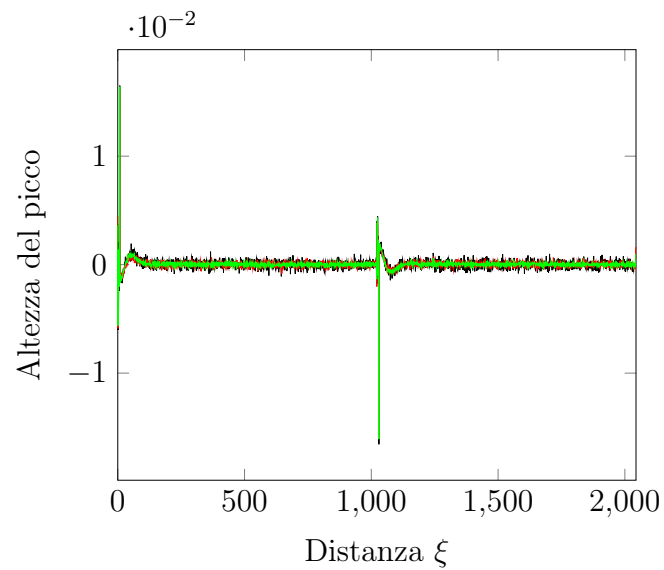


(b) *Zoom sul picco di correlazione*

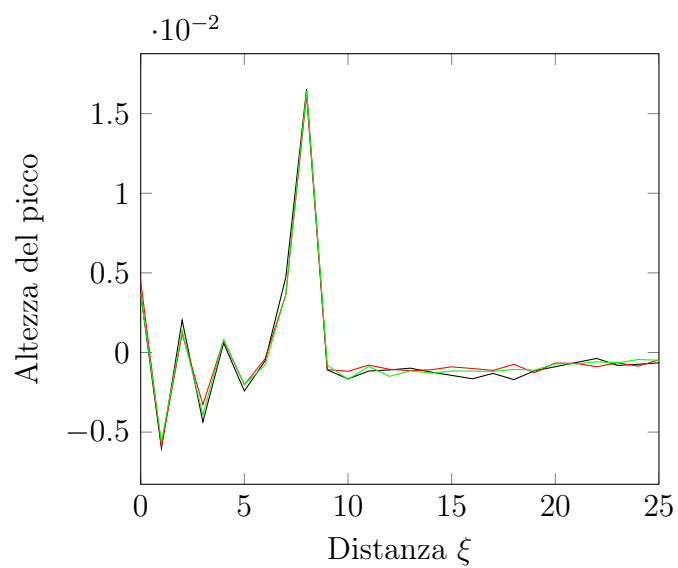
Figura 5.9: Rappresentazioni più e meno ingrandite delle misure di un bersaglio a ~ 315 m (il gasometro) con 10^4 (nero) e 10^5 (rosso) sequenze A2.

che la proporzionalità non è lineare tramite i termini a $L = 30000$. Purtroppo non abbiamo fatto abbastanza misure per fare ipotesi sull'andamento di questa funzione.

La Deviazione Standard rms si accorda abbastanza bene con le previsioni: passando da 10^4 a 10^5 dovrebbe diminuire come $1/\sqrt{10} \simeq 1/3.16$, mentre a $3 \cdot 10^4$ dovrebbero diminuire come

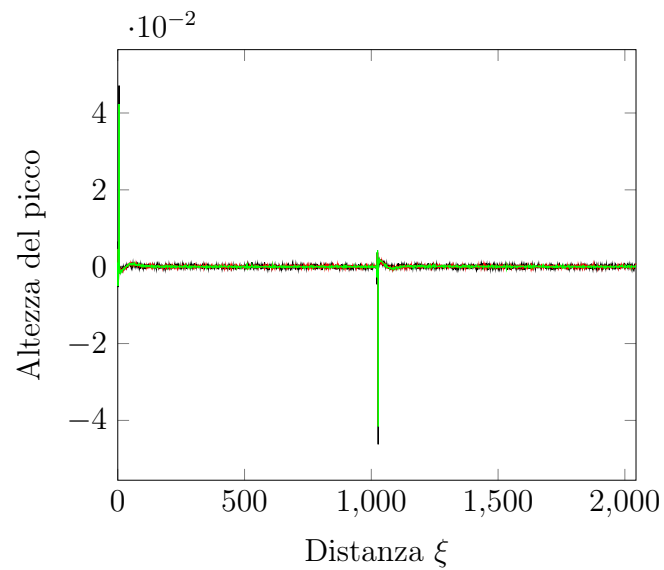


(a) *L'intero set di misure.*

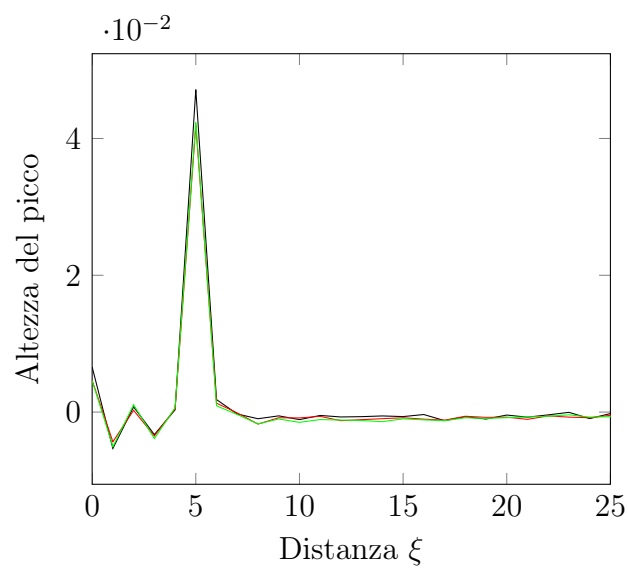


(b) *Zoom sul picco di correlazione.*

Figura 5.10: Rappresentazioni più e meno ingrandite delle misure del bersaglio a ~ 120 m con 10^4 (in nero), 3×10^4 (in rosso) e 10^5 (in verde) sequenze A2.



(a) *L'intero set di misure.*



(b) *Zoom sul picco di correlazione.*

Figura 5.11: Rappresentazioni più e meno ingrandite delle misure del bersaglio a ~ 75 m con 10^4 (in nero), 3×10^4 (in rosso) e 10^5 (in verde) sequenze A2.

Bersaglio	Sequenza	L	Deviazione Standard σ^2
Alberi a \simeq 75 m	M	10^4	0.00031
Alberi a \simeq 75 m	M	10^5	0.00016
Alberi a \simeq 75 m	A2	10^4	0.00033
Alberi a \simeq 75 m	A2	$3 \cdot 10^4$	0.00018
Alberi a \simeq 75 m	A2	10^5	0.00014
Alberi a \simeq 120 m	M	10^4	0.00033
Alberi a \simeq 120 m	M	10^5	0.00015
Alberi a \simeq 120 m	A2	10^4	0.00034
Alberi a \simeq 120 m	A2	$3 \cdot 10^4$	0.00020
Alberi a \simeq 120 m	A2	10^5	0.00012

Tabella 5.2: La varianza delle misure del rumore fra i bin 500 e 700. Si nota come nelle misure con più sequenze si abbassa sensibilmente.

$1/\sqrt{3} \simeq 1/1.71$. L'accordo fra misure e teoria è abbastanza buono:

Alberi vicini, sequenza A2:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{0.0018}{0.0033} = \frac{1}{1.83} \quad (5.13)$$

$$\frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \frac{0.0014}{0.0033} = \frac{1}{2.35} \quad (5.14)$$

Alberi vicini, sequenza M:

$$\frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \frac{0.0016}{0.0031} = \frac{1}{2.06} \quad (5.15)$$

Alberi lontani, sequenza A2 :

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{0.0020}{0.0034} = \frac{1}{1.70} \quad (5.16)$$

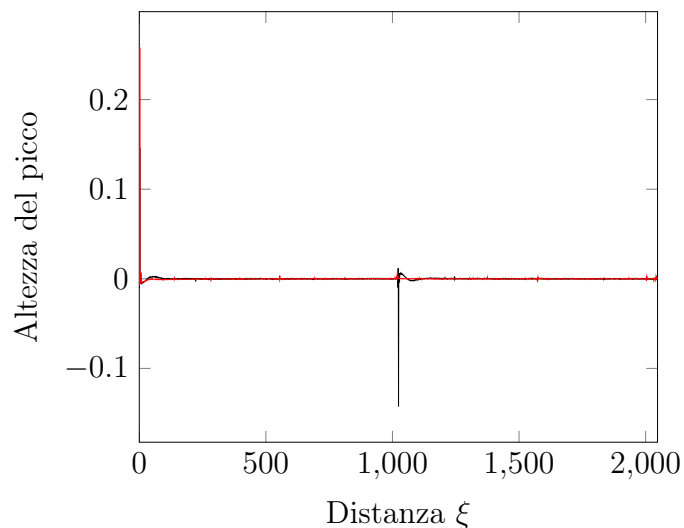
$$\frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \frac{0.0012}{0.0034} = \frac{1}{2.83} \quad (5.17)$$

Alberi lontani, sequenza M:

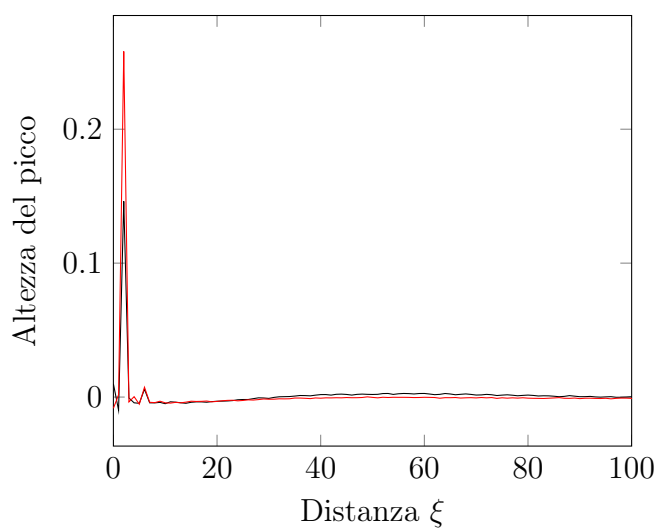
$$\frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \frac{0.0015}{0.0033} = \frac{1}{2.20} \quad (5.18)$$

5.3 Confronto fra sequenze M ed A2

Si riportano le immagini (5.12, 5.13, 5.14, 5.15) di alcuni plot dei dati raccolti allo scopo di osservare graficamente il comportamento di una sequenza confrontata con l'altra.



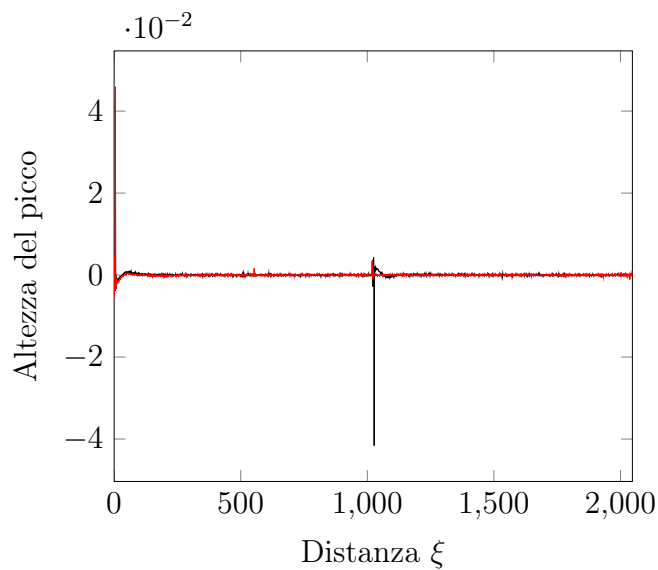
(a) *L'intero set di misure*



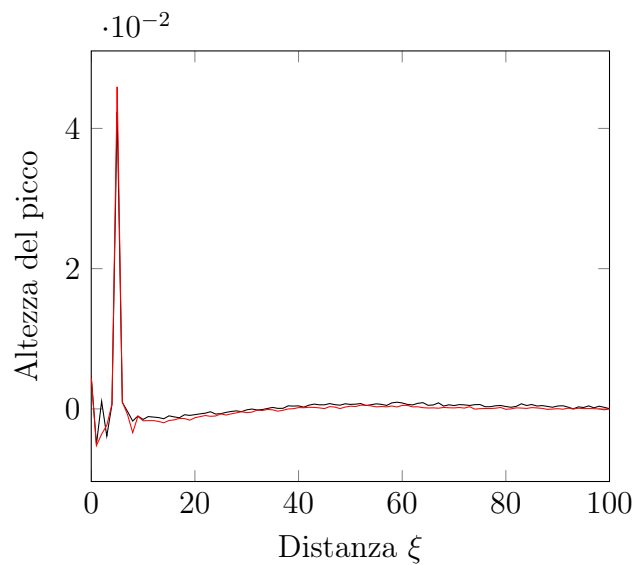
(b) *Zoom sul picco di correlazione*

Figura 5.12: Rappresentazioni più e meno ingrandite delle misure degli alberi a ~ 30 m con 10^5 sequenze. In rosso la M-sequence, in nero la A2.

Osservando le immagini si può verificare l'affermazione del gruppo giapponese secondo cui la sequenza A2 dovrebbe generare una misura praticamente insensibile al rumore di fondo. In particolare, il miglioramento dovrebbe essere più evidente sulle distanze più brevi.



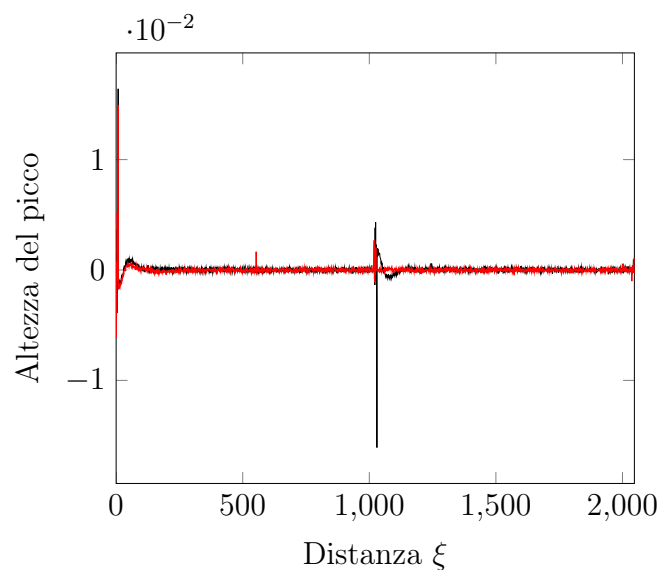
(a) *L'intero set di misure*



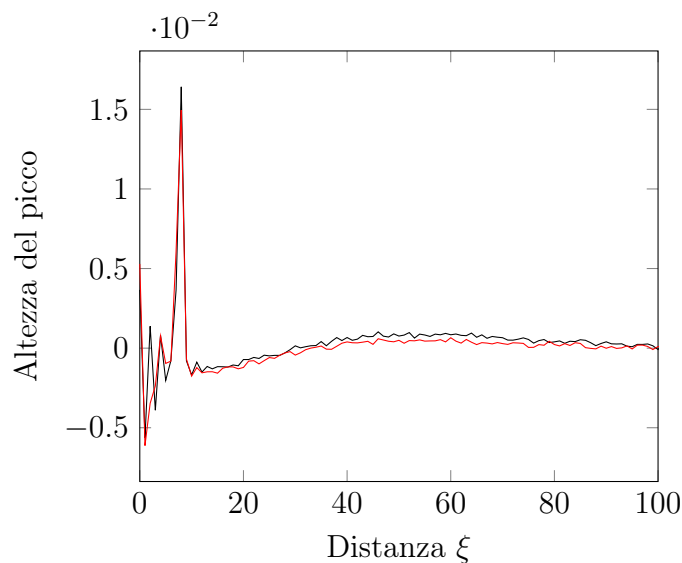
(b) *Zoom sul picco di correlazione*

Figura 5.13: Rappresentazioni più e meno ingrandite delle misure degli alberi a ~ 75 m con 10^5 sequenze. In rosso la M-sequence, in nero la A2.

In queste figure vediamo a confronto le misure effettuate con la sequenza M e la sequenza A2. I picchi sono ben visibili con entrambe le misure, nonostante il segnale decresca molto sulle lunghe distanze. L'apparente crescita del rumore nelle misure di bersagli più lontani è data dall'ingrandimento della scala nelle figure. Tuttavia, questo rumore non può essere trascurato perché sulle misure di bersagli lontani - come il gasometro o più - può influenzare la misura e



(a) *L'intero set di misure*

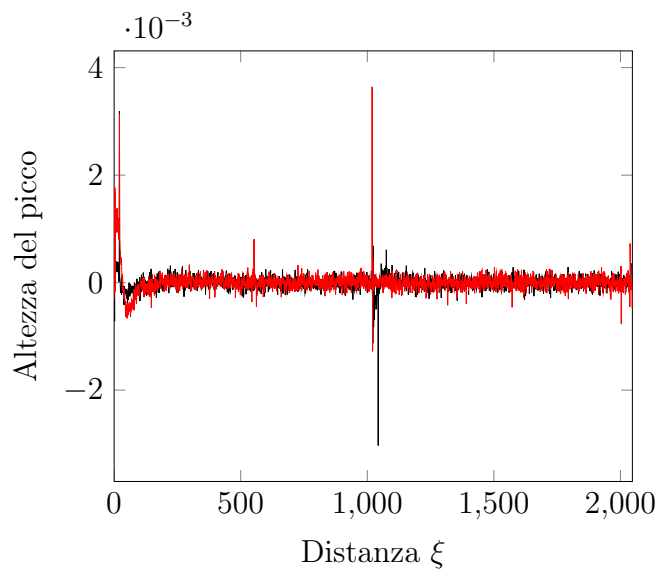


(b) *Zoom sul picco di correlazione*

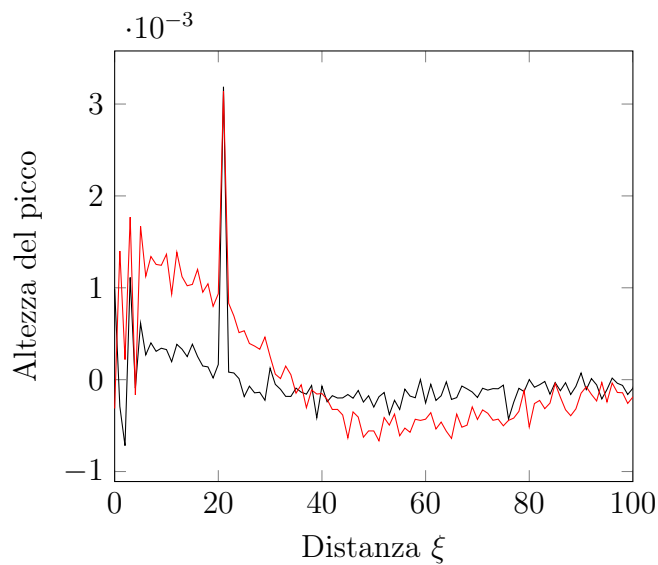
Figura 5.14: Rappresentazioni più e meno ingrandite delle misure degli alberi a ~ 120 m con 10^5 sequenze. In rosso la M-sequence, in nero la A2.

confondere. Osservare queste misure (in particolare i bersagli più distanti, come il gasometro) rende evidente quanto sia importante riuscire a minimizzare il rumore in misure di questo genere.

Questo rumore è dovuto in buona parte all'inadeguatezza delle componenti del nostro strumento (i.e. il laser con un modo spaziale poco efficace, il fotodiodo e il raccogliatore troppo ridotti...), al fatto che le misure sono state eseguite di giorno (cioè la luce ambientale, seb-



(a) *L'intero set di misure*



(b) *Zoom sul picco di correlazione*

Figura 5.15: Rappresentazioni più e meno ingrandite delle misure del gasometro a ~ 315 m con 10^5 sequenze. In rosso la M-sequence, in nero la A2.

bene filtrata, ha disturbato la nostra misura) e soprattutto a rumori elettronici dovuti alle componenti dello strumento. La modulazione del nostro laser non impulsato, infatti, comporta l'accensione e spegnimento dell'alimentazione, vale a dire una variazione della corrente nelle componenti dell'elettronica di circa 250 mA in alcuni nanosecondi in vicinanza dell'amplificazione del fotodiode: probabilmente questa commutazione causa un transiente oscillante che si

smorza dopo un'oscillazione o due, ma queste poche oscillazioni si vedono, in quanto durano $\sim 10 \mu s$, corrispondenti a 100 pixel sull'asse della distanza.

Non è stato possibile con il nostro strumento notare una differenza fra le sequenze M ed A2. C'è un rumore abbastanza forte, specialmente sulle brevi distanze nelle misure di lunghe distanze: si vedono infatti nelle vicinanze dell'origine le oscillazioni descritte. Il rumore che affligge le misure fatte con la sequenza M non è meno potente di quello sulle misure con la A2: anche queste soffrono di tale oscillazione causata dal rumore interno allo strumento.

Parte IV

Epilogo

Capitolo 6

Conclusioni

DURANTE IL LAVORO DI TESI abbiamo utilizzato uno strumento potenzialmente in grado di ottenere misure di grande valore in quanto utili a una grande varietà di scopi pratici illustrati nel Capitolo 1.

Il lavoro di tesi è stato utile anche per osservare come con un'elettronica semplice ed esigua si possono ottenere risultati tutt'altro che triviali, ma costruiti su una matematica discreta non banale descritta dalla teoria dei polinomi caratteristici nei campi di Galois illustrata nel Capitolo 2.

Applicare questa matematica alla misurazione del LiDAR è fondamentale, sia per ridurre il prezzo dello strumento (si evita di utilizzare un laser impulsato), sia perché si riesce a migliorare la qualità grazie alla caratteristica “ δ -correlazione” delle sequenze pseudocasuali massimali e alle altre funzioni di autocorrelazione delle altre sequenze usate, come illustrato nel Capitolo 3.

Le misure effettuate ci hanno permesso di valutare le caratteristiche di questo strumento, sebbene non fossero precise come quelle degli articoli presi in esame. Abbiamo verificato (v. Capitolo 5) le ipotesi che ci eravamo prefissati - l'altezza del picco rilevato in funzione della distanza, il miglioramento della precisione con l'aumento del numero di sequenze usate L , il confronto fra la sequenza M e la A2 - con una confidenza accettabile.

6.1 Altezza del picco in funzione della distanza

Per prima abbiamo verificato l'ipotesi secondo cui la potenza rilevata dal fotodiodo calasse con la distanza al pari della potenza luminosa, cioè proporzionalmente a d^{-2} . La potenza luminosa decresce con quella potenza in seguito a considerazioni geometriche, ma che i picchi di correlazione rilevati dal nostro apparecchio seguisse la stessa legge non è affatto scontato a causa del meccanismo di funzionamento dello strumento (la correlazione del segnale analogico con il segnale elettronico). Come abbiamo già mostrato nella tabella 5.1 abbiamo riscontrato dei buoni fit, anche basandoci sul test del χ^2 , che mostravano che la potenza della distanza doveva essere proprio -2 .

Questa dipendenza ci mostra quanto una misura diventa più difficile man mano che i bersagli da misurare si allontanano a causa della perdita di segnale. Per misure distanziometriche non

costituisce un problema, perché basta che il picco si veda, ma si tratta di un dettaglio non da poco quando si effettuano misure di nuvole (fino a svariati km di altezza) o di geomorfologia.

6.2 Variazione del numero L di sequenze

Variando il numero di sequenze lanciate abbiamo in sostanza aumentato il numero di misure. Abbiamo verificato che l'errore statistico delle nostre misure era maggiore dell'errore associato al processo di misura in sé. Non avevamo grossi dubbi che ciò fosse vero, ma abbiamo potuto osservare cosa significhi questo in un contesto del genere. Abbiamo osservato (paragrafo 5.2) come aumentare il numero L di sequenze inviate migliori notevolmente il segnale riducendo il rumore (che si mostra come “vibrazioni” attorno allo zero di misura) rispetto alla misura: il parametro SNR aumenta notevolmente in funzione di L , sebbene non - come ci saremmo aspettati - come N^{-1} , ma più “lentamente”.

Nelle nostre misure abbiamo potuto osservare che il rumore può essere attenuato aumentando il numero di sequenze. Va tuttavia messo in conto che per lanciare molte sequenze serve più tempo (a noi per lanciarne 10^5 a 10 MHz è servito qualche minuto) e se si vuole aumentare di molto questo numero si rischia di compromettere la misura. Ad esempio, le nuvole o le polveri sottili che si misurano in atmosfera possono spostarsi e dare alla misura un effetto di “fotografia mossa”; per le misure eseguite da un velivolo invece può non essere possibile fare misure lunghe a causa del moto del mezzo. Inoltre, una misurazione prolungata può causare, oltre che al bersaglio o allo strumento, uno spostamento o un cambiamento all'ambiente stesso che genera il rumore: allora può succedere che lo strumento confonda un rumore di fondo diverso da quello misurato prima con il segnale di un bersaglio. Va quindi trovato un compromesso fra tempo di misura e precisione.

6.3 Diverse sequenze pseudocasuali

Parliamo ora delle differenti sequenze utilizzate per modulare il laser: discutiamo i miglioramenti che la sequenza A2 ha portato rispetto alla M-sequence.

Dall'analisi dati non abbiamo osservato con il nostro strumento un miglioramento sostanziale come sarebbe stato invece predetto secondo la teoria proposta. Tale teoria non è quindi corroborata dal nostro esperimento, per quanto un'analisi basata sulle misure di uno strumento così rumoroso non possa definitivamente confutarla. Ciononostante, per quanto poco preciso il nostro strumento è un LiDAR a tutti gli effetti, perciò a rigor di teoria qualche cambiamento si sarebbe dovuto comunque osservare.

Secondo il nostro lavoro la sequenza A2 è sostanzialmente equivalente alla M: il rumore è forte tanto con una quanto con l'altra sequenza. Le differenze sono talmente piccole da risultare trascurabili o non imputabili all'uso di una sequenza o dell'altra, ma piuttosto al rumore tecnico prodotto dallo strumento.

Bibliografia

- [1] Chikao Nagasawa, Makoto Abo, Hudeki Yamamoto, Osamu Uchino. *Random modulation cw lidar using new random sequence*, Applied optics Vol. 29 No. 10, 1990.
- [2] National Oceanic and Atmospheric Administration. *What is LiDAR?*, National Ocean Service.
- [3] Aerial Surveying Inc.. *About LiDAR - Aerial LiDAR vs. ground survey data*, lidar1.com/?page_id=12.
- [4] Microgeo. *Aeromax LiDAR System*, www.microgeo.it/Droni/aeromax-lidar-system.php, 2010.
- [5] Provincia autonoma di Trento. *Lidar*, Portale Geocartografico Trentino.
- [6] Regione Emilia-Romagna. *Geologia, sismica e suoli*, Ambiente, 2011.
- [7] Douglas Kevin. *Progress and promise in DIAL LiDAR*, NIST Physical Measurements, 2012.
- [8] U.S. Geological Survey. *CLICK, Center for LiDAR Information, Coordination and Knowledge*, lidar.cr.usgs.gov.
- [9] Alexandra Witze. *Sprawling Khmer cities unearthed in Cambodian jungle*, Nature News Blog, 2013.
- [10] *Wikipedia, the free encyclopedia*, en.wikipedia.org, 2014.
- [11] Mike Thomsen. *Linear Feedback Shift Registers, Galois Fields, and Stream Ciphers*, Cryptography II, 2013.
- [12] Paul Horowitz, Winfield Hill. *The art of electronics*, Cambridge University Press, 1980.
- [13] GIMPS project discovers. *Largest known prime number, $2^{57885161} - 1$* , www.mersenne.org, 2013.
- [14] Richard Brent. *Search for Primitive Trinomials (mod 2)*, maths.anu.edu.au, 2013.
- [15] Frank Ruskey. *Information on Primitive and Irreducible Polynomials*, COS, the Combinatorial Object Server, 2011.

- [16] Renaud Matthey, Valentin Mitev. *Pseudo-random noise-continuous-wave laser for surface and cloud measurements*, Optics and laser engineering 43 557-571, 2005.