# Università degli Studi di Bologna

**FACOLTÀ DI INGEGNERIA**

**Corso di Laurea in Ingegneria Civile**


**Tesi di Laurea in**
**FOTOGRAMMETRIA L**

# RILEVAMENTO FOTOGRAMMETRICO DIGITALE NON CONVENZIONALE ED ANALISI STRUTTURALE AGLI ELEMENTI FINITI DELL'ARCO D'AUGUSTO DI RIMINI


Tesi di Laurea di:

**MAURIZIO SERPIERI**

Relatore:

**Prof. ANTONIO ZANUTTA**

Co-relatori:

**Prof. Ing. FRANCESCO UBERTINI**
**Ing. SIMONETTA MONTAGUTI**
**Prof. Ing. STEFANO DE MIRANDA**



**Anno Accademico 2004/2005**

*Alla mia famiglia:*
*i genitori Roberto e Antonella,*
*mio fratello Massimo.*
*Ai miei nonni e zio Alfiero.*

# Introduzione

# Capitolo I

## MODERNE METODOLOGIE E STRUMENTAZIONI PER I RILIEVO DEI BENI CULTURALI

**1.1** INTRODUZIONE p. 4
**1.2** CARATTERISTICHE DEL RILEVAMENTO DEI BENI CULTURALI p. 6
**1.3** STRUMENTI E PRODOTTI DERIVABILI p. 12
1.3.1 *Il telerilevamento* p. 13
1.3.2 *Il laser scanning* p. 13
1.3.3 *La strumentazione topografica elettronica* p. 21
1.3.4 *Il G.P.S.* p. 22
1.3.5 *La fotogrammetria* p. 24
**1.4** IL METODO FOTOGRAMMETRICO p. 26
1.4.1 *La fotogrammetria convenzionale* p. 26
1.4.1.1 Le equazioni di collinearità p. 31
1.4.1.2 I parametri di orientamento p. 33
1.4.2 *La fotogrammetria monoscopica* p. 37
1.4.3 *La fotogrammetria digitale* p. 38
1.4.4 *L'ortofoto* p. 40

# Capitolo II

## DOCUMENTAZIONE STORICA E CONTESTO GEOGRAFICO DELL'ARCO D'AUGUSTO DI RIMINI

**2.1** INTRODUZIONE p. 45
**2.2** IL TEMPO DELL'ARCO p. 47
**2.3** LA CITTÀ AL TEMPO DI AUGUSTO p. 52
**2.4** L'ARCO D'AUGUSTO: STORIA ED EVOLUZIONE p. 62
2.4.1 *Ipotesi ricostruttive delle torri esistite ai lati dell'arco* p. 65
2.4.2 *L'apparato di fondazione dell'arco d'Augusto* p. 72
2.4.3 *L'iscrizione dell'arco* p. 72
2.4.4 *Modalità di costruzione, analisi formale e rapporti geometrici* p. 76
2.4.5 *Ipotesi ricostruttive dell'arco al tempo dei Romani* p. 83
2.4.6 *Iconografia e storia dell'arco dall'origine ai giorni nostri* p. 91
2.4.7 *Lista dell'iconografia storica fino al Novecento* p.141

**2.5** RILIEVI STORICI DELL'ARCO AUGUSTEO p.142
2.5.1 *Il rilievo fotogrammetrico dell'arch. Roberto Angelini eseguito nell'anno 1982* p.144
2.5.2 *Il rilievo di Guido Achille Mansuelli eseguito nel 1942* p.151
2.5.3 *Il rilievo di Traiano Finamore eseguito nel 1938* p.156
2.5.4 *Il rilievo di Maurizio Brighenti eseguito nel 1825* p.157
2.5.5 *Il rilievo di Tommaso Temanza eseguito nel 1741* p.164
2.5.6 *Il rilievo digitale del 1999* p.168

# Capitolo III

## RESTAURI ESEGUITI SULL'ARCO D'AUGUSTO DI RIMINI

**3.1** INTRODUZIONE p.170
**3.2** RESTAURI DAL MEDIOEVO AD OGGI p.171
3.2.1 *Il consolidamento statico del 1947 di G. Rinaldi e P. Arias* p.178
3.2.2 *L'ultimo restauro architettonico eseguito nel 1996-98 dall'arch. Pier Luigi Foschi* p.181
3.2.2.1 La struttura dell'arco d'Augusto di Rimini p.182
3.2.2.2 Problematiche che hanno indotto al restauro: le patine superficiali ed i dissesti statici p.185
3.2.2.3 Fasi ed interventi dell'ultimo restauro p.189
**3.3** IMMAGINI DELL'ARCO PRIMA E DOPO IL RESTAURO p.194

# Capitolo IV

## IL CONTROLLO E MONITORAGGIO DELLE STRUTTURE EDIFICATE

**4.1** INTRODUZIONE p.204
**4.2** AZIONI SULLE STRUTTURE p.205
**4.3** IL CONTROLLO FOTOGRAMMETRICO DEI MONUMENTI ARCHITETTONICI p.206
**4.4** IL CONTROLLO STATICO DALL'ANALISI DI RILIEVI p.211

# Capitolo V

## RILIEVO TOPOGRAFICO E FOTOGRAMMETRICO DELL'ARCO D'AUGUSTO DI RIMINI

**5.1** INTRODUZIONE p.215
**5.2** OBIETTIVO DEL RILIEVO p.216
**5.3** LA STRUMENTAZIONE DISPONIBILE UTILIZZATA p.218
5.3.1 *La camera digitale amatoriale e la sua calibrazione* p.218
5.3.2 *La cordella metrica* p.222
5.3.3 *I target tape adesivi* p.222
5.3.4 *Il filo a piombo* p.223
**5.4** RICOGNIZIONE, EIDOTIPO E PROBLEMATICHE p.225
**5.5** IL PROGETTO DEL RILIEVO p.232
5.5.1 *La scala del fotogramma* p.232
5.5.2 *Il progetto dello schema di presa* p.234
5.5.3 *Studio dell'individuazione di linee verticali* p.238
**5.6** LA DISPOSIZIONE DEI TARGET TAPE p.240
**5.7** MISURE EFFETTUATE CON LA CORDELLA METRICA p.247
**5.8** MISURE REALIZZATE TRAMITE IL FILO A PIOMBO p.249
**5.9** MONOGRAFIE DEI PUNTI RILEVATI p.251
**5.10** IL RILIEVO FOTOGRAMMETRICO p.258
**5.11** CONCLUSIONI p.289

# Capitolo VI

## ELABORAZIONE DEI DATI RILEVATI E CONSEGUENTI PRODOTTI DI OUTPUT

**6.1** INTRODUZIONE p.290
**6.2** IMPIEGO DEL SOFTWARE PHOTOMODELER p.293
6.2.1 *La creazione del progetto* p.294
6.2.2 *L'orientamento interno dei fotogrammi* p.297
6.2.3 *L'orientamento esterno relativo fra i fotogrammi* p.299
6.2.4 *La restituzione vettoriale dell'arco d'Augusto* p.305
6.2.4.1 Problematiche di restituzione p.309
6.2.5 *La scalatura del modello tramite i vincoli metrici di distanza* p.317
6.2.6 *Definizione di linee verticali tramite le misure ottenute per mezzo del filo a piombo* p.321

6.2.7 *L' orientamento esterno assoluto tramite l'assegnazione dell'origine ed assetto della terna cartesiana locale* p.323
6.2.8 *La creazione del DSM dell'arco con l'applicazione di textures raster* p.326
**6.3** ELABORATI GRAFICO-NUMERICI OTTENUTI IN OUTPUT DA PHOTOMODELER p.330
6.3.1 *Immagini in proiezione prospettica ed assonometrica del modello digitale 3D ottenuto dalla restituzione dell'arco d'Augusto* p.331
6.3.2 *Dalla restituzione vettoriale 3D agli elaborati grafici 2D* p.348
6.3.2.1 Tavola n. 1 p.350
6.3.2.2 Tavola n. 2 p.355
6.3.2.3 Tavola n. 3 p.361
6.3.2.4 Tavola n. 4 p.366
6.3.2.5 Tavola n. 5 p.366
6.3.2.6 Tavola n. 6 p.366
6.3.3 *Le ortofoto estrapolate dal DSM dell'arco* p.370
6.3.3.1 Tavola n. 7 p.372
6.3.3.2 Tavola n. 8 p.375
6.3.4 *Creazione del modello stereoscopico dell'arco d'Augusto con la tecnica dell'anaglife* p.379
**6.4** LA REALTÀ VIRTUALE E L'ARCO p.382
**6.5** CONCLUSIONI p.385

# Capitolo VII

## CONFRONTO FRA IL RILIEVO ESEGUITO IN QUESTA TESI E QUELLO DELL'ANGELINI DEL 1982

**7.1** INTRODUZIONE p.389
**7.2** LA TRASFORMAZIONE AFFINE NEL PIANO p.391
**7.3** CONFRONTO FRA I PROSPETTI VERSO ROMA p.398
**7.4** CONFRONTO FRA I PROSPETTI VERSO RIMINI p.407

# Capitolo VIII

## INQUADRAMENTO GEOLOGICO E GEOTECNICO DEL TERRENO AI PIEDI DELL'ARCO

**8.1** INTRODUZIONE p.417
**8.2** GEOMORFOLOGIA DEL CENTRO STORICO DI RIMINI p.419
**8.3** LA PROVA PENETROMETRICA SATICA C.P.T. p.424
**8.4** DETERMINAZIONE DELLA STRATIGRAFIA
DALLA PROVA C.P.T. E CLASSIFICAZIONE SECONDO SEARLE p.427
**8.5** DETERMINAZIONE DEI PARAMETRI GEOTECNICI
DEI VARI STRATI SULLA BASE DELLA PROVA C.P.T. p.429
**8.6** MODELLIZZAZIONE DEL TERRENO COME
UN SOLIDO ELASTICO-LINARE p.432
**8.7** CALCOLO DELLA CAPACITÀ PORTANTE LIMITE p.439
8.7.1 *Determinazione della capacità portante limite $q_{lim}$*
*dall'analisi della prova C.P.T.* p.439
8.7.2 *Determinazione della capacità portante limite $q_{lim}$*
*tramite formule teoriche di equilibrio limite* p.441
8.7.2.1 La teoria di Terzaghi p.443
8.7.2.2 La teoria di Meyerhof p.447
8.7.2.3 La teoria di Hansen p.449
8.7.2.4 Scheda riassuntiva delle capacità portanti limite p.452
**8.8** IL MODULO DI REAZIONE DEL TERRENO p.454
8.8.1 *Determinazione del modulo $k_r$ dalla prova di carico con piastra* p.455
8.8.2 *Determinazione del modulo $k_r$ con la formula di Bowles* p.456

# Capitolo IX

## ANALISI STRUTTURALE F.E.M. DELL'ARCO D'AUGUSTO DI RIMINI

**9.1** INTRODUZIONE ALLA MODELLAZIONE NUMERICA p.458
**9.2** INTRODUZIONE ALLA TECNICA F.E.M. p.464
**9.3** IL SOFTWARE STRAUS7 p.469
9.3.1 *Principi di funzionamento* p.471
9.3.1.1 Introduzione p.471
9.3.1.2 La costruzione della Mesh p.472

9.3.1.3 Immissione delle condizioni al contorno,
delle condizioni di carico e delle proprietà dei materiali p.473
9.3.1.4 Analisi ed interpretazione dei risultati p.476
9.4 REOLOGIA E CARATTERISTICHE DEI MATERIALI
IMPIEGATI PER LA COSTRUZIONE DELL'ARCO p.478
9.4.1 *Pietra di Nabresina ROMAN STONE* p.480
9.4.1.1 Scheda tecnica della pietra p.482
9.4.2 *Muratura a sacco con iniezioni di consolidanti di malta cementizia M1* p.485
9.4.2.1 Parametri meccanici p.487
9.4.3 *Tufo legato da calce e lapillo siliceo* p.487
9.4.3.1 Parametri meccanici p.487
**9.5** ANALISI F.E.M. MONODIMENSIONALE DELL'ARCO p.488
9.5.1 *Ipotesi sul modello numerico* p.489
9.5.2 *Il modello geometrico e delle azioni esterne* p.489
9.5.3 *Il modello reologico del materiale* p.494
9.5.4 *Risultati dell'analisi statica. P. pr. + permanente della muratura* p.495
9.5.4.1 Considerazioni sui risultati ottenuti p.500
9.5.5 *Analisi modale dell'arco: calcolo delle forme modali*
*e delle relative frequenze naturali* p.504
**9.6** ANALISI F.E.M. NEL PIANO MEDIO DELL'ARCO
SENZA CONSIDERARE L'INTERAZIONE CON IL TERRENO p.508
9.6.1 *Ipotesi sul modello numerico* p.509
9.6.2 *Il modello geometrico e delle azioni esterne* p.510
9.6.3 *Il modello reologico dei materiali* p.513
9.6.4 *Risultati dell'analisi statica nella condizione di peso proprio* p.516
9.6.4.1 Considerazioni sui risultati ottenuti p.527
9.6.5 *Analisi modale dell'arco: calcolo delle forme modali*
*e delle relative frequenze naturali* p.528
**9.7** CONCLUSIONI p.532

**Conclusioni**

**Appendice A**

**Appendice B**

**Bibliografia**

**Ringraziamenti**

# Introduzione

La scala della scienza è come quella di Giacobbe:
finisce ai piedi di Dio.
Albert Einstein ( 1879 – 1955 )

L'Arco d'Augusto di Rimini rappresenta da sempre il monumento simbolo della città; ha visto ogni periodo storico, dei quali riporta tuttora i segni in modo visibile. L'alto valore storico, culturale ed artistico che l'Arco porta con se merita di essere valorizzato, conservato e studiato. Per questo motivo ho voluto riassumere nella tesi gran parte del conosciuto al riguardo dell'Arco ed intraprendere lo studio dell'ignoto. E' stato realizzato un rilievo fotogrammetrico del monumento romano e una successiva analisi strutturale mediante la tecnica F.E.M. Il seguente lavoro è stato suddiviso in due blocchi principali: il primo coinvolge la disciplina fotogrammetrica, mentre il secondo attiene alla scienza delle costruzioni. In tal modo la mia intenzione di creare un "ponte" fra le due diverse dottrine è stato portato a termine con successo.

In questa tesi è possibile notare come le due discipline possono cooperare fra loro in maniera estremamente efficace.

Il lavoro realizzato potrebbe sembrare fine a se stesso, mentre in realtà si inserisce in una più ampia panoramica; il rilievo è stato eseguito con la moderna tecnica digitale non convenzionale, la quale ha permesso di comprendere quanto essa sia in grado di soddisfare le varie esigenze di rilievo nell'ambito dei Beni Culturali.

Nel primo capitolo si affrontano le tematiche relative al rilievo dei Beni Culturali ; dopo una carrellata sulle problematiche e sulle moderne tecniche di rilievo in questo settore, ci si sofferma ad analizzare l'approccio fotogrammetrico differenziandolo in due modalità operative concettualmente diverse: il caso stereoscopico e quello monoscopico.

Si concentra, poi, l'attenzione sul settore della fotogrammetria al quale è rivolto il maggior interesse da parte della ricerca e che mostra contemporaneamente un elevato tasso di crescita tecnologica: la fotogrammetria digitale.

Il secondo capitolo è dedicato interamente alla storia dell'Arco d'Augusto: si riporta ogni particolare storico riguardante il monumento, con particolare attenzione nella ricostruzione di tutte le vicissitudini subite. Nell'ultimo paragrafo del medesimo capitolo sono stati riportati tutti i rilievi dell'Arco realizzati dal Medioevo ad oggi. Tale documentazione è risultata di notevole importanza per valutare l'evolversi della geometria dell'edificio storico.

Il terzo capitolo riporta la serie di restauri che l'Arco riminese ha subito nel corso dei secoli; si presta attenzione al Novecento, in particolare dal secondo dopoguerra ad oggi, in quanto durante tale sessantennio il monumento augusteo ha visto la realizzazione di due grandi interventi di restauro: il primo eseguito nel 1947 dall'Ing. Rinaldi G., il secondo nel 1996-98 per opera dell'Arch. Foschi P.L.

Nel quarto capitolo si parla di come la tecnica fotogrammetrica si presti molto bene all'analisi e al controllo delle deformazioni strutturali: infatti un monitoraggio dello stato di salute e sicurezza statica degli edifici rappresenta un'importante obiettivo.

Il capitolo cinque è dedicato al rilievo topo-fotogrammetrico dell'oggetto, affrontato in tutte le sue fasi: ricognizione preliminare,progettazione ed esecuzione delle prese. In tale capitolo sono sottolineati i problemi di rilievo incontrati ed i metodi impiegati per risolverli. La tecnica monoscopica e l'impossibilità di effettuare prese a quota elevata hanno rappresentato ulteriori problemi.

Il sesto capitolo affronta l'elaborazione dei dati (ricavati dal rilievo) mediante il software PhotoModeler Pro 5, impiegato per effettuare la restituzione monoscopica al fine di ottenere un modello geometrico digitale dell'arco, sia di tipo vettoriale che raster. Tale modello

digitale è stato scalato sulla base delle misure eseguite sul campo. Con il software è stato possibile compiere le tre fasi di elaborazione dei dati fotogrammetrici: orientamento interno, orientamento esterno e restituzione. Alla fine del processo di restituzione si è ottenuto un file grafico 3D che sintetizza tutte le informazioni metriche dell'arco; da tale elaborato sono state poi ricavate le classiche rappresentazioni piane (prospetti, sezioni, profili, piante, ecc…). Oltre agli elaborati vettoriali sono state costruite anche delle preziosissime ortofoto di precisione derivate dalla proiezione ortogonale su vari piani del DSM con *textures* fotografiche.

Nel settimo capitolo si confronta il presente rilievo con l'ortofoto realizzata nel 1982 dall'Arch. Angelini R. Il paragone si basa sulla differenza di coordinate di punti omologhi situati sui due fronti dell'Arco.

Il capitolo otto riporta alcune informazioni al riguardo della geomorfologia della zona limitrofa all'Arco. I primi paragrafi riportano la stratigrafia ottenuta dai risultati della prova C.P.T.; per ogni strato sono stati calcolati i parametri geotecnici attraverso apposite formule e tabelle di correlazione. Negli ultimi paragrafi è stata determinata la capacità portante del complesso terreno-fondazione del monumento riminese mediante diversi approcci.

Nell'ultimo capitolo si descrive l'impiego del software agli elementi finiti Straus7 per creare ed elaborare il modello numerico dell'Arco. Sono riportati i risultati dell'analisi statica effettuata nella condizione di peso proprio che (assieme al sisma), rappresenta la condizione più gravosa. In particolare i modelli numerici adottati sono due: il primo, molto semplificato, impiega elementi di tipo trave, il secondo, maggiormente sofisticato, adotta elementi del tipo piastra sollecitati nel piano medio.

# Capitolo I

Con poco sapere, ma di buona qualità, si produce di più
che con moltissimo sapere di cattiva qualità.
Arthur Schopenhauer ( 1788 – 1860 )

# MODERNE METODOLOGIE E STRUMENTAZIONI PER I RILIEVO DEI BENI CULTURALI

## 1.1 INTRODUZIONE

L'Italia gode di un'enorme ricchezza nell'ambito dei beni culturali; la lunga e fiorente storia artistica ed intellettuale che il nostro paese ha visto ha fatto si che praticamente ogni città, dal più piccolo paese ai grandi capoluoghi, possegga dei resti concreti e variegati fra loro che ci raccontano di quale fortuna e ricchezza l'Italia ha goduto. Dalle maestose cattedrali al piccolo affresco di un artista minore, dagli scavi archeologici più celebrati fino al singolo reperto, esiste una immensa moltitudine di situazioni che abbracciano la nostra storia e la storia della nostra arte che meritano di essere valorizzate e conservate.
Ed ecco che qui entrano in scena le discipline geo-topo-cartografiche, esse infatti permettono di descrivere sia visivamente ( la fotogrammetria ) sia metricamente ogni tipo di oggetto, dalle forme e dimensioni più svariate; permettono di rilevare il più piccolo reperto archeologico ma anche le gigantesche chiese gotiche. Per la valorizzazione e conservazione di questo patrimonio storico la conoscenza metrica-descrittiva ( permessa dalle discipline del rilevamento ) con indicazione della forma,posizione,geometria e colore è sicuramente un requisito importante, ma accanto ad esse deve anche essere previsto un adeguato studio storico-artistico dell'oggetto.
La combinazione delle diverse discipline porta a concludere che per un accurato lavoro di documentazione e censimento dei beni culturali è necessario intraprendere necessariamente la strada che vede

coinvolte professionalità diverse tra loro che cercano di arrivare ad un processo di sintesi comune. Da qui si comprende come il problema sia più complicato del previsto, infatti per avere un'approfondita conoscenza del bene culturale non basta la sola descrizione metrica, ma servono anche altre informazioni che coinvolgono dottrine spesso molto differenti fra loro dove c'è anche una certa difficoltà di intercomunicazione a causa della diversa formazione professionale degli uomini che vi lavorano. Così l'archeologo si scontra con scienziati, topografi, ingegneri, storici d'arte, ecc…

La diversità di formazione delle differenti menti crea spesso i suddetti problemi di comprensione e dialogo che purtroppo spesso si vedono concludersi con un archeologo che si improvvisa esperto topografo, o viceversa l'operatore geomatico si avventura in delle interpretazioni storiche-artistiche proprie dell'archeologo e dello storico d'arte. Chiusa la parentesi sul problema di comprensione e dialogo fra le differenti discipline, facciamo ora un passo indietro, e ricordiamo al lettore che l'ultima frontiera del rilevamento nei beni culturali vede impiegate le più svariate dottrine che con diversi metodi ed anche moderne tecnologie tendono a fornire in output un unico studio integrato sull'oggetto che verrà poi archiviato negli enormi database chiamati sistemi informativi territoriali. La speranza è che in un prossimo futuro l'utente della rete potrà avere tutte le informazioni necessarie sull'oggetto desiderato semplicemente entrando in uno di questi archivi, il quali forniranno dettagli e caratteristiche tecniche adatte e richieste dalle svariate competenze professionali. Così si potranno trovare tutte le caratteristiche metriche adatte per eseguire un restauro, per analizzare lo stato di conservazione e consistenza dell'oggetto; oppure tutti i dati alfanumerici correlati possono fornire indicazioni sulla tipologia dei materiali impiegati, dati storici-artistici sul bene culturale, e mille altri dettagli ed informazioni.

## 1.2 CARATTERISTICHE DEL RILEVAMENTO DEI BENI CULTURALI

Il rilevamento dei beni culturali presenta caratteristiche specifiche, che, aldilà del dell'indubbio valore e fascino spesso costituito dagli oggetti rilevati, lo rendono di grande interesse e difficilmente descrivibile con schemi convenzionali e metodologie standardizzate. Ogni situazione è spesso un caso a sé, e non è raro che l'effettuazione del rilievo di un oggetto venga a costituire per l'operatore una sorta di sfida, costringendo a sopprimere con la propria esperienza,ed a volte con la propria fantasia, alla carenza di strumenti idonei di fronte a situazioni operative ed ambientali del tutto inusuali e difficoltose. Questo è proprio quello che è accaduto nel caso specifico di questa tesi: il rilievo fotogrammetrico dell'arco d'Augusto di Rimini. I problemi sono stati veramente molteplici, alcuni prevedibili e di cui si era a conoscenza, altri sono "spuntati" improvvisamente dal nulla durante le fasi intermedie del lavoro, creando non pochi problemi che sono stati per forza di cose risolti con l'ingegno. In prima persona posso garantire che in molti casi non si trovano soluzioni dettate dalla consuetudine operativa, o per lo meno senza dover rifar tutto da capo, in questi casi non volendosi "mangiare" il lavoro gia eseguito solamente la fantasia può portare a brillanti soluzioni.

Caratteristica importante del rilievo dei beni culturali e che spesso possiedono dimensioni molto variabili, si può andare dal minuscolo reperto al grande edificio storico, allo stesso tempo gigantesche costruzioni architettoniche possono contenere anche minuti particolari ( come decorazioni, affreschi, mosaicature, ecc… ) che sono ritenuti iportanti e degni di essere rilevati e conservati. In questi casi, vista la grande difformità di dimensioni si devono necessariamente utilizzare approcci di rilievo gerarchici a multiscala; allora i diversi oggetti vengono rilevati separatamente, anche con strumenti totalmente

differenti fra loro, in modo da raggiungere le precisioni necessarie e richieste per ogni tipo di particolare dell'intero bene culturale.

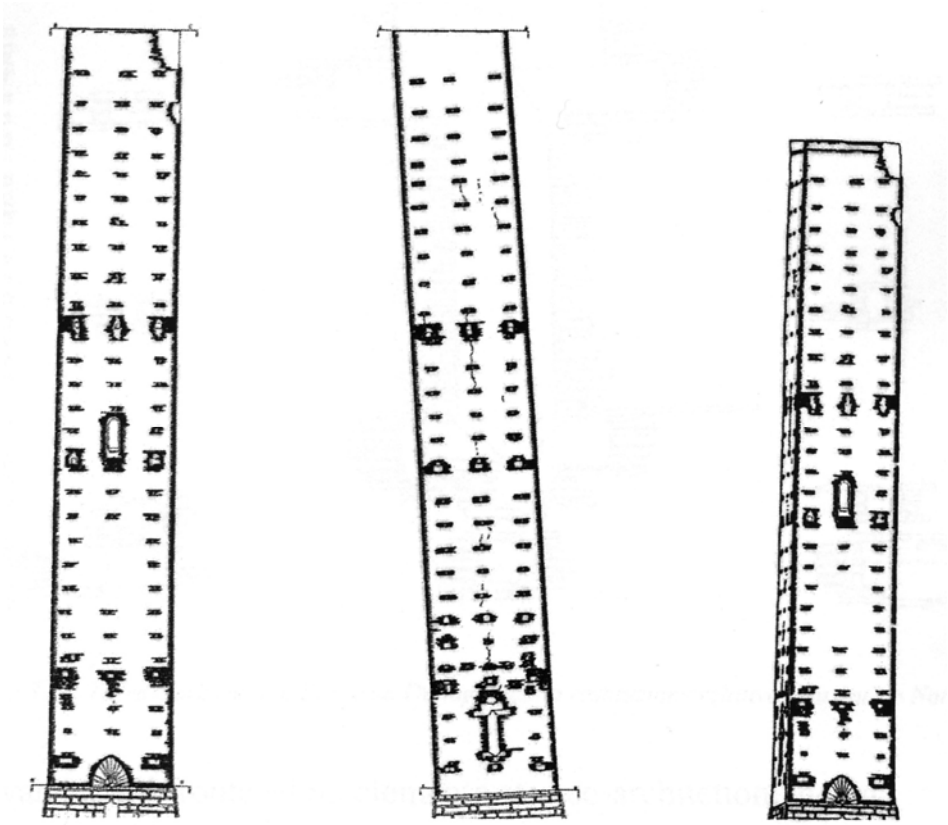


Figura 1.1 – Torre Garisenda di Bologna.
A sinistra è visibile il prospetto della parete ovest. Al centro è raffigurato il prospetto della parete nord. A destra si nota il modello tridimensionale ottenuto inserendo in un unico sistema di riferimento le facciate ovest e nord.
In queste immagini è possibile vedere effettivamente il procedimento di referenziazione fra i diversi rilievi citato nel testo: dai due prospetti si è ottenuto un unico modello 3D.
Osservano la torre al centro e la figura 1.2 è anche possibile notare l'approccio gerarchico multiscala del rilievo, anch'esso spiegato nel testo.

Rilevati tutti i particolari ( ad esempio di una cattedrale: affreschi, mosaici, strutture interne, statue, aperture, vetrate,ecc… ) con le diverse strumentazioni ( GPS, total station, laser scanning, fotogrammetria ) si è allora in possesso di diversi rilievi che sono ancora del tutto separati fra loro ( non si sa dove la statua sia posizionata all'interno della chiesa, come questa sia in relazione con i mosaici e le vetrate, ecc… ) e posseggono differenti precisioni ( ad es. sub-millimetrica per il mosaico, millimetrica per le statue,

centimetrica per le vetrate e di 2-3 cm per le strutture interne ed esterne della cattedrale ). A questo punto è assolutamente necessario trovare un modo per referenziare fra loro i diversi prodotti metrici ottenuti, in modo che essi possano dialogare con un sistema di riferimento comune a tutti. Questo assemblaggio può essere operato mediante la conoscenza di più punti doppi ( punti omologhi di cui sono note le coordinate in tutti i sistemi di riferimento adottati per i diversi rilievi ), ovvero devono essere stati collimati degli stessi punti sui diversi rilievi ( vedi figura 1.1 e 1.2 ).

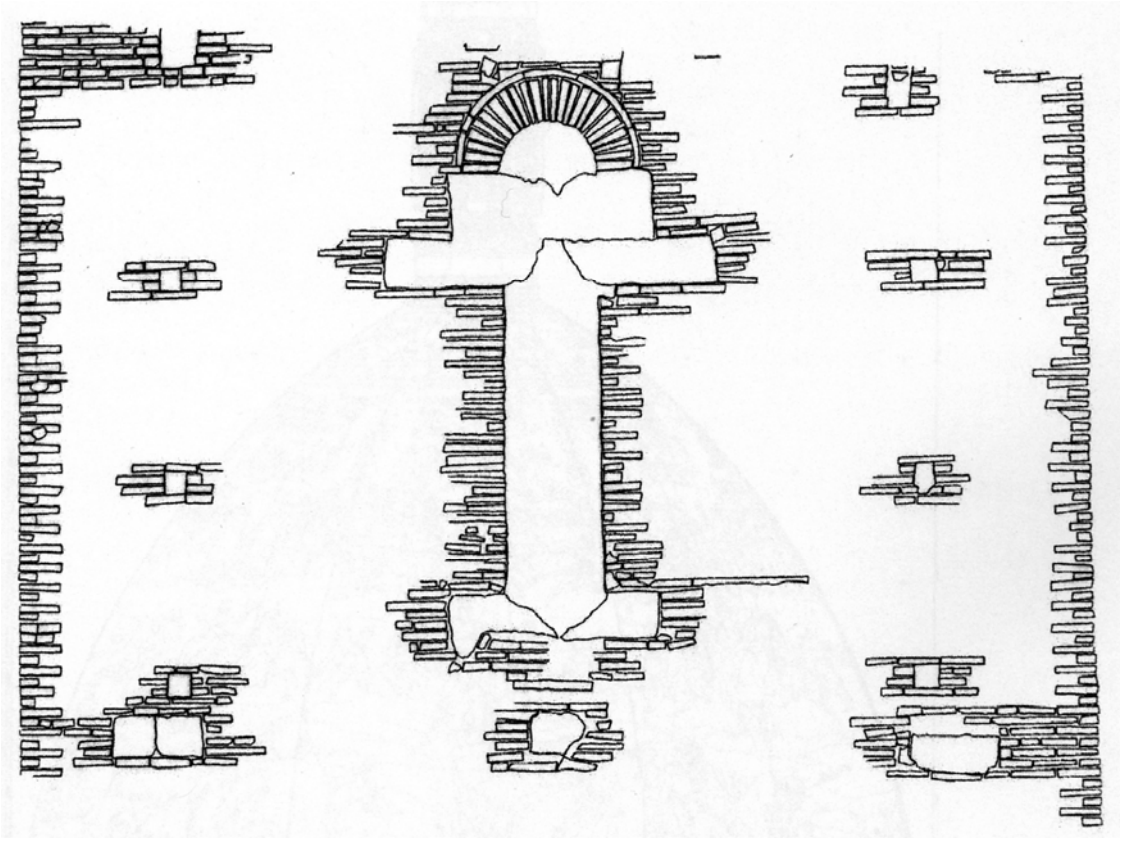


Figura 1.2 – Torre Garisenda di Bologna. Dettaglio della restituzione relativo alla parete nord.

Altro aspetto è quello dell'accuratezza stessa richiesta al rilievo. Questa può essere non molto elevata quando il primo obiettivo sia l'efficacia nella presentazione e visualizzazione dell'oggetto, d'altra parte l'utenza specialistica può invece richiedere requisiti molto stringenti in termini di risoluzione ed accuratezza: esistono esempi di rilievi di manufatti con precisioni millimetriche, ottenute con i laser a

scansione ( per ottenere ad esempio copie esatte di opere d'arte ) o con strumenti topografici di classe elevata ( per monitorare ad esempio il procedere delle deformazioni in una struttura ).

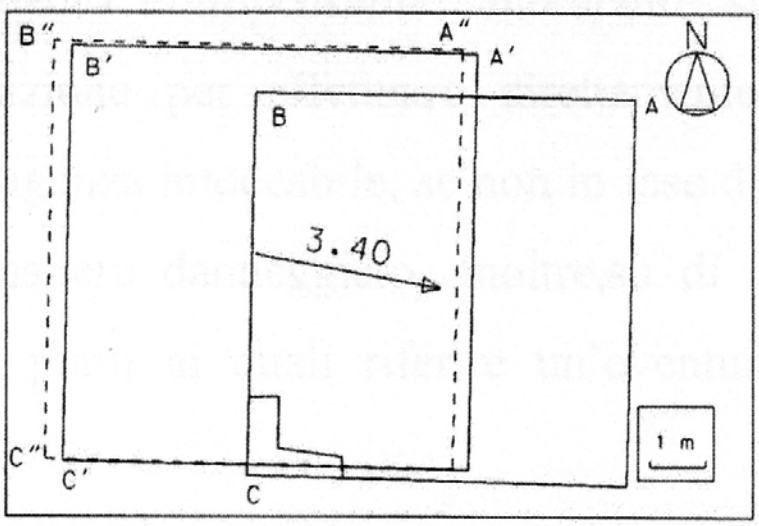



Figura 1.3 – Torre Garisenda di Bologna. Vista planimetrica della sommità e della base della struttura. Il tratto continuo indica la sommità della torre ed il contatto della muratura con il rivestimento in selenite alla base; il tratteggio indica l'intersezione della muratura con il piano del terreno, il vettore indica lo strapiombo.

Spesso nella pratica operativa c'è confusione ed incomprensione fra quello che il committente richiede e quello che il topografo gli fornisce, questo accade perché generalmente il committente non è in grado di specificare in modo esatto quale sia il grado di dettaglio nonché la precisione metrica richiesta per il suo studio. Se si deve costruire una strada è ovvio che il grado di dettaglio richiesto è quello che permette di visualizzare tutti i fabbricati esistenti, vecchie strade, ostacoli naturali ed artificiali, sarebbe inutile restituire anche particolari più minuti, allo stesso tempo la precisione richiesta e variabile in base al tipo di strada che si andrà a costruire, ma comunque non potrà scendere sotto alcuni centimetri. La stesso ragionamento deve essere fatto sui beni culturali, solamente che qui le cose diventano sempre più confusionarie e complicate, infatti i dettagli presenti su tali oggetti di importanza storica sono spesso numerosi, inoltre è anche difficile comprendere quale sia la precisione

più adatta al rilievo. In realtà precisione e grado di dettaglio devono essere forniti dal committente in funzione dello scopo per cui si richiede il rilievo, per evitare errori la chiarezza su quali dettagli devono essere restituiti e con quale precisione è fondamentale. Ad esempio per un restauro si vanno a richiedere elevate risoluzioni e accuratezze delle misure, in tal modo il restauratore avrà una ricchezza enorme di particolari restituiti con precisioni altissime; invece per il controllo delle deformazioni di una struttura il grado di dettaglio è superfluo, quello che conta è l'elevatissima determinazione metrica di un congruo numero di punti. In altri casi invece quello che interessa è un media descrizione complessiva del bene culturale senza pretese di elevate precisioni a scopo di visualizzazione in realtà virtuale. Dal discorso appena affrontato si comprende quale spreco di denaro e risorse umane avverrebbe nel caso di un rilevo eseguito con strumenti di classe elevata, che però serviva solamente per una banale visualizzazione in realtà virtuale. Ma potrebbe accadere anche il contrario, si spende poco ma poi si deve rifar tutto ( con spese doppie ) a causa dell'inadeguatezza del prodotto ottenuto.

Parliamo ora dei prodotto grafici richiesti; generalmente per i beni culturali, che posseggono impianti strutturali 3D e forme geometriche molto complesse, sono desiderati prodotti digitali tridimensionali; la classica separazione plano-altimetrica del topografo non interessa il rilevo fotogrammetrico dei vicini o la scansione laser, mentre invece la si può ritrovare negli interventi di cartografia a grande scala o in casi particolari. Nonostante il prodotto digitale sia di per se sufficiente ed adeguato si richiedono anche i prodotti grafici piani, infatti quest'ultimi hanno il vantaggio di essere visualizzati sulla carta stampata, inoltre le classiche rappresentazioni piane ( prospetti, sezioni, piante, alzate, profili, ecc… ) permettono di fare considerazioni e valutazioni su strapiombi, disassamenti, disallineamenti, spanciamenti, rotazioni, deformazioni,

schiacciamenti, che nel 3D sono difficilmente visibili, o per lo meno non è possibile quantificarne esattamente il valore.

Il contesto operativo è spesso il più vario, ed il rilevatore deve così risolvere problemi logistici non indifferenti; impossibilità di accesso a porzioni o all'intero oggetto, distanze non accettabili, coperture e ostruzioni, ecc., richiedendo spesso l'adozione di dispositivi speciali ( carrelli elevatori, palloni, rotaie sopraelevate, ecc… ) oppure rendono impossibili talune modalità di rilievo o di elaborazione dati. Le distanze in gioco possono variano da valori molto piccoli a centinaia di metri. All'operatore è dunque richiesta grande flessibilità operativa, con consapevolezza che ogni caso richiede una soluzione specifica e ragionata.

Attualmente le informazioni puramente geometriche possono essere integrate o accoppiate con dati di altra natura che ne aumentano il grado di utilizzazione; oltre all'immagine nel visibile si può citare l'acquisizione nelle bande dell'infrarosso, o con metodi multispettrali.

L'integrazione fra i vari dati e fra i diversi strumenti di rilievo sembra essere la pratica più all'avanguardia che probabilmente in un prossimo futuro diventerà la prassi comune, anche se questo approccio richiederà necessariamente competenze ampliate da parte dell'operatore che si deve scontrare con metodologie e strumentazioni di rilievo anche parecchio differenti fra loro.

In conclusione sottolineo che qualunque metodo o strumento di rilievo si utilizzi per rilevare un bene culturale non esistono e non è conveniente impiegare procedure standardizzate, quest'ultime infatti non si addicono ad oggetti che per la loro natura possono presentare una sterminata gamma di problematiche di rilievo. La soluzione migliore è studiare e pianificare dettagliatamente caso per caso le situazioni che di volta in volta si presentano.

## 1.3 STRUMENTI E PRODOTTI DERIVABILI

Allo stato attuale delle scienze del rilevamento non esiste uno strumento geo-topo-cartografico moderno che non possa essere impiegato nel settore dei beni culturali, ma di certo alcuni sono più idonei a risolvere i problemi insiti nel rilevamento di questi oggetti.

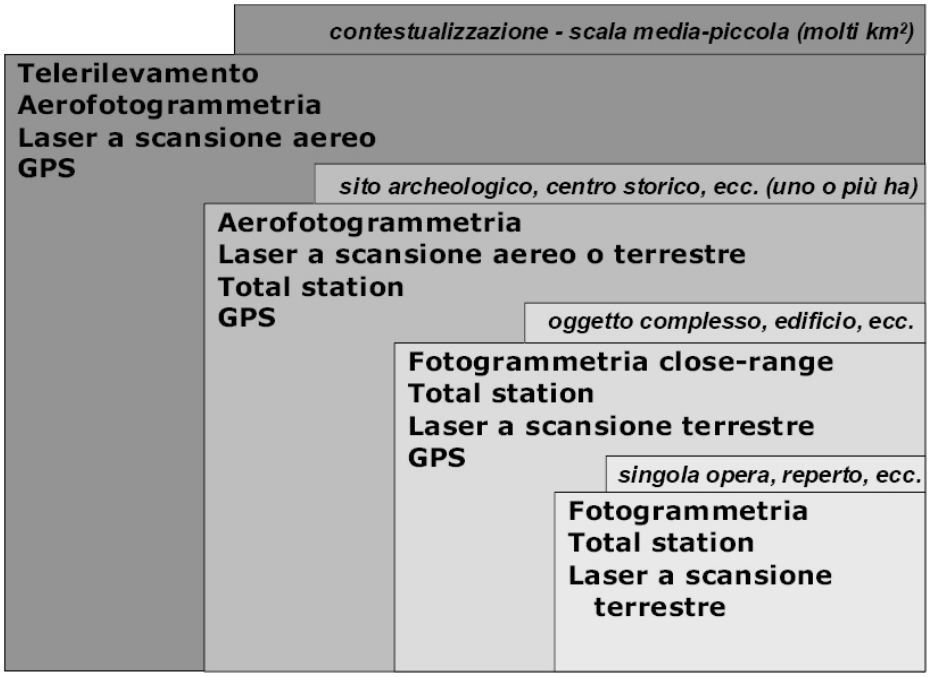



Figura 1.4 – Strumentazioni applicate alle diverse scale di intervento.

Generalmente i prodotti richiesti sono:

- mappe raster georeferenziate, a scopo di visualizzazione, interpretazione diretta o classificazione tematica per ambiti di ampiezza medio-grande, per esempio all'interno di applicazioni GIS;
- cartografia numerica di aree in 2.5D ed eventualmente in 3D;
- rappresentazioni in forma vettoriale di oggetti ( mediante prospetti, sezioni, profili, alzati, piante, ecc… ) da trattare all'interno di sistemi CAD;
- modelli tridimensionali di oggetti
- modelli digitali del terreno ( DTM ) e delle superfici ( DSM ) per visualizzazione, studi di visibilità, analisi ambientali, ecc…
- rappresentazioni in realtà virtuale e visuale.

### 1.3.1 Il telerilevamento

Esso è il metodo principe nell'ambito del rilevamento dei beni culturali, con esso si intendono tutte quelle applicazioni che permettono di ottenere dei dati metrici dell'oggetto senza alcun contatto fisico con lo stesso. Fra essi si possono quindi annoverare le tecnologie basate sul laser a scansione, la fotogrammetria diretta, tecniche radar, ma anche la total station che utilizza un distanziometro ad impulsi. Queste metodologie di rilievo a distanza possono essere le uniche utilizzabili su di alcuni beni culturali, infatti può accadere che sia necessario rilevare un oggetto molto delicato che per ovvi motivi non può essere in alcun modo intaccato e manomesso; in questi casi le tecniche del telerilevamento sono la soluzione a tutti i problemi.
La tecnica del telerilevamento è l'unica utilizzabile dalle riprese da satellite, i quali possono spesso coniugare l'informazione luminosa multispettrale con i dati metrici derivanti da scansioni eseguite dal radar che è incorporato al satellite. Tramite i satelliti è poi possibile eventualmente eseguire anche della fotogrammetria diretta, in quanto per ogni satellite è sempre nota la posizione ed assetto dello stesso nello spazio, in tal caso però non si ottengono elevate precisioni.

### 1.3.2 Il laser scanning

Figura 1.5 - Scanner laser

La diffusione delle tecniche laser a scansione è abbastanza recente e certamente è una delle tecnologie che troverà grande espansione nel prossimo futuro. Concettualmente identici nel funzionamento, ma differenti per il raggio d'azione, precisione e metodologie di rilievo sono il laser scanning terrestre e quello aereo.
Come noto, un sistema a scansione laser fornisce come risultato diretto di una sessione di misura un

insieme di coordinate tridimensionali, generalmente in un sistema di riferimento correlato con lo strumento, riferite ad un numero elevatissimo di punti che vengono colpiti da un fascio laser; la nuvola di punti descrive dunque la superficie dell'oggetto scansionato. I sistemi operano in modo automatico e sono in grado di acquisire centinaia o migliaia di punti al secondo ( vedi figura 1.6 ).

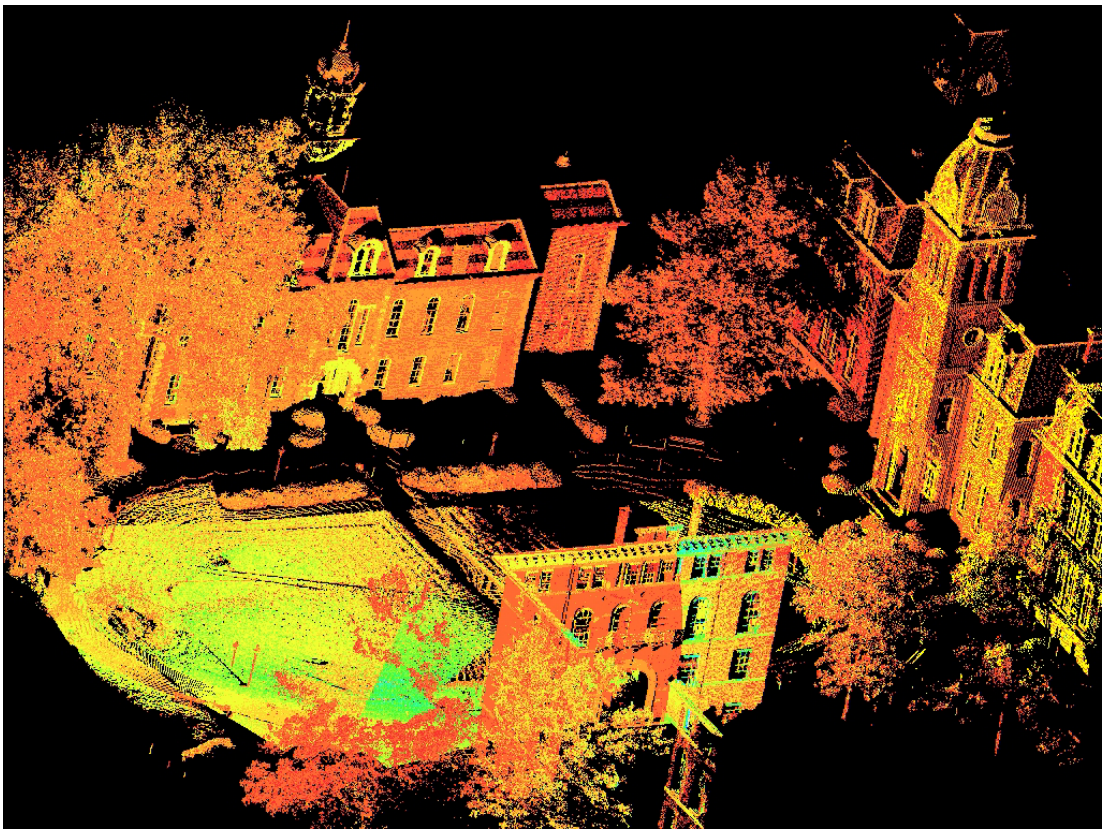


Figura 1.6 – Woodburn circle at West Virginia University.
Questa immagine è il risultato di una sessione di misura effettuata tramite il laser scanning, qui si possono vedere le centinaia di migliaia di punti che descrivono la superficie degli oggetti presenti nel campus dell'Università. Ad ogni punto è poi associato anche un valore di intensità radiometrica, ricavato dalla riflettanza delle superfici al fascio laser.

Nella figura 1.8 si mostrano schematicamente le due principali tipologie di sistemi attualmente più in uso.

In (a) è riportato lo schema di apparati che si basano sulla misura di distanza, in analogia con i distanziometri elettronici ad impulsi. Il raggio laser, mediante opportuni sistemi ottico-meccanici in rotazione, viene inviato verso l'oggetto variando per passi discreti gli angoli azimutale e zenitale. Per ogni punto collimato dal fascio laser il

software all'interno della strumentazione calcola il "tempo di volo" che intercorre fra la trasmissione e la ricezione ( proprio come il distanziometro ad impulsi ). Per ogni punto "colpito" dal raggio laser sono quindi noti due angoli ( azimutale e zenitale ) ed una distanza, da queste coordinate polari è allora possibile passare ad un sistema di coordinate cartesiane (X,Y,Z) con origine nel centro strumentale. Praticamente è come utilizzare una total station con distanziometro ad impulsi in cui si vanno a collimare migliaia di punti adiacenti attraverso una piccolissima variazione degli angoli orizzontali e verticali, solamente che nel laser a scansione il processo avviene in modo del tutto automatico e con un altissimo rendimento.

Figura 1.7 – Woodburn circle at West Virginia University. Particolare della figura 1.6.

La massima distanza operativa per questi strumenti che operano sul tempo di volo è di alcune centinaia di metri e l'accuratezza nella misura delle coordinate varia da alcuni millimetri ad un paio di cm.

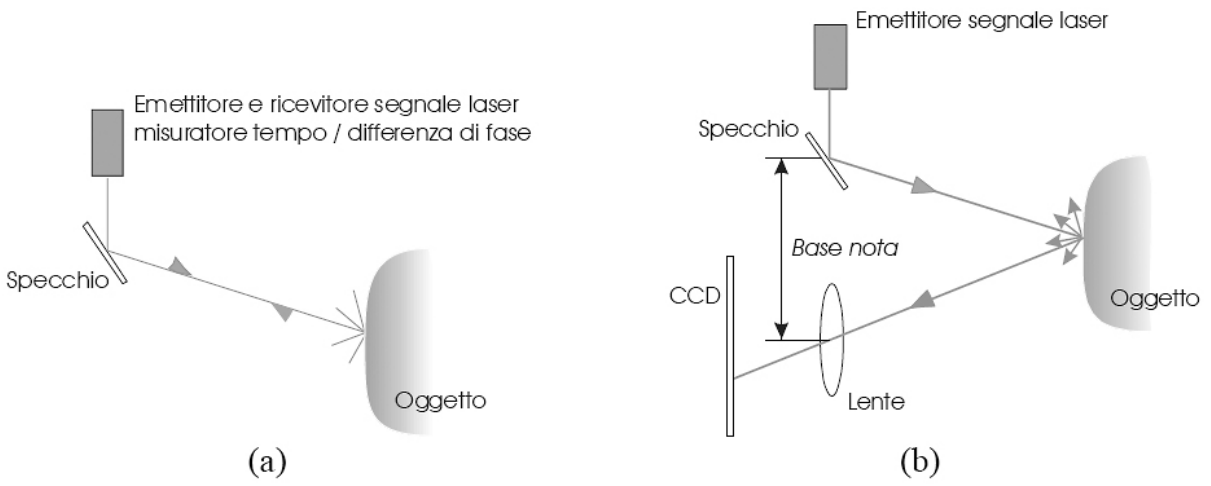



Figura 1.8 – Laser a scansione: principali schemi di funzionamento.

In figura 1.8b è invece riportato il sistema laser che si basa sul cosiddetto metodo "a triangolazione". Il nome tipico deriva appunto dallo schema di funzionamento che è del tutto analogo a quello della triangolazione, o più precisamente dell'intersezione in avanti in topografia. Il funzionamento è concettualmente semplice: un raggio laser, deflesso secondo un prefissato passo incrementale, colpisce l'oggetto secondo una scansione regolare, ed il segnale riflesso ( punto o linea laser ) viene catturato da un sensore di immagine a stato solido CCD, posto ad una distanza nota e calibrata rispetto al punto da cui parte il fascio laser. Questi strumenti, al contrario di quelli precedentemente descritti operano su distanze ridotte ma permettono di ottenere precisioni migliori, anche sub-millimetriche.

| Produttore | Scanner | Range (m) | Software | Sito Web |
|---|---|---|---|---|
| 3rdTech | DeltaSphere | 12 | | www.3rdtech.com |
| Callidus Precision Systems | Callidus | 80 | 3D-Extractor | www.callidus.de |
| Cyra Technologies | Cyrax 2500 | 50 | Cyclone, CloudWorx | www.cyra.com |
| Mensi | GS 100 | 100 | 3Dipsos, RealWorks | www.mensi.com |
| MetricVision | MV 200 | 60 | | www.metricvision.com |
| Optech | ILRIS-3D | 800 | ILRIS-3D Parser | www.optech.on.ca |
| Riegl Laser Measurement Syst. | Serie LMS-Zxxx | 1000 | 3D-RiSCAN | www.riegl.com |
| Zoller+Froehlich GmbH | IMAGER 5003 | 55 | Light Form Modeller | www.zofre.de |

Tabella 1.1 – Laser a scansione basati sul principio del tempo di volo.

Da ricordare è che oltre alla determinazione metrica dei punti, questi strumenti a scansione permettono di ottenere anche la riflettanza di ciascun punto-oggetto alla frequenza propria del raggio, ed in taluni

casi, di acquisire anche l'immagine RGB co-registrata con il dato laser.

| Produttore | Scanner | Range (m) | Software | Sito Web |
|---|---|---|---|---|
| 3D Digital Corporation | Model 100, 200, 300 | 1 | Scan Surf | www.3ddigitalcorp.com |
| 3DMetrics | 3DFlash! | 0.1 | 3DFlash!craft | www.3dmetrics.com |
| 3D Scanners, Nvision | ModelMaker | 0.2 | Surfacing Software | www.3dscanners.com<br>www.nvision3d.com |
| ABW GmbH | Kombi-640 | 1.5 | ABW-VIS, ABW-FIT | www.abw-3d.de |
| Arius3D | Arius3D | 6 x 2 x 1.4 | | www.arius3d.com |
| Breuckmann GmbH | optoTOP-HE | 3 x 2 | OPTOCAT | www.breuckmann.com |
| Cyber F/X | vari | ca. 1 | | www.cyberfx3d.com |
| Cyberware | vari | ca. 1 | vario | www.cyberware.com |
| Digibotics | Digibot | 1.8 | | www.digibotics.com |
| DLR - German Aerospace Center | Laser Range Scanner | 0.3 | | www.robotic.dlr.de |
| Genex | Rainbow 3D | 0.7 | | www.genextech.com |
| GOM mbH | ATOS | 1.6 | ATOS | www.gom.com |
| Hymarc | Hyscan 45C | 0.1 | Xhyscan | www.hymarc.com |
| INTECU | Cylan | 0.3 | | www.intecu.de |
| INO | MapScan | 0.2 | | www.ino.ca |
| Intelligent Automation | 4DI | ca. 1 | | www.ias.com |
| Kréon | KLS | 0.2 | POLYGONIA | www.kreon3d.com |
| Laser Design | vari | 1 | | www.laserdesign.com |
| MEL Mikroelektronik GmbH | M2D | 1.2 | software di base | www.melsensor.com |
| Mensi | S10, S25 | 10, 25 | 3Dipsos, RealWorks | www.mensi.com |
| Metris | LC 50, LC 100 | 0.2 | CADcompare | www.metris.be |
| micromeasure GmbH | vari | 0.8 | ScanOS | www.micromeasure.de |
| Minolta | VI | 1.2 | Polygon Editing | www.minolta-3d.com |
| Nextec | Hawk | 0.3 | | www.nextec-wiz.com |
| Perceptron | Contour Probe Sensor | 0.1 | various | www.perceptron.com |
| Polhemus | FastScan | 0.8 | | www.aranz.co.nz/hls |
| Roland DGA | Picza | 0.3 | vario | www.rolanddg.com |
| Romer | G-Scan | ca. 0.3 | G-Pad, G-Surf | www.romer.fr |
| SCAN technology | vari | 0.6 | | www.scantech.net |
| Shape Grabber | vari | 0.7 | | www.shapegrabber.com |
| Steinbichler Optotechnik | COMET | 0.8 | COMET | www.steinbichler.de |
| TC2 | Body Scanner | 0.8 | | www.tc2.com |
| Vitronic | Vitus | ca. 1 | | www.vitus.de |

Tabella 1.2 – Laser a scansione basati sul principio della triangolazione.

A questo punto la tecnica del laser scanning pare essere la soluzione a tutti i problemi di rilievo dei beni culturali ed in generale degli oggetti vicini e lontani. L'automatismo di rilievo sul campo è elevatissimo ed ad alto rendimento, la semplicità di utilizzo è altrettanto un punto a favore, inoltre l'elaborazione dei dati sembra risultare poco onerosa; ma in realtà anche questa metodologia di rilievo possiede le sue pecche, perlomeno allo stato attuale della tecnica. Fra le più importanti possiamo ricordare che attualmente non esiste molta letteratura sul problema della precisione ed accuratezza degli scanner, questo fa si che non sia possibile prevedere con precisione ed in quale modo di propagano e distribuiscono gli errori all'interno del rilievo, ovvero non si riesce a capire esattamente quale sia la vera precisione dei vari punti del prodotto metrico ottenuto.

Questa ignoranza è dovuta principalmente al fatto che tali strumentazioni sono molto recenti ed ancora in fase di studio, sperimentazione e perfezionamento. Questo fa si che al momento ci siano ancora parecchie questioni non proprio chiarite. Ad esempio, è possibile che per qualche superficie composta da uno strano materiale la precisione fornita laser a scansione si abbatta considerevolmente? E se si, in che modo si abbassa? Oppure, la precisione è funzione di particolari condizioni ambientali, luminose, di particolari schemi di rilievo? Ed in che modo? A queste ed altre domande è ancora difficile rispondere con certezza, tale incapacità fornisce gli elementi necessari per dubitare delle reali precisioni fornite e dell'affidabilità del metodo.

Figura 1.9 – Ingresso del Duomo di Ancona.
DSM con *textures* fotografiche ottenuto dall'elaborazione dei dati ricavati da una sessione di misura al laser scanning combinata all'uso di prese fotografiche.

Alle citate incertezze insite nella strumentazione giocano sulla precisione anche altri fattori che intervengono durante il rilievo e determinano una certa percentuale di punti in posizione errata: un caso comune è costituito dalla presenza sull'oggetto di spigoli e lati i quali

vengono colpiti solo in parte dall'impronta del raggio, e questa, andando a colpire altri oggetti nel suo percorso, genera segnali spuri di ritorno, i quali vengono a "sporcare" il primo fornendo posizioni 3D scorrette. Un problema è dunque quello del controllo della qualità di questi dati, che non è facile affidare completamente a procedure automatiche, soprattutto per i rilievi terrestri; questo comporta una perdita di tempo in fase di post-rilievo da parte dell'operatore che deve pulire il dato primario con tecniche semi-automatiche ed impiegare algoritmi di filtraggio.

Altro problema legato all'utilizzo del laser a scansione per applicazioni di rilevamento dei beni culturali può essere visto nel passaggio dalla nuvola di punti rilevati ad un oggetto 3D tipo un DTM o DSM costituito da superfici. Per fare ciò esistono degli appositi software che modellano le superfici a partire dalle nuvole di punti, queste procedure avvengono in modo semplice, veloce ed automatico per le sole geometrie modellabili con primitive solide elementari ( cilindri, parallelepipedi, ecc… ) che purtroppo non si prestano a ricostruire le forme riscontrabili sui beni culturali. Questi software erano nati principalmente per risolvere i problemi della *reverse engineering*, in cui si vuole ad esempio ricostruire la forma di pezzi meccanici a partire dai dati laser. Nei casi di forme molto irregolari e complesse come quelle che si riscontrano in ambito archeologico le procedure di generazione delle superfici diventa molto più lunga, complicata e meno automatizzata, difatti in questi casi è necessario impostare dei parametri iniziali per generare una *mesh* che interpoli i punti rilevati, ed infine è indispensabile anche un lavoro di *editing* finale ( vedi tabella 1.3 ).

Da sottolineare è l'importanza nel campo applicativo dei beni culturali delle tecniche di *texture mapping* fotografiche: tramite esse è possibile proiettate le immagini fotografiche sul modello metrico 3D ottenuto dall'elaborazione della nuvola di punti fornita in output dallo scanner.

Questa metodologia prevede in sostanza l'uso combinato di fotogrammetria e laser scanning, dalla scansione si ottengono i dati metrici ed il modello digitale dell'oggetto ( DSM ), tale modello viene poi proiettato sulle foto riperse ( di cui devono essere noti i parametri di orientamento esterno ) , in tal modo il DSM va a "prendere" le informazioni radiometriche dalle diverse foto eseguite e si ottiene in uscita un modello DSM con applicate le *textures* fotografiche ( vedi figura 1.9 ). Oltre che dare un effetto di forte realismo l'informazione fotografica permette di indagare sullo stato di conservazione dell'oggetto. Da questo sofisticato prodotto è altresì possibile ottenere l'ortofoto di precisione, conseguibile dalla semplice proiezione ortogonale su di un fissato piano del modello 3D ( DSM ) con *textures* fotografiche appena estratto.

| ***Procedura*** | ***Note*** |
|---|---|
| visualizzazione dei dati primari nella forma di mappe di distanza e intensità (eventualmente colore RGB), oppure di nuvole di punti | in genere presente nei programmi forniti a corredo dello strumento |
| pulizia del dato primario (eliminazione di punti errati) | in modalità interattiva o con metodi semi-automatici |
| sfoltimento e filtraggio dei dati | riduzione del numero dei punti e del rumore dovuto alla precisione strumentale; in genere preferibile effettuare lo sfoltimento dopo la fusione di scansioni |
| fusione di scansioni diverse | combinazione di "nuvole" diverse in un unico insieme, sulla base di target comuni e/o elementi naturali riconosciuti in modo automatico o interattivo. Eventuale successiva pulizia dei dati. |
| assegnazione ad un sistema di riferimento oggetto | sulla base di punti naturali o artificiali di coordinate note (da rilievo topografico o fotogrammetrico): necessaria se si desidera la fusione della superficie da l.s. con immagini fotogrammetriche (ortofoto) |
| sfoltimento ed omogeneizzazione nella distribuzione dei punti | la nuvola finale viene ridotta al fine di avere una densità dei punti uniforme o legata al tipo di superficie |
| *fitting* mediante primitive geometriche | superfici semplici (parallelepipedi, cilindri, ecc.) vengono adattate alla nuvola dei punti: sviluppato soprattutto per applicazioni industriali, non idoneo per molti oggetti di interesse archeologico |
| generazione di *mesh* poligonali | operazione svolta in 2.5D o in 3D, richiede un intervento di parametrizzazione iniziale e in genere un *editing* finale da parte dell'operatore |
| modellazione secondo rappresentazioni matematiche (*splines*, NURBS) | più consona alle geometrie del disegno industriale |
| realizzazione di prodotti 3D fotorealistici mediante mappatura del modello con *texture* ed immagini | la superficie del modello a *mesh* può essere rappresentata con:<br>- applicazione di tessiture artificiali o prelevate da immagini reali<br>- riproiezione di immagini fotografiche (noti, o ricavati contestual-mente, i loro parametri di orientamento interno ed esterno)<br>- colorazione mediante il dato di riflettanza o colore acquisito dallo scanner stesso |
| esecuzione interattiva di misure | in particolare distanze tra punti naturali |
| generazione di profili e sezioni, ortofoto, modelli VRML, ecc. ed esportazione verso l'utilizzo esterno (CAD, browser, ecc.) | sezioni generate in automatico dalla nuvola dei punti o dal modello tridimensionale; particolarmente interessante la generazione di ortofoto di precisione |

Tabella 1.3 – Procedure per elaborare i dati forniti in output da un laser a scansione terrestre.

In conclusione, questa tecnologia a scansione laser è molto promettente ma dimostra in parecchi aspetti di essere ancora in fase di sviluppo; oltretutto il costo di tali strumentazioni è ancora molto elevato e per certi versi proibitivo; la stessa cosa si può dire per gli indispensabili pacchetti software di elaborazione dati.

### *1.3.3 La strumentazione topografica elettronica*

Le stazioni totali ed i livelli sono spesso strumenti essenziali per il rilievo di oggetti di interesse storico-culturale. Le total station sono strumenti indispensabili per ottenere le coordinate spaziali di un congruo numero di punti necessari per appoggiare un rilievo fotogrammetrico o per referenziare ad un determinato sistema di riferimento i dati metrici della nuvola di punti fornita dalla scansione laser. Tali strumenti, oltre a fornire l'indispensabile sussidio alle tecniche fotogrammetriche e laser, sono anche in grado di lavorare autonomamente e produrre degli ottimi risultati nel settore del rilevamento dei beni culturali. Essi infatti possono essere impiegati per il controllo dei movimenti e deformazioni nel caso di strutture che si trovano in situazioni di degrado, in quanto sono in grado di fornire ottime precisioni ( anche sub-millimetriche ), oppure possono essere utilizzati anche per il caso opposto, ovvero quando non si necessitano di gradi precisioni e magari si vogliono ottenere solamente le coordinate di alcuni spigoli fondamentali del fabbricato.

Figura 1.10 – Total station elettronica LEICA TC2003. Strumento di classe elevata.

Fra gli strumenti topografici elettronici che sono di parecchio aiuto nel rilievo dei beni culturali non bisogna dimenticare anche i livelli.

Attualmente il mercato fornisce le seguenti categorie di strumenti topografici elettronici, che seppur evoluti mantengono i principi ispiratori e i miglior standard di precisione dei vecchi ed originari strumenti analogici:

- stazioni totali, con elevata capacità di memorizzazione dati e pacchetti evoluti di programmi accessori;
- stazioni totali con distanziometro ad impulsi, essenziali in tutti quei casi dove non è possibile utilizzare il prisma riflettore;
- stazioni totali ad elevata automazione, per il rilievo a singolo operatore con ricerca automatica del segnale;
- livelli digitali.

### *1.3.4 Il GPS*

Esso è molto usato in campo archeologico, soprattutto per determinare la posizione in maniera approssimativa di un sito sperduto sulla faccia della terra. In prima approssimazione si possono usare i semplici palmari che tutti gli archeologi posseggono e che tramite un misura di codice possono fornire precisioni sul posizionamento assoluto variabile dai 10 a 20 m. Gli strumenti GPS più evoluti e concepiti per il rilievo topografico invece vengono adoperati per determinare la posizione esatta di un certo numero di punti che possono essere indispensabili come punti di appoggio per referenziare un rilievo eseguito con tecniche fotogrammetriche, laser o topografiche tradizionali. In luoghi molto impervi e lontani da ogni costruzione antropica spesso è difficile trovare un sistema di riferimento assoluto su cui referenziare il rilievo, così la tecnica GPS si rivela l'unica soluzione possibile, queste situazioni accadono spessissimo nell'ambito dell'archeologia. Altro grande vantaggio delle applicazioni GPS è la possibilità di ottenere una rete di punti a precisione omogenea con coordinate definite in un sistema di riferimento al livello globale e quindi interpretabili senza equivoci da un utente di qualsivoglia nazionalità.

Vediamo ora le modalità di applicazione che lo strumento GPS può trovare:

- posizionamento assoluto, laddove sia sufficiente localizzare un sito in modo approssimato ( ± 15 m );
- DGPS con misura di codice, ed eventuale lisciatura di fase, per una georeferenziazione più accurata, con precisione di 1-3 m;
- rilievi in modalità cinematica, se possibile con soluzione OTF, per delimitare perimetri, fondazioni, porzioni di scavo, punti di appoggio per rilievi aerofotogrammetrici, punti di dettaglio per la costruzione di un DTM, ecc.; la precisione è in questi casi di circa qualche centimetro;
- rilievi in modalità rapido-statica con precisione centimetrica: per la definizione di punti di appoggio di alta qualità, da utilizzarsi ad esempio per lo stazionamento dei classici strumenti topografici;
- rilievi di lunga durata in modalità statica per la determinazione delle coordinate assolute di punti mediante il collegamento a vertici noti.

In conclusione possiamo dire che l'uso del GPS nell'ambito del rilievo dei beni culturali è sempre accoppiato all'impiego di altre strumentazioni, il suo uso è difficilmente fine a se stesso.
I vantaggi e le possibilità di applicazione delle tecniche GPS, soprattutto combinate con altre metodologie di rilievo sono veramente molteplici, il GPS spesso riesce a risolvere problematiche di posizionamento e referenziazione che non sono risolubili con altre metodologie. Nonostante i molti vantaggi che il GPS si porta con se esistono come sempre anche dei punti a sfavore, i principali sono diversi, ma quello di cui voglio parlare è forse uno fra i più gravi e non risolvibili. Come è noto, il GPS è basato su di un ellissoide di riferimento ( WGS 84 ) e quindi le quote ricavabili dalle misure GPS sono appunto le quote ellissoidiche, ovvero la distanza fra punto considerato e la superficie ellissoidica di riferimento misurata sulla normale all'ellissoide passante per il punto in questione. Tale misura

non ha alcun concetto fisico, ma solamente geometrico. Questo è un grave problema in quanto questa misura può essere anche di decine di metri diversa dalla quota ortometrica ( riferita al geoide ) ricavabile dalle misurazioni effettuate con i livelli. La quota ortometrica è quella che possiede un concetto fisico, ovvero ci dice in quale verso scorre l'acqua: i fluidi vanno sempre da una quota ortometrica maggiore ad una minore, la stessa cosa non si può dire per la quota ellissoidica ricavabile dalle misure GPS. Per passare fra i suddetti due sistemi di quote è indispensabile conoscere l'ondulazione geodica locale, ma essa non è sempre nota, soprattutto per i luoghi sperduti dove possono trovarsi i siti archeologici. L'alternativa sarebbe utilizzare in combinazione le misure GPS con quelle effettuate tramite livello, così è possibile modellizzare l'ondulazione geodica; ma questo procedimento è molto laborioso.

### *1.3.5 La fotogrammetria*

La fotogrammetria è sicuramente la disciplina che ha visto, e tuttora vede, il maggior impiego nell'ambito del rilievo di dettaglio di oggetti terrestri. Le sue caratteristiche di essere una tecnica che non richiede il contatto fisico con l'oggetto, di rapida acquisizione, con una elevata flessibilità d'impiego ed un'ottima precisione nella determinazione metrica della geometria e della forma di oggetti di ogni tipo, ne hanno decretato una diffusione sempre maggiore, oggi ampliata anche dalle nuove prospettive offerte dal digitale. Per le caratteristiche appena citate e soprattutto per essere molto versatile, la fotogrammetria sembra non arrestare il suo processo di evoluzione, tentando di sfidare anche le promettenti ed allettanti tecniche a scansione laser che potrebbero in un prossimo futuro metterla in crisi. Alla nascita del laser scanning molti pensarono che la fotogrammetria non avrebbe retto il passo di evoluzione delle moderne tecniche, invece poco dopo ci si è dovuti ricredere. Oggigiorno i progrediti software di

fotogrammetria digitale incorporano in se moderni ed evoluti algoritmi di calcolo che permettono di automatizzare enormemente tutte le fasi di elaborazione dei dati fotogrammetrici acquisiti sul campo, dalle prime fasi di orientamento ( interno ed esterno ) fino alla restituzione dell'oggetto in maniera semi-automatica con procedimenti di *image matching* ( autocorrelazione, ricerca automatica di punti omologhi ). Da quanto appena detto ci comprende che la fotogrammetria sta puntando tutti i suoi sforzi di ricerca nelle applicazioni digitali, le quali dovranno rendere il lavoro sempre più rapido, preciso ed economico. Il problema più sentito nella fotogrammetria è infatti da sempre stato il costo elevato dell'intero lavoro di rilievo, e soprattutto il notevole tempo necessario per eseguire la restituzione in maniera completamente manuale attraverso gli stereorestitutori analitici. La ricerca tende quindi ad eliminare questi problemi attraverso le applicazioni digitali corredate di appositi software di elaborazione dati che automatizzano molti passi del lavoro.

Purtroppo anche se le tecniche fotogrammetriche digitali hanno fatto notevoli passi avanti, ancora non si sono raggiunti i risultati sperati: gli automatismi non sono ancora del tutto efficienti e non garantiscono elevate precisioni.

Tra i moderni prodotti ottenibili dalla fotogrammetria digitale possiamo ricordare i modelli numerici del terreno ( DTM ) ed i modelli digitali degli oggetti in generale, ricavati mediante la definizione di superfici ( DSM ) le quali possono possedere anche maggiori informazioni descrittive attraverso l'applicazione su di esse di *textures* fotografiche. Da tali modelli digitali dell'oggetto è poi possibile ottenere mediante proiezione ortogonale i prodotti raster chiamati ortofoto. Quest'ultime coniugano l'informazione metrica a quella descrittiva-visiva resa possibile dalla fotografia.

In conclusione tendo a sottolineare che la fotogrammetria sarà sempre più automatizzata e precisa, e probabilmente verrà sfruttata in

combinazione con il laser scanning. Dall'integrazione delle due tecniche è infatti possibile coprire le carenze ed i difetti dell'uno o dell'altro metodo, in altre parole le due metodologie sono fra loro complementari e già si tende a sfruttare la scansione laser per ottenere i modelli digitali dell'oggetto il quale viene poi vestito con le *textures* fotografiche derivanti dalle prese fotografiche. Infine è cosi possibile ottenere delle ortofoto di precisione veramente notevole.
Per il futuro si prevede quindi una sempre maggior integrazione, cooperazione e complementarietà fra le diverse tecniche di rilievo, che assieme potranno fornire prodotti finali di notevole interesse, dettaglio visivo e precisione metrica.

## 1.4 IL METODO FOTOGRAMMETRICO

La fotogrammetria è una tecnica di rilievo tridimensionale che consente di ottenere informazioni metriche ( forma e posizione ) di oggetti mediante l'interpretazione e misura di immagini fotografiche ( tradizionali o digitali ), senza la necessità del contatto fisico con l'oggetto da rilevare.

### *1.4.1 La fotogrammetria convenzionale*

I metodi di restituzione utilizzati per ottenere le informazioni metriche necessarie sull'oggetto rilavato si suddividono in due grandi categorie:

1. Metodi steroscopici.
2. Metodi monoscopici.

La prima metodologia di restituzione risulta essere quella originaria e nata assieme alla fotogrammetria, per questo motivo tale metodo viene chiamato anche "convenzionale". Esso rappresenta da sempre lo standard operativo, la restituzione si effettua su delle prese ad assetto pseudo-normale entro cui ( tramite lo stereorestitutore ) è possibile navigare in un modello virtuale 3D e collimare con una marca mobile i

punti da rilevare. Il secondo approccio è invece molto più moderno e versatile, esso nasce assieme alla fotogrammetria digitale, la quale permette prese ad assi convergenti. Questa seconda modalità di rilievo viene anche nominata "non convenzionale" e prevede la restituzione tramite la collimazione di punti omologhi sulle diverse foto eseguite.
La restituzione fotogrammetrica stereoscopica è mirata ad ottenere un modello tridimensionale dell'oggetto rilevato grazie alla fusione dei due fotogrammi che lo rappresentano da due diversi punti di presa, da osservare con particolari apparecchiature. Il concetto su cui si basa la creazione del modello stereoscopico è del tutto simile a quello della visione binoculare umana, ogni occhio (fotocamera) riceve l'immagine dell'oggetto da due diverse postazioni ed in seguito il cervello fonde le due informazioni visive in un'unica immagine tridimensionale. Per operare la "fusione" delle due immagini in modo da costruire il modello stereoscopico è pero indispensabile che le due prese abbiano gli assi ottici pressoché paralleli tra loro e che la scala media dei due fotogrammi sia approssimativamente uguale.
Le equazioni che governano il procedimento fotogrammetrico derivano dallo studio della geometria proiettiva, che risulta essere una disciplina antecedente alla scoperta della fotografia.
Per poter costruire la posizione e forma degli oggetti a partire dalle fotografie, e necessario essere a conoscenza delle relazioni geometriche in base alle quali si formano le immagini. Le camere adoperate nelle fotogrammetria producono immagini che, con sufficiente approssimazione e tenendo conto delle distorsioni, possono essere considerate come delle prospettive centrali dell'oggetto fotografato. Matematicamente durante la formazione dell'immagine sulla pellicola avviene una trasformazione non lineare che porta dallo spazio oggetto tridimensionale (X,Y,Z) allo spazio immagine bidimensionale del fotogramma ($\xi$,$\eta$). Tale trasformazione non lineare è governata da dei parametri chiamati parametri di orientamento.

Purtroppo tali parametri sono incogniti, e quindi vengono determinati in base alle caratteristiche del complesso camera-obiettivo e dalla posizione ed assetto dello stesso nello spazio oggetto ( vedi figura 1.11 ).

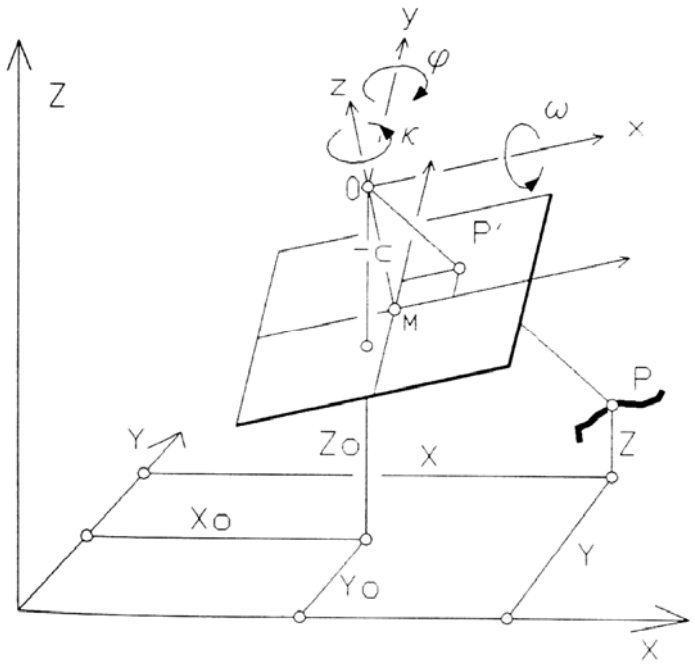



Figura 1.11 – Trasformazione delle coordinate del punto P dallo spazio oggetto ( X, Y, Z ) allo spazio immagine ( x, y ) o ( ξ, η ) secondo le leggi della geometria proiettiva centrale. O indica il centro di presa della fotocamera.

Da qui si capisce che per eseguire una restituzione dell'oggetto è prima necessario effettuare una preliminare procedura di orientamento in cui tramite una calibrazione della fotocamera e dei punti fotogrammetrici di appoggio ( punti di coordinate oggetto note ) si vanno a determinare tali parametri incogniti che governano la restituzione fotogrammetrica.

Anticipo che per determinare la posizione di un generico punto nello spazio oggetto è necessario che esso compaia su almeno due fotogrammi. Quindi per ricostruire ( restituire ) un oggetto nello spazio sono necessarie almeno due prese, se l'oggetto in questione è un piano basta invece possedere una sola ripresa dello stesso.

Tutto il procedimento fotogrammetrico può essere suddiviso in tre grandi fasi: nella prima si vede coinvolto l'oggetto da rappresentare

che viene catturato attraverso prese fotogrammetriche eseguite da diverse postazioni, nella seconda ( fase di orientamento ) si va a ricostruire il fascio di rette proiettive e si determinano i parametri di orientamento incogniti attraverso i punti fotogrammetrici di appoggio, nella terza ( fase di restituzione ) si determinano le coordinate oggetto dei punti collimati ed è così possibile ricostruire la geometria dell'oggetto nel 3D ( vedi figura 1.12 e tabella 1.4 ).

| **Strumentazione** | |
|---|---|
| Strumenti per l'acquisizione a film o digitale | camere metriche terrestri a film/lastra (uso ridotto per problemi di maneggevolezza ed alti costi)<br>camere semimetriche a film di piccolo-medio formato con reticolo (le più diffuse)<br>camere a film amatoriali da sottoporre a (auto)calibrazione<br>camere digitali ad alta risoluzione (es. > 2Mpixel) |
| Strumenti per la scansione di film o stampe | scanner fotogrammetrici (alta risoluzione e accuratezza geometrica e radiometrica)<br>scanner amatoriali (necessità di calibrazione)<br>Photo-CD (per film a piccolo-medio formato) |
| Stazioni di lavoro | stereorestitutori analitici<br>stazioni fotogrammetriche digitali<br>- visione stereoscopica con sistemi di visione passiva/attiva/anaglifica/ecc.<br>- visione monoscopica multi-immagine |
| Dispositivi di uscita | stampanti ad alta risoluzione<br>memorizzazione su supporti magnetici, CD Rom, DVD, ecc. |
| **Procedure e prodotti del processo fotogrammetrico** | |
| Realizzazione delle prese | prese "normali" con bicamera (in disuso, o sostituite da nuovi sistemi)<br>prese a mano libera (anche molto convergenti, in funzione delle modalità di orientamento e restituzione) |
| Rilievo di appoggio | segnalizzazione dei punti con target normali, retroriflettenti, uso di punti naturali<br>stazioni totali con o senza uso di riflettori: intersezioni in avanti, poligonali, ecc.<br>metodi speditivi con misure dirette di distanza per soluzioni semplificate (raddrizzamenti, tecniche di scalatura del modello, ecc.) |
| Elaborazione di immagini | tecniche di *image processing* nel pre-processamento (es. ripulitura, enfatizzazione, ecc.)<br>ricampionamento di immagine |
| Orientamento interno | su strumenti analitici o stazioni digitali, su queste ultime con procedure automatiche o semi-automatiche per la collimazione dei *repères* o dei crocicchi del reticolo<br>tecniche di autocalibrazione, uso della DLT anche per la derivazione di parametri approssimati |
| Orientamento esterno | su strumenti analitici o stazioni digitali, su queste ultime con procedure automatiche per l'orientamento relativo (correlazione di immagini)<br>larga applicazione di compensazione a fasci proiettivi, es. multi-immagine, anche con inserimento di informazioni addizionali (es. vincoli geometrici, direzioni, distanze)<br>applicazione di tecniche proprie della triangolazione aerea |
| Restituzione | stereoscopica (nelle stazioni digitali uso anche delle immagini normalizzate e sovrapposizione della restituzione vettoriale sul modello)<br>monoscopica multi-immagine (con supporto di rette epipolari, *matching* locale per punti o entità, ecc.) |
| Generazione di modello digitale della superficie | su restitutori analitici: manuale o parzialmente automatizzata<br>su stazioni digitali: automatica (*matching area based /feature based*) con procedure per l'*editing* a posteriori del dato, inserimento di linee di discontinuità, ecc. |
| Prodotti metrici a base fotografica | raddrizzamento (tecnica analitica / uso delle linee di fuga, semplici procedure sono presenti anche in programmi non fotogrammetrici, es. CAD, ma spesso non tengono conto di fenomeni quali la distorsione della camera<br>raddrizzamento differenziale (ortofoto tradizionali, ortofoto di precisione), problemi nella definizione di un modello fedele della superficie<br>mosaicatura di immagini georeferenziate, con correzioni radiometriche |
| Modelli tridimensionali | generazione di rappresentazioni *wireframe*, per superfici, per volumi<br>applicazione di *texture* artificiali o fotografiche |
| Gestione dell'informazione | strutturazione e codifica delle informazioni per un utilizzo in sistemi informativi dedicati |
| Consultazione del database | sistemi per la consultazione interattiva in linea di stereocoppie o blocchi fotogrammetrici già orientati per la misura di distanze, aree, coordinate di singoli punti |
| Esportazione verso l'esterno | creazione di *files* in formati CAD, in VRML, ecc. |

Tabella 1.4 – Strumenti e procedure nel moderno rilievo fotogrammetrico terrestre.

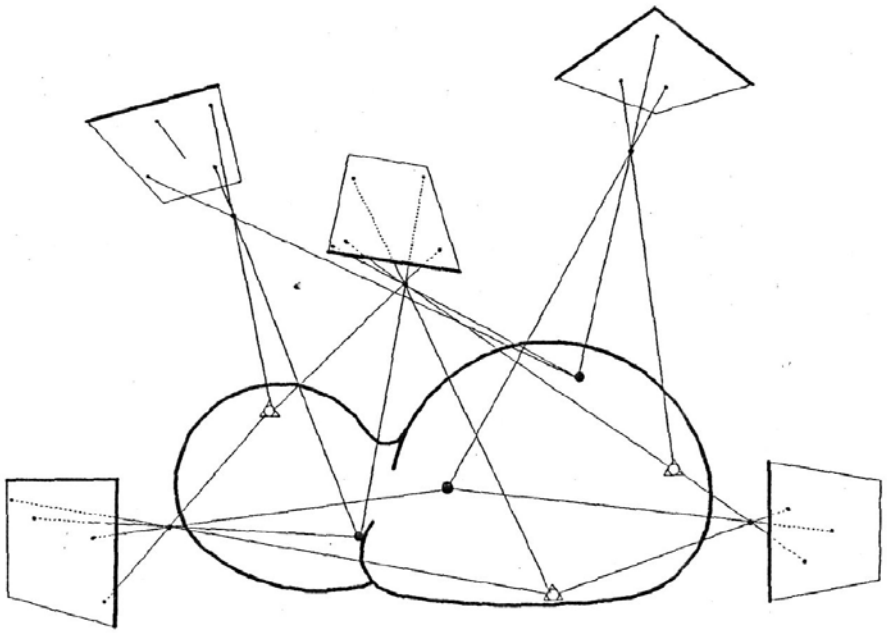


Figura 1.12 – Rete di raggi omologhi nello spazio.
Questa immagine racchiude in se tutte le tre fasi del procedimento fotogrammetrico, intuitivamente questo è il caso che avviene per la fotogrammetria dei vicini realizzata spesso con tecniche non convenzionali ad assi di presa convergenti.

Dalla figura 1.12 è intuitivamente possibile comprendere perché si deve eseguire l'orientamento prima della restituzione: alla fine della fase di presa si hanno tanti fotogrammi di cui non si conosce la posizione ed assetto al momento dello scatto, ovvero tali fotogrammi non sono ancora distribuiti e determinati nello spazio oggetto come visibile in figura. Tramite i punti fotogrammetrici di appoggio è possibile mediante intersezione inversa ( a vertice di piramide ) nello spazio riuscire a determinare la posizione ed assetto delle prese eseguite. Alla fine della fase di orientamento è poi possibile incominciare la restituzione dei punti, osservando sempre la figura 1.12 è comprensibile perché siano necessari almeno due fotogrammi che mostrino lo stesso punto da rilevare: se ne avessimo solamente uno troveremmo un'infinità di punti situati a profondità oggetto diverse ma che si troverebbero sul medesimo raggio visuale.
Parliamo ora delle equazioni che definiscono la trasformazione non lineare dallo spazio oggetto tridimensionale allo spazio immagine

piano, tali equazioni derivano dalle leggi della geometria proiettiva e sono chiamate equazioni di collinearità.

### 1.4.1.1 Le equazioni di collinearità

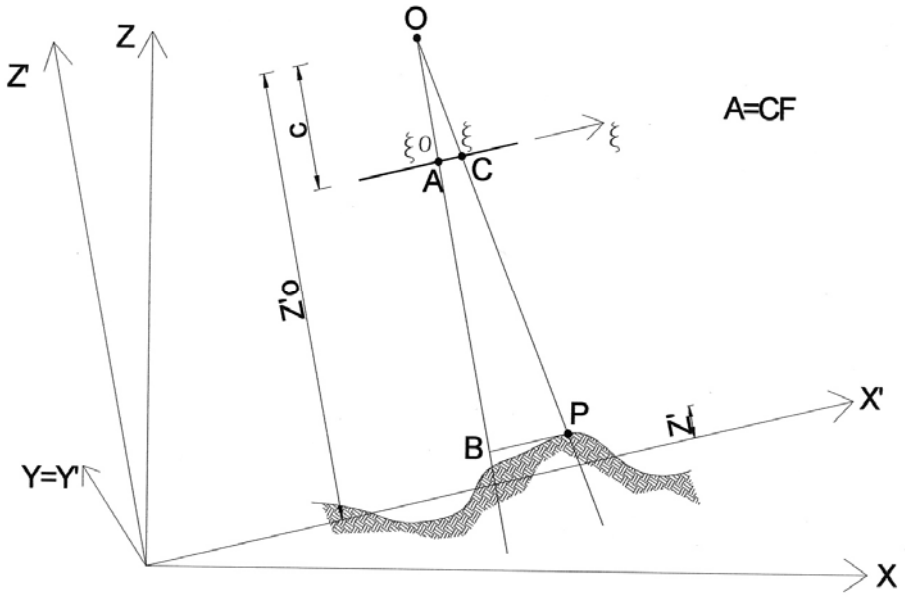



Figura 1.13 – Schema per ricavare le equazioni di collinearità.

Considerando i due triangoli simili OAC e OBP, è possibile scrivere le seguenti relazioni:

$$(\xi - \xi_0) : c = (X' - X'_0) : (Z'_0 - Z')$$
$$(\eta - \eta_0) : c = (Y' - Y'_0) : (Z'_0 - Z')$$

Dalle quali si esplicano i seguenti termini:

$$\xi - \xi_0 = c\frac{X' - X'_0}{Z'_0 - Z'} \qquad (1.1)$$
$$\eta - \eta_0 = c\frac{Y' - Y'_0}{Z'_0 - Z'}$$

Per passare dal sistema di riferimento X', Y', Z' a quello X, Y, Z si introduce una matrice di rotazione spaziale **R** in modo tale che

$$\left(\underline{X} - \underline{X}_0\right) = \widetilde{R}\left(\underline{X}' - \underline{X}'_0\right)$$

E sfruttando le proprietà delle matrici di rotazione, ovvero $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ si ricavano i valori delle coordinate nel sistema cartesiano X,Y,Z:

$$\widetilde{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \qquad \widetilde{R}^{-1} = \widetilde{R}^{T} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\left(\underline{X}' - \underline{X}'_0\right) = \widetilde{R}^{T}\left(\underline{X} - \underline{X}_0\right)$$

$$R = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\kappa & -\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\kappa & \mathrm{sen}\,\varphi \\ \mathrm{sen}\,\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\kappa + \cos\omega\,\mathrm{sen}\,\kappa & -\mathrm{sen}\,\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\kappa + \cos\omega\cos\kappa & -\mathrm{sen}\,\omega\cos\varphi \\ -\cos\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\kappa + \mathrm{sen}\,\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi & \cos\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\kappa + \mathrm{sen}\,\omega\cos\kappa & \cos\omega\cos\varphi \end{vmatrix}$$

Svolgendo i prodotti si perviene alle seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} \left(X' - X'_0\right) &= r_{11}\left(X - X_0\right) + r_{21}\left(Y - Y_0\right) + r_{31}\left(Z - Z_0\right) \\ \left(Y' - Y'_0\right) &= r_{12}\left(X - X_0\right) + r_{22}\left(Y - Y_0\right) + r_{32}\left(Z - Z_0\right) \\ \left(Z' - Z'_0\right) &= r_{13}\left(X - X_0\right) + r_{23}\left(Y - Y_0\right) + r_{33}\left(Z - Z_0\right) \end{aligned}$$

Che sostituite nelle (1.1), ed esplicitate le X e le Y, forniscono le equazioni di collinearità:

$$\begin{aligned} X &= X_0 + \left(Z - Z_0\right)\frac{r_{11}\left(\xi - \xi_0\right) + r_{12}\left(\eta - \eta_0\right) - r_{13}\cdot c}{r_{31}\left(\xi - \xi_0\right) + r_{32}\left(\eta - \eta_0\right) - r_{33}\cdot c} \\ Y &= Y_0 + \left(Z - Z_0\right)\frac{r_{21}\left(\xi - \xi_0\right) + r_{22}\left(\eta - \eta_0\right) - r_{23}\cdot c}{r_{31}\left(\xi - \xi_0\right) + r_{32}\left(\eta - \eta_0\right) - r_{33}\cdot c} \end{aligned} \qquad (1.2)$$

Tali equazioni (1.2) di collinearità qui sopra riportate evidenziano come, a causa della presenza delle Z al secondo membro, per ogni punto immagine esistano infiniti punti oggetto. È quindi impossibile ricostruire la geometria spaziale di un oggetto a partire da un solo fotogramma: si rendono necessari almeno due fotogrammi o ulteriori

informazioni sulle coordinate Z. Ad esempio se l'oggetto è piano possiamo scegliere un sistema di riferimento oggetto con il piano XY coincidente col piano dell'oggetto, in questo modo tutte le componenti Z dei punti del piano sono nulle e quindi è possibile restituire tutti i punti del piano a partire da un solo fotogramma.

### 1.4.1.2 I parametri di orientamento

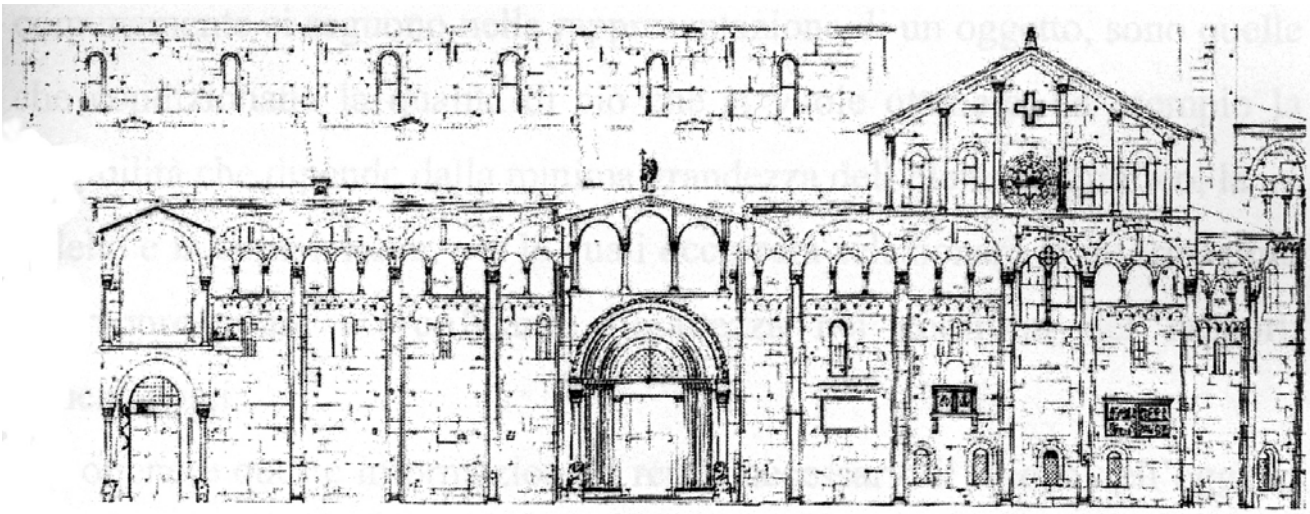
Le trasformazioni definite dalle equazioni di collinearità richiedono la conoscenza dei parametri di orientamento, questi possono essere divisi in due categorie: i *parametri di orientamento interno* (P.O.I.) e i *parametri di orientamento esterno* (P.O.E.):

- P.O.I. : definiscono la posizione del centro di proiezione relativamente al piano dell'immagine e sono tre: $\xi_0$, $\eta_0$ coordinate immagine del PP ( punto principale ), *c* distanza principale;
- P.O.E. : questi invece definiscono la posizione ed assetto della camera al momento dello scatto nel sistema di coordinate oggetto, e sono sei: $X_0,Y_0,Z_0$ coordinate oggetto del centro di presa e $\omega,\varphi,\kappa$ angoli di rotazione della camera attorno agli assi coordinati.

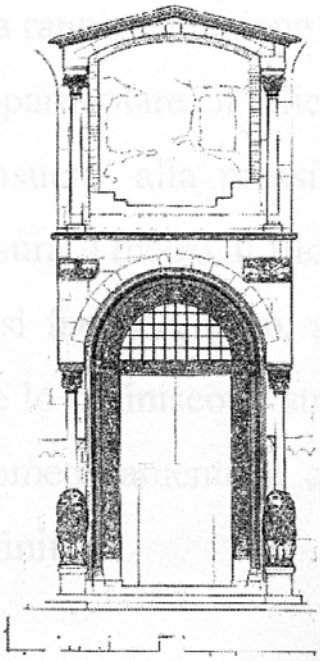
La definizione della prospettiva centrale, rappresentata da un fotogramma, richiede quindi in totale 9 parametri, i P.O.I. sono costanti, caratteristici della particolare camera utilizzata e determinati dal costruttore e vengono riportati nel certificato di calibrazione insieme ad altre informazioni quali le coordinate immagine delle marche fiduciali o dei reseau ed i valori della distorsione radiale. Tali P.O.I. possono essere comunque sempre ricavati con misure di laboratorio mediante una procedura di autocalibrazione della camera. I P.O.E. vengono invece determinati durante la fase di orientamento esterno delle prese, per fare ciò si utilizzano i punti di coordinate oggetto note, chiamati punti fotogrammetrici di appoggio (P.F.A.),

disposti uniformemente sull'oggetto da rilevare. Con almeno 3 di questi P.F.A. si possono scrivere ( tramite le equazioni di collinearità ) 6 equazioni ( ogni punto ne genera 2 ) atte a risolvere il sistema.
Risulta quindi che per orientare ogni fotogramma sono necessari un minimo di 3 punti di coordinate oggetto note, nel caso si posseggano n P.F.A. si possono scrivere 2n equazioni tramite la (1.2) e risolvere il sistema con il metodo dei minimi quadrati. Purtroppo le equazioni di collinearità non sono lineari e quindi per essere impiegate nella compensazione ai minimi quadrati devono essere prima linearizzate in serie di Taylor nell'intorno di una soluzione approssimata. Risolti i vari problemi di calcolo, alla fine si determinano i 6 P.O.E. voluti, a questo punto si può dare inizio alla fase di restituzione. Ora per ogni punto oggetto incognito possediamo due coordinate immagine dello stesso misurabili sul fotogramma, è quindi possibile impiegare sempre le (1.2) per scrivere 2 equazioni per ogni punto immagine, ma le incognite ( coordinate oggetto del punto ) sono 3 (X,Y,Z). Quindi non è in alcun modo possibile risolvere il sistema, l'unica soluzione prevede di avere qualche informazione sulla coordinata Z, oppure si utilizza un coppia di fotogrammi. In quest'ultimo caso è possibile scrivere 4 equazioni ( 2 per ogni punto e tante volte quante sono i fotogrammi in cui compare ). Avendo a disposizione un sistema di 4 equazioni in 3 incognite ( le coordinate X,Y,Z, del punto ) è possibile mediante compensazione ai minimi quadrati trovare la soluzione del problema.
In generale possedendo n fotogrammi il ragionamento è del tutto analogo a quello appena fatto, ogni fotogramma deve essere prima orientato attraverso la determinazione dei suoi 6 P.O.E. ricavabili mediante le (1.2) ed almeno 3 P.F.A., orientati tutti gli n fotogrammi è possibile passare alla fase di restituzione in cui per ogni punto collimato sul fotogramma è possibile scrivere 2 equazioni, mentre le incognite sono 3 (X,Y,Z) per ogni punto oggetto che si vuole

restituire. Affinché il sistema sia risolvibile è dunque necessario che le equazioni siano in numero superiore alle incognite, in altre parole ogni punto oggetto incognito deve comparire su di almeno due fotogrammi.



*Duomo di Modena. Rappresentazione del Prospetto sud. Scala del rilievo 1:50.*



*Duomo di Modena. Rappresentazione del Protiro e della facciata principale. Scala del rilievo 1:20.*

Figura 1.14 – Restituzione vettoriale del Duomo di Modena.
Da questa rappresentazione è possibile comprendere quanto la tecnica fotogrammetrica riesca a restituire in modo dettagliato ed esatto la reale forma di oggetti anche molto complessi e dalle geometrie più svariate.

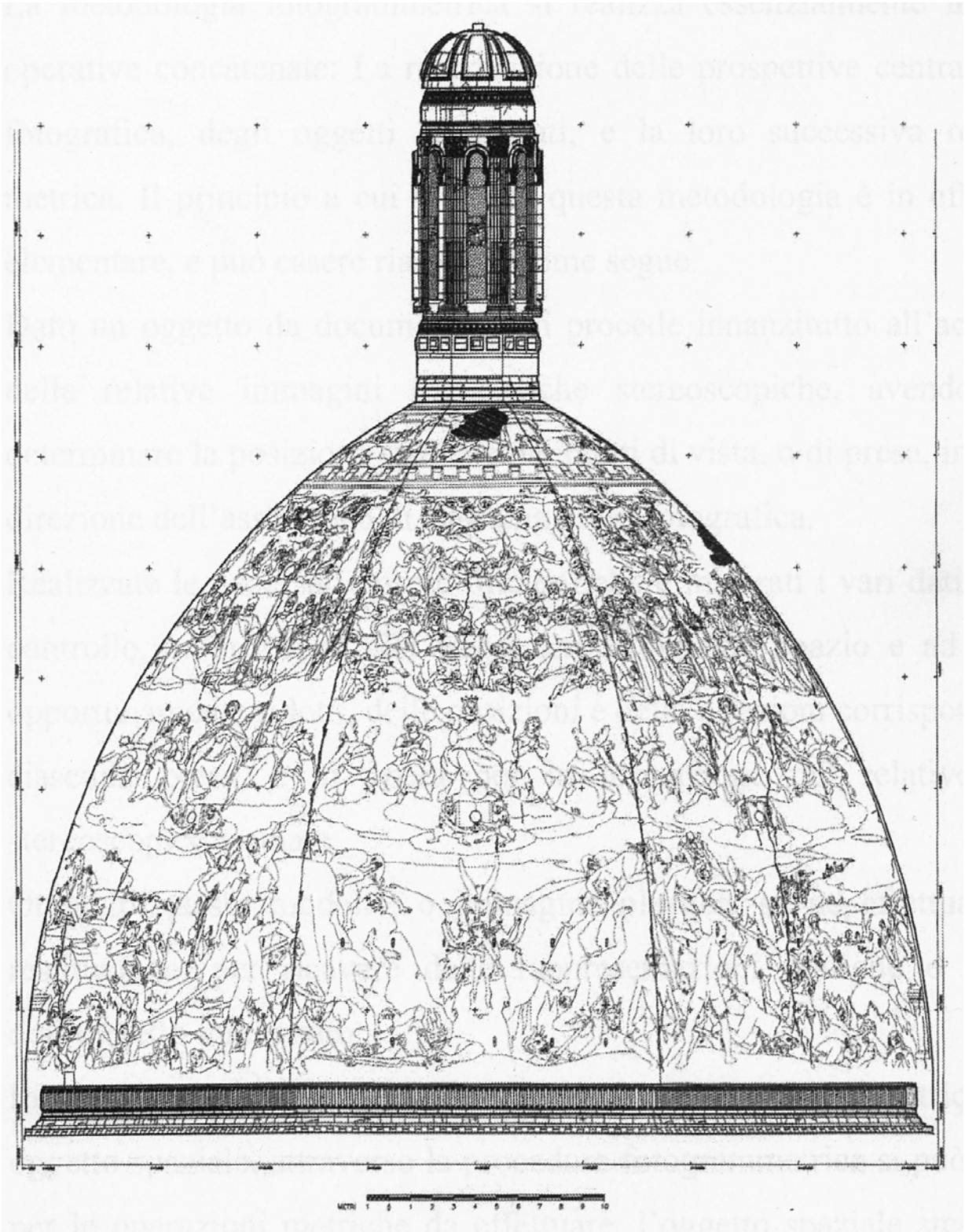


Figura 1.15 – Rilievo derivante dalla restituzione fotogrammetrica della Cupola del Brunelleschi con i suoi affreschi, Firenze. Scala ridotta a 1:250.

### *1.4.2 La fotogrammetria monoscopica*

Per far fronte alle difficoltà derivanti dai requisiti imposti dalla restituzione stereoscopica, si sono recentemente sviluppati metodi semplificati e non convenzionali, che, rinunciando alla stereoscopia, permettono una maggiore flessibilità operativa e sono particolarmente indicati per il rilievo architettonico ( facciate di edifici, monumenti, ecc… ) perché anche con il solo uso di attrezzature molto semplici si ottengono dei discreti risultati. Fotocamere comuni, non necessariamente metriche o semi-metriche e dei personal computer equipaggiati con software specifici permettono di eseguire tutte le fasi del rilievo fotogrammetrico, eliminando così l'impiego di attrezzature costose e particolari che richiedono anche una certa competenza nell'utilizzo. Con tali metodi le prese fotogrammetriche non devono più soddisfare le condizioni imposte dalla stereoscopia: le prese possono essere ad assi ottici convergenti, e la scala media dei fotogrammi può variare anche enormemente, oltretutto le prese possono essere anche più di due.

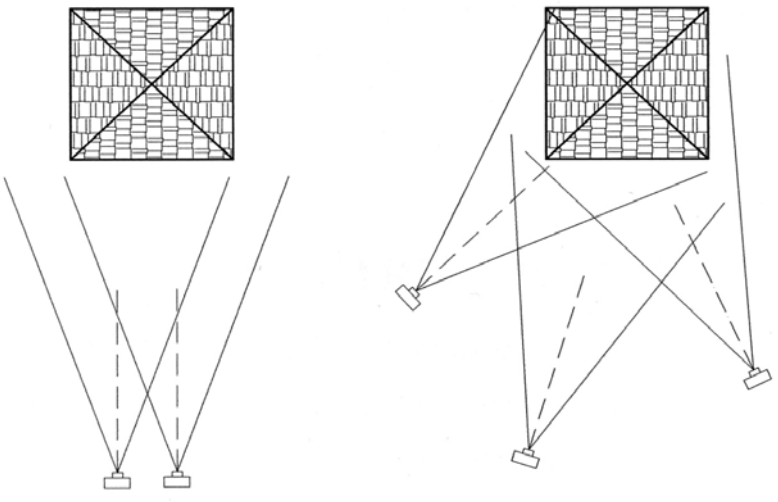


Figura 1.16 – Presa stereoscopica ( a sinistra ) e monoscopica ( a destra ).

Nella figura 1.16 è sottolineata la differenza fra la presa stereoscopica e quella monoscopica. Come si può notare, nel secondo caso si ha una maggiore flessibilità operativa, essendo possibile effettuare le prese fotografiche da qualunque postazione.

Le differenza più importante e caratterizzante del metodo monoscopico consiste nella non indispensabilità dell'utilizzo di costose camere metriche, sia nel fatto che non è obbligatorio realizzare prese ad assi ottici paralleli tra loro; infatti la determinazione delle coordinate dei punti di presa è effettuata indirettamente anche in questi metodi, utilizzando un certo numero di punti di appoggio.

Entrambi i metodi possono essere impiegati per il rilievo di oggetti situati a breve distanza ( fino ad un massimo di 100-200 metri ), e sono per questo classificati in una particolare specializzazione della fotogrammetria, denominata *fotogrammetria dei vicini* o *close-range photogrammetry*.

In conclusione possiamo dire che le basi matematiche che governano la fotogrammetria, ovvero la geometria proiettiva, sono concettualmente semplici, mentre la traduzione in pratica non lo è affatto. Questa difficoltà pratica è dovuta al fatto che le condizioni al contorno sono spesso molto variegate e l'obiettivo finale, l'esatta e migliore restituzione può essere raggiunta solamente tenendo conto delle situazioni in cui si deve operare, del software e degli strumenti a disposizione per l'effettuazione delle prese e la successiva elaborazione numerica.

### *1.4.3 La fotogrammetria digitale*

Essa è l'ultima frontiera della fotogrammetria, verso cui si concentrano tutti gli sforzi della moderna ricerca, atta a trovare soluzioni per migliorare tutto il processo fotogrammetrico sia in termini di precisione metrica, sia dal punti di vista dei costi e dell'aumento delle procedure automatizzate. Sostanzialmente le equazioni ed i metodi che governano la fotogrammetria digitale sono gli stessi di quella analitica, tutta la teoria fotogrammetrica continua a valere, l'unica differenza si evidenzia sulle strumentazioni e

metodologie di elaborazione dati impiegate. La differenza più evidente e sostanziale che è riscontrabile nelle tecniche digitali consiste nella natura del dato primario, ovvero dell'immagine: nella fotogrammetria analitica si impiega la classica pellicola, mentre nel digitale è utilizzato un file immagine.

Le immagini digitali possono essere ottenute attraverso due diversi procedimenti: tramite acquisizione diretta utilizzando camere digitali, oppure indirettamente per mezzo di una scansione della pellicola.

L'acquisizione per via diretta prevede l'uso di fotocamere che al posto della pellicola possiedono dei sensori CCD (*Charger Couplet Device*) costituiti da una matrice di pixel sensibili alla luce che convertono il segnale luminoso in un segnale elettrico di varia intensità, proporzionale all'esposizione ed al flusso luminoso in entrata. In tal modo ad ogni pixel è associato un valore numerico che rappresenta l'esposizione che esso ha subito, e l'immagine digitale può essere quindi vista come una matrice di numeri in cui ogni suo elemento rappresenta la luminosità del generico pixel (i,j).

Se si sceglie la via indiretta invece è possibile ottenere la suddetta matrice che rappresenta il file immagine digitale attraverso una scansione effettuata per mezzo di appositi scanner fotogrammetrici. In realtà qualunque scanner potrebbe essere adatto alla conversione in digitale delle immagini, ma quelli appositamente concepiti per la fotogrammetria inducono bassissime distorsioni e consentono di acquisire immagini ad altissima risoluzione. Nel qual caso si voglia comunque utilizzare dei comuni scanner e necessario che essi siano stati preventivamente calibrati, in modo da conoscere e poter correggere l'andamento della distorsione indotta durante il processo di acquisizione.

I motivi per cui la fotogrammetria tenta di evolversi nel digitale consiste principalmente nella possibilità di ottenere prodotti finali in tempi molto rapidi, a bassi costi e con sempre minori dispendi di

energie grazie alle procedure di restituzione automatica. Purtroppo ancora l'immagine digitale non riesce a raggiungere il potere risolvente delle pellicole, e quindi non è pensabile di ottenere delle elevate precisioni, oltretutto per immagini ad alta definizione si necessitano di potenti computer corredati di ampie capacità hardware e software. L'unica attuale soluzione per garantire le elevate precisioni di rilievo senza voler rinunciare alle procedure automatizzate di autocorrelazione e restituzione consiste nel realizzare le prese con le camere a pellicola, e successivamente trasformare le immagini in file digitali tramite scansioni ad altissima risoluzione.
In definitiva le tecniche digitali non riescono ancora a garantire gli standard di precisione raggiungibili dalle comprovate metodologie classiche di rilievo, ma è certo che in tempi relativamente brevi la tecnica digitale supererà ogni aspettativa, imponendosi con forza in ogni settore e riuscendo non solo a garantire elevatissime precisioni, ma permetterà di automatizzare sempre più tutte le fasi del rilievo fotogrammetrico fornendo in output ottimi prodotti finali in tempi rapidi, a bassi costi e con poco dispendio di energie da parte dell'operatore.

### *1.4.4 L'ortofoto*

L'ortofoto è un eccellente prodotto raster che deriva dal raddrizzamento di immagini fotografiche, tale raddrizzamento può essere più o meno sofisticato: dal semplice raddrizzamento generale a quello differenziale basato sulla conoscenza di un DSM dell'oggetto.
Purtroppo le immagini fotografiche "soffrono" del problema della prospettiva, ovvero delle linee parallele che convergono e della variazione di scala dell'immagine da punto a punto, questo non è certo l'ideale per fare delle misure. Allora tramite la restituzione fotogrammetrica si possono ottenere cartine geografiche e rilievi vettoriali di ogni tipo, che riportano l'oggetto voluto in una apposita

scala che permette di effettuare in modo efficace qualunque misura sull'oggetto. Nonostante ciò in taluni casi la tradizionale carta al tratto può risultare un prodotto non del tutto sufficiente, in quanto questa è frutto dell'interpretazione del restitutore, inoltre non è in grado di riportare la finezza di dettagli che invece si trovano su di una fotografia. L'ortofoto nasce quindi per risolver questi problemi appena citati, difatti essa coniuga l'informazione metrica con quella fotografica. In sostanza è una fotografia che riporta una proiezione ortogonale dell'oggetto, su tale "foto" è possibile tramite un righello misurare qualunque distanza. Per immagini assimilabili approssimativamente ad un piano ( come ad esempio la facciata di un edificio ) la realizzazione di un'ortofoto risulta alquanto semplice, economica e rapida, tanto che può essere una soluzione migliore rispetto alla classica restituzione del prospetto del fabbricato. In questi casi tramite una trasformazione omografica è possibile operare un raddrizzamento generale del piano. Nel caso invece di oggetti dalla forma complessa il semplice raddrizzamento generale non è di alcuna utilità, in questi casi si deve approssimare la superficie dell'oggetto mediate tanti piccoli triangolini dalla superficie piana, fatto ciò viene poi impiegato il raddrizzamento differenziale, il quale non fa altro che raddrizzare ogni piccola porzione di piano definita dal triangolino. In quest'ultima condizione è quindi assolutamente indispensabile disporre un DSM dell'oggetto da ortorettificare, questo è dunque un procedimento laborioso e complesso che è previsto solamente per lavori di una certa importanza.

Ora vediamo come la proiezione prospettica sia differente da quella ortogonale, e quale legame c'è fra le due. Nella figura 1.17 si nota come la prospettiva centrale di un grigliato regolare produce un gigliato irregolare e deformato. Quanto un oggetto presenta variazioni di quote significative, come è già stato detto, il semplice raddrizzamento generale non è sufficiente, e bisogna trovare un

metodo che permetta di eliminare gli spostamenti dovuti all'altezza ed inclinazione. Si considerano allora piccole porzioni di fotogramma e per ognuna di esse di esegue si esegue un raddrizzamento, cambiando di volta in volta le condizioni geometriche di proiezione.

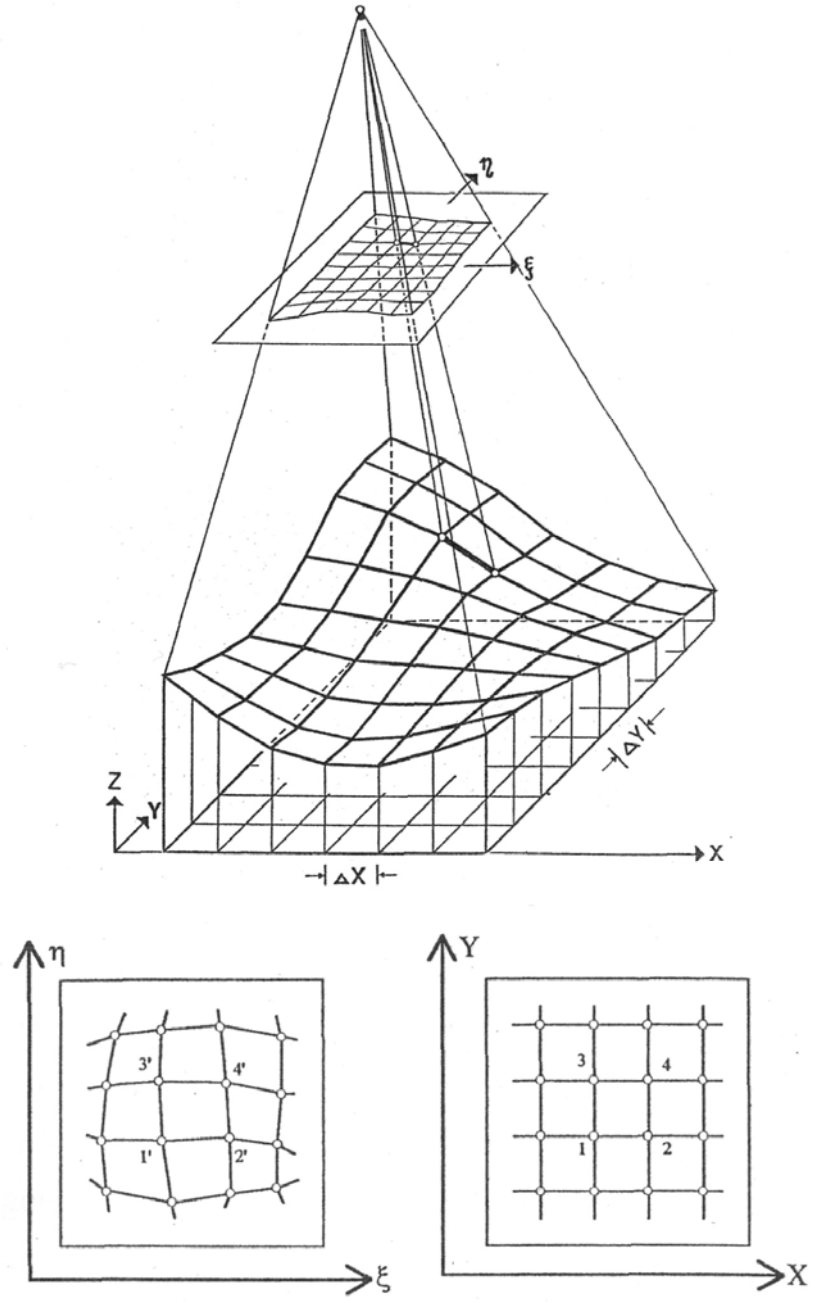



Figura 1.17 – Relazione fra il grigliato a maglia quadrata ΔX = ΔY nel piano XY ed il corrispondente grigliato deformato sul piano immagine.

Dalla figura 1.17 è possibile comprendere il perché sia necessario conoscere l'orientamento esterno del fotogramma e l'andamento della

superficie dell'oggetto (DSM), senza queste due informazioni non è possibile in alcun modo produrre l'ortofoto dell'oggetto.

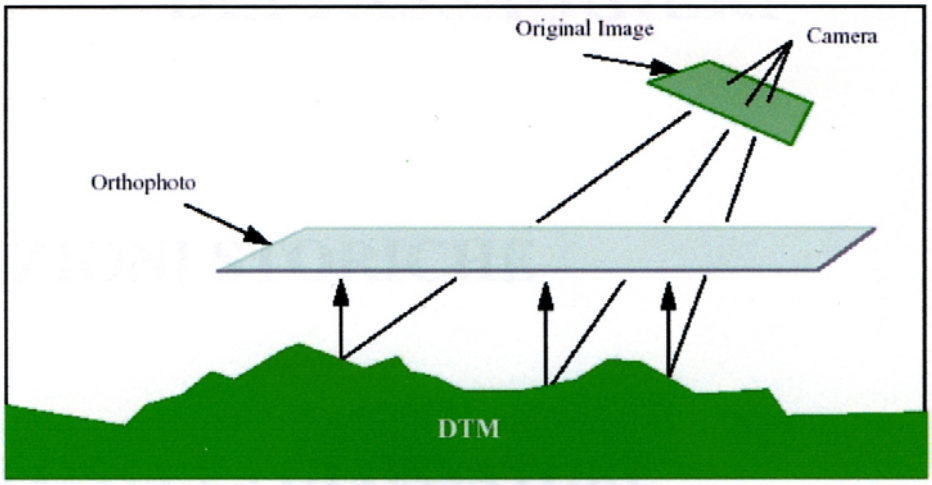



Figura 1.18 – Schema di ottenimento dell'ortofoto.
Da questa immagine si constata che l'ortofoto è concettualmente una proiezione ortogonale del DTM ( o DSM ) dell'oggetto su di un piano prestabilito.

L'ortofoto digitale viene prodotta attraverso la procedura di ricampionamento dell'immagine digitale di origine, applicando una trasformazione inversa ( vedi figura 1.19 ): per ogni pixel dell'ortofoto si risale al corrispondente punto sul fotogramma utilizzando le equazioni di collinearità ( per questo il fotogramma deve essere orientato, ovvero deve avere i P.O.E. noti ); si assegna poi, ad ogni pixel della nuova matrice, il valore radiometrica con uno dei seguenti metodi di interpolazione:

- *nearest neighbor*: il valore di densità (DN) del pixel di destinazione è assunto pari a quello del pixel più vicino dell'immagine di partenza;
- *interpolazione lineare*: il nuovo DN è ottenuto dalla media pesata dei 4 pixel più vicini;
- *convoluzione cubica*: come il precedente con la differenza che vengono considerati i 16 pixel più vicini.

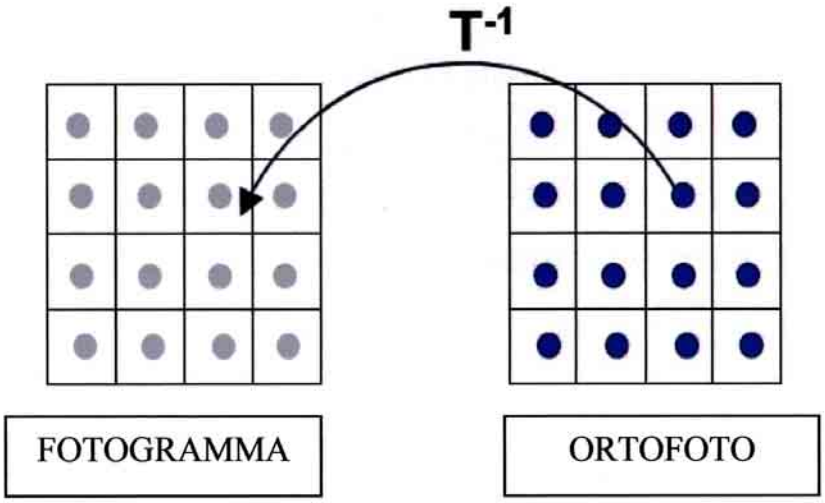



Figura 1.19 – Trasformazione inversa dall'ortofoto all'immagine.

Tale trasformazione è quella che avviene per ogni pixel dell'ortofoto durante la costruzione dell'ortofoto digitale.

# Capitolo II

L'arte comincia dalla resistenza: dalla resistenza vinta.
Non esiste capolavoro umano che non sia stato ottenuto faticosamente.
André Gide

# DOCUMENTAZIONE STORICA E CONTESTO GEOGRAFICO DELL'ARCO D'AUGUSTO DI RIMINI

## 2.1 INTRODUZIONE

Fondamentale è l'importanza di questo capitolo, più di quanto possa apparire alla luce di una tesi con indirizzo prettamente scientifico-ingegneristico come questa. Spesso nell'ambito di studi con scopi quali il rilevamento di beni culturali storici, il loro restauro, lo studio statico di tali oggetti o qualunque altra opera di architettura e/o ingegneria messa in atto è sottovaluta l'importanza di una preliminare ed adeguata conoscenza storica del bene su cui si va ad operare. Infatti la conoscenza di tutte le vicissitudini storiche ci permette ad esempio di meglio comprendere quali interventi di restauro il monumento potrebbe aver subito in tempi più o meno remoti, questa informazione può essere molto utile per la preparazione di un nuovo restauro. Conoscendo gli interventi avvenuti in passato si possono fare ipotesi anche sul perché attualmente il monumento presenti certe particolarità statico-architettoniche. La necessità di possedere informazioni storiche è facilmente comprensibile se lo scopo del lavoro è quello di restaurare l'opera d'arte ; meno ovvia è quando l'obbiettivo è quello di fare un'analisi sulla sicurezza di stabilità della struttura ( fase che spesso viene eseguita prima del restauro ). Anche in questo caso invece le informazioni storiche possono essere molto utili, infatti eventuali precedenti analisi possono servire per confrontare i risultati a cui sono giunti i nostri predecessori con i nostri dati. Facendo un confronto si può seguire l'evolversi dei fenomeni. In una parola, si fa del monitoraggio, che è una cosa ben più importante della singola

analisi. Oltretutto indagando nel passato possiamo trovare dati che ora non possono essere più reperibili o sono sconvenientemente ricavabili. Oltretutto eventuali interventi di restauro eseguiti in passato ma attualmente non visibili in superficie possono aver modificato il comportamento reologico-strutturale dell'opera in modo da influenzare notevolmente la risposta della struttura alle sollecitazioni; e la non presa coscienza di tali interventi nella fase di modellazione numerica della struttura può portare a risultati numerico-strutturali del tutto errati e forvianti. Anche nel lavoro di un rilievo topografico dell'oggetto le informazioni storiche possono essere utilissime, infatti ad esempio da precedenti rilievi,foto ed iconografia varia dell'opera e possibile confrontare ( anche quantitativamente ) il rilievo odierno con quelli storici eseguiti dai predecessori. Questo ci permette di eseguire come al solito del monitoraggio e vedere se nel tempo c'è stata un'evoluzione nella geometria e stato di conservazione del monumento.

Come si ben capisce la lista delle motivazioni per cui è necessaria un'approfondita analisi storica preliminare è molto ampia e qui sopra mi sono limitato a riportare solamente i motivi più importanti.

Figura 2.1 - L'Arco d'Augusto e dintorni visto dal palazzo delle poste situato verso la città – 2005

## 2.2 IL TEMPO DELL'ARCO

Rimini, fra la molte città fondate o fatte proprie dalla repubblica dei Romani, era davvero una città diversa, con una storia ed una vocazione specifica.

Situata alla foce del fiume Marecchia ( *Ariminus,*che diede il nome alla città : *Ariminum* ) -allo sbocco sul mare di una grande valle appeninica che portava direttamente alle sorgenti dell'Arno e del Tevere, quindi al centro della penisola italica e all'altro mare, al Tirreno- nel 268 a.C. era stata impiantata una colonia, una repubblica di diritto latino, con una popolazione numerosa che si era subito preoccupata di mettere a coltura i terreni a mezzogiorno, sino al fiume Conca, ed anche verso nord, oltre il Marecchia, dove la centuriazione riminese giunse entro un secolo sino al fiume Savio ( nei pressi di Cesena ).

Rimini era molto importante sia dal punto di vista militare ( di Rimini si diceva che era sia la serratura di difesa contro le genti che calavano dalle Alpi e dalla valle padana ( i Celti, Annibale ) nonché il valico utile ai Romani per impossessarsi del Nord e dell'Europa ) ed anche dal punto di vista politico: perché Rimini era sì la capitale di un terreno ricco e produttivo, ma soprattutto la sede di una crescente imprenditoria mercantile.

Tramite la vincita della guerra cosiddetta "battaglia delle nazioni" combattuta a Sentino nel 295 a.C. Roma impianta le sue colonie oltre che a Rimini anche a Iesi ed a Senigallia. Il mar Adriatico che era da sempre stato di dominio di mercanti e navigatori della Grecia e del Levante ora, anche tramite la posizione di peso di Rimini, passa integralmente sotto il controllo romano che provvedeva ad attrezzare lo scalo sotto il Conero, ovvero il porto di Ancona.

L'immagine del dio Nettuno raffigurato in un clipeo dell'Arco d'Augusto nel fronte verso la città probabilmente vuole proprio celebrare la signoria dei mari.

A governare Rimini quindi furono ceti diversi dal patriziato, ancora legato all'economia fondiaria.

*Ariminum* fu quindi anzitutto una città mercantile, dove i notabili erano amici o clienti degli *equites* , l'altro ceto al governo di Roma.

Incredibile è pensare che per certi aspetti certi aspetti Rimini era organizzata come Roma.

Figura 2.2 – Clipeo raffigurante Nettuno

Infatti " la città di Augusto" aveva qualche prerogativa in più rispetto alle altre colonie di diritto latino, basti dire che essa aveva una costituzione diversa, il cosiddetto *ius Ariminensius* .

Rimini poi era il terminale della grande strada di nord-est, la via Flaminia, che portava direttamente a Roma. Tale via inizia a Roma presso il ponte Milvio e finisce a Rimini proprio a ridosso dell'arco, dove in precedenza c'era una porta più antica di difesa ed ingresso alla città che in seguito è stata trasformata nell'arco che tutti noi oggi conosciamo.

Tale arco è stato infatti eretto nel 27 a.C. su volere del Senato e del Popolo romano in onore di Ottaviano ( divenuto poi Cesare Ottaviano Augusto ) che aveva curato il restauro della via Flaminia e delle più importanti strade d'Italia, come dice ancor oggi l'iscrizione lapidea parzialmente esistente nella sommità del fronte verso Roma dell'arco.

Già prima della sua fondazione romana, in Romagna, cioè nella Cispadana orientale, nel V e nel VI secolo a.C. si erano affermati interessi economici di città etrusche e umbre.

Trenta anni dopo la sua fondazione latina, Rimini seppe respingere l'ultima aggressione dei Galli, quella dei Gesati.

Poco dopo Rimini fu collegata a Roma dalla via Flaminia. La strada fu tracciata dal Console Gaio Flaminio: era il leader dell'opposizione al ceto dominante, era sostenuto degli imprenditori e dalla plebe.
Rimini può essere ricordata anche per aver saputo incutere timore ad Annibale, tanto che i Cartaginesi la evitarono nel volgere verso Roma e il Mezzogiorno.
Ottantuno anni dopo la fondazione, nel 187 a.C. , da Rimini fu tracciata la via Emilia, sino al Po, a Piacenza. Da questo momento tutto cambiò, i territori padani, progressivamente incorporati nello stato romano, furono amministrati come una provincia; il magistrato che la governava aveva sede a Rimini.
A volte Rimini è intesa anche come protagonista di una storia specifica nel processo di acculturazione latina, tanto che in letteratura vi si registra numerosi prodigi ( un cane che parla, anche un gallo ).
Di seguito vennero i tempi delle guerre civili, culminanti nella contesa dei popoli italici per la parificazione dei diritti con Roma. In questo contesto Rimini divenne un vero e proprio municipio.
Il confine dello stato romano venne portato a Savignano sul Rubicone, seguirono le lotte fra i seguaci di Mario ed i partigiani di Silla. Rimini si era schierata con Mario a seguito della sua nota posizione del ceto dirigente della città. In questo periodo storico Roma era in piena rivoluzione, tale tempo di rivoluzione si concluse proprio con Augusto che portò la pace. Quindi il tempo dell'arco significa pace e sicurezza; proprio perché le guerre erano terminate, la porta urbica di difesa di Rimini venne trasformata in un arco gigantesco,senza porte, proprio a significare che non c'era più alcun bisogno di rifugiarsi in città.
Oggi l'arco come allora attira l'attenzione per la ricchezza di anomalie nelle proporzioni che non rispettano le regole del Vitruvio ( sproporzionamento voluto per esaltare la diversità di Augusto nel confronto di altri archi ). Basti dire che le dimensioni dell'ampio fornice sono uniche nel suo genere, come a simboleggiare la caduta

della necessità di sbarrare l'ingresso a nemici che ormai non esistono più. Inoltre l'arco e ricco di caratteri simbolici, ad esempio oltre alla simbologia già citata per Nettuno, possiamo ritrovare associazioni con Augusto negli altri tre clipei.

Il clipeo posizionato verso Roma raffigurante Apollo rappresenta la divinità che aveva guidato Ottaviano ( Augusto ) ad Azio nella battaglia contro Cleopatra ed Antonio; mentre Giove ( raffigurato nell'altro clipeo ) rappresenta la divinità suprema che era capace di stabilire pace e concordia.

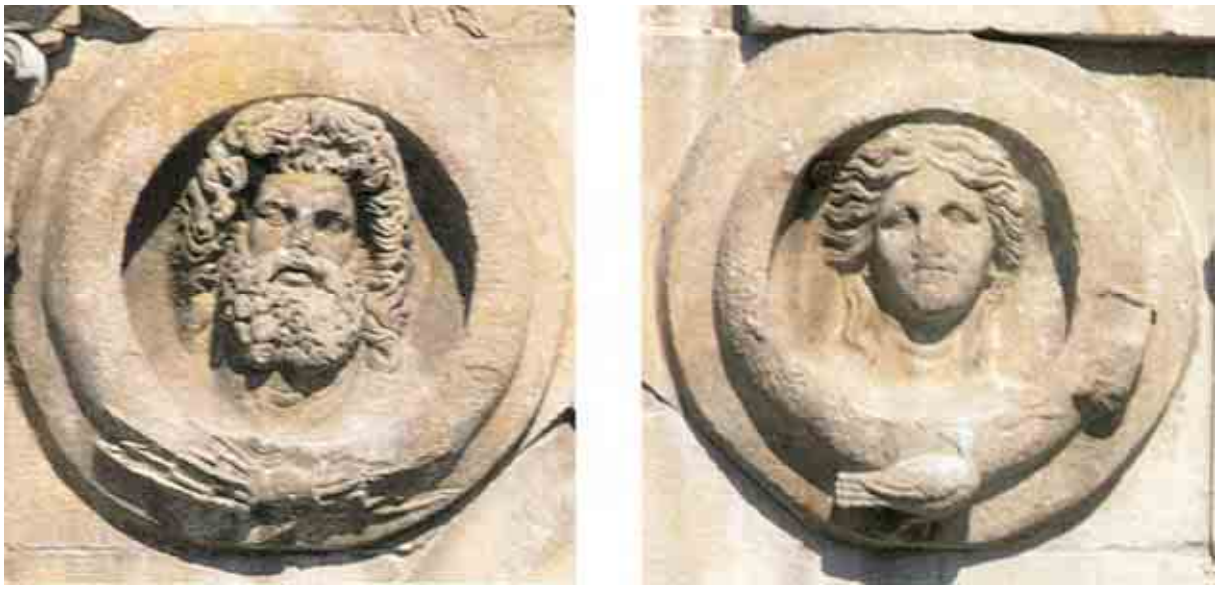


Figura 2.3 – A sinistra clipeo raffigurante Giove ed a destra Clipeo raffigurante Apollo

Nell'ultimo clipeo è possibile invece ravvisare la divinità femminile Roma, poco si è meditato sul significato dell'immagine di Roma: di fatto, proprio il culto di Roma diverrà un elemento propedeutico fondamentale dell'impero, tanto che nelle capitali delle province il tempio-santuario di Roma verrà situato al centro della città. Anche per questo aspetto l'Arco di Rimini è un documento di un lessico politico, di una grammatica del potere che trova i suoi fondamenti anche nella religione.

Figura 2.4 – Clipeo raffigurante la dea Roma, posizionato nel fronte verso Rimini

## 2.3 LA CITTÀ AL TEMPO DI AUGUSTO

Con l'avvenuta costruzione dell'Arco d'Augusto si conclude una travagliata stagione inauguratasi nel 90 a.C. con lo scoppio della guerra sociale. Interpreti di rilievo di questo travagliato periodo di guerre furono Mario e Silla, Cesare e Pompeo, Antonio ed Ottaviano. In tutto questo lasso di tempo la posizione di Rimini è stata di rilievo, infatti essa dal 90 a.C. venne nominata come *Municipium* e quindi possedeva la piena cittadinanza romana. Poco tempo dopo Rimini si schierò con Mario nella lotta contro Silla. Nel 50 a.C. Rimini divenne anche la base delle prime operazioni militari contro Pompeo. Tutto ciò dimostra il ruolo di primo piano che nel corso del I sec. a.C. la città adriatica ancora rivestiva nel panorama politico nazionale, e giustifica la specifica attenzione che le riservarono alcuni dei più potenti personaggi dell'epoca.

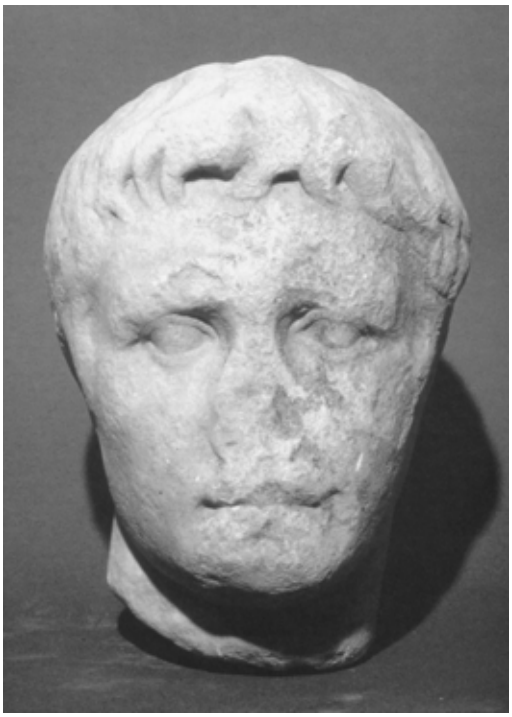


Figura 2.5 – Testa marmorea dell'imperatore Augusto, recuperata in uno scarico di provenienza urbana

Con l'avvento di Augusto Rimini, come tante altre città, subisce un sostanziale rimodellamento e riassetto urbano; rinnovamento che segnò durevolmente ed a tratti indelebili il panorama locale. In questo periodo di pace e prosperità augustea nascono nuove forme urbane: molti centri promossero impegnativi programmi costruttivi, attuati da un lato attraverso il completamento di impianti cittadini da tempo pianificati nelle loro linee fondamentali, dall'altro attraverso la realizzazione di intraprese edilizie decisamente innovative. Augusto fece anche il compito di quello che oggi spetterebbe al ministro dei trasporti e delle infrastrutture, in questo senso egli fu davvero una novità. Promosse varie opere qua e la per la penisola, fra cui una

molto importante: la ristrutturazione e potenziamento della via Flaminia, la vecchia consolare tracciata nel 220 a.C. che, partendo da Roma, dopo aver attraversato la dorsale appenninica e costeggiato il litorale medioadriatico, si attestava all'imbocco orientale del *decumanus maximus* della colonia. Per celebrare l'opera di così rilievo il Senato ed il Popolo romano votò l'erezione di due monumentali archi alle estremità della via, uno presso il ponte Milvio a Roma ed uno all'ingresso di Rimini, dove tuttora si conserva con parte dell'epigrafe recante la motivazione di dedica all'imperatore:

SENATUS POPULUSQ[UE ROMANUS]
[IMP(eratori) CAESARI DIVI IULI F(ilio) AUGUSTO IMP(eratori) SEPT(em)]
CO(n)S(oli) SEPT(em) DESIGNAT(o) OCTAVOM V(IA FLAMIN)IA [ET RELIQUEI]S
CELEBERRIMEIS ITALIAE CONSILIO [ET AUCTORITATE EI]US M[UN]ITEIS

Figura 2.6 – Iscrizione sull'attico dell'arco del prospetto verso Roma

A testimonianza del riassetto augusteo della strada Flaminia si possono segnalare diversi riscontri stratigrafici operati in anni recenti nel suo primo tronco suburbano , tra il ponte sull'Ausa e la chiesa della Colonnella, lungo il tracciato dell'attuale statale che ricalca la

strada romana. Tali verifiche dimostrano che Augusto fece allargare e rialzare il piano viario mediante la creazione di un grosso rilevato in ghiaia, direttamente sovrapposto alla massicciata di età repubblicana e rivestito da una sorta di acciottolato in pietrame.

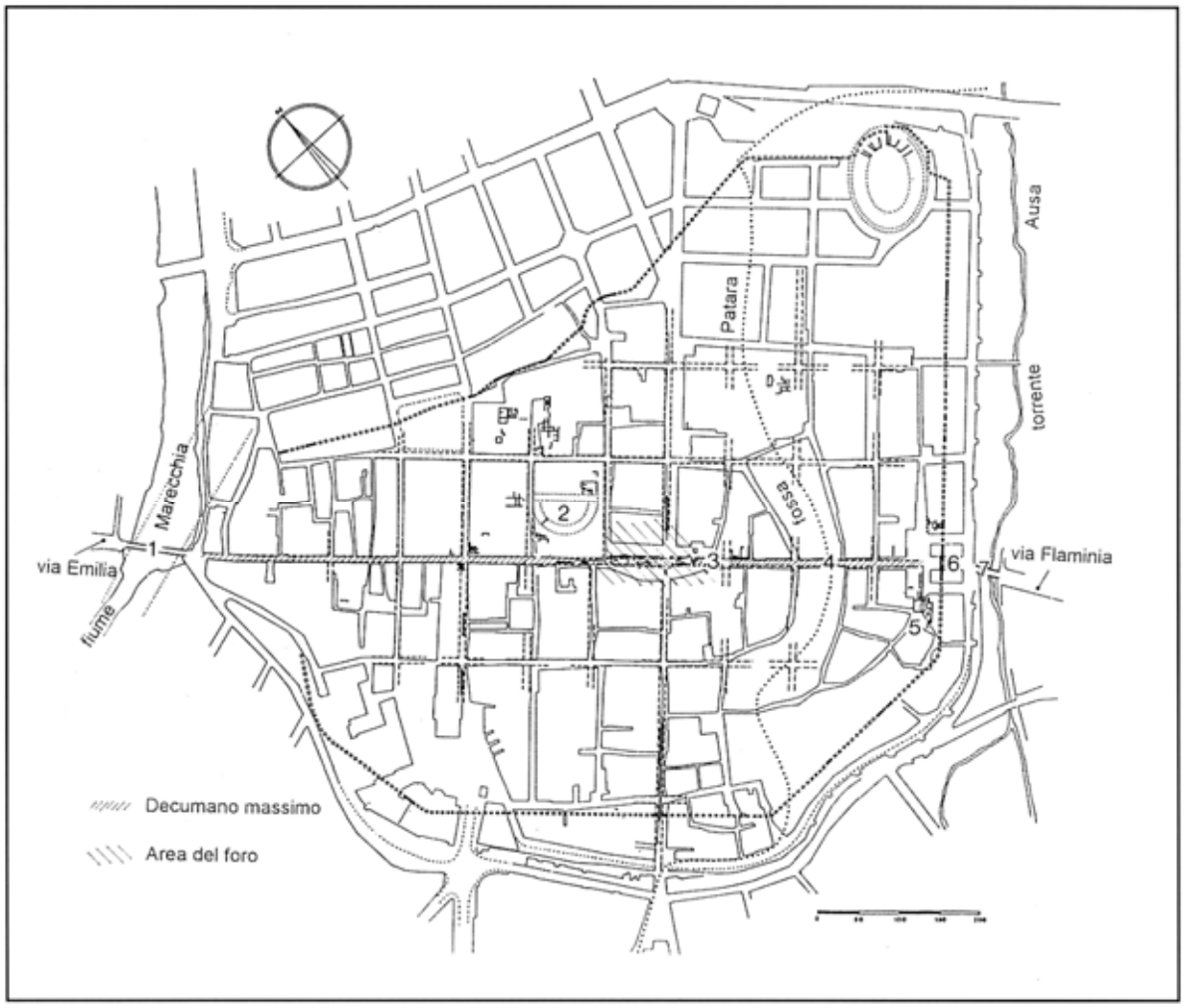



Figura 2.7 – Planimetria urbana di Rimini con indicazione del reticolo stradale romano e dei principali monumenti della prima età imperiale: 1 - ponte di Tiberio; 2 – teatro; 3 – arco di accesso al foro; 4 – ponte sulla fossa Patara; 5 – *domus* a monte dell'arco; 6 – arco d'Augusto; 7 – ponte sul torrente Ausa.

A venticinque anni di distanza, nel 2 a.C. anche la *via Aemilia* subì la stessa sorte della Flaminia.Augusto fece migliorare la situazione urbana di molte città, fra cui Rimini, tramite il potenziamento delle reti infrastrutturali, con l'ampliamento e riqualificazione dei comparti pubblici, con la ristrutturazione degli ambiti residenziali, con la creazione di nuovi apparati monumentali ecc…

Facendosi paladino e promotore delle opere pubbliche ( figura del tutto assente fino a quel momento ) Augusto vuole, oltre che migliorare la situazione dell'impero, esprimere al meglio gli interessi celebrativi e propagandistici che la politica del momento presupponeva.

La ristrutturazione degli impianti stradali operata all'epoca non riguardò solamente le tratte di lunga percorrenza, ma anche gli ambiti urbani come si può evidenziare dal riassetto delle vie del centro storico ed il nuovo lastricamento con basoli poligonali di trachite a sostituzione dei vecchi acciottolati.

Del ponte laterizio sull'Ausa poco si può dire, ma è da ritenere che venne fatto costruire in questo periodo di ristrutturazione protoimperiale in cui venne fatta restaurare anche la via Flaminia.

Molto si potrebbe dire invece nei riguardi dell'altro ponte sul Marecchia che permetteva l'accesso alla via Emilia ( il ponte di Tiberio ), la costruzione fu avviata da Augusto nel 14 d.C. nel suo ultimo anno di vita e fu terminata da Tiberio nel 21 d.C.

Figura 2.8 – Ponte di Tiberio visto da monte dal lato verso il centro storico di Rimini

Di più modesto aspetto, ma altrettanto funzionale fu un terzo ponte, si tratta dell'arcata lapidea sulla fossa Patara, sull'asse del *decumanus maximus* della città. Questo ponte è stato fatto risalire,tramite indagini effettuate negli anni '80 sul Corso d'Augusto, al periodo delle altre ristrutturazioni all'inizio dell'età imperiale; sempre a tale periodo è stato fatto risalire il sistema fognario corrente in profondità sotto il *decumanus maximus* destinato alla raccolta delle acque meteoriche e allo scarico domestico fino ad essere convogliate nella fossa Patara.

Figura 2.9 – Fiancata lapidea del ponte sulla fossa Patara riportata in luce durante i lavori di scavo in Corso d'Augusto ( il vecchio *decumanus maximus* )

La lista di opere attuate a Rimini al tempo di Augusto sembra ancora non finire, infatti oltre a tutte le importanti opere già descritte sopra vi è stato anche un sensibile innalzamento generale del livello del terreno ( 1,5 – 2,5 m ) voluto come intervento di bonifica ambientale avvenuto fra il periodo tardo repubblicano e la prima età imperiale.

Figura 2.10 – Veduta dell'area compresa tra il vecchio ponte sull'Ausa e l'Arco d'Augusto; in primo piano è riconoscibile una sazione stratigrafica con diversi livelli stradali della *via Flaminia* , il più basso dei quali riconducibile al rifacimento di età augustea.

A testimonianza del fatto ci sono indizi archeologici che mostrano come molte *domus* vennero rialzate probabilmente per far fronte agli effetti negativi dell'innalzamento del livello della falda acquifera. L'innalzamento di quota era operato mediante riporti di terreno argilloso e di ghiaia, stesi con azione unitaria su ampie superfici e spesso trattenuti ed imbrigliati dalle fondazioni murarie dei nuovi edifici, appositamente spinte fino a notevole profondità. Analoghe indicazioni scaturiscono dall'analisi altimetrica del piano stradale protoimperiale del *decumanus maximus* e del ponte sulla fossa Patara; la sede viaria mostra un livellamento artificiale con innalzamento del suolo rispetto all'originario andamento morfologico del terreno, tale innalzamento venne protratto fino al monumentale basamento dell'Arco che venne a sovrastare di oltre un metro il vecchio selciato di età repubblicana.

Considerando tutti questi interventi appare evidente che nell'età augustea l'intera città fu sottoposta a grandi opere di bonifica ambientale,riassetto urbanistico con la costruzione di strade, ponti, fognature, edifici, grandi movimenti di terra, espropri e demolizioni…

Con molta probabilità la causa di simili interventi di riqualificazione viene dal fatto di risolvere efficacemente e definitivamente i problemi ambientali ed igenici provocati dall'attraversamento in bassura della fossa Patara, fonte di esondazioni e causa di innalzamenti nocivi delle

falde sotterranee limitrofe. Al di fuori di queste motivazioni tecniche, legate alla salubrità della zona, un'operazione urbanistica di tale impatto assunse anche significative valenze formali: con essa infatti venne ridisegnato e dotato di ordine architettonico un intero settore della città, tale da migliorarne l'immagine, in piena coerenza con i canoni urbanistici della politica augustea.

Sull'onda di questi molteplici interventi promossi da una committenza pubblica seguirono anche svariati lavori a carico dei privati, incentivati dal favorevole momento di benessere economico e la rapida crescita della qualità della vita. A dimostrare ciò sono stati rinvenuti ,in scavi effettuati in diversi punti della città, indizi archeologici che fanno supporre quello che è stato appena detto.

Interessante appare poi il caso del ritrovamento di una *domus* con sale mosaicate e impianto termale rinvenuta subito a monte dell'arco ( Fig. 2.11 ) , pare legittimo pensare che la prestigiosa abitazione si inserisse organicamente nel più ampio progetto di riqualificazione e riassetto del quartiere realizzato in età protoimperiale.

Figura 2.11 – Resti di *domus* romana rinvenuta a monte dell'arco

Figure importanti da non dimenticare in questo processo di riqualificazione della città furono le opere connotate di un marcato senso di monumentalità, le quali contribuirono ad accrescere il decoro della città ed a completare il riassetto generale.
Una di queste opere è stata ritrovata poco a levante dell'incrocio di via Batarra con il Corso d'Augusto; si tratta di un considerevole basamento in blocchi ben squadrati di arenaria. ( Fig. 2.12 )
La struttura, di notevole impianto architettonico ed in origine probabilmente rivestita da lastre marmoree, doveva appartenere ad un grande arco eretto sul tracciato del *decumanus maximus* , nel punto in cui questo incrociava un suo *cardo*, proprio all'imbocco orientale del foro. Il fornice era destinato a nobilitare l'accesso al foro, monumentalizzandolo e forse costituendo una sbarramento per la circolazione veicolare, deviata altrove.

Figura 2.12 – Basamento di piedritto dell'arco di accesso all'antico foro, scoperto presso l'incrocio fra via Batarra e Corso d'Augusto

Un altro indirizzo dominante della politica urbanistica della prima età imperiale fu quello di intervenire sui vecchi comparti ambientali riconformandone la fisionomia originaria, in particolare

racchiudendoli entro monumentali quinte che ne definissero rigorosamente ed in modo unitario la superficie.

Altra opera di monumentale importanza, oltre ovviamente all'arco d'Augusto, è il teatro costruito e rinvenuto molto mutilo nei pressi dell'attuale piazza Tre Martiri ( vedi fig. 2.7 ), dove era un tempo situato il foro di *Ariminum* ( più vasto dell'attuale piazza ). Tale teatro è stato fatto anch'esso risalite all'età imperiale; tali edifici di spettacolo, proprio per la loro prerogativa di indicatori del livello di cultura, godettero di grande fama e fortuna durante gli anni del principato augusteo, come attesta il gran numero di teatri allora costruiti in tutta la penisola. La costruzione di un teatro di tali dimensioni proprio al centro della città, nel foro romano così densamente popolato, deve aver creato non pochi disagi, ma la volontà di dare il massimo risalto a tale dotazione deve aver messo in secondo piano tutti gli altri problemi.

Purtroppo oltre a questi dati la documentazione archeologica riminese è frammentaria e ci impedisce di cogliere altre testimonianze dirette di opere pubbliche riconducibili ad Augusto e la prima età imperiale.

Probabile è comunque pensare che avvenne anche un potenziamento di altre infrastrutture locali quali in porto ed il sistema di distribuzione idrico della città.

Nel riassetto urbanistico di Rimini, attuato o comunque pianificato durate il principato augusteo, scelte politiche e intenti ideologici si fondevano inscindibilmente alle componenti più propriamente tecniche e strutturali. Tanto la trasformazione del tessuto insediativi quanto la creazione di prestigiose e scenografiche architetture furono infatti permeate di intendimenti celebrativi stimolati dalla cultura dominante e suggeriti dal programma di restauro elaborato a livello centrale. In proposito l'esempio più rappresentativo è proprio l'Arco d'Augusto eretto nel 27 a.C. a Rimini.

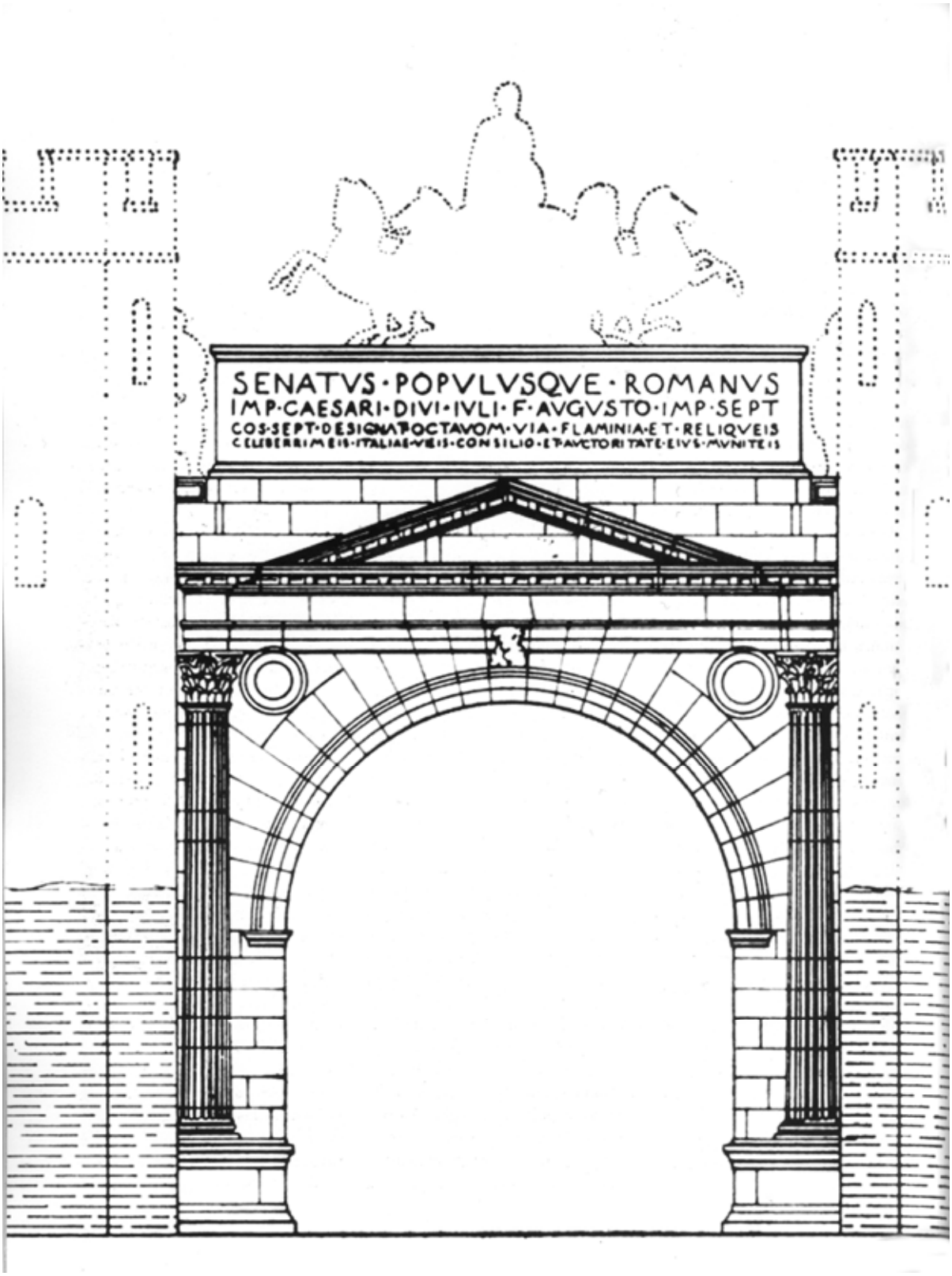



Figura 2.13 – Ipotesi ricostruttiva dell'iscrizione formulata da Giuseppe Gerola, nell'interpretazione di Traiano Finamore ( 1935 )

L'arco è così rappresentato come si suppone dovesse apparire nel medioevo, con a lato le torri poligone in laterizio a pianta eptagonale. L'ipotesi dell'esistenza di una quadriga marmorea condotta da Augusto sulla sommità dell'attico è da ritenere discutibile, mentre l'esistenza di gruppi plastici bronzei ai lati dell'iscrizione è convalidata dal ritrovamento nell'ultimo restauro del '96 di perni metallici atti a sostenere tali statue a tutto tondo.

## 2.4 L'ARCO D'AUGUSTO: STORIA ED EVOLUZIONE

L'Arco d'Augusto non è soltanto il più famoso monumento romano della VIII *regio*, ma riveste un'importanza storica largamente superiore all'interesse locale. Pur non essendo in linea cronologica il primo del genere, è tuttavia il più antico di quelli conservati e diventa pertanto un caposaldo per la conoscenza di una classe di monumenti onorari, della quale i romani rivendicavano a se la novità e l'invenzione.

Figura 2.14 – L'Arco d'Augusto di Rimini visto dalla periferia verso il centro storico - 2005

L'Arco d'Augusto è propriamente la porta orientale della città di Rimini, aperta nelle mura urbane nel punto in cui si concludeva la via Flaminia. Sostituì una porta urbica più antica e coeva alle prime mura, ed ebbe un carattere monumentale, quasi sfarzoso. Fu fatta costruire nel 27 a.C. su volere del Senato e del Popolo di Roma in onore di Cesare Ottaviano Augusto, che aveva, fra le tante opere pubbliche

commissionate , fatto curare anche il restauro della vecchia via consolare *Flaminia* tracciata nel 220 a.C.

Tuttora si può leggere nell'iscrizione , in parte mutila, ( posizionata nella parte superiore della facciata prospiciente verso Roma ) il motivo dell'erezione di tale colosso. ( vedi inizio del paragrafo 2.3 ) Dall'altro capo della *via Flaminia* venne fatto erigere un'altro arco presso il ponte Milvio a Roma.

Figura 2.15 – L'Arco d'Augusto di Rimini visto dal centro storico verso la periferia - 2005

L'Arco è costruito in blocchi di pietra d'Istria ( denominata pietra di Nabresina ROMAN STONE di provenienza iulio-istriana; è un calcare organogeno compatto di formazione marina, di piattaforma-mare basso, definibile come calcarenite o brecciola calcarea fossilifera ) ed è ad un solo fornice che in origine doveva essere largo m. 8,84 , spesso m. 4,10 , ed alto m. 10,23.

La sua facciata invece era larga m. 14,90 ( esattamente 50 piedi romani ) ed alta m. 17,50 fino alla base dei merli ghibellini del

medioevo ( corrispondente all'incirca alla cornice superiore dell'attico ). Di tale merlatura ghibellina in cotto non ci è dato sapere con precisione quando venisse messa in opera, ma a giudicare dalla struttura laterizia, l'opera muraria deve essere parecchio remota. Vista la mancanza di prove dirette, l'ipotesi più accreditata è che la costruzione muraria sia stata messa in atto già da prima del XIII sec. d.C. Infatti il ritrovamento di sigilli duecenteschi mostrano già l'arco con tale merlatura.

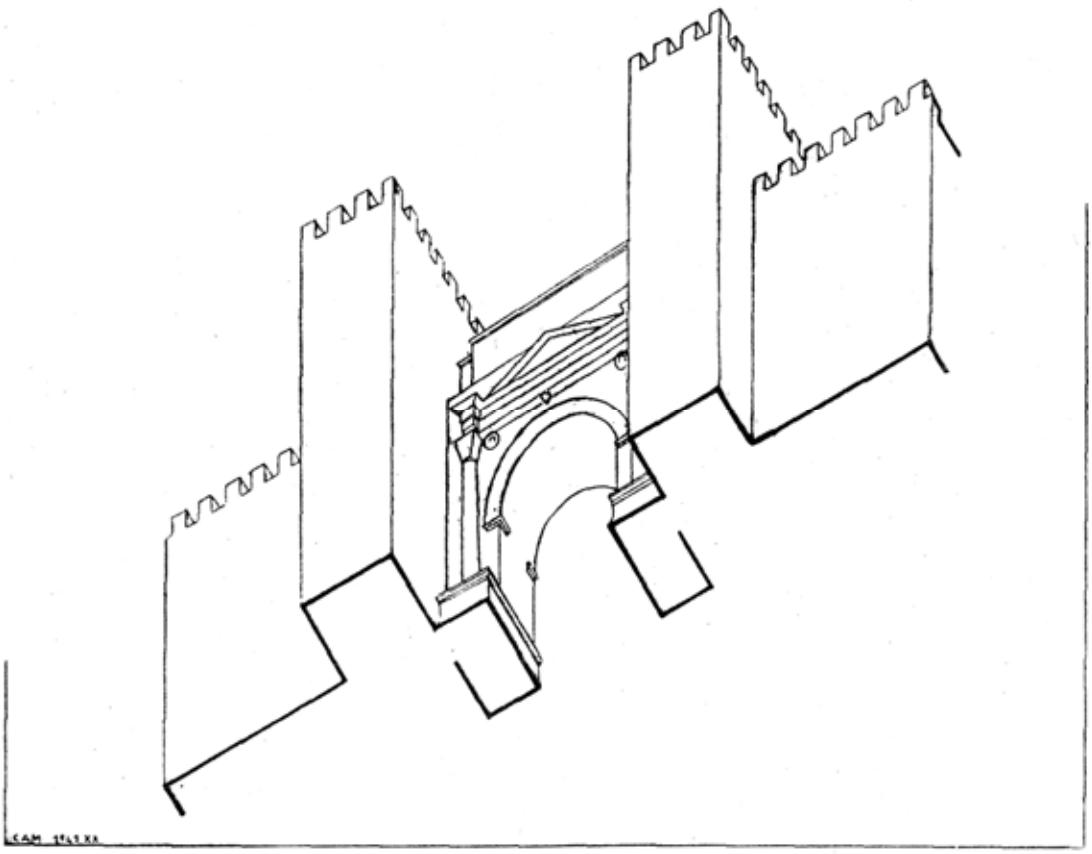
Figura 2.16 – Impronte di sigilli riminesi del XIII secolo e del XVII secolo ( dal Battaglini, 1789 )
L'impronta del sigillo della città comunale è la prima immagine nota dell'arco d'Augusto, e risente fortemente ( come è logico che sia e come constatiamo in tutte le successive ) del 'gusto' del suo tempo. L'uso di questa immagine, scelta perché evidenziava l'antichità e la nobiltà della città, è stato mantenuto, con varianti non sostanziali, fino ad oggi; dal XVII secolo compare anche negli stemmi monumentali della città, affiancata in vario modo dalla croce della *Libertas Ecclesiastica.*

Altro fatto che dimostra quanto sopra citato è che una parte dell'iscrizione dell'attico fu riadoperata e rinvenuta in indagini archeologiche nella porta medievale aperta nelle nuove mura urbiche datate appunto a quel secolo ( XIII ). Il perché sia stata costruita tale merlatura appare ancor più dubbio, certamente per restauro ed impedire che man mano la parte superiore si smembrasse, ma la

rovinosa causa non si riesce a stabilire. Forse il disastroso terremoto del 1308 potrebbe aver causato un simile sfregio al fastigio dell'arco che fu restaurato ( così dice Monsignor Villani ) da Malatestino dall'Occhio; oppure come dicono fonti più dubbie, l'attico sarebbe stato saccheggiato dai greci di Belisario ( affamati di materiale pregiato ) nel VI secolo d.C.

### *2.4.1 Ipotesi ricostruttive delle torri esistite ai lati dell'arco*

Al tempo di Augusto l'arco era affiancato da due torri lapidee ( di arenaria ) di forma quadrilatera, cui si attestavano, a monte e a valle, le mura che si suppone esistessero dalla prima metà del III sec. a.C.



Assonometria ricostruttiva. (Dis. Mansuelli).

Figura 2.17 – Ipotesi ricostruttiva delle torri laterali all'arco.
Interpretazione di G.A. Mansuelli – 1942

Su di queste torri purtroppo non si possiede nessuna testimonianza diretta e spesso c'è stato disaccordo fra i vari autori nel tentativo di ipotizzarne le dimensioni, soprattutto l'altezza. Per anni non si era mai trovata prova dell'ipotizzata esistenza di mura lapidee antecedenti alla costruzione dell'arco, ma nel 1846 lo storico di Rimini Luigi Tonini con saggi di scavo nei pressi dell'arco constatò la presenza di una zona lapidea delle mura, inferiore a quella laterizia, la quale, con uniformi caratteri costruttivi, è stata rinvenuta in vari punti della città. Il Tonini non poteva avvertire l'eccezionale importanza della scoperta, ma seppe valutare appieno un'altra scoperta non meno importante, quella dei resti delle torri quadrilatere lapidee, sottostanti alle torri poligonali laterizie di epoca successiva.

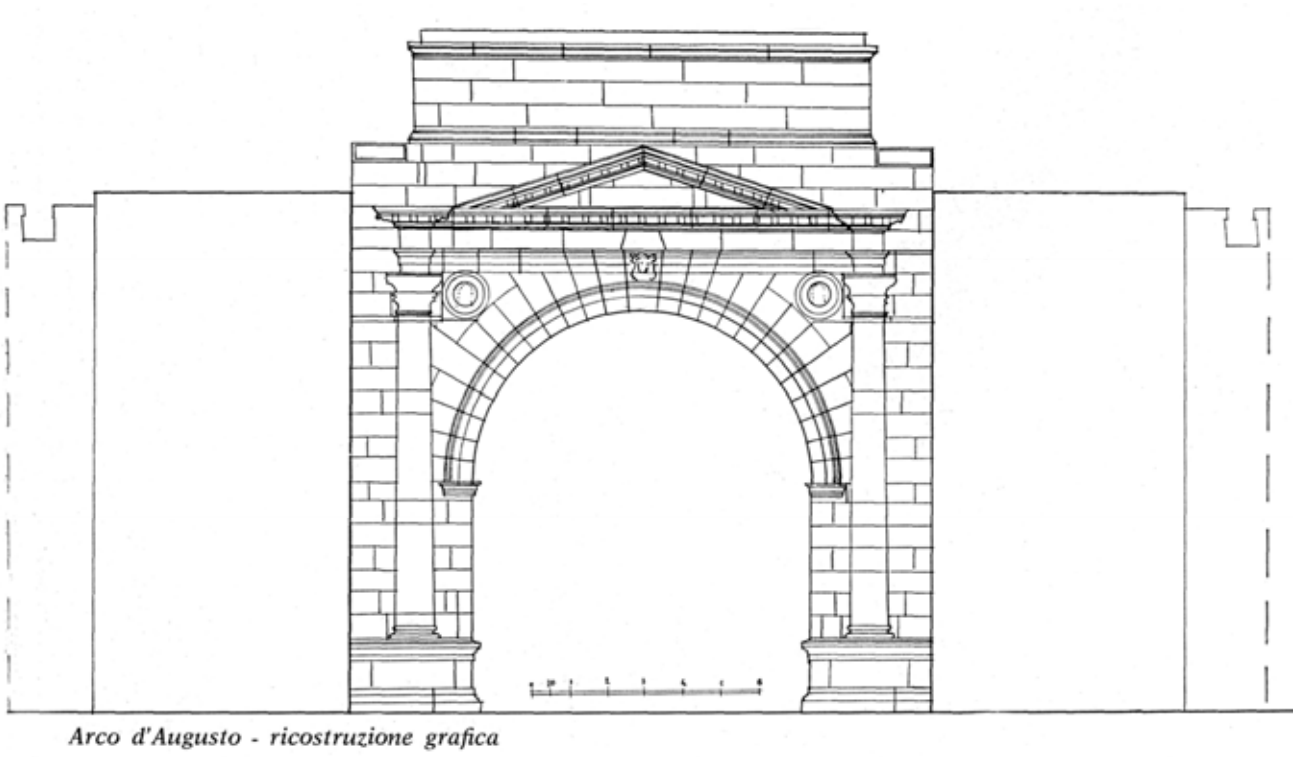



Figura 2.18 – Ricostruzione dell'arco d'Augusto con a lato le torri quadrilatere lapidee ( blocchi di arenaria ) preesistenti alla costruzione dell'arco e mantenute successivamente fino all'avvento delle successive torri poligonali laterizie a pianta eptagonale. Ricostruzione secondo il Mansuelli. A detta di altri studiosi e del 'vecchio' Mansuelli stesso ( che poi si è ricreduto ) le torri lapidee quadrilatere sarebbero state più alte dell'arco in modo da arrivare fino alla cima della quadriga marmorea, ma il Mansuelli non ritiene plausibile l'esistenza di tale gruppo plastico e quindi a seguito anche di altre considerazioni arriva a supporre l'altezza di tali torri, raffigurandole come sopra. Scala disegno 1:200 ( scala ridotta ) - 1960

Tali resti di torri quadrilatere lapidee, sono strettamente connessi con quelli delle mura lapidee, poste definitivamente in luce negli ultimi scavi eseguiti dall'Aurigemma. A detta del Mansuelli Le torri quadrilatere, normali alla fronte delle mura, distavano fra loro di m. 14,92. Quella verso mare misurava m. 6 x 3,90 , l'altra m. 6 x 4,90 ( dalla fronte delle mura ).

Torri laterizie a pianta eptagonale sono state costruite in seguito, sempre in età romana, ai lati dell'arco ed in corrispondenza delle fondazioni delle torri quadrilatere in pietra ( vedi figure 2.13 e 2.19 ).

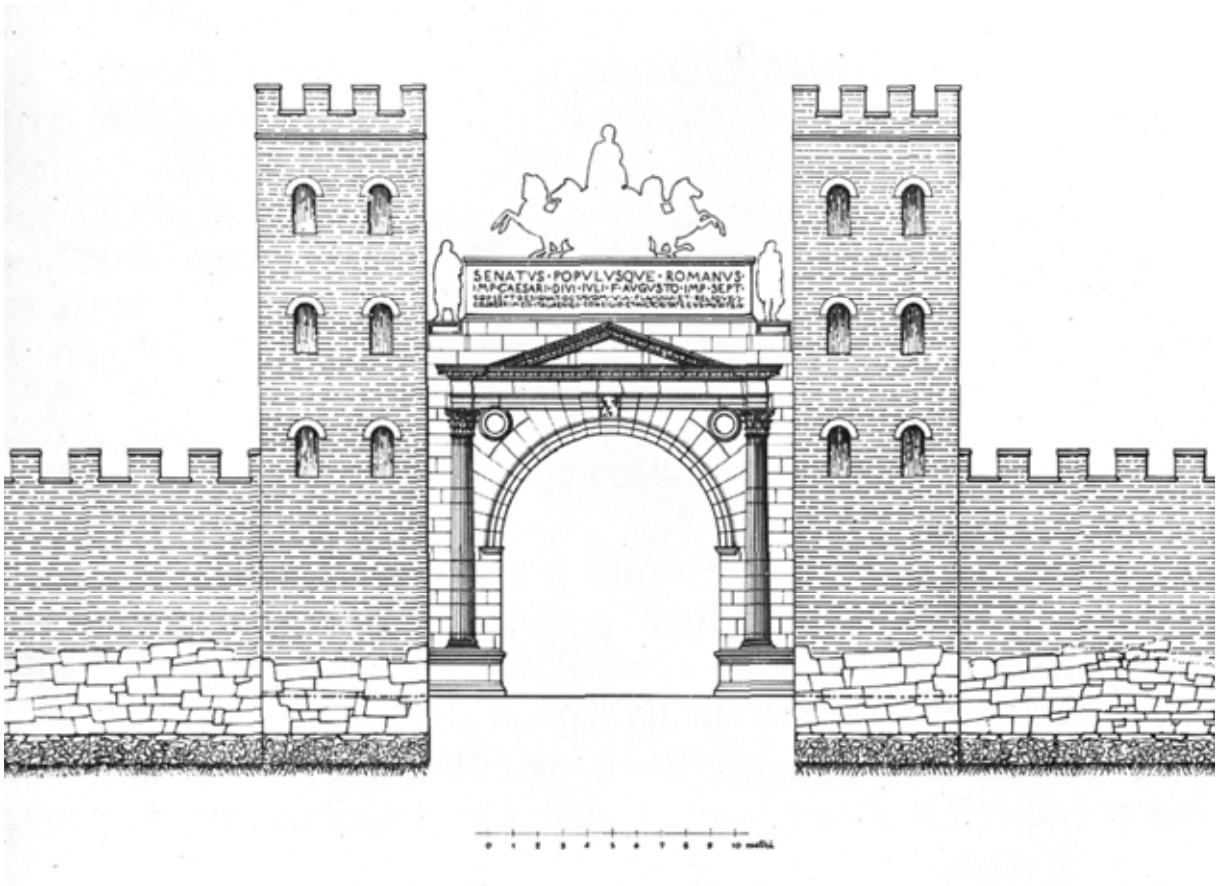



Figura 2.19 – Torri laterizie a pianta eptagonale, costruite successivamente alle lapidee quadrangolari. Anche in questo caso bisogna fare molta attenzione nell'interpretare tale ricostruzione. La ricchezza di dettagli di questa ricostruzione potrebbe far passare per vero e certo quello che invece è solamente supposto. Infatti se possiamo dire con certezza dell'esistenza di torri lapidee quadrilatere prima, e torri laterizie a pianta eptagonale poi, perché esistono i riscontri di scavi archeologici fatti dal Tonini e dall'Aurigemma; altrettanto non si può dire del loro aspetto e altezza della parte in elevazione. Qui tutto è supposto, in quanto gli indizi storici non ci aiutano affatto, anzi tendono a creare confusione e ad essere forvianti. Quindi l'aspetto e altezza di tali torri è stata ricavata dagli studiosi da approfondite analisi storiche,bibliografiche ma anche da riscontri visivi sull'odierno arco stesso.

Gli attuali resti delle torri, salvo che per lo strato più antico, sono, al pari delle cortine murarie al lati dell'arco, ridotte da rimaneggiamenti e restauri a palinsesti murari di una lettura addirittura disperante. La continuità topografica, se non morfologica delle torri è per noi l'unico fondamento per sostenere la conservazione anche in epoca augustea. Le fronti interne delle torri in opera poligonale corrispondono sostanzialmente alle estremità del paramento in pietra dell'arco, sicché non pare possa esservi dubbio che la larghezza dell'interturrio abbia condizionato la costruzione dell'arco stesso.

Figura 2.20 – L'Arco d'Augusto così come si presentava nel 1937, anno dello sventramento della zona intorno all'arco voluta da Mussolini. In questa foto si possono distinguere le ultime testimonianze dei due torrioni laterali all'arco. Essi sono appunto i resti delle torri laterizie a pianta eptagonale ( vedi fig. 2.19 ) che nel corso dei secoli erano state man mano conglobate nelle strutture edilizie che vi si erano addossate all'arco fino a toccarlo. Tali torrioni sono andati inesorabilmente perduti nell'intento di esaltare la qualità trionfale del monumento, così come volle Mussolini. Nonostante ci furono diverse opposizioni da parte di studiosi e dalla Soprintendenza questo non risparmiò la sorte dei torrioni.

Figura 2.21 – Resti del torrione lato monte, dopo lo sventramento del 1937.

Al centro delle foto è possibile riconoscere i resti del torrione quadrilatero lapideo ( in blocchi di arenaria ) di età romana; sopra a tali resti invece si può notare quel che rimane delle successive torri laterizie poligone ( a pianta eptagonale ) che sono state definitivamente distrutte nel 1937 a seguito dello sventramento della zona intorno all'arco.

Figura 2.22 – Resti del torrione lato mare, dopo lo sventramento del 1937

Da indagini storiche si presuppone che le mura romane furono utilizzate fino al XII secolo, in accordo con il dato fornito dal sigillo duecentesco che ci presenta la porta chiusa da due battenti, per quanto relativo sia il valore che può avere questo documento.

Secondo il Mansuelli le torri quadrilatere lapidee in origine adiacenti alla porta urbica preesistente all'arco d'Augusto non dovrebbero essere state ricostruite assieme all'erezione della nuova porta, infatti sull'arco non si notano le tracce di un immorsamento del paramento

dell'arco stesso nelle pareti interne delle torri. Un altro elemento chiave che fa supporre la non demolizione delle torri adiacenti è il seguente: il paramento dell'arco alle estremità non è rettilineo, ma presenta una linea segmentata, sufficiente ad escludere una finitura degli spigoli, ma insufficienti ad essere interpretati come una serie di immorsature, poiché sporgenze e rientranze si limitano al massimo a qualche centimetro. Si osserva inoltre la messa in opera, al termine di alcuni filari, di blocchi molto piccoli ( corsi 5 – 12 – 15 – 17 – 19 – 21 a sinistra e i corsi 7 – 12 – 16 – 19 a destra nel prospetto verso Roma ; e nel prospetto verso Rimini, i corsi 12 – 15 a sinistra , 5 – 15 – 17 a destra ). Le facce laterali dei blocchi appaiono sbozzate nella fronte interna a sinistra dal corso 8 al 15 a destra dal corso 3 al 12. Nella fronte esterna il particolare si nota nel lato destro del corso dal 17 al 21, nel sinistro dai corsi 17 al 23 ; anche per la maggior parte dei corsi sottostanti il profilo dei blocchi contro la muratura laterizia sembra escludere una finitura regolare. Tali irregolarità secondo il Mansuelli possono avere una sola spiegazione: che la porta preesistente fosse ad opera poligonale ed inserita fra torri e tratti di muro ugualmente ad opera poligonale. La demolizione,per la irregolarità implicita in questo sistema costruttivo, può aver lasciato una superficie di contatto con modiche sporgenze e rientranze, che si è cercato di colmare, man mano che si mettevano in opera i corsi della nuova costruzione.

Per rispondere al quesito inerente all'altezza delle torri è possibile una sola osservazione: nel lato sinistro del prospetto verso Roma ( il solo conservato fino alla base dell'attico ) si nota che le facce laterali dei blocchi estremi dei corsi 24 e 25 ( quest'ultimo costituito dalla sporgenza mensoliforme scorniciata ) sono finite allo stesso modo delle facce frontali. Questo porta ad escludere la possibilità di contatto con le torri, le quali di conseguenza non potevano oltrepassare il corso 23; le estremità dei corsi 24 e 25 sono arretrate

rispetto a quelle dei corsi sottostanti, dove la presenza delle torri serviva a mascherare la giunzione fra le vecchie e le nuove strutture.

### *2.4.2 L'apparato di fondazione dell'Arco d'Augusto*

Per sostenere l'enorme peso che l'arco scarica al terreno tramite i suoi piedritti è stato previsto e ben progettato dai romani un mastodontico apparato di fondazione per eludere ogni possibilità di cedimento del sottosuolo che avrebbe danneggiato seriamente la struttura.
Da ricordare è che il terreno sottostante l'arco è un terreno di riporto ( vedi a metà del paragrafo 2.3 ), infatti i romani vi riportarono oltre un metro di terreno per l'esigenza di bonifica ambientale; tale situazione rende ancor più sensibile la struttura nei confronti dei cedimenti, infatti il terreno di riporto oltre ad essere notoriamente scadente dal punto di vista della qualità meccanica deve, con il suo peso, aver aggravato lo stato tensionale nel sottosuolo ulteriormente caricato dalla sovrastruttura ( l'arco ). Tutte queste condizioni hanno necessitato di un adeguato tipo di fondazione che elegantemente i romani hanno saputo scegliere e costruire.
Tale apparato di fondazione non è altro che un'enorme platea lapidea costituita da "tufi legati da calce e lapillo siliceo"; le sue dimensioni sono di m. 3 di profondità al di sotto del terreno, m. 15 di lunghezza e m. 7 di larghezza in direzione dello spessore dell'arco.

### *2.4.3 L'iscrizione dell'Arco*

Nel prendere in considerazione l'epigrafe dell'Arco d'Augusto si è voluto riflettere, oltre che sul testo, sui significati e sulle potenzialità a livello di comunicazione percettiva: l'iscrizione non è infatti un elemento a sé stante, ma una componente di rilievo nell'immagine complessiva del monumento. Per chi giunge a Rimini percorrendo l'ultimo tratto della via Flaminia, l'Arco segna tutt'oggi l'ingresso alla città, imponendosi con il suo volume,luce e decorazioni. Ora

come allora l'angolo di visuale dell'Arco dalla via Flaminia è circa lo stesso; infatti anche al tempo dei romani l'arco non si presentava proprio ortogonale alla via. Questa leggera inclinazione della visuale è un pregio, in quanto permette al visitatore proveniente dalla via Flaminia di poter apprezzare la plasticità ed il volume dell'arco mentre si avvicina ad esso; cosa che non sarebbe possibile se la struttura si presentasse perfettamente di fronte, in quanto la visione sarebbe quella di una proiezione ortogonale con evidente appiattimento delle profondità. In realtà l'effetto non è stato voluto, ma è una conseguenza dell'aver rispettato l'andamento delle mura romane lapidee preesistenti all'erezione dell'arco. Portandosi ad un centinaio di metri dalla costruzione, alla vista è portata l'attenzione di un gioco di luci ed ombre creato dalle parti in aggetto dell'arco, quali in timpano e le semicolonne che ora posso essere apprezzate nella loro tridimensionalità. Al tempo stesso i lati del frontone, svettanti verso l'alto, indirizzano l'occhio verso la sommità della struttura, portando a cogliere l'attico e la scultura ( quadriga marmorea guidata da Augusto ) che forse vi campeggiava. In antico lo sguardo doveva a quel punto cogliere la presenza della monumentale iscrizione: essa si imponeva per i caratteri in metallo dorato che si stagliavano sullo sfondo lunare della pietra, catturando e riflettendo i bagliori dei raggi del sole che dal sorgere al mezzogiorno illuminano proprio la superficie rivolta all'esterno della città. L'intero attico acquisiva maggiore evidenza anche per essere sopraelevato rispetto alla cerchia delle mura.

Da circa cento metri si comincia a leggere l'iscrizione, dapprima nelle linee superiori, di maggiori dimensioni, quindi quelle inferiori, più ridotte ed ammassate. La distribuzione del testo e delle sue dimensioni sembrano aver tenuto conto della dinamica dell'avvicinamento all'iscrizione e non soltanto di una gerarchia dei messaggi: nel

camminare infatti, la lettura si snoda con continuità fino a giungere ai caratteri più piccoli.

Avvicinandosi maggiormente all'arco fino al suo valico è possibile apprezzare appieno la ricchezza delle decorazioni e la sua imponente tridimensionalità.

Da queste osservazioni fatte durante l'avvicinamento al monumento scaturisce una gerarchia dei messaggi legata alla scala della percezione visiva: con immediatezza si impone l'idea della pace e serenità trasmesse dall'eccezionale volume dell'apertura ; successivamente emerge la figura di Augusto, rappresentata dalla statua ed esaltata dall'iscrizione, espressione ufficiale del consenso di popolo e senato nonché esplicito manifesto dell'impegno riservato alle opere pubbliche. All'apparato decorativo, l'ultimo ad essere colto, invece è affidata la trasmissione di concetti più impliciti che lo proiettano su di un livello metafisico. La stessa posizione sopraelevata dell'attico rispetto alle mura presentano Augusto con una personalità che si innalzava per i meriti acquisiti. Il fornice, i piloni, l'architrave con il timpano, fungono da podio per l'attico e l'iscrizione che campeggiano in uno spazio riservato, sottolineato anche da un sensibile arretramento rispetto alla superficie del prospetto.

L'iscrizione è eseguita su di quattro linee di scrittura ad altezza decrescente ed incisa sul posto ( come rivela l'estensione di alcune lettere su pietre contigue ) , occupa tre corsi di blocchi: le prime due contenevano ciascuna una riga di testo, concernente rispettivamente i dedicanti e la titolatura imperiale; la terza ospitava, su due righe, il completamento della titolatura e le motivazioni che avevano portato all'innalzamento dell'Arco.

Analisi della superficie eseguite in occasione del restauro del '96 hanno evidenziato tracce di foglia d'oro che originariamente rivestiva i caratteri bronzei dell'epigrafe: alloggiati nei solchi predisposti dal lapicida, erano ancorati alla pietra con appendici che andavano ad

incunearsi negli incassi ancora oggi visibili negli incavi. ( vedi fig. 2.6 )

La sistemazione attuale dei blocchi dell'iscrizione risale al 1912, anno in cui la Soprintendenza ai Monumenti e quella ai Musei e Scavi della Regione intrapresero i lavori di restauro aventi come scopo anche la sistemazione dell'iscrizione da secoli smembrata. Il testo, tuttora assai mutilo, ha subito le più gravi perdite in età medievale, probabilmente quando l'intero attico è stato colpito da fenomeni di degrado ancora sconosciuti ( forse il terremoto del 1308, oppure ancor prima nel VI sec. d.C. ad opera di un saccheggio di mano Greca ).

La prima trascrizione epigrafica giuntaci è quella di Ciriaco dei Pizzicolli, effettuata nella primavera del 1443, purtroppo tale documentazione storica e giunta fino a noi molto lacunosa. Da quel momento ci furono numerose interpretazioni, ma la più accreditata pare essere quella fornita da Giuseppe da Gerola che ebbe l'opportunità di osservare l'epigrafe da vicino in occasione dei restauri del 1912.

Egli giunse alla seguente conclusione:

SENATUS POPULUSQ[UE ROMANUS]
[IMP(eratori) CAESARI DIVI IULI F(ilio) AUGUSTO IMP(eratori) SEPT(em)]
CO(n)S(oli) SEPT(em) DESIGNAT(o) OCTAVOM V(IA FLAMIN)IA [ET RELIQUEI]S
CELEBERRIMEIS ITALIAE CONSILIO [ET AUCTORITATE EI]US M[UN]ITEIS

Nel linguaggio sintetico proprio dell'epigrafia vengono propagandati i valori che Ottaviano pone al centro della sua politica.

Nel termine stesso di *Augustus* ( concessogli dal senato come appellativo ) si racchiude un'ampia gamma di significati: "sublime","venerabile","sacro" e dal verbo *augere* nell'accezione di "accrescere" , " innalzare".

Con tutte le caratteristiche di questo arco, Augusto vuole trasmettere un'immagine di potenza capace di portare e mantenere la pace e la sicurezza, vuole sottolineare il suo impegno per le opere pubbliche,la viabilità e l'interesse alla crescita economica-commerciale dell'impero, vuole sottolineare le onorificenze avute, vuole mostrasi come il governante che si impegna in importanti opere al servizio di tutti e dell'impero.

In conclusione possiamo dire che tramite l'arco e soprattutto l'iscrizione Augusto vuole dare un'immagine propagandistica di sé e della sua politica che si attua tramite messaggi più o meno espliciti che l'arco lascia trapelare a chi si degna di osservarlo.

### *2.4.4 Modalità di costruzione,analisi formale e rapporti geometrici*

Il monumento quale si presenta oggi è completato da una muratura laterizia che regge la merlatura ghibellina attestata già attraverso il sigillo comunale del XIII secolo d.C. ( vedi figura 2.16 )

Tale muratura può considerarsi un vero e proprio restauro, infatti andando a colmare sui fianchi tutto lo spazio compreso fra i due paramenti di pietra questa muratura riproduce la forma e le dimensioni originali dell'arco. Osservando questa opera muraria di restauro si può notare che su entrambe le fronti del monumento il paramento laterizio sale uniformemente fino al livello di base dell'attico, a questo punto la muratura subisce un arretramento tale da simulare l'antico internarsi dell'attico in pietrame che fungeva da podio probabilmente al gruppo marmoreo di Augusto alla guida della sua quadriga.

L'opera di restauro è stata completata con la messa in opera di sette merli per ciascuna fronte che però eccedono in altezza i limiti del monumento antico, si suppone invece che la base dei merli corrisponda all'estremità dell'antico attico.

Se si fa attenzione nell'osservare la cortina muraria all'estremità superiore dell'arco si può anche notare che nella sua costruzione sono

stati impiegati molti blocchi di pietra riutilizzati; questo reimpiego infatti era una prassi comune nell'antichità, soprattutto nel medioevo. Dall'esame dell'intradosso dell'arcata si ricava che i blocchi delle fronti penetrano in profondità, alternativamente, per un terzo ed un quarto dello spessore; la diversa penetrazione costituiva una sufficiente immorsatura per assicurare la coesione dell'insieme.

Figura 2.23 – L'Arco d'Augusto negli anni 1950-60. Prospetto verso Roma

Il Mansuelli dopo un'approfondita analisi visiva della disposizione dei blocchi di pietra ipotizza nel seguente modo le principali fasi di messa in opera della struttura: elevati i piedritti fino al piano d'imposta si è poi cominciato a voltare il fornice con l'impiego di una centina in carpenteria lignea, certamente autoportante, perché mancano i segni dell'inserzione delle travi all'interno dei piedritti.

La costruzione della volta fino alla sezione di rene è proseguita contemporaneamente alla costruzione delle spalle, adattando via via le facce di giuntura, fino al corso diciassette.

Essendosi adottata per i corsi orizzontali una misura standard, questo per evidenti motivi di semplificare e sveltire il lavoro in cava e a pie' d'opera, la corrispondenza con i cunei dell'arcata doveva dar luogo necessariamente a soluzioni di compromesso, risolte caso per caso.

Messo in opera il corso diciassette delle spalle si è completato il fornice, inserendo i timpani in corrispondenza dei cunei sesto-ottavo e quindi si sono posti in opera i corsi fino al venti incluso.

Da questo momento si poteva ormai fare a meno della carpenteria.

La costruzione proseguì poi per asisse parallele nei corsi ventuno e ventidue; i blocchi obliqui del frontone sono stati collocati dopo aver sistemato il campo del frontone stesso e fermati coni blocchi esterni dei corsi ventitre-venticinque, l'ultimo dei quali forma il piano su cui si posa l'attico.

Gli elementi decorativi sono ricavati in gran parte dai blocchi stessi della struttura: le modanature dello zoccolo, gli elementi principali della trabeazione, gli spioventi del frontone, le cornici dell'attico, i clipei.

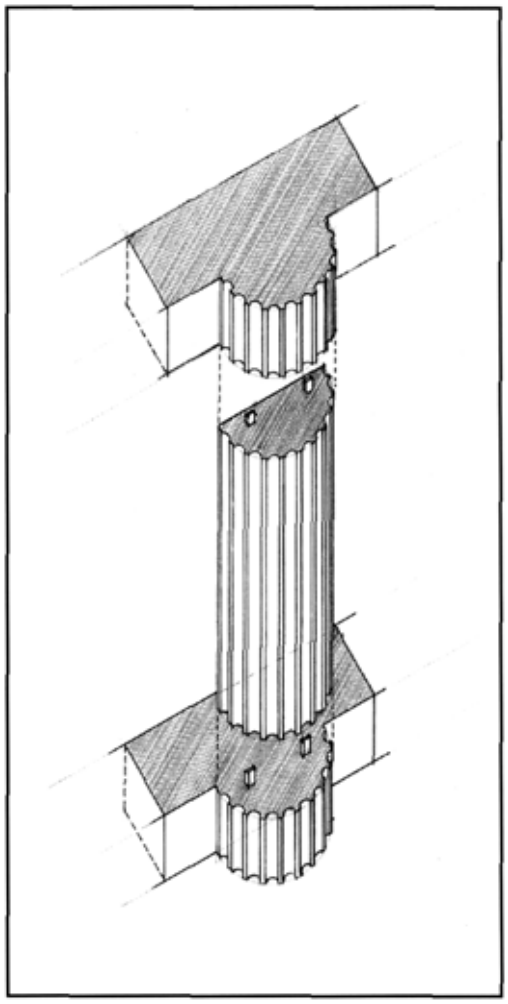


Figura 2.24 – Schema di assemblaggio delle semicolonne.

Le semicolonne sono composte di elementi in parte inseriti: le basi ( corso quattro ), due elementi del fusto ( corsi nove e quattordici ), il sommoscapo ( corso diciassette bis ), la metà inferiore di ciascun capitello ( corso diciotto ); le rimanenti parti del fusto sono semplicemente applicate e tenute a posto con grappe. La metà superiore dei capitelli è lavorata a parte e giustapposta ai blocchi corrispondenti del corso diciannove, così la porzione del fregio nelle articolazione laterali.

Fra le varie parti del monumento intercorrono alcuni rapporti geometrici, che non possono essere considerati casuali, quantunque sia mancata, nell'esecuzione una esattezza millimetrica. La loro identificazione può servirsi a ricostruire il processo che dall'ideazione ha portato al progetto e da questo alla realizzazione. Assumendo come base la proiezione in piano della fronte esterna ( quella verso Roma ) si ricava:

1. che il monumento, nel senso dell'altezza, è diviso in tre parti uguali, ciascuna comprendente dieci corsi di blocchi, la prima dal piano di fondazione alle cornici d'imposta, la seconda da queste alla modanatura superiore dell'epistilio, la terza fino alla cornice superiore dell'attico; fra altezza e larghezza media di queste sezioni intercorre un rapporto di 2,5
2. Prolungando gli assi delle semicolonne fino al pian terreno ed all'epistilio, si ottiene un quadrato perfetto (ABCD); la

circonferenza tracciata facendo centro nel centro dell'arcata (K) ed assumendo come raggio (KK') l'altezza da terra del piano d'imposta, è tangente sia al piano stradale che alla cornice superiore dell'epistilio ed agli assi delle semicolonne. Tutti i rapporti sono logica di questo cerchio generatore, in base al quale sono state tracciate le superfici di combaciamento fra i cunei sesto-ottavo dell'arcata ed i blocchi superiori dei pennacchi; la lunghezza di questi cunei è anche pari alla lunghezza del cuneo di chiave ed uguale fra gli spigoli interni dei piedritti e gli assi delle semicolonne.

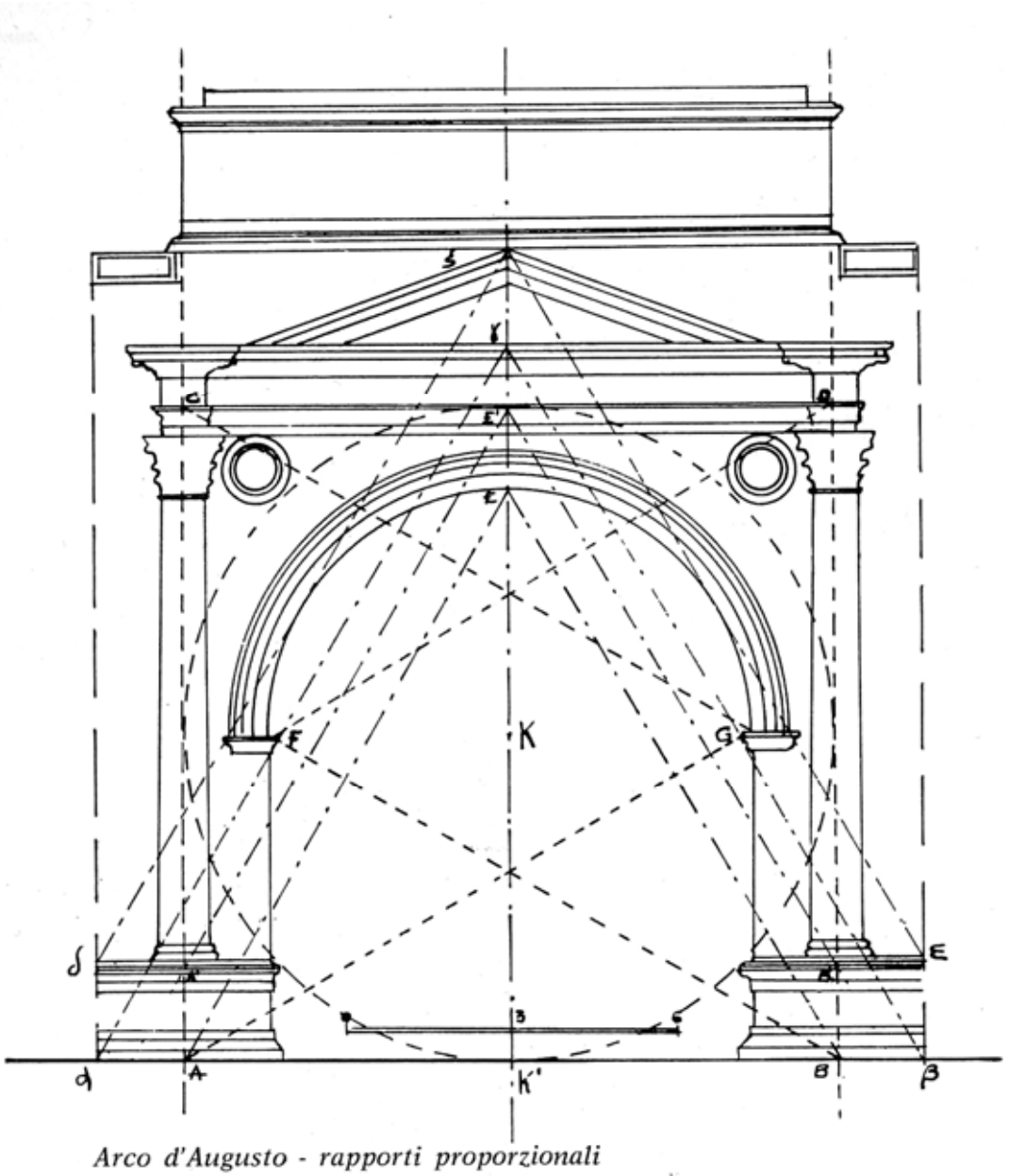



Figura 2.25 – Rapporti proporzionali nell'Arco d'Augusto

3. Il triangolo equilatero (ABE) costruito assumendo come base il lato inferiore del quadrato di cui sopra, ha il vertice in corrispondenza del punto mediano della faccia inferiore del cuneo di chiave; i triangoli equilateri (ACG, BDF) costruiti sull'asse di ciascuna semicolonna corrispondente ai lati del quadrato hanno i vertici in corrispondenza dell'imposta dell'arcata sul piedritto opposto.
4. Il triangolo equilatero (A'B'E') costruito sul livello del piano di posa delle colonne, ha il vertice in corrispondenza del punto mediano della faccia superiore di chiave, ossia della metà esatta dell'epistilio
5. Il triangolo equilatero costruito assumendo come base il piano di fondazione in tutta la sua larghezza (αβγ) ha il vertice in corrispondenza della metà superiore della cornice a modiglioni.
6. Il vertice del triangolo equilatero costruito sul piano d'imposta delle colonne, per tutta la larghezza della fronte (δεζ) coincide con il vertice del frontone.

Tutti i rapporti di cui sopra sono naturalmente concatenati e complementari in quanto dipendenti dal rapporto fondamentale istituito in base alla circonferenza di cui al n. 2

In base al rilievo eseguito da Guido Achille Mansuelli e da Roberto Angelini rispettivamente negli anni 1940 e 1980 circa, ed all'ultimo eseguito da me si possono fare le seguenti interessanti osservazioni:

1. Le semicolonne, basi e capitelli compresi, sono alte circa dieci diametri massimi; è questo l'unico elemento che indichi l'intenzione di adeguarsi a proporzioni canoniche, intenzione perché in fase esecutiva si è approssimato per difetto
2. Congetturalmente si può pensare che l'altezza totale corrispondesse al doppio della luce dell'arcata

3. La larghezza di ciascun piedritto è pari ad un quinto circa della larghezza totale della facciata e quindi ad un terzo della luce del fornice

Come conclusione dell'analisi eseguita si ricava che solo la corrispondenza prevista fra larghezza dei piedritti e larghezza del prospetto è stata osservata con precisione in fase esecutiva; tale corrispondenza si è ottenuta dividendo la larghezza obbligata ( infatti ai lati preesistevano le torri lapidee quadrilatere ), condizione fondamentale di ogni altra dimensione. L'architetto nel suo studio preliminare deve aver tenuto conto di questa dimensione obbligata e deve aver diviso lo spazio obbligato in larghezza in cinque parti, prevedendone tre di vuoto e due di pieno, quindi ha proceduto sulla base del tracciamento della circonferenza generatrice di cui si è parlato prima, in base alla quale sono stati stabiliti il quadrato ABCD e tutti gli altri rapporti concatenati ad esso. Tutto è stato calcolato a partire dalle dimensioni dell'arcata del fornice e poi la concentricità fra l'intradosso e la circonferenza generatrice ha portato a tutte le altre misure.

Il lato superiore del quadrato ABCD è divenuto, non il margine inferiore, come sarebbe dovuto essere, ma quello superiore dell'epistilio, abbassato di un corso e portato a fondersi con i cunei centrali dell'arcata per evitare che le colonne superassero il rapporto canonico di dieci diametri. Qui sta il punto di conflitto fra le proporzioni calcolate e quelle eseguite; ma il risultato più importante è un altro: la circostanza di aver messo in primo piano la larghezza dei piedritti e dell'arcata e di aver subordinato ad essi tutti i restanti rapporti dimensionali dimostra come l'architetto abbia avuto in mente la necessità primaria di soddisfare innanzi tutto le esigenze strutturali, mettendo in secondo piano gli ordini e proporzioni. Nel calcolo delle dimensioni dei capitelli e degli elementi della trabeazione è intervenuta la considerazione di

carattere pratico di adeguarsi all'altezza dei corsi normali della struttura. L'altezza dei blocchi è stata preliminarmente calcolata in un trentesimo dell'altezza totale, pari ad un decimo dell'altezza dei piedritti.

### *2.4.5 Ipotesi ricostruttive dell'arco al tempo dei romani*

Come è già stato detto in precedenza, al tempo dei romani l'arco doveva presentarsi con due torrioni lapidei ( blocchi di arenaria ) quadrilateri ai suoi lati ( vedi fig.2.18 e sottoparagrafo 2.4.1 ) probabilmente esistiti da tempi precedenti all'erezione dell'arco stesso che si presume fosse stato, per così dire, "incastonato" a tali strutture laterali. Oltre a tali torrioni, naturalmente delle prove archeologiche ci forniscono l'esistenza di un massiccio apparato di mura lapidee che correvano intorno alla città ( vedi fig. 2.7 )

Concentriamoci ora sulla sommità dell'arco, ovvero su quella parte che è stata restaurata da tempi ormai remoti ( prima del XIII sec. ) con una merlatura ghibellina in laterizio. Purtroppo per tempi precedenti al X secolo d.C. non sono state rinvenute alcuna rappresentazione dell'arco riminese, a parte qualche raffigurazione monetale. Inoltre tutte le raffigurazioni che sono state ritrovate sono di epoche successive alla distruzione dell'attico dell'arco, tutto ciò rende impossibile una visione certa dell'arco cosi come si presentava in origine. Diversi autori nel corso dei secoli si sono cimentati con varie ipotesi sulla raffigurazione dell'arco riminese al tempo di Augusto, tali ricostruzioni pittoriche sono spesso fra loro molto differenti ed in alcuni casi da ritenere addirittura del tutto erronee. Non avendo a disposizione alcun elemento raffigurativo su cui basarsi, i diversi studiosi si sono spesso basati su citazioni e descrizioni fatte da alcuni uomini del passato. Alla luce di recenti considerazioni molte di queste ricostruzioni pittoriche sono da ritenere del tutto errate in quanto non hanno alcun fondamento archeologico.

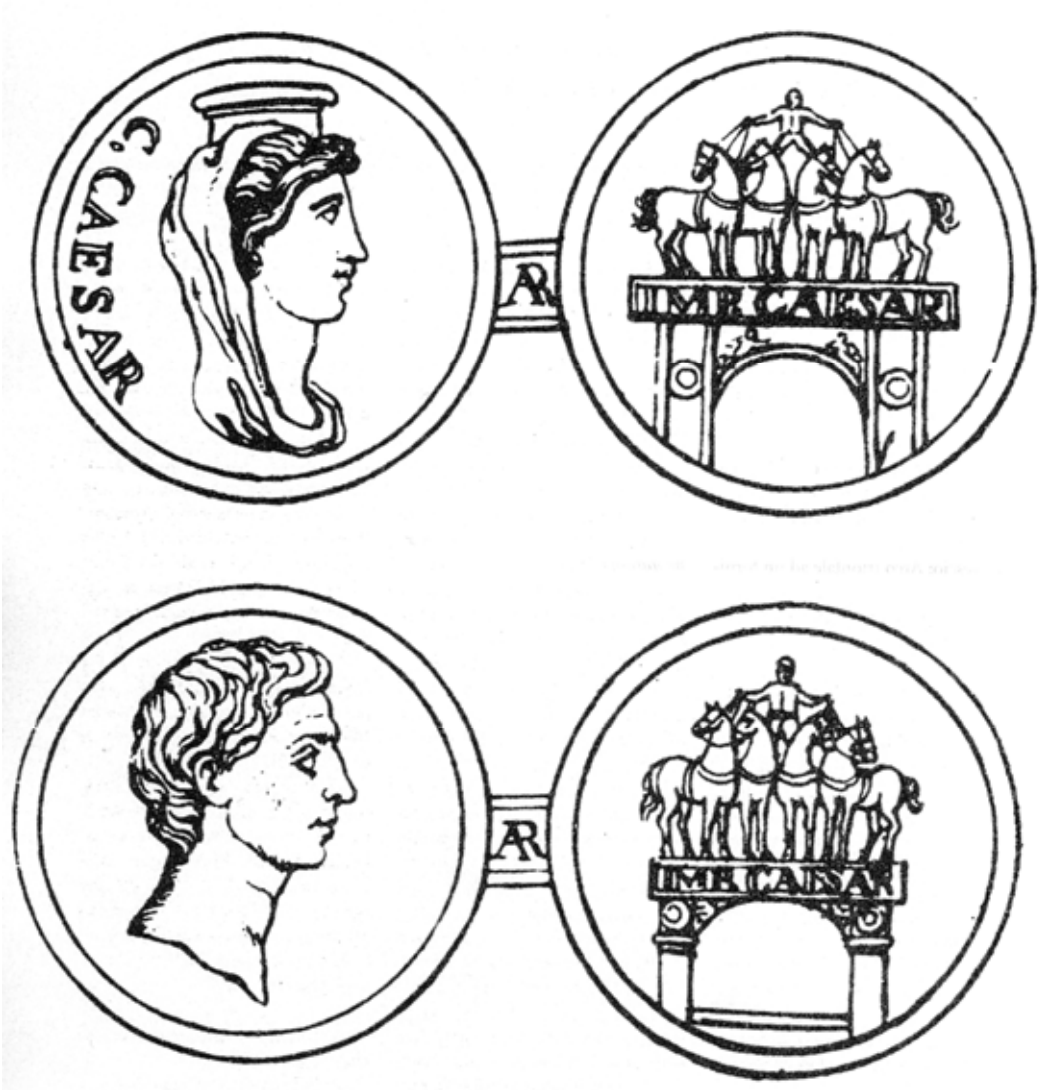



Figura 2.26 - Denari in argento (29-27 a.C.) di Ottaviano Augusto, nell'incisione pubblicata da Luigi Nardi (1813)

Sopra – Diritto:testa di divinità (Pietà) rivolta a destra e leggenda C. CAESAR
Rovescio: Arco trionfale ad un fornice sormontato da quadriga con l'imperatore Augusto e leggenda IMP. CAESAR

Sotto – Diritto: Testa di Ottaviano Augusto
Rovescio: Arco trionfale ad un fornice sormontato da una quadriga con l'imperatore Augusto e leggenda IMP. CAESAR

Si deve a questi due denari ( riportati qui sopra ) dell'imperatore Augusto la formazione di una tradizione storico-antiquata settecentesca che affermava l'esistenza sull'Arco d'Augusto di Rimini di un gruppo plastico marmoreo composto da una quadriga con la statua dell'imperatore Augusto alla sua guida. A sostegno di tale ipotesi si è da sempre ritenuta come prova il ritrovamento di una testa

equestre, data come proveniente dai pressi del monumento, ed il piede calzato in marmo anch'esso rinvenuto nei pressi dell'arco.

Si deve a Luigi Nardi un importante studio sull'Arco d'Augusto in cui, per la prima volta, viene proposto da Bartolomeo Borghesi l'identificazione dell'arco raffigurato nel rovescio di due denari in argento dell'imperatore Augusto( vedi fig.2.26 ).

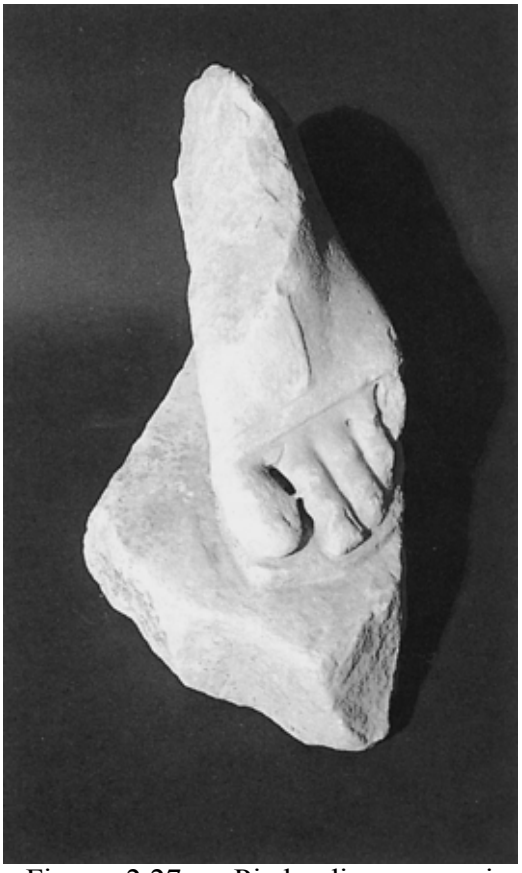


Figura 2.27 – Piede di persona in marmo, si tratta appunto del piede ritrovato sulla sommità dell'arco e ritenuto appartenete alla figura di Augusto.

A quel tempo (1813) le teorie del Borghesi non venivano condivise da diversi studiosi dell'epoca.

Egli per dimostrare la sua teoria fa notare che ci sono delle rassomiglianze tra l'arco l'arco raffigurato sui denari augustei e l'Arco riminese: l'unicità del fornice; la larghezza della luce; la presenza dei due tondi sul fronte dell'arco ed inoltre la presenza di due significativi reperti pertinenti all'arco ( la testa di cavallo in pietra, conservata nel Palazzo Cima-Belmontini di Rimini, rinvenuta nelle prossimità dell'arco d'Augusto, ed il piede umano in marmo rinvenuto sulla sommità dell'arco e conservato nel Museo di Giovanni Bianchi ). Entrambi i reperti erano ritenuti appartenenti alla quadriga imperiale che sovrastava l'arco. Attualmente la testa equestre è conservata in una collezione privata piacentina, mentre il piede è conservato nel museo civico di Rimini.

Dell'esistenza di un gruppo plastico sull'arco è possibile trovare traccia anche nell'opera di Francesco Gaetano Battaglini *memorie istoriche di Rimini e de' suoi signor...* del 1789, in cui lo studioso

riporta un passo da cui si presume l'esistenza, ancora nel XIV secolo, di statue sopra l'arco.

Figura 2.28 – Denario in argento di L. Vinicius ( 17 a.C. )
Diritto: Testa di Ottaviano Augusto rivolto a destra
Rovescio: Arco trionfale a tre fornici sormontato da una quadriga con l'imperatore Augusto con ai lati un guerriero (?) ed iscrizione S.P.Q.R.

Bartolomeo Borghesi riprese nel 1825 il suo studio, identificando l'arco riminese nella moneta riportata qui sopra che verrà poi riprodotta unitamente alla ricostruzione ideale dell'arco d'Augusto con il soprastante gruppo plastico nell'opera di Lugi Rossini del 1836. ( vedi fig.2.29 )

La ricostruzione del Rossini risente fortemente della precedente ricostruzione proposta da Maurizio Brighenti, in cui è già presente il gruppo plastico sovrastante l'arco.

Con Luigi Tonini e la sua monumentale *storia di Rimini* del 1848 viene riproposta senza ulteriori apporti l'esistenza del gruppo plastico.

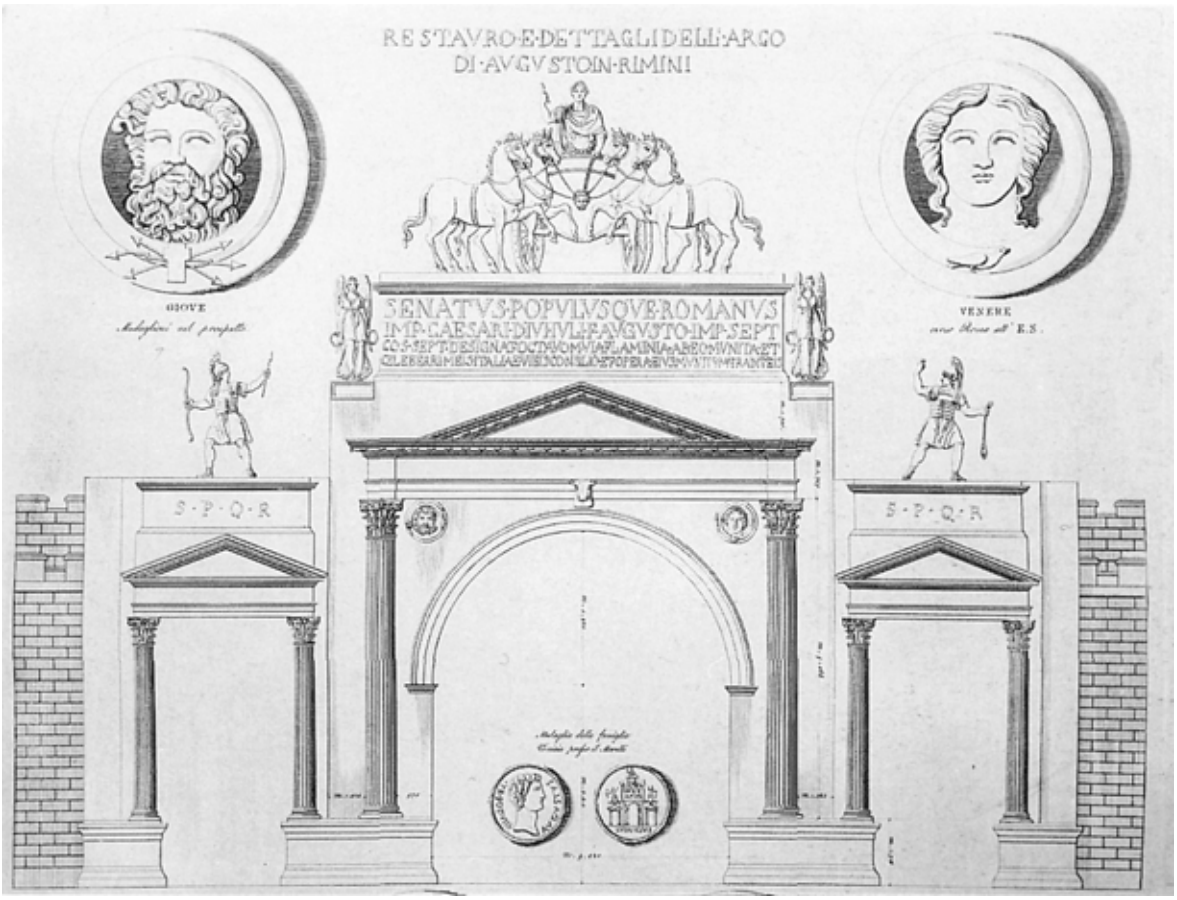



Figura 2.29 – Luigi Rossini, *Restauro e dettagli dell'arco d'Augusto di Rimini* , incisione, in *Gli archi onorari e funebri degli antichi romani*, Roma (1836), tav. XIII. Esemplare della biblioteca Classense, Ravenna.
Questa ricostruzione restituisce al monumento riminese il peculiare carattere di porta urbica affiancata da mura, ma è assolutamente inattendibile; si basa su dati erronei ed approssimativi ricavati dal monumento e da immagini monetali.

Fino agli anni 1940 non c'erano stati tanti dubbi a riguardo dell'esistenza della quadriga guidata da Augusto posizionata sulla sommità dell'attico, ma proprio in questi anni lo studioso Guido Achille Mansuelli espone ragionevoli dubbi sull'esistenza di tale apparato decorativo con ai lati le statue di barbari o Vittorie alate e conseguentemente dubita anche l'esistenza di monete romane con la raffigurazione dell'arco riminese.
Ulteriori apporti fondamentali per lo studio dell'arco di Rimini vengono pubblicati nel 1979 nei saggi di Sandro De Maria e di Giorgio Gualandi. Quest' ultimo in particolare esclude senza esitazione che le monete citate dal Borghesi si riferiscano alla rappresentazione dell'arco d'Augusto di Rimini.

Figura 2.30 – F. Orlandi, *Arco d'Augusto di Rimini secondo la illustrazione del prof. Maurizio Brighenti*, olio, 1827. Raccolte Piancastelli, Biblioteca civica di Forlì.
Si tratta di una diligente elaborazione, estesa anche all'ambiente urbano, della "ricostruzione" di Maurizio Brighenti (1825), e naturalmente mutua dall'originale errata impostazione trionfale del monumento, isolato. Il risultato, di un intellettualismo freddo, di un'erudizione pesante, è tipicamente neoclassico. Il monumento, gratuitamente isolato nell'ambiente surreale, risulta privo di ogni armonia e suggestione. Le lettere dell'iscrizione sono in bronzo dorato, e gli elementi plastici in marmo con dorature.

Fondamentale è lo studio di Marina Pensa, la quale collega l'arco raffigurato sul rovescio di figura n. 2.26 b ad una emissione monetale in occasione di tre grandi trionfi celebrati nell'agosto dell'anno 29 a.C. ed in particolare quello per la vittoria di Azio in cui Ottaviano Augusto ebbe il titolo di 'Imperator'

Figura 2.31 – Cristoforo di Efeso di Ottaviano Augusto
Diritto: Profilo di Ottaviano Augusto rivolto a destra e leggenda IMP. IX. TR. PO. V.
Rovescio: Arco trionfale con epigrafe IMP. IX. TR. PO(T). V. sormontato da quadriga e leggenda nel fornice S.P.Q.R. SIGNIS. RECEPTIS.

Con questi ultimi studi del Mansuelli, del Gualandi e della Pensa l'ipotesi dell'esistenza di un gruppo plastico, o meglio della quadriga trionfale dell'imperatore Augusto non è stata più ripresa da altri studiosi e conseguentemente è caduta anche l'ipotesi dell'esistenza di monete augustee con la raffigurazione dell'arco con tale decorazione.
Da allora non sono emersi ulteriori documenti archeologici per avvalorare l'esistenza sull'arco del gruppo plastico, ma non è stato neppure possibile trovare reperti per dimostrare il contrario.
Rimane pertanto questa secolare tradizione erudito-antiquata che, per quanto non sufficientemente supportata da elementi probatori, non può essere ignorata a priori.

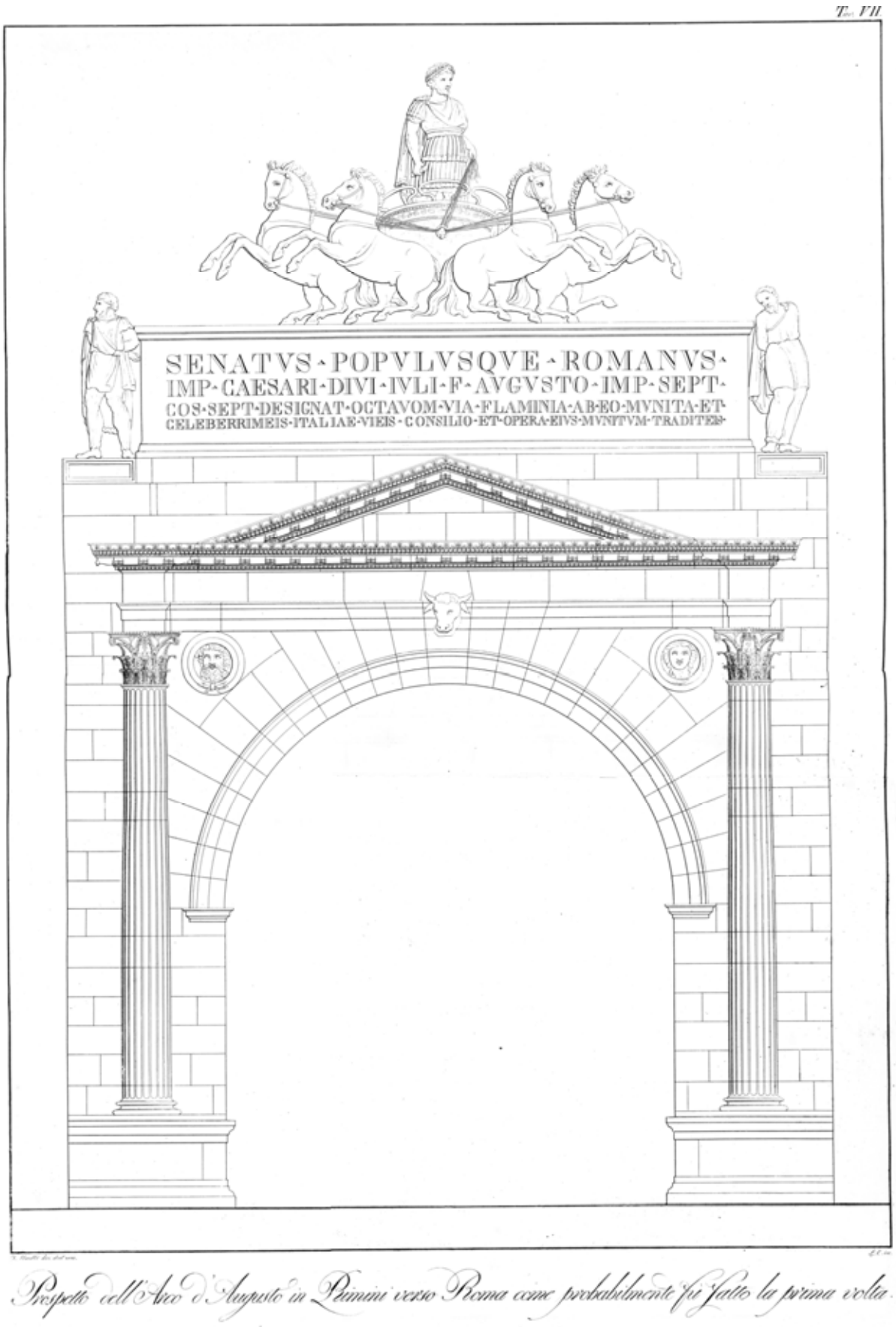



Figura 2.32 – Prospetto dell'arco d'Augusto in Rimini verso Roma come probabilmente fu fatto la prima volta.
Cosi riporta Maurizio Brighenti in fondo alla sua ricostruzione pittorica eseguita nel 1825.

## *2.4.6 Iconografia e storia dell'Arco dall'origine ai giorni nostri*

L'arco d'Augusto è stato il monumento più famoso di Rimini per molti secoli, almeno fino ai primi decenni del Novecento.
Vale quindi certo la pena di compiere un viaggio attorno a questa vecchia costruzione, protagonista e testimone importante della storia di riminese. In questo paragrafo si cercherà di condurre un lungo metaforico viaggio nel tempo, condotto soprattutto attraverso delle tracce iconografiche superstiti dell'arco, che sono molteplici e generalmente ricche di informazioni.
Fin dall'origine, oltre a presentarsi come un "episodio inedito" per quanto riguarda la tipologia e ricchezza dei significati simbolici e delle novità formali, l'arco di Rimini doveva rapire lo sguardo dei più per la sua maestosità. L'effetto di grandiosità doveva essere ancora maggiore durante l'alto Medioevo, quando affiancato da torri e mura cadenti, dominava un territorio degradato e quasi deserto.
La sua mai congedata funzione di porta urbica ben presto deve aver fatto passare in secondo piano il suo carattere di monumento celebrativo ed onorario; infatti come porta detta di San Gaudenzio, di Santo Stefano, di San Genesio lo troviamo indicato quasi sempre dal VII-VIII secolo d.C., nonostante brillassero ancora, sull'attico, le lettere bronzee dorate della dedicazione ad Augusto.
Probabilmente Augusto non avrebbe immaginato che il suo arco sarebbe stato intenzionalmente ostruito nelle epoche a lui successive, questo per far fronte a dei tempi che stavano cambiando, lontani dalla pace universale ed eterna che proprio Augusto aveva propagandato con tale arco dal fornice di dimensioni fuori dal comune.
Molto presto i riminesi furono coinvolti nelle lotte fra Vespasiano e Vitellio (69d.C.) e quindi dovettero improvvisare rimedi per occludere il grande varco fra le mura. Altri rimedi più robusti e meno precari, ed un consistente ripristino della cinta muraria si richiesero per contrastare le invasioni degli Alemanni e poi dei Visigoti e dei Goti,

dei Franchi e dei Longobardi: allora a parziale sbarramento del fornice probabilmente sono stati costruiti sulla strada sottostante dei muri con passaggi stretti fra i piedritti lapidei dell'arco, in collegamento con le torri che li affiancavano.

Alcune antiche e consistenti strutture lapidee prossime all'arco, che forse erano proprio gli ultimi resti di queste difese tardoromane e altomedievali, furono demolite nel 1541. Gaetano Battaglini nel 1789 ci riporta che tali strutture erano " due arcate assai rozze, che a guisa di portico stavano unite all'arco Romano dalla parte interna della città".

E' naturale pensare ai resti di una controporta medievale, possiamo immaginare la luce del grande fornice augusteo tamponata verso l'interno della città da un muro con uno o più passaggi, protetto dall'imbotte dell'arco sostenuto o rafforzato da archeggiature che si innestavano ad una specie di recinto difensivo.

Sulle facciate dei piedritti dell'arco,verso la città, sono ancora ben visibili sei grossi incassi diseguali scavati rozzamente nella pietra ( tre per parte, simmetrici e disposti verticalmente )

Figura 2.33 – I sei incassi scavati nella pietra del fronte verso la città, probabilmente testimonianza degli ancoraggi al monumento di difese tardoromane, divenute poco a poco superflue e definitivamente demolite nel 1541.

Nel 1937 furono viste incassature nella platea di fondazione dell'arco, e vennero considerate gli alvei degli stipiti di due "porte di fortuna" erette "poco all'interno delle due fronti". Sulla base di questi soli dati è impossibile avanzare ipotesi ricostruttive e datazioni per tale sistemazione; così come è impossibile precisare il momento della rovina dell'originario attico dell'arco e del suo ripristino in forma merlata. ( vedi inizio del paragrafo 2.4 e figura 2.16 )

L'attico, comunque, deve essersi rovinato abbastanza presto, prima del XIII secolo ( come attesta il sigillo comunale del XIII sec. , vedi figura 2.16 ). Ancor prima deve essere stato spogliato di eventuali gruppi plastici per poterne utilizzare il piano a scopo difensivo. In quanto alla muratura che l'ha sostituito è stata sicuramente rifatta più volte. Tenendo conto della fame di materiale pregiato da costruzione che caratterizza il Medioevo, meraviglia che dopo il crollo dell'attico il monumento non sia stato completamente disfatto; probabilmente ciò è dovuto alla sua utilità come 'luogo forte'.

Nel XIII secolo probabilmente l'arco aveva perso del tutto la sua funzione di porta urbica, ormai affidata a quella Medievale che era stata costruita dinanzi all'arco augusteo, nella nuova cinta muraria che correva ( e corre tuttora ) a pochi metri ad oriente da quella romana, sull'argini sinistro dell'Ausa. Nei sigilli ( vedi figura 2.16 ) questa situazione è ignorata completamente: l'arco appare come la porta urbica, con il fornice chiusa da due battenti ( cosa che non è possibile, perché la luce è troppo grande per essere coperta ). Ma evidentemente ai committenti del sigillo interessava un'immagine simbolica.

In questo momento storico, con l'avvento della citata nuova porta urbica, l'arco romano era inutile e poteva essere abbattuto; ma i riminesi dovevano aver capito la sua funzione di nobilitare la città, e lo conservarono come ingresso di rappresentanza.

E' dunque con un sigillo, con un documento ufficiale, che inizia la lunga storia iconografica dell'arco di Rimini; un'iconografia spesso

alleata a quella città che ha sempre mantenuto i suoi due monumenti romani nello stemma, con una continuità e frequenza che non trova riscontri storici in altre città.

Figura 2.16 – Impronte di sigilli riminesi del XIII secolo e del XVII secolo ( dal Battaglini, 1789 )

L'immagine dell'arco, usata non solo negli stemmi monumentali, ma anche in circostanze ed occasioni più varie la troviamo infatti in dipinti, incisioni, manifestazioni religiose, avvenimenti culturali, marchi di prodotti, insegne di negozi, propaganda politica, testate di giornali, negli oggetti ricordo, persino nelle cambiali ottocentesche e negli assegni nel novecento.

Figura 2.34 – Cambiale del 1845, incisione di Luigi Ugolini. Biblioteca Gambalunghiana, Rimini.
Un esempio curioso dell'uso che si è fatto e che si fa dell'immagine dell'Arco d'Augusto.

A questo punto bisogna dire che nessun documento iconografico noto fornisce elementi per accrescere la conoscenza della struttura architettonica, questo non tanto per l'infedeltà intrinseca delle rappresentazioni ( di cui si dirà ), ma quanto perché rappresentano l'arco già 'mutilato', cioè nella sua forma medievale, sostanzialmente pervenuta intatta fino ad oggi. Inutile dire che quindi è più efficace osservarlo dal vero nella sua concretezza se si vuole comprendere al meglio qualunque tipo di dettaglio, sicuramente è più opportuno di qualunque testimonianza grafica, anche di quelle più 'oggettive'.

Ma se inutile per un serio discorso 'archeologico', la documentazione iconografica è invece molto importante nel suo complesso perché ci permette di ispezionare nelle varie epoche il rapporto del monumento con le strutture urbane.

Oltretutto l'iconografia ci permette di comprendere quale considerazione ha goduto l'arco, come è stato guardato, cosa vi si è cercato e quale funzione culturale ha sostenuto nei vari secoli.

Qui vale la pena ricordare che le rappresentazioni sono sempre il frutto del mutevole gusto dei tempi e delle sensibilità individuali degli artisti, che inevitabilmente finiscono per sfigurare anche le riproduzioni più oggettive. Si guardi ad esempio i sigilli di figura 2.16; così come nel Duecento abbiamo un arco di forme gotiche, così nel Seicento-Settecento ne abbiamo uno di forma barocche, e più tardi di forme arcadiche, neoclassiche, puriste, decò, novecentesche.

Insomma, le rappresentazioni si plasmano agli interessi ed ai gusti del tempo di cui fanno parte, oltretutto alla deformazione più o meno intenzionale delle immagini dovute al gusto collettivo dell'epoca collabora anche la sensibilità individuale dell'artista.

Come punto di partenza del nostro viaggio fra le memorie dell'arco riminese non possiamo che partire dal Medioevo, infatti per epoche precedenti si hanno ben poche testimonianze nonché prive di un degno valore. Il Medioevo stesso ci ha tramandato ben poco, più che altro

possiamo interpretare l'influenza che l'arco ha suscitato alle genti di quel tempo tramite delle derivazioni e somiglianze caratteriali e formali con l'arco stesso che sono state messe in luce su di dipinti, sculture ed architetture del Medioevo.

Ad esempio si può ricordare la somiglianza dell'atrio della cattedrale di Avignone, Notre Dame des Doms ( 1180 ) che al suo interno sembra riprendere e ripetere proprio l'articolazione delle membrature dell'arco augusteo di Rimini.(vedi figura 2.35 )

Figura 2.35 – Parte interna dell'atrio di Notre Dame des Doms, Avignone (1180)
La struttura architettonica di questa classicheggiante architettura romanica richiama lo schema e alcuni particolari dell'arco riminese, tanto che si può ipotizzare una diretta o indiretta derivazione.

Più suggestiva invece è la recente ipotesi avanzata sulla derivazione dall'arco riminese del portale di Castel del Monte (1240), una delle più note ed affascinanti costruzioni di Federico II.

Anche nella pittura riminese del Trecento possiamo ritrovare degli elementi pittorici che fanno pensare ad una influenza della cultura classica ed arcaica, nonché dello stesso arco, su di alcune raffigurazioni attribuite a Pietro da Rimini che riporta su di alcune sue

opere delle colombe che traggono ispirazione dalle forme degli aquilotti rappresentati nei lacunari della trabeazione dell'arco d'Augusto.

Figura 2.36 – L'ingresso di Castel del Monte, presso Andria (1240).
La riproduzione dello schema dell'arco d'Augusto in una delle più prestigiose costruzioni di Federico II dimostra che il suo carattere onorario e imperiale era ancora apprezzato e compreso in epoca gotica; oltretutto dimostra la volontà di Federico di essere una sorta di Augusto redivivo.

Anche nel basso medioevo l'arco d'Augusto di Rimini deve essere stato ben poco raffigurato, in questo periodo eppure esso doveva essere l'unico monumento capace di attrarre la curiosità anche dei viaggiatori più sprovveduti, infatti anche ad essi l'arco doveva apparire come qualcosa di inconsueto e straordinario, per la sua grandezza, per il suo materiale, per la sua collocazione ( a quel tempo continuava a costituire la prima prestigiosa apparizione della città fin dall'ingresso nel borgo orientale e soprattutto non appena attraversato il ponte sull'Ausa e superata la porta gotica delle mura medievali ).
Ma evidentemente per gli artisti dell'epoca l'arco non doveva essere un modello facilmente comprensibile ed

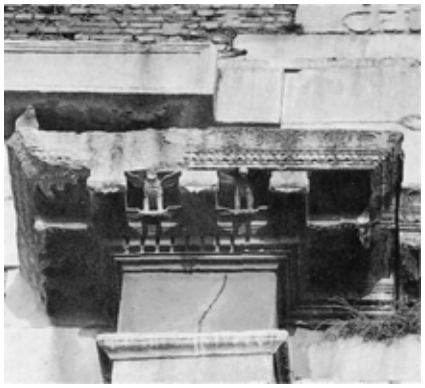


Figura 2.37 – Le *aquile di Giove* nella trabeazione dell'arco riminese e le *colombe* sulla spalliera del trono di *Gesù fra i dottori*, di Pietro da Rimini.

utilizzabile, come dimostrano le scarse testimonianze iconografiche che ci sono pervenute dal XV secolo.

Con l'avvento dell'ambizione di Sigismondo Pandolfo Malatesta e del genio di Leon Battista Alberti il modello dell'arco augusteo di Rimini diventa fonte di ispirazione ed ammirazione.

Infatti la genesi del Tempio Malatestiano ha risentito molto dell'influenza dell'arco, molti sono i punti di contatto fra i due monumenti, l'influenza la si avverte nell'impianto generale nel Tempio, nella scelta del materiale, nello schema della facciata ed in molti altri particolari decorativi.

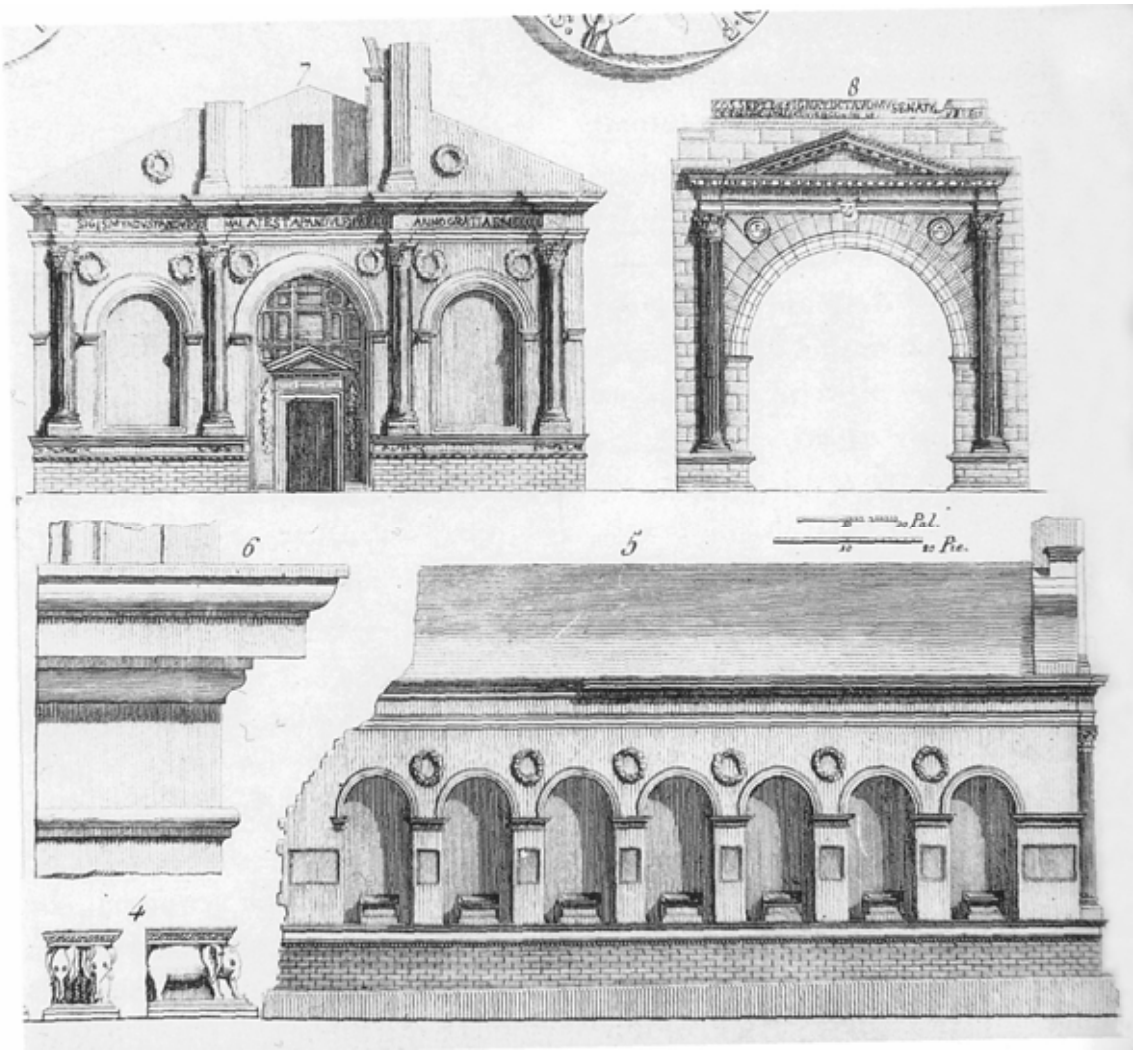



Figura 2.38 – Il tempio e l'arco a confronto, nella tav. LI della storia dell'arte dimostrata coi suoi monumenti di G.B.L.G. Seroux D'Angicourt, Prato 1826-29

Sigismondo Malatesta doveva considerarsi un altro Augusto: il tempio malatestiano rende concreto un confronto 'impossibile' e presuntuoso, che Leon Battista Alberti riuscì a trasferire su un piano di valori ben più generali, di celebrazione dell'umanità appena uscita dal 'buio' del Medioevo.

Nell'arco romano Leon Battista Alberti deve avervi trovato uno spunto per un'architettura che celebrasse l'uscita dell'umanità dal buio del Medioevo, in questo caso il campione eccellente di questa nuova umanità era il principe Sigismondo, mecenate munifico, principe colto, condottiero illustre ed invitto, che la nuova architettura esalta ed assimila al grande imperatore romano Augusto.

Il periodo dell'umanesimo ha costituito un periodo di grande ammirazione per l'arco, come dimostra appunto il Tempio Malatestiano, ma proprio per via del Tempio è questo un periodo in cui l'arco deve aver corso i maggiori rischi di essere smantellato come conseguenza delle razzie di materiale lapideo fatte compiere da Sigismondo. Tutti i monumenti antichi sparirono per sua opera, tranne l'arco, probabilmente la sua salvezza è da attribuire alla necessità di tenere un termine di confronto materiale fra Sigismondo ed Augusto.

Fra il XV ed il XVI secolo ci furono interventi di restauro, fra i quali possiamo ricordare la demolizione nel 1541 dei resti delle difese tardoromane ( vedi fig.2.33 ed inizio paragrafo 2.4.6 ) in occasione del passaggio a Rimini di papa Paolo III.

Nel Rinascimento maturo l'influenza dell'arco sulle arti grafiche subisce un colpo di arresto, infatti viene accusato dagli artisti del tempo di non rispettare le proporzioni derivate dallo studio dei monumenti della Roma imperiale e dai trattati antichi. L'arco era insomma un monumento anomalo, non armonioso, che quindi contrastava con tutte le ideologie del Rinascimento.

Dal Seicento la serie iconografica riguardante l'arco si infoltisce sensibilmente, tanto di pezzi unici, quanto di multipli, cioè stampe.

Va detto tuttavia che i pittori raramente raffiguravano l'arco come oggetto delle loro opere, piuttosto lo includevano in una panoramica più ampia, e quindi appariva nello sfondo. Solo successivamente abbiamo riscontri di raffigurazioni ed addirittura di studi con oggetto specifico il solo arco.

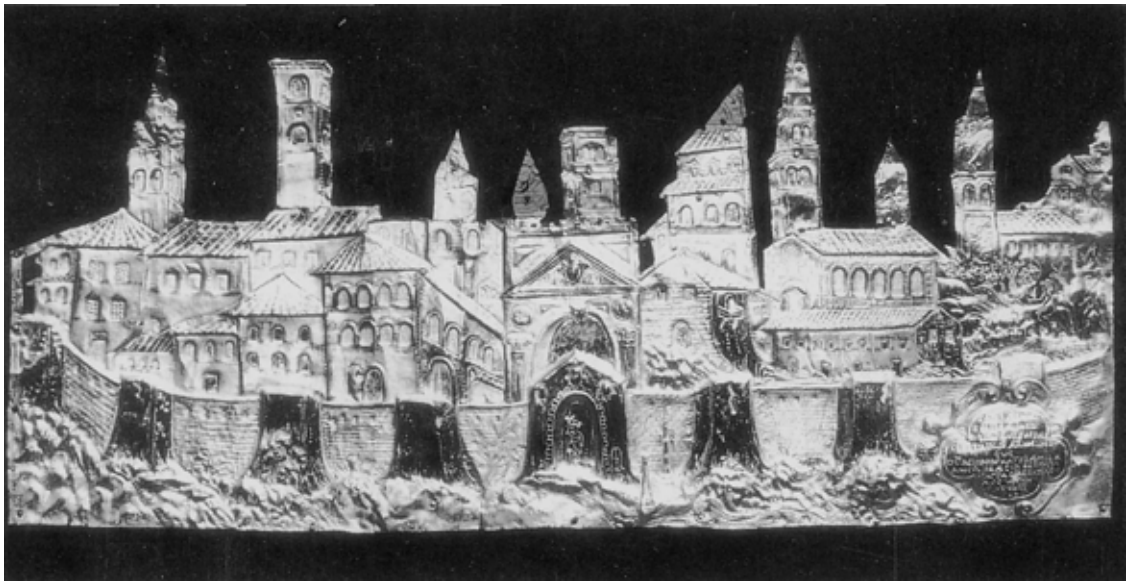


Figura 2.39 – *Rimini*, ex voto in lamina d'argento, 1644. Santuario di San Nicola, Tolentino.
Le mura medievali recingono una città densa di edifici e ricca di campanili, che è possibile identificare con Rimini solo grazie all'arco che troneggia dietro alla porta medievale ornata da stemmi.

E' in seguito alla diffusione delle immagini a stampa dell'arco e del ponte romano che Rimini diviene una sorta di tappa obbligata per quei viaggi d'arte che proprio dal Seicento cominciano ad essere sentiti come una necessità culturale.

Figura 2.40 – P. Sevin , La porte de Rimini , disegno a penna ed acquerello, c. 1672. Raccolta Bertanelli, Milano.
Un esempio di libera interpretazione dell'arco riminese, dovuta ad un artista-viaggiatore un po' pasticcione, forse così poco soddisfatto dell'arcaica struttura del monumento da volerla rendere un po' più barocca tramite l'aggiunta di elementi di sua fantasia.

Così sono molti i viaggiatori eruditi che affascinati dall'antichità transitano a Rimini per visitare le reliquie romane, e dobbiamo proprio a loro molti dei dipinti, studi e raffigurazioni sull'arco riminese.
I disegni più interessanti e numerosi che ci sono rimasti sono quelli del Settecento: di Charles-Louis Clérisseau, di Robert Adam, di Giacomo Quarenghi, di Florent F. C. Bourgeois; dispiace che ancora non sia stato trovato l'acquerello fatto fare dall'Algarotti a Mauro Tesi nel 1761, che doveva essere finissimo di particolari; e quelli dei periti del Granduca di Toscana guidati dal "matematico regio" Pietro Ferroni nel 1787, che dovevano essere scrupolosamente fedeli.

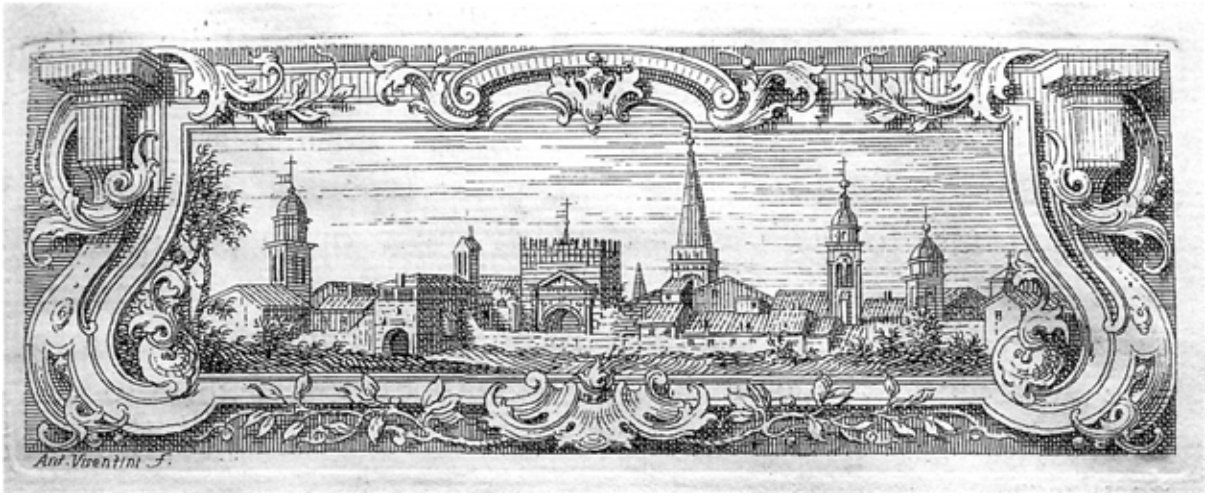



Figura 2.41 – A. Visentini, *Veduta di Rimini da oriente*, incisione su disegno di F. Chamant (1738) in T. Temanza, *delle antichità di Rimini*, Venezia 1741. Esemplare della Biblioteca Gambalunghiana di Rimini.
E' la prima veduta moderna della città, vista da oriente e immersa in un'aria luminosa, di sentore veneziano. L'Arco romano è incastonato con naturalezza fra gli edifici, che domina con la sua grande mole, preceduto dalla porta medievale detta di San Bartolomeo, a guardia della città e del ponte sull'Ausa, invisibile fra gli argini.

Per quanto riguarda le incisioni, la prima è quella dell'Atlante del Blaeuw, che rappresenta il monumento isolato e 'corretto' in senso decisamente rinascimentale per quanto riguarda le proporzioni.
La più grande è un'acquatinta pubblicata nel 1800 a Mannheim, derivata da un vecchio disegno di Clérisseau, pittoresca e ricca di particolari ambientali. La più affascinante, invece, è quella di Giovan Battista Piranesi che la incluse, con quella raffigurante il ponte sul Marecchia, nella sua giovanile raccolta del 1748.

Figura 2.42 – *L'Arc Triomphal d'Auguste a Rimini*, acquatinta di Kellerhoven su disegno di Verschaffeld, chez Domenico Artaria, Mannheim 1800 ( particolare ).
Esemplare delle Raccolte Piancastelli, Biblioteca civica di Forlì.
La gran mole dell'arco d'Augusto, sbarazzata dei suoi merli medievali, è inserita in un contesto di povertà e di degrado assai esagerati per amore del 'pittoresco' e ad uso dei viaggiatori romantici, soprattutto tedeschi. La stampa deriva da un disegno acquerellato vecchi quasi mezzo secolo, opera di C.-L. Clérisseau.

In seguito l'arco ed il ponte riminesi comparvero in altre serie di stampe, come il *Nouvel Recueil des vues des plus beau restes de Rome ancienne*, del 1770, mentre l'arco ritorna da solo nell'opera sugli *Archi onorari e funebri degli antichi romani* di Luigi Rossigni, del 1836. (vedi figura 2.29 ).

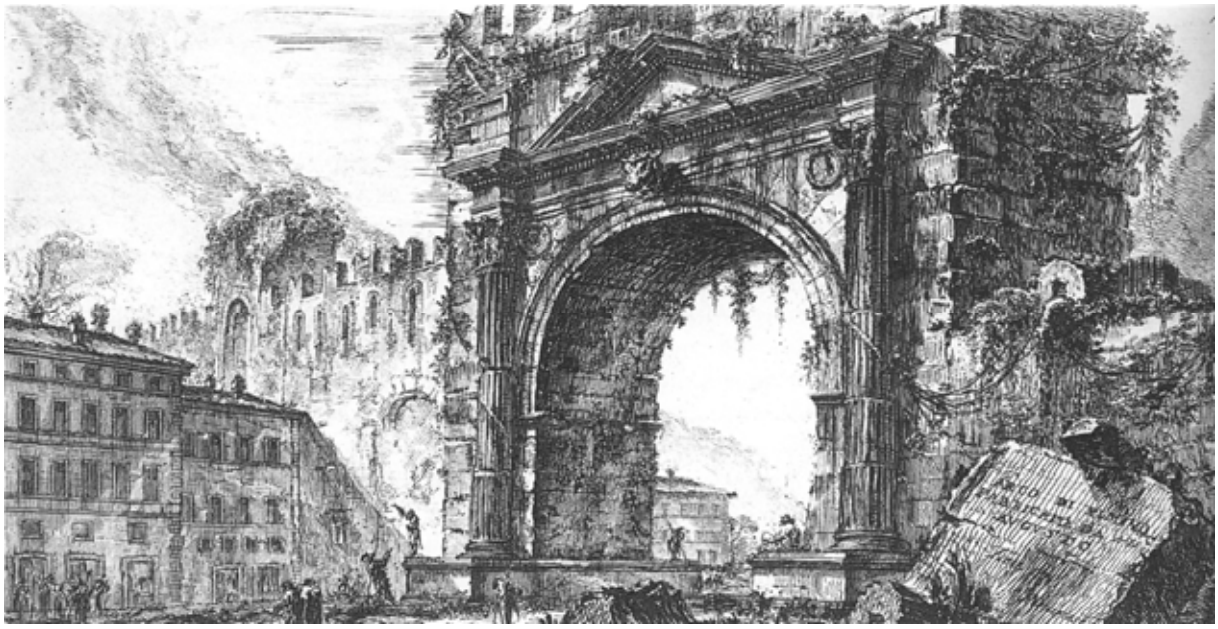


Figura 2.43 – G.B. Piranesi, *Arco di Rimini fabbricato da Augusto,* incisione, 1748. Esemplare del Museo della Città, Rimini.
Dai veri capolavori come questo, non possiamo pretendere rigore di scientificità sulla forma e sulle condizioni del monumento. Generalmente essi riflettono lo spirito del tempo e dell'artista.

Con queste raccolte di incisioni siamo in orizzonte neoclassico, cioè in un clima culturale da cui ci si aspetteremmo un certo sfruttamento imitativo dell'arco da parte degli artisti e particolarmente degli architetti. Ma questo non avviene perché l'arco appariva decisamente eccentrico, sproporzionato e fuori misura e quindi non poteva essere preso come modello di imitazione e spunto per la ricerca della perfezione tipicamente classica.
Il monumento infatti non presentava quei tratti caratteristici e quelle giuste proporzioni dettate dall'opera del Vitruvio, di queste anomalie ed irregolarità se ne era già ben accorto nel 1680 Raffaele Fabretti; e nel 1748 anche il veneziano Tommaso Temanza a seguito di una serie

di rilievi sull'arco constatò e confermò l'ipotesi già avanzata da Fabretti al riguardo della geometria dell'arco.

Al Temanza dobbiamo il primo 'rilievo' della storia, che abbia un certo rigore scientifico, al riguardo dell'arco e del ponte sul Marecchia.

Più tardi, nel 1825, un'altra opera di grande valore scientifico e metrico ci viene fornita da Maurizio Brighenti, attraverso la sua opera *Illustrazione dell'Arco d'Augusto in Rimini* costituita da sei fogli con disegni eseguiti a penna ed acquerello, bordati in grigio e seppia; le figure risaltano su di un fondo leggermente azzurro. Le tavole misurano 71,4 x 56,5 ,tranne l'ultima che misura 86,5 x 61,5 cm. ( vedi paragrafo successivo )

Il Brighenti, assieme a Bartolomeo Borghesi arriva a fornire una nuova integrazione dell'epigrafe dedicatoria, a lungo ritenuta definitiva.

Figura 2.44 – C.-L. Clérisseau, *Arco di Rimini eretto ad Augusto* (1755), penna e acquerello. Galleria dell'Accademia, Venezia.
Aria di Arcadia si respira in questo piacevole e pittoresco disegno già attribuito a Raffaello Morghen, che accentua lo stato di abbandono del sito e di rovina dell'arco, idealmente privato del suo completamento medievale. Da questo disegno ne deriva un altro, senza le figure, dello stesso autore, ed un'incisione edita a Mannheim nel 1800. Le repliche, anche autografe, di quest'opera e di altre si spiegano con il piccolo mercato di souvenir alimentato dai viaggiatori.

I documenti di cui si è detto sopra sono i primi ed unici rilievi dell'arco fatti in epoche precedenti al Novecento, nonostante siano documenti di estremo valore, anche dal punto di vista scientifico, vale la pena di ricordare che anche tali raffigurazioni non si sottraggono al destino di tutte le immagini prodotte dall'uomo: infatti anch'esse sono soggette ai gusti della storia ed alla sensibilità degli autori.
Un semplice confronto fra l'opera del Temanza e quella del Brighenti rivela appunto quanto detto: nel primo si respira ancora una leggera aria rococò, appena temperata da un palladianesimo classicizzante, perfettamente in linea con la produzione veneziana dell'epoca; nel secondo invece si sente una sottile aria di purismo neoclassico.

Figura 2.45 – G. Quarenghi, *L'arco d'Augusto* ( 1772-73 ), penna e acquerello. Museo dell'Ermitage, Pietroburgo.
L'arco appare come il dominatore di una solitaria periferia caratterizzata da un'edilizia modesta ed eterogenea, animata da gnomi che si atteggiano a giganti, ed uno addirittura ad Ercole con la clava ( Ercole sarebbe stato secondo una tradizione locale il fonatore della città ) Il disegno dà una serie di importanti informazioni per la comprensione della morfologia di questa zona urbana. Interessante è notare in questo dipinto la presenza della porta urbica medievale ( al centro del dipinto, sotto l'arco ) che un tempo precedeva l'arrivo all'arco.

La serie iconografica di sicuro comincia troppo tardi per fornirci informazioni preziose al riguardo della conformazione originale dell'arco, ma dal XVI secolo tale serie ci può fornire indizi sulle vicende e stato di conservazione del monumento; anche se certe estrapolazioni vanno fatte con molta cautela in modo da discernere quello che è reale da quello aggiunto o modificato dall'artista.
Un anonimo acquerello di gusto naif conservato alla Marcelliana di Firenze ci fa sapere che nella metà del Settecento il monumento era pericolosamente infestato dalle piante spontanee e allo stesso tempo ci mostra quanto fossero sconnessi ed irregolari i suoi merli; ci documenta le prime due grappe metalliche poste a rafforzare il paramento ( databili probabilmente agli anni immediatamente successivi al terribile terremoto del 1672 ). Addirittura questo dipinto ci mostra degli effetti di schiacciamento ancor oggi ben visibili nella pietra del basamento orientale.
I merli vengono raffigurati come malmessi anche dal Temanza nel 1741, poi però ritornano regolari nel 1825 col Brighenti. Probabilmente nel frattempo debbono essere stati restaurati e regolarizzati, e debbono aver assunto la forma attuale, con la parte più fragile ( le punte ) in pietra bianca e la banchina orlata di mattoni messi di coltello ( quest'ultima è ben visibile nello schizzo di Felice Giani, del 1815 vedi fig. 2.46), nel 1791 durante un restauro affidato all'architetto cesenate Giuseppe Achilli per porre rimedio ai gravi danni del terremoto del 1786 ( i merli temono il terremoto, e alla più piccola scossa 'volano' via: dopo quello del 1916 sulla fronte esterna ne erano rimasti appena tre ed alquanto tremolanti ). Le due grappe che nell'acquerello appaiono sul piedritto di sinistra sono le avanguardie di uno stuolo veramente numeroso di grappe di ferro e bronzo che fino all'ultimo restauro del 1996 hanno caratterizzato il paramento lapideo dell'arco, soprattutto agli spigoli dei piedritti. Qualcuna venne aggiunta dopo il terremoto del 1875 ( figuranti nelle

foto tardo ottocentesche ) molte altre dopo il terremoto del 1916, come ci assicurano fotografie suvessive all'evento, nelle quali si troverà anche una diversa disposizione dei frammenti dell'epigrafe dell'attico, ricomposta come si vede ora dal restauro guidato da Giuseppe Cerola nel 1912.

Figura 2.46 – *L'arco d'Augusto*, schizzo a penna di Felice Giani, 1815. Raccolte Piancastelli, Biblioteca civica di Forlì.
Da notare in questa raffigurazione la disposizione a coltello dei mattoni della banchina dei merli, tale disposizione è stata voluta durante il restauro del 1791 a seguito del rovinoso terremoto del 1786.

Le immagini ci possono poi fornire anche indicazioni sul contesto urbano limitrofo all'arco.

La prima di queste raffigurazioni che ci mostrano il complesso urbano di Rimini nei pressi dell'arco è l'ex voto argenteo di Tolentino, del 1644 ( vedi figura 2.39 ), questa illustrazione descrive con garbo le mura e la porta medievale ornata di stemmi, alcuni edifici sono addirittura riconoscibili ( come il Tempio malatestiano ).

Comunque la migliore rappresentazione dal punto di vista della veduta attorno all'arco è senz'altro quella del lorenese Francesco Chamant, del 1738, incisa dal veneziano Antonio Visentini. ( vedi figura 2.41 )

In questa opera si può vedere bene l'antica porta urbica medievale antistante all'arco, costruita nel Duecento e che aveva sostituito l'arco per quanto riguarda le funzioni pratiche. Di tale porta si hanno pochissimi documenti visivi. In origine tale porta doveva avere la forma di una torre piuttosto alta, con i suoi merli; alla fine del Settecento era bassa e tozza, ma mostrava ancora l'interna costruzione ad archi di sesto acuto e si fregiava di stemmi malatestiani e viscontei. Alla fine del Settecento (1789) tale porta venne demolita, e venne fatto posto ad una barriera daziaria. Per rivedere questa porta bisogna guardare i disegni di Charles-Louis Clérisseau (1755) e di Giacomo Quarenghi ( 1772-73 ), che ce la mostrano inquadrata nel fornice dell'arco d'Augusto, e quindi dall'interno della città.

Nel disegno del Quarenghi è ben visibile anche la scaletta esterna in muratura che forse un tempo serviva per salire al cammino di ronda delle mura, e che ora veniva utilizzato per raggiungere il piano superiore della porta, costituito da un grande stanzone in cui si riparavano e dormivano i soldati e i dazieri, scaldandosi ad un grande camino: in fondo al quale, per difendere il muro dal fuoco c'era un grande pietra bianca con un bellissimo stemma di Galeotto Malatesta, recuperato mutilo quando la porta fu demolita, cioè dopo il terremoto del 1786. Nella stessa occasione furono recuperati anche uno stemma

di Cesare Guasco, che nel 1566 aveva riordinato le fortificazioni della città, ed un frammento dell'epigrafe dell'arco che venne murata nel torrione di lato mare, dove rimase fino al 1912 ( anno dopo cui Gerola restaurò definitivamente l'iscrizione ).

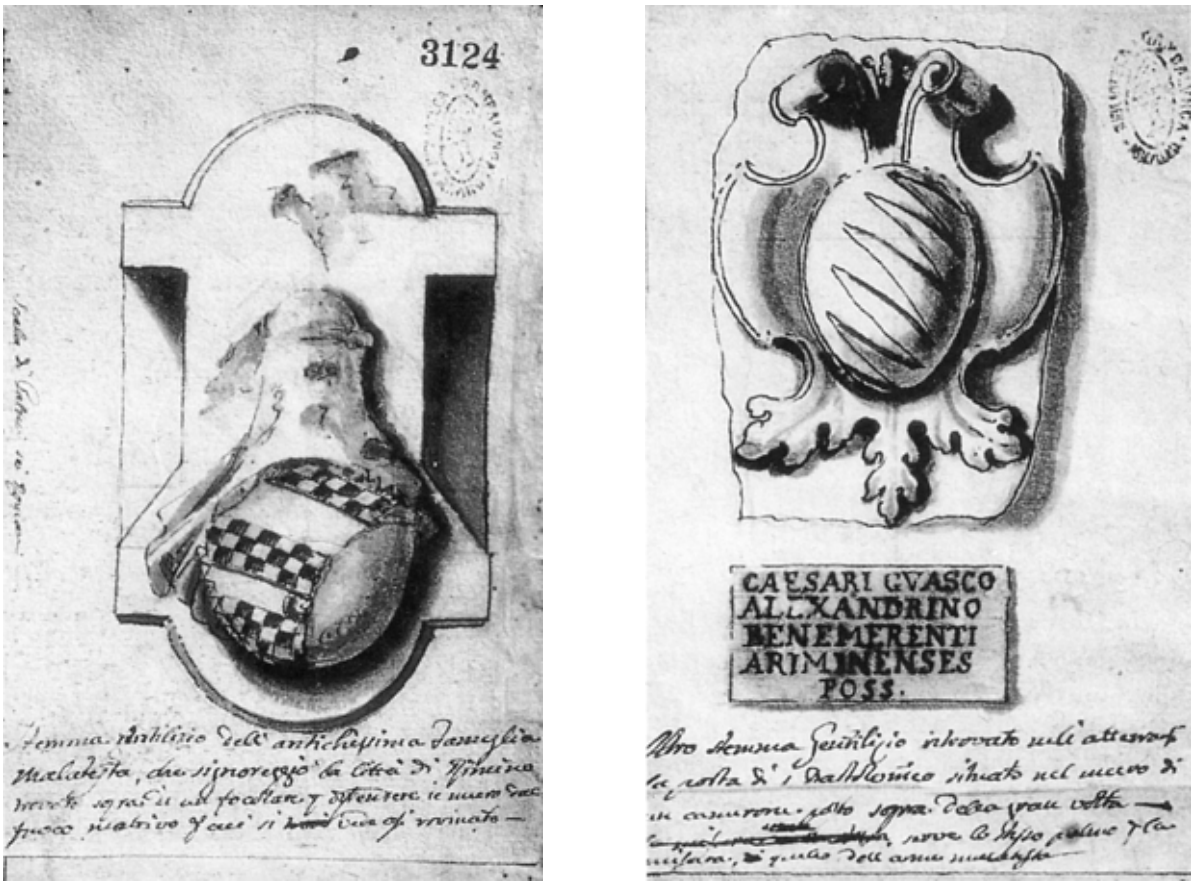



Figura 2.47 – P. Santi, *Stemmi di Galeotto Malatesta e di Cesare Guasco*, disegni a penna. Biblioteca Gambalunghiana, Rimini, Disegni e stampe, n. 3124
Questi stemmi, con un frammento della scritta dell'arco, furono ritrovati alla fine del Settecento durante la demolizione della porta urbica duecentesca. Le didascalie alle immagini spiegano: " Stemma gentilizio dell'antichissima Famiglia Malatesta, che signoreggiò la città di Rimino trovato sopra di un focolare per difendere il muro dal fuoco motivo per cui si vede così rovinato". " Altro stemma gentilizio ritrovato nell'atterrarsi la porta di S. Bartolomeo situato nel muro di un camerine posto sopra della gran volta. Serve lo stesso palmo per la misura, di quello dell'arme malatesta".

Parliamo ora un po' del ponte sull'Ausa, questa costruzione doveva essere di origine romana e probabilmente del tempo di Augusto. A quel tempo il livello altimetrico della strada sul ponte era più basso di due-tre metri, questo perché l'antico ponte è stato spazzato via da una

piena dell'Ausa avvenuta nel 1523 ed il nuovo ponte è stato ricostruito ad una quota assai maggiore nel 1603.

Quindi prima del Seicento, probabilmente dall'origine e per molti secoli, l'arco ( che non ha subito variazioni di quota ) doveva apparire a chi faceva il suo ingresso nella città da un punto di vista più ribassato dell'attuale e quindi si mostrava in apparenza più alto e solenne di quanto non sia oggi.

Fino al 1631 probabilmente l'arco era affiancato solo dai resti dei torrioni laterizi poligoni, questo perché fino a quel tempo era esistita una normativa che imponeva una fascia di rispetto nei pressi delle mura e dell'arco in cui non era possibile edificare, in modo da tenere libera la zona per lasciarla ad uso delle mura urbane. Decaduto questo regolamento, pian piano l'arco si è visto avvicinarsi a se, in un affettuoso abbraccio, sempre più edifici fino allo stravolgimento urbano avvenuto nel 1937 con lo sventramento della zona ad opera di Mussolini.

Figure 2.48 – 2.49 – L. Rossini, *Arco d'Augusto in Rimini*. *Dalla parte esterna della città ( particolare ). Dalla parte interna della città*, due incisioni, in *Gli archi onorari e funebri degli antichi romani*, Roma (1836), tavv. XII, XVIII. Esemplari della Biblioteca Classense, Ravenna.

Purtroppo nessun documento iconografico ci aiuta ad immaginare il rapporto tra il fiume, la porta medievale e l'arco d'Augusto; pochi disegni e qualche antichissima fotografia ci permettono di avere una vaga idea della situazione nell'Ottocento e nel primo Novecento.
Oltretutto bisogna dire che di queste poche raffigurazioni pervenuteci nessuna ci mostra la porta medievale, infatti si tratta di immagini tutte successive all'abbattimento della porta e si può notare invece

l'istituita barriera daziaria disegnata da Carlo Giuseppe Fossati nel 1789. I migliori di questi disegni appartengono al fiorentino Romolo Liverani (1844) e sono caratterizzati da un realismo temperato dal gusto romantico.

Figura 2.50 – 2.51 – R. Liverani, *il ponte sull'Ausa e l'Arco d'Augusto*; *L'ingresso orientale a Rimini*, disegni a penna, 1844. Raccolte Piancastelli, Biblioteca civica di Forlì.

La zona dell'arco, nella sua parte esterna alla città, dopo la demolizione della porta medievale e la costruzione della barriera daziaria (1789) mostrava una situazione complessa e pittoresca, ben rappresentata in questi due disegni; in essi, con una straordinaria ricchezza di dettagli, viene descritto il percorso che immetteva nella città attraverso il ponte sull'Ausa e l'arco, e il rapporto con il fiume. Alla base del ponte seicentesco sono visibili i resti del ponte romano, più basso dell'attuale di circa due-tre metri.

Per quanto riguarda la descrizione dell'ambiente urbano prossimo all'arco risultano molto interessanti molte opere del Settecento e dell'Ottocento, a cominciare da quelle di Charles-Louis Clérisseau (1755 ) e di Giacomo Quarenghi ( 1772-73 ). (vedi fig. 2.44-45 )
Il francese ci mostra l'arco senza merli, per la solita censura antimedievale, le prime case della via maestra all'interno della città viste attraverso il fornice, le irregolari costruzioni all'esterno, un torrione diminuito ed arrotondato dal tempo.

Figura 2.52 – B. Rosaspina, *L'arco d'Augusto ingresso in Rimino*, incisione su disegno di L.Ricciardelli, c. 1832. Esemplare della Biblioteca Gambalunghiana di Rimini, in deposito al Museo della città, Rimini.
L'incisione rappresenta con diligenza ed abilità l'assetto della zona limitrofa all'arco, che costituiva un ambiente molto caratterizzato e caratteristico.

Sulla destra dell'arco non sembrano essere stati ancora costruiti edifici in adiacenza al torrione. La veduta del Quarenghi invece ci dà informazioni interessanti, oltre che sulla porta medievale ( come abbiamo già visto ), sugli edifici prossimi all'arco interni alla città, e soprattutto sulla facciata della chiesa dei Santi Bartolomeo e Genesio, il cui portale si raccordava alla strada mediante un ripido scivolo in mattoni ( che dal 1541 aveva sostituito un gradinata troppo ampia ).

Figura 2.53 - *Panorama de la ville de Rimini*, incisione di E. Meunier su disegno di Dosso ( da una fotografia ), in Ch. Yriarte, *les bords de l'Adriatique et le Montenegro*, Paris 1878, p. 526.
Ancora alla fine dell'Ottocento la città si mostrava come un'insieme compatto e variato di modesti edifici, dominato dalle chiese maggiori e dall'arco d'Augusto, il cui fornice stretto fra le case costituiva un nobile diaframma fra la città e il borgo, e nello stesso stempo il varco più ampio e l'ingresso più prestigioso al centro urbano.

Grazie a queste numerose ed oggettive testimonianze, nel complesso si può dire di conoscere piuttosto bene la situazione dell'arco e del contesto urbano fra la fine del Settecento e per tutto l'Ottocento. Talmente bene che con un po' di fantasia si potrebbe fare un viaggio

nel tempo ed immergersi fra la gente dell'epoca: vedremmo muoversi braccianti e commercianti, garzoni e massaie, guardie e frati, gente a piedi ed a cavallo o in carrozza, potremmo trovare anche il ciabattino che risuola le scarpe all'abate di passaggio, i soldati che fanno la corte alle donne. Oggi le cose sono cambiate, ma l'arco è ancora testimone di momenti di vita quotidiana e di incontri che nei suoi pressi si svolgono, e rimane un luogo comune, un punto fermo, di incontro e passaggio come da oltre duemila anni non ha mai smesso di assolvere.
Un rapido sguardo al complesso di documenti iconografici raffiguranti l'arco ci permette di notare un certo disinteresse e disprezzo, generalizzato a tutte le epoche ed a tutti gli artisti, al riguardo della parte laterizia aggiunta nell'epoca medievale. Al contrario tutte le parti originali della costruzione spesso sono state riportate meticolosamente e con ammirazione. Questa razzia è da ricercare nel rifiuto generalizzato del medioevo e delle sue opere, perché da sempre e tutti ritenuto un periodo buio, di disprezzo, da cui non c'è nulla da imparare. Tale disprezzo si manifestò in modo eclatante con la proposta di distruzione della merlatura ghibellina avanzata da vari autori, tra cui da Carlo Giuseppe Fossati nel 1794 e da Luigi Tonini nel 1848. Per fortuna tali proposte non vennero accettate, infatti se ciò fosse avvenuto il manufatto si sarebbe impoverito e deformato, cancellando ogni traccia della sua lunga vicenda medievale, senza poi pensare ai danni statico-strutturali che avrebbe causato un simile abbattimento. Oltretutto esistono anche altri motivi per cui non si dovrebbe operare un tale restauro: le ipotesi ricostruttive riguardanti l'attico dell'arco, avanzate nei secoli dai diversi autori sono spesso discordanti fra loro, e non vi sono documenti probatori in favore delle diverse tesi, quindi fino a prova contraria ( ancora non pervenuta ) tutte le ricostruzioni pittoriche sono equiprobabili, anche se una tradizione alquanto erudita-antiquata del Settecento afferma l'esistenza sull'arco di un gruppo plastico marmoreo composto da una

quadriga guidata dall'imperatore Augusto. ( vedi al riguardo il paragrafo 2.4.5 ) Questa problematica l'aveva ben compresa Giuseppe Valadier, che nel 1825 bloccò saggiamente il progetto di restauro avanzato da Maurizio Brighenti ( vedi figura 2.32 ) attraverso le seguenti parole: " Direi di non entrare in interpretazioni di quello che poteva essere, né aver la pretenzione di farvi cosa alcuna novità, e muover quel che esiste d'antico per pretenzione di migliorarne le parti". Con queste parole la faccenda si concluse.

Figura 2.54 – *Arco d'Augusto e ponte sull'Ausa*. cartolina, ed. G. Trerè Bestini, Rimini 1914. Le fotocartoline costituiscono le immagini più diffuse e popolari della città dell'inizio del Novecento; spesso, come questa, derivano nell'impostazione dalle immagini 'artisctiche' del secolo precedente, e ci permettono di verificarne l'esattezza documentaria per quanto riguarda la situazione urbanistica ed edilizia; e inoltre ci aiutano a conoscere più da vicino i personaggi dell'epoca. Da notare è che la cartolina è del '14 ma la foto fu scattata nel 1897.

Tutte le rappresentazioni settecentesche, ottocentesche e fino alle fotocartoline novecentesche dimostrano che l'arco ha sempre sostenuto il ruolo di ingresso alla città. Tale situazione subì un totale ed improvviso sovvertimento nell'anno fra il 1936 ed il 1937, quando

si decise di isolare l'arco senza tenere conto né della storia che aveva generato una precisa condizione urbanistica, né delle caratteristiche monumentali e concettuali della costruzione.

Figura 2.55 – L'arco d'Augusto di Rimini così come si presentava nel 1901.
Qui è rappresentato il prospetto verso la periferia della città. Sulla destra della foto si può intravedere il resto del torrione poligono laterizio di origine medievale su cui si poggia la costruzione di un fabbricato.

Lo si volle liberare (per motivi di 'decoro' e di 'valorizzazione', e per celebrare degnamente anche a Rimini il Bimillenario d'Augusto) dall'edilizia ritenuta troppo modesta che l'attorniava. Si cercò di trasformare l'arco in un emblema del trionfo, sottraendolo al suo destino 'provinciale' per promuoverlo verso un brillante carriera statale, anzi imperiale. Quando nel ferragosto del 1936 Mussolini diede di persona il primo colpo di piccone alle costruzioni adiacenti l'arco espresse anche lo scopo del suo intento: creare una connessione ideale attraverso il monumento fra la Roma imperiale di Augusto e la sua Italia imperiale.

L'isolamento comportò lo sventramento della zona, cioè la demolizione di un intero quartiere, che venne sostenuto, anche per giustificare l'ingentissima spesa, con la necessità di risanarlo. Così in un brevissimo lasso di tempo ( dal 1936 al 1938 ) avvenne lo sfollamento degli abitanti e il monumento venne trasformato in una quinta scenografica per una futura "via dell'Impero".

Figura 2.56 – Arco d'Augusto di Rimini così com'appariva nel 1903 dalla periferia della città. Anche in questa raffigurazione sono ben visibili i resti dei due torrioni laterizi di forma poligona di origine medievale, ai lati dell'arco, queste strutture poggiano e vengono addirittura conglobate nelle strutture degli edifici che vi si accostano. Da notare è anche l'iscrizione dell'arco, che a quel tempo appariva ancora disordinata, infatti venne restaurata e riordinata da Gerola nel restauro del 1916, restauro voluto per ripristinare il monumento dal rovinoso terremoto di quell'anno.

Figura 2.57 – Fotografia risalente al 1927, essa rappresenta l'arco d'Augusto da un punto di vista interno alla città.

Figura 2.58 – Fotografia scattata prima dell'anno dello sventramento della zona ad opera di Mussolini, avvenuto nel 1937. Questa foto ritrae il fronte verso Rimini dell'arco d'Augusto. Interessante è notare la fisionomia che i fabbricati avevano a quel tempo, oltretutto questa foto ci mostra una scorcio di vista sulla via antistante l'arco. Sotto il fornice è anche possibile notare il passaggio a livello della linea ferroviaria che portava fino a Villa Verucchio. Da notare i questa foto è anche l'integrità del basamento del piedritto a lato mare ( a sinistra ), situazione che non sarà più tale dopo l'esplosione della mina posizionata dai tedeschi nell'anno 1944.

Figura 2.59 - Fotografia scattata prima dell'anno dello sventramento della zona ad opera di Mussolini, avvenuto nel 1937. Questa foto ritrae il fronte verso Roma dell'arco d'Augusto.
Anche in questa foto è possibile vedere i resti dei due torrioni laterizi di forma poligona adiacenti ai lati dell'arco di cui si è già ampiamente discusso.
Dalla disposizione dell'epigrafe possiamo ritenere che questa foto sia stata esposta negli anni successivi al restauro del 1916 ( anni in cui avvenne il definitivo riordino dell'iscrizione ), infatti come ben si nota, la disposizione dei blocchi della scritta romana è la stessa di oggi.

Tutto il carattere propagandistico dell'opera di 'valorizzazione' dell'arco d'Augusto si rivelò chiaramente quando, durante le demolizioni, comparvero per un'altezza di vari metri i suoi torrioni laterali e le mura urbiche romane ( testimoni inequivocabili della funzione di porta sostenuta dal monumento, già dichiarata dagli storici e riconosciuta dagli archeologi) che per intervento diretto di Mussolini furono inesorabilmente abbattuti, nonostante la decisa, motivata opposizione degli studiosi e della Soprintendenza ( alla quale fu tolta la direzione dei lavori, passata all'ufficio tecnico comunale ).

Figura 2.60 – Torrione a lato monte, fotografato nel 1935.
Il quartiere dell'arco era fittamente popolato; anche nei due antichi torrioni che affiancavano l'arco erano stati ricavati vani d'abitazione.

La tecnica del colpo di piccone dato direttamente dalla mano di Mussolini ha certamente giovato alla tecnica di persuasione delle menti che ha fatto in modo di far ritenere che le reliquie delle antiche torri fossero di poca importanza, e per questo a nessuno importava se fossero andate perse ( cosa non vera ). Agendo in questo modo lo sventramento della zona intorno all'arco avvenuto fra il 1936 ed il 1937 non solo non è stato intralciato dal popolo riminese, ma addirittura è stato appoggiato con un sostegno, fanatismo ed entusiasmo degno della miglior causa.

Così è avvenuto per l'isolamento dell'arco riminese, la tecnica del colpo di piccone incontrovertibile ha sempre funzionato bene, ed è stata utilizzata anche in seguito su di altre costruzioni.

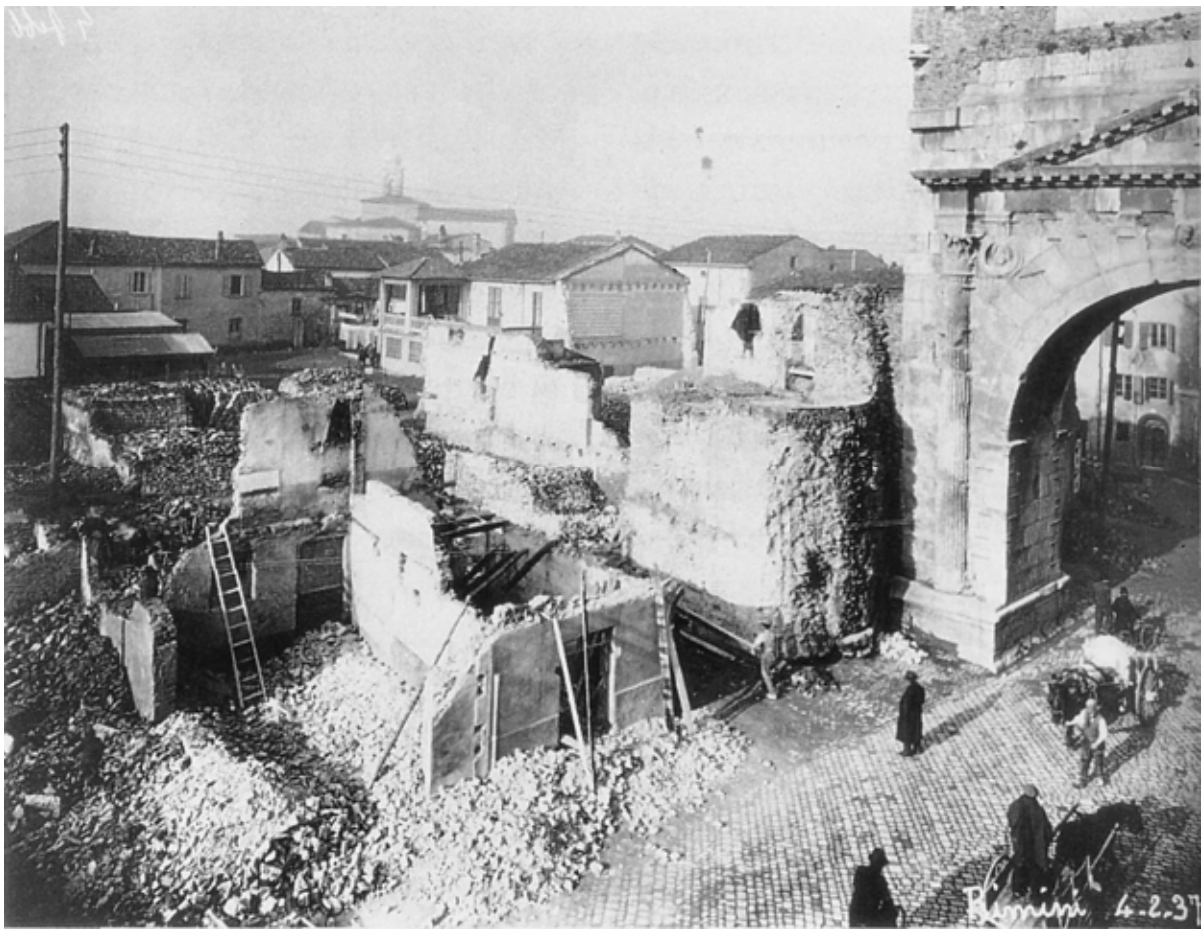



Figura 2.61 – Demolizioni attorno all'arco, fotografia del 4 febbraio 1937.
La situazione urbanistica venne completamente sconvolta nel 1937 dai lavori di isolamento dell'arco; anche le antiche torri laterali e buona parte delle mura romane ( già visibili in questa fotografia ) furono inesorabilmente distrutte nell'intento di esaltare la qualità trionfale del monumento, a scapito della comprensione della sua funzione originaria e tradizionale di porta urbana, e con la perdita di elementi importanti per la ricostruzione della storia cittadina.

Tornando un po' all'iconografia artistica del Novecento, possiamo dire che un'opera degna di nota, in cui è possibile avere una suggestiva visione degli scavi eseguiti attorno all'arco effettuati in occasione dello sventramento del '37 è quella di Traiano Finamore, che realizzò una xilografia proprio in quella occasione.

Infine, l'ultima volta che all'arco furono riconosciuti caratteri di qualità e simbolo è stato nel 1944, quando i tedeschi in ritirata cercarono di distruggerlo facendo brillare frettolosamente una mina sotto al suo piedritto a lato mare; era un gesto assolutamente inutile dal punto di vista strategico, ma chiaro dal punto di vista morale in quanto, mentre colpiva la città nel suo monumento più

rappresentativo, manifestava odio e disprezzo per la retorica imperiale dell'ormai inutile governo fascista, di cui l'arco era impregnato.

Figura 2.62 – Fotografia del 1937, anno in cui avvenne lo sventramento della zona attorno all'arco per mano di Mussolini. In questa fotografia, scattata dalla periferia della città si possono notare gli ultimi resti di quelle torri laterizie altomedievali che per secoli hanno fiancheggiato il monumento augusteo.

L'inclinazione, la rotazione e la sconnessione del piedritto a lato mare dell'arco, con la perdita di una parte del basamento fino ad allora ben conservato, sono dovute appunto a questa esplosione, che fortunatamente non ha avuto l'esito sperato, ma che rese necessario nell'immediato dopoguerra un pesante lavoro di consolidamento statico.

Nel 1968 avvenne un altro cambiamento radicale destinato a cancellare l'ultimo pezzo di storia antica: il fiume Ausa venne incanalato in una tombinatura e deviato nel Marecchia, ed il suo alveo originario venne colmato con un terrapieno.

Questo fu uno stravolgimento storico, in quanto l'Ausa è da sempre stato una barriera naturale che allo stesso tempo fungeva da recinto e demarcazione fra due territori del tutto differenti ( il centro e la periferia ). Così era stato per secoli, fino a quando tale demarcazione non è diventata un intralcio all'espansione della città.

Dal 1938 l'arco non ha subito sostanziali modifiche, ed oggi si presenta come ad allora; l'unica differenza è che fino agli anni '60 sotto ad esso potevano passare i veicoli, poi è stata costruita un'isola spartitraffico che impediva il passaggio a veicoli sotto il fornice e li faceva deviare attorno al monumento. In pratica il monumento è stato al centro di una rotonda fino all'anno 2000, quando si è costruita un'apposita area isolata dal traffico.

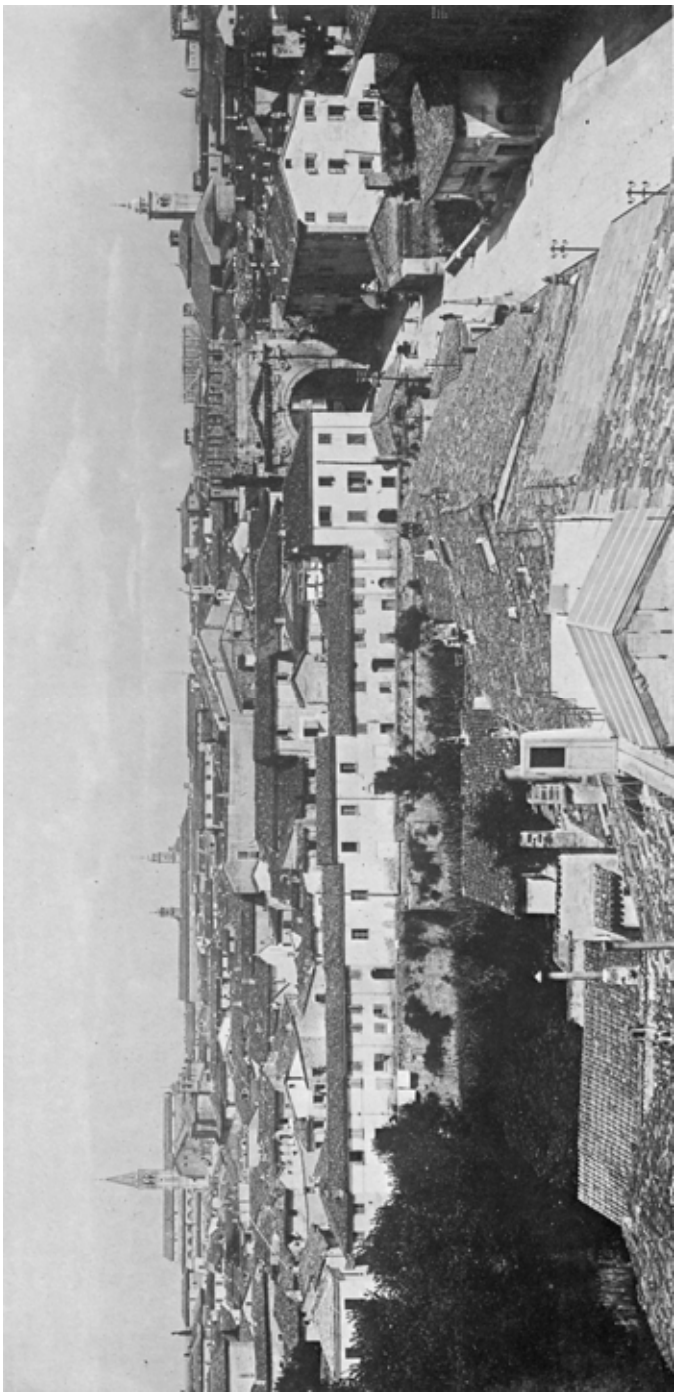
Figura 2.63 – Il torrione laterizio medievale a lato monte durante la sua distruzione. 1937

Figura 2.64 – Fronte verso Rimini dell'arco d'Augusto agli inizi del Novecento.

Questa fotografia di inizio secolo ci mostra l'arco attorniato da abitazioni di modesta architettura. Ma quello che è più interessante è notare come le foto ci possono tramandare scorci di vita quotidiana dell'epoca, così vediamo della gente che è di passaggio, della gente che si ritrova per fare un chiacchierata…
Inoltre in questa rappresentazione si può scorgere il ponte sull'Ausa con la sua barriera daziaria e le case che vi campeggiano al di là di essa. Spesso l'arco è stato ritratto dalla periferia, come è logico, infatti queste foto dovevano dare l'immagine che lo stesso viaggiatore poteva avere quando faceva il suo ingresso nella città. Questa rara foto invece ci mostra l'arco dalla parte opposta, ed è una delle poche in cui si riescono a vedere gli edifici costruiti sulla via Flaminia.

Figura 2.65 – Fronte verso Rimini dell'arco d'Augusto nell'anno 1920.

Fra questa fotografia e quella precedente degli inizi del Novecento sembra essere rimasto tutto intatto, ma se si pone l'attenzione nell'inquadratura tagliata dal fornice si scorge una grossa differenza in prossimità del ponte sull'Ausa. Tale viadotto infatti ha cambiato completamente fisionomia nelle decine di anni che separano questa foto dalla precedente.



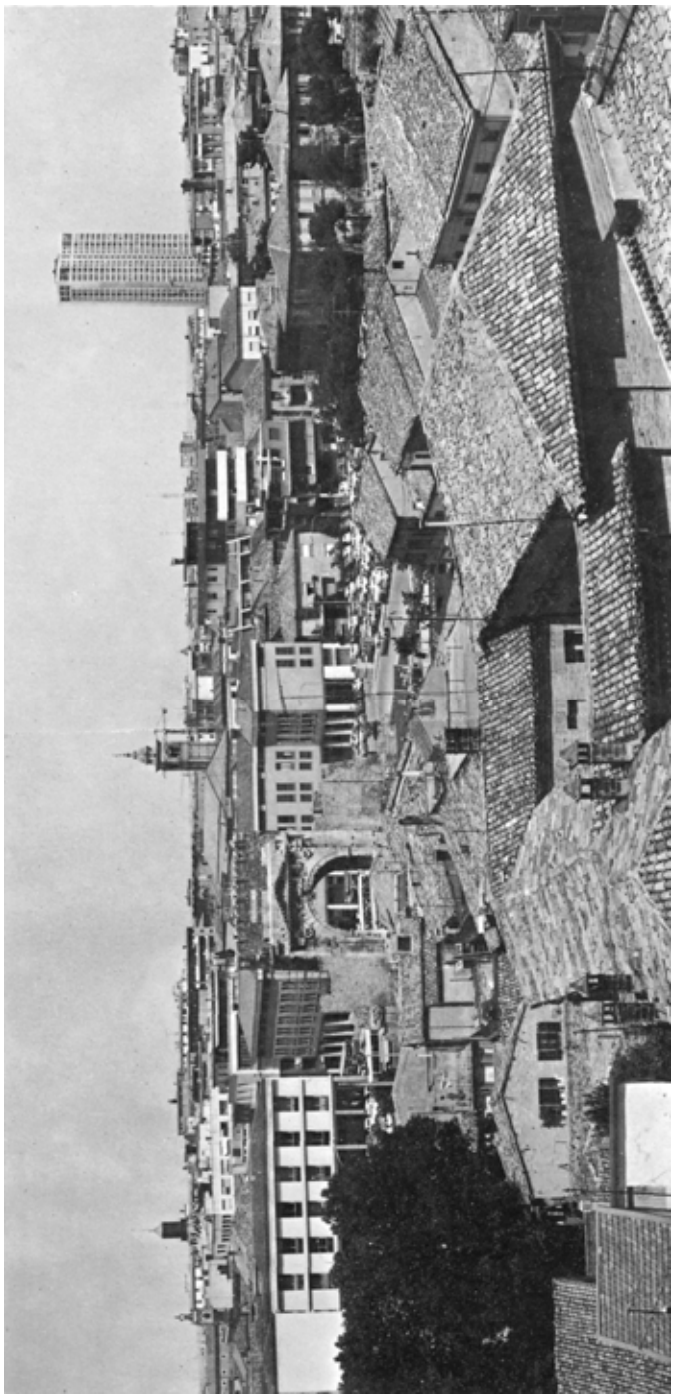


Figure 2.66 e 2.67 – Fotografie che rappresentano l'ingresso orientale della città di Rimini, rispettivamente all'inizio del Novecento ( foto a sinistra ) e nel 1975 ( foto a destra ).

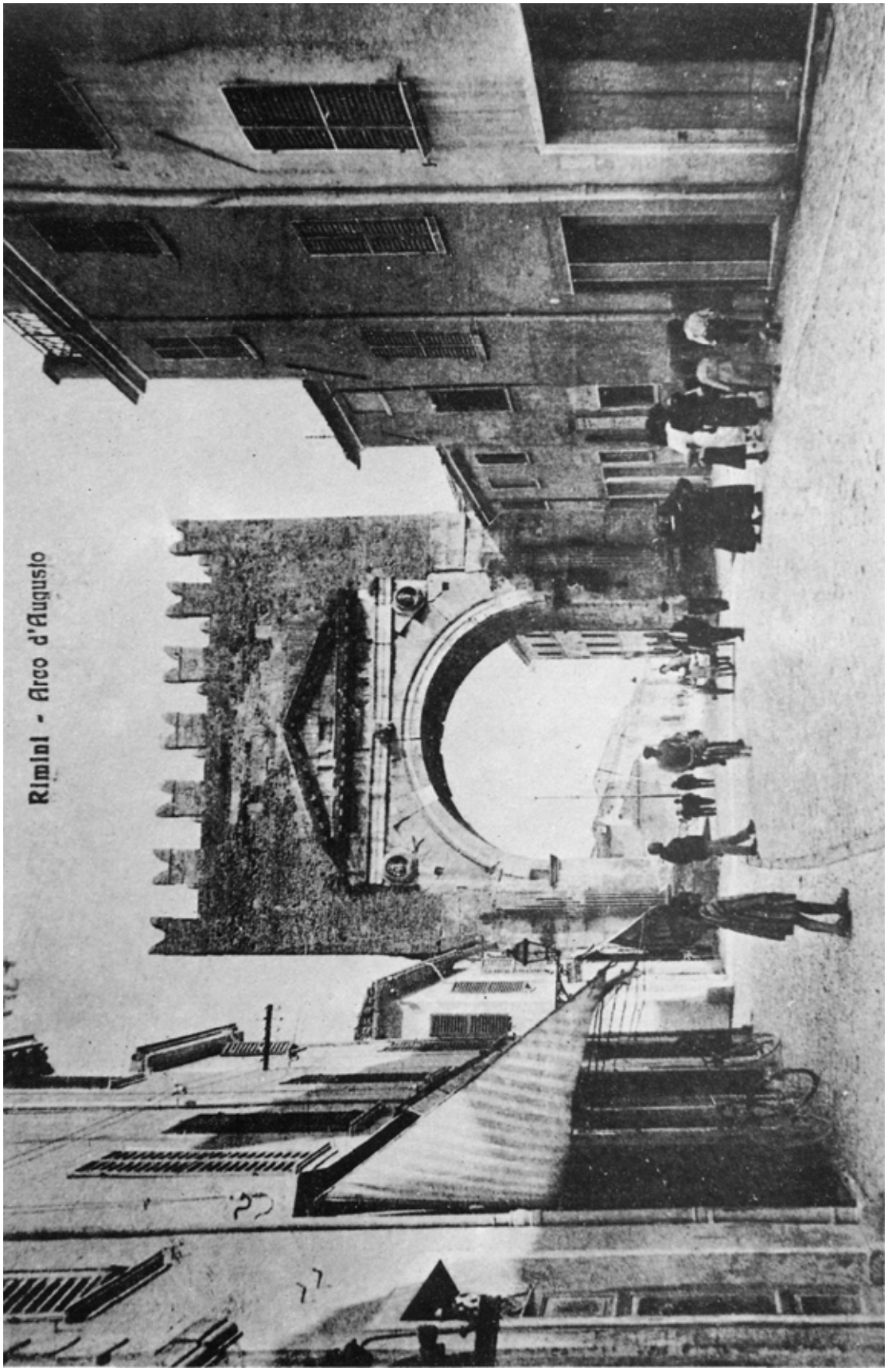



Figura 2.68 - Fotografia risalente al 1927, essa rappresenta l'arco d'Augusto da un punto di vista interno alla città.

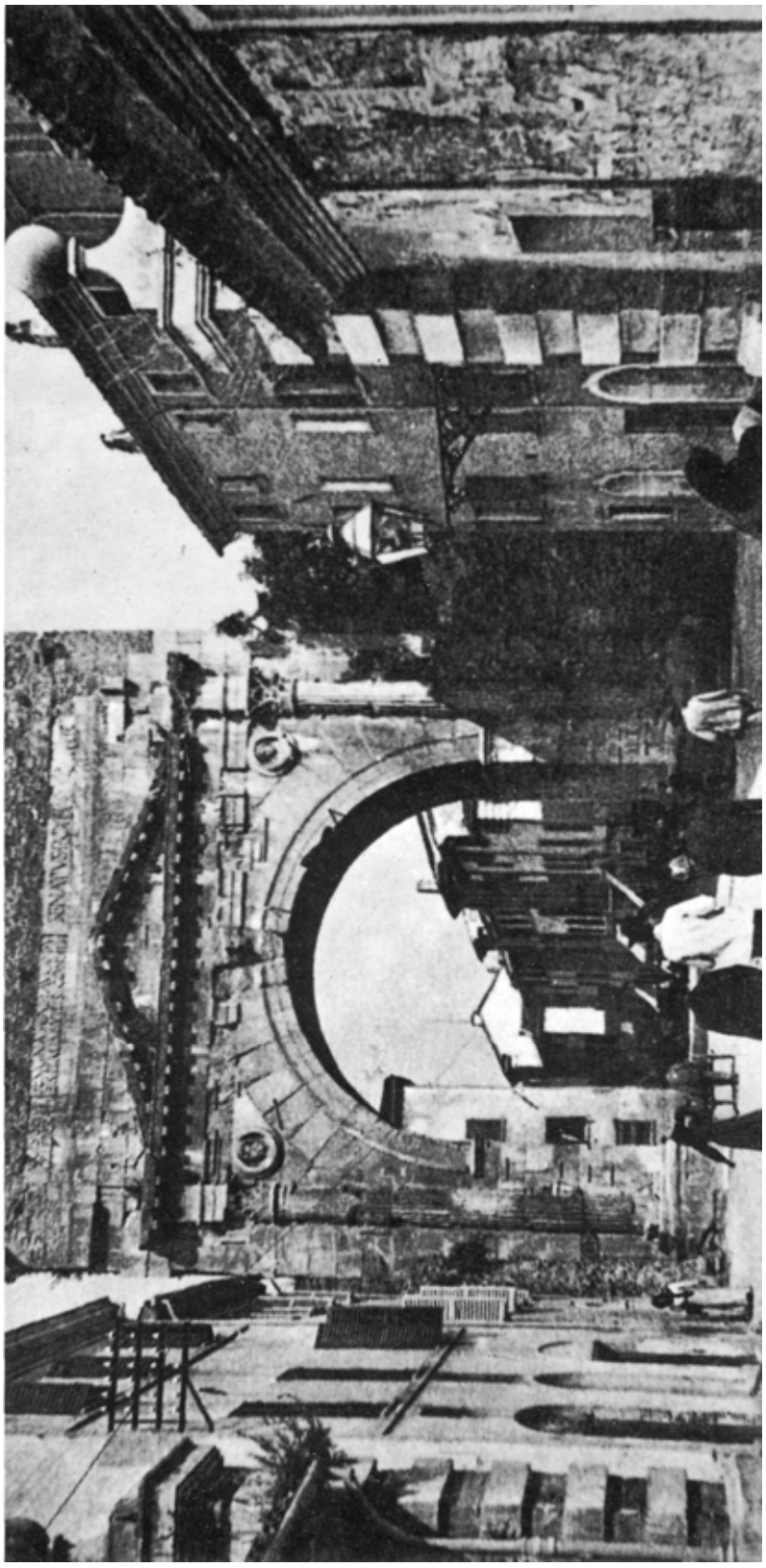


Figura 2.69 - L'arco d'Augusto di Rimini così come si presentava nel 1901.
Qui è rappresentato il prospetto verso la periferia della città. Questa è una delle poche fotografie scattate prima del 1912 da così vicino all'arco che è possibile leggere l'iscrizione. Prima del '16 infatti l'iscrizione non era ancora stata restaurata e ricomposta, solo nel 1912 Giuseppe Gerola ci fornisce la dicitura in forma integrale, e con i restauri del 1916 i blocchi dell'iscrizione vengono risistemati nella loro forma e disposizione originaria.

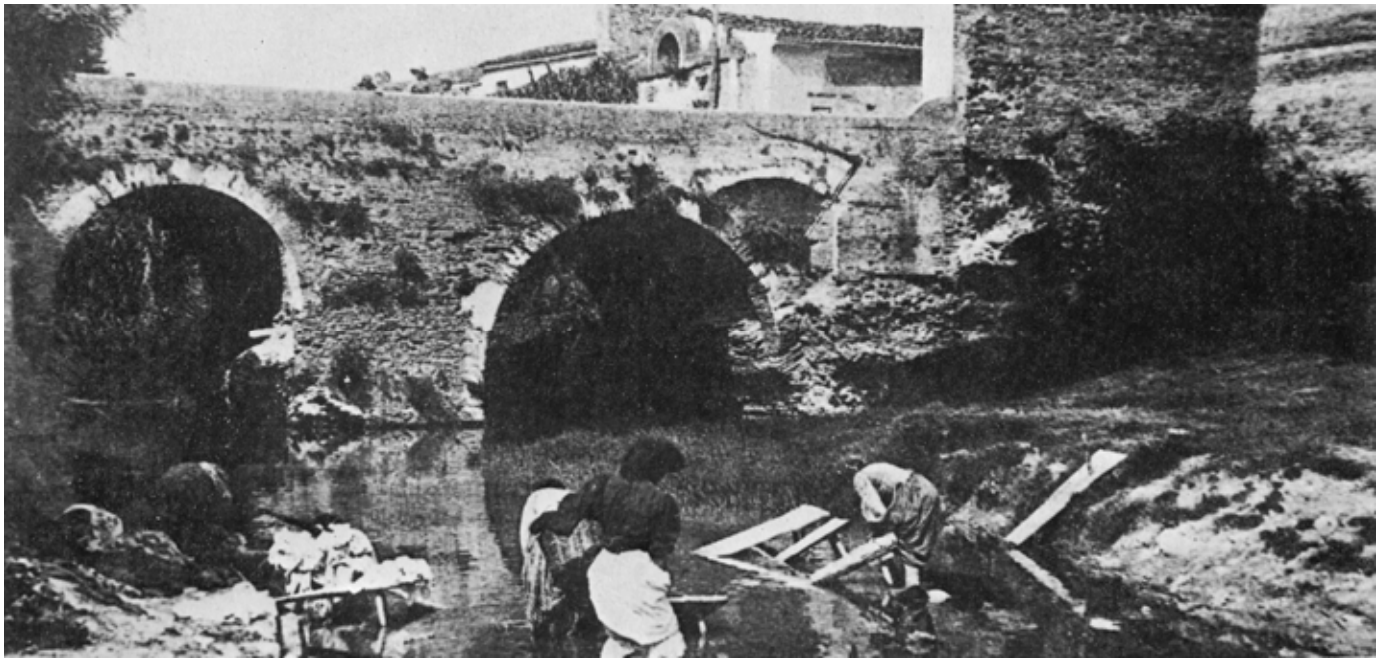
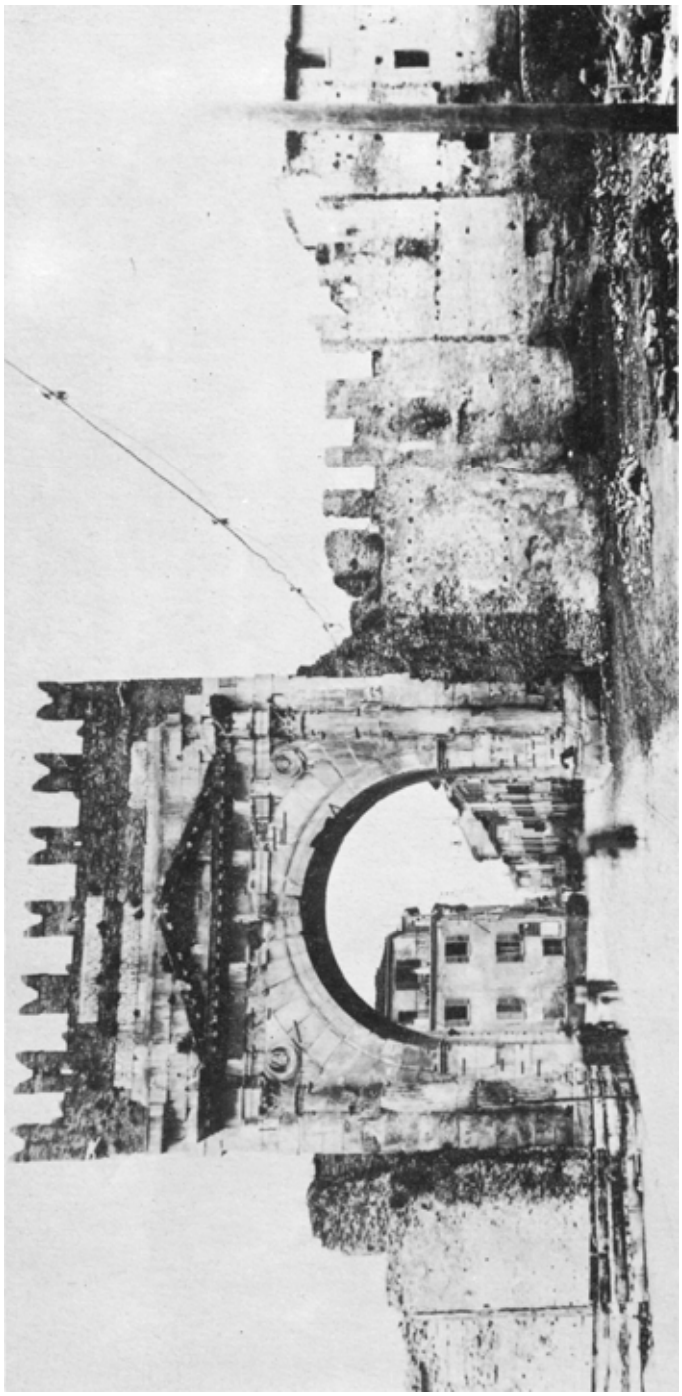


Figura 2.70 – Il ponte sul fiume Ausa alla fine dell'Ottocento

Figura 2.71 – L'inizio dei lavori di isolamento dell'arco (1936)



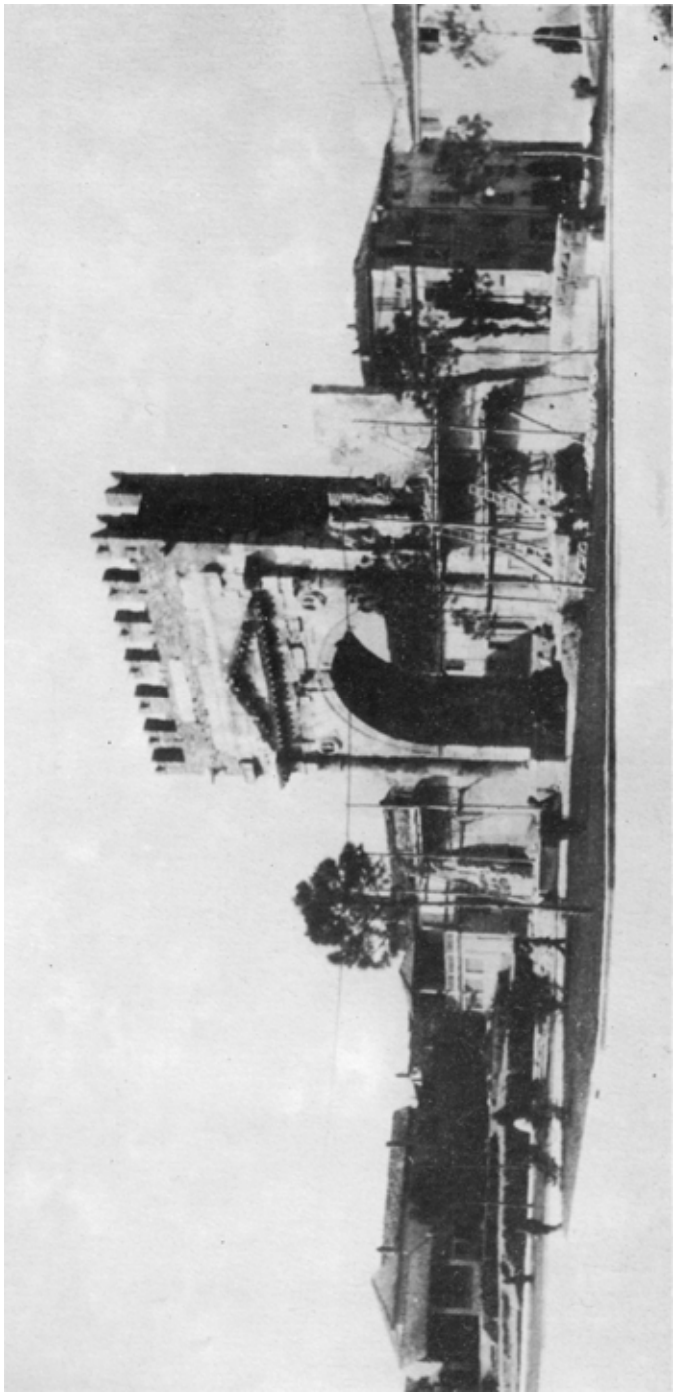


Figure 2.72 e 2.73 – L'arco durante i lavori di demolizione e sventramento della zona attorno ad esso voluti da Mussolini.
Nella figura 2.72 ( quella di sinistra ) l'arco viene rappresentato durante il pieno dei lavori, nell'anno 1937, ma in questa fase i torrioni laterizi di forma poligonale di origine medievale adiacenti all'arco non sono ancora stati abbattuti.
Nella figura 2.73 ( quella di destra ) l'arco è rappresentato nel periodo che precede di poco la fine dei lavori, ovvero nell'anno 1938.

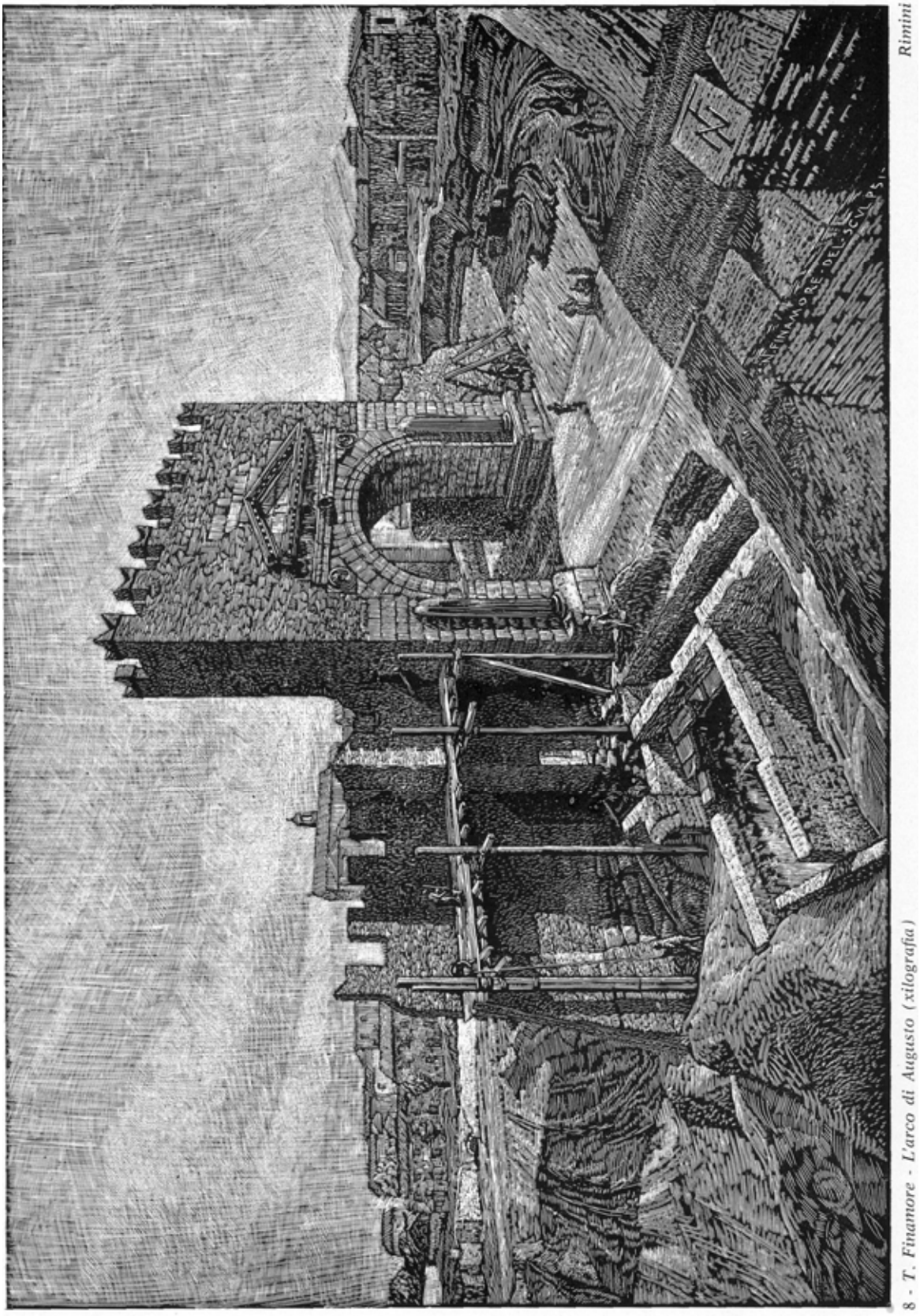



Figura 2.74 – Traiano Finamore, L'arco d'Augusto, xilografia, 1937. Esemplare della Biblioteca Gambalunghiana di Rimini.
E' una delle più significative testimonianze della situazione rivelata dagli scavi del 1937, dovuta al disegnatore della Regia Soprintendenza alle Antichità.

Figura 2.75 – Un carro armato alleato impantanato nel torrente Ausa, nei pressi dell'arco d'Augusto. (1944)
L'Ausa ha sempre costituito un elemento di notevole interesse ambientale, ma soprattutto, con il suo letto profondo, un limite 'invalicabile' tanto per la città che per i nemici.

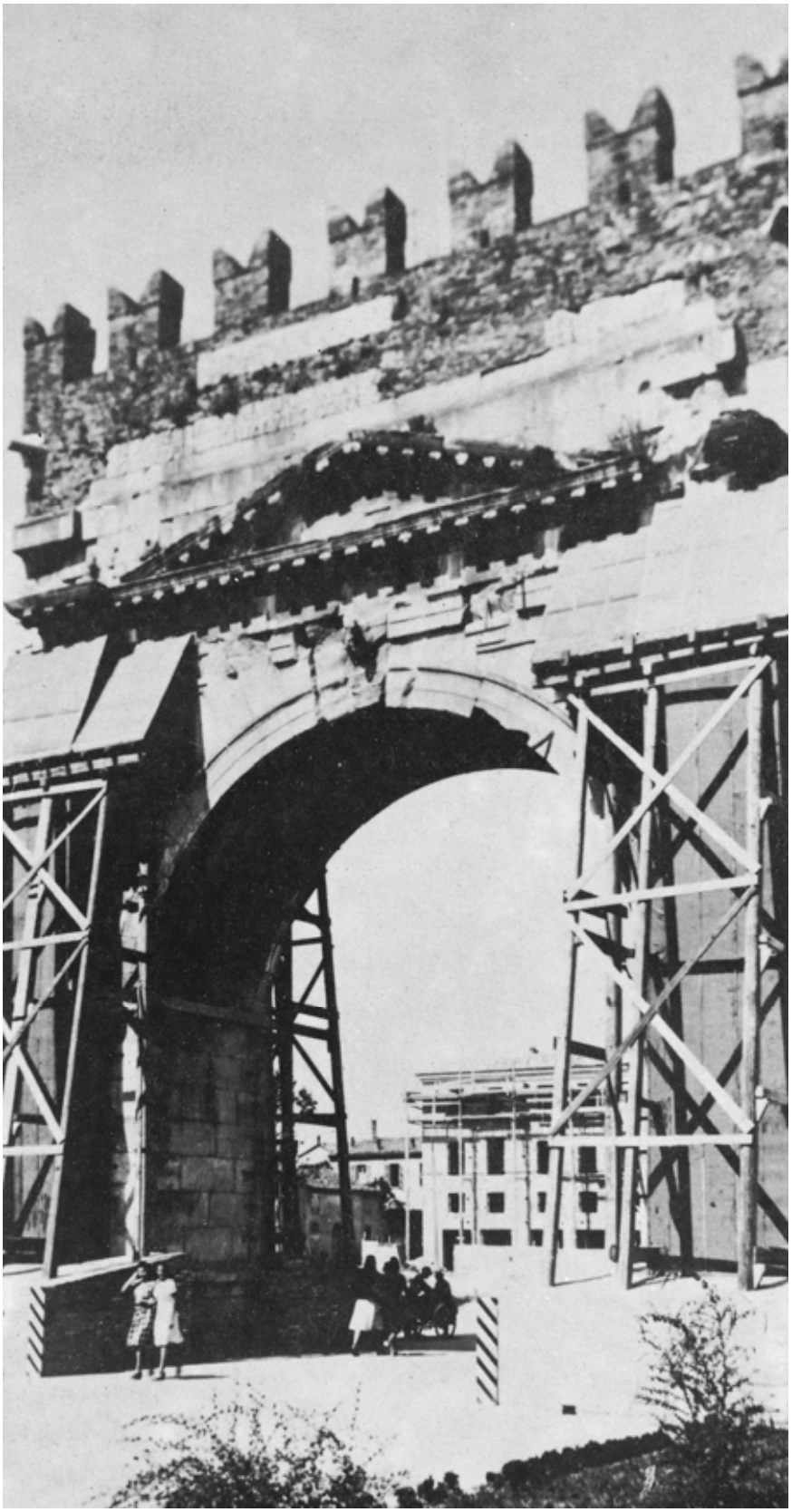


Figura 2.76 – Impalcature a protezione dell'arco. ( 1942 )

Da questa immagine si può comprendere quanto l'arco fosse tenuto in considerazione, e quindi degno di protezione dagli attacchi nemici. Certo il metodo di salvaguardia impiegato è un po' precario, ma deve comunque aver dato il suo contributo durante il brillamento della mina piazzata dai tedeschi in ritirata nel 1944. Se non ci fosse stata questa impalcatura sicuramente le conseguenze sarebbero state ancor più serie.

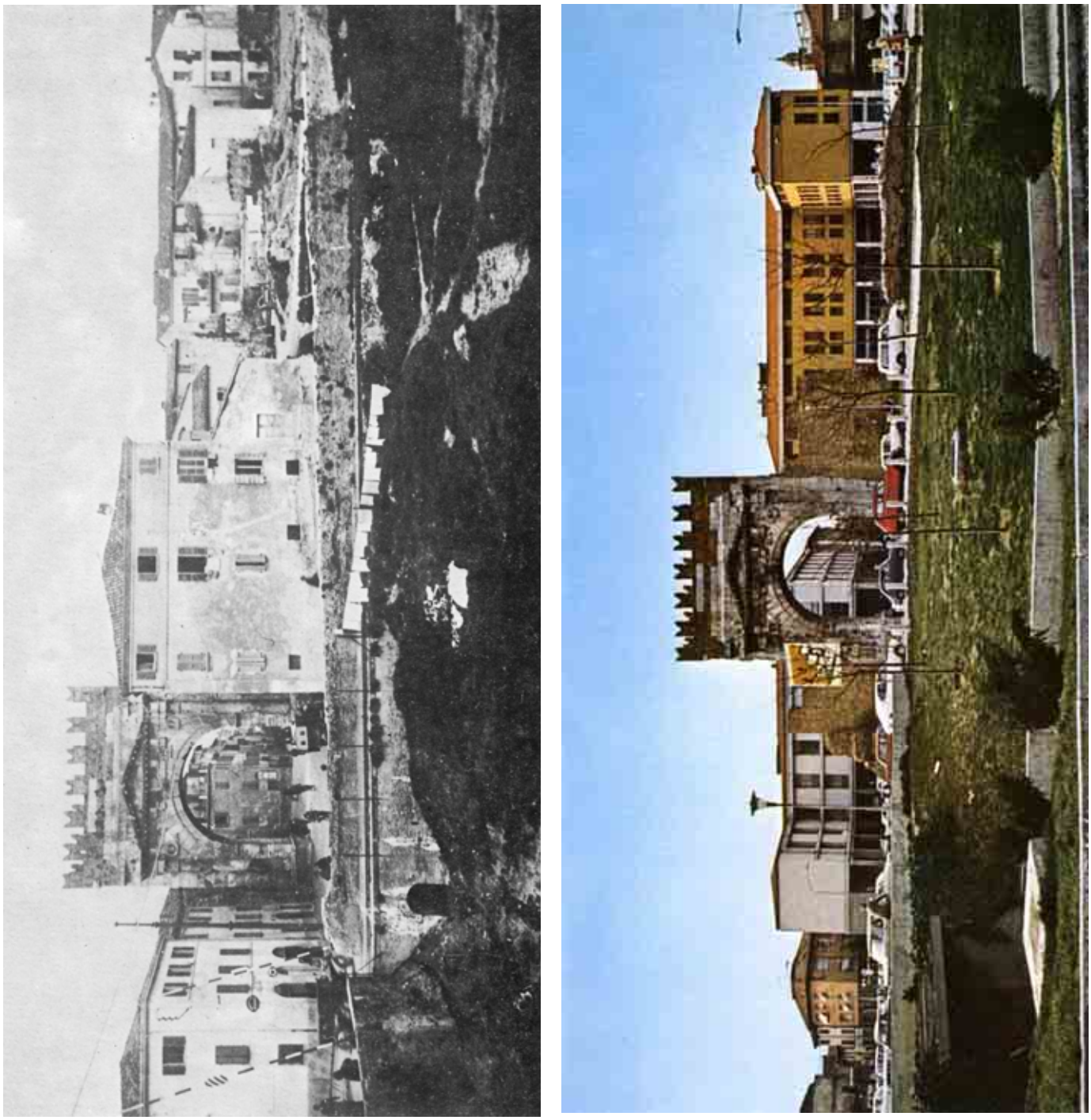


Figure 2.77 e 2.78 – Il fiume Ausa e l'arco d'Augusto
Nella figura 2.77 ( quella di sinistra ) viene raffigurata la situazione all'incirca degli anni '30
Nella figura 2.78 ( quella di destra ) viene raffigurata la situazione nel 1975.

Figura 2.79 – Fotografia aerea dell'arco nell'anno 1960.

Figura 2.80 – Fotografia aerea dell'arco nell'anno 1975.

Figura 2.81 – Fotografia del 1950. L'arco d'Augusto è ripreso dall'interno della città. In questa fotografia, essendo successiva al 1944, è già possibile vedere i danni causati dall'esplosione della mina piazzata dai tedeschi sul piedritto a lato mare. Il pilone ha subito un'inclinazione, una rotazione ed una sconnessione, con la perdita di una parte del basamento fino ad allora ben conservato. Da allora ad oggi la situazione non è cambiata, sono stati fatti degli interventi di restauro e consolidamento statico, ma la geometria non è stata possibile ripristinarla, la tempestività dell'intervento di manutenzione ha però fatto in modo che le condizioni non degenerassero.

Fronte esterna dopo l'isolamento. (Foto R. Soprintendenza)

Figura 2.82 – L'arco d'Augusto dopo i lavori di isolamento avvenuti nel 1937. Questa fotografia con molta probabilità è databile agli anni immediatamente seguenti.

Figura 2.83 – Resti del Torrione laterizio di forma poligona di origine tardoromana-altomedievale a lato mare, prima della sua completa distruzione avvenuta a seguito dell'isolamento dell'arco del 1937. Foto del '35

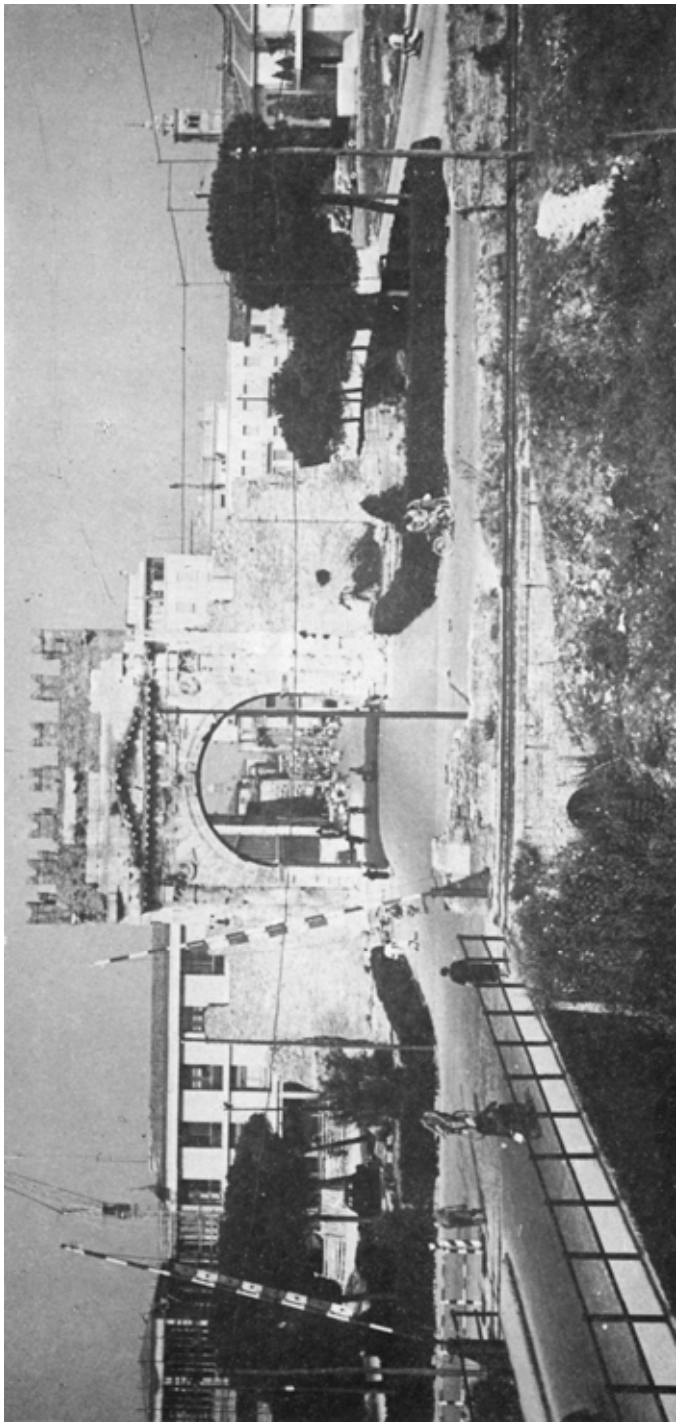


Figure 2.84 e 2.85 – L'arco d'Augusto ed il piazzale

Nella figura 2.84 ( quella di sinistra ) è rappresentata la situazione attorno agli anni Cinquanta. In questa fotografia è possibile vedere la linea ferroviaria che costeggiando i resti delle mura medievali portava fino a Villa Verucchio, da notare che in questi anni, fino agli anni Sessanta era possibile passare attraverso il fornice anche con gli autoveicoli ( che evidentemente erano pochi ), successivamente venne costruita una rotonda con al centro il monumento in modo da impedire l'attraversamento dell'arco ai veicoli, il cui numero era diventato un problema e pericolo per la salvaguardia della struttura.

Nella figura 2.85 ( quella di destra ) è rappresentato l'arco con la rotonda di cui si è parlato, questa fotografia ritrae la situazione nel 1975.

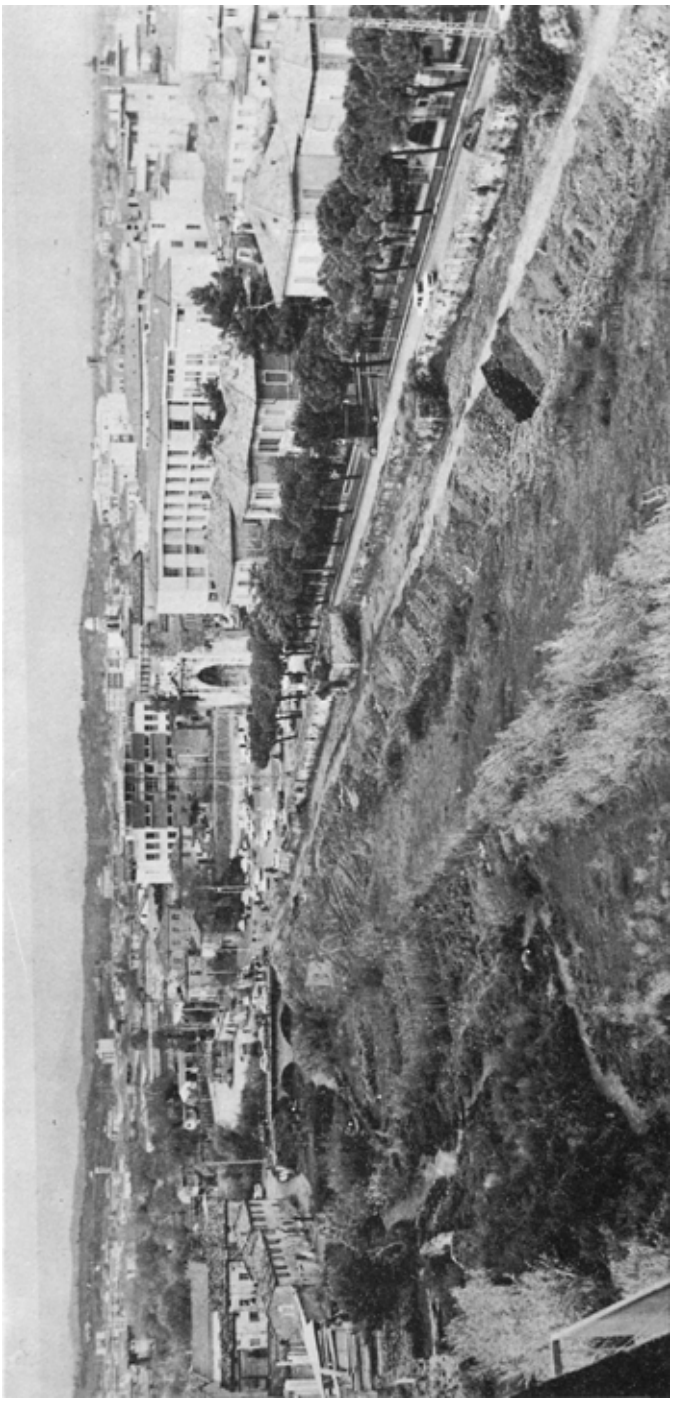


Figure 2.86 e 2.87 – L'arco d'Augusto, il fiume Ausa e le mura medievali.

Nella figura 2.86 ( quella di sinistra ) è rappresentata la situazione nell'anno 1967, nel 1968 il torrente Ausa fu deviato nel fiume Marecchia e il suo profondo alveo fu colmato per eliminare una barriera naturale che impediva l'espansione della città. Questa fotografia ci mostra l'ultima reliquia dell'alveo, ormai ridotto a scarico delle fognature cittadine.

Sempre nella stessa fotografia si possono notare i resti delle mura romane della metà del Duecento, costruite assieme alla porta urbica medievale antistante l'arco (abbattuta nel 1786) di cui oggi non ci rimangono resti. In questa foto regna lo stato di abbandono, evidenziato dalle erbacce spontanee che sono proliferate sui resti delle mura.

Nella figura 2.87 ( quella di destra ) viene mostrata la situazione nell'anno 1974, tale stato è rimasto nelle sue linee generali sostanzialmente invariato fino ad oggi. Al posto dell'Ausa, come si può vedere, oggi vi è un parco cittadino. Durante la costruzione di tale area verde

sono anche state messe in luce una maggior parte delle mura medievali che nel corso dei secoli avevano subito un interramento.

## *2.4.7 Lista dell' iconografia storica fino al Novecento*

Qui di seguito si presenta un elenco, ordinato cronologicamente, di documenti iconografici prodotti fra il XVI e XIX secolo; in esso non sono comprese le immagini che compaiono nei sigilli e negli stemmi della città, e alcune raffigurazioni minori e stereotipe, per lo più popolari, soprattutto ottocentesche.

1526 c. Antonio da Sangallo il Giovane, *Il ponte e l'arco di Augusto*, disegno a penna, cm. 22,1 x 28,7. Firenze, Uffizi.

1540 c. Francesco (o Giuliano?) da Sangallo, *L'arco d'Augusto, fronte esterna*, disegno a penna. Già Londra, coll. Burlington.

1611. C. Piazza, *La SS.ma Trinità, l'Immacolata e i Santi Protettori della città di Rimini*, olio su tela, cm. 527 x 260. Rimini, chiesa di San Giovanni Battista.

1644. - *Rimini*, ex voto, lamina d'argento sbalzata, cm. 25 x 55. Tolentino, santuario di San Nicola.

1663. - "*Arcus ariminensis*", incisione, cm. 38 x 26, in J. Blaeuw, *Theatrum Civitatis et admirandorum Italiae*, Amsterdam 1663.

1672 c. P. Sevin, *"La Porte de Rimini"*, disegno a penna e acquerello, cm. 13,8 x 18,1. Milano, Raccolta Bertarelli.

1680. F. Donia, *Arco d'Augusto*, incisione, in R. Fabretti, *De aquis et aquaeductibus veteris Romae*, Roma 1680, p. 43.

XVII secolo. - *Arco d'Augusto*, disegno a inchiostro, in S. Bovii, *De patria Arimini inclita, de Rubicone famoso atque egregiis quae Arimini extant Romanorum monimentis libellus*, Savignano s. R., Biblioteca dell'Accademia dei Filopatridi, (misc. ms. *Antiquitatum et sacrarum*)

XVII secolo. - "*Arcus figura ut extabat*", disegno a penna, cm. 37,5 x 25,6, in J. Villani, *De vetusta Arimini urbe et eius episcopis*, I, fra le cc. 16-17. Rimini, Biblioteca Gambalunghiana, SC-MS 174.

1732. - *Arco d'Augusto*, incisione, in R. Fabretti, *De aquis et acquaeductibus veteris Romae dissertationes tres*, Venezia 1732 (II ed.).

1740 c. - *L'arco d'Augusto*, acquerello. Firenze, Biblioteca Marucelliana.

1741. A. Visentini, Cinque tavole di *rilievi dell'Arco d'Augusto*, cm. 29,8 x 19,5, incise su disegno di T. Temanza per il suo vol. *Delle Antichità di Rimino libri due*, Venezia 1741.

1741. A. Visentini, *Veduta di Rimini da oriente*, incisione su disegno di F. Chamant (1738), cm. 5,7 x 16,2, in T. Temanza, *Delle Antichità di Rimino libri due*, Venezia 1741, p. 3.

1741. T. Temanza (?), *Prospetto dell'arco d'Augusto*, disegno a penna, cm. 23 x 18,8. Rimini, Biblioteca Gambalunghiana, Disegni e stampe, n. 3155.

1741 c. - *Prospetto dell'arco d'Augusto*, disegno a penna, cm. 37 x 25 (copia dal Temanza?). Rimini, Biblioteca Gambalunghiana, Disegni e stampe.

1748. G.B. Piranesi, *"Arco di Rimino fabricato da Augusto"*, incisione, cm. 13,3 x 26,3, in *Alcune vedute di archi trionfali ed altri monumenti inalzati da Romani parte dei quali si veggono in Roma, e parte per l'Italia*, Roma 1748 (nella tavola dell'indice sono riprodotte le *iscrizioni* del ponte e dell'arco romani di Rimini).

1755. C.-L. Clérisseau, *"Arco di Rimino eretto ad Augusto"* (dall'esterno della città), penna e acquerello, cm. 28 x 38. Venezia, Galleria dell'Accademia.

1755. C.-L. Clérisseau, *L'arco d'Augusto* (dall'esterno della città), disegno. Pietroburgo, Museo dell'Ermitage.

1755. C.-L. Clérisseau, *L'arco d'Augusto* (dall'interno della città), penna e acquerello, cm. 33 x 27,9. Norton, Mass., Coll. Mc Cormick.

1755. R. Adam, *L'arco d'Augusto*, disegno. Midlothian (GB), Penicuik House, coll. Sir J. Clark.

1757. - *"L'Arco di Rimini vicino alla Porta Orientale fatto per ordine dell'Imp. Augusto"*, incisione (derivata da quella del Blaew), cm. 16 x 10, in T. Salmon, *Lo stato presente di tutti i popoli*, XXI, Venezia 1757.

1760-70. A. Visentini, *"Pianta e alzato del'Arco d'Augusto, o sia porta della Città di Rimino"*, penna e acquerello, in A. Visentini, *Il contra Rusconi o sia l'esame sopra l'architettura di Giovanantonio Rusconi*, ms. Venezia, Museo Correr, Cod. Cicogna 3656.

1770. O. Gramignani, *"Prospetto di Rimino"*, disegno a penna, cm. 38 x 52. Venezia, collezione privata (replica a Milano, Racc. Bertarelli).

1770. O. Gramignani, *Simbolo storico generale della città*, disegno a penna, cm. 48,5 x 36, tav. I del ms. *Descrizione storico-topografica dell'antica città di Rimino e sua diocesi*, 1770. Rimini, Biblioteca Gambalunghiana.

1770. D. Montagu, *"Ancien Arc de Triomphe bati par Auguste à Rimini"*, incisione su disegno di J.Barbault, cm. 18,5 x 28,5, in *Recueil de divers monuments anciens repandus en plusieurs endroits de l'Italie*, Parigi 1770, tav. 41.

1772-73. G. Quarenghi, *L'arco d'Augusto*, inchiostro e acquerello, cm. 29,4 x 44,1. Pietroburgo, Museo dell'Ermitage

1780 c. P. Atanasio da Coriano (?), *San Gaudenzo*, olio su tela, cm. 80 x 60. Rimini, chiesa di San Gaudenzo.

1783. G. Zuliani, *"Legazione della Romagna"*, incisione su disegno di G. Pitteri, cm. 32,5 x 41,8, in *Atlante novissimo illustrato e accresciuto sulle osservazioni e scoperte dai più celebri e più recenti geografi*, III, Venezia 1783, presso Antonio Zatta.

1786. G. Stefani, *"Priscae monumenta aetatis haec autem mediae"*, medaglia dedicata ai cardinali Banditi e Garampi, su progetto (e disegno?) di B. Borghesi, incisione, cm. 11,4 x 16. Rimini, Biblioteca Gambalunghiana.

1788. G. Soleri Brancaleoni, *Sant'Emidio*, olio su tela, 1788. Rimini, chiesa del Suffragio.

1792. G. Bombelli, *"S. Franciscus de Paula Ordinis Minimorum Pater Patronus Arimini"*, incisione su disegno di G. Soleri Brancaleoni, cm. 34 x 22,5.

1792. P. Santi, *L'arco e il ponte romani di Rimini*, in finti medaglioni, come fregio decorativo, disegno a penna, in *Pensiero del mausoleo eretto nella chiesa de' MM. RR. PP. Minimi in Rimino... al fu Em.mo e Re.mo Sig. Cardinale Giuseppe Garampi*, ms. Forlì, Biblioteca Civica, Raccolte Piancastelli, ms. O.I.8, c. 1.

1794. C.G. Fossati, *Prospetto esterno dell'arco*, incisione, cm. 34 x 24, antiporta del volume *Le temple de Malateste à Rimini*, Foligno 1794.

1797. F. F. C. Bourgeois, *Arco d'Augusto*, disegno. Parigi, Museo di Versailles.

1800. Kellerhoven, *"L'Arc triomphal d'Auguste a Rimini"*, acquatinta su disegno di Verschaffeld, Mannheim chez Dom. Artaria, 1800, cm. 50 x 61,5.

1815. F. Giani, "*Arco di Augusto Rimini* 1815", disegno a penna, cm. 21,8 x 15,5.

Forlì, Biblioteca Civica, Raccolte Piancastelli.

1818-22. A. Bornaccini, "*Ottaviano Augusto fa erigere un nobilissimo arco in Rimino...*", incisione, cm. 26 x 30; "*P.L. Valeriano imp. fa dare la morte a moltisimi cattolici riminesi...*", incisione, cm. 22,3 x 28,6; "*La tirannide gotica porta morte, e foco in Rimini*", incisione, cm. 23 x 28, in *Storia di Rimino*, Rimini 1818-22, tavv. XXI, XXVI, XXXVI.

1820 c. Bence et P.C., "*Vue de l'arc d'Auguste à Rimini*", incisione, cm. 33,5 x 24, in *Palazzi e case d'Italia*, [Parigi, 1820?]

1824. M. Brighenti, *Disegni di rilievo e ricostruzione ideale dell'Arco d'Augusto*, sei tavole, disegni a penna e acquerello, cm. 71,4 x 56,5, cm. 86,5 x 61,5. Roma, Archivio di Stato.

1825. L. Carlini, *Rilievi e ricostruzione ideale dell'Arco*, incisioni su disegno di F. Morolli, cm. 29,5 x 22,5 e cm. 69,5 x 49,5, costituenti le otto "tavole in rame" allegate a M. Brighenti, *Illustrazione dell'Arco d'Augusto in Rimini*, Rimini 1825.

1827. F. Orlandi, *"Arco d'Augusto di Rimini secondo la illustrazione del Professor Maurizio Brighenti"*, olio su carta intelata, cm. 44,2 x 36. Forlì, Biblioteca civica, raccolte Piancastelli.

1826-29. -*Il tempio e l'arco a confronto*, nella tav. LI di G.B.L.G. Seroux D'Angicourt, *Storia dell'arte dimostrata coi monumenti*, Prato 1826-29

1830 c. L. Carlini, *Apollo ("Agitante calescimus illo")* incisione su disegno di G.B.V., cm. 10,4 x 13.

1832-36. B. Rosaspina, *"Arco d'Augusto ingresso in Rimino"*, incisione su disegno di L. Ricciardelli, cm. 27,6 x 37,7.

1833. G. Buttazzoni, C. Zanetti, *Arco d'Augusto a Rimini, Arco trionfale d'Augusto a Rimini*, in J.N.L. Durand, *Raccolta e parallelo delle fabbriche classiche di tutti i tempi d'ogni popolo e di ciascun stile*, Venezia, 1833 (Archi di trionfo e porte, n. 60; Ponti n. 62).

1836. L. Rossini, "*Arco di Augusto in Rimini. Dalla parte esterna della città*", incisione, cm. 50,5 x 39,5; "*Restauro e dettagli dell'arco di Augusto in Rimini*", incisione, cm. 50 x 39; "*Arco di Augusto in Rimini. Dalla parte interna della città*", incisione, cm. 30,5 x 22, in *Gli archi onorari e funebri degli antichi romani sparsi per tutta Italia, disegnati, misurati, ristaurati ed incisi e brevemente descritti e illustrati... Opera architettonica, pittorica, e figurativa*, Roma [1836], tavv. XII, XIII, XVIII.

1837. S. Bonora, "*Arco d'Augusto*", disegno a penna. Rimini, Cassa di Risparmio.

1840 c. - "*Veduta dell'Arco di Augusto a Rimini*" (dall'esterno della città), disegno a penna. Forlì, Biblioteca Civica, Raccolte Piancastelli.

1840 c. - "*Arco di Rimini*" (dall'interno della città), disegno a penna. Forlì, Biblioteca Civica, Raccolte Piancastelli.

1840 c. - "*S. Antonio di Padova prot. di Rimini*", incisione. Rimini, Biblioteca Gambalunghiana, Disegni e stampe, n. 639.

1841. P.M.L., "*Arco di Augusto in Rimini*", incisione, cm. 11,5 x 9,6, in *"L'album"*, a. VIII, 4, 27 marzo 1841, p. 28.

1842. - "*Arco di Augusto a Rimini*", rilievo e ricostruzione ideale, incisione in L. Canina, *L'architettura antica descritta e dimostrata coi documenti*, Roma 1842, tav. CXXXVII.

1844. R. Liverani, "*Il ponte sull'Ausa e l'Arco d'Augusto*", disegno a penna, cm. 20 x 27,6. Forlì, Biblioteca Civica, Raccolte Piancastelli.

1844. R. Liverani, "*L'ingresso orientale a Rimini*", disegno a penna, cm. 20 x 27,6. Forlì, Biblioteca Civica, Raccolte Piancastelli.

1848. L. Tonini, "*Arco d'Augusto in Rimini*", incisione, cm. 21,3 x 16,3, in L. Tonini, *Rimini avanti il principio dell'era volgare*, Rimini 1848, p. 171.

1850 c. - *Veduta della fronte esterna dell'arco d'Augusto*, acquerello monocromo (seppia). Roma, coll. privata.

1850 c. - *"Der Riminische Triumphbogen Erbaute durch Augustus"*, litografia su disegno di De Pian, cm. 32 x 42,7.

1863. G. Bourgerel, *"Porte d'Auguste à Rimini"*, litografia, cm. 22,5 x 20, in *Fragments d'architetcture dessinés d'après nature et autographie par G. Bourgerel*, Paris, 1863, pl. LXIII.

1870 c. P. Randi, *Difesa di Rimini fatta dal popolo e da pochi militi imperiali contro i Goti che l'assediavano*, affresco (o tempera, distr. 1944). Forlì, Palazzo della Provincia, Sala del Consiglio.

1878. E. Meunier, *"Panorama de la ville de Rimini"*, incisione su disegno di Dosso [da una fotografia], cm. 12 x 16, in Ch. Yriarte, *Les bords de l'Adriatique et le Montenegro*, Paris 1878, p. 526.

1878. M. Caulli, *"L'arc d'Auguste, à Rimini"* (veduta dall'interno della città), incisione su disegno di M. Catenacci [da una fotografia], cm. 29 x 21, in Ch. Yriarte, *Les bords de l'Adriatique et le Montenegro*, Paris 1878, p.529.

1882. Puyplat, *"L'Arc d'Auguste à Rimini"*, incisione su disegno di H. Toussaint [da una fotografia], cm. 15,5 x 11,2, in Ch. Yriarte, *Un condottiere au XV siècle*, Parigi 1882, p. 57.

1886. - *Il cavallo imbizzarrito*, ex voto dipinto su tavola, cm. 36,5 x 48,2. Rimini, santuario di Santa Maria della Misericordia (Santa Chiara).

1888 c. - Barberis, *Monumenti riminesi*, incisione su disegno di A. Bonamore, cm. 26,5 x 35, da "Le città italiane", Milano c. 1888,

1900 c. - G. Bilancioni, *L'arco d'Augusto sotto la neve*, olio su tavola, cm. 30 x 19. Rimini, Museo della Città.

## 2.5 RILIEVI STORICI DELL'ARCO AUGUSTEO

In questo paragrafo vengono esposti tutti i rilievi topografici e fotogrammetrici eseguiti da vari autori nel corso dei secoli sull'arco d'Augusto di Rimini. Naturalmente qui riporto solamente quelli maggiormente degni di nota e ritenuti più oggettivi, purtroppo i vari 'geometri' non specificano con quale metodo hanno fatto le loro misure, l'unico autore che spiega in dettaglio la metodologia di rilevamento è l'arch. Roberto Angelini, che all'inizio degli anni

Ottanta ha eseguito un accurato rilievo fotogrammetrico delle due facciate dell'arco augusteo.

In realtà i rilievi eseguiti sull'arco sono molti di più di quelli riportati in questa sede, soprattutto quelli eseguiti nel Novecento, ma purtroppo non ho avuto la possibilità di poter mettere mano su di questi altri disegni. Spesso ho viaggiato fra i meandri del comune di Rimini ed ho contattato anche la Soprintendenza dei beni archeologici dell'Emilia Romagna alla ricerca e speranza di poter visionare, scannerizzare questi documenti, ma sempre, per incompetenza e/o indifferenza delle persone che ho incontrato in queste sedi non ho nemmeno potuto visionare questi documenti che pare nessuno sappia dove siano, per non dire che molti non sanno nemmeno della loro esistenza.

In definitiva però i rilievi più rappresentativi sono riuscito a scannerizzarli e riportarli qui di seguito, solamente per il fatto che sono stati pubblicati attraverso le pagine di alcuni libri.

Da tenere presente è che durante il processo di scansione i vari documenti possono non essere stati del tutto aderenti alla superficie dello scanner, inducendo come conseguenza una distorsione sull'immagine acquisita, distorsione che, senza un apposito reticolo impresso sull'originale al momento della scansione, non può essere corretta e controllata. Ammessa poi anche una perfetta aderenza fra il documento da ritrarre ed il piano dello scanner non è possibile eliminare delle distorsioni che sono prodotte dallo stesso processo di acquisizione delle immagini. Detto ciò, tutti i rilievi qui di seguito riportati vanno 'letti' con cautela, per il motivo sopraesposto, anche se è stato fatto il possibile per ridurre questo dannoso fenomeno che deforma figure e falsa le misure. L'unico rilievo nel senso moderno del termine, con una pretesa di scientificità è solamente quello eseguito negli anni Ottanta dall'Angelini, tutti gli altri sono meno attendibili, soprattutto quelli precedenti al Novecento.

### *2.5.1 Il rilievo fotogrammetrico dell'arch. Roberto Angelini eseguito nell'anno 1982.*

Questo rilievo è il più recente ed accurato che sia mai stato fatto sull'arco, infatti è stato eseguito con una strumentazione moderna costituita da una camera fotogrammetrica ed un distanziometro ad onde capace probabilmente di fare, sia accurate misurazioni di distanza attraverso l'entità dello sfasamento del segnale riflesso dal prisma, sia misurazioni di distanza senza l'uso del prisma tramite la metodologia ad impulsi, basata sulla determinazione del 'tempo di volo' del segnale elettromagnetico.

A quel tempo una tale strumentazione doveva essere sicuramente una novità che agevolò e velocizzò notevolmente il lavoro di rilievo.

L'Angelini ci informa che tale strumentazione moderna gli era stata messa a disposizione dal Museo Archeologico di Rimini con il quale egli ha collaborato per portare a termine il suo studio sull'arco.

La scala di riferimento per tutto il suo rilievo è di 1:20, idonea per un'approfondita analisi del monumento anche nei suoi particolari, in questa mia tesi comunque ho ritenuto necessario riportare alcuni particolari in tale scala, mentre riporto l'intera struttura in una scala ridotta a 1:100 ( 1:50 nelle tavole allegate ).

Tramite il distanziometro sono stati collimati numerosi punti sulle due facciate dell'arco di cui misurandone la distanza, angolo azimutale e zenitale sono state ricavate in fase di elaborazione le coordinate spaziali x,y,z di tutti i punti collimati. Tali numerevoli punti di coordinate note sono stati poi usati come punti fotogrammetrici di appoggio per l'orientamento delle prese realizzate con assetto pseudo-normale ai due fronti dell'arco.

Per fissare un sistema di riferimento con un assetto verticale e parallelo alle due facciate sono stati usati i seguenti artifici:

sono stati posizionati dei fili a piombo sulle facciate in modo da poter controllare continuamente le linee verticali; inoltre per garantire il

parallelismo fra il piano della pellicola e la facciata del monumento sono state posizionate sulla pavimentazione delle fettucce, perfettamente parallele al fronte dell'arco, in modo da avere una continua verifica planimetrica della distanza tra l'apparecchio fotografico e la struttura da rilevare, nonché un continuo controllo dell'assetto della camera.

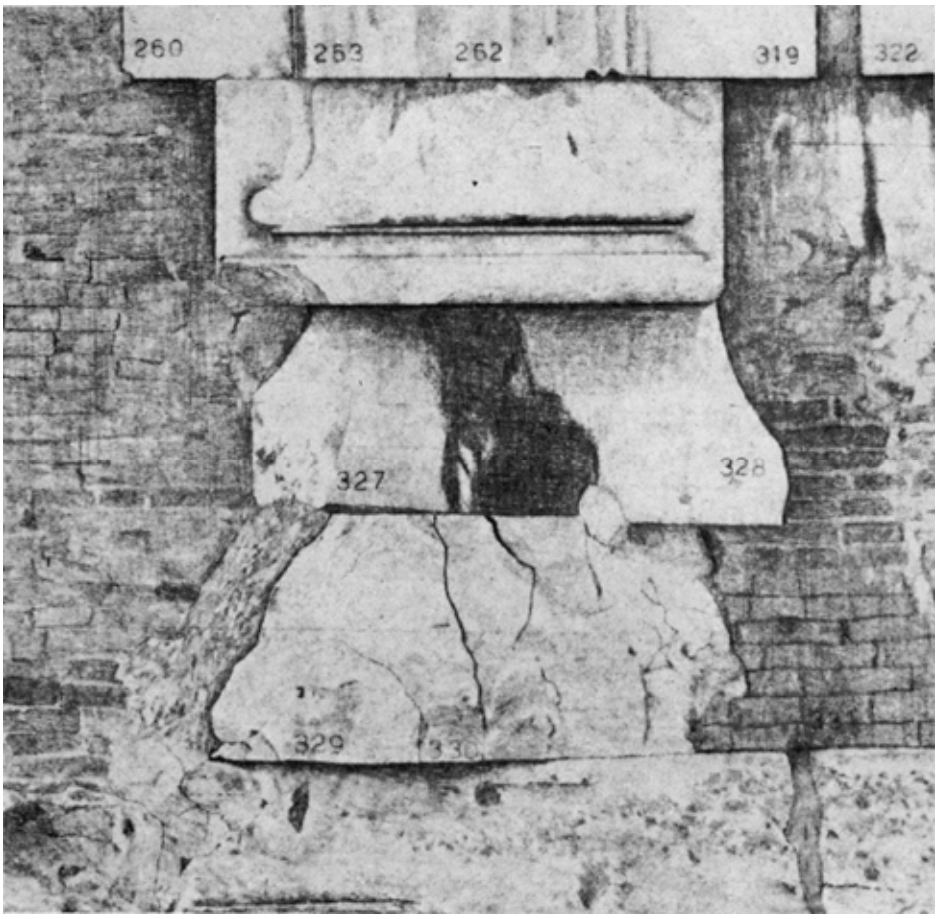



Figura 2.88 – Rilievo di Roberto Angelini, 1982. Particolare del basamento del piedritto a lato mare, danneggiato dall'esplosione di una mina fatta brillare dai tedeschi in ritirata nel 1944. Il particolare qui riportato appartiene al fronte prospiciente verso l'interno della città. Scala rilievo 1:20

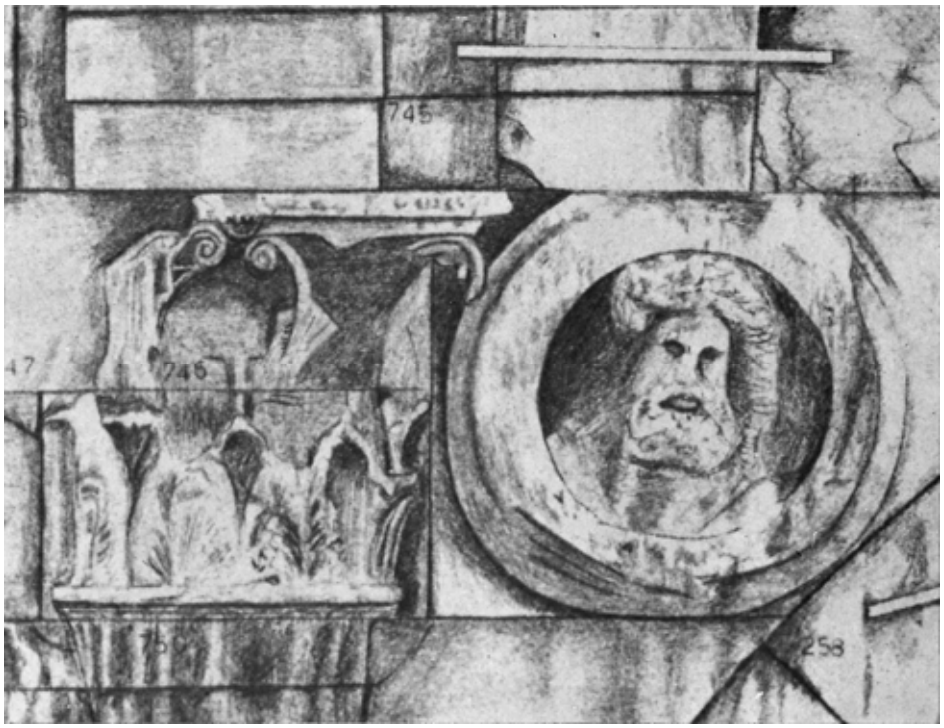


Figura 2.89 - Rilievo di Roberto Angelini, 1982. Particolare raffigurante il clipeo con la testa di Giove. Scala rilievo 1:20
Il particolare qui riportato appartiene al pronte prospiciente verso Roma.

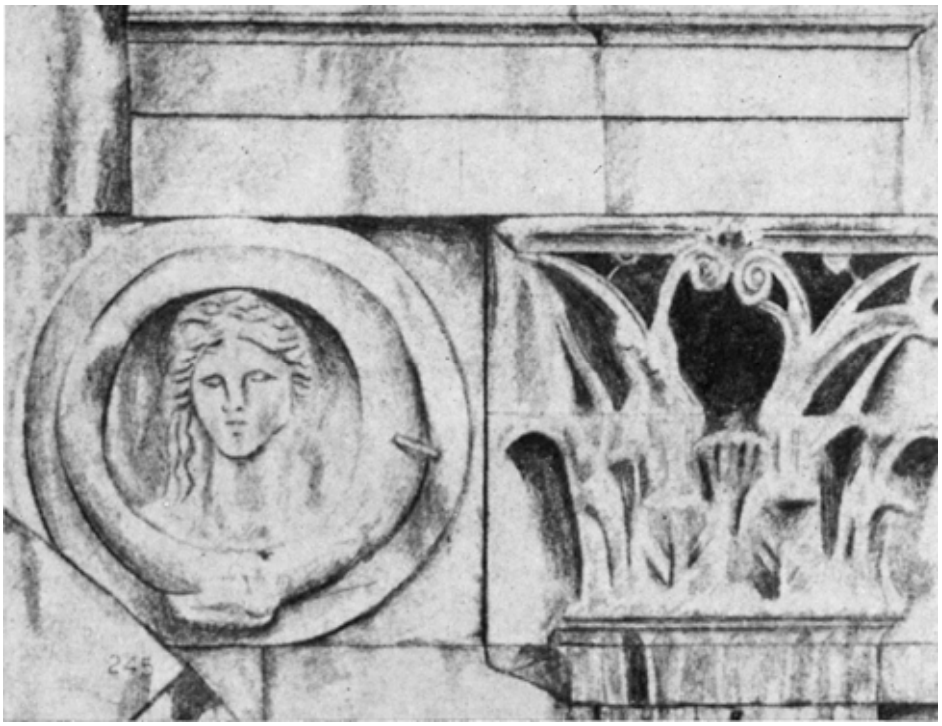


Figura 2.90 - Rilievo di Roberto Angelini, 1982. Particolare raffigurante il clipeo con la testa di Apollo. Scala rilievo 1:20
Il particolare qui riportato appartiene al pronte prospiciente verso Roma.

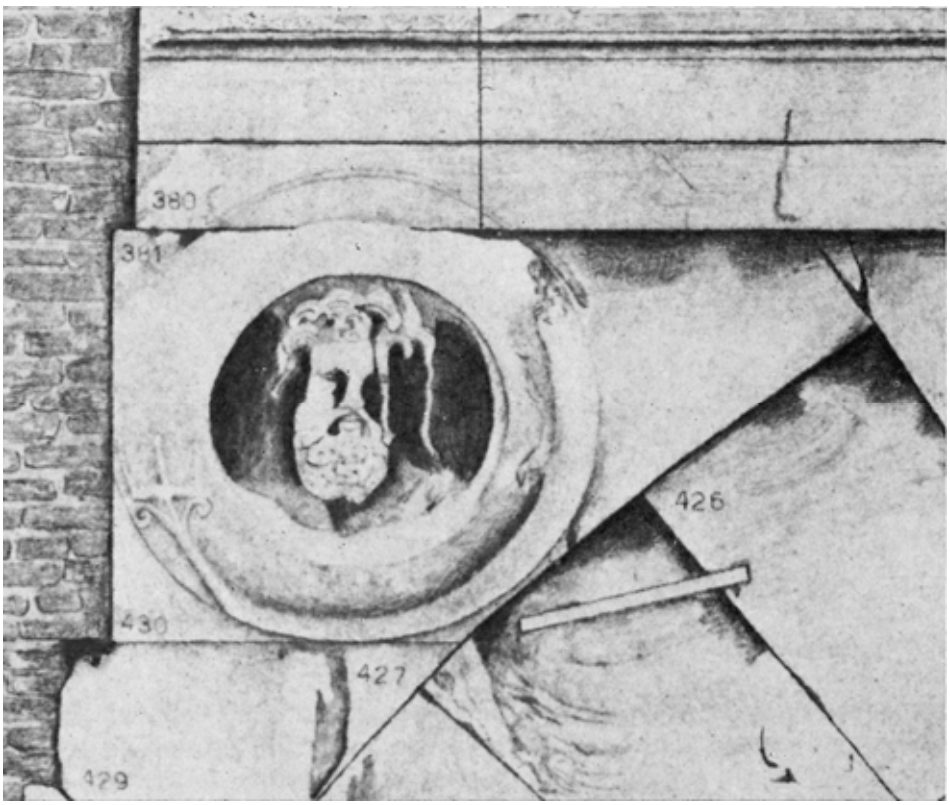



Figura 2.91 - Rilievo di Roberto Angelini, 1982. Particolare raffigurante il clipeo con la testa di Nettuno. Scala rilievo 1:20
Il particolare qui riportato appartiene al pronte prospiciente verso Rimini.

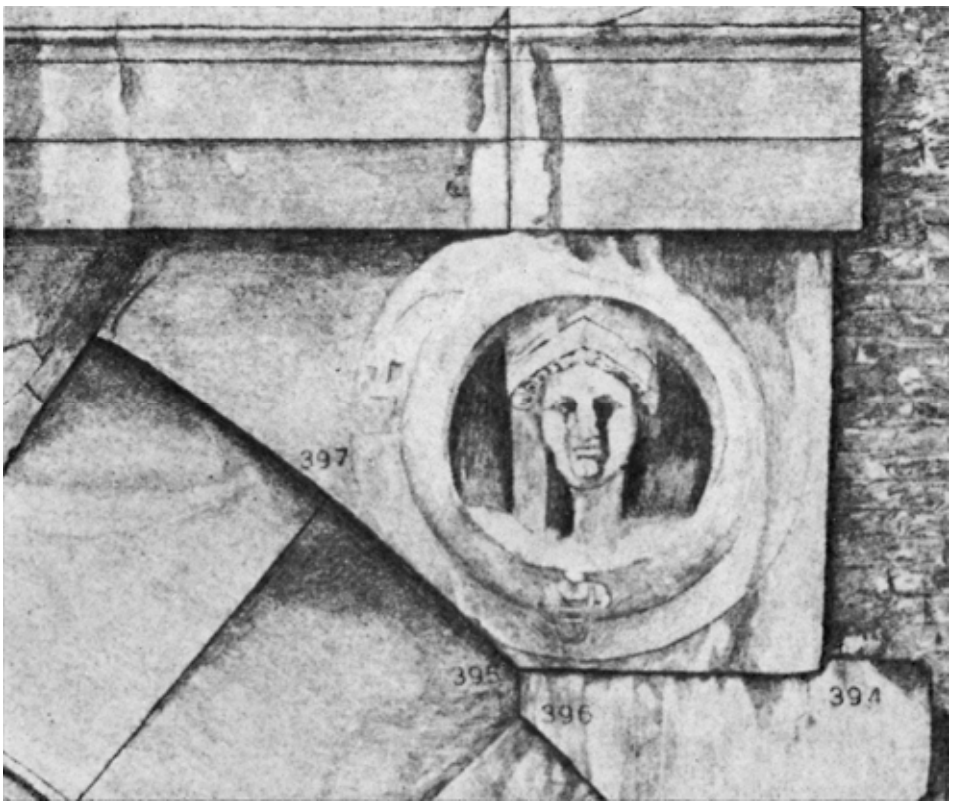



Figura 2.92 - Rilievo di Roberto Angelini, 1982. Particolare raffigurante il clipeo con la testa di Roma. Scala rilievo 1:20
Il particolare qui riportato appartiene al pronte prospiciente verso Rimini.

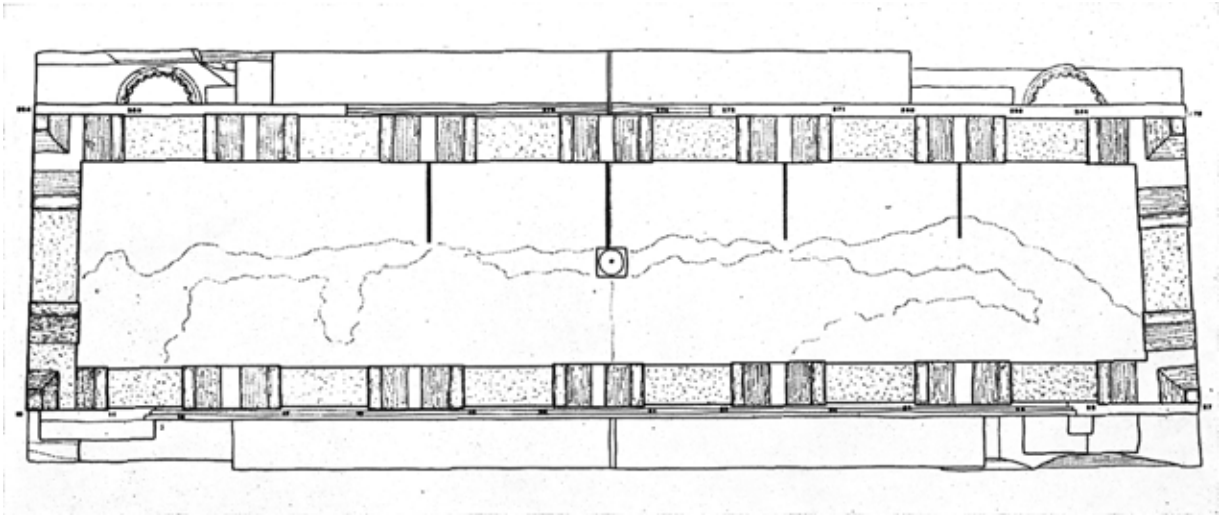


Figura 2.93 – Rilievo di Roberto Angelini, 1982.
Pianta dell'arco d'augusto di Rimini alla quota dell'attico.

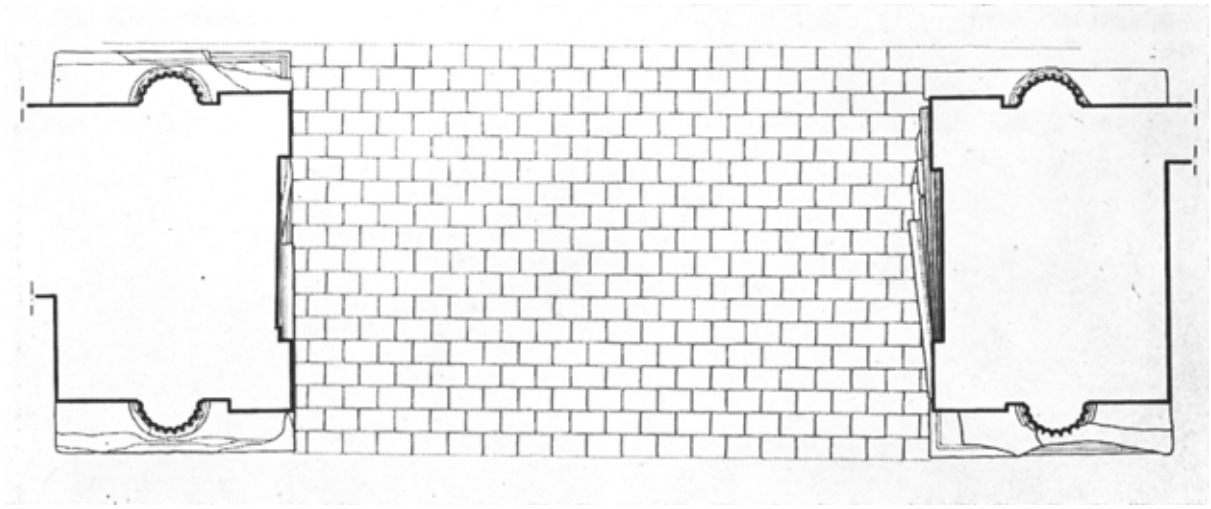


Figura 2.94 – Rilievo di Roberto Angelini, 1982.
Pianta dell'arco d'Augusto di Rimini alla quota del basamento.

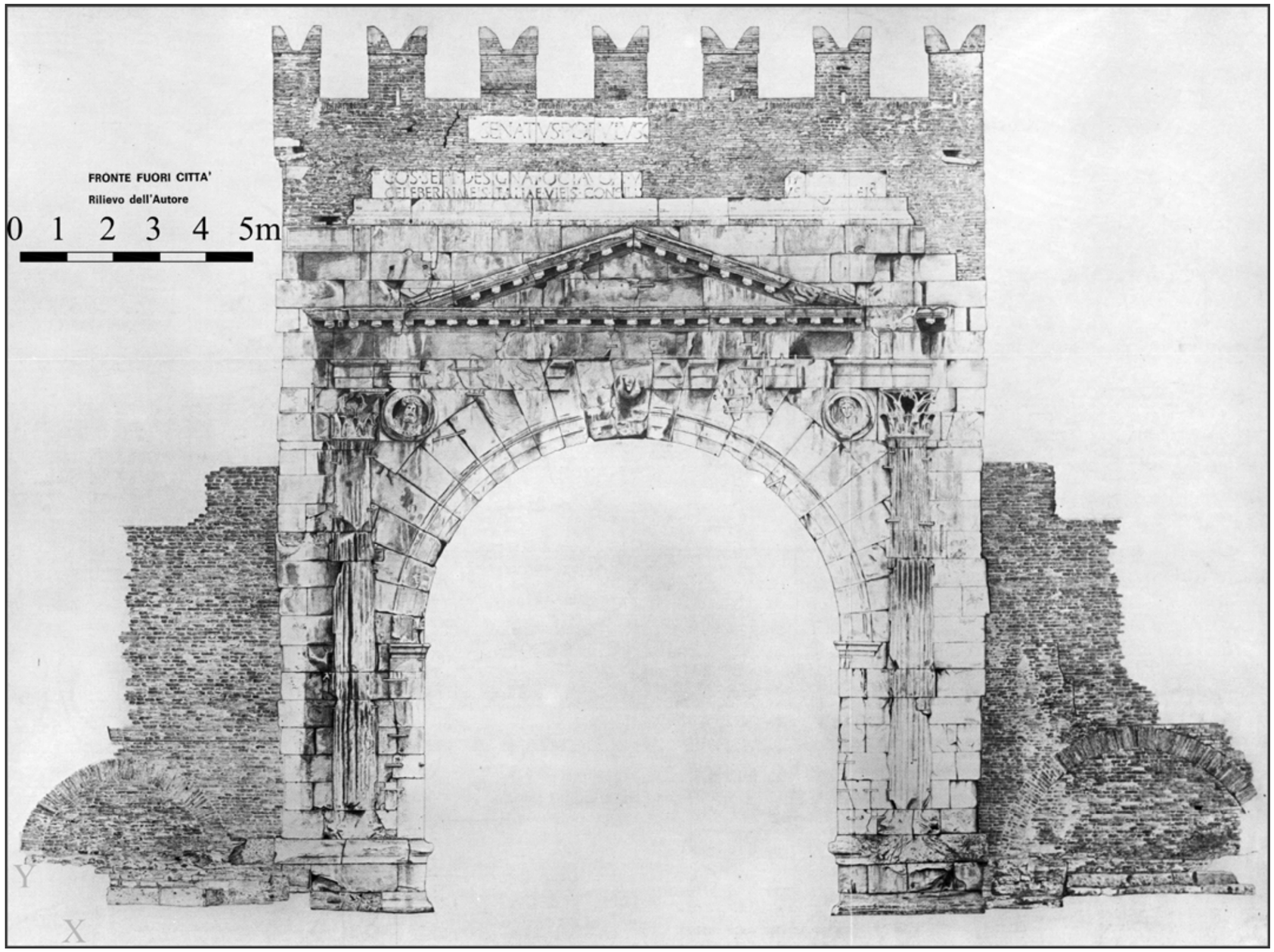



Figura 2.95 - Rilievo di Roberto Angelini, 1982.
Prospetto verso Roma dell'arco d'Augusto di Rimini. Scala 1:100

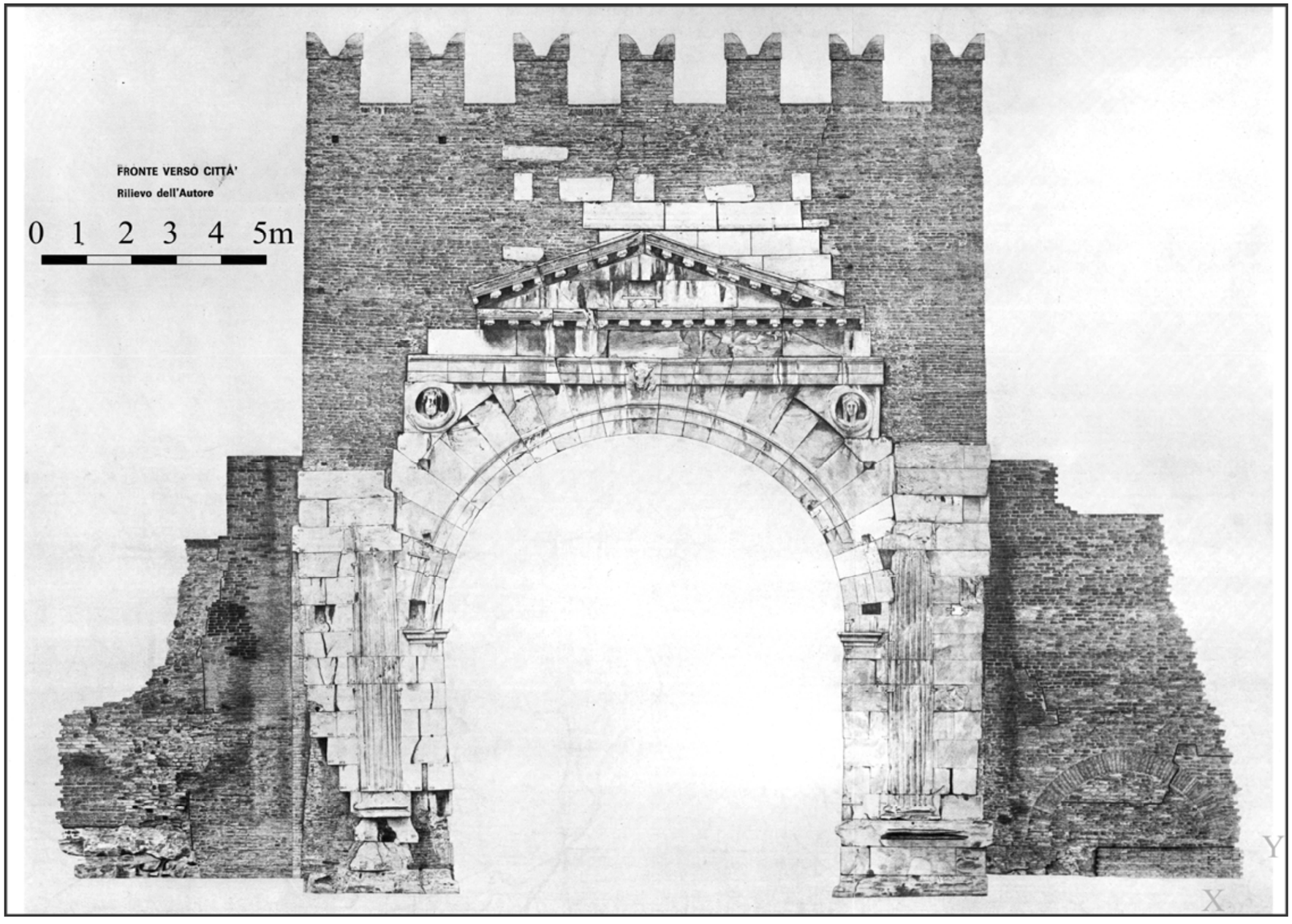



Figura 2.96 - Rilievo di Roberto Angelini, 1982.
Prospetto verso Rimini dell'arco d'Augusto di Rimini. Scala 1:100

## *2.5.2 Il rilievo di Guido Achille Mansuelli eseguito nel 1942.*

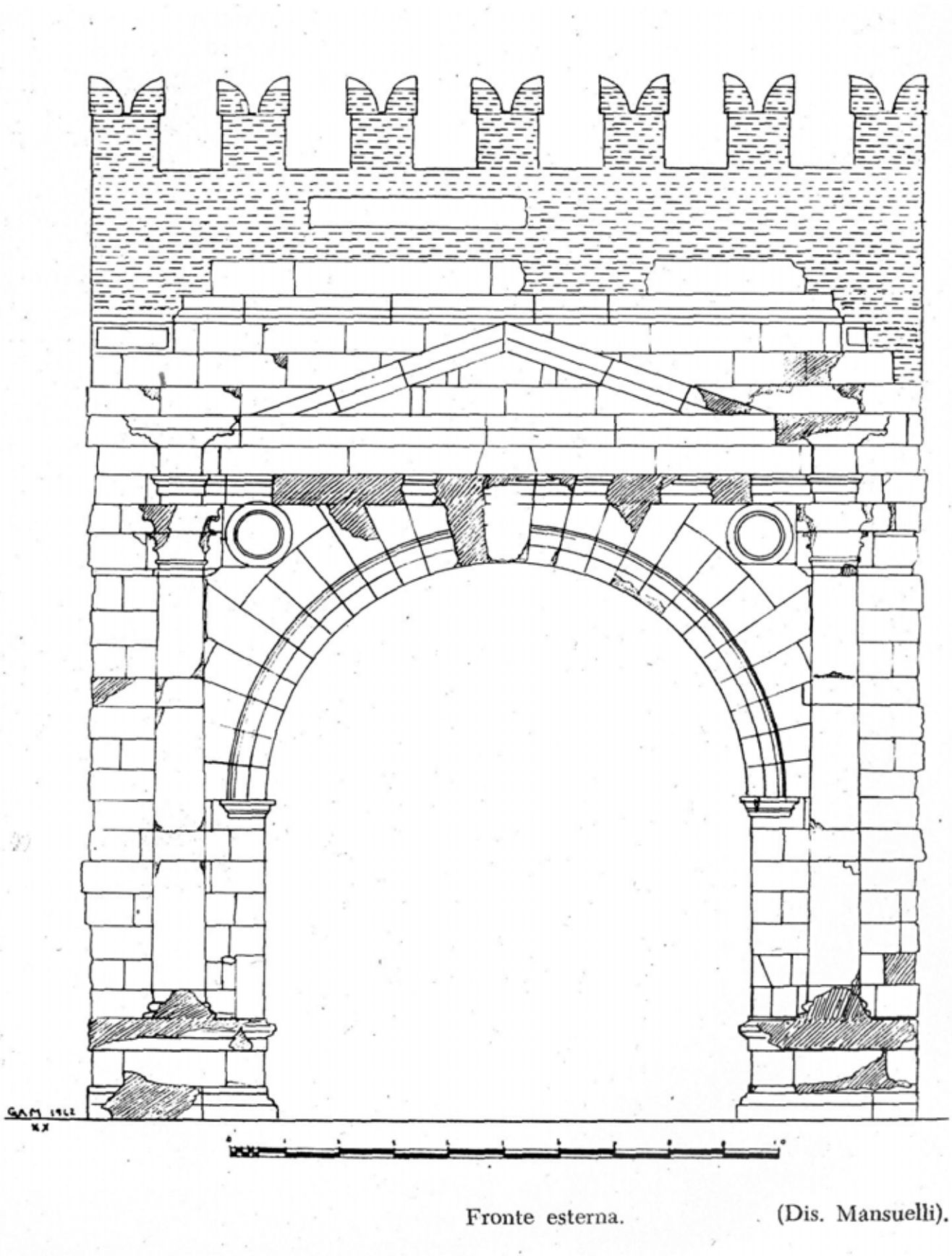



Figura 2.97 – Rilievo di Guido Achille Mansuelli, 1942.
Prospetto verso Roma dell'arco d'Augusto di Rimini. Scala 1:100

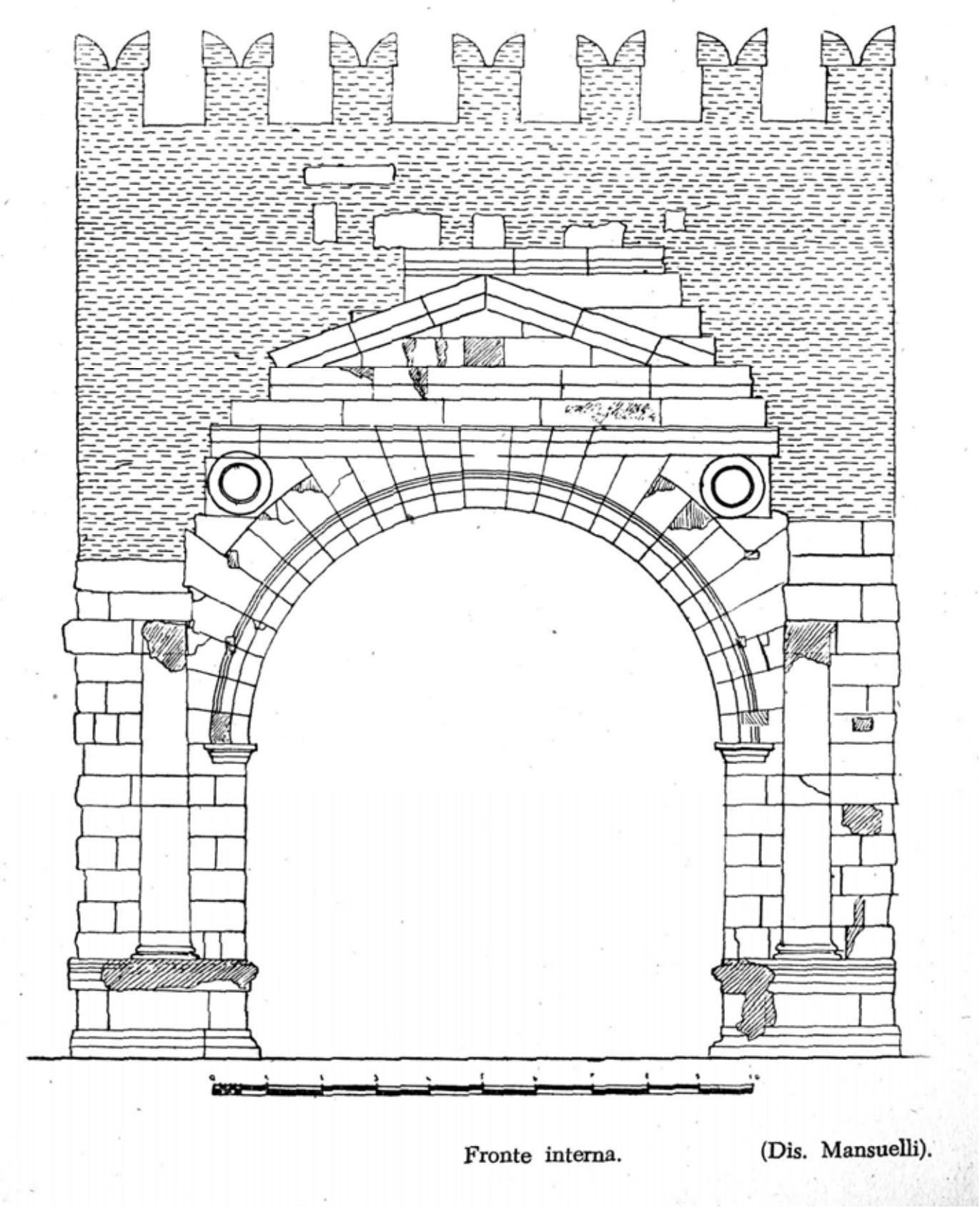



Figura 2.98 - Rilievo di Guido Achille Mansuelli, 1942.
Prospetto verso Rimini dell'arco d'Augusto di Rimini. Scala 1:100

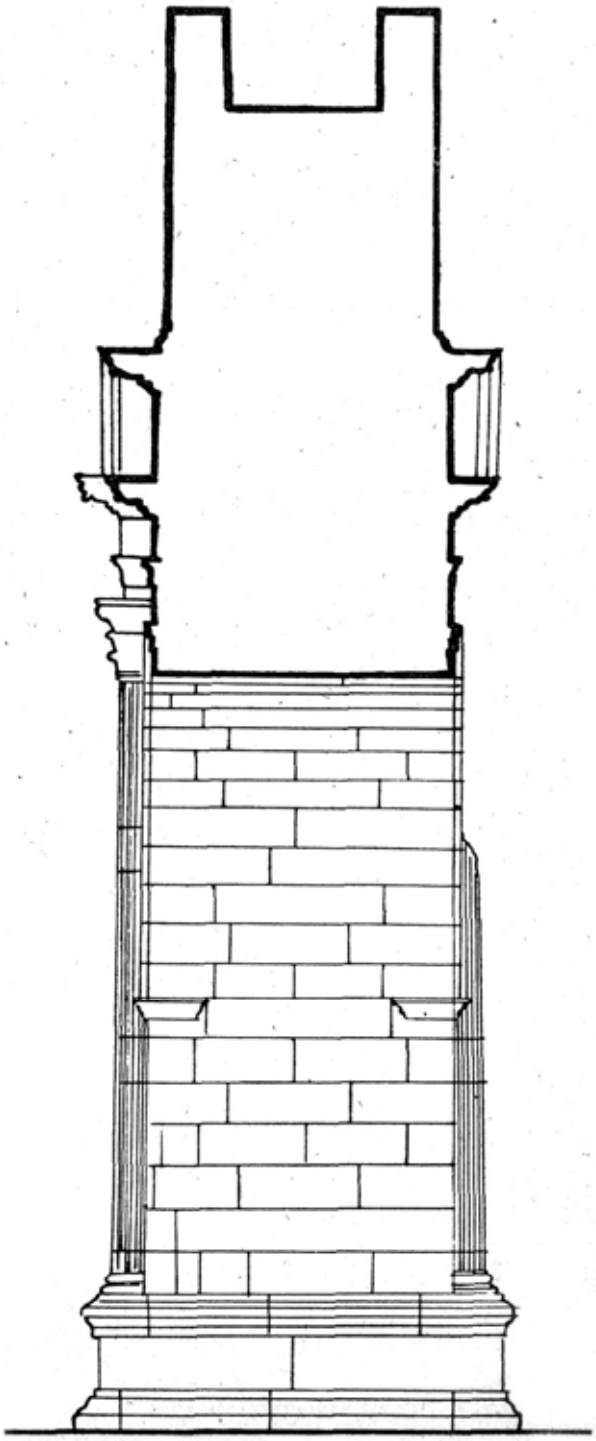



Figura 2.99 - Rilievo di Guido Achille Mansuelli, 1942.
Sezione verticale passante per il concio di chiave. Visione del piedritto a lato monte.
Scala 1:100

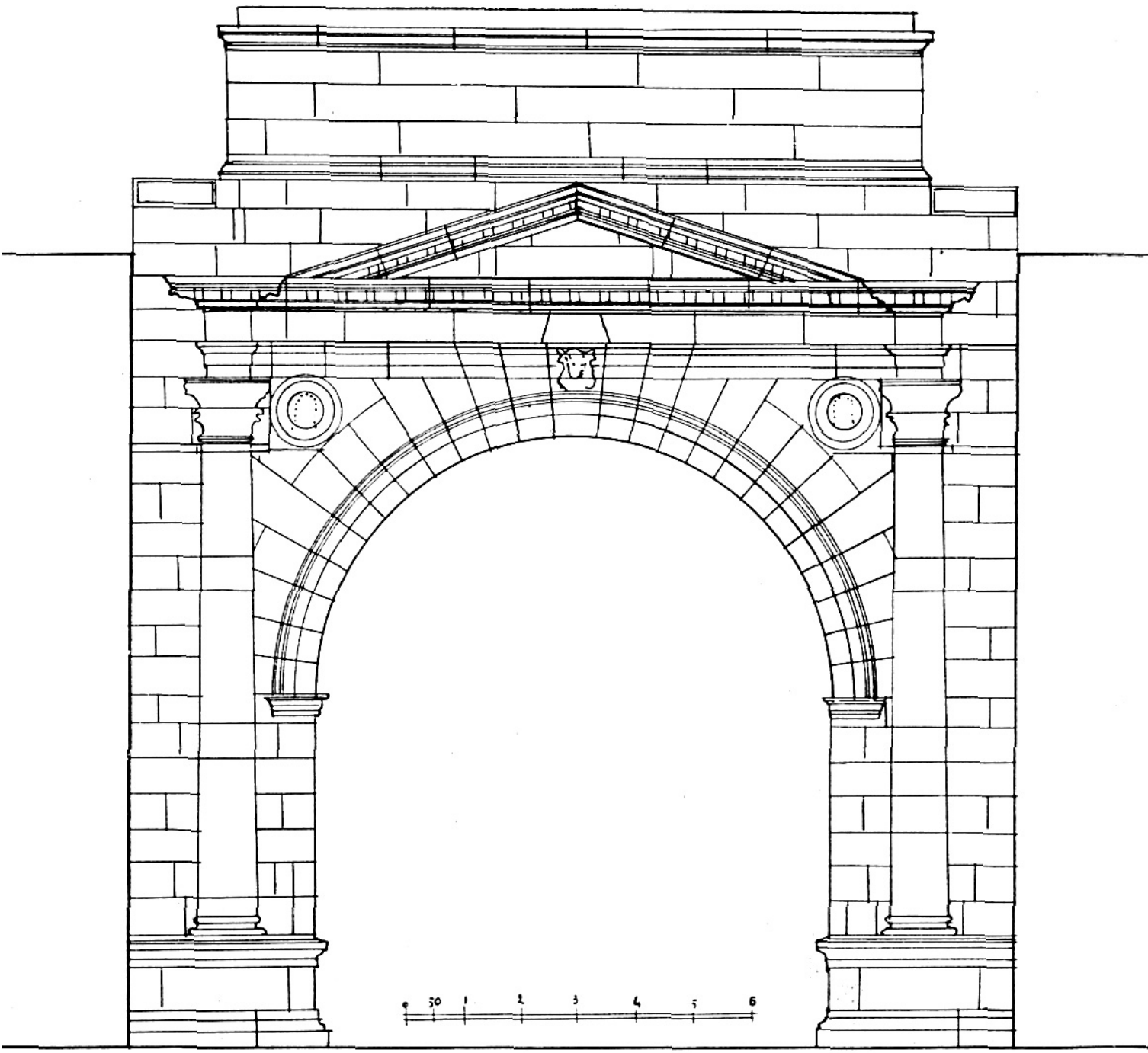



Figura 2.100 – Ricostruzione pittorica dell'arco d'Augusto di Rimini secondo G.A. Mansuelli. 1942.
In questa ricostruzione è possibile notare anche l'altezza delle antiche torri lapidee ( in blocchi di arenaria ) quadrangolari di origine romana ( III secolo a.C. ) adiacenti all'arco.
Scala 1:100

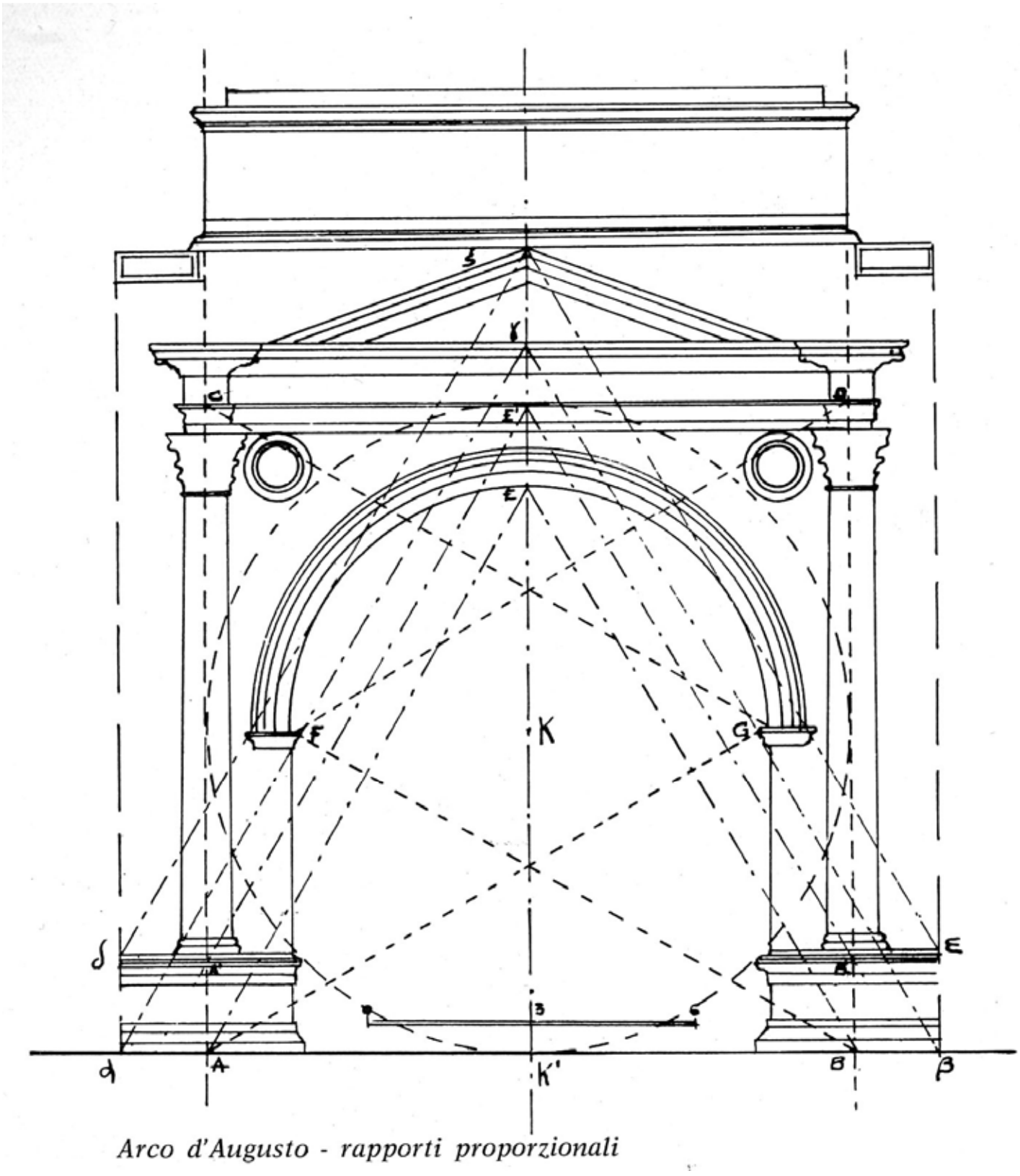



Figura 2.101 – Rapporti proporzionali dell'arco d'Augusto di Rimini
Scala 1:100

## *2.5.3 Rilievo di Traiano Finamore eseguito nel 1938*

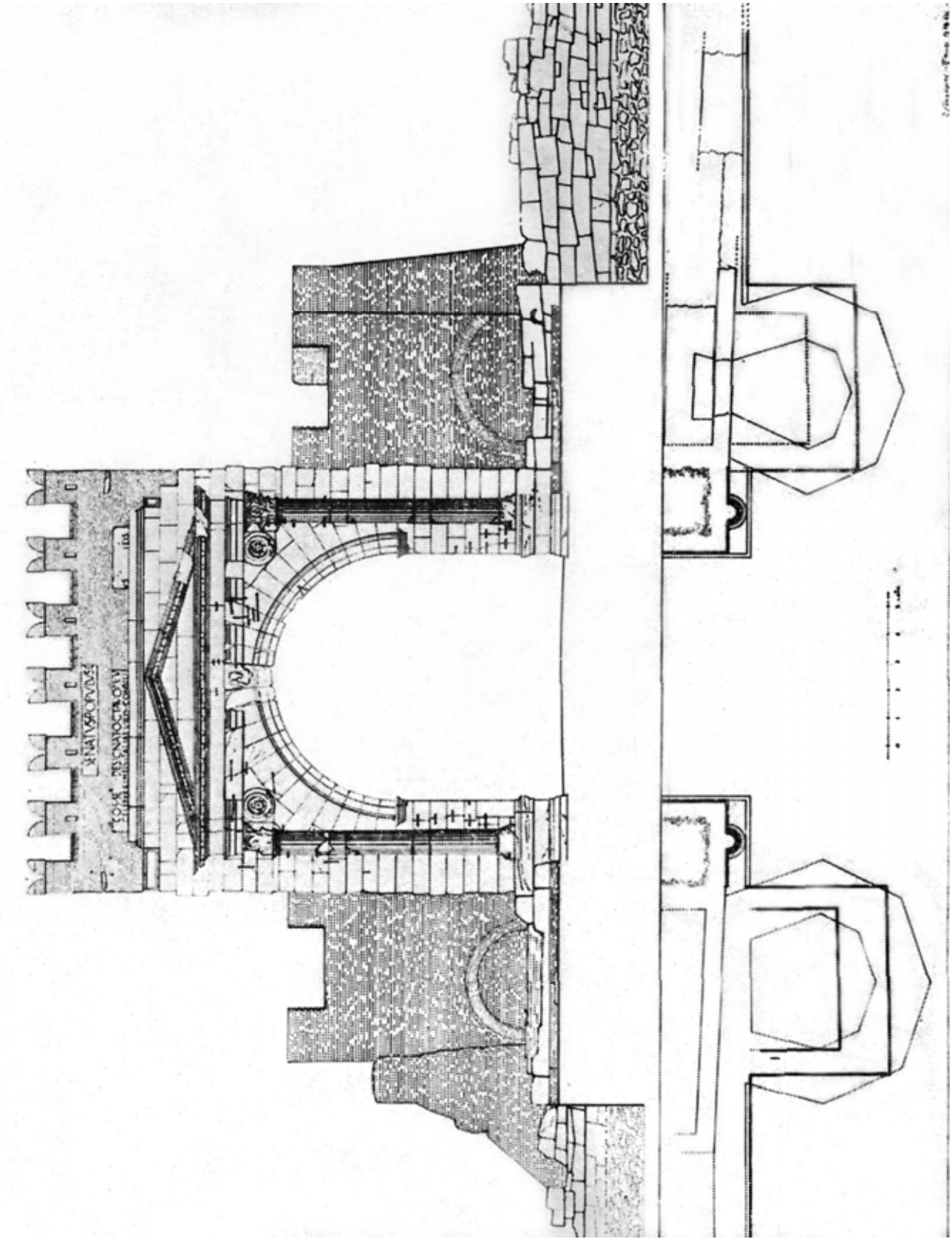
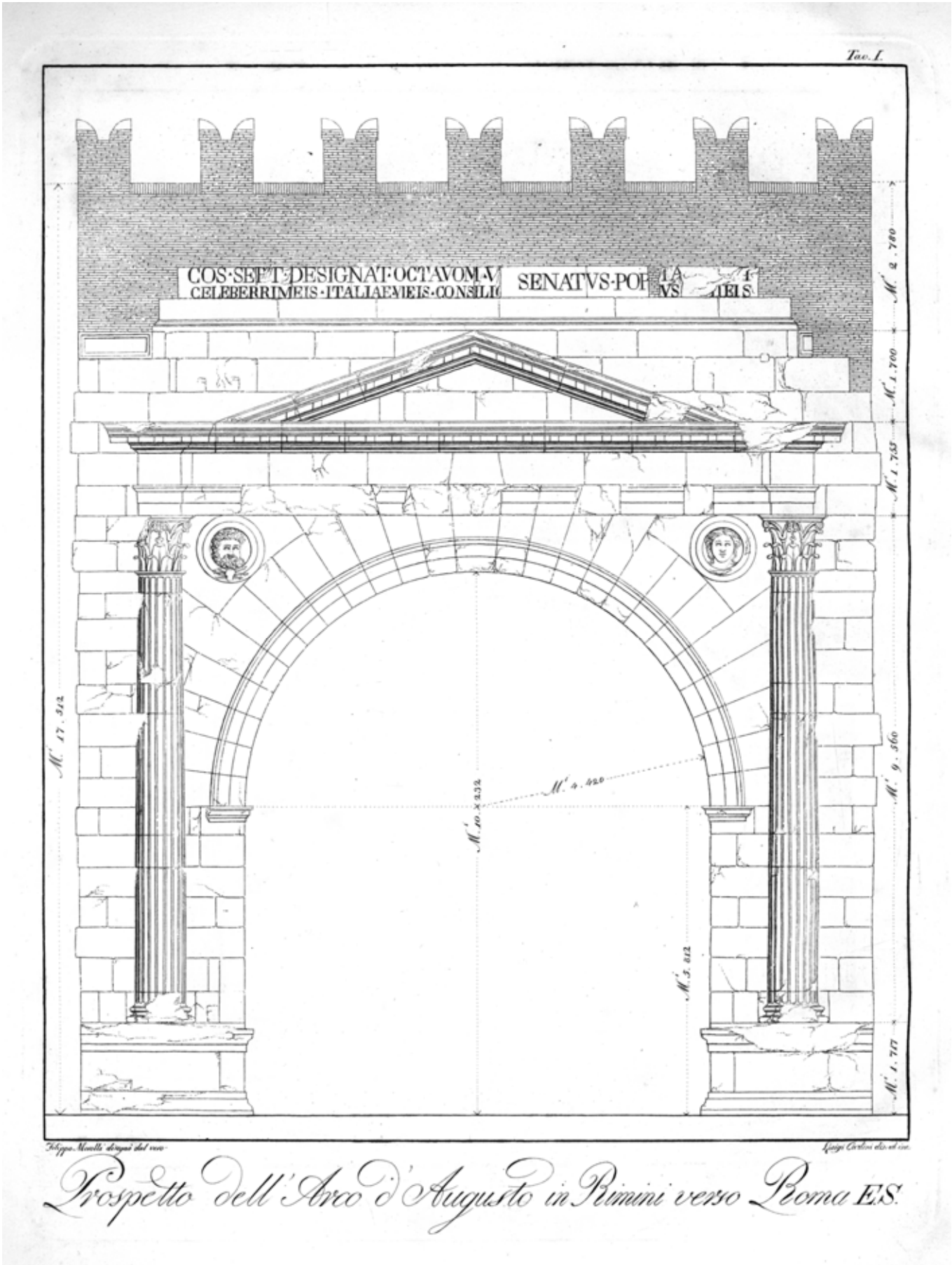


Figura 2.102 – Rilievo di Traiano Finamore. 1938
Prospetto verso Roma dell'arco D'augusto di Rimini. Scala 1:200
In pianta si possono notare i disegni dei torrioni lapidei quadrilateri romani sottostanti ai torrioni laterizi altomedievali a pianta eptagonale.

## *2.5.4 Rilievo di Maurizio Brighenti eseguito nel 1825*

Figura 2.103 – Rilievo di Maurizio Brighenti. 1825 Scala 1:100



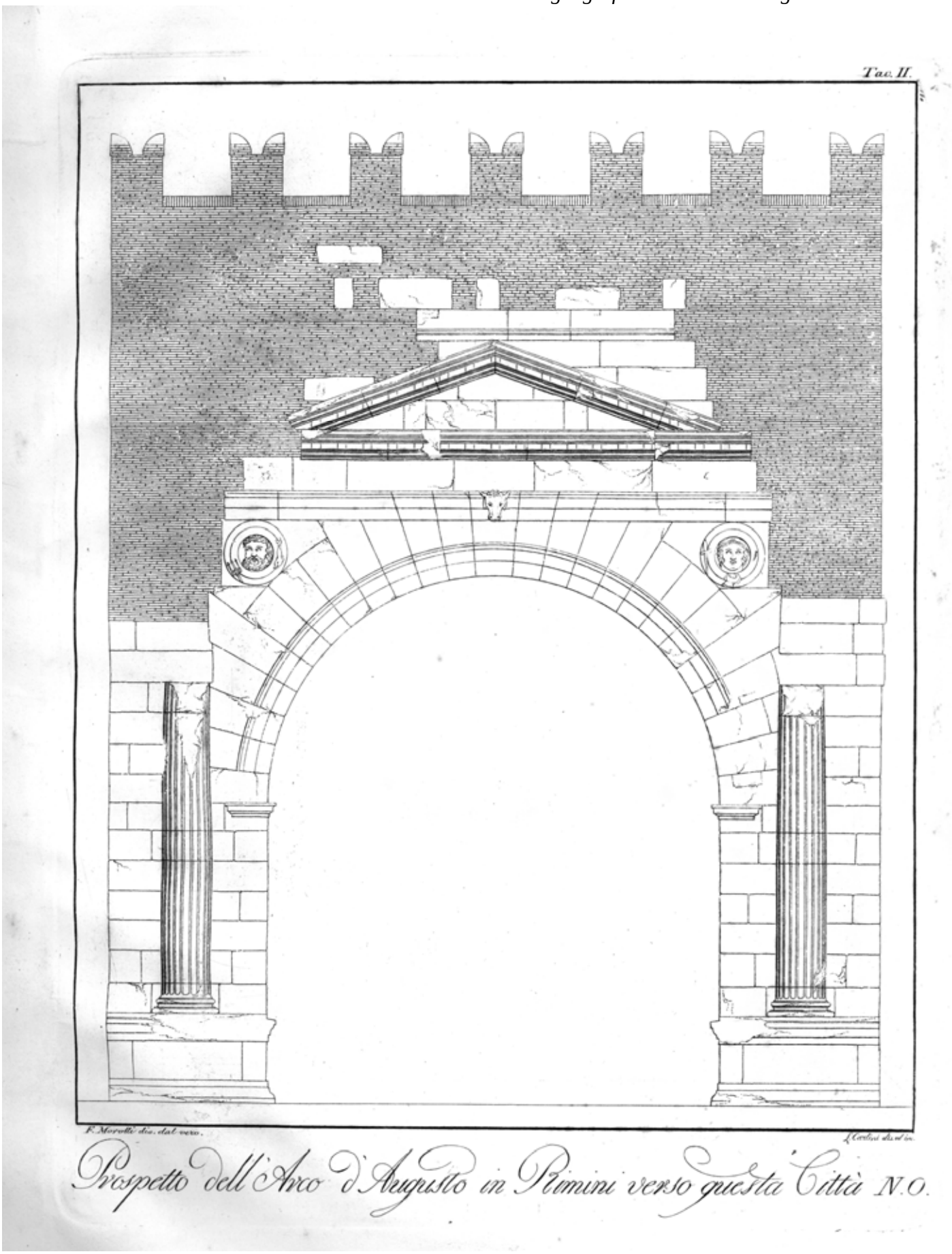



Figura 2.104 - Rilievo di Maurizio Brighenti. 1825 Scala 1:100

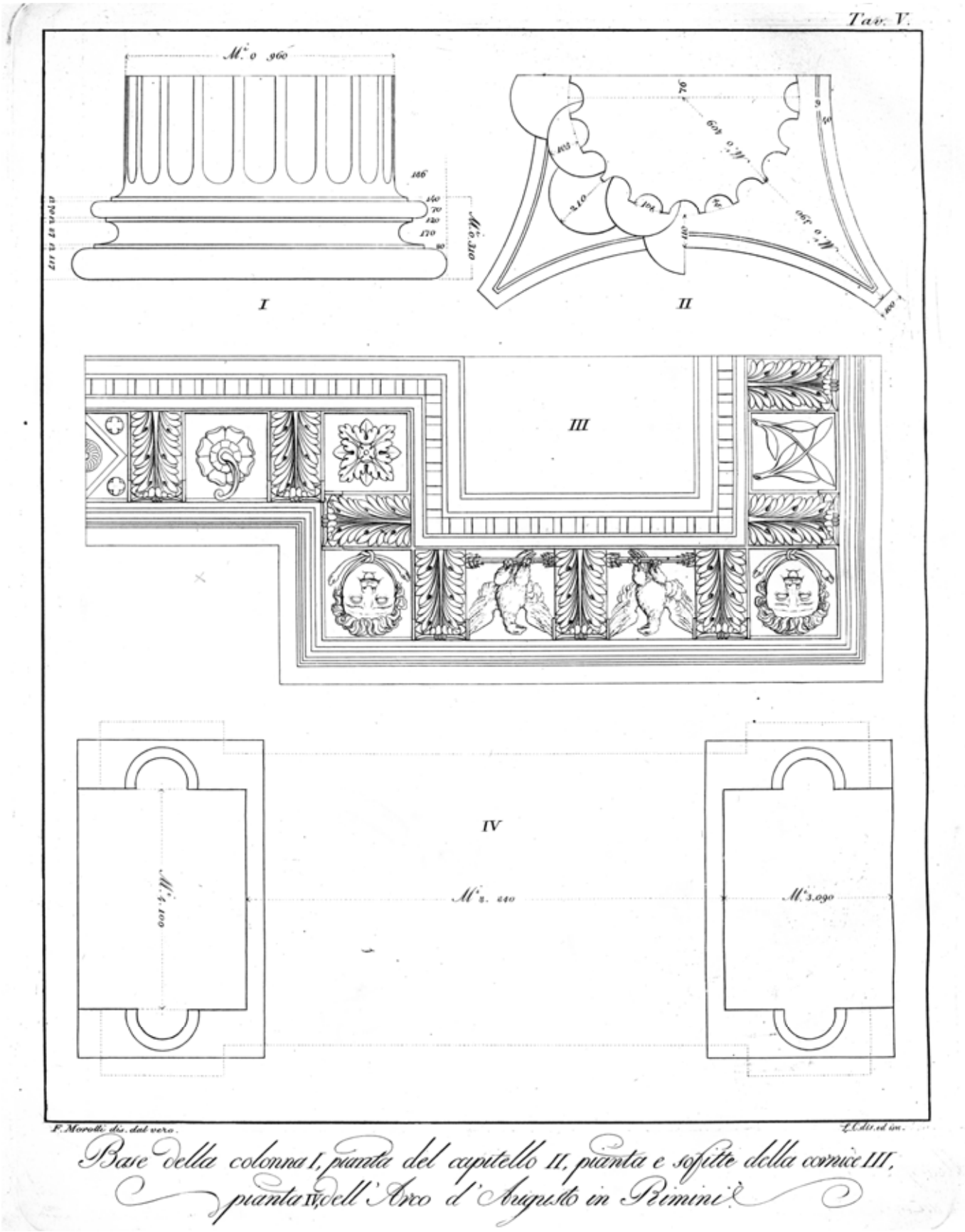



Figura 2.105 – Rilievo di Maurizio Brighenti. 1825 Scala 1:100

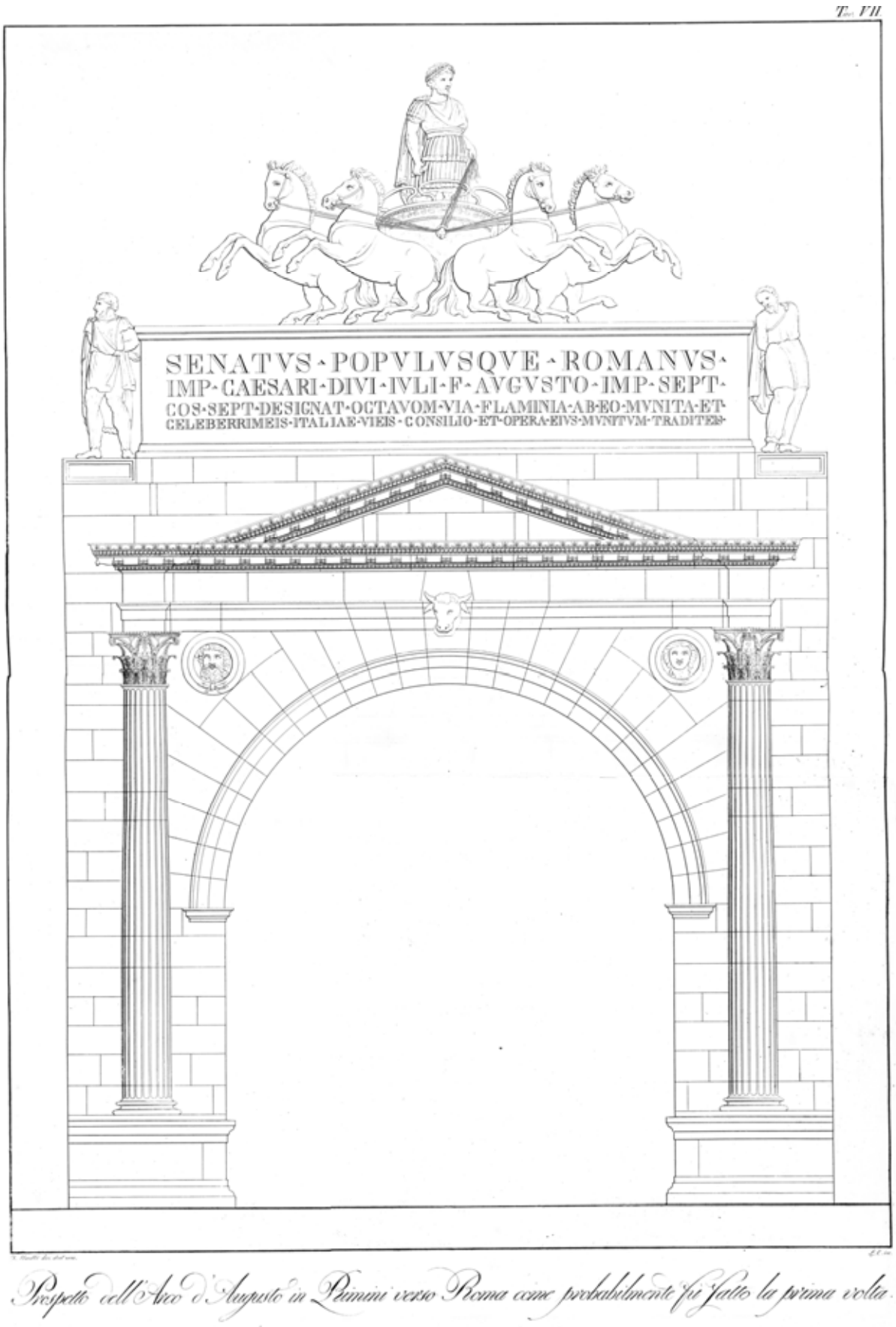



Figura 2.106 – Ricostruzione pittorica dell'arco d'Augusto di Rimini secondo Maurizio Brighenti. 1825 Questo disegno doveva servire per un'opera di restauro che poi fu bloccata da Giuseppe Valadier.

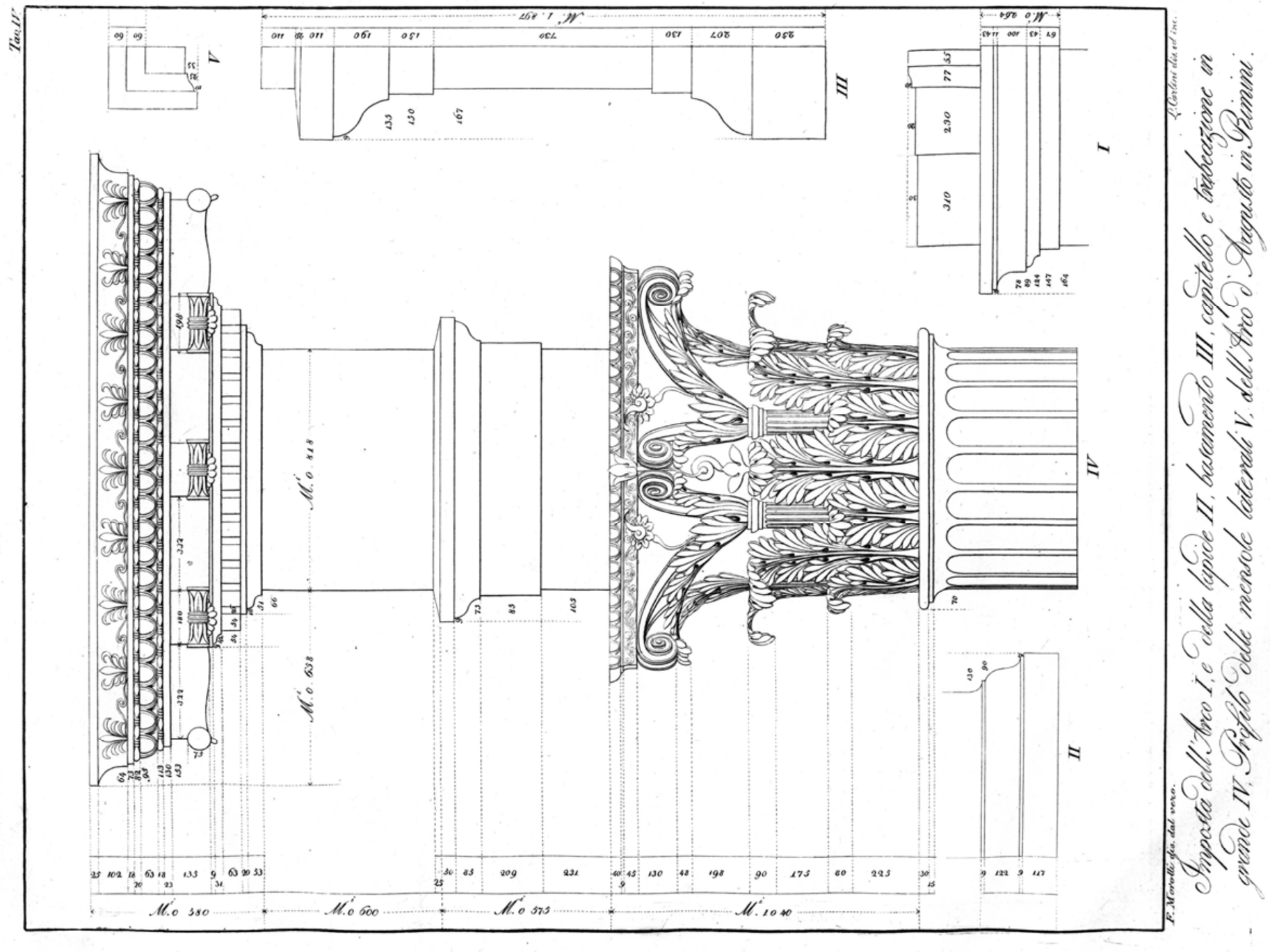



Figura 2.107 – Rilievo di Maurizio Brighenti. 1825 Scala 1:15

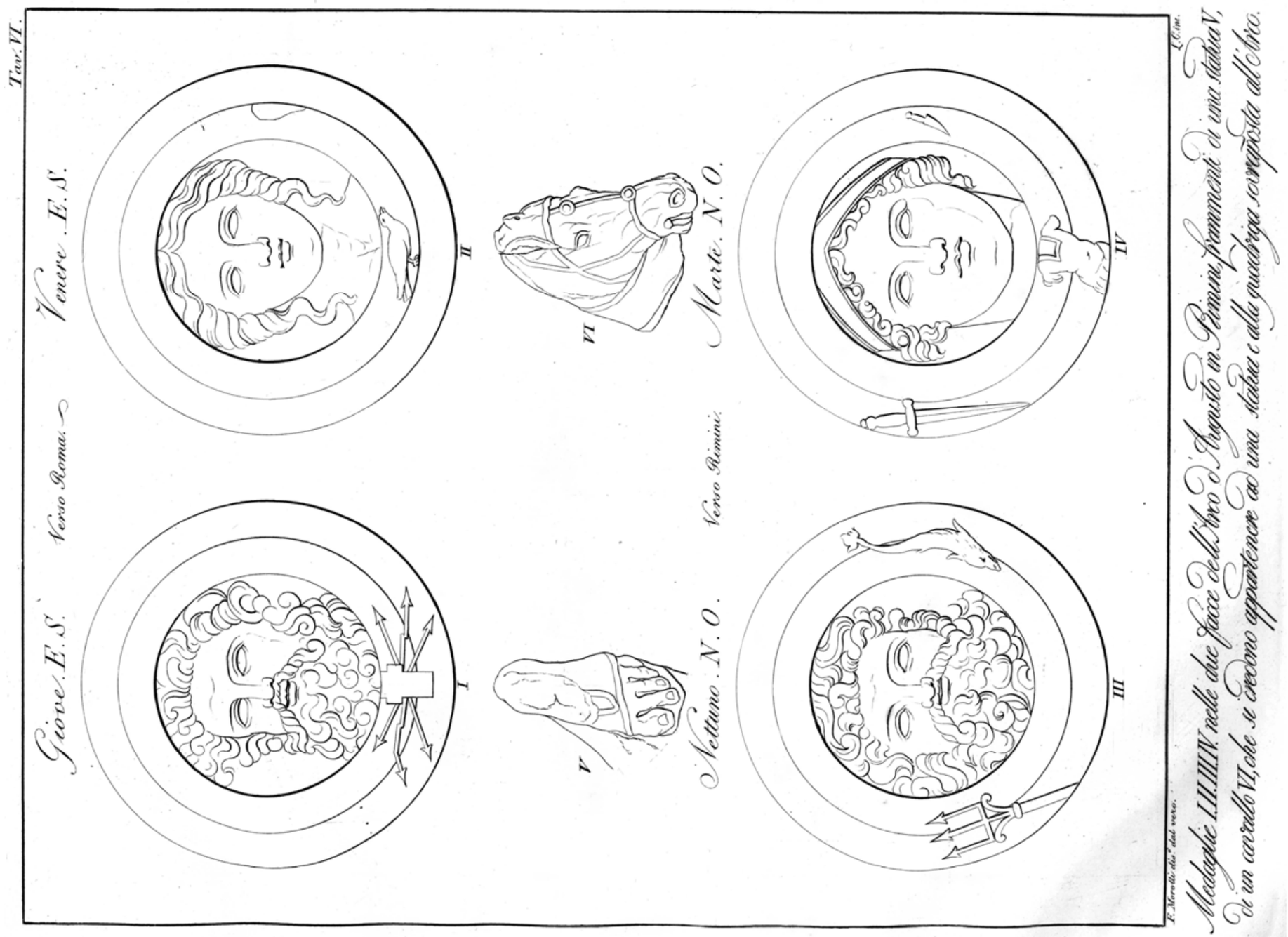



Figura 2.108 - Rilievo di Maurizio Brighenti. 1825

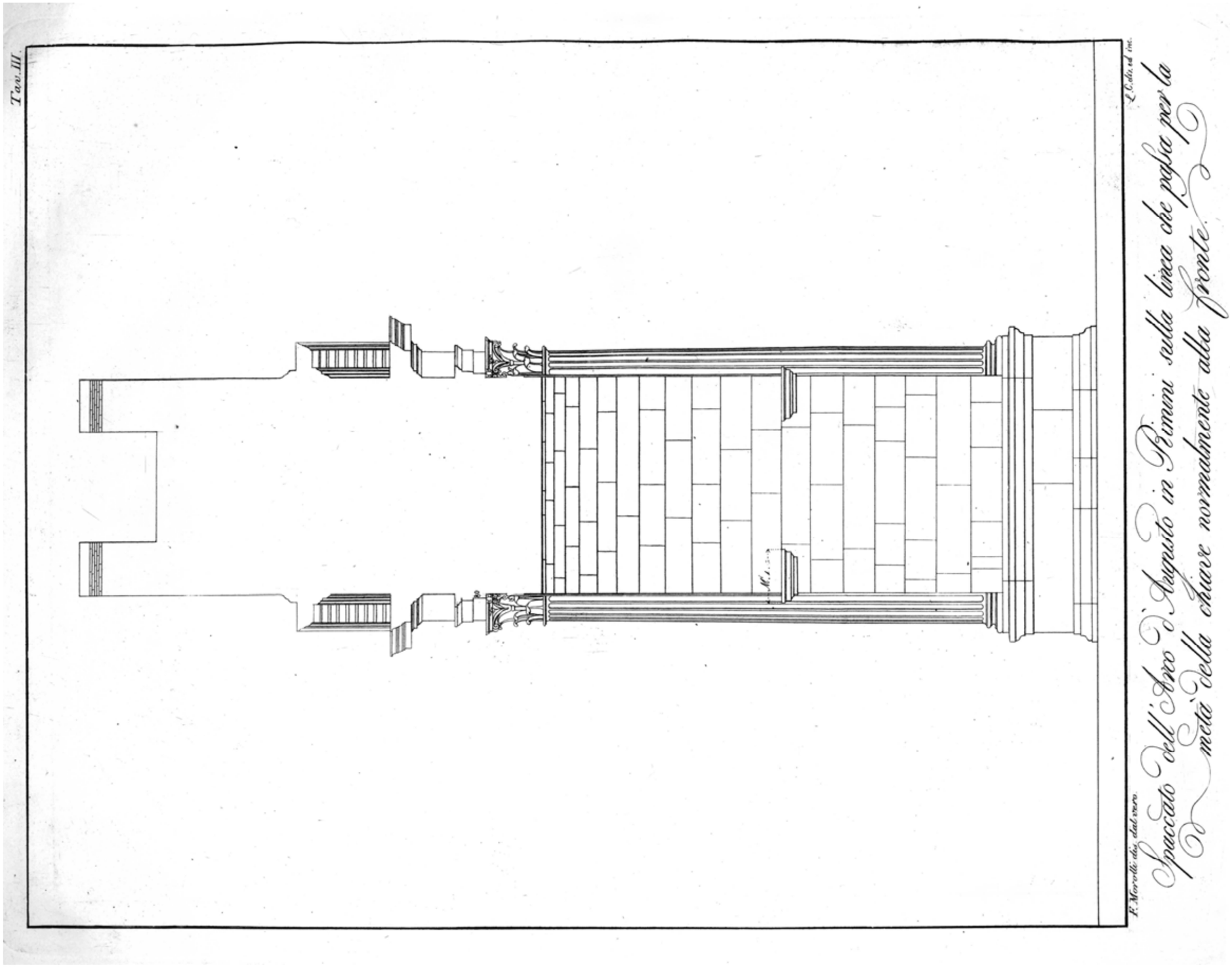



Figura 2.109 – Rilievo di Maurizio Brighenti. 1825 Sezione verticale passante per la mezzeria della volta.

### *2.5.5 Rilievo di Tommaso Temanza eseguito nel 1741*

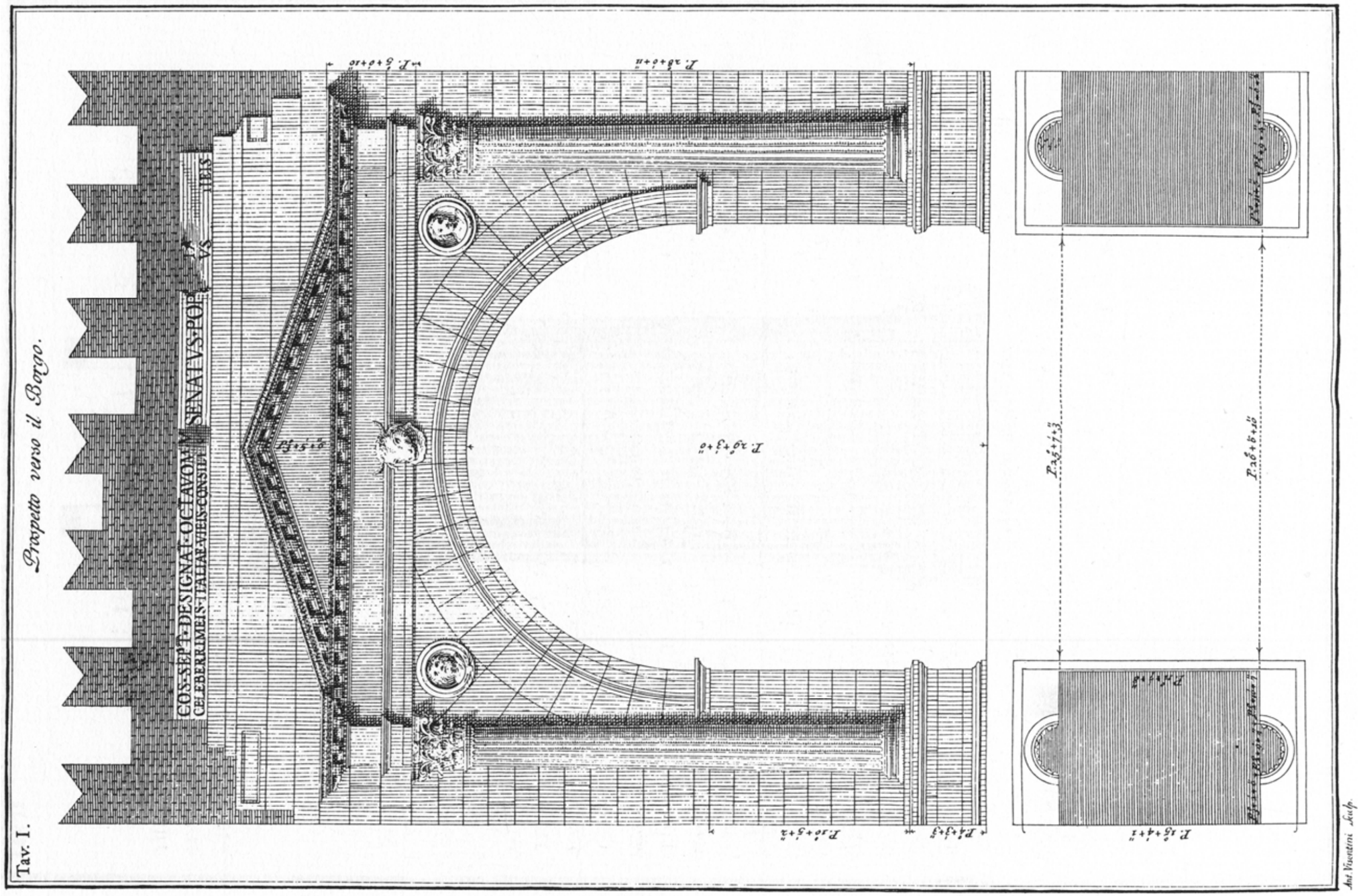



Figura 2.110 – TAV. I - Rilievo di Tommaso Temanza. 1741 Incisione di A. Visentini. Prospetto verso Roma e pianta dell'arco. Scala 115% rispetto all'originale.

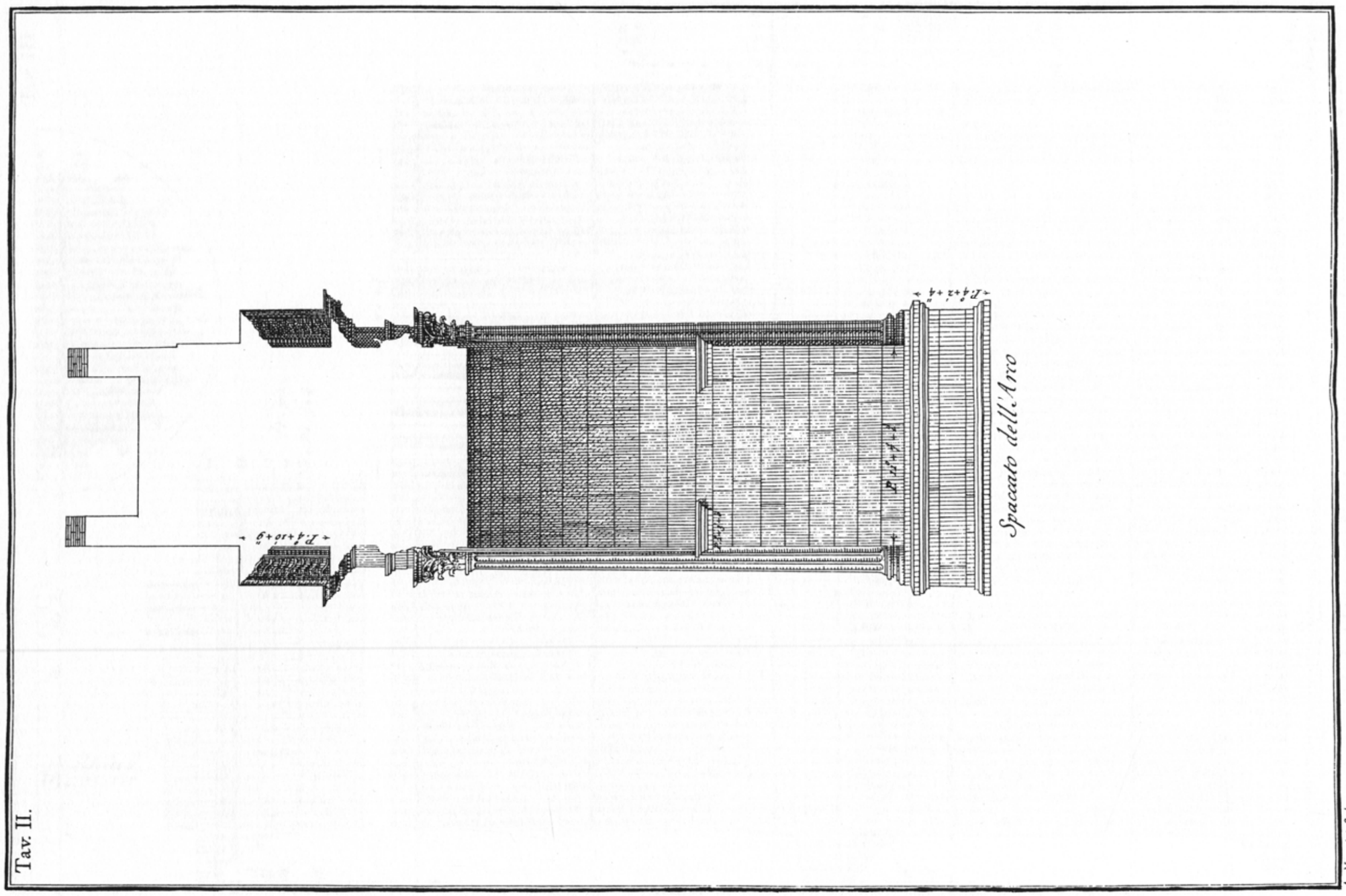



Figura 2.111 – TAV. II - Rilievo di Tommaso Temanza. 1741 Incisione di A. Visentini. Spaccato dell'arco. Scala 115% rispetto all'originale.

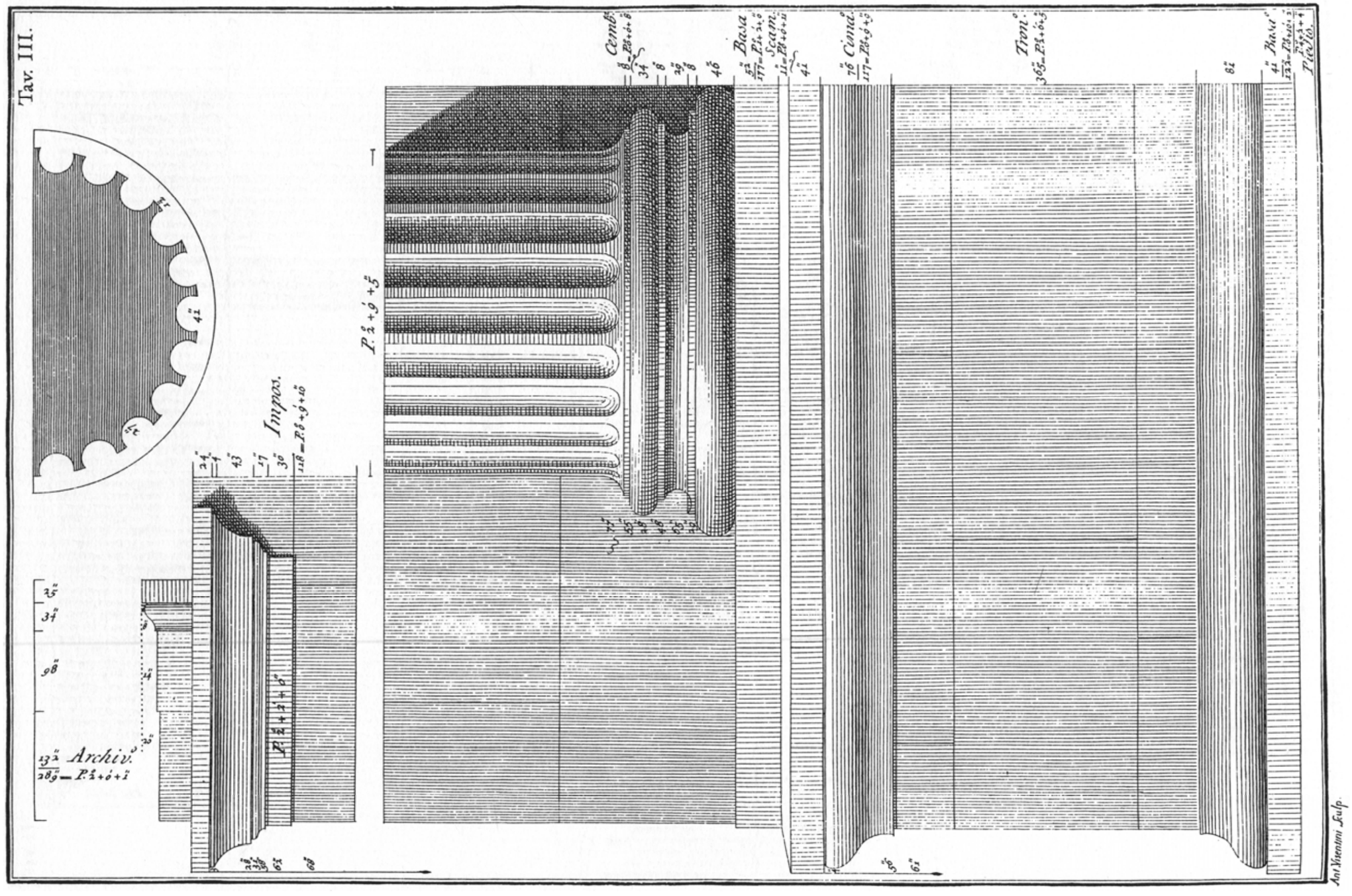



Figura 2.112 – TAV. III - Rilievo di Tommaso Temanza. 1741 Incisione di A. Visentini.
Particolare della colonna e del basamento dell'arco d'Augusto di Rimini Scala 115% rispetto all'originale.

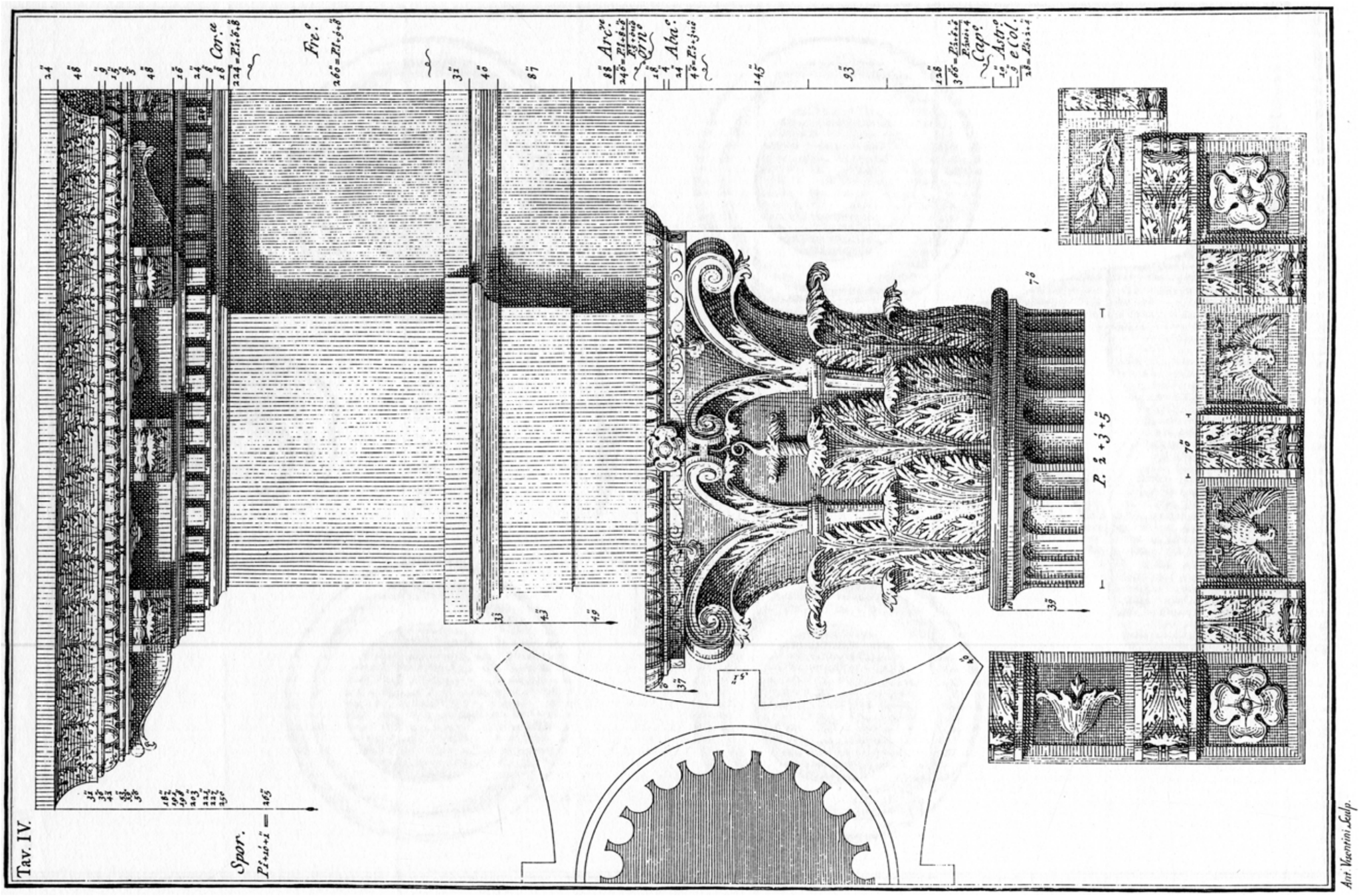



Figura 2.113 – TAV. IV - Rilievo di Tommaso Temanza. 1741 Incisione di A. Visentini. Particolare del capitello dell'arco. Scala 115% rispetto all'originale.

## *2.5.6 Il rilievo digitale del 1999*

Purtroppo su tale ultimo rilievo eseguito con moderne tecnologie non sono riuscito a rimediare alcuna informazione degna di nota, queste misure non sono state pubblicate ed al momento il Comune di Rimini sembra non voler divulgare questo studio eseguito sull'arco nel 1999.

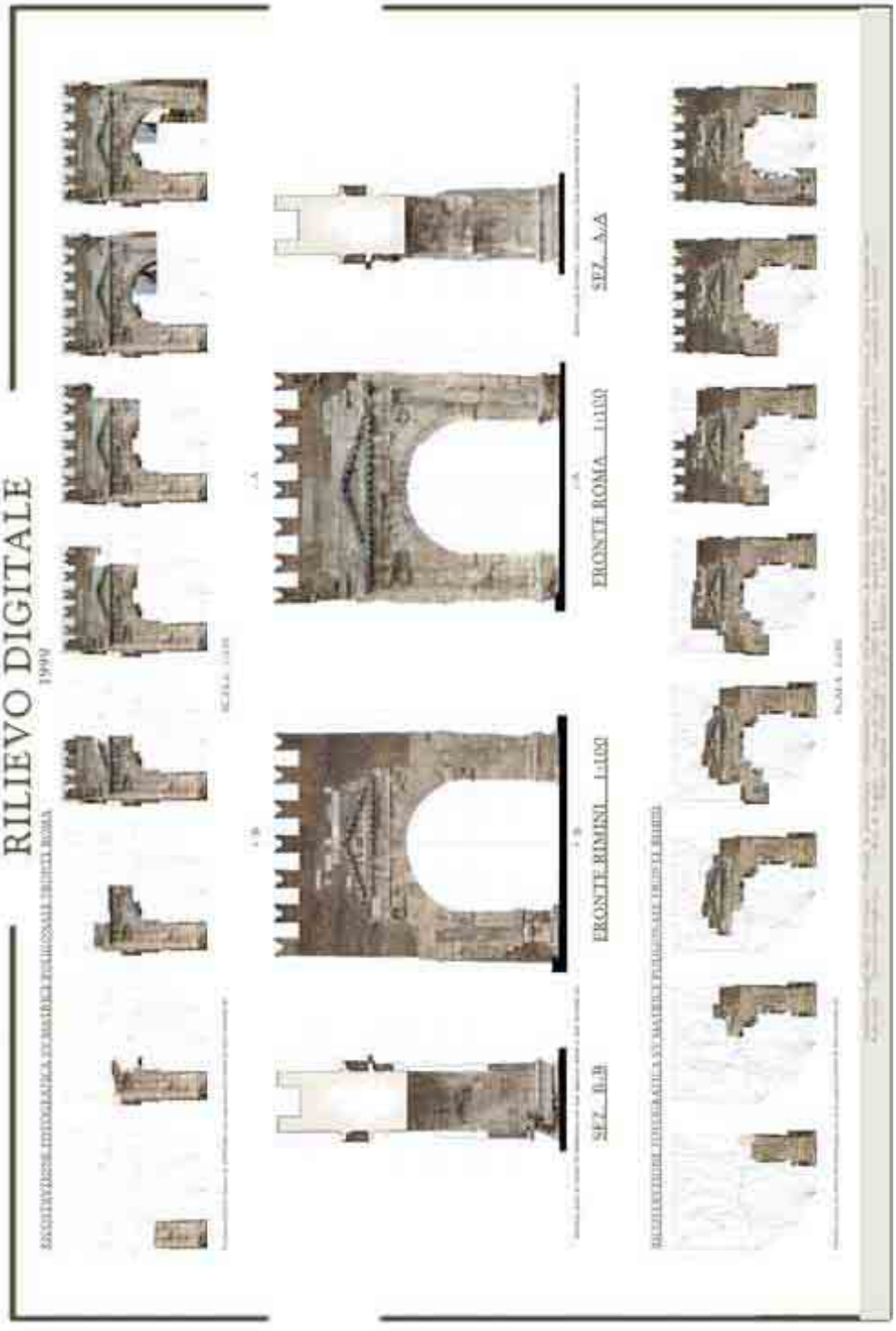



Figura 2.114 – Rilievo digitale dell'Arco d'Augusto di Rimini. 1999

Ho voluto citare questo rilievo giusto per mettere a conoscenza il lettore di questo moderno elaborato al riguardo dell'arco augusteo. Difficile è stabilire nei dettagli anche la tecnica utilizzata per eseguire questo rilievo, ma ritengo che sia stato eseguito un rilevamento fotogrammetrico dettagliato del monumento integrato mediante misurazioni fatte al laser scanning. Gli unici indizi che sono riuscito a rimediare su tali misurazioni sono solamente alcune rappresentazioni fotografiche in ortofoto ( di scadente risoluzione ) pubblicate su di una pagina web che al momento è stata cancellata.

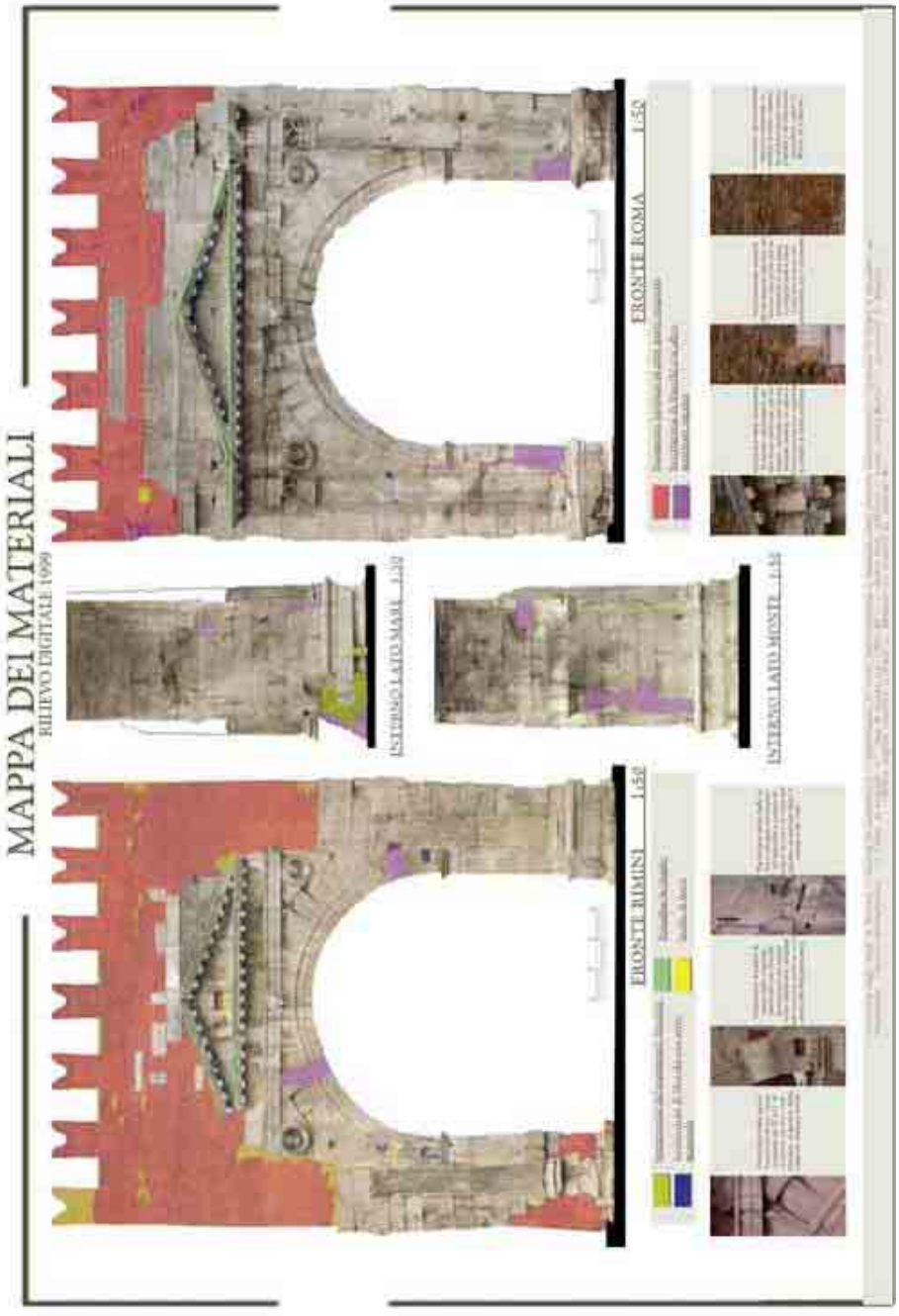



Figura 2.115
Mappa dei materiali dell'Arco d'Augusto.

# Capitolo III

La parola di un uomo è il più duraturo dei materiali.
Arthur Schopenhauer (1788 – 1860 )

# RESTAURI ESEGUITI SULL'ARCO D'AUGUSTO DI RIMINI

## 3.1 INTRODUZIONE

Con questo capitolo si ha l'intenzione di illustrare le opere di restauro che il monumento riminese ha subito nel corso del tempo, senza tali interventi da parte dell'uomo molto probabilmente l'aspetto dell'arco non sarebbe lo stesso. E' addirittura probabile che non sarebbe potuto giungere fino ad oggi. Per quanto riguarda i lavori di ristrutturazione eseguiti in tempi remoti non si hanno dei documenti ufficiali che ci forniscono le modalità di intervento, spesso è stata ritrovata qualche testimonianza da parte di persone 'non addette ai lavori'. Come si può ben immaginare questi scritti sono spesso superficiali e carenti di informazioni tecniche, comunque sono sempre meglio di niente.
Nel Novecento invece la situazione migliora decisamente e possiamo elencare almeno tre documenti tecnici importanti:

- *L'arco d'Augusto in Rimini,* di Salvatore Aurigemma , in "Studi Romagnoli" , III (1952 ), esso fornisce informazioni sulle modalità di isolamento del 1936-38 e sulla distruzione delle torri laterizie quadrilatere di origine tardoromana.
- Numero speciale di *"Ariminum" (1938),* esso è utile per meglio comprendere la modalità di isolamento ed avere informazioni sul piano urbanistico fascista.
- *Il consolidamento dell'arco d'Augusto nella città di Rimini*, di P.E. Arias-G.Rinaldi , in "giornale del Genio civile", 86, 1948, p. 15 e ss. ; questo documento fornisce informazioni riguardanti il restauro eseguito nel secondo dopoguerra a seguito di rovinosi eventi bellici.

In questa sede verranno quindi discusse le varie opere di restauro, ma con particolare riguardo nei confronti dei lavori di ripristino della sicurezza statica del 1947 e dell'ultimo restauro architettonico iniziato nel 1996, il quale ha risvegliato l'antico splendore del monumento da troppi anni celato sotto dannose ed antiestetiche patine superficiali.

## 3.2 RESTAURI DAL MEDIOEVO AD OGGI

La storia dei restauri parte dall'epoca di mezzo, proprio perché l'assenza di indizi storici ed archeologici non ci permettono di fare supposizioni su eventuali opere di ristrutturazione eseguite in tempi precedenti.

La cosa più evidente, che oggi balza agli occhi di chiunque osservi il monumento augusteo, è la cortina laterizia con appendici merlate che si trova sulla sommità della struttura. Tale paramento in cotto è sicuramente la testimonianza visiva della più antica ed importante opera di restauro che sia mai stata fatta sull'arco, infatti questa membratura deve essere stata impiegata per tamponare il monumento impedendo che l'assenza dell'attico portasse ad un progressivo smembramento e crollo dell'arco.

Come ci fa notare il Mansuelli, questo restauro era stato fatto a regola d'arte, infatti nel costruire la struttura muraria si è seguito l'andamento formale dell'antico attico marmoreo: il paramento sale verticalmente in maniera uniforme, poi ad un certo punto ( corrispondente all'inizio dell'attico ) subisce un infossamento verso l'interno dell'arco. ( difatti l'attico era sistemato in una posizione più arretrata rispetto a tutto il fronte dell'arco )

Il quando sia stato fatto questo antico restauro rimane assieme al perché uno dei fondamentali dubbi al riguardo della storia dell'arco, di certo si può dire, come è già stato più volte detto, che il monumento si presentava con la sua merlatura ghibellina già da prima del XIII secolo d.C., questa affermazione può essere fatta in base al riscontro

archeologico del ritrovamento di un sigillo riminese dell'epoca raffigurante l'arco nella situazione restaurata. ( vedi figura 2.16 )
Il perché la parte più alta dell'arco sia andata persa è maggiormente difficile da comprendere, diverse sono le ipotesi, e nessuna corredata di validi elementi probatori. Alcuni storici ritengono che la causa sia da imputare ad eventi bellici, altri invece presuppongono che la rovinosa causa sia da attribuire ad un evento tellurico, probabilmente al terremoto del 1308; Monsignor Villani ci racconta che in quell'anno il fornice ed il fastigio dell'arco furono rovinati seriamente da tale evento naturale e Malatestino dall'Occhio li restaurò.
Altre fonti attribuiscono la rovina dell'arco a tempi molto precedenti a quelli suesposti, precisamente il Fagnani nel 1813 ci indica il VI secolo d.C. come possibile epoca in cui l'arco deve aver perso il suo apparato decorativo. Il Fagnani spiega la causa con le seguenti parole:
" I Greci di Belisario fecero disperata difesa contro i Goti di Vitige ed ai pregevoli ornati di marmo sostituirono la merlatura in cotto che in seguito restaurata, esiste tuttora".
Un'altra importante opera di restauro fu eseguita nel 1541, in questo anno vennero rimossi gli ultimi resti di alcune difese tardoromane che hanno rovinato la superficie lapidea del fronte verso Rimini ( vedi figura 2.33 ), elementi probatori di questo restauro, oltre alla citazione del 1789 di F.G. Battaglini, sono i ritrovamenti di incassature nella platea di fondazione dell'arco, da ritenere gli alvei degli stipiti di due "porte di fortuna" erette poco all'interno delle due fronti.
Nel 1672 un altro disastroso terremoto colpisce nuovamente l'arco, rovinandone le sue parti più delicate; con una certa probabilità le prime due grappe metalliche usate per rafforzare il paramento dell'arco vennero sistemate proprio negli anni immediatamente successivi a questo evento tellurico.
In un anonimo acquerello conservato alla Marucelliana di Firenze si può notare la situazione sopraesposta, oltretutto questo dipinto ci

mostra anche un effetto di 'schiacciamento' ancora ben visibile nella pietra del basamento orientale ( a lato mare ); verosimilmente questa variazione dello stato tensionale nel piedritto a lato mare deve essere stata causata dal sisma del 1672. Sempre tale dipinto ci informa che nella metà del Settecento il monumento augusteo era infestato da una notevole quantità di piante spontanee.

Alcune informazioni sulle condizioni dei merli medievali ce le fornisce Tommaso Temanza, tramite i suoi rilievi del 1741: in questo periodo essi erano un po' diroccati e di forma irregolare. Nel 1825, i merli ritornano ad essere rappresentati da Maurizio Brighenti con una forma regolare. Con molta probabilità questo fatto può essere spiegato con l'avvenuto restauro nel periodo intercorso fra le due raffigurazioni. Infatti si ha testimonianza che per far fronte al tragico movimento sismico del 1786, l'architetto cesenate Giuseppe Achilli nel 1791 restaurò l'arco, intervenendo anche sui merli regolarizzandoli, ricostruendo le punte di essi con della pietra bianca e costruendo una banchina alla loro base orlata con mattoni messi di coltello. ( questa disposizione dei merli è ben visibile nello schizzo di Felice Giani, vedi figura 2.46 ).

Un mancato restauro molto famoso fu proprio quello voluto dal Cardinal Camerlengo che affidò tale intervento nelle mani del Brighenti. Questa impresa era finalizzata a liberare l'arco dai "merli ghibellini che bruttano il fastigio di quel solenne edificio" e ad eseguire "riparazioni con stuccature ove l'arco è sconnesso". Il progetto del Brighenti proponeva di ricostruire sia le parti mancanti delle colonne e della trabeazione nella facciata prospiciente verso Rimini, sia di ricostruire l'attico. ( vedi figura 2.32 ).

Fortunatamente questo intervento fu bloccato da Giuseppe Valadier, che il 25 settembre del 1825 scriveva: "Direi di non entrare in interpretazioni di quello che poteva essere, né aver la pretenzione di

farvi cosa alcuna di novità, e muover quel che esiste d'antico per pretenzione di migliorarne le parti".

A seguito di un nuovo evento sismico avvenuto nel 1875, vennero aggiunte altre grappe metalliche in ferro e bronzo sul paramento lapideo, soprattutto in prossimità degli spigoli dei piedritti. Questa situazione viene dimostrata dalla visione di fotografie tardo Ottocentesche. ( vedi figure 2.64 e 2.69 )

Molte altre grappe vennero aggiunte dopo il terremoto del 1916.

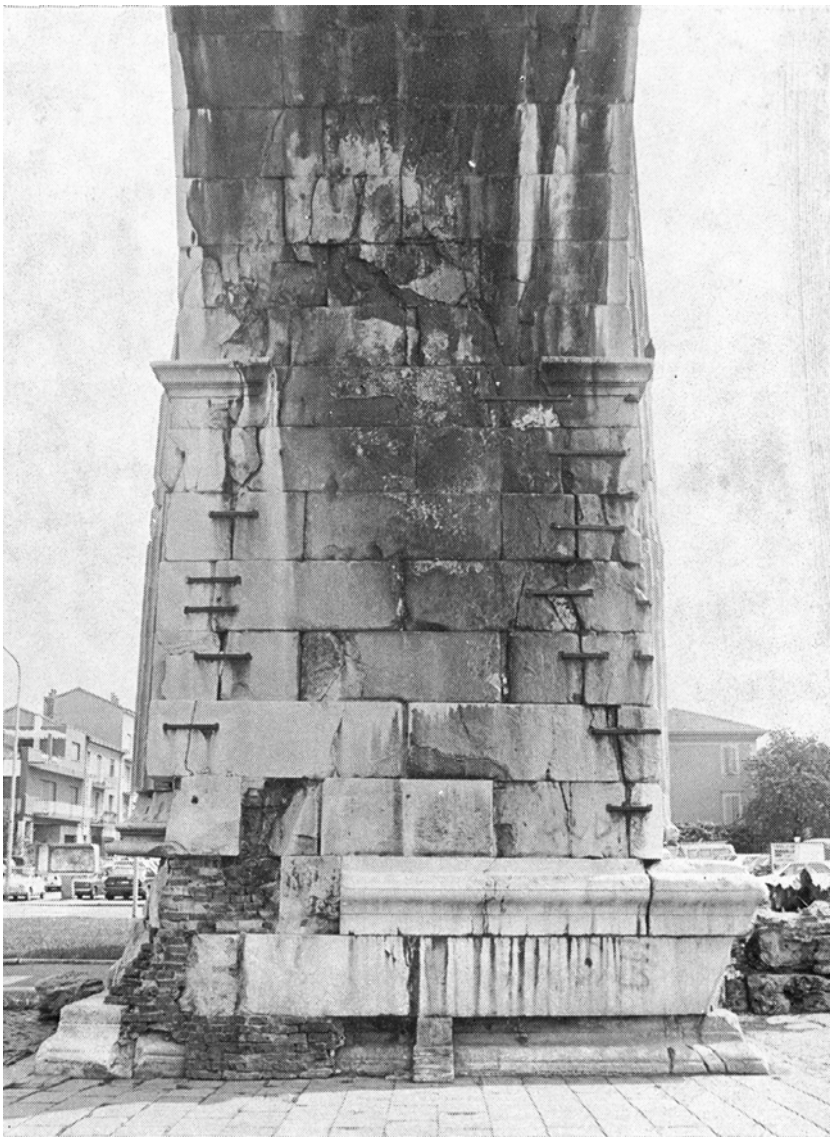


Figura 3.1 – Piedritto a lato mare prima dell'ultimo restauro del 1996.
Questa fotografia, scattata negli anni Ottanta mostra lo stato di degrado superficiale causato da terribili patine di colore scuro, oltretutto sono ben visibili le grappe metalliche adoperate per asservire a fini di stabilità e compattezza del paramento lapideo.

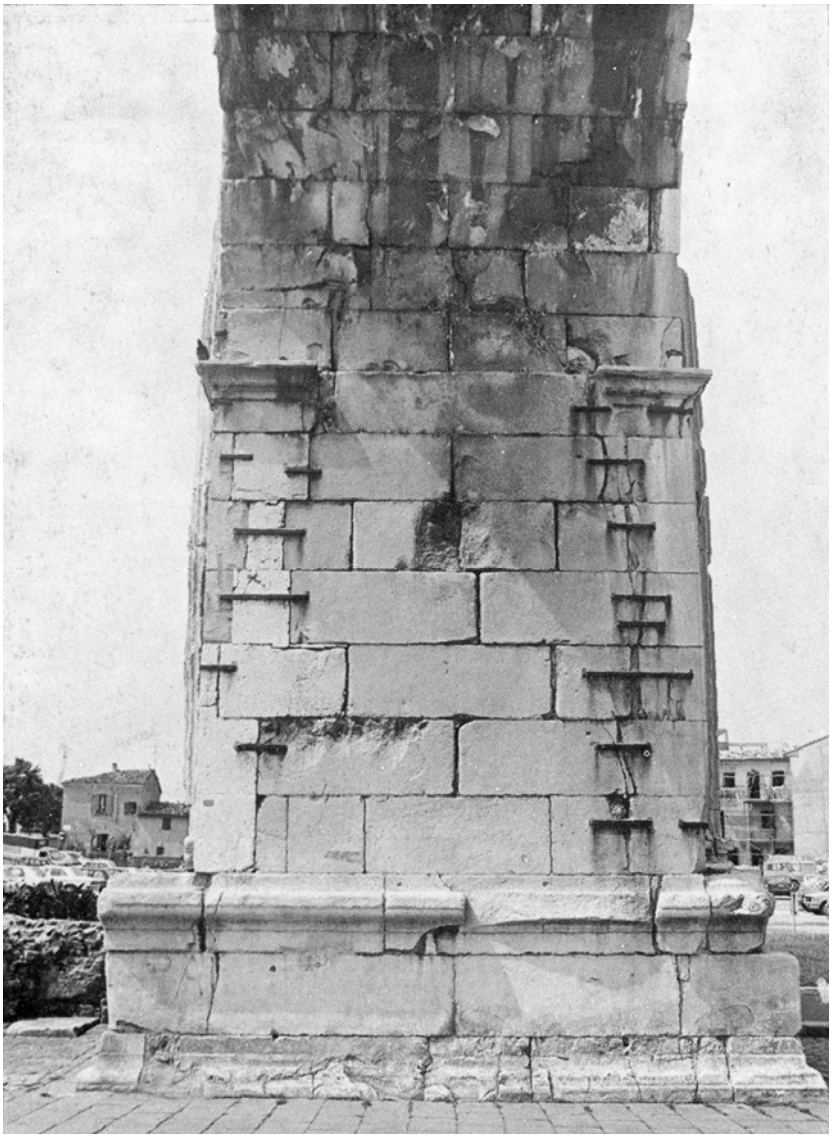


Figura 3.2 - Piedritto a lato monte prima dell'ultimo restauro del 1996.
Questa fotografia, scattata negli anni Ottanta mostra lo stato di degrado superficiale causato da terribili patine di colore scuro, oltretutto sono ben visibili le grappe metalliche adoperate per asservire a fini di stabilità e compattezza del paramento lapideo.

Il dispiegamento di questa moltitudine di grappe metalliche posizionate sia sui paramenti lapidei dei due fronti e sia sull'arcata sono serviti per garantire stabilità e compattezza ai blocchi di rivestimento dell'arco. La disposizione di questi uncini parte cronologicamente da zone adiacenti ai conci in chiave per scendere in seguito fino all'imposta, avvicinandosi all'intradosso del fornice; continua poi lungo i piedritti, sempre in prossimità dello spigolo interno ai piloni. Anche nella parte interna del fornice, si trova l'allineamento delle staffe in prossimità degli spigoli esterni.

Proprio nel 1916, a seguito dell'ennesimo evento tellurico fu eseguito un altro restauro, in cui furono ricomposti quasi tutti i merli ghibellini ( dopo il terremoto sul fronte verso Roma ne erano rimasti solamente tre, e alquanto instabili ) nonché per la prima volta fu rimaneggiata la disposizione dei blocchi dell'epigrafe, e venne sistemata nella maniera in cui è possibile ammirarla oggi. Nel 1912 Giuseppe Gerola fornisce finalmente l'integrazione della parte perduta dell'iscrizione, e riesce quindi a capire quale doveva essere da disposizione originaria dei blocchi dell'epigrafe. Fu proprio grazie a lui che, nel restauro degli anni di poco ad avvenire, si realizzò un riordino della dicitura romana.
Singolare è pensare che un frammento dell'epigrafe dell'arco fu ritrovato nel 1786 fra i resti di demolizione della porta urbica medievale duecentesca. ( porta antistante all'arco, costruita a ridosso del fiume Ausa ) Subito riconosciuta l'appartenenza del frammento all'iscrizione dell'arco esso venne però murato nel torrione laterizio a destra dell'arco ( a lato mare ), dove vi rimase appunto fino al 1912, aspettando che Giuseppe Gerola lo risistemasse al suo posto.
Altra modifica importante all'assetto strutturale del monumento avvenne nel 1936-38, anni dello sventramento della zona limitrofa all'arco e demolizione dei resti di torrioni laterizi medievali a pianta poligona adiacenti al monumento. ( vedi verso la fine del paragrafo 2.4.6 e le figure 2.61, 2.62, 2.63, 2.72, 2.73, 2.74 )
Se esaminando le antiche stampe e le foto degli inizi del Novecento non è possibile avvertire particolari problemi statici deducibili da rotazioni, disassamenti o alterazioni della verticalità delle spalle dell'arco o sconnessioni dei conci di intradosso dell'arcata, questo non è stato più vero dopo l'invasivo episodio dell'isolamento. Come detto in precedenza, qualche effetto di schiacciamento era già possibile notarlo da prima dell'evento di demolizione, ma si trattava di poca cosa.

In definitiva si può concludere che i lavori di isolamento hanno portato ad una consistente modifica dell'equilibrio statico del monumento i cui effetti si mostrano sotto forma di una rotazione, inclinazione e sconnessione della spalla lato mare. La causa di questa alterazione del quadro statico-strutturale è da ricercare nella venuta a meno, nel momento della distruzione, della spinta di contrasto fornita dalle torri laterizie medievali. Ad amplificare la situazione di dissesto strutturale nel 1944 ha partecipato anche il brillamento di una mina tedesca piazzata nella base della spalla lato mare.

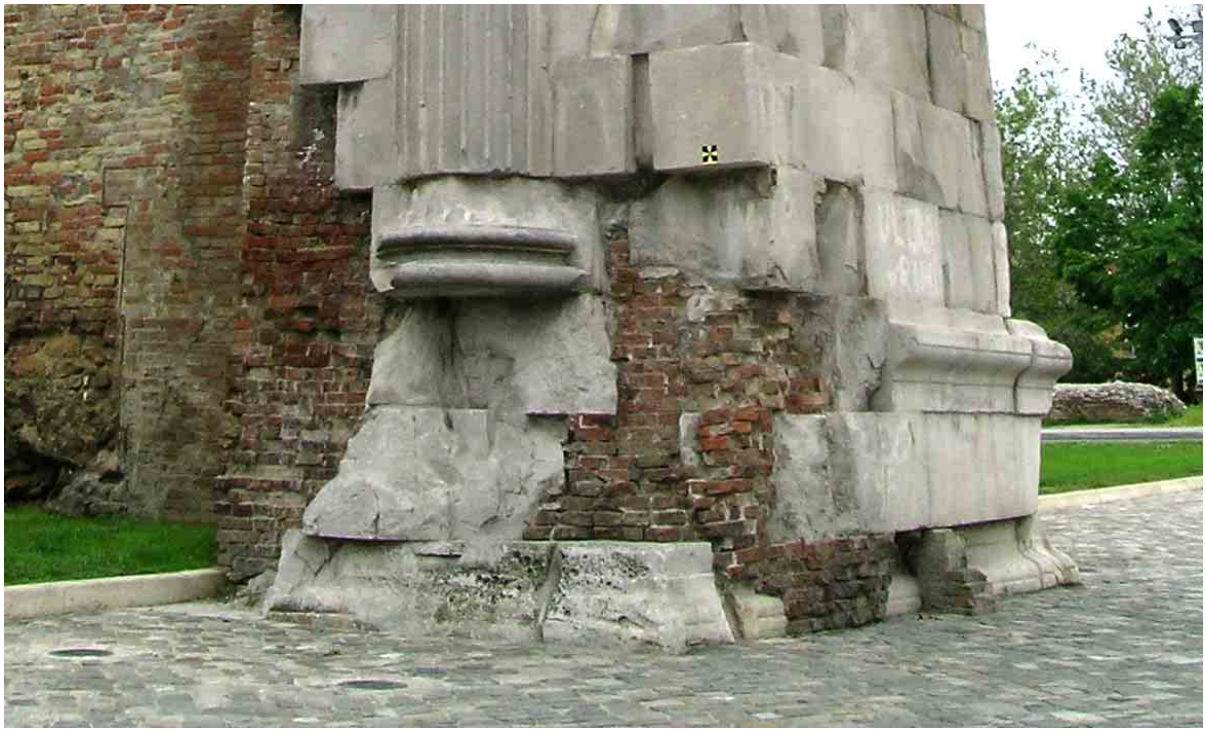


Figura 3.3 – Particolare del basamento danneggiato dallo scoppio di una mina nel 1944. Da questa fotografia è possibile vedere il danno che l'esplosione ha arrecato alla base del piedritto dell'arco a lato mare. Come si nota, si è creata una notevole fessurazione nelle strutture nonché un'asportazione di parte delle murature interne e del rivestimento lapideo della parte inferiore.

Per risolvere la molteplicità di problemi statico-strutturali che nel giro di poco tempo si erano aggravati in maniera considerevole la Soprintendenza alle antichità di Bologna avanzò la richiesta al Provveditorato Regionale alle Opere Pubbliche per l'Emilia-Romagna, che la Sezione Autonoma del Genio civile di Rimini prendesse

tempestivamente in esame la situazione in cui si trovava il monumento e, dopo averne accertato la stabilità, avanzasse concrete proposte per i lavori necessari.
Tutti i lavori di consolidamento e restauro furono messi nelle mani dell'ing. G. Rinaldi e P. Arias.

### *3.2.1 Il consolidamento statico del 1947 di G. Rinaldi e P. Arias*

Il consolidamento strutturale eseguito sull'arco d'Augusto di Rimini nel 1947 aveva il fine di ripristinare la sicurezza statica del monumento, compromessa oltre che dall'isolamento del 1936-38, dall'esplosione della mina (1944) che ebbe l'effetto di produrre fessurazioni ed asportazione di una parte delle murature interne e del rivestimento lapideo della parte inferiore del piedritto a lato mare dell'arco. ( vedi figura 3.3 )
Altro effetto verificatosi in seguito all'esplosione fu una rotazione,inclinazione e sconnessione di tutto il piedritto danneggiato.
In un primo momento si provvide a ripristinare la sicurezza tramite l'esecuzione di uno sperone in muratura ed adeguati puntellamenti di fortuna a carattere temporaneo; per i lavori definitivi che si rendevano necessari con la massima sollecitazione venne incaricato l'ing. Rinaldi, il quale dopo un accurato rilievo ed un apposito studio di verifica di stabilità dell'arco e del piedritto danneggiato, giunse alle seguenti conclusioni:

1. La spinta totale sulla sezione della pianta, al livello del piano di campagna dei piedritti, portava una sollecitazione massima di 20,5 Kg / $cm^2$
2. Se tale notevole sollecitazione, in relazione alla natura del materiale costruttivo componente in nucleo murario del piedritto, era sopportabile nel periodo antecedente al danneggiamento, in seguito a questo, non era più sopportabile senza grave pericolo

per la struttura e perciò si richiedevano lavori di consolidamento particolari.

3. Dagli accertamenti era risultato che all'interno della struttura muraria le malte dei nuclei dei piedritti dell'arco presentavano dei processi di disgregamento, ed era necessario provvedere ad una cementazione per evitare una ulteriore disgregazione.

A conclusione degli studi fatti, la Sezione Autonoma del Genio Civile propose i seguenti lavori:

a) Cementazione all'interno dei nuclei murari di tutta la struttura mediante iniezioni di cemento sotto pressione, eseguite con perforazioni a mezzo di sonde rotative, senza intaccare il rivestimento lapideo.
b) Demolizione dei puntellamenti provvisori e sistemazione e ricostruzione della struttura di rivestimento della base minata.
c) Nel caso in cui il processo di cementazione della struttura muraria non avesse dato gli sperati risultati, costruzione di due contrafforti in laterizio per centrare, il più possibile, la posizione della risultante totale dei carichi permanenti, sul piano di base dei piedritti e ridurre le sollecitazioni unitarie sul terreno da 20,5 Kg / $cm^2$ a soli 5 Kg / $cm^2$ circa.

Il progetto, in base alle leggi allora vigenti sulla tutela delle opere di interesse artistico e storico, fu sottoposto al parere preventivo del Ministero della Pubblica Istruzione, che, in conformità ai riferimenti della Soprintendenza alle Antichità e ai Monumenti confermò le proposte fatte approvando l'esecuzione dei lavori progettati con la sola esclusione per i soli speroni di sostegno ai piedritti.

I lavori si svolsero regolarmente: in totale vennero eseguite 22 tracce di perforazione con un complessivo di m. 136,95 di fori, del diametro di cm. 5.

La perforazione fu eseguita con un'apposita sonda rotativa, posizionata alla base dei piedritti e nella parte superiore dell'arco; per

le iniezioni di cemento furono impiegati ql. 453,50 di legante iniettato ad una pressione media di 10-12 atmosfere.

Un accuratissimo lavoro fu eseguito prima delle iniezioni, per stuccare provvisoriamente tutti i giunti del rivestimento, per impedire fughe e sbavature di legante. La stuccatura fatta con gesso, fu accuratamente rimossa senza lasciare nessuna traccia.

Qualche anno dopo, e più precisamente il 20 settembre del 1950, si riunì a Rimini presso l'arco d'Augusto, una commissione tecnica designata dal Ministero, su sollecitazione della Soprintendenza alle Antichità, per affrontare vari problemi concernenti la conservazione del monumento e per una verifica strutturale dello stesso.

Venne constatata la necessità di sistemare in un unico conglomerato di laterizi i vari muri adiacenti all'arco sul lato verso mare, che non sono di epoca romana, ma in parte medievale ed in parte moderna. In tal modo con uno scivolo disposto al di sopra del nuovo conglomerato dello scolo delle acque, si ovviò al problema delle infiltrazioni che avevano determinato le lesioni alle suddette mura.

Inoltre dopo aver constatato l'evidente sbandamento a sinistra ( verso l'interno dell'arco ) presentato dal pilone verso mare, situazione riscontrabile tuttora, vennero prese le seguenti decisioni:

a) Dal punto di vista statico, dopo aver studiato i calcoli di stabilità già a suo tempo eseguiti allorché furono operate le iniezioni di cemento e fatti nuovi accurati controlli, i tecnici furono d'accordo nel procedere solo in caso di serio pericolo alla ricostruzione dei barbacani ai lati del pilone in laterizio con pilastri interni in cemento armato.
b) Dal punto di vista estetico i tecnici si trovarono pienamente d'accordo nel procedere alla rimozione delle lastre di rivestimento in pietra d'Istria del pilone lesionato e di procedere alla ricostruzione del basamento della semicolonna del pilone

stesso completamente sbriciolato, in pietra lievemente diversa, imitando le linee del basamento dell'altro pilone.

Per quanto riguarda eventuali cedimenti fondali nel tempo, dopo un accurato esame del monumento non si sono riscontrate lesioni o alcun tipo di deformazione che possono far pensare a questo.

Rilevanti sono le condizioni atmosferiche, chimiche, biologiche e microbiologiche, che influiscono sulla vita degli edifici e ne determinano il loro invecchiamento.

Nel corso del tempo numerosi eventi sismici hanno interessato l'arco, ma pare non abbiano influito se non acutizzato situazioni precarie già esistenti, senza creare situazioni critiche particolarmente accentuate.

A quel tempo è inoltre stato effettuato anche uno studio geologico della zona limitrofa al monumento, che ha fornito dati rassicuranti circa la stabilità del monumento.

### *3.2.2 L'ultimo restauro architettonico eseguito nel 1996-98 dall'arch. Pier Luigi Foschi*

Tramite questo ultimo restauro prevalentemente di tipo architettonico si è voluto ridonare lo splendore che ormai da più di un secolo, dall'avvenuta epoca industriale, si celava al di sotto dannose ed antiestetiche patine superficiali.

Una certa attenzione è stata mostrata anche per quanto riguarda le problematiche di stabilità del monumento, infatti in questo restauro sono state iniettate nel nucleo strutturale dell'arco delle resine consolidanti che si sono rese necessarie per migliorare la situazione di cementazione della portante muratura a sacco nascosta dall'esteriore rivestimento lapideo. I sintomi che hanno fatto pensare ad un indebolimento e scementazione del nucleo strutturale murario sono, il trasferimento di una parte del carico tensionale, dal nocciolo dell'arco al rivestimento in pietra inizialmente nato con sole funzioni decorative. Questa dislocazione della sollecitazione si era manifestata

attraverso fessurazioni verticali con espulsione di materiale sul rivestimento in pietra; tipico effetto di crisi del materiale per schiacciamento. In verità questo segno di peggioramento era ben evidente al tempo del consolidamento del 1947, nel quale, come abbiamo già ampiamente riportato, per ovviare al problema l'ing. Rinaldi fece eseguire una serie di micropali in c.l.s. che perforarono il monumento dalla sommità alle fondazioni. Nel 1996 si decise quindi di stabilizzare ulteriormente l'arco tramite le gia dette iniezioni di resine speciali.

### 3.2.2.1 La struttura dell'arco d'Augusto di Rimini

Prima di iniziare a descrivere la serie di problematiche che hanno portato all'attuazione di diversi interventi nell'ultimo restauro mi pare utile parlare un po' delle caratteristiche strutturali dell'arco.
Tutti i più importanti edifici di Rimini sono caratterizzati, in tutte le epoche, dall'uso di pietra lavorata proveniente dall'area iulio-istriana.
In particolare la pietra bianca utilizzata sull'arco è classificata commercialmente come Pietra di Nabresina Roman Stone, è un calcare organogeno compatto di formazione marina, di piattaforma-mare basso, definibile come calcarenite o brecciola calcarea fossilifera.
Si tratta di un materiale a struttura cristallina fine, abbastanza compatta e con scarse venature e inclusioni, il che lo fa apprezzare per l'aspetto cromaticamente omogeneo e per il fatto che offre sufficienti garanzie per la lavorazione,nonché buona resistenza agli agenti atmosferici.
Ad un occhio inesperto ed ignaro delle tecniche costruttive usate nell'antichità, l'arco pare essere costituito interamente da questa preziosa pietra biancastra, ma se si approfondisce la lettura del monumento si può comprendere che in realtà quello che noi vediamo esteriormente non è altro che un rivestimento decorativo; una sorta di

"impiallicciatura" in pietra del nucleo portante costituito dalla ben più povera muratura a sacco.

I blocchi, perfettamente squadrati e in aderenza fra loro senza interposizione di malta, erano legati con perni in ferro annegati nel piombo ed avevano uno spessore variabile dai 40 agli 80 centimetri; erano disposti in modo tale da formare una cassaforma, come si usa oggi per il conglomerato cementizio, e si "gettava" la muratura a sacco in attesa di procedere ad un altro corso di pietra in elevazione.

(vedi figura 3.4)

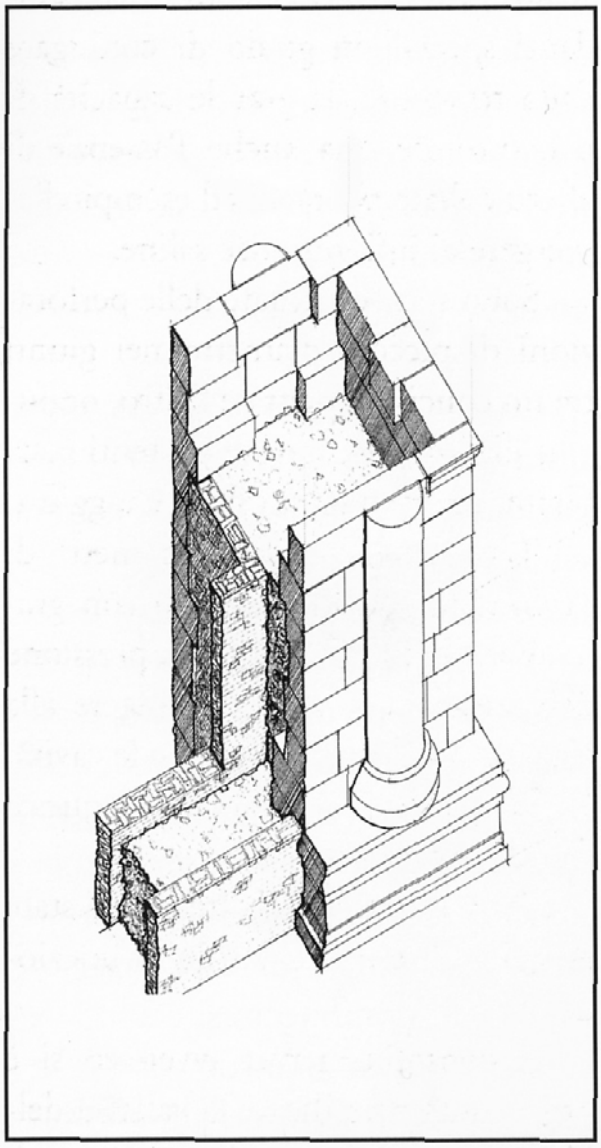


Figura 3.4 – Schema strutturale dell'arco d'Augusto di Rimini con il nucleo centrale costituito da muratura a sacco.

Le stesse parti decorative, come le colonne, i capitelli, i clipei e i timpani, venivano posati man mano che ci si innalzava con la struttura. Le semicolonne in verità hanno subito un processo di assemblaggio del tutto particolare, infatti esse sono costituite da rocchi di altezza variabile: più precisamente si compongono di elementi lunghi quando vanno addossati alla pietra di paramento precedentemente posata, mentre sono dei segmenti brevi quando diventano un tutt'uno con il paramento stesso per garantire l'incastro e l'ancoraggio delle semicolonne.

Osservando in maniera accurata il paramento lapideo dell'arco sui due fronti e sull'arcata si può notare che alcuni blocchi hanno una

colorazione lievemente diversa dalla maggioranza, proprio questa diversa colorazione è l'elemento discriminante che ci permette di capire a distanza che queste pietre non sono originali, ovvero sono blocchi di integrazione sistemate ad hoc in restauri avvenuti in tempi passati. Fra le diverse tipologie di pietre usate come integrazione si ravvisa anche l'utilizzo di blocchi di arenaria provenienti dal vicino monte Titano, materiale peraltro dello stesso tipo con cui si costruirono le mura della città romana repubblicana; probabilmente si tratta quindi di un riutilizzo.

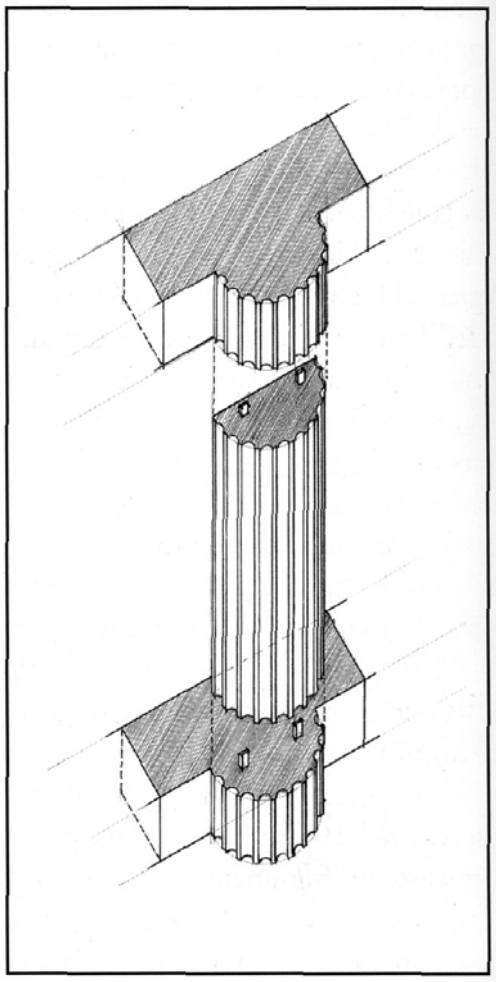


Figura 3.5 – Schema di assemblaggio delle semicolonne.

Per quel che riguarda l'apparato di fondazione vale quanto detto al paragrafo 2.4.2., ovvero riportando in breve quanto detto in tale paragrafo si può dire che la tipologia di fondazione appartiene a quella di platea, costituita da materiali lapidei, in particolare da "tufi legati da calce e lapilli silicei".

Le dimensioni principali di questo impianto fondale sono: m. 3 di profondità, ovvero la fondazione arriva fino a m. 3 al di sotto del piano di campagna, m. 15 di lunghezza nella direzione complanare al piano del fronte ( da mare verso monte ), m. 7 di larghezza nella direzione dello spessore dell'arco ( da città verso periferia ).

Una tale mastodontica opera fondale ha fornito garanzie statiche al monumento per oltre duemila anni di storia, probabilmente già a quel tempo i romani dovevano aver intuito l'importanza di adeguate opere di fondazione, soprattutto nei riguardi di strutture costituite da elementi

portanti in muratura e pietrame come l'arco, che come oggi è ben noto agli ingegneri, queste strutture ad elevata rigidezza malsopportano anche i le più piccole deformazioni impresse da eventuali cedimenti differenziali del terreno.

### 3.2.2.2 Problematiche che hanno indotto al restauro: le patine superficiali ed i dissesti statici

Le cause che hanno portato a considerare una soluzione di restauro del monumento augusteo sono varie, le principali si dividono in due categorie: le cause statico-strutturali e le cause di degrado superficiale della "pelle" dell'arco.

Per quanto riguarda le prime si è gia ampiamente parlato, mentre per i danni della superficie lapidea e laterizia si discuterà qui di seguito.

Negli anni che hanno preceduto l'ultimo restauro si riscontrava un generale e sentito bisogno, anche da parte dell'opinione pubblica, di risanare e ringiovanire la ormai brutta "pelle" del monumento simbolo di Rimini che era affetta da "malattie" che l'avevano ridotta ad un colore scuro.

La bianca pietra d'Istria è un materiale abbastanza compatto e resistente agli agenti atmosferici, ma duemila anni di storia sono davvero tanti anche per i materiali più durevoli che inevitabilmente risentono di tutti i processi di invecchiamento comuni a tutte le pietre, oltretutto nella storia non vi è stata sempre un'adeguata manutenzione.

I maggiori danni al rivestimento sono sicuramente da imputare ad un robusto strato di sporco da smog accumulatosi in questo secolo. In passato, quando l'aria era pulita, i monumenti in pietra, venivano colonizzati dai licheni ( una simbiosi tra alga e fungo ), che si stanziavano su tutte le superfici esposte alla luce,all'acqua e ben ventilate. Questi piccoli apparenti innocui organismi sono capaci disintegrare la pietra con le loro radici ed emissioni, tali esseri viventi devono aver partecipato notevolmente in tempi passati alla

disgregazione del monumento, ma dall'era dell'industrializzazione, eliminati sempre più dall'aumento delle emissioni solforose contenute nello smog, il loro contributo è venuto a meno e quel che rimane sono delle tracce fantasma costituite da patine "colorate" aderenti alla superficie del paramento lapideo dell'arco.

Nell'ultimo secolo, le cause di rovina che hanno fatto da padrone sul monumento sono da ricercare nelle emissioni di inquinanti, quali ossidi di azoto, ozono, e anidride solforosa prodotti dalla combustione di legna, carbone di legna, e successivamente dalla combustione dei combustibili fossili: carbone, oli e derivati, metano.

Il nemico tuttora più micidiale per il degrado e la dissoluzione delle pietre, soprattutto quelle con composizione chimica prevalente di carbonato di calcio è l'anidride solforosa. Questo gas risulta deleterio per i materiali, in quanto in presenza di acqua ( pioggia, condensa o nebbia ) si trasforma in acido solforico che, come noto è un acido estremamente aggressivo.

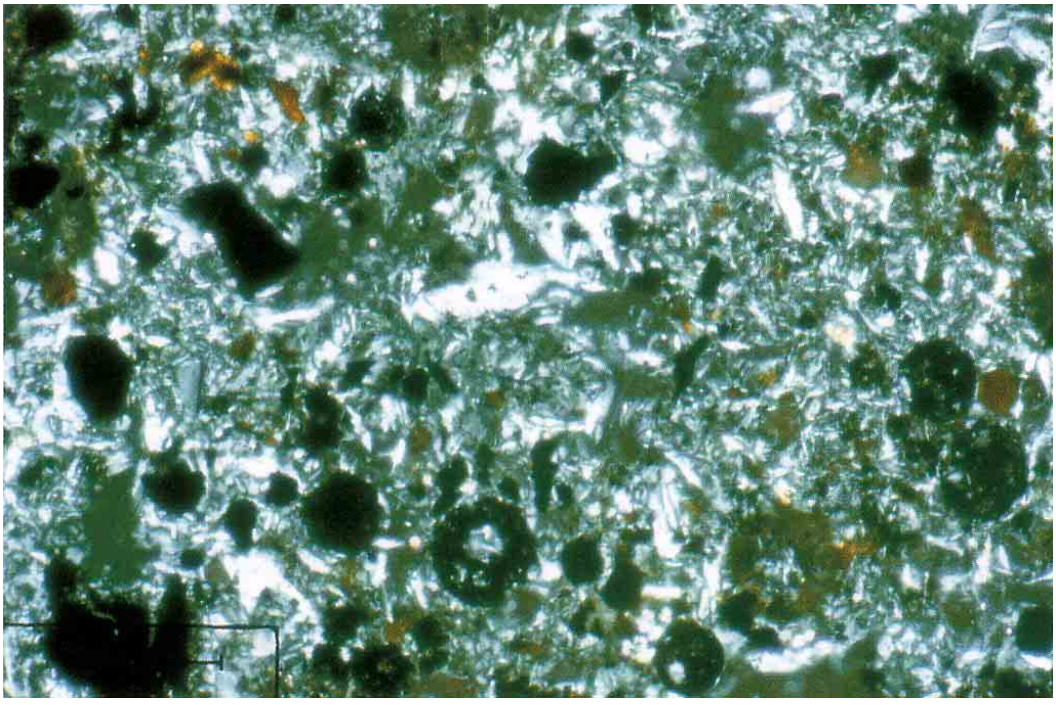


Figura 3.6 – Una crosta nera osservata in sezione sottile trasversale al microscopio da mineralogia a nicol incrociati. Sono ben visibili sia i cristalli di gesso ( con colori d'interferenza bianco-grigio ) e le particelle carboniose nere, in gran parte sferiche, dovute alla combustione di oli minerali ( x400 )

Chiunque abbia studiato un po' di chimica può ricordare l'effetto che questo acido può produrre su pietre calcaree: il materiale comincia a "friggere" corrodendosi e liberando anidride carbonica.
Le patine nere che si potevano vedere sull'arco prima del restauro erano costituite da gesso che inglobava una miriade di particelle carboniose, opache, sferiche, spugnose con un diametro medio di 8-10 μm dovute alla combustione degli oli minerali e presenti nei fumi.
( vedi figura 3.6 )
Il gesso, un solfato biidrato di calcio, si forma per interazione dell'acido solforico con il carbonato di calcio, sia del calcare sottostante ( la pietra d'Istria ), sia soprattutto con quello presente in aria e depositato anch'esso sulle superfici.
Come è noto da tempo, patine nere e croste nere si vanno a formare nelle parti del monumento bagnate dall'acqua ma non soggette a ruscellamento. Questo perché qui vi è sufficiente acqua per scatenare la reazione chimica, ma poi non c'è sufficiente energia cinetica per asportare le particelle che si sedimentano.
Dall'esame chimico e microbiologico delle croste nere si può dire che esse si sono formate negli ultimi decenni, cioè nel periodo compreso tra quando si bruciava ancora legna e quello attuale: in seguito alla metanizzazione degli impianti di riscaldamento urbano ( il metano non produce né $SO_2$ , né particelle ) queste croste non si sono più formate.
Un'altra tipologia di crosta è stata riscontrata spesso al di sotto dello strato nero, talvolta anche in adiacenza; queste diverse patine sono di colore grigio cenere e dovrebbero appartenere al periodo in cui il combustibile principale era la legna o il carbone di legna.
Queste patine, molto più sottili delle sovrastanti nere, sono formate sempre da gesso a cui si associa anche della calcite; in mezzo a questa "pasta" possiamo trovare particelle prismatiche che sono risultate essere resti di vegetali carbonizzati derivanti dalla combustione di conifere e latifoglie.

Proseguendo nel microscavo all'interno dello strato di "sporco" possiamo scorgere un'ultima patina di colore bruno-camoscio o giallastro sottostante alle patine grigie. ( quindi ancor più vecchie )
Queste depositi superficiali ricordano quel lunghissimo periodo in cui la qualità dell'aria di Rimini era ottima, e come conseguenza l'arco era tempestato da licheni. Questi esseri producono acido ossalico che veicolato dall'acqua di pioggia ed interagendo con la calcite del calcare ( la pietra d'Istria ) porta alla formazione di ossalati di calcio: la weddellite e la whewellite. Questi due minerali, combinati in varie proporzioni, caratterizzano tutte le patine brune in certe parti ancor visibili dopo il restauro. Il colore è impartito da piccolissime particelle microniche, in gran parte organiche vegetali. ( vedi fig. 3.7 )

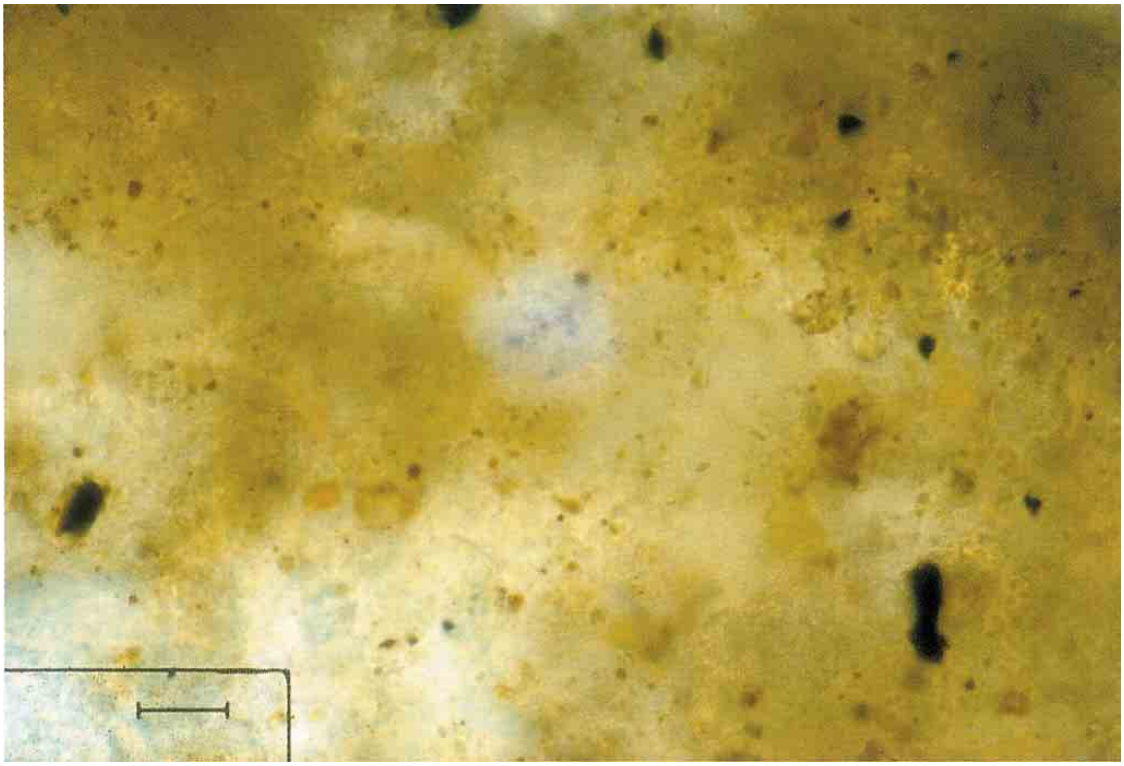


Figura 3.7 – Una patina bruno-camoscio osservata al microscopio ottico a forte ingrandimento.
Si può notare come la patina sia tutt'altro che omogenea: essa include una miriade di particelle bruno-rosse che, essendo molto piccole ( 1 μm o meno ) possono però essere studiate solo al microscopio elettronico.
Sono visibili anche alcune particelle nere prismatiche dovute alla combustione della legna, le loro dimensioni si aggirano attorno ai 10 μm.

Fra le altre cause nocive per la "pelle" del monumento vanno ricordate anche le tremende deiezioni acide dei colombi.

Tra le varie cause sopraesposte, forse la più allarmante nonché scintilla che accese l'idea dell'urgenza di un restauro che da anni era pensato ma poi mai attuato fu il distacco, nel 1995, di un consistente frammento della colonna lato mare-Borgo. In questo caso il motivo scatenante era legato alla tecnica costruttiva, infatti il montaggio tra i rocchi di colonna era realizzato mediante l'interposizione di due perni in ferro forgiato della sezione di cm. 3x3, allineati parallelamente alla facciata e annegati nel piombo. In duemila anni l'acqua è riuscita a penetrare fino al ferro attivandone l'ossidazione; in tal modo con il conseguente aumento di volume del ferro le tensioni indotte sulla pietra ne hanno prodotto la rottura.

### 3.2.2.3 Fasi ed interventi dell'ultimo restauro

Come abbiamo detto, la caduta di un frammento di colonna aveva prodotto subito un forte allarmismo, che spinse l'Amministrazione Comunale e prendere provvedimenti immediati accollandosi tutto l'onere del restauro necessario.

Le opere si suddivisero in due fasi: una relativa al consolidamento strutturale ed una consistente nel restauro delle superfici lapidee.

In tal modo si andava a completare il lavoro iniziato dal Comune stesso e condotto dall'arch. Pier Luigi Foschi sviluppato nel 1990, relativo al restauro dei paramenti laterizi e della merlatura ghibellina.

La prima operazione di consolidamento che si era andata ad operare è stata l'iniezione all'interno del nucleo strutturale di speciali consolidanti, capaci di coniugare l'alta resistenza, la grande capacità di penetrazione, ma anche l'assenza di effetti collaterali, quali l'emergere di infiorescenze saline.

Per assicurare una buona distribuzione e penetrazione delle resine consolidanti all'interno del nucleo portante dell'arco erano state fatte

delle perforazioni di piccolo diametro nei giunti tra i vari conci di pietra, oppure utilizzando le fratture esistenti nella pietra stessa; in tal modo si era arrivati fino a oltre due metri di profondità e si era proceduto con gradualità alle iniezioni a bassa pressione fino a giungere alla saturazione di tutti i varchi e le cavità. ( vedi figure 3.8 – 3.9 – 3.10 )

Per il restauro dell'arco sono state eseguite oltre un centinaio di iniezioni! A consolidamento avvenuto si è voluto verificare l'efficacia dell'intervento tramite il prelievo di "carote" a campione in diverse posizioni ed altezza.

L'immagine di queste "carote" ci mostra anche la natura eterogenea del nucleo strutturale dell'arco, con presenza di laterizi, ciottoli, arenarie e pietre di diversa natura. ( vedi figura 3.11 )

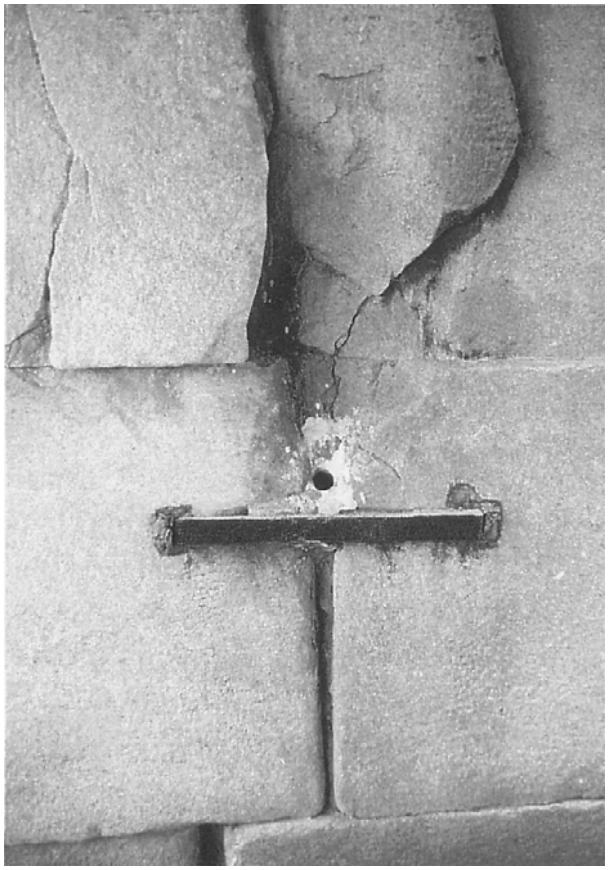


Figura 3.8 – Particolare di un foro nella giunzione della pietra, predisposto per l'iniezione di consolidamento.

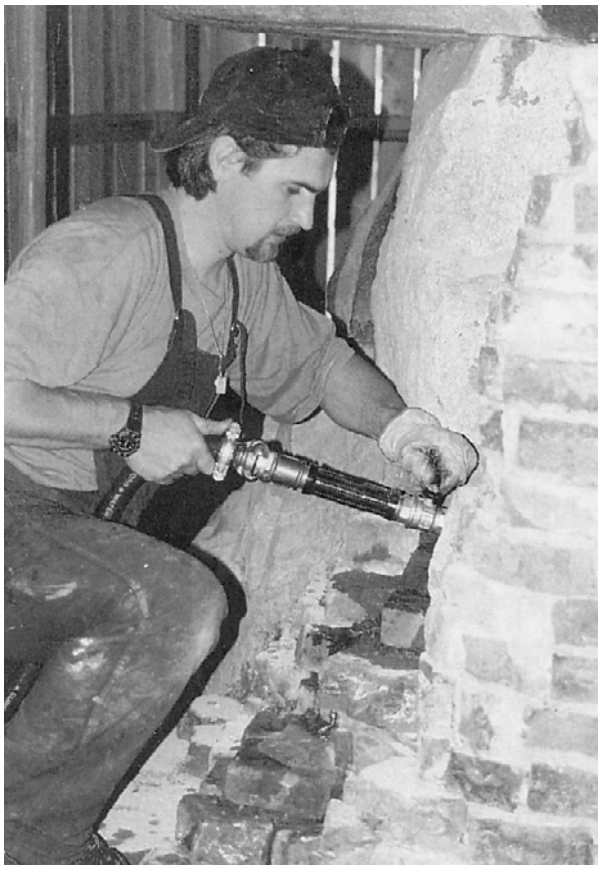


Figura 3.9 – Un restauratore all'opera per il dosaggio della pressione per le iniezioni.

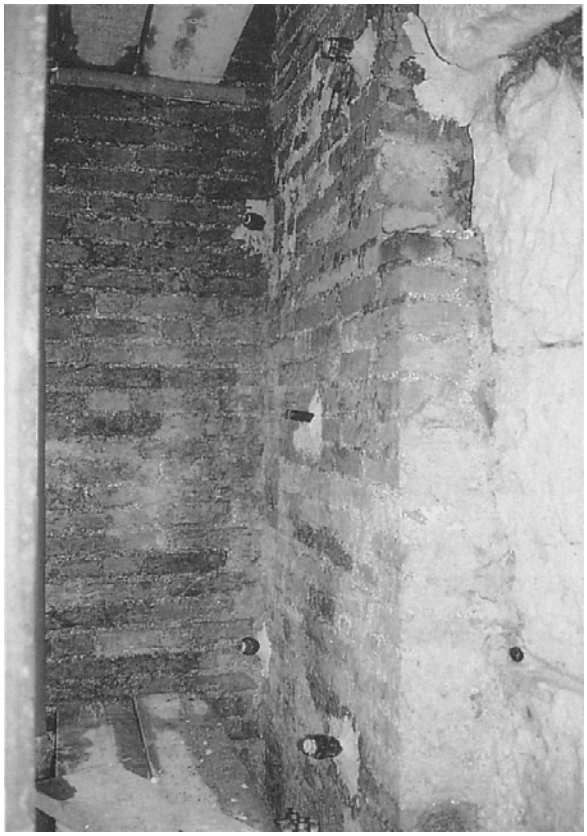


Figura 3.10 – Predisposizione degli ugelli per le iniezioni dal paramento laterizio.

A complicare le fasi del restauro il 14 settembre del 1997 ha partecipato anche la forza della natura: un fulmine si era abbattuto sul merlo d'angolo mare-città, danneggiandolo seriamente, come risulta dalla figura 3.12.

La seconda fase del restauro ha riguardato invece la "pelle" del monumento. In questo caso si era proceduto alla rimozione dello sporco accumulatosi nei secoli, soprattutto dopo l'avvento dell'era industrializzata.

In certi punti lo spessore delle croste raggiungeva anche valori di diversi millimetri, ed erano capaci di offrire notevole resistenza alla rimozione, così come hanno potuto constatare i diversi restauratori all'opera che si sono trovati spesso in difficoltà di fronte alla variegata tipologia di consistenza e spessori delle patine.

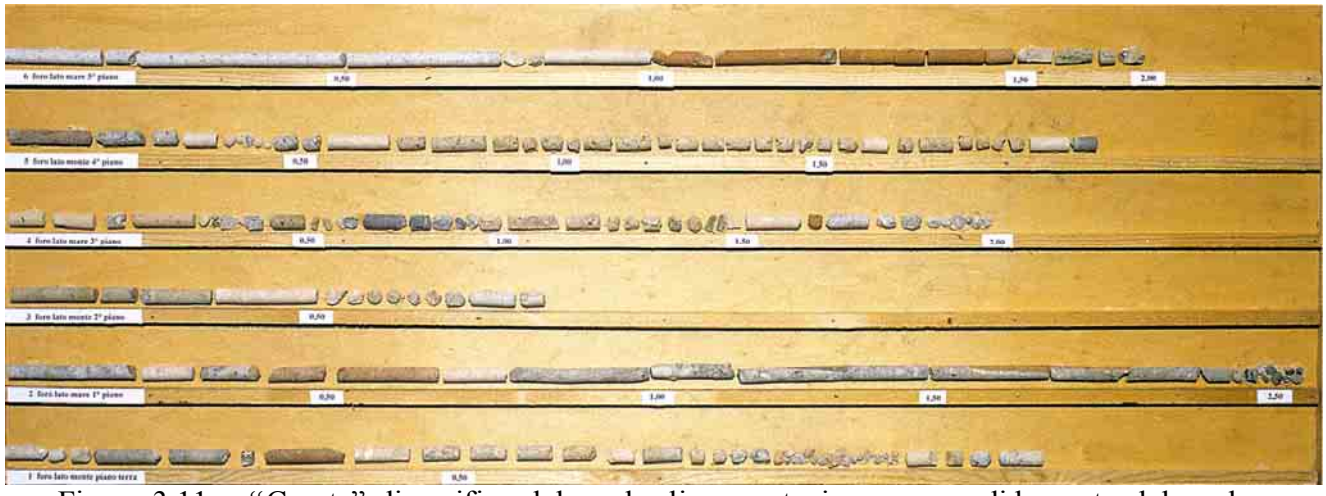


Figura 3.11 – "Carote" di verifica del grado di cementazione e consolidamento del nucleo strutturale dell'arco dopo l'iniezione di speciali consolidanti.
Le "carote" visibili in questa fotografia sono ricavate da perforazioni che vanno dall'intradosso dell'arcata fino all'interno del nucleo strutturale in muratura a sacco.

Durante tutta la fase di pulizia e raschiatura delle superfici intaccate dalle patine scure si è sempre agito con prudenza e precauzione in modo da togliere tutto lo sporco senza tuttavia aggredire le patine naturali di invecchiamento del materiale.
Le incrostazioni si presentavano di grandissima varietà e consistenza, per cui si era proceduto dosando gli interventi caso per caso.
Nella fotografia 3.13 è possibile vedere delle prove di pulizia dell'intradosso della volta.

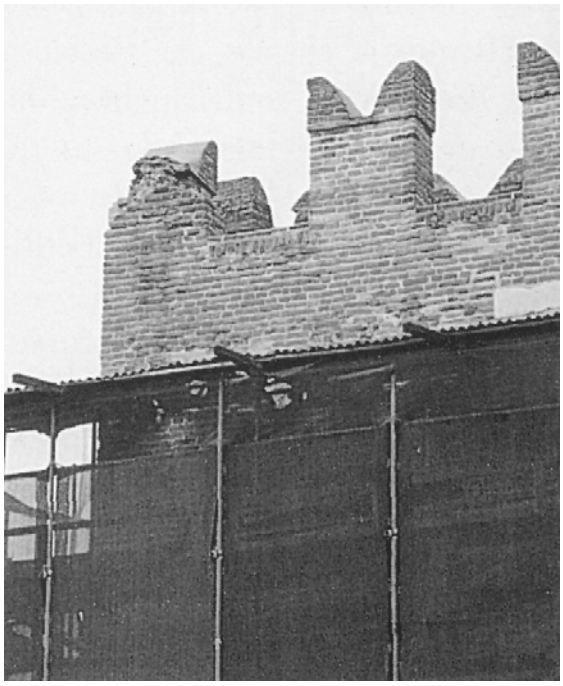


Figura 3.12 – Particolare del merlo danneggiato dal fulmine del 14/09/1997

Figura 3.13 – Prove di pulitura dell'intradosso della volta

Finiti i lunghissimi lavori di pulitura si era proceduto al consolidamento delle parti superficiali che potevano presentare rischi di distacco, tramite l'iniezione di apposite resine. Infine sono state rimosse anche quelle ormai inutili grappe metalliche inserite sul paramento lapideo nel corso dei secoli ( soprattutto l'ultimo ), infatti

ora, dopo l'iniezioni di consolidanti, l'efficacia di questi ammorsamenti superficiali è del tutto limitata. Anzi, l'ossidazione delle grappe costituiva solo un rischio per l'integrità della pietra.

Come tocco finale alle opere di restauro si è steso su tutte le superfici una sorta di speciale pellicola di protezione dagli agenti atmosferici e corrosivi, compresa una copertina in piombo sugli aggetti.

Nel suo complesso l'opera di restauro ha anche dato notevoli frutti a riguardo dell'acquisizione di nuovi elementi probatori ed informazioni sull'arco augusteo, nonché la possibilità di testare nuove tecniche per il restauro e meglio acquisire quelle vecchie.

Fra gli elementi probatori possiamo citarne due particolarmente importanti:

1. La presenza di alloggiamenti di perni sui dadi marmorei, laterali alla sommità, ci consente di confermare l'ipotesi della presenza di statue di coronamento ai lati dell'arco.
2. Sotto la lettera V di VIEIS dell'iscrizione è stato estratto ed esaminato un microcampione che presenta delle tracce di foglia d'oro ( l'oro è stato riconosciuto sia al microscopio da mineralogia, sia al microscopio elettronico analitico ). Questo ritrovamento ci fornisce quindi la prova che le lettere bronzee dell'iscrizione fossero state dorate ( così come si credeva ), in modo da farle meglio risaltare sulla pietra.

Figura 3.14 – Particolare dell'iscrizione in cui compare anche la scritta VIEIS, sotto la lettera V di questa dicitura sono state trovate tracce di foglia d'oro che provano l'antica esistenza di lettere bronzee tutte dorate per essere meglio viste da lontano.

## 3.3 IMMAGINI DELL'ARCO PRIMA E DOPO IL RESTAURO

Qui di seguito riporto una serie di immagini che rappresentano la situazione delle superfici dell'arco prima e dopo l'avvento del restauro, oltretutto riporto anche una galleria fotografica dei lacunari restaurati.

Un capitello dell'Arco, prima e dopo la pulitura.

Figura 3.15 – Un capitello prima e dopo il restauro. In questa immagine si può vedere in maniera oggettiva e concreta quale era lo stato di abbandono e degrado delle superfici lapidee prima dell'ultimo intervento.

Figure 3.16 e 3.17 – Immagini di particolari dell'arco prima e dopo il restauro.

Nella figura 3.16 ( quella sopra ) è possibile notare l'estrema differenza del piedritto lato monte da prima a dopo il restauro, oltre alla asportazione delle antiestetiche e dannose patine superficiali di colore scuro si può osservare anche l'avvenuta rimozione di tutto lo stuolo di grappe metalliche che ormai avevano perso la loro utilità, anzi tramite la loro corrosione aggravavano la già presente fessurazione della pietra.

Nella figura 3.17 ( quella sotto ) è riportato il clipeo raffigurante Nettuno, anche qui si possono notare le benefiche differenze apportate dal restauro.

Particolare del timpano, lato città, prima e dopo il restauro.

Decorazione dei lacunari del timpano, prima e dopo il restauro.

Figure 3.18 e 3.19 – Particolari architettonici dell'arco prima e dopo il restauro.
Nella raffigurazione 3.18 ( quella sopra ) è stata fotografata la situazione del timpano prima e dopo il restauro, anche qui si vedono notevoli differenze.
Nella figura 3.19 ( quella sotto ) è stata messa in evidenza la situazione dei lacunari del timpano prima e dopo il restauro.

Figura 3.20 – Lacunari del fronte verso Roma

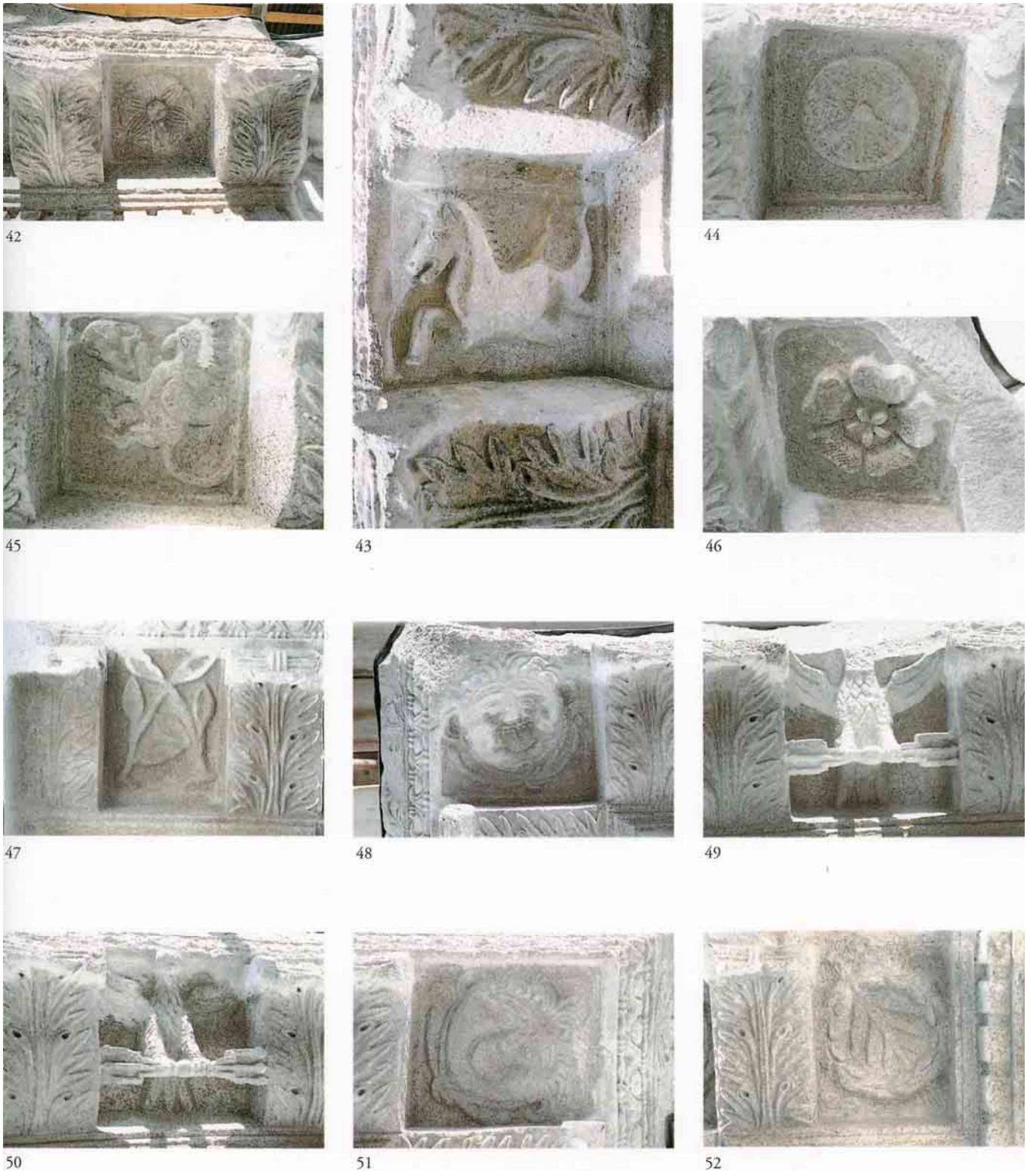



Figura 3.21 – Lacunari del fronte verso Roma

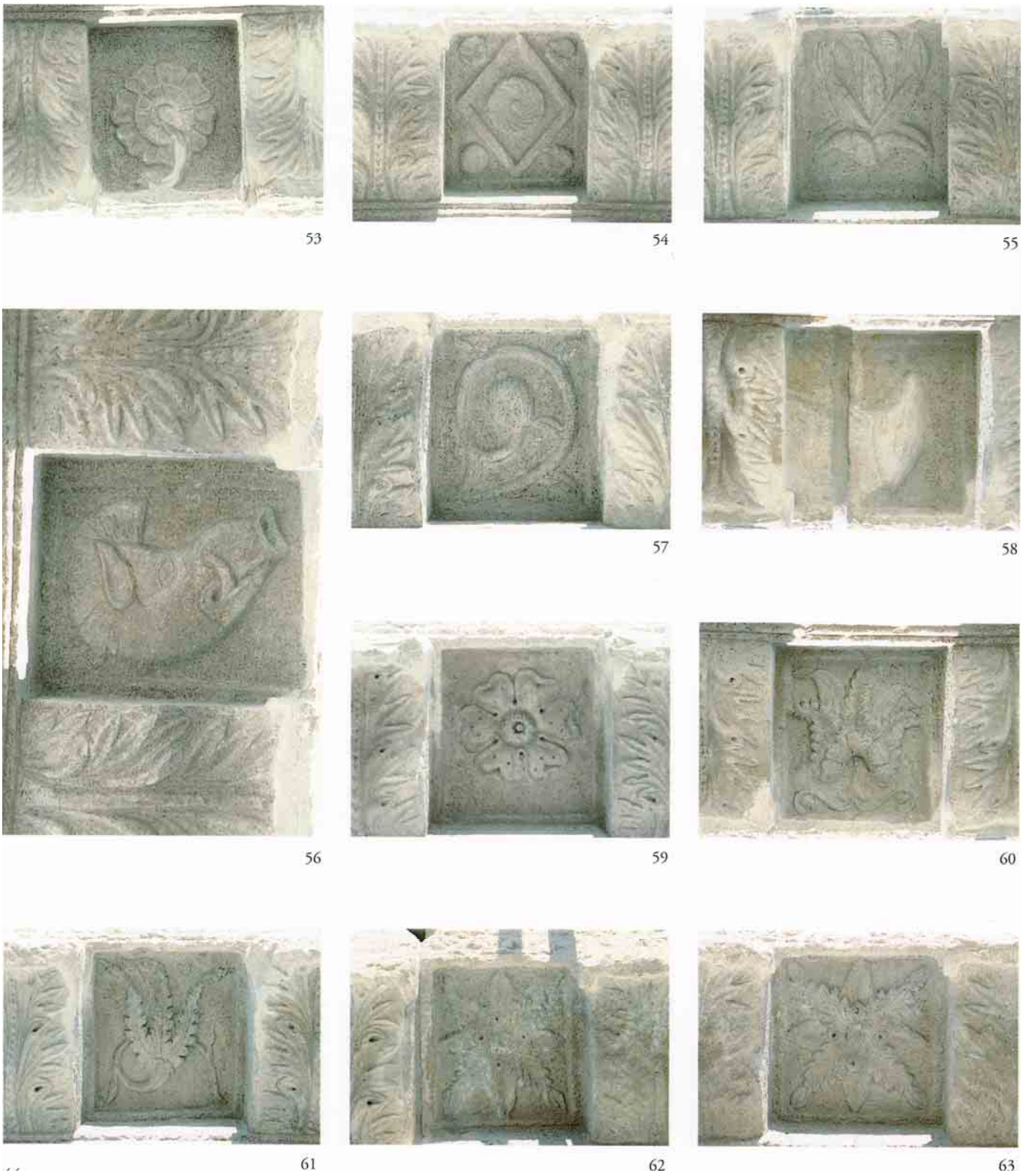



Figura 3.22 – Lacunari del fronte verso Roma

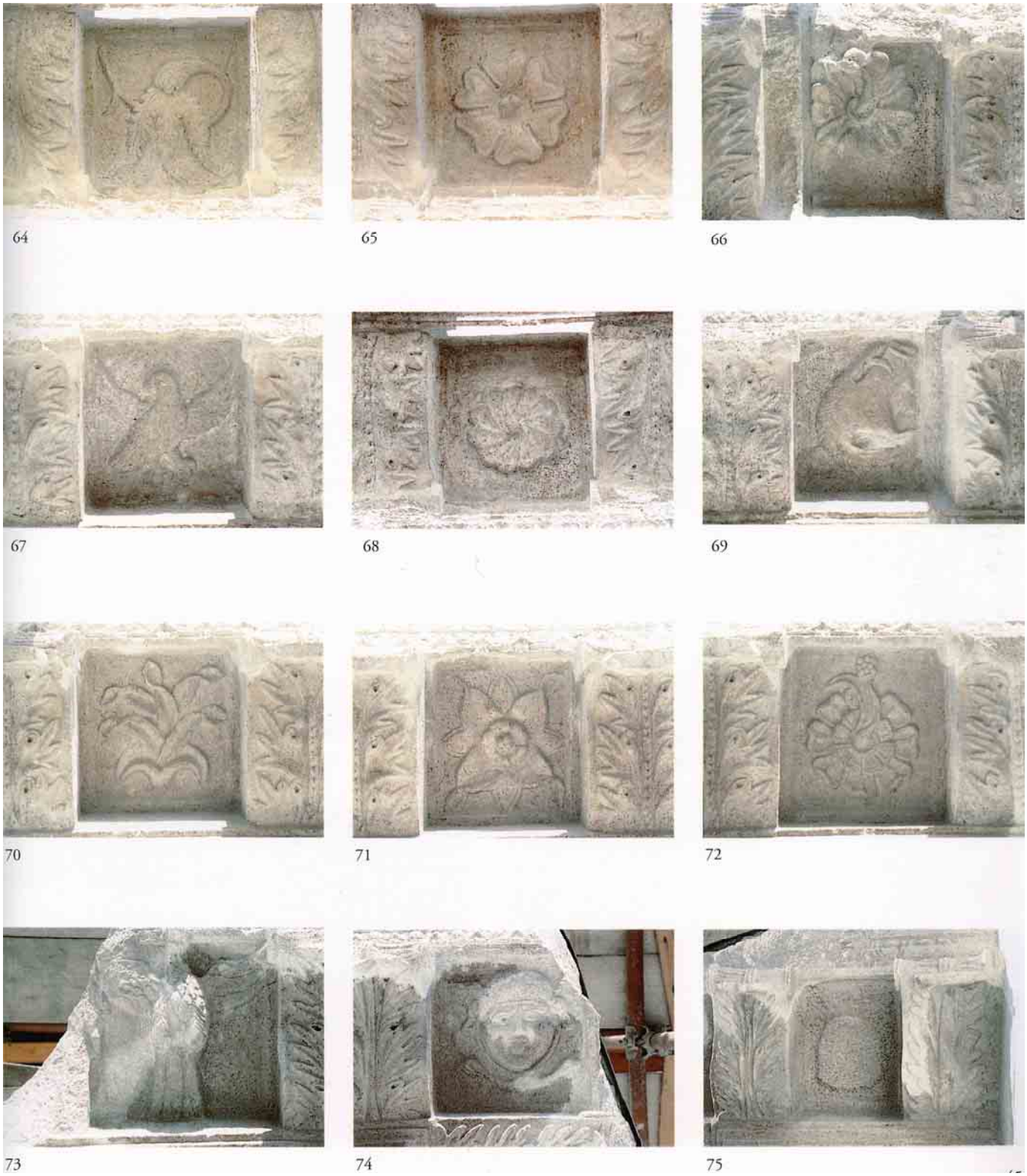



Figura 3.23 – Lacunari del fronte verso Roma

Figura 3.24 – Lacunari del fronte verso Rimini

Figura 3.25 – Lacunari del fronte verso Rimini

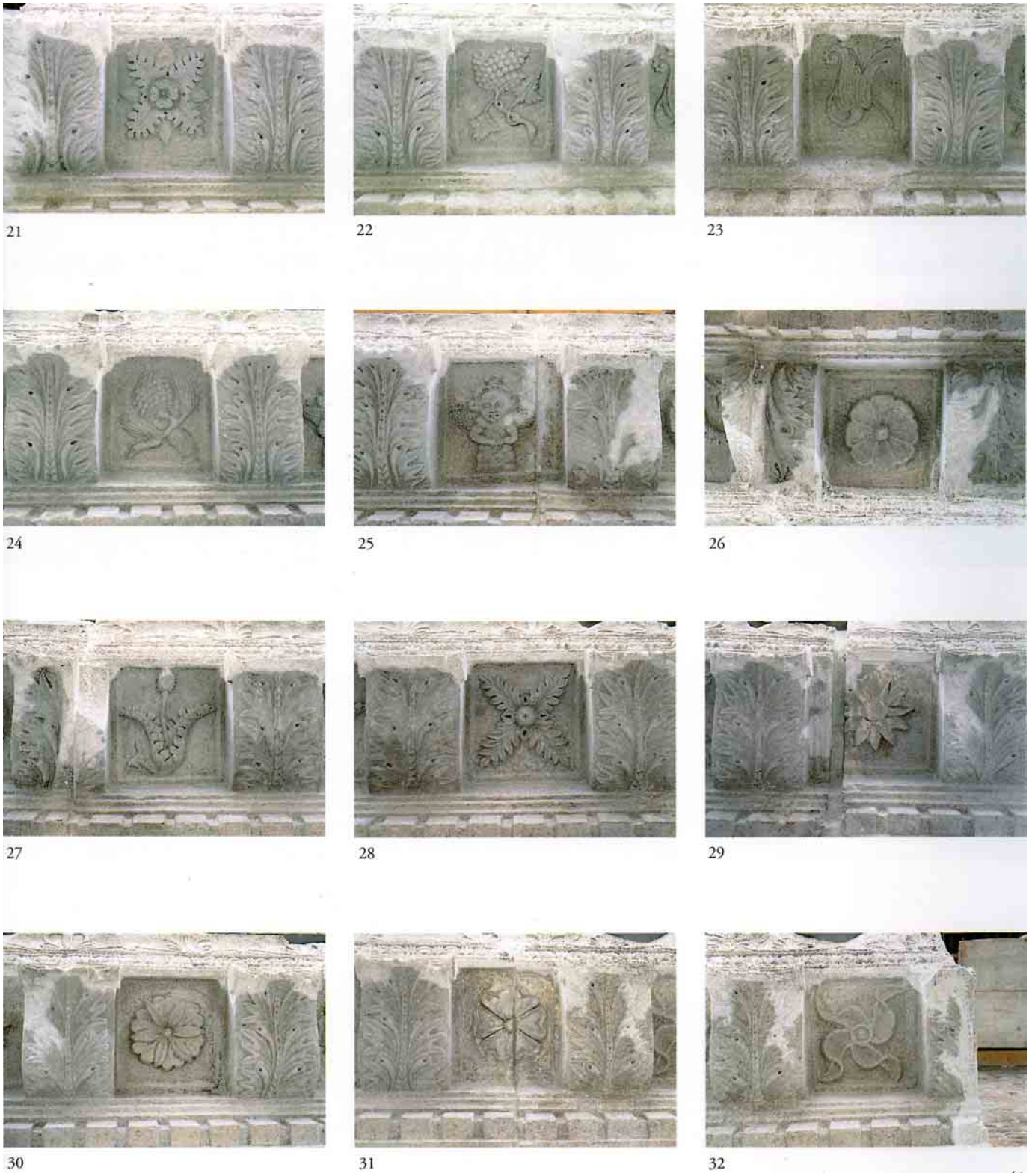



Figura 3.26 – Lacunari del fronte verso Rimini

# Capitolo IV

Quelli che non vogliono imitare qualcosa, non producono nulla.
Salvador Dalì ( 1904 – 1989 )

# IL CONTROLLO E MONITORAGGIO TOPOGRAFICO DELLE STRUTTURE EDIFICATE

## 4.1 INTRODUZIONE

L'analisi dell'evoluzione dei movimenti e deformazioni nelle strutture edificate costituisce un problema di notevole interesse per l'ingegneria territoriale e strutturale, tale analisi è alla base di ogni controllo il cui fine sia quello di indagare sulla sicurezza,stabilità e risposta della struttura alle cause esterne.

Le attuali tecnologie e conoscenze nel campo del rilevamento permettono di risolvere molto bene il problema del monitoraggio geometrico delle strutture, oggi si raggiungono precisioni e dettaglio che fino a qualche decennio fa erano impensabili. Queste ampliate prestazioni nell'ambito del rilevamento degli oggetti terrestri, permettono di seguire nell'arco del tempo, con precisioni anche sub-centimetriche, l'andamento dei fenomeni deformativi nei suoi minimi particolari.

Tramite le odierne strumentazioni e metodologie di rilievo è quindi possibile seguire l'evoluzione deformativa di svariate tipologie di edifici, anche di quelli più complessi dal punto di vista della loro geometria e forma, con un impegno di mezzi e dispendio di risorse sempre più limitate. Ovvero, come dimostrato in questa tesi, anche con l'impiego di mezzi modesti,economici e grazie alla crescente potenza degli elaboratori è possibile ottenere discreti rilievi di tutte le tipologie architettoniche.

Mentre un tempo mastodontiche e complicate operazioni di rilievo finanziate con ingenti spese, venivano commissionate solamente per pochi edifici di notevole interesse storico ( es. monumenti di grande importanza ) o strutturale ( es. strutture la cui stabilità era ritenuta precaria ); oggi ed in futuro sarà sempre più facile e meno costoso estendere il monitoraggio ad una più svariata tipologia di strutture minori e di minor interesse.

## 4.2 AZIONI SULLE STRUTTURE

Tramite le tecniche topografiche è possibile quindi seguire l'andamento della deformazione nella struttura in esame attraverso il controllo della posizione spaziale di un certo numero di punti appartenenti all'oggetto rilevato.
In sostanza quello che noi osserviamo è l'effetto di una serie di azioni ( forze ) che agiscono sulla struttura e che la inducono a deformarsi.
La comprensione di quali forze possono indurre la struttura ad assumere certe configurazioni è fondamentale se si vuole ben comprendere tutto il meccanismo di deformazione.
La classificazione delle azioni che agiscono su di una struttura può essere fatta nel seguente modo:
- Azioni statiche: quando risultano applicate alle stesse strutture senza causare accelerazioni significative degli insiemi o dei singoli elementi strutturali.
- Azioni dinamiche: quando avviene il contrario.
- Azioni permanenti: quando agiscono praticamente durante tutto il periodo di esercizio della struttura, con trascurabili variazioni di intensità. Esse in generale sono: il peso proprio della struttura, il peso di ciascuna sovrastruttura, le forze indotte dalla pressione del terreno, le deformazioni realizzatesi all'atto della costruzione, le forze risultanti dall'eventuale pressione dell'acqua…

- Azioni variabili: quando agiscono sulle strutture con valori istantanei diversi tra loro, esse possono essere di breve o lunga durata. Fra le azioni variabili di breve durata vengono computate ad esempio l'azione del vento, il sisma e azioni di inerzia dei carichi mobili.
Le variazioni termiche, variazioni di livello ecc, possono essere considerate sia di breve che di lunga durata, a seconda di quale percentuale sussistono sull'intera vita utile della struttura.
- Azioni libere: quando la loro distribuzione spaziale sulla struttura non è determinata.
- Azioni fisse: quando la loro distribuzione spaziale sulla struttura è ben determinata.
Spesso però sulle strutture non agiscono solo delle forze, ma anche degli spostamenti indotti, causati per lo più da cedimenti vincolari e da fenomeni di subsidenza del terreno. ( ma anche da variazioni termiche ) Questi spostamenti impressi sono il più delle volte la causa di danneggiamento degli edifici, soprattutto di quelli ad elevata rigidezza, come le costruzioni in muratura. Infatti la stragrande maggioranza degli edifici presentano una struttura portante iperstatica, e come è ben noto, su tali strutture una deformazione impressa si trasforma in uno stato tensionale interno che potrebbe mettere in crisi il materiale. Di qui si comprende l'utilità di seguire l'andamento deformativo delle costruzioni.

## 4.3 IL CONTROLLO FOTOGRAMMETRICO DEI MONUMENTI ARCHITETTONICI

Il controllo periodico dei monumenti architettonici ha per oggetto principale lo studio dell'evoluzione della loro geometria strutturale, e la documentazione del loro stato consistenza e di conservazione.
In particolare, esso si realizza rappresentando accuratamente la loro forma strutturale, analizzando le alterazioni di geometria che particolarizza i relativi elementi del monumento, studiando le

eventuali variazioni nella giacitura degli stessi nello spazio tridimensionale.

La fotogrammetria numerica si presenta come una metodologia ad hoc per questo tipo di studi, integrandola anche con misurazioni fatte con il laser scanning si possono ottenere informazioni metriche di elevata precisione, nonché indicazioni di carattere descrittivo e qualitativo sulle stesse strutture documentate, rese possibili dalla rappresentazione fotografica.

Il principale vantaggio che emerge dall'utilizzo della fotogrammetria rispetto al rilievo topografico tradizionale è nella possibilità di seguire lo spostamento nel tempo di un'infinità di punti appartenenti al monumento stesso; si ottiene quindi una maggiore uniformità dell'informazione metrica. Questo pregio si paga con una minore accuratezza del rilievo rispetto a quello eseguito con una total station, la quale però permette di controllare solamente un limitato numero di punti.

Altro vantaggio fondamentale della fotogrammetria impiegata nel rilievo beni culturali è quello di poter eseguire in tempi rapidi tutte le operazioni di rilievo sul campo, infatti la parte predominante del lavoro ( orientamento e restituzione ) viene eseguita in laboratorio; oltretutto la tecnica fotogrammetrica si presenta come una metodologia di rilievo non invasiva e permette di ridurre al minimo indispensabile le misure dirette da eseguire sulle strutture stesse.

La fotogrammetria risulta molto impiegata nel controllo delle strutture edificate anche perché, oltre ai motivi già esposti, è una tecnica estremamente versatile, che si adatta ad ogni possibile condizione ed esigenza di rilievo. Tramite la giusta scelta ed impiego dei mezzi fotogrammetrici è possibile ottenere prodotti metrici vettoriali, raster, digitali, modelli numerici 3D, DTM, DSM, ortofoto e si può spaziare fra svariati gradi di precisione.

In particolare, per lo studio di deformazioni e movimenti delle strutture edificate si va a richiedere il massimo delle prestazioni in termini di accuratezza della misura, grado di dettaglio e risoluzione dell'immagine fotografica. Per giungere a tale scopo sono da preferire l'utilizzo di camere metriche di precisione, adottando prevalentemente uno schema di presa pseudo-normale; è necessaria anche una determinazione accurata delle coordinate spaziali di un discreto numero di punti fotogrammetrici di appoggio possibilmente artificiali e ben materializzati sul monumento stesso. La restituzione andrebbe fatta in stereoscopia mediante l'utilizzo di uno stereorestitutore di classe elevata. Inoltre per seguire l'evoluzione del fenomeno deformativo sarà bene materializzare tramite dei punti un sistema di riferimento locale ritenuto fisso e non solidale alla struttura in esame.

La metodologia da seguire nella determinazione delle deformazioni, o scostamenti relativi, e dei movimenti, o scostamenti assoluti, può essere, a seconda dei casi sia di tipo variometrico che di tipo differenziale.

Le due procedure sono infatti in grado di offrire entrambe utili informazioni nella determinazione di deformazioni plastiche ed elastiche, nell'evidenziare spanciamenti ed affossamenti, e nell'individuare mutazioni di varia entità e natura.

Tramite il metodo variometrico in sostanza si può indagare sulla variazione di distanza reciproca fra i vari punti rilevati, è quindi possibile notare se si sono instaurate delle deformazioni nella geometria della struttura, ma non è possibile vedere se il complesso strutturale ha subito una rototraslazione rigida.

Se si vuole impiegare un metodo variometrico non è necessario stabilire un sistema di riferimento locale ritenuto fisso e non solidale all'oggetto, anzi, fra i diversi rilievi eseguiti in tempi differenti è possibile avere anche diversi sistemi di riferimento. Tanto quello che importa non è la posizione spaziale di ogni punto rilevato nei vari

momenti, ma quanto la distanza reciproca fra i vari punti e la geometria della struttura stessa.

Se invece si vuole seguire il metodo differenziale è necessario stabilire e materializzare un sistema di riferimento locale ritenuto fisso e non solidale all'oggetto da rilevare, questo sistema di riferimento dovrà poi essere utilizzato per tutte le future operazioni di rilievo dell'oggetto.

Tale sistema di riferimento potrebbe essere anche quello "assoluto" cartografico piano in utilizzo nella zona in cui si esegue il rilievo, oppure si potrebbe utilizzare anche un insieme di punti di coordinate GPS. In tal modo in rilievo verrebbe georeferenziato ed inserito in un sistema di riferimento globale.

Tramite il metodo differenziale si vanno quindi a confrontare i valori che assumono in diversi momenti le coordinate spaziali di svariati punti dell'oggetto rilevato. In questo modo, oltre alla misurazione delle deformazioni avvenute nella struttura è possibile notare anche un'eventuale rototraslazione rigida della stessa.

Altro vantaggio della fotogrammetria rispetto alle altre metodologie di rilievo è che volendo si possono eliminare del tutto le misurazioni da fare sull'oggetto, questo può essere molto utile quando si devono fare delle misure su di beni culturali che non possono essere in alcun modo raggiunti ed intaccati. Questa metodologia non è altro che la cosiddetta fotogrammetria diretta, ovvero quando si passa direttamente alla fase di restituzione senza prima essere passati per la fase di orientamento, questo salto è possibile perché sono noti già a priori tutti i paramenti di orientamento di tutte le prese fatte.

In certi casi la fotogrammetria diretta può essere molto utile per monitorare quei monumenti in cui non è possibile o non è preferibile fare delle misurazioni di appoggio che potrebbero rovinare la struttura stessa. In questi casi si utilizzano delle stereocamere in modo da avere gli assi delle prese perfettamente normali fra loro, oppure si possono

utilizzare anche dei fototeodoliti che ci permettono di conoscere la posizione e l'assetto della camera al momento dello scatto.

Nel caso di coppie stereoscopiche di fotogrammi l'analisi metrica della situazione emergente potrà essere affidata allo studio di variazioni delle parallassi orizzontali dei punti tenuti sotto controllo.

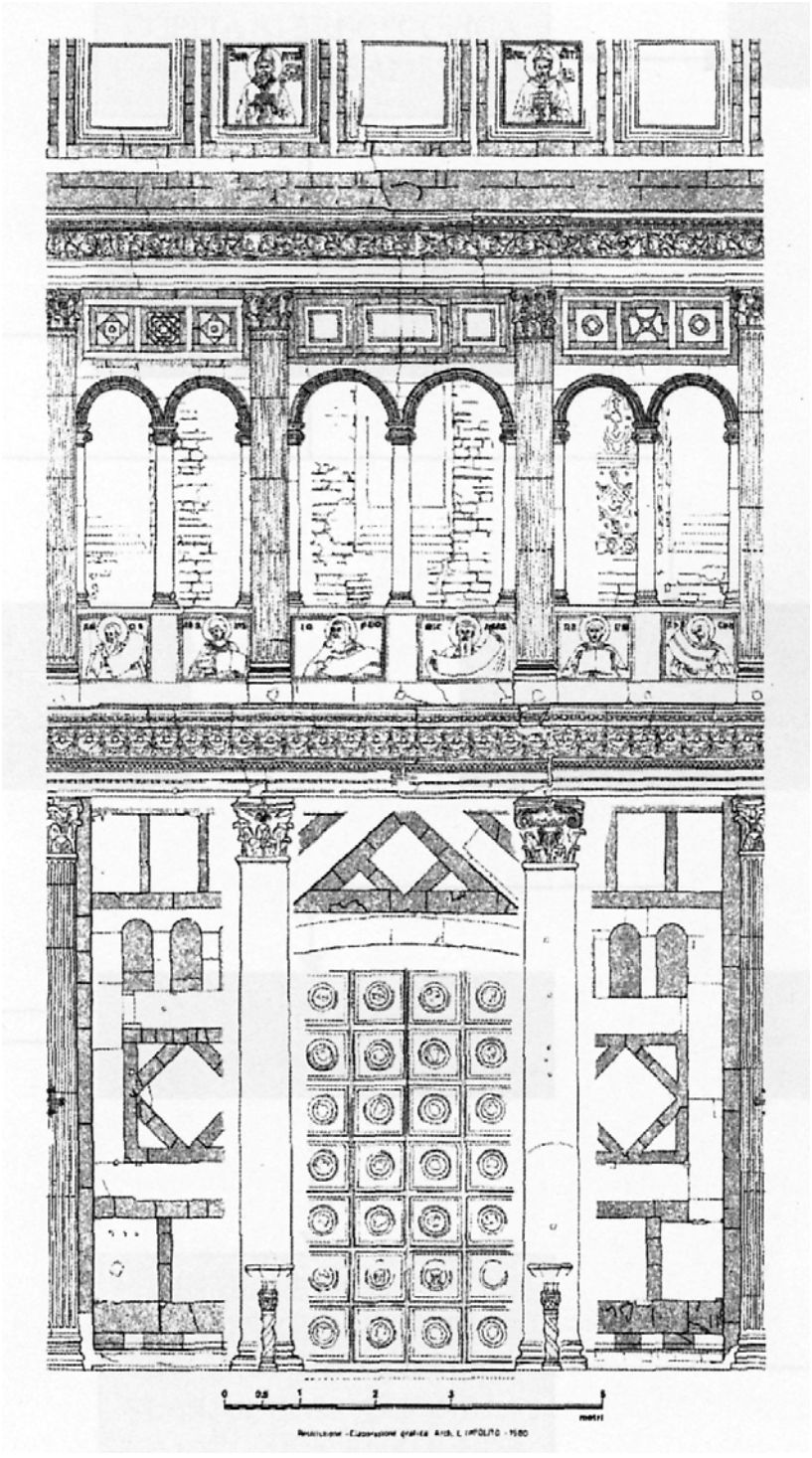


Figura 4.1 – Rilevamento fotogrammetrico dell'interno del Battistero di San Giovanni in Firenze, con la documentazione del quadro fessurativo relativo alla struttura ed al rivestimento marmoreo. Scala 1:100

A seconda delle necessità, la restituzione fotogrammetrica potrà condurre ad elaborati grafici e/o numerici. E' comunque sempre importante che i risultati di volta in volta ottenuti siano espressi sempre in forma numerica, oltre che grafica, per consentire in seguito le necessarie elaborazioni statistiche interpretative.
La forma numerica consente infatti di realizzare il modello numerico delle strutture architettoniche controllate, indispensabile per la messa a punto di modelli stocastici revisionali, particolarmente utili per la progettazione di eventuali presidi di salvaguardia.

## 4.4 IL CONTROLLO STATICO DALL'ANALISI DI RILIEVI

Alla fine di tutte le fasi di rilievo si giunge alla restituzione fotogrammetrica, che come è già stato detto può essere fatta in forma grafica e/o numerica. Attualmente con l'evoluzione dell'informatica si tende a fornire entrambi i prodotti di output; in particolare il prodotto numerico risulta sempre molto più interessante, in quanto si conserva bene nel tempo e fornisce dati maggiormente accurati rispetto alle classiche rappresentazioni grafiche piane, quali: prospetti, sezioni, alzati, piante, profili. Oltretutto il modello numerico dell'oggetto rilevato può essere salvato in diversi formati digitali, e può così essere esportato da un software ad un altro, con evidenti vantaggi per quanto riguarda la visualizzazione e l'elaborazione; dal prodotto numerico è possibile poi ottenere visualizzazioni 3D dell'oggetto, creare filmati video o muoversi in realtà virtuale attorno ad esso. Dal prodotto 3D è altresì possibile ricavare le classiche rappresentazioni grafiche piane.
Un primo controllo strutturale sul monumento può essere fatto quindi su di tali rappresentazioni grafiche piane e/o anche in realtà virtuale; dall'analisi e misurazioni metriche fatte su di questi elaborati è in seguito possibile ottenere già delle approssimative indicazioni sullo stato deformativo-fessurativo dell'oggetto. Difatti spanciamenti, infossamenti, disassamenti, rotazioni, strapiombi, mancanza di

verticalità, disallineamenti, non complanarità, e deformazioni varie rilevate sul monumento forniscono un primo quadro della situazione statica della struttura, dalle anomalie geometriche e formali è cioè possibile capire in modo generico la condizione deformativa e tensionale della costruzione.

Se le irregolarità geometriche riscontrate in questa fase non vengono ritenute preoccupanti per la sicurezza di stabilità dell'opera, allora non si prosegue con una più dettagliata analisi strutturale, in quanto ritenuta superflua. In tutti gli altri casi, ed anche in quelli in cui il monitoraggio dell'edificio rivela un rapido evolversi dei fenomeni deformativi, conviene approfondire la questione attraverso analisi di stabilità sempre più affinate. I metodi di calcolo possono essere di tutti i tipi: da quelli preliminari basati su di schemi statici molto semplificati, via via fino a quelli maggiormente sofisticati basati su metodologie numeriche agli elementi finiti.

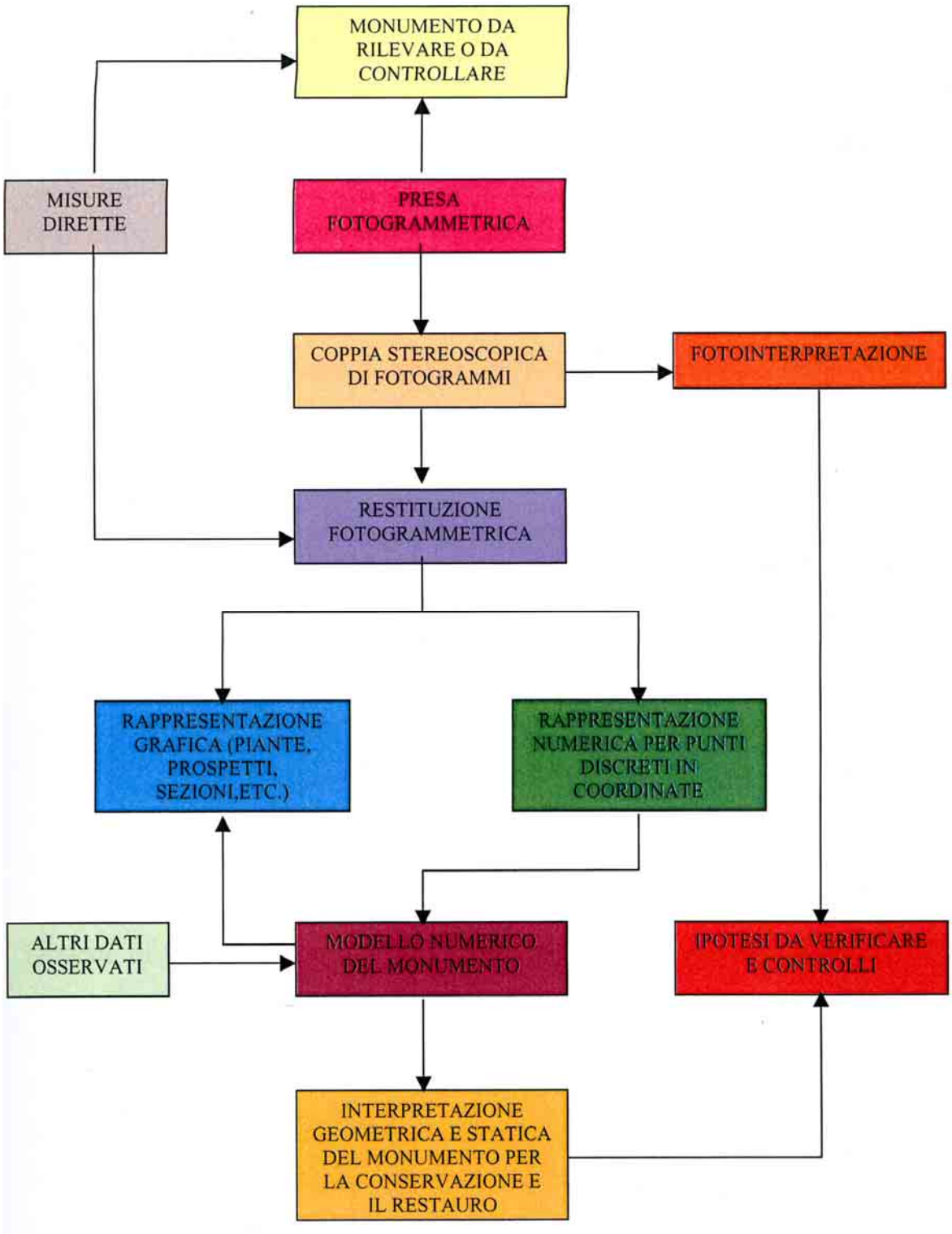
In particolare, quest'ultima permette, tramite la costruzione di un adeguato modello strutturale, di indagare nei minimi dettagli lo stato tensionale e deformativo dell'oggetto in esame; in sostanza si cerca ( con diverse approssimazioni ) di simulare il comportamento meccanico della realtà. In concomitanza alla realizzazione del modello strutturale ( governato dal modello reologico, modello delle azioni e modello geometrico ) sarà bene provvedere alla determinazione ( diretta o indiretta, tramite prove distruttive o non ) del comportamento meccanico-reologico dei materiali impiegati nell'edificio. Di qui si può capire l'utilità di possedere un elaborato fotogrammetrico numerico: tale documento digitale può essere esportato direttamente in un software per l'analisi agli elementi finiti, fornendo subito il modello geometrico della struttura da indagare.

Altrettanto importante è posizionare sulla struttura da modellizzare degli strumenti di misura, quali martinetti, estensimetri, accelerometri, pressiometri, dinamometri…, in quanto i dati sperimentali forniti da

siffatti strumenti serviranno per calibrare il modello numerico strutturale dell'oggetto.

Eseguite tutte queste operazioni giungiamo alla messa a punto di un modello strutturale agli elementi finiti che non solo è in grado di fornirci in modo dettagliato il quadro statico attuale, ma con questo modello semplificato della realtà possiamo simulare eventi sismici, azioni del vento, azioni termiche, cedimenti del terreno, deformazioni impresse ed ogni altro tipo di azione in modo da prevedere in anticipo quali potrebbero essere situazioni di rischio che in futuro potrebbero presentarsi. Ad esempio: dalla simulazione del modello potremmo riscontrare che un cedimento localizzato del terreno di ulteriori cm 5 a quelli già accumulati metterebbe in crisi certe zone della struttura, quindi alla conoscenza di ciò, potremmo intervenire preventivamente per evitare il danno e futuri interventi di restauro attraverso un consolidamento del terreno di sottofondazione e/o migliorando la fondazione stessa per far si che la struttura arresti il suo processo di subsidenza.

In conclusione si può ben comprendere come la tecnica fotogrammetrica ( tradizionale o non ) sia uno strumento perfettamente integrabile alle metodologie di calcolo strutturale, in quanto è in grado di fornire dettagliati modelli geometrici numerici ( anche tridimensionali ) che sono essenziali per un preciso controllo e monitoraggio della stabilità della struttura nonché di tutte le variazioni di assetto,posizione e forma dei suoi elementi.


MONUMENTO DA RILEVARE O DA CONTROLLARE
MISURE DIRETTE
PRESA FOTOGRAMMETRICA
COPPIA STEREOSCOPICA DI FOTOGRAMMI
FOTOINTERPRETAZIONE
RESTITUZIONE FOTOGRAMMETRICA
RAPPRESENTAZIONE GRAFICA (PIANTE, PROSPETTI, SEZIONI,ETC.)
RAPPRESENTAZIONE NUMERICA PER PUNTI DISCRETI IN COORDINATE
ALTRI DATI OSSERVATI
MODELLO NUMERICO DEL MONUMENTO
IPOTESI DA VERIFICARE E CONTROLLI
INTERPRETAZIONE GEOMETRICA E STATICA DEL MONUMENTO PER LA CONSERVAZIONE E IL RESTAURO

# Capitolo V

La teoria è quando si sa tutto ma non funziona niente.
La pratica è quando funziona tutto ma non si sa il perché.
In ogni caso si finisce sempre con il coniugare la teoria con la pratica:
non funziona niente e non si sa il perché.
Albert Einstein ( 1879 – 1955 )

# RILIEVO TOPOGRAFICO E FOTOGRAMMETRICO DELL'ARCO D'AUGUSTO DI RIMINI

## 5.1 INTRODUZIONE

In questo capitolo viene chiarito come sono state eseguite e progettate tutte le operazioni di rilievo svolte sul campo.
Importante è dire fin da ora che tutta l'intera operazione di rilievo è stata pensata sin dall'origine mediante l'impiego di strumentazioni modeste, questo per dimostrare che anche con pochi e discreti mezzi è possibile, a seguito di un maggior lavoro di elaborazione, ottenere soddisfacenti risultati. Per raggiungere maggiori risultati con un minor dispendio di energie sarebbe stato maggiormente utile impiegare metodologie di rilievo differenti ed utilizzare strumentazioni ad alto rendimento, tipo laser scanning integrato con delle prese fatte da camere fotogrammetriche appoggiato su di una rete topografica di punti di appoggio rilevati tramite total station. Ma in questo caso si è preferito risparmiare al massimo, tale circostanza a portato ad optare per un rilevo topografico di appoggio realizzato mediante una semplice cordella metrica ed un rilievo fotogrammetrico effettuato per mezzo di una fotocamera amatoriale digitale. Infine l'elaborazione dei dati, nonché la restituzione, è stata fatta tramite il software PhotoModeler che permette di lavorare solamente in monoscopia con gli evidenti limiti che esso comporta.
Lo scopo del rilievo che si andava ed eseguire era quello di produrre un prodotto vettoriale 3D dell'arco in cui tramite diversi layer si

andassero a visualizzare i vari elementi che compongono la struttura rilevata, in particolare ci si prefiggeva di rappresentare con delle linee tutte le discontinuità principali. Inoltre era stato pensato di rappresentare l'arco evidenziando tutte le discontinuità fra un blocco di pietra e l'altro, in modo da avere un sufficiente grado di dettaglio anche sullo stato dei vari conci lapidei.
Oltre all'indispensabile rappresentazione vettoriale in 3D, che ci permette di analizzare nel complesso la forma ed assetto spaziale della struttura, era anche necessario possedere qualche prodotto raster, così la scelta ottimale è caduta sulla rappresentazione in ortofoto dei due prospetti del monumento augusteo.
Prima di qualunque fase preliminare al rilevo mi ero prefissato di raggiungere una precisione media superiore a circa cm. 2 su tutto il rilevo ( precisione valutata con un limite di confidenza pari al 95% ), inoltre mi ero proposto anche di determinare, con una certa approssimazione, la verticalità della struttura: ovvero trovare alcune linee sicuramente verticali, sulle quali indirizzare l'asse z del sistema di riferimento locale su cui sono date tutte le coordinate spaziali dei punti rilevati.

## 5.2 OBIETTIVO DEL RILIEVO

Sempre importante è tenere a mente lo scopo finale per cui si va ad eseguire un rilievo, ovvero sapere a cosa dovrà servire questo rilevamento: servirà per un restauro? Per creare una cartografia? Per controllare e monitorare lo stato deformativo di una struttura? Per l'inserimento di un manufatto all'interno di una cartografia o di un sistema informativo territoriale?...ecc…
Ogni situazione richiede infatti un particolare rilievo dotato di una certa precisione ed un certo grado di dettaglio della rappresentazione che può essere ottenuto, a seconda dei casi, con diverse metodologie e strumentazioni di rilevo. Quindi è sempre bene sapere per quale fine

viene commissionato un rilievo, altrimenti si rischia di sprecare notevoli risorse per ottenere un rilievo molto accurato e preciso che però non servirà. Oppure può avvenire anche il contrario: si spende poco e si utilizzano strumentazioni e metodologie di rilevamento inadatte, le quali portano ad un prodotto che non è in grado di soddisfare le esigenze richieste. Nel caso in esame, essendo già fissate le metodologie di rilievo e le strumentazioni a disposizione ( fotocamera amatoriale digitale, cordella metrica, target adesivi, filo a piombo ), non si è potuto far altro che ottenere il massimo da esse; si è quindi cercato di giostrare la situazione intervenendo su di altri parametri, come ad esempio la scala media delle prese, la ridondanza delle misure, il numero ed assetto-posizione delle prese, ecc…

Nonostante il vincolo della strumentazione ( che non poteva essere scelta ) già da prima dell'inizio del lavoro, sulla base di conoscenze teoriche ed esperienze di rilievo, si era quasi certi di poter soddisfare le esigenze richieste: in particolare quelle del grado di dettaglio della rappresentazione ed il grado di precisione delle misure.

Come è già stato detto parzialmente in precedenza, l'obbiettivo del presente rilievo era:

1. Raggiungere una precisione media teorica sulle misure superiore a cm 2. ( considerando un limite di confidenza pari al 95% )
2. Determinare con una discreta precisione la direzione verticale.
3. Rappresentare tutte le principali linee di discontinuità del monumento classificandole tramite diversi layer.
4. Raffigurare tutte le discontinuità fra i vari conci lapidei dell'arco.
5. Ottenere dalla restituzione un elaborato vettoriale 3D ed un prodotto raster.
6. Ottenere due ortofoto in scala 1:100 o 1:50 ( a seconda della precisione delle misure ) dei due prospetti del monumento.

7. Ottenere un modello metrico digitale 3D dell'arco esportabile nel software *Straus7*, in modo da facilitare la creazione del modello geometrico strutturale del monumento.

## 5.3 LA STRUMENTAZIONE DISPONIBILE UTILIZZATA

Come già più volte riferito, la strumentazione a disposizione per il rilievo era un vincolo già imposto a priori, difatti uno degli scopi di questa tesi era dimostrare che pure mediante l'utilizzo di strumenti modesti è possibile ottenere discreti rilievi, sia dal punto di vista della precisione che da quello del grado di definizione e dettaglio dei particolari rilevati.

In specifico la strumentazione disponibile era:

1. Una fotocamera amatoriale digitale ( Nikon Coolpix 5400 ) sottoposta a preventiva calibrazione.
2. Una cordella metrica.
3. Alcuni Target Tape adesivi.
4. Un filo a piombo.

### *5.3.1 La camera digitale amatoriale e la sua calibrazione*

La fotocamera utilizzata nel rilievo è una Nikon Coolpix 5400, essa è una camera digitale amatoriale da 5Mpixel e per questo priva di qualsiasi parametro calibrato. Si è quindi dovuto procedere alla sua calibrazione in laboratorio.

Figura 5.1 – La fotocamera digitale amatoriale Nikon Coolpix 5400

La calibrazione della camera è stata eseguita utilizzando il modulo Camera Calibrator del software PhotoModeler Pro 5.

La calibrazione si basa sull'utilizzo di una griglia appositamente creata per questo modulo ed impressa su di una diapositiva fornita assieme al software.

In tutte le varie fasi della calibrazione sono state seguite le indicazioni fornite dal manuale: è stato fatto scaldare il proiettore, le operazioni sono state eseguite in un ambiente con una grande parete bianca liscia e dimensionalmente adeguata poiché l'immagine del reticolo deve occupare quasi l'intera immagine ed inoltre, come specificato, non è stato usato il flash.

La procedura di calibrazione consiste nell'acquisizione di almeno otto fotografie da diverse posizioni e con diverse angolazioni di presa del reticolo di calibrazione ( vedi figura 5.2 ).

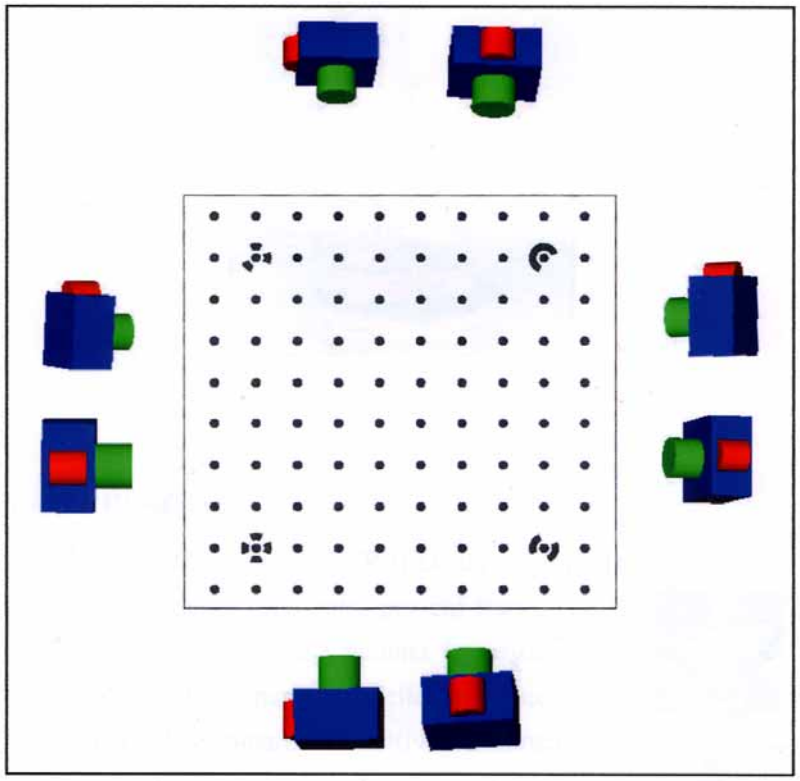


Figura 5.2 – Reticolo di calibrazione utilizzato per determinare i parametri di orientamento interno della fotocamera amatoriale Nikon Coolpix 5400.
Nell'immagine si può notare anche la posizione e l'assetto delle otto prese necessarie per eseguire il processo di calibrazione della camera.

Le immagini vengono importate all'interno del software ed inserite come dato in input; il programma poi stima i parametri di orientamento interno ed i coefficienti del polinomio di distorsione del complesso camera-obbiettivo a partire dalla collimazione automatica dei punti di coordinate note del reticolo, facendo riferimento alla posizione dei quattro punti notevoli e fornisce in output una stima dei parametri di calibrazione della camera. In sostanza i parametri di orientamento interno, i coefficienti del polinomio di distorsione ed altri dati caratteristici della camera vengono ricavati dal processo di compensazione ai minimi quadrati della triangolazione a fasci proiettivi, in quanto questi parametri di calibrazione sono tenuti come incognite e vengono determinati assieme alla posizione ed assetto delle prese durante la fase di orientamento.

Matematicamente consiste nello scrivere due equazioni ( quelle di col linearità ) per ogni punto di coordinate note e per ogni presa fatta, mentre le incognite sono sei per ogni presa eseguita più eventuali altri parametri incogniti come i parametri di calibrazione e/o le coordinate di punti da rilevare; ovviamente perché il sistema sia risolvibile si necessitano di più equazioni che incognite; in questo caso la soluzione del sistema ridondante si ottiene attraverso la compensazione ai minimi quadrati.

Questo metodo di calibrazione ( detto autocalibrazione ) viene realizzato solamente sulle camere non fotogrammetriche, in quanto non è un procedimento molto preciso, mentre sulle camere metriche la determinazione dei parametri di calibrazione viene svolta in laboratorio attraverso l'utilizzo di un fotogoniometro.

In modo alternativo, per calibrare la fotocamera amatoriale si sarebbe anche potuto procedere riprendendo, sotto diverse angolazioni e postazioni, una figura poliedrica 3D di cui sono ben note le dimensioni e forma. Il procedimento di calibrazione è del tutto analogo a quello con il reticolo piano di coordinate note, solamente

che in questo caso le coordinate dei punti fotogrammetrici di appoggio sono coordinate spaziali dei vertici della figura poliedrica 3D; questo procedimento di calibrazione dovrebbe offrire una migliore precisione. Qualunque metodo si scelga per calibrare una camera alla fine verrà comunque prodotto un certificato di calibrazione, in cui vengono riportati: la data dell'ultima calibrazione, i parametri di orientamento interno del sistema camera-obiettivo, i coefficienti dei polinomi di distorsione radiale e tangenziale o la sua forma grafica per punti, le coordinate immagine delle eventuali marche fiduciali o dei reseau, ecc…

Nel caso in esame la calibrazione della camera amatoriale Nikon Coolpix 5400 ha fornito i valori qui di seguito riportati in figura 5.3

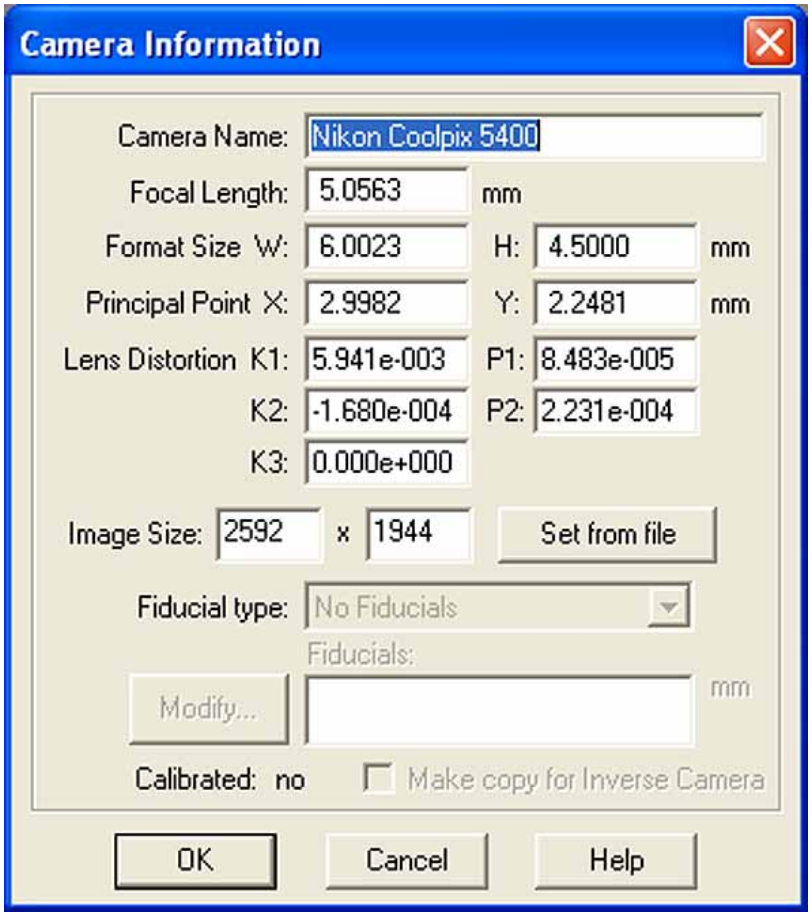



Figura 5.3 – Parametri di calibrazione della camera amatoriale digitale Nikon Coopix 5400

### 5.3.2 La cordella metrica

La cordella metrica è stato l'unico strumento che ha permesso di fare delle misurazioni topografiche sul monumento che in fase di orientamento sono servite per definire dei vincoli di distanza fra i punti artificiali segnalizzati sulla struttura tramite dei target adesivi.
In pratica tramite la cordella metrica si sono misurate diverse distanze fra coppie di punti artificiali materializzati sull'arco attraverso i target tape adesivi, queste misurazioni di distanza sono poi servite durante la fase di elaborazione dati per scalare il modello geometrico digitale dell'oggetto, il quale senza definizioni di distanze è perfettamente in scala nelle le sue parti, ma non è in alcun modo possibile conoscere quale sia la distanza fra due punti qualunque dello stesso; ovvero si ha una rappresentazione in scala dell'oggetto rilevato ma non si conosce il valore numerico di tale scala. In teoria basterebbe aver fatto una sola misurazione fra una coppia di punti appartenenti all'oggetto per scalare il modello, ma è preferibile eseguire più misurazioni in modo da avere una ridondanza di misure che poi verrà compensata e ci permetterà anche di riscontrare eventuali errori grossolani.

### 5.3.3 I target tape adesivi

I target tape adoperati nel rilievo dell'arco appartengono alla tipologia raffigurata qui a lato, sono dei "bersagli" adesivi che vengono applicati sulle superfici degli oggetti che si vogliono rilevare, in tal modo si materializzano dei punti stabili e facilmente riconoscibili che dopo misurazioni, verranno utilizzati come punti fotogrammetrici di appoggio.
Nel rilievo dell'arco d'Augusto questi

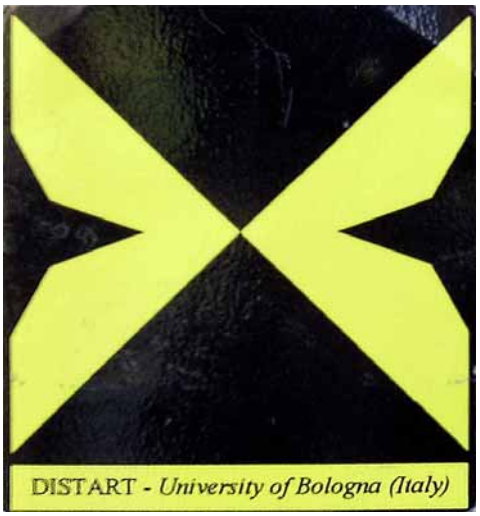


Figura 5.4 – Target Tape

target sono stati adottati per materializzare dei punti che successivamente sono stati impiegati come base per le stime di distanza effettuate tramite la cordella metrica. Si è provato di servirsi anche dei punti naturali come punti di riferimento per operare misurazioni di distanza, ma l'elevata irregolarità delle superfici del monumento ha fatto fallire questo tentativo.

Purtroppo, non avendo a disposizione mezzi di elevazione, non è stato possibile posizionare i target nelle parti alte del monumento, e quindi le sole misurazioni di distanza effettuate con la cordella metrica si sono concentrate tutte nella parte inferiore della struttura; questo limite ( com'era previsto ) è stato di notevole intralcio e disturbo nella successiva fase di orientamento delle prese eseguite, in quanto ha impedito di vincolare tramite misure di distanza ( come si sarebbe voluto ) le coordinate dei punti situati nella parte superiore dell'arco, che avrebbe permesso di ottenere una maggior precisione ed affidabilità metrica di questi punti.

Di norma i punti fotogrammetrici di appoggio andrebbero scelti con una distribuzione uniforme sulla struttura da rilevare, e si dovrebbero posizionare in modo da coprire l'intera area da rilevare, ovvero devono essere distribuiti uniformemente sul piano, quanto sulla profondità dell'oggetto. La chiusura della zona delimitata dai punti di appoggio scelti dovrebbe delimitare un volume che possa contenere l'oggetto del rilievo.

### *5.3.4 Il filo a piombo*

Il filo a piombo utilizzato nel rilievo dell'arco d'Augusto è quello riportato nella figura 5.5, esso è stato utilizzato per tre volte in tre diverse postazioni, questo per avere la definizione di tre linee sicuramente verticali su cui indirizzare ( in fase di orientamento ) l'asse z del sistema di riferimento locale su cui sono state date tutti i valori delle coordinate dei punti rilevati.

Come per la disposizione dei punti fotogrammetrici d'appoggio, anche per la collocazione del filo a piombo ci sono delle regole del buon rilievo che purtroppo in questo caso non è stato possibile seguire. Difatti la sistemazione delle linee verticali,materializzate tramite il filo a piombo andrebbero disposte per tutta l'altezza dell'oggetto del rilievo ed il loro numero dovrebbe essere il maggiore possibile, in modo da poter attuare la solita compensazione delle misure ridondanti che ci permette di ottenere una maggior affidabilità delle misure nonché una migliore precisione delle stesse. Nel rilievo dell'arco d'Augusto, purtroppo non avendo, come già detto, mezzi di elevazione non è stato possibile far partire il filo a piombo dalla sommità della struttura per poi farlo calare fino a terra. Quindi l'unica soluzione che è stata possibile attuare, che non intaccasse in alcun modo il monumento, è quella che si vede qui a lato: il filo a piombo è stato vincolato all'estremità di un'asta fissata stabilmente da un operatore, il colore rosso è stato scelto ad hoc per essere meglio visualizzato nelle prese, inoltre il filo è stato segmentato tramite delle palline bianche in due campi di lunghezza nota. La suddivisione è stata fatta per ottenere ulteriori vincoli di distanza utilizzabili nella successiva fase di scalatura del modello geometrico dell'arco, in

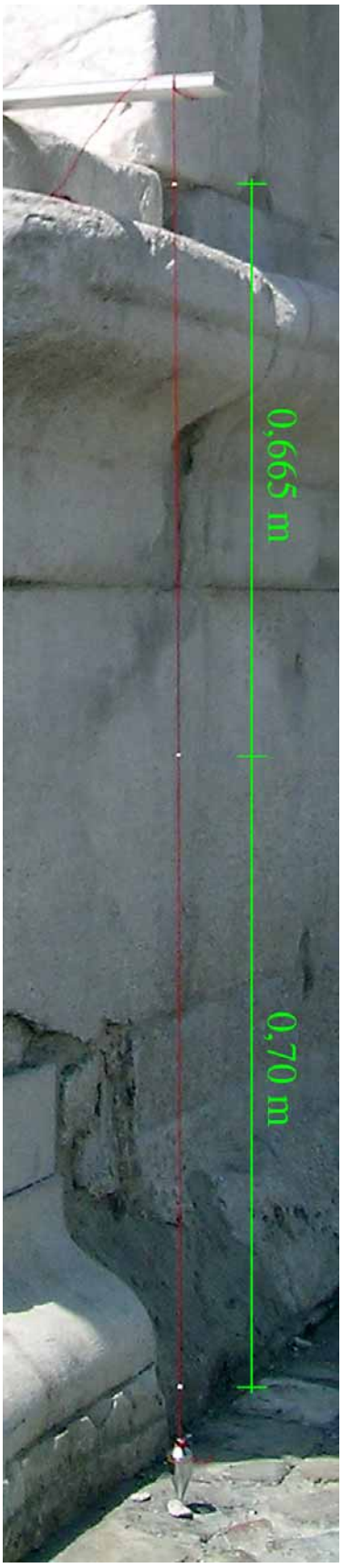



Figura 5.5 – Filo a piombo.

tal modo si andava ad aumentare la ridondanza delle misure di distanza già effettuate fra le coppie di punti materializzati con i target adesivi. Purtroppo la scarsa lunghezza del filo a piombo non permette di definire delle linee verticali con molta precisione, ma bisogna anche sottolineare che la limitata lunghezza dello stesso a fatto si che le oscillazione dovute al vento si riducessero al minimo, con gli evidenti vantaggi che ne conseguono.

## 5.4 RICOGNIZIONE, EIDOTIPO E PROBLEMATICHE

Prima di iniziare qualunque tipo di operazione di rilevamento è stata effettuata una spedizione nel luogo dove si erige l'arco in modo da poter comprendere al meglio le problematiche che si sarebbero dovute risolvere nelle fasi successive del rilievo. Infatti la ricognizione sul terreno comporta sempre la soluzione di vari problemi di carattere metodologico e di carattere pratico perché comporta riflessioni su diversi settori che si servono di metodologie e tecniche specifiche, se pur nel quadro di uno stesso programma. Spesso, prima di eseguire un sopralluogo si preferisce indagare sull'oggetto del rilievo attraverso l'analisi di documenti vari quali: carte topografiche, foto aeree, precedenti rilievi, carte tematiche di vario tipo, ecc…

Questi documenti servono in primis per avere un'idea preventiva di quello che si andrà a misurare, ed in secondo luogo vengono utilizzati durante la ricognizione per ridurre i rischi di dispendiose perdite di tempo e per ottenere una migliore programmazione delle opere da effettuare. Una volta organizzata e pianificata tutta la fase della ricognizione arriva il momento in cui si attua fisicamente il sopralluogo, durante questo momento è bene realizzare un eidotipo, il quale non è altro che una cartina approssimata della zona da rilevare con appuntati tutti gli elementi degni di nota che possono essere utili nelle fasi successive del lavoro.

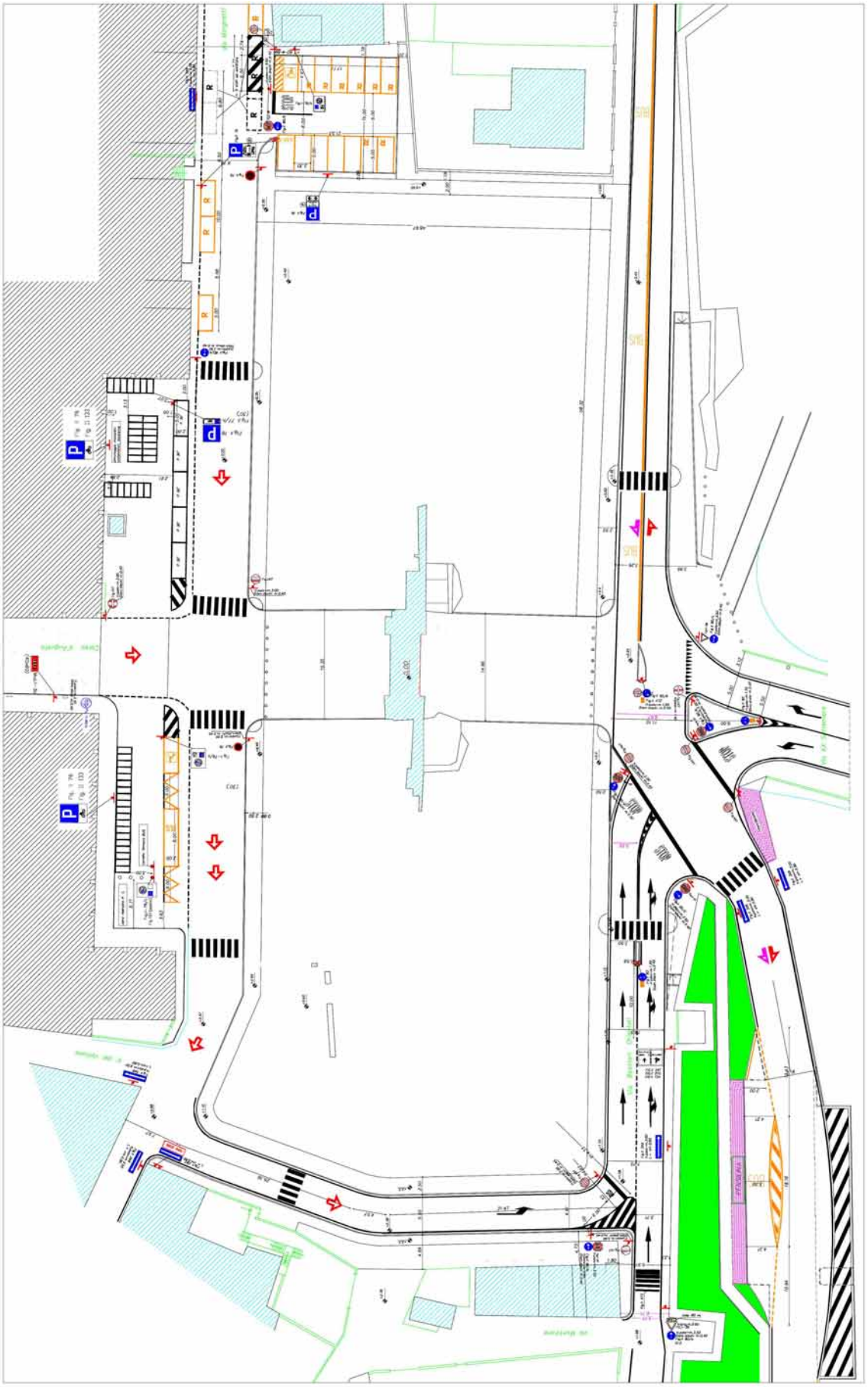


Figura 5.6 – Planimetria della zona attorno all'Arco d'Augusto di Rimini. 2005

Nel caso particolare del rilievo dell'arco tutte le operazioni precedenti alla ricognizione sono state saltate, in quanto l'oggetto di studio era non lontano dalla mia sede di lavoro. La vicinanza ha eliminato molti problemi e mi ha permesso l'attuazione di vari sopralluoghi ( anche durante le fasi di orientamento e restituzione ) consentendomi di indagare nei minimi dettagli l'intera struttura da rilevare. L'eidotipo non è stato realizzato in quanto si era già in possesso di una dettagliata planimetria della zona attorno all'arco che è stata usata per progettare la fase di ricognizione. ( vedi figura 5.6 )

Come è gia stato detto, il rilievo del monumento era sin dall'origine pensato mediante l'utilizzo di strumentazioni modeste, questo fattore vincolante è stato quello che ha regolato molte scelte fatte durante la fase di ricognizione nonché nelle fasi successive del lavoro.

Al momento del sopralluogo il primo problema che è emerso immediatamente sono state le notevoli dimensioni del monumento da misurare, questa situazione ha fatto subito intuire la necessità di scattare un numero considerevole di fotografie per far fronte oltre che all'estensione delle aree da rilevare anche alla irregolarità delle superfici dell'arco.

Altra questione ancor più difficile da risolvere con in mezzi in dotazione è stata la notevole altezza della struttura, sin da subito ci si era accorti che l'altezza del monumento sarebbe stato un grosso intralcio per un corretto rilievo. Infatti per eseguire un esatto rilievo dei due prospetti dell'arco sarebbe stato necessario possedere un mezzo di elevazione per poter costruire delle strisciate fotogrammetriche con delle prese di centro di proiettività a differenti quote ed un assetto avente il piano della pellicola parallelo al fronte dell'arco. Oltretutto, durante il sopralluogo, l'altezza della struttura ha fatto preoccupare anche per altri motivi: in primo luogo si era capita l'impossibilità di posizionare i target tape adesivi nelle parti alte del monumento, con i limiti che ne derivano ( vedi paragrafo 5.3.3 ), in

secondo luogo, data l'inammissibilità di effettuare prese da postazioni di quota elevata, è stato compreso che inevitabilmente la precisione dei punti più lontani ( quelli in cima alla struttura ) sarebbe stata anche di molto più bassa rispetto a quella dei punti prossimi alla base dell'arco. Per risolvere parzialmente questi problemi legati all'altezza dell'edificio si è pensato di impiegare una scala per poter raggiungere postazioni più elevate, sia per realizzare delle prese, sia per posizionare i target adesivi. In combinazione all'uso della scala è stato anche pensato l'impiego di tantissime prese, in modo da avere una notevole ridondanza nella misura dei punti di quota elevata, cosicché si potesse migliorare tramite la compensazione la scarsa precisione che altrimenti nei punti in quota non sarebbe stata possibile ridurre.
Riflettendo ulteriormente sul rilievo che si doveva andare ad operare, ci si rese anche conto della necessità di scattare fotografie da posizioni molto vicine all'arco, infatti, se si tiene a mente la precisione media che si vuole raggiungere ( circa cm. 2 ) da una botta di conti è possibile stabilire che la scala del rilievo deve essere di almeno 1:100 ( considerando l'errore di graficismo della carta pari a mm. 0,2 ).

$$\sigma = 0.2 \text{ mm} * m_c$$

$\sigma$ : errore di restituzione
0.2 mm : errore di graficismo
$m_c$ : scala della rappresentazione cartografica

$$m_b = 4 * m_c \qquad m_b = Z / c$$

$m_b$ : scala del fotogramma
Z : distanza oggetto-camera
c : focale dell'obiettivo

In base alla formula empirica per valutare gli errori, alla definizione di scala del fotogramma ed alla relazione empirica che lega la scala

della carta a quella del fotogramma è possibile ottenere la Z, che ci indica approssimativamente a quale distanza dobbiamo eseguire le prese per mantenere la precisione prestabilita.

Nel caso dell'arco, essendo c = 29 mm ed $\sigma$ = 2 cm, dalle formule si ottiene Z = 11,6 m. Questo valore di distanza e stato provato al momento del sopralluogo, e ci si è accorti che è un valore molto piccolo, in quanto, in proporzione all'altezza della struttura, alla distanza di m. 11,6 dall'arco ci si trova, per cosi dire, molto "sotto".

Da questa distanza ravvicinata la prospettiva è molto accentuata e sussiste l'impossibilità di rilevare alcuni punti che, a seguito dell'effetto prospettico, sono occultati dalle strutture in aggetto. La soluzione di questo problema pare molto semplice, in quanto basterebbe elevarsi di quota ed eseguire una strisciata in modo da ricoprire pezzo per pezzo la facciata del monumento mantenendosi sempre con la pellicola parallela ad esso; ma nel nostro caso non si disponeva di un carrello elevatore, quindi l'unica soluzione era di inclinare di molto l'asse di presa per far si che l'intero arco "cadesse" nell'inquadratura della fotocamera. Come conseguenza ti tale inclinazione si ha una scala molto variabile per le varie parti del monumento, con una conseguente ampia variabilità di precisione dei vari punti rilevati a seconda della quota degli stessi; ma purtroppo non si poteva fare di meglio. Alternativamente si sarebbero potute fare prese da molto lontano, ed assicurarsi la scala del fotogramma ( e quindi della rappresentazione cartografica ) attraverso l'impiego di un teleobiettivo; da posizioni distanti la rappresentazione tende sempre più ad un'ortofoto ( la scala diventa più uniforme su tutta l'area e con essa anche la precisione ), inoltre gli aggetti della struttura non occultano più nessun punto. Quest'ultima modalità è senz'altro la migliore, essa risolve parecchi problemi, ma sfortunatamente non è stato possibile attuare questa metodologia di rilievo, non tanto perché gli spazi non permettevano di allontanarsi dall'arco, ma quanto perché

la Nikon Coolpix 5400 è stata calibrata solo con l'obiettivo grandangolare, quindi si sarebbe dovuto ricalibrare la macchina per il teleobiettivo; la necessità di sveltire il lavoro ha fatto scartare questa opzione, che però sarebbe stata la più adatta.

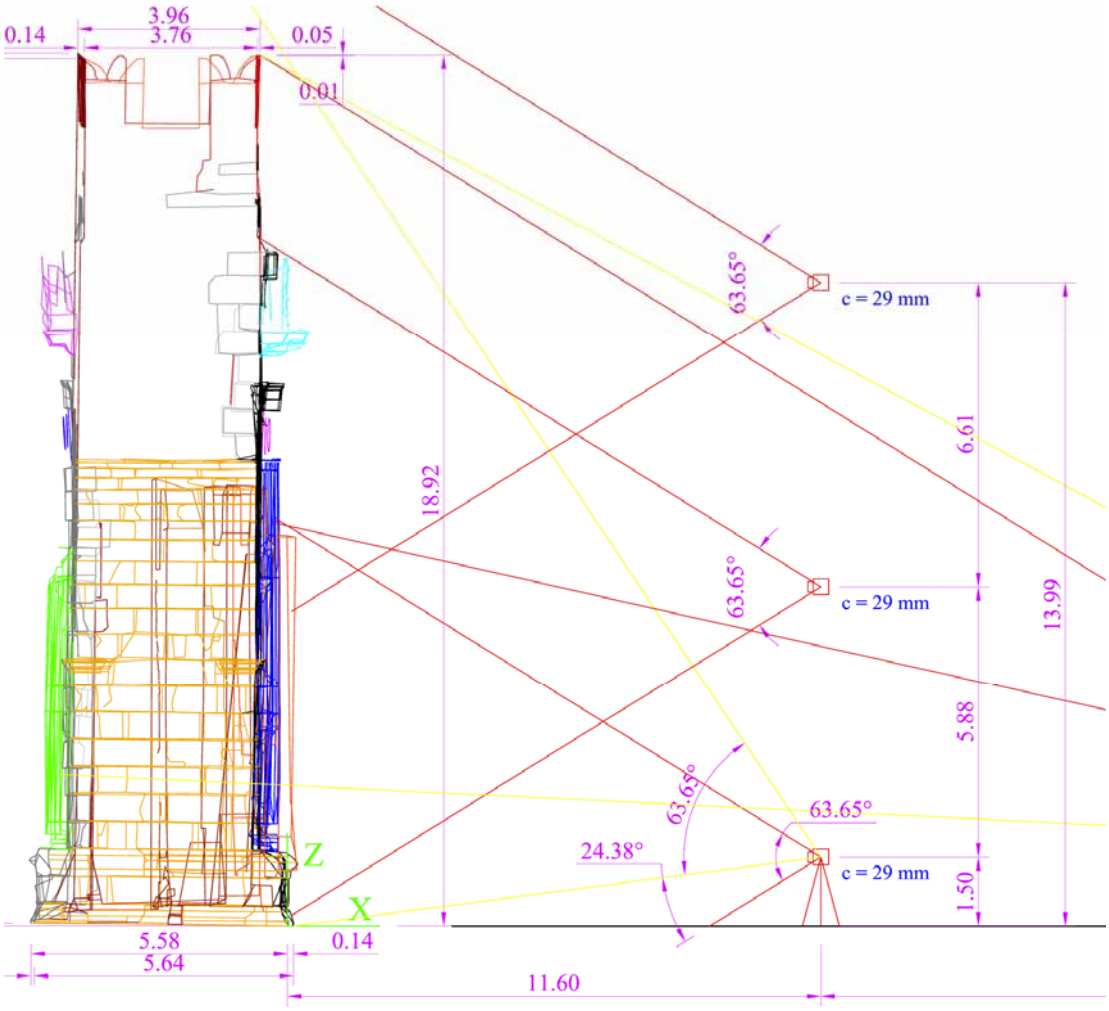



Figura 5.7 – Schema delle prese ideali e di quelle realmente eseguite.

Dalla raffigurazione qui sopra si può vedere come il valore di Z = 11,6 m sia una distanza molto piccola rapportata all'altezza dell'arco, inoltre dal disegno si possono meglio comprendere i problemi esposti nel testo dovuti a questa vicinanza combinata all'inclinazione dell'asse di presa: occlusione prospettica dei punti in sommità, notevole variabilità della scala del fotogramma, conseguente notevole variabilità fra la precisione dei punti rilevati, ecc…

Come descritto di seguito, la soluzione migliore avrebbe previsto l'impiego di un carrello elevatore per poter eseguire tre prese a diverse quote ( con fotobase di circa 6 m ) con l'asse di presa normale alla facciata dell'arco. Ma l'indisponibilità di un mezzo di elevazione ha fatto cadere la scelta in modalità di ripresa a bassa quota con un'inclinazione dell'asse di presa di circa 24° sull'orizzontale. Per compensare poi i problemi dovuti alla scarsa precisione metrica dei punti situati in sommità al monumento ed evitare l'occultamento prospettico di tali punti a seguito delle strutture in aggetto si è proceduto mediante il dispiegamento di un considerevole numero di prese, in modo da possedere una notevole ridondanza nella misurazione dei punti in cima al monumento, che come detto risentono fortemente dell'inevitabile non ottimale geometria di ripresa e rilievo.

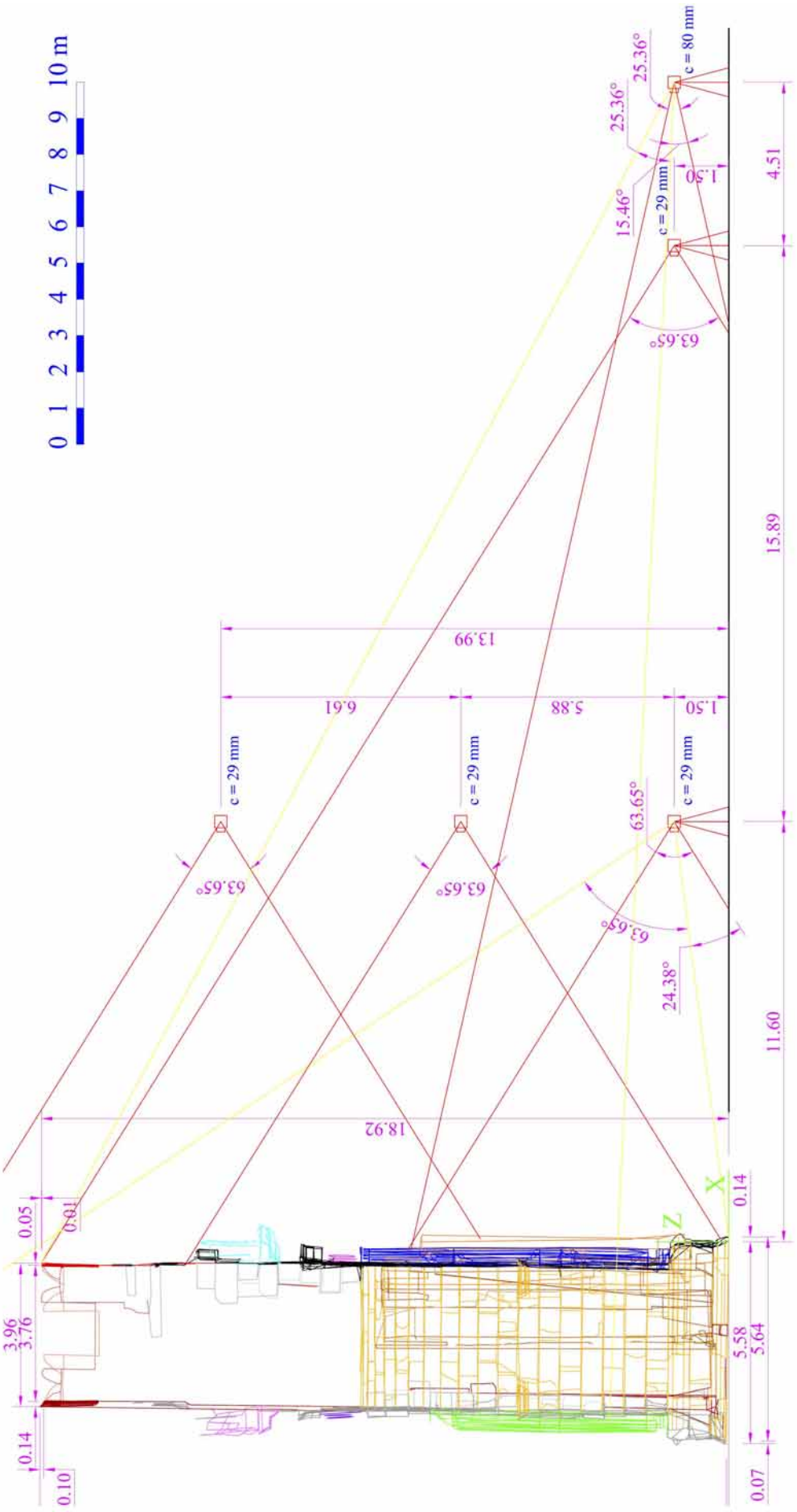



Figura 5.8 – Schema delle prese ideali e di quelle realmente eseguite.

Dalla rappresentazione sopra riportata è possibile notare che con una focale di c = 29 mm, ed una distanza dall'arco di 11,6 m ( condizione necessaria per avere una restituzione con precisione di circa cm. 2 ) non si riesce a coprire l'intero prospetto dell'arco mantenendo l'asse ottico orizzontale, se invece si inclina tale asse di circa 24° è possibile riprendere in una sola inquadratura tutto l'intero fronte dell'arco, ma tale forte inclinazione rende una scala molto variabile fra le varie parti del monumento con una conseguente ampia variabilità delle precisioni metriche ottenibili. La soluzione sarebbe riprendere tre fotografie a diverse quote ( come riportato in figura ), ma purtroppo non è stato possibile farlo. Come si vede, per riprendere l'intero prospetto con una sola ripresa ad asse orizzontale ed una focale c = 29 mm sarebbe necessario portarsi alla distanza di 27,49 m, ma a tale distanza la precisione del rilievo scende fino a 47 mm; valore ben superiore a 2 cm che si vogliono ottenere. Come spiegato nel testo del paragrafo la soluzione migliore ( dopo l'elevazione della quota di presa ) sarebbe stato impiegare un obiettivo di focale c = 80 mm ad una distanza dall'arco di 32 m, in questo modo si mantiene la precisione a 2 cm, inoltre con sole due prese a quota 1,5 m era è possibile ricoprire l'intero prospetto solamente variando l'inclinazione della fotocamera di circa 15°.

Per saltare il processo di calibrazione del complesso camera-teleobiettivo si era anche pensato di agire in autocalibrazione, ovvero di eseguire alcune prese con il teleobiettivo e ricavare indirettamente i parametri di orientamento interno e distorsione assieme alla posizione ed assetto delle prese tramite la fase di orientamento relativo esterno.
Questa operazione è stata prontamente frenata dall'intervento del mio relatore Dr. A. Zanutta, il quale mi ha fatto comprendere come una tale operazione non avrebbe fatto altro che peggiorare la precisione media del rilievo; difatti l'autocalibrazione si sarebbe basata sulle coordinate di punti naturali fornite in output dal software PhotoModeler, queste coordinate evidentemente non posseggono la precisione necessaria per poter calibrare una camera e quindi, nel tentativo di "far tornare i conti" il software avrebbe modificato anche le coordinate dei punti che possedevano già una buona precisione, rovinando inesorabilmente l'intero lavoro di rilievo.

## 5.5 IL PROGETTO DEL RILIEVO

### *5.5.1 La scala del fotogramma*

Esiste un diretto rapporto fra la scala media del fotogramma e la scala della rappresentazione del rilievo. Questa è una scala reale, sia che si

presenti in maniera tradizionale, al tratto, sia che si mostri in forma numerica. Soprattutto nell'ambito delle immagini vettoriali digitali è importante introdurre in concetto di scala nominale, ovvero quella scala per cui le entità rappresentate e le loro precisioni intrinseche ( definite dal tipo di rilievo che ci sta dietro ) hanno ancora senso; questo è dovuto al fatto che, con la possibilità di zoommare a piacere, è possibile perdere la sensibilità metrica. Il concetto fondamentale che sta alla base del rapporto scala del fotogramma / scala della rappresentazione è basato principalmente su di un fattore: una determinata scala di rappresentazione ha una ricchezza di dettagli correlata alla scala, per cui il fotogramma deve contenere chiaramente visibili questi particolari. Una determinata scala di rappresentazione ha quindi una incertezza metrica che deve stare mediamente entro l'errore di graficismo (rappresentato materialmente dallo spessore del tratto grafico ); se si assegna a quest'ultimo un valore convenzionale di mm. 0,2 si vede che, ad esempio alla scala di 1:100 questo valore porta ad un errore di rappresentazione di cm. 2, e quindi mediamente ogni entità rappresentata avrà questa incertezza.

Prima di eseguire un rilievo dei punti d'appoggio è necessario, in fase di progettazione, pianificare alcune operazioni in funzione del risultato che si vuole ottenere, innanzi tutto bisogna decidere quale sarà la precisione con la quale si vuole ottenere la rappresentazione tridimensionale dell'oggetto, poiché in funzione di questa si dovranno eseguire le prese ad una data distanza piuttosto che un'altra.

Nel caso del rilievo dell'arco d'Augusto, come è già stato detto nei paragrafi precedenti, la precisione che si voleva almeno raggiungere era di circa cm. 2, questo fattore ha costretto a progettare un rilievo che potesse produrre una scala dell'oggetto maggiore di 1:100. Tramite gli approssimativi calcoli visti nel paragrafo 5.4 si è trovato che, con la camera in dotazione avente focale c = 29 mm ( sull'equivalente pellicola 35 mm ), la distanza Z a cui si doveva

eseguire le prese risultava essere di 11,6 m. Questa piccola misura ha poi portato ad una serie di problemi e risoluzione di essi che sono già stati esposti nel precedente paragrafo 5.4.

### *5.5.2 Il progetto dello schema di presa*

Una delle prime scelte da fare è quella del fattore medio della scala dei fotogrammi:

$$m_b = Z / c$$

Dove:
Z: distanza media fra oggetto e centro di presa
c: focale dell'obiettivo della fotocamera
$m_b$: scala media del fotogramma

Inoltre per avere un buon ricoprimento tra i fotogrammi ( usualmente si assume circa del 60% ) e quindi avere una porzione di fotogramma sufficientemente estesa sulla quale poter vedere in stereoscopia, si utilizza la seguente relazione nel calcolo del rapporto di base:

$$B/Z = 1/3 \div 1/4$$

Dove:
B: fotobase
Z: distanza media fra oggetto e centro di presa

Una relazione empirica che può essere utilizzata per eseguire un progetto di massima nel campo della fotogrammetria dei vicini è la seguente:

$$m_b = 4 * m_c$$

Dove:
$m_c$: scala della rappresentazione cartografica
$m_b$: scala del fotogramma

Per avere un'idea preventiva degli errori che si commettono avendo scelto una determinata distanza di presa e quindi fissato indirettamente un fattore di scala dei fotogrammi e di rappresentazione, è possibile applicare l'errore di graficismo:

$$\sigma_z = 0.2\text{mm} * m_c$$

oppure è possibile stimare l'errore di restituzione in maniera più rigorosa utilizzando la legge di propagazione della varianza alle equazioni di collinearità trovate per il caso normale.

Tutte le regole sopraesposte, generalmente usate per le prese ad assi pseudo-normali, sono estendibili anche per prese convergenti come quelle operate nel rilievo della presente tesi. Le uniche formule che non risultano più valide e non posseggono più alcun senso fisico, sono quella che lega Z ad B, e la stima degli errori di rilievo tramite la propagazione della varianza del caso normale.

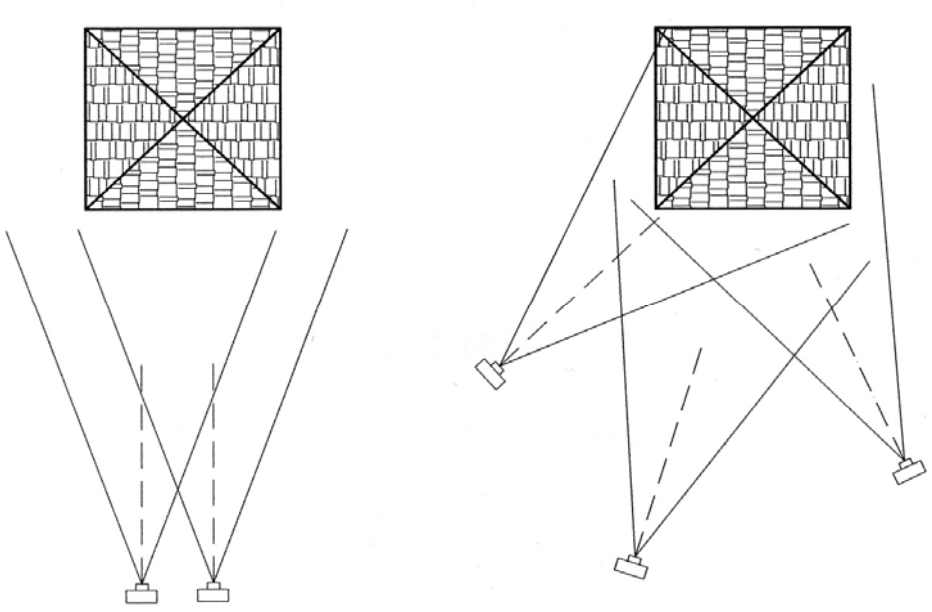


Figura 5.9 – Prese normali ( a sinistra ) e convergenti ( a destra ).
Con delle prese in assetto pseudo-normale è possibile orientare e restituire i fotogrammi sia in stereoscopia che in monoscopia, mentre da prese convergenti è solamente possibile lavorare in monoscopia multimmagine. Tramite un raddrizzamento della prese convergenti ( se non sono troppo convergenti ) è comunque possibile poi lavorare in stereoscopia. Come si può vedere, il metodo che impiega gli assi della prese convergenti e molto più versatile.

Nella situazione del rilievo dell'Arco spesso non è stato possibile impiegare una configurazione pseudo-normale delle prese, infatti si

dovevano risolvere vari problemi per il quale l'assetto normale risultava troppo vincolante, inoltre elaborando i dati metrici tramite una metodologia di rilievo digitale non convenzionale ogni variazione di assetto è stata possibile in quanto non creava alcun problema in fase di orientamento e restituzione.

In linea generale si era pensato di rilevare l'arco d'Augusto tramite l'integrazione e combinazione delle due metodologie di rilievo sopraesposte, in particolare per le due facciate dell'arco si era progettato un rilievo fotogrammetrico ad assi pseudo-normali; mentre per le restanti parti si intuiva l'utilità di un rilievo ad assi convergenti. In realtà poi ci si è accorti che il rilievo è stato eseguito con una predominanza di prese ad assetto convergente, questo per diversi motivi: impossibilità di effettuare prese a diverse quote per la mancanza di un dispositivo di elevazione, necessità di rispettare la distanza dall'arco minima necessaria per ottenere una restituzione con precisione superiore a cm. 2, necessità di "agganciare" le varie foto fra loro in modo da rilevare anche dal basso verso l'alto alcuni elementi del monumento, geometria della struttura troppo complessa per essere rilevata solamente con prese normali, ecc…

All'inizio di questo paragrafo sono state introdotte le varie formule che permettono di fare una stima della precisione che si potrà raggiungere in un rilievo, generalmente questi conti vengono programmati bene, in modo da possedere non solo la distanza da cui eseguire le prese per assicurarsi una prefissata precisione, ma anche per determinare le fotobasi B per l'esatto ricoprimento fotografico, per disegnare anche la corretta geometria delle prese, per trovare le posizioni spaziali da cui eseguire le foto, per determinare gli obiettivi da impiegare, ecc…

Ovvero, anche per un rilievo terrestre si esegue una sorta di pianificazione del "volo" fotogrammetrico, il concetto è lo stesso, solamente che qui non si vola, e quindi bisogna programmare ad

esempio a quali quote eseguire le prese tramite l'utilizzo di un carrello elevatore, è necessario calcolare le fotobasi da utilizzare per avere il giusto ricoprimento voluto, prevedere il numero di "strisciate", la loro interdistanza nonché il numero di scatti da eseguire.
Una giusta pianificazione del rilievo fotogrammetrico è fondamentale per ottenere gli scopi voluti in minor tempo e senza rischiare di sbagliare e/o sprecare risorse. Quanto appena detto è sempre vero, ma forse nel caso di un rilievo digitale non convenzionale in cui si è vincolati alla quota del terreno lo è un po' meno. Infatti nel rilievo dell'arco d'Augusto non si è proceduto ad una così rigorosa pianificazione del rilievo in quanto, come detto, non potendo disporre di un mezzo di elevazione le uniche prese possibili erano quelle vincolate ad una quota prossima al terreno; questa situazione e la possibilità di disporre di una macchina fotografica digitale con capacità di memoria molto elevate ( 512 MB ) hanno permesso lo scatto di numerosissime fotografie ad un costo nullo.
Quindi l'unico conto che è stato fatto realmente in fase di pianificazione è il seguente:

$m_c = \sigma_z / 0.2mm = 20 / 0.2 = 100$
$m_b = 4 * m_c = 4 * 100 = 400$
$Z = m_b * c = 400 * 29mm = 11600\ mm$

Fatto questo conto essenziale non ci si è preoccupati di pianificare troppo il rilievo, infatti ci si è affidati al numero elevato delle prese che si sarebbero andate a fare, dalle quali poi si sarebbero selezionate a posteriori quelle necessarie e maggiormente adatte. Così è stato fatto, ed in tal modo si sono sveltite le operazioni di rilievo sul campo, in quanto non è stato necessario posizionare esattamente la fotocamera in punti che sarebbero stati determinati nell'eventuale fase di progettazione delle prese.

### *5.5.3 Studio dell'individuazione di linee verticali*

L'argomento è stato già parzialmente affrontato nel paragrafo 5.3.4, e sempre in tale ambito è stata descritta la metodologia operativa impiegata per individuare l'assetto delle linee verticali nel caso del rilevamento dell'arco. Sostanzialmente è necessario escogitare un metodo che permetta di definire la direzione delle linee di forza del campo gravitazionale terrestre nella prossimità dell'oggetto del rilievo, in linea generale non esistono delle procedure definite, solo la fantasia può porre freno ai vari metodi per determinare la direzione di linee verticali, oppure in modo equivalente, si può determinare l'assetto di un piano ritenuto orizzontale. Ad esempio, se si utilizza una total station per rilevare le coordinate dei punti fotogrammetrici di appoggio il problema dell'individuazione della verticalità non si pone, in quanto, per come è concepita la misurazione celerimetrica delle coordinate dei punti, l'asse Z è gia definito dall'assetto del teodolite, che prima di iniziare le misure viene messo in stazione.

Se le coordinate dei punti fotogrammetrici di appoggio vengono fornite in coordinate GPS, il problema è leggermente più complicato, in quanto da queste misure è possibile ricavare la direzione della normale all'ellissoide di riferimento del GPS ( WGS 84 ), questa normale all'ellissoide in realtà non coincide con la verticale ( direzione della linea di forza del campo gravitazionale ) ma si discosta da essa di una piccola quantità, che per rilievi di elevata precisione non può essere trascurata. E' dunque necessario operare una correzione che permetta di stabilire senza equivoci l'assetto della verticale.

Metodi meno sofisticati, ma se ben attuati sufficientemente validi, sono ad esempio quelli che prevedono l'impiego del filo a piombo o la definizione di un piano orizzontale.

Nella progettazione del rilievo dell'arco e nella fase di studio del metodo per individuare una direzione verticale su cui indirizzare la Z

del sistema di riferimento locale si sono pensate due diverse possibili soluzioni: la prima consisteva nell'individuazione di una serie di punti tutti ad ugual quota ( in modo da definire un piano orizzontale ), mentre la seconda opzione pensata fu quella di utilizzare un filo a piombo per materializzare linee certamente verticali.

Il primo metodo è stato scartato in quanto ci si era resi conto di quanto fosse difficile definire una serie di punti tutti ad ugual quota, infatti per far ciò si deve utilizzare un livello, che avrebbe allungato di troppo le operazioni di misura, ed a tal punto sarebbe stato più conveniente utilizzare una total station che avrebbe fornito dati di maggior precisione, sia per la verticalità, sia per il rilievo topografico di appoggio delle prese fotogrammetriche. Volendo comunque utilizzare strumenti di rilievo molto semplici ( come si è fatto per tutte le altre operazioni di rilievo ) per definire una serie di punti ad ugual quota ci sarebbe anche un'altro criterio molto semplice ed economico: l'impiego di una livellazione ad acqua. Questa soluzione è estremamente semplice e precisa, infatti viene spesso utilizzata in cantiere. Il procedimento di una livellazione ad acqua consiste nello sfruttare il fatto che i liquidi si dispongono sempre su di una superficie equipotenziale, definendo così un piano orizzontale. Per attuare questa livellazione è sufficiente essere in possesso di una cannetta trasparente in cui al suo interno è contenuto un fluido. Nonostante quest'ultimo metodo fosse molto semplice, nel caso del rilievo dell'arco non è stato effettuato perché la materializzazione dei punti ad ugual quota avrebbe richiesto la picchettazione di riferimenti che non era possibile piantare a causa di vincoli sia giuridici ( non era possibile rovinare la pavimentazione per posizionare i riferimenti ) che di altra natura. Infine, la circostanza decisiva che ha fatto cadere ogni possibilità di utilizzare una livellazione ad acqua è la presa coscienza del fatto che attorno all'arco transitano numerosi cicli e

pedoni che avrebbero sicuramente incappato nella cannetta per far le misure di livello.

Constatando tutti questi problemi, la scelta del metodo per individuare l'assetto di linee verticali è caduta sull'impiego del filo a piombo.

Come è stato detto nel paragrafo 5.3.4, l'ideale sarebbe stato utilizzare diversi fili a piombo più lunghi possibile, da disporre dalla cima dell'arco fino ai suoi piedi, in tal modo l'individuazione della verticalità sarebbe stata molto precisa. Ma come ormai diverse volte riferito, non si disponeva di un mezzo di elevazione, e quindi ci si è dovuti ingegnare per trovare una soluzione che è possibile vedere nella figura 5.5. La lunghezza del filo purtroppo è molto ridotta in relazione all'altezza dell'arco, ma evitando di intaccare e rovinare il monumento non si poteva fare di meglio, per arricchire le misure si è pensato di utilizzare il filo a piombo per tre volte in tre diverse postazioni in modo da possedere una ridondanza compensabile in fase di elaborazione dati. Il filo a piombo è stato poi segmentato in due campi di lunghezza nota mediante delle palline bianche, tale suddivisione con tre punti è stata utile per poter restituire ( tramite la fotogrammetria ) la posizione dei tre punti nello spazio che sono allineati secondo la verticale, difatti il filo a piombo è stato ripreso da diverse angolazioni assieme agli elementi dell'arco cosicché fosse possibile orientare queste prese e restituire la posizione delle palline bianche di suddivisione del filo.

## 5.6 LA DISPOSIZIONE DEI TARGET TAPE

I target utilizzati nel rilievo dell'arco d'Augusto di Rimini sono quelli visibili nella figura 5.4, essi sono adesivi e sono stati posizionati su entrambe le facciate del monumento augusteo. Al riguardo della loro collocazione nonché delle problematiche incontrate vedere anche il paragrafo 5.3.3.

In tutto il rilievo dell'arco le problematiche più fastidiose riscontrate sono state senz'altro la notevole altezza della struttura combinata all'indisponibilità di un mezzo di elevazione, questi due fattori hanno influenzato sensibilmente tutte le operazioni di rilievo topo-fotogrammetrico ed anche tutte le fasi di elaborazione dati, quali l'orientamento delle prese e la loro restituzione.

I punti che in questa fase di rilievo si andavano a materializzare mediante i target tape dovevano poi servire come base per effettuare delle misurazioni di distanza fra tali coppie di punti segnalizzati dai target, cioè, i target sono serviti per materializzare dei punti inequivocabilmente definiti e facilmente riconoscibili sulle prese, necessari per scalare il modello geometrico dell'arco che altrimenti sarebbe stato perfettamente in scala fra le sue parti ma non si sarebbe potuto in alcun modo conoscere la reale distanza fra due punti generici appartenenti al monumento stesso. In linea teorica sarebbe sufficiente misurare una sola distanza fra due punti per poter scalare il modello geometrico dell'oggetto rilevato, ma per avere un controllo sulle misure, nonché una stima degli errori è sempre meglio possedere diverse misurazioni che possono essere compensate nella successiva fase di elaborazione dati.

Come è già stato precisato nel paragrafo 5.3.3, la sistemazione ideale dei punti di appoggio è quella più omogenea possibile, sia sui vari elementi dell'oggetto da rilevare, sia sulla profondità dello stesso. Allo stesso modo si può dire che il volume definito dalla chiusura dei punti fotogrammetrici di appoggio deve contenere l'intera struttura da rilevare. Purtroppo queste regole del buon rilievo sono sempre belle a dirsi, e tutti i fotogrammeti e topografi le conoscono, ma spesso vincoli di varia natura impediscono di attuare quello che si vorrebbe. Nel caso in esame senza mezzi di elevazione era impossibile sistemare i target anche nella sommità dell'arco, in alternativa si sarebbe potuto usare una total station con distanziometro ad impulsi, che non

richiedendo l'utilizzo di prismi riflettori avrebbe potuto collimare facilmente anche i punti naturali in cima al monumento. Questa sarebbe una buona soluzione, ma uno degli scopi di questa tesi era ottenere un discreto rilievo mediante l'impiego di strumentazioni assai modeste, e la total station non rientra in tale categoria.

In definitiva la sistemazione dei target adesivi si è forzatamente concentrata nella parte bassa della struttura, per poter guadagnare qualche metro di quota è stata utilizzata una scala che ha permesso di posizionare i target fino ad una quota di circa 3,80 m da terra; inoltre per compensare all'inevitabile errata collocazione dei target si è proceduto mediante un'innumerevole applicazione di tali target ( 25 target in totale + 7 punti materializzati sul filo a piombo ) su entrambe le fronti dell'arco cercando di raggiungere quote più alte possibili, anche se non si sono mai superati i 4 m da terra. Anche le misurazioni di distanza fra le varie coppie di punti segnalizzati sono state abbondanti: 25 in totale. Con tale enorme ridondanza di misure ( teoricamente basterebbe una sola misura di distanza ) si è cercato di compensare al massimo il buco di misure che non si possedevano sulla sommità dell'arco, e pare che tale metodo abbia funzionato, in quanto nelle successive fasi di elaborazione dati e restituzione non si sono riscontrati grossi errori ed una notevole propagazione degli stessi andando dalla base verso la cima dell'arco. La propagazione della varianza delle coordinate dei punti rilevati è stata minore di quanto ci si sarebbe aspettato, il ché fa pensare ad un buon funzionamento della soluzione adottata.

Nonostante non sia stato possibile coprire con i target l'arco nella sua altezza, la stessa cosa non è accaduta per la sua larghezza; infatti i riferimenti adesivi sono stati posizionati anche sulle mura medievali adiacenti all'arco, in tal modo la chiusura dei punti segnalizzati dai target definisce un volume che comprende l'intero arco sia per la sua

larghezza che per il suo spessore, l'unica dimensione che non si è riusciti a coprire è appunto l'altezza.

Figura 5.9 – Disposizione dei target n. 1821,1822,1823,1824.
Il codice ( numero ) identificativo dei punti segnalizzati mediante i target tape adesivi è quello assegnato dal software PhotoModeler, per conoscere le loro coordinate vedere l'appendice A. In questa fotografia è rappresentato il fronte dell'arco d'Augusto prospiciente verso Rimini.

Figura 5.10 – Disposizione dei target n. 1827,1828,1829.
Il codice ( numero ) identificativo dei punti segnalizzati mediante i target tape adesivi è quello assegnato dal software PhotoModeler, per conoscere le loro coordinate vedere l'appendice A.
In questa fotografia è rappresentato il fronte dell'arco d'Augusto prospiciente verso Roma.

Figura 5.11 – Disposizione dei target n. 55,56.

Il codice ( numero ) identificativo dei punti segnalizzati mediante i target tape adesivi è quello assegnato dal software PhotoModeler, per conoscere le loro coordinate vedere l'appendice A. In questa fotografia è rappresentato il lato dell'arco d'Augusto prospiciente verso ovest.

Figura 5.12 – Disposizione dei target n. 12,13,38,44,48,49,61,62.
Prospetto verso Roma.

Figura 5.13 – Disposizione dei target n. 64,67,73,86,87,798.
Prospetto verso Rimini.

Figura 5.14 – Disposizione dei target n. 77,78.
Il codice ( numero ) identificativo dei punti segnalizzati mediante i target tape adesivi è quello assegnato dal software PhotoModeler, per conoscere le loro coordinate vedere l'appendice A. In questa fotografia è rappresentato il fronte dell'arco d'Augusto prospiciente verso Rimini.

## 5.7 MISURE EFFETTUATE CON LA CORDELLA METRICA

Il ruolo della cordella metrica è stato già in parte illustrato nel paragrafo 5.3.2 a cui si rimanda.

Sostanzialmente dopo la messa in opera di tutti i target tape sono state misurate il maggior numero possibile di distanze reciproche fra le coppie di punti individuati dai centri dei target. Tramite l'aiuto dell'ing. Montaguti è stato possibile misurare ben 25 distanze fra coppie di punti in modo da disporre una notevole ridondanza nelle misure che è servita per compensare al meglio la fase di scalatura del modello geometrico dell'arco. Per aumentare il numero di vincoli metrici, anche il filo a piombo è stato segmentato in due campi di lunghezza nota, cosicché lo stesso filo è servito sia per fare misure di

distanza adatte alla scalatura del modello geometrico dell'arco, sia per individuare delle linee di riferimento sicuramente verticali.
Le uniche misure topografiche che sono state fatte sul posto sono appunto queste sole 25 misure di distanza; in totale le misurazioni effettuate sono in quantità rilevante, ma comunque il tempo necessario per eseguirle è sempre notevolmente minore rispetto al tempo indispensabile per effettuare un rilievo mediante una total station.

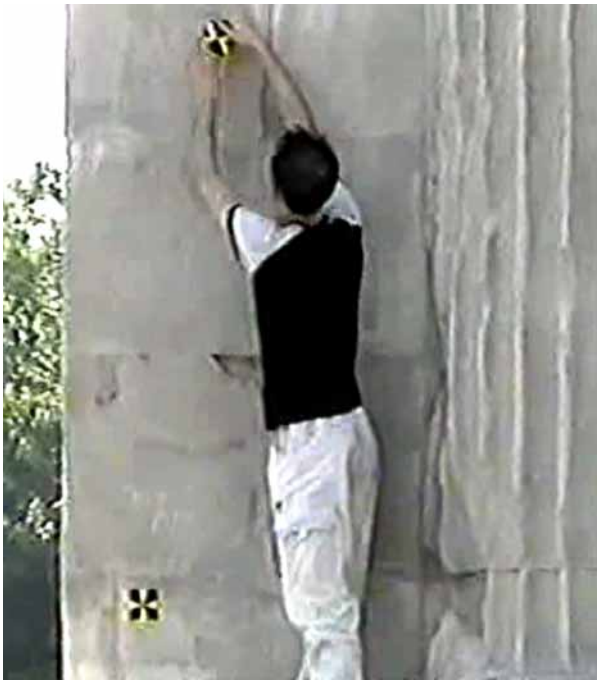


Figura 5.15 – Disposizione dei target n. 1822,1821.
Fronte dell'arco verso Rimini.

In questo caso particolare poi sarebbe stato necessario collimare con la total station centinaia di punti, ed inoltre si sarebbe dovuta costruire una poligonale chiusa attorno all'arco in modo da poter effettuare misurazioni a tutto tondo spostandosi con i punti di stazione sui vertici della poligonale.

Figura 5.16 – Misura di distanza.

Figura 5.17 – Misura di distanza.

Sicuramente per compiere un tale rilievo di appoggio ci sarebbero voluti diversi giorni di rilievo sul campo, mentre con la cordella metrica è bastata solamente una mezza giornata di lavoro.
Purtroppo è anche vero che la metodologia sbrigativa impiegata non è in grado di fornire elevate precisioni, e non è neanche capace di misurare punti che non sono fisicamente raggiungibili.
Per comprendere meglio quali misure sono state eseguite sull'arco d'Augusto di Rimini vedere il paragrafo 5.9, in cui sono riportate tutte le monografie dei punti rilevati.

## 5.8 MISURE REALIZZATE TRAMITE IL FILO A PIOMBO

La parte assegnata al filo a piombo è stata decisiva per l'individuazione e materializzazione di tre linee certamente verticali.
Al riguardo dell'impiego di tale semplice strumento vedere anche il paragrafo 5.3.4. Il filo utilizzato nel rilievo dell'arco d'Augusto è quello che si può vedere in figura 5.5, esso è stato legato all'estremità di una "trave" in plastica vincolata all'arco d'Augusto mediante la pressione esercitata sull'altra estremità della trave dalle mani di un operatore. Con questo metodo un po' rudimentale, eppure risultato molto efficace, è stato possibile posizionare in modo stabile il filo in una precisa posizione nello spazio senza intaccare e rovinare gli antichi materiali dell'arco. Difatti per assicurare una perfetta immobilità della posizione planimetrica del filo a piombo si sarebbe dovuto piantare un chiodo, o incastrare qualche oggetto nelle superfici lapidee o laterizie del monumento rovinandolo inesorabilmente. Se fosse stato possibile attuare una tale sistemazione, si sarebbe potuto vincolare l'estremità superiore del filo a piombo in un punto a quota più elevata ( in ogni caso minore di m. 4, difatti non si possedeva un carrello elevatore ) ed in siffatto modo la lunghezza del filo, che corre fino a terra, sarebbe stata maggiore e questa geometria avrebbe permesso di evidenziare con maggior precisione la direzione della

verticale. In ogni caso la sistemazione adoperata non ha riportato alcun problema e si è riusciti a determinare la direzione verticale, su cui indirizzare l'asse Z del sistema di riferimento locale, con precisioni maggiori di quelle previste.

Come già enunciato più volte, il filo a piombo è stato segmentato in due campi di lunghezza nota ( vedi figura 5.5 ) mediante tre palline di colore bianco sistemate sullo sviluppo del filo, le tre palline sono state pensate appositamente per essere ben visibili sulle fotografie, in modo che potessero essere collimate facilmente, così da determinarne poi la posizione spaziale nel sistema di riferimento prescelto. Di grande aiuto durante le operazioni di sistemazione del filo a piombo nonché del suo rilevamento fotogrammetrico sono stati l'ing. S. Montaguti ed il collaboratore S. Neri, senza i quali mi sarebbe stato impossibile trovare linee normali al piano orizzontale, infatti S. Neri si è occupato di fare pressione sulla "trave" in plastica in modo da evitare ogni spostamento della stessa e del filo ad essa legato ( garantendo così un'elevata precisione del metodo ); mentre l'ing. S. Montaguti si è occupata di aumentare il contrasto della pallina bianca sistemata sul filo, tramite l'interposizione di un foglio blu fra il filo e lo sfondo.

Infine, l'osservazione combinata dei collaboratori su filo a piombo ha permesso di stabilire i momenti in cui il vento spirava con minor intensità, situazione molto importante, perché in tali istanti di vento debole le oscillazioni del filo si riducono al minimo, aumentano la precisione con cui si va a determinare la verticalità. Tutte le fotografie che riportano il filo a piombo infatti sono state scattate durante gli istanti di vento debole, tali momenti mi sono stati indicati dai collaboratori, cosicché è stato possibile scattare le foto proprio in questi attimi. Per limitare la durata delle oscillazioni del filo a piombo sono stati disposti dei piccoli sassi nel pressi della punta metallica del piombino, in modo che a causa della limitazione di ampiezza lo

smorzamento potesse avvenire in tempi rapidi e con piccole variazioni dalla verticale ( vedi figura 5.5 ).
Un classico metodo più accurato e meno rozzo per smorzare le oscillazioni del filo a piombo viene riportato nella letteratura topografica: è sempre indicata l'immersione del piombino in un bagno d'olio che riesce a smorzare efficacemente i movimenti oscillatori.
Purtroppo non è che l'olio rientrava nella categoria di strumentazioni costose è sofisticate che non si potevano impiegare per un rilievo finalizzato con semplici ed economiche metodologie, ma semplicemente è stato dimenticato a casa, ed in questi casi ci si accorge come l'ingegno possa adempiere anche a mancanze di vario tipo; difatti l'impiego dei sassolini è stato molto efficace.

## 5.9 MONOGRAFIE DEI PUNTI RILEVATI

Qui di seguito vengono riportate tutte le monografie dei punti rilevati, ovvero di tutti i 25 target tape adesivi posizionati su entrambe le fronti dell'arco d'Augusto e inoltre anche i 7 punti definiti dalle palline bianche situate sullo sviluppo del filo a piombo.
Le misure riportate sono state effettuate tutte mediante l'utilizzo di una cordella metrica.
In totale le misure di distanza, che sono successivamente servite per scalare il modello geometrico dell'arco augusteo, risultano 25.
Di fatto non sarebbero servite una così abbondanza di misurazioni metriche, ma la necessità di compensare molteplici pecche operative di rilievo ( modalità errate di cui si era coscienti ma non si poteva far di meglio ) ha portato ad una soluzione sviluppata tramite una notevole ridondanza delle misure.
In realtà le misure di distanza effettuate sul campo sono state di qualche numero in più rispetto a quelle poi effettivamente utilizzate, questo perché ci si è resi conto che alcune misure erano in parte poco precise, e quindi tali misurazioni errate sono state scartate e non

riportate qui di seguito nelle monografie. Altre misure effettuate in sito sono quelle che riguardano la distanza fra coppie di punti naturali, queste sono risultate inadatte ed imprecise di fronte a quelle dei punti artificiali, e sono state scartate tutte senza distinzione. A titolo informativo voglio menzionare che tutte le operazioni di rilievo sono state compiute in due giornate distinte: la prima il 14/05/05, mentre la seconda il 28/07/05. Nella prima sessione di rilievo non è stato impiegato il filo a piombo, mentre la seconda volta tramite esso è stato possibile definire l'assetto delle linee verticali.

Figura 5.18 – Monografia dei punti 12,13,38,44.
Fronte dell'arco rivolto verso Roma. Prima sessione di rilievo: 14 / 05 / 05

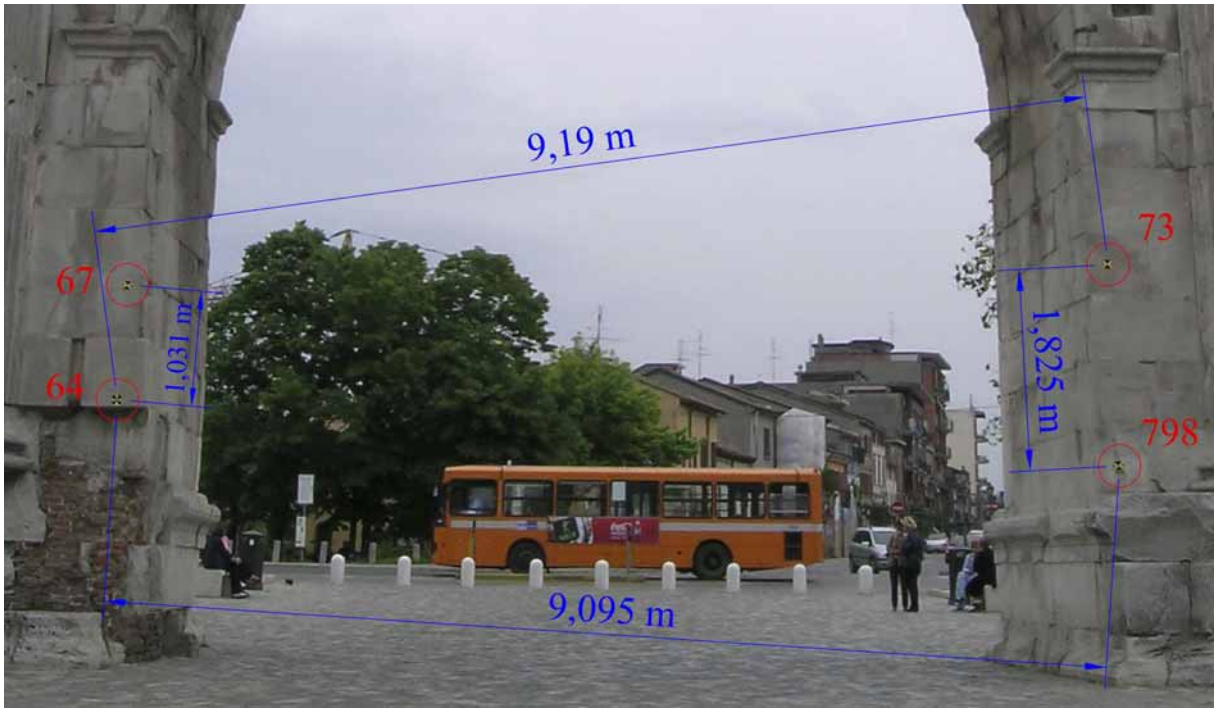



Figura 5.19 – Monografia dei punti 64,67,73,798.
Fronte dell'arco rivolto verso Rimini. Prima sessione di rilievo: 14 / 05 / 05

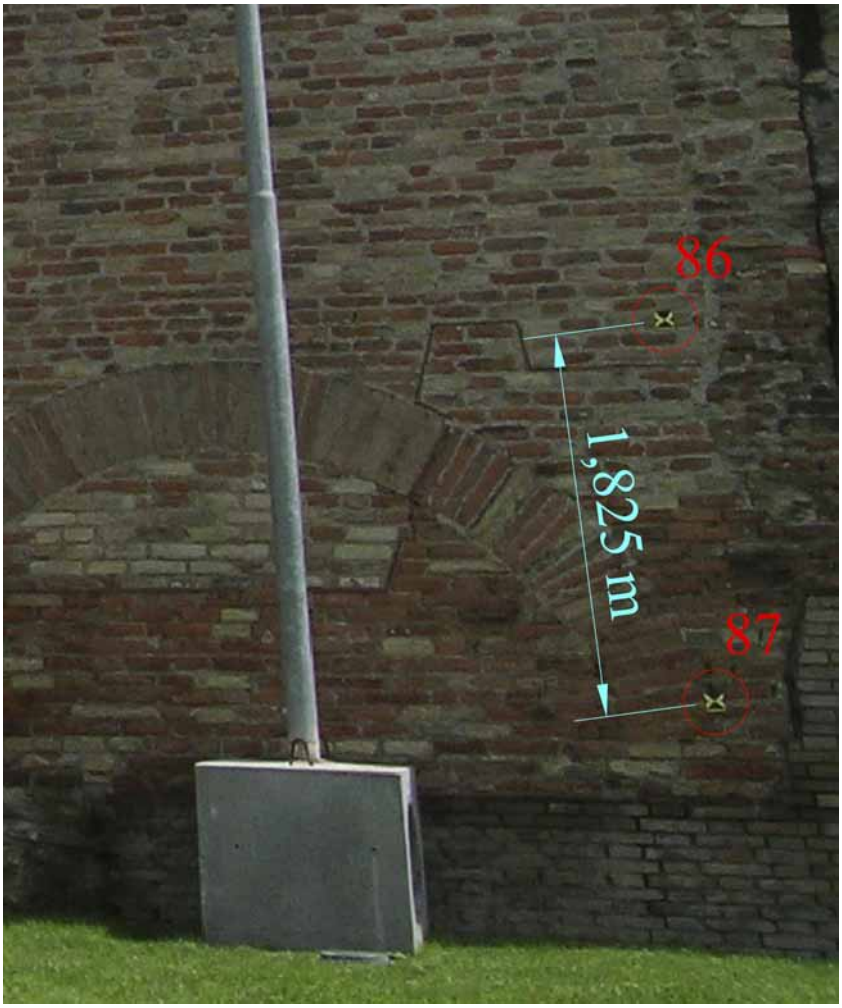



Figura 5.19 – Monografia dei punti 86,87. Prima sessione di rilievo: 14 / 05 / 05

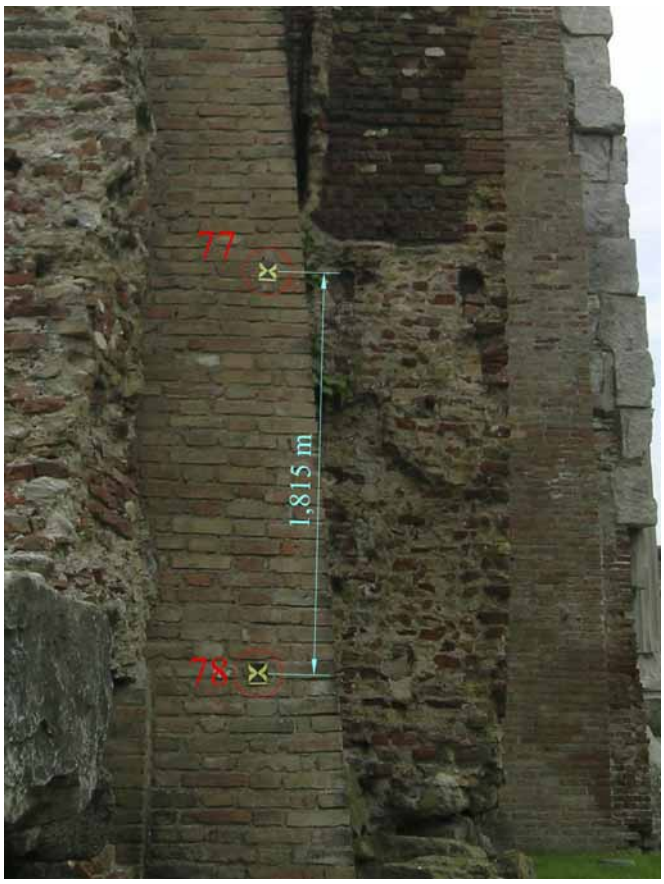



Figura 5.20 – Monografia dei punti 77,78. Prima sessione di rilievo: 14 / 05 / 05

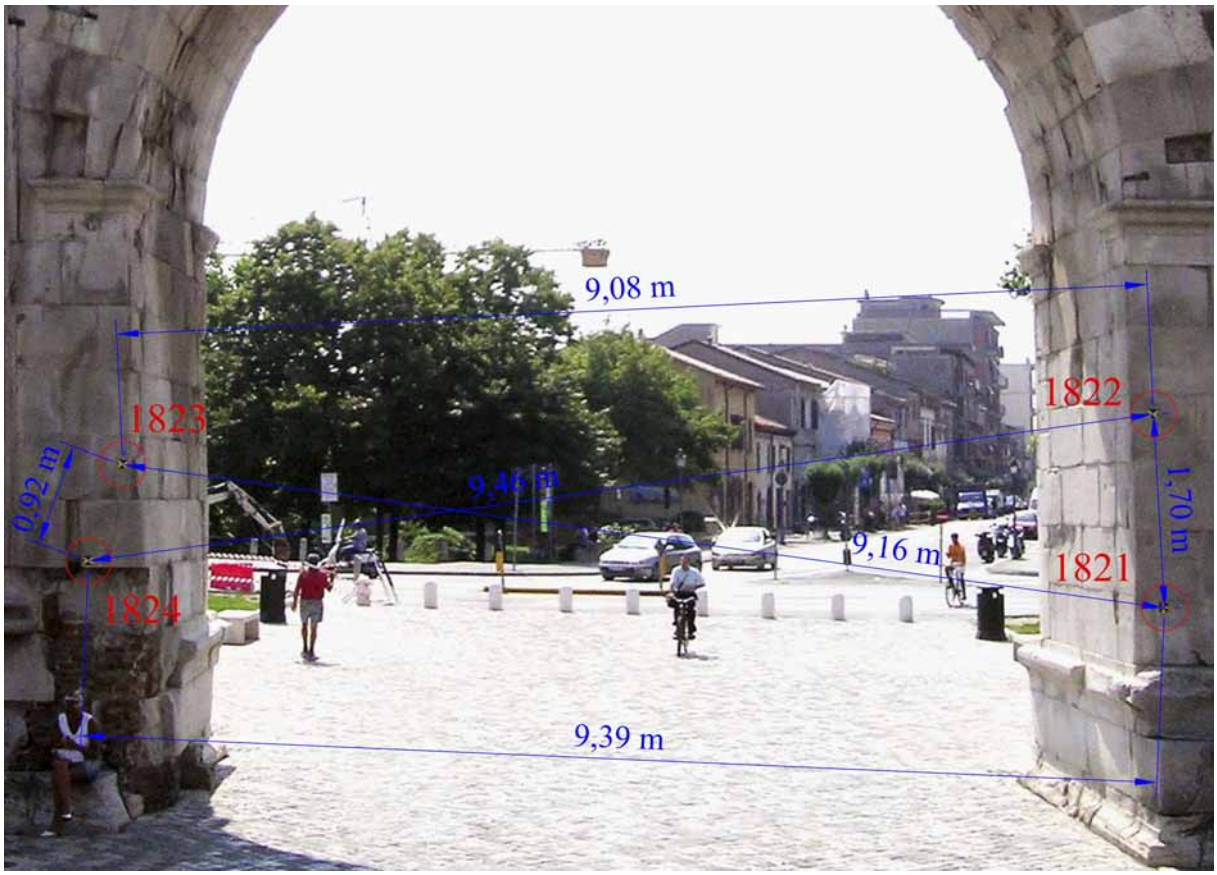



Figura 5.21 – Monografia punti 1821,1822,1823,1824. Seconda sessione di rilievo: 28/07/05

Figura 5.22 – Monografia dei punti 55,56. Prima sessione di rilievo: 14 / 05 / 05

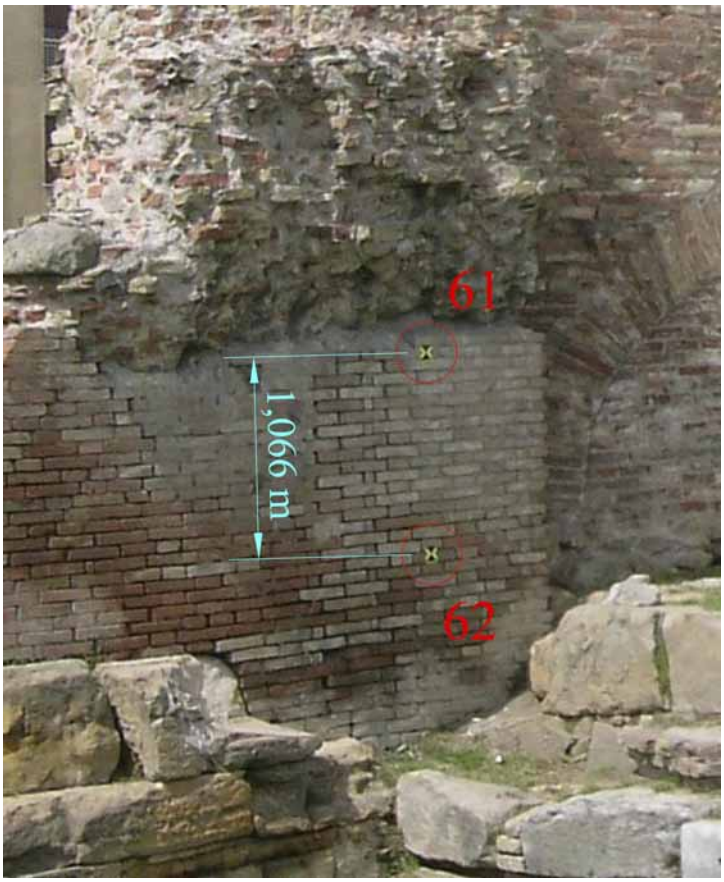



Figura 5.23 – Monografia dei punti 61,62. Prima sessione di rilievo: 14 / 05 / 05

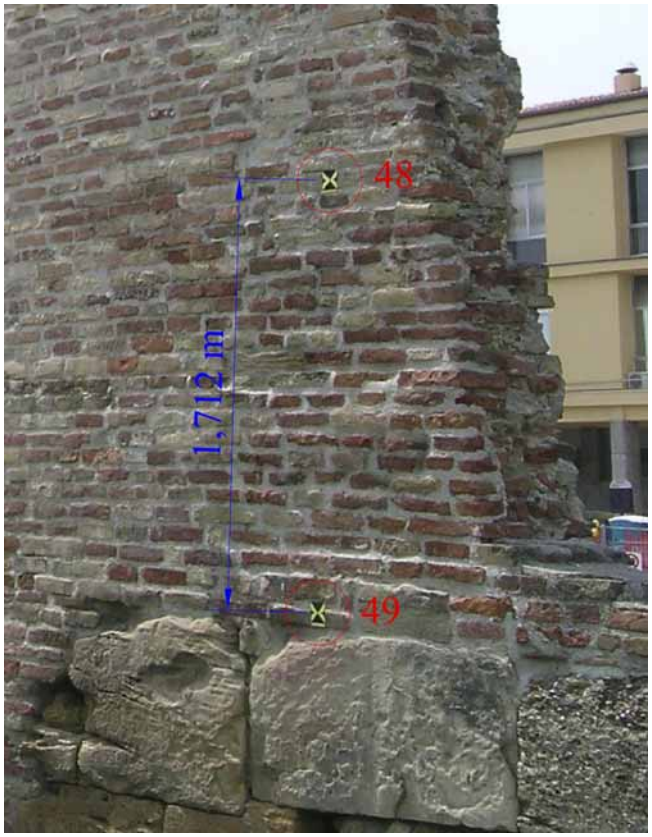



Figura 5.24 – Monografia dei punti 48,49. Prima sessione di rilievo: 14 / 05 / 05

Figura 5.25 – Monografia dei punti 1827,1828,1829,1836,1837.
Prospetto dell'arco verso Roma. Seconda sessione di rilievo: 28 / 07 / 05

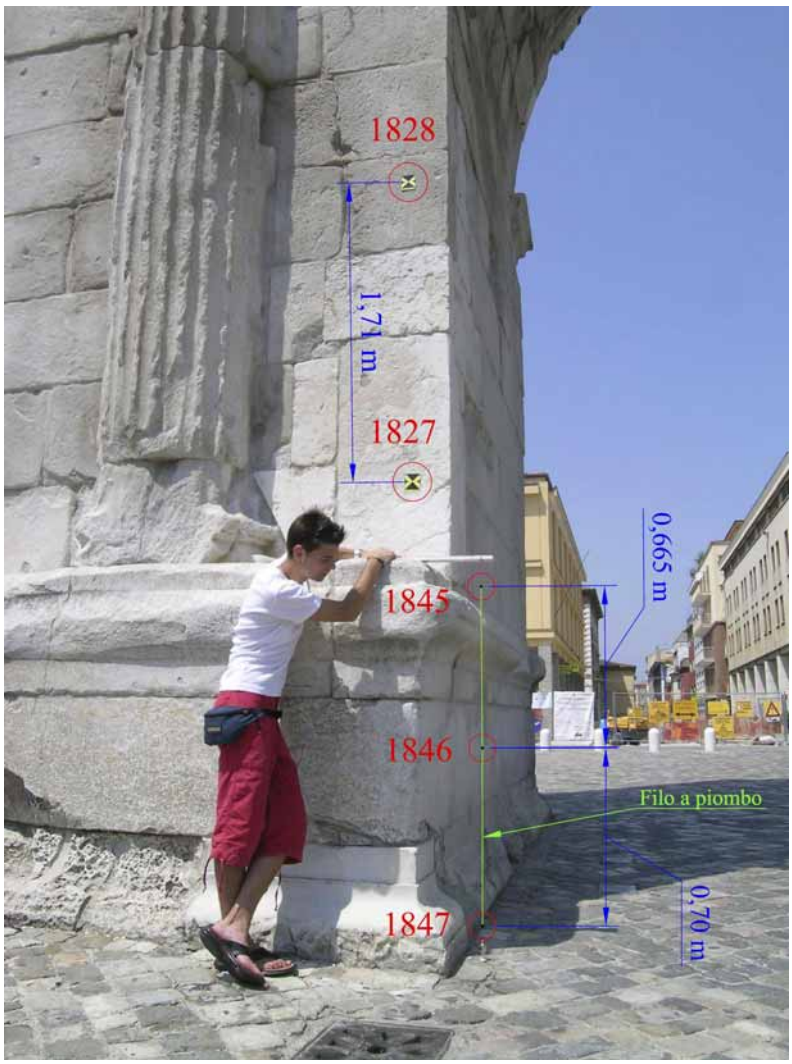



Figura 5.26 – Monografia dei punti 1827,1828,1845,1846,1847.
Seconda sessione di rilievo: 28 / 07 / 05

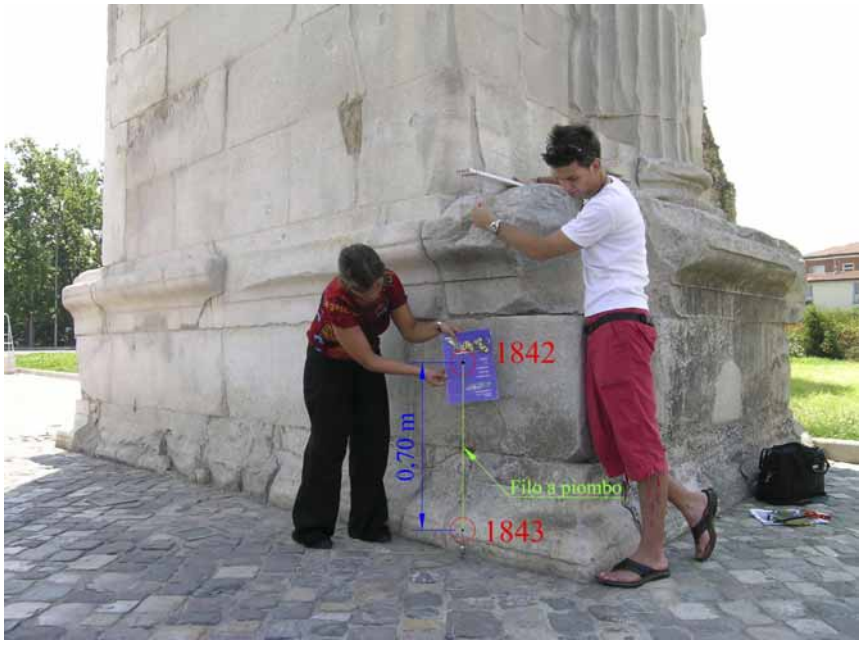



Figura 5.27 – Monografia dei punti 1842,1843. Seconda sessione di rilievo: 28 / 07 / 05

## 5.10 IL RILIEVO FOTOGRAMMETRICO

Il rilievo fotogrammetrico dell'arco d'Augusto di Rimini è stato eseguito interamente tramite la camera digitale amatoriale Nikon Coolpix 5400 visibile in figura 5.1, tutte le prese sono state realizzate con l'obiettivo zoom della fotocamera in posizione grandangolare, ovvero con una distanza focale ( equiparata al formato 35 mm ) pari a c = 29 mm. Come già chiarito nel paragrafo 5.4, l'impossibilità di adoperare l'obiettivo zoom della Nikon in posizione tele ( perché in tale configurazione non erano noti i parametri di calibrazione ) ha portato a numerosi problemi, difatti per assicurarsi la precisione prefissata ( cm. 2 ) è stato necessario eseguire prese da molto vicino all'arco, ma tale vicinanza non permetteva di inquadrare il monumento nella sua interezza, se non inclinando di molto l'asse delle prese rispetto all'orizzontale ( circa 24° ). Come conseguenza dell'inclinazione dell'asse ottico sono stati riscontrati due problemi principali: il primo è stato l'occultamento da parte degli aggetti di numerosi punti che non potevano così essere rilevati, in secondo luogo le riprese erano affette da una forte variabilità di scala con una conseguente forte diminuzione delle precisioni di rilievo andando dal basamento verso la cima dell'arco.

Come più volte spiegato, l'impiego di un carrello elevatore o di un teleobiettivo calibrato avrebbe risolto tutti i problemi ( vedi paragrafo 5.4 ). Non disponendo di quest'ultime soluzioni ottimati si è quindi cercato di intervenire sulla precisione del rilievo attraverso le variabili che influenzano l'accuratezza di un rilievo fotogrammetrico. Tali parametri che governano la precisione del metodo fotogrammetrico sono innumerevoli, ma essendo molti di essi prefissati ed immodificabili non sono rimasti che la posizione spaziale delle prese, il loro assetto, nonché il loro numero. Per migliorare la precisione dei punti da rilevare, soprattutto di quelli in sommità, è stato attuato un considerevole dispiegamento di prese fotografiche ( 52 in totale ); in

tal modo ogni punto della struttura da rilevare è stato visualizzato su numerosi fotogrammi ( in media ogni punto rilevato compare su 10 prese ) aumentando così la ridondanza delle misure con un conseguente miglioramento delle precisioni di rilievo. Inoltre per ridurre al minimo le occlusioni prospettiche da parte degli aggetti della struttura è stata impiegata una scala, in tal modo si è guadagnata un po' di quota che ha favorito la diminuzione delle ostruzioni prospettiche ed ha anche permesso di migliorare le precisioni medie del rilievo ( vedi figura 5.28 ).

Figura 5.28 – Presa fotogrammetrica da maggior quota tramite scala.

Le prese fotogrammetriche sono state inoltre eseguite da postazioni definite a varie distanze tutto attorno all'arco, in modo che da una presa all'altra ci sia sempre una certa zona di sovrapposizione necessaria per orientare relativamente i fotogrammi fra di loro e poter così ricostruire l'arco nella sua interezza 3D. Alcune prese sono state eseguite anche con assetti e postazioni molto insolite, ad esempio, per riprendere l'intradosso dell'arcata sono state eseguite varie prese collocate proprio sotto l'arco con l'asse di presa quasi verticale.

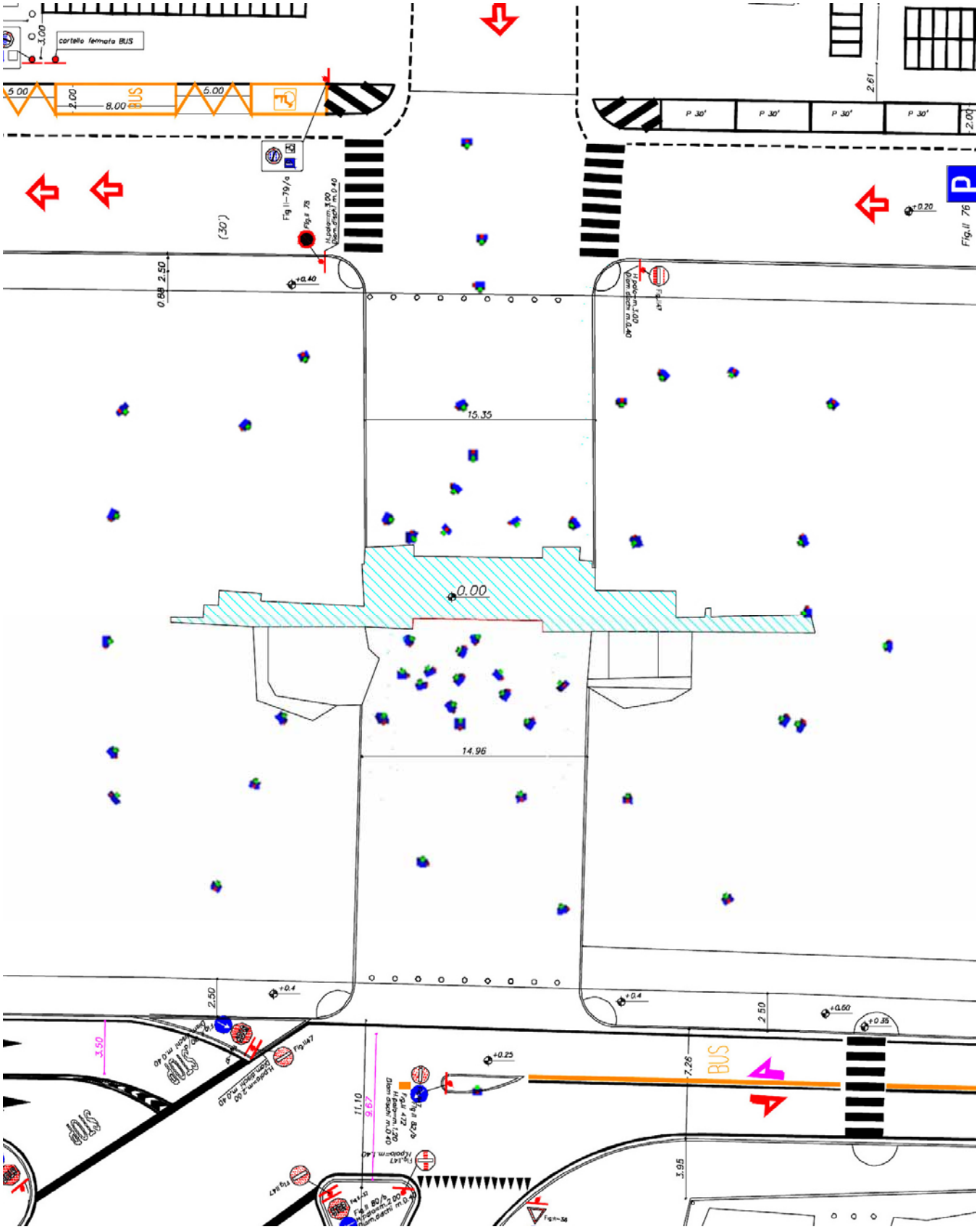



Figura 5.29 – Planimetria della zona attorno all'arco con indicazione della posizione ed assetto delle prese fotogrammetriche eseguite in totale nelle due sessioni di lavoro.

Figura 5.30 – Fotografia aerea di Rimini datata a prima del 2000. Nell'angolo in basso a destra si può vedere l'arco d'Augusto.

Figura 5.31 – Fotografia aerea di Rimini datata a prima del 2000.

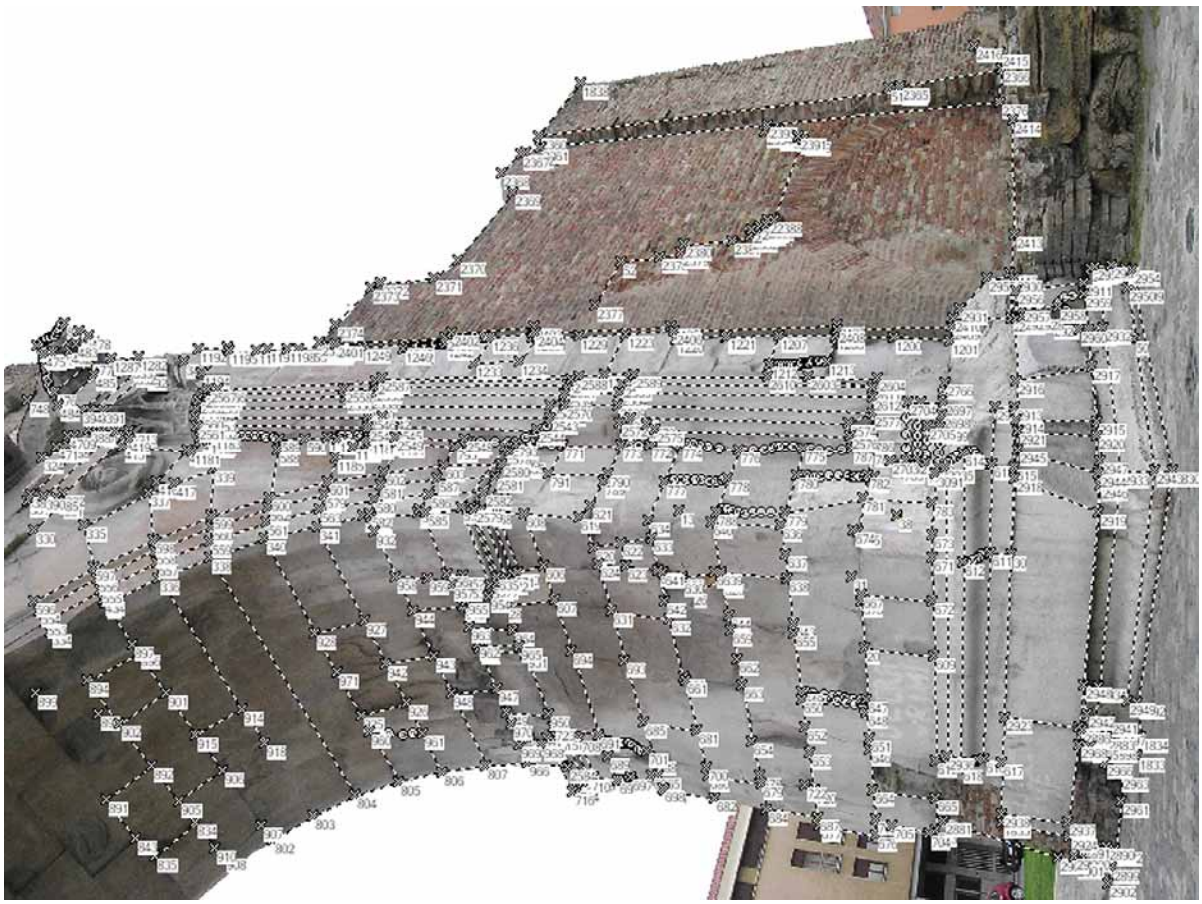


Figura 5.32 – Presa n. 1. In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite.

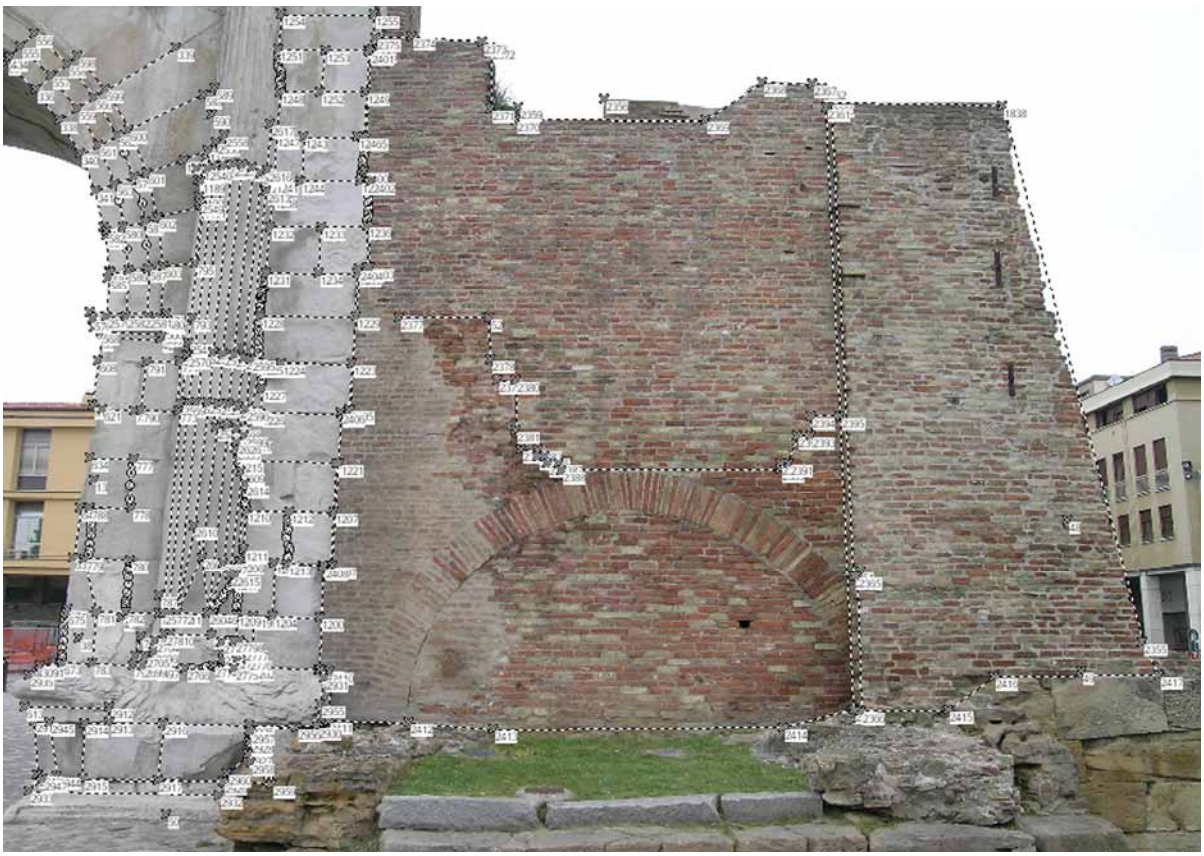


Figura 5.33 – Presa n. 2. In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite.

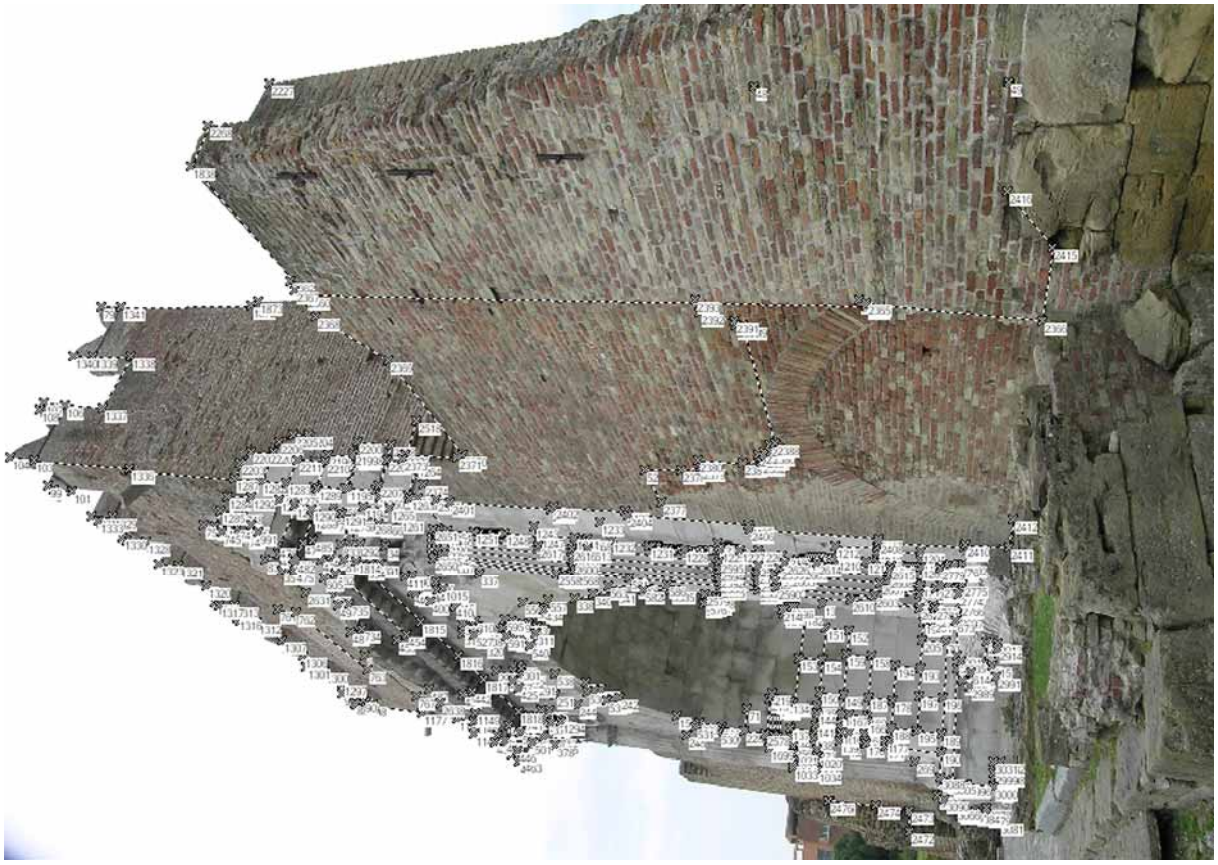


Figura 5.34 – Presa n. 3. In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite.

Figura 5.35 – Presa n. 4. In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite.

Figura 5.36 – Presa n. 5. In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite.

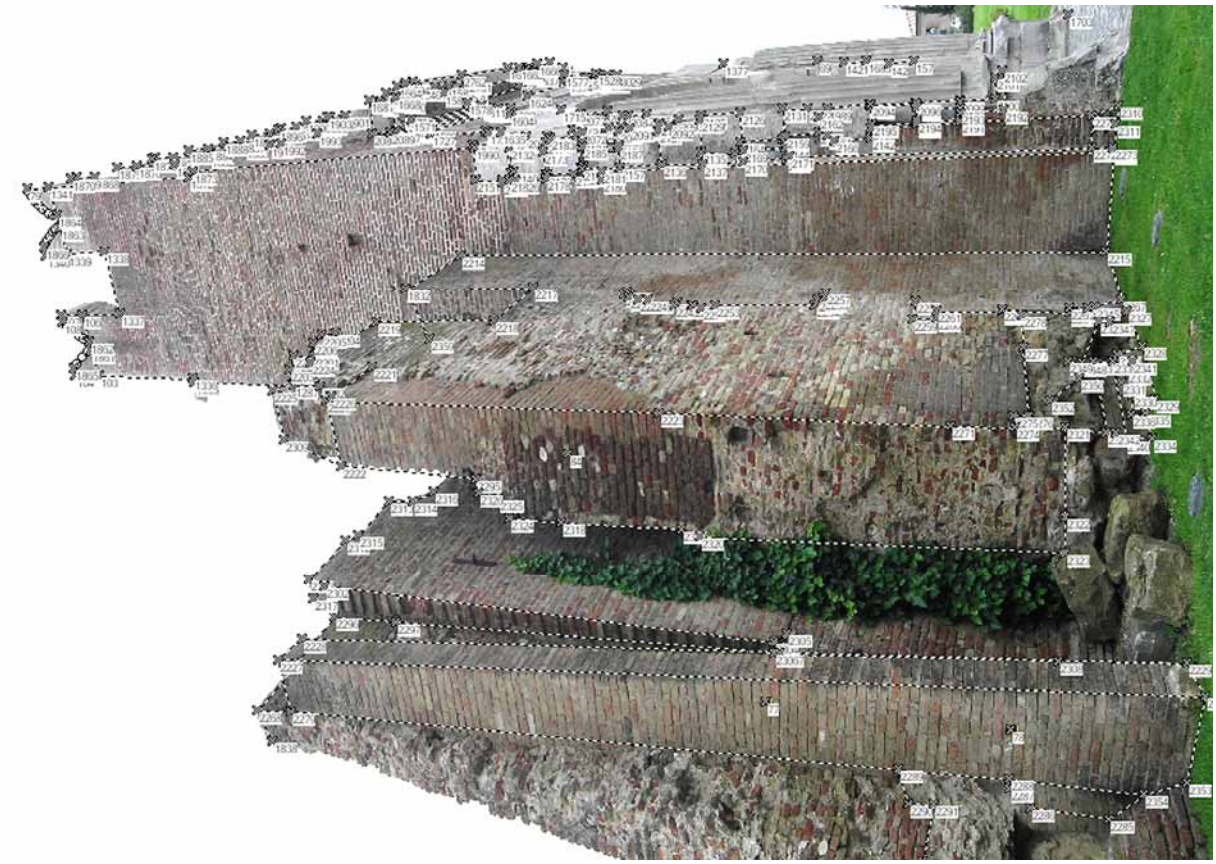


Figura 5.37 – Presa n. 6. In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite.

Figura 5.38 – Presa n. 7. In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite.

Figura 5.39 – Presa n. 8. In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite.

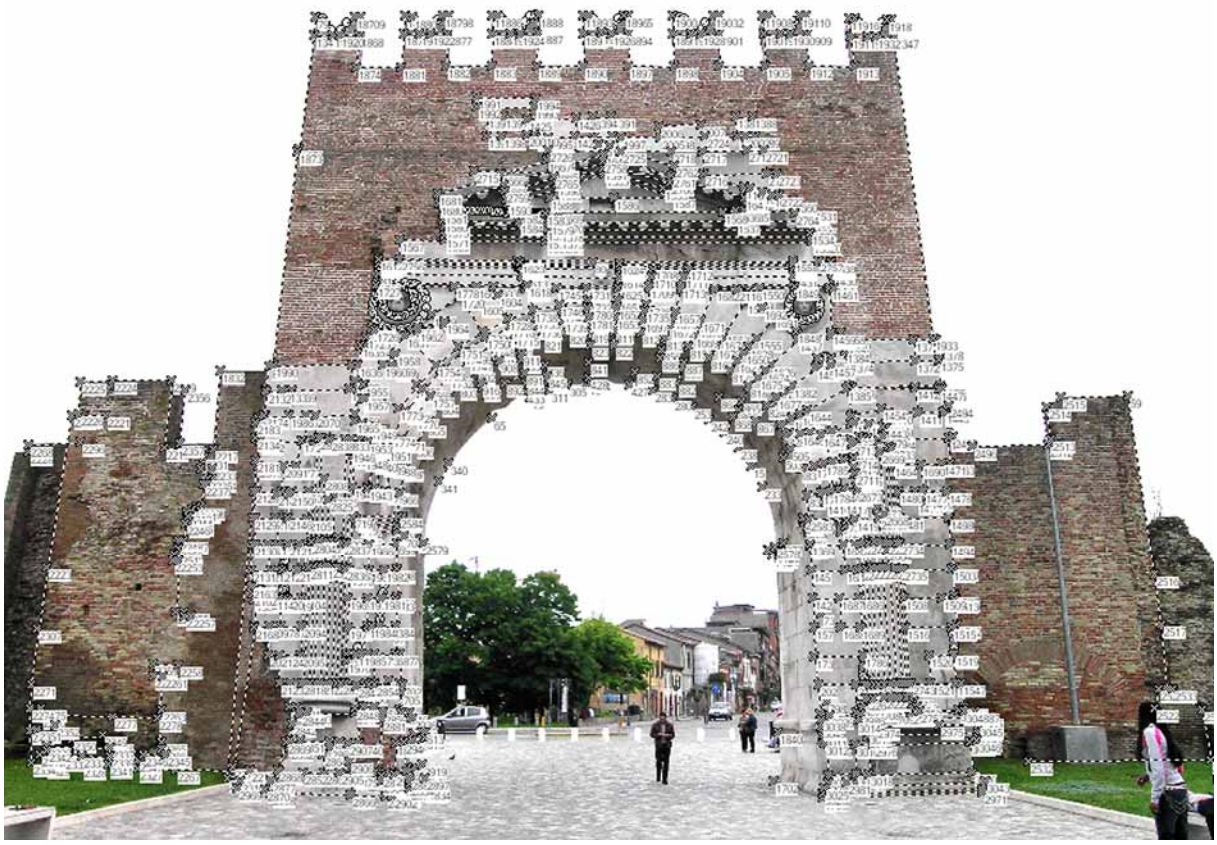


Figura 5.40 – Presa n. 9. In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite.

Figura 5.41 – Presa n. 10 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

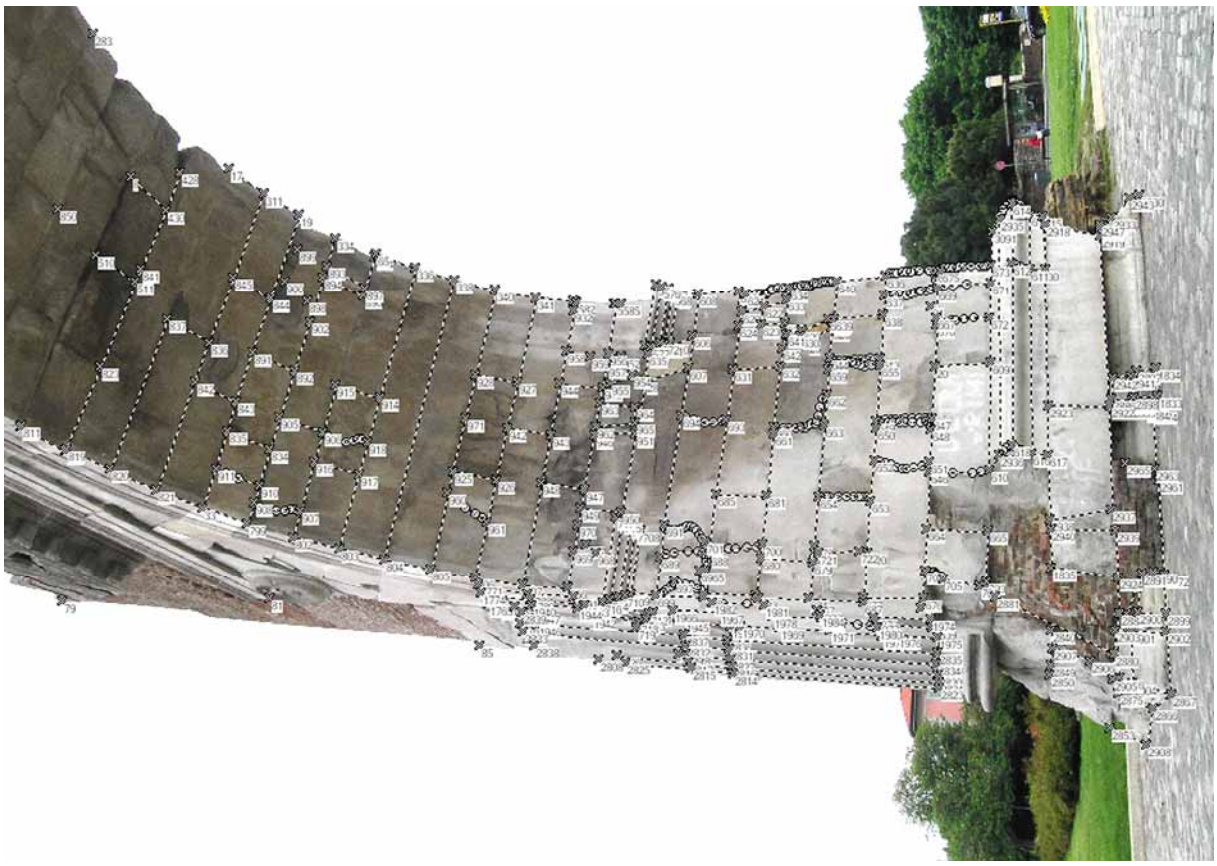


Figura 5.42 – Presa n. 11 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

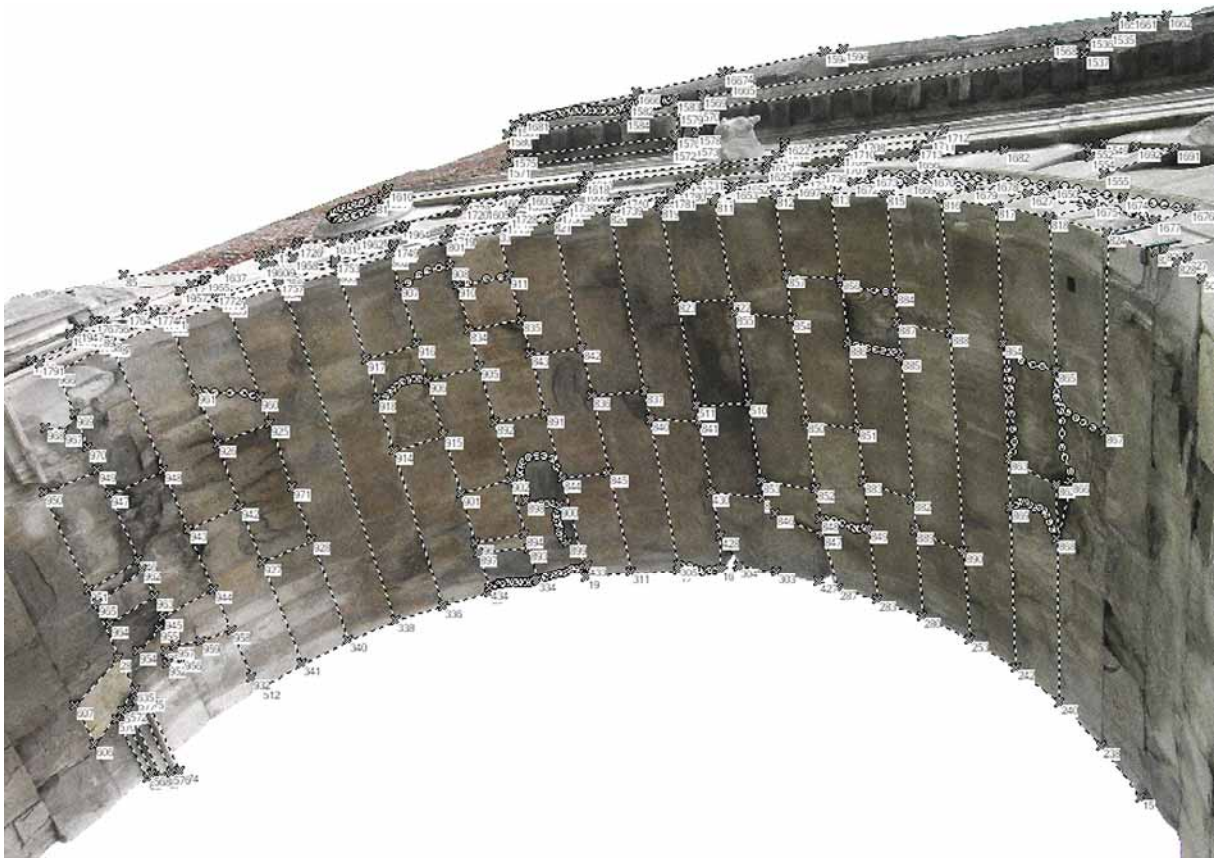


Figura 5.43 – Presa n. 12 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

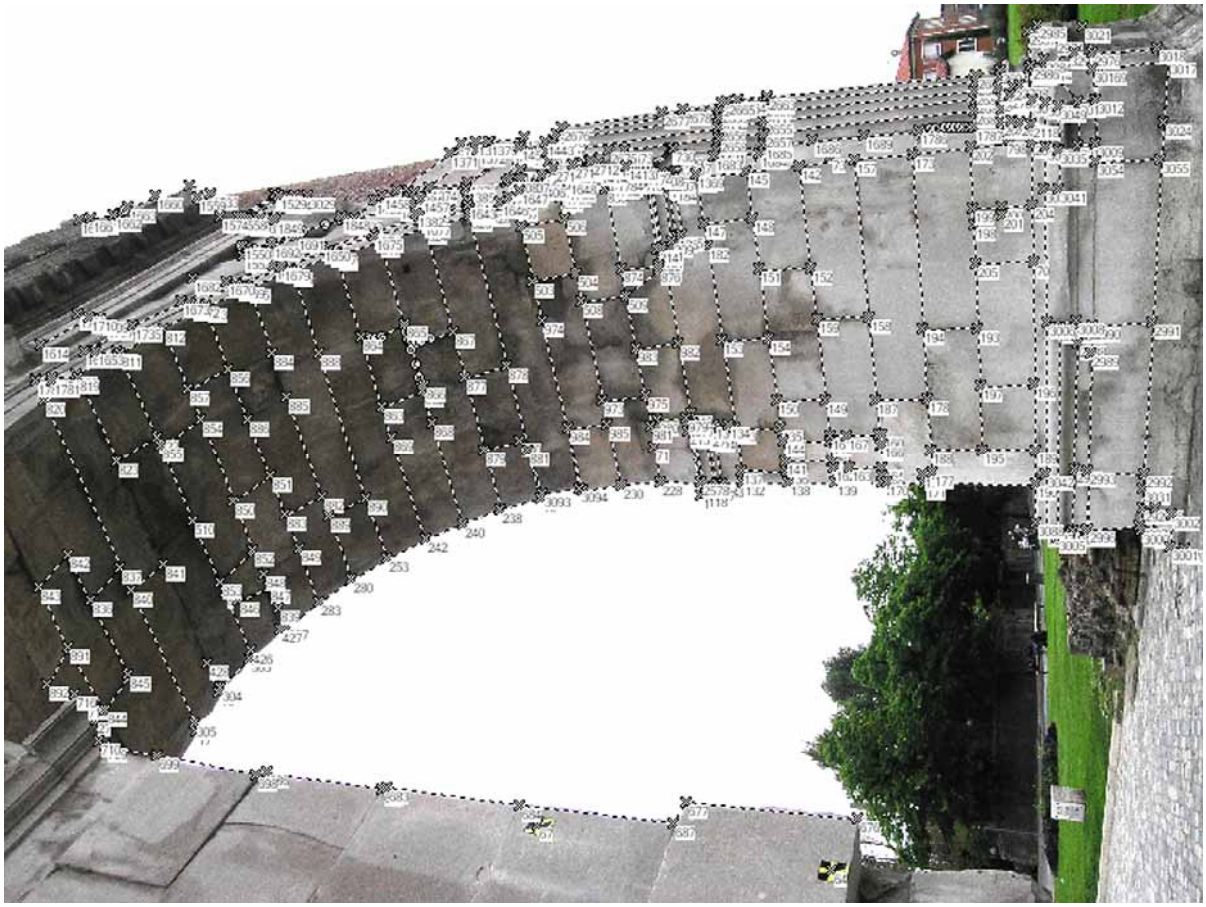


Figura 5.44 – Presa n. 13 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

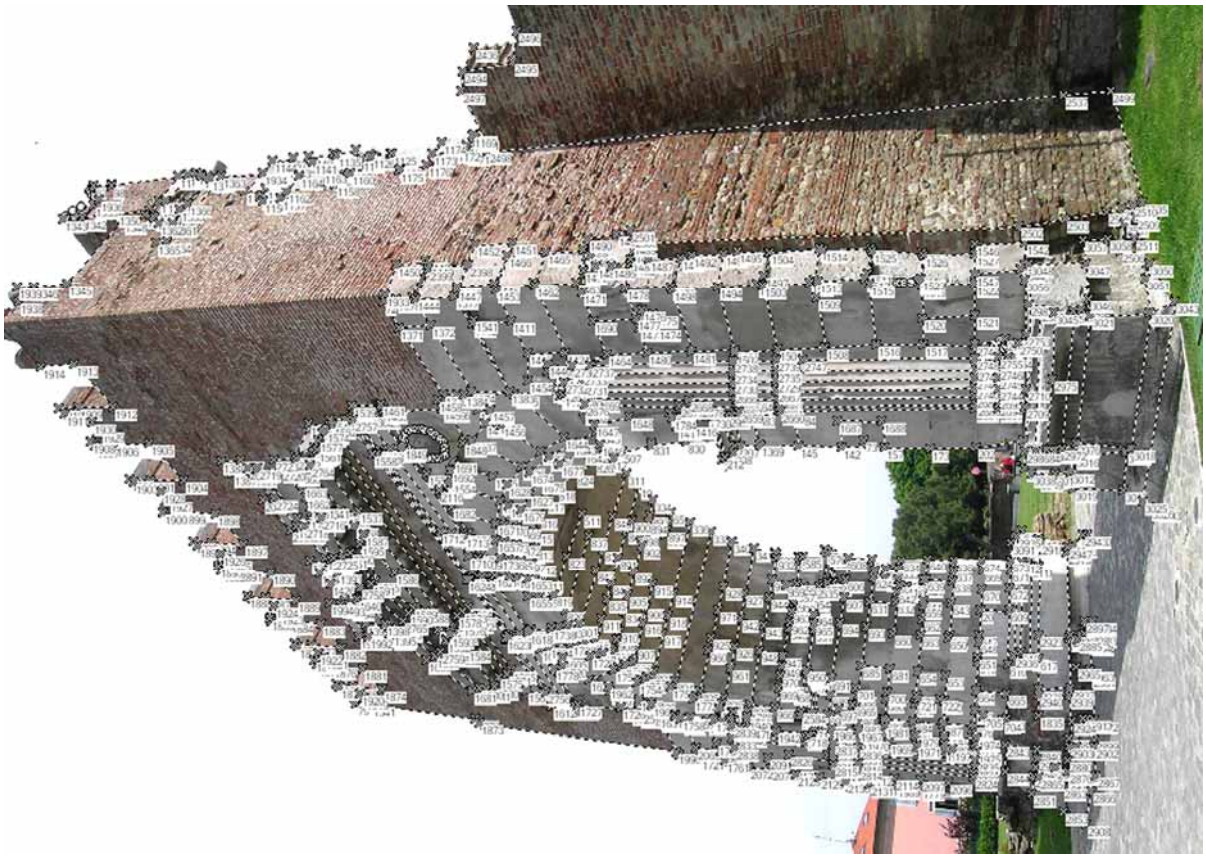


Figura 5.45 – Presa n. 14 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

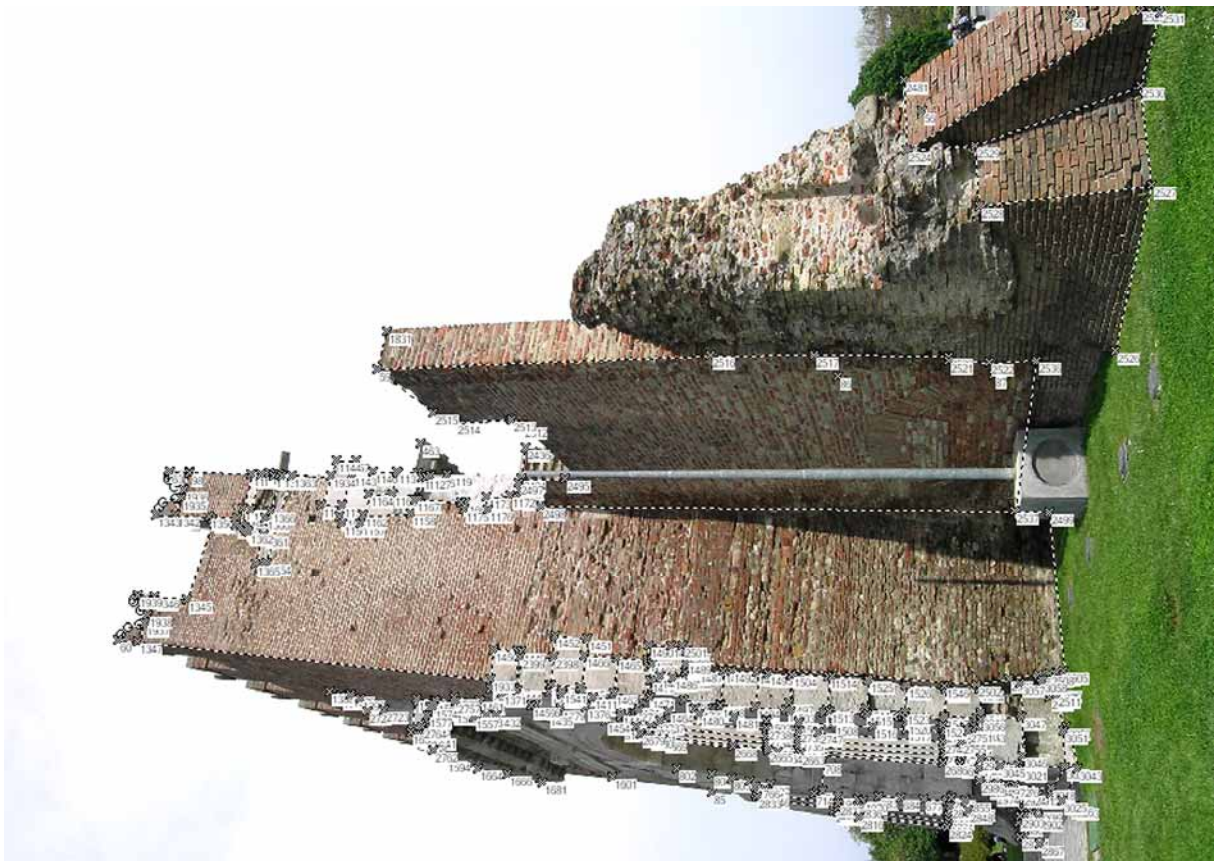


Figura 5.46 – Presa n. 15 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

Figura 5.47 – Presa n. 16 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

Figura 5.48 – Presa n. 17 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

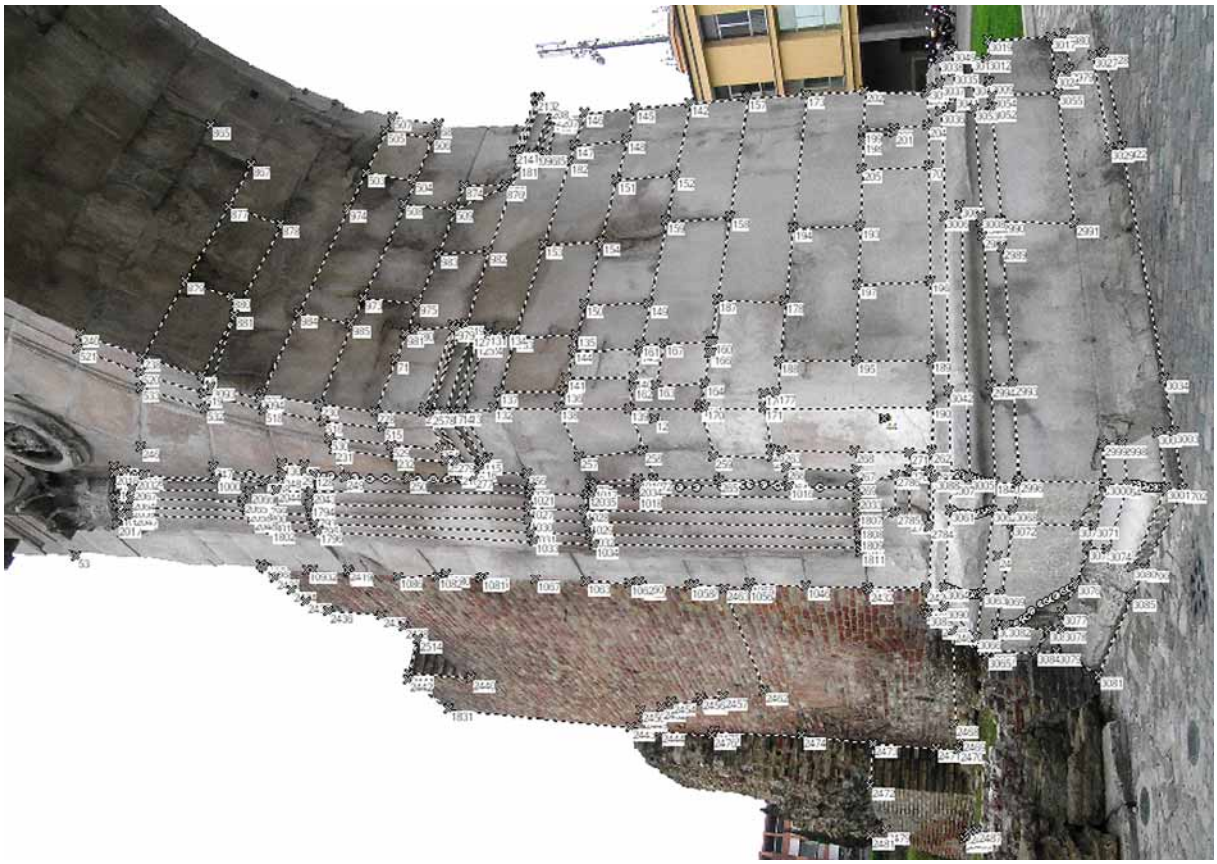


Figura 5.49 – Presa n. 18 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

Figura 5.50 – Presa n. 19 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

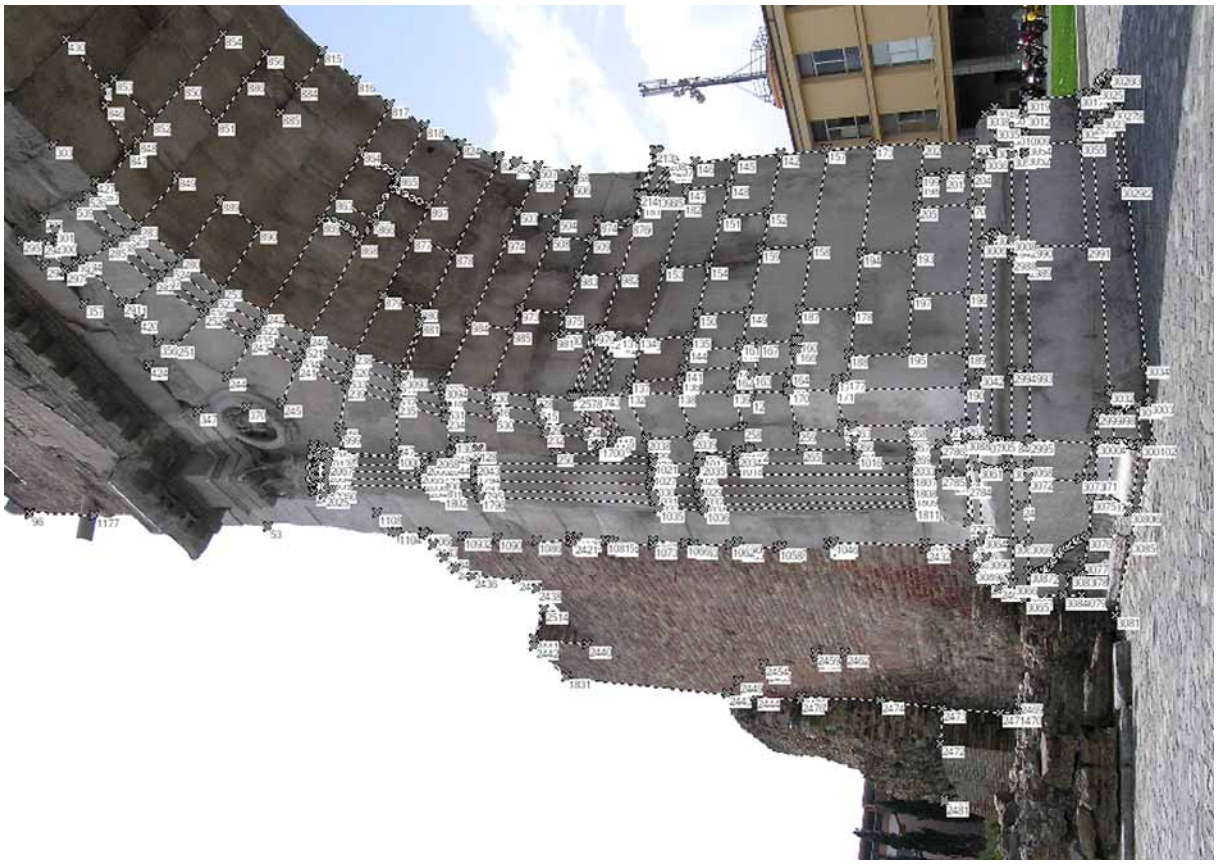


Figura 5.51 – Presa n. 20 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

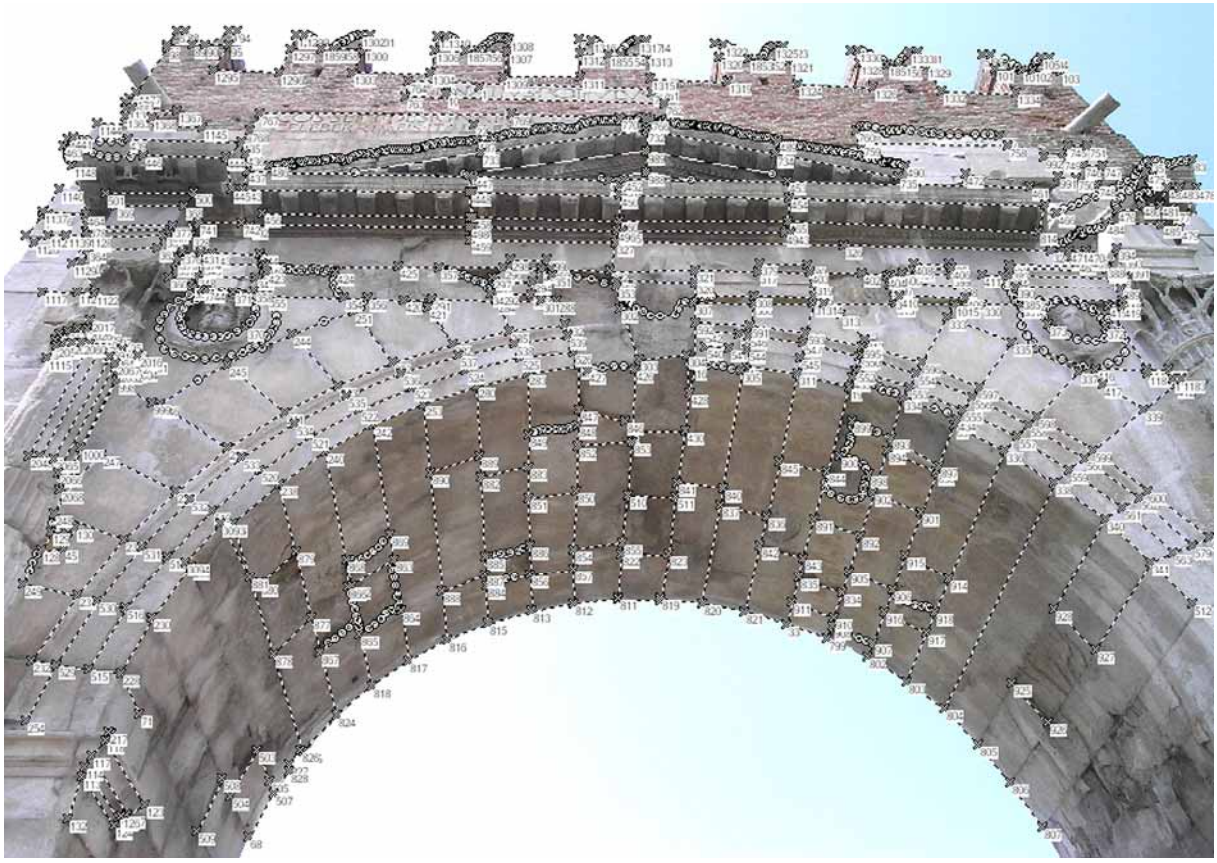


Figura 5.52 – Presa n. 21 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

Figura 5.53 – Presa n. 22 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

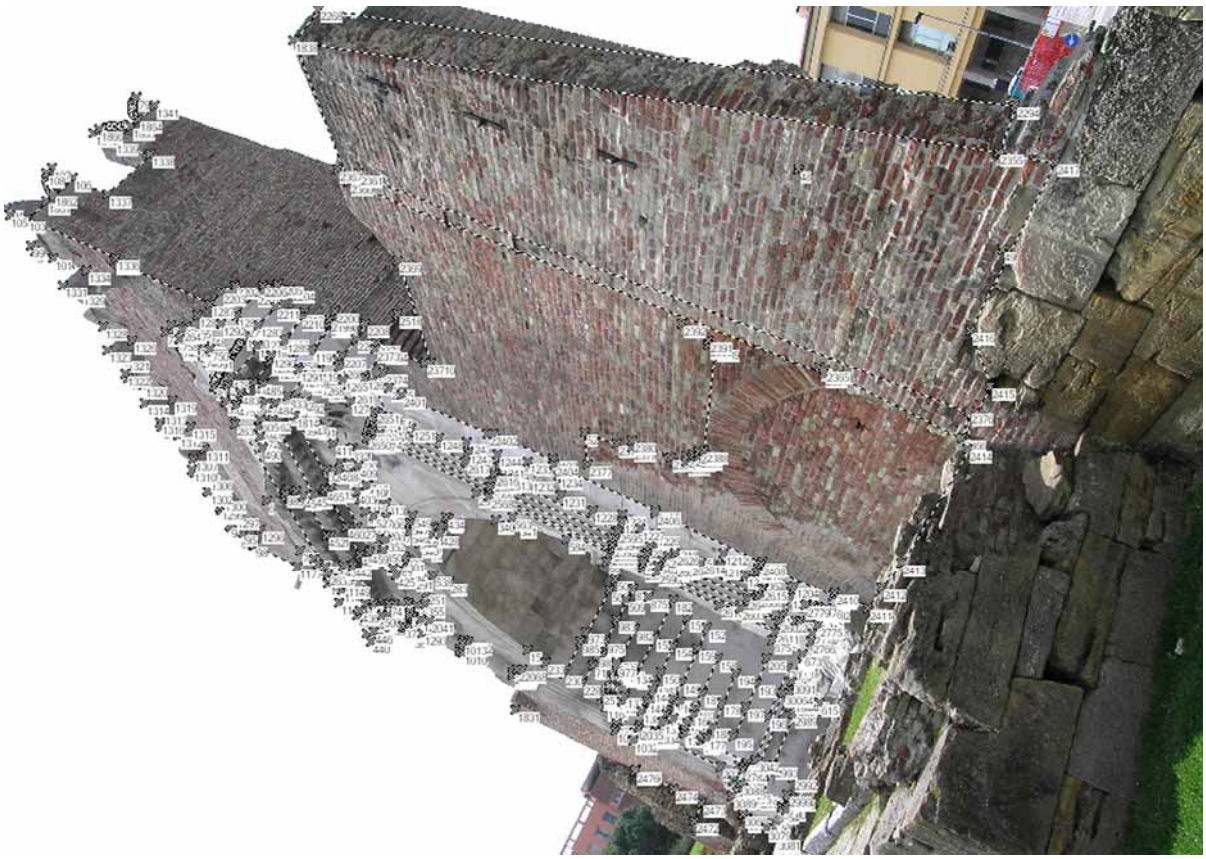


Figura 5.54 – Presa n. 23 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

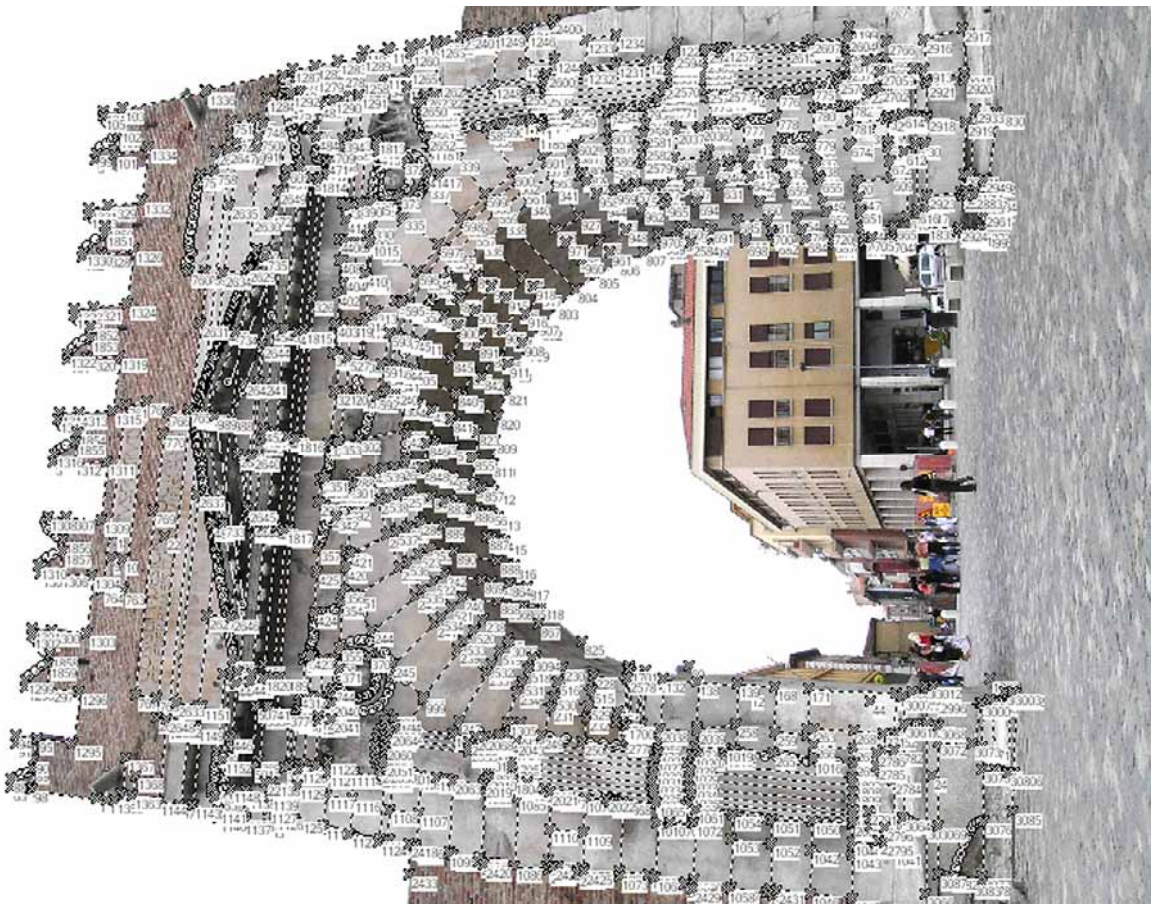


Figura 5.55 – Presa n. 24 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

Figura 5.56 – Presa n. 25 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

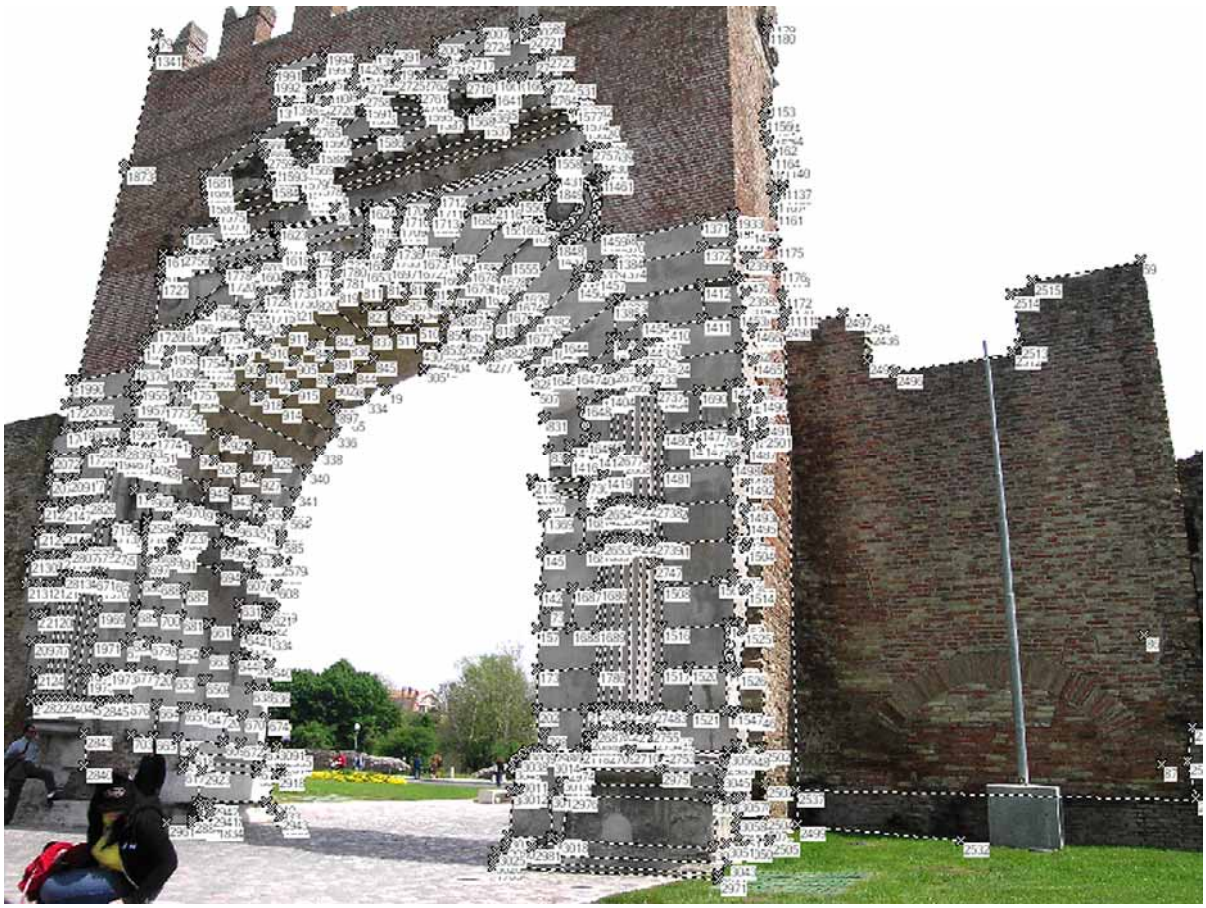


Figura 5.57 – Presa n. 26 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

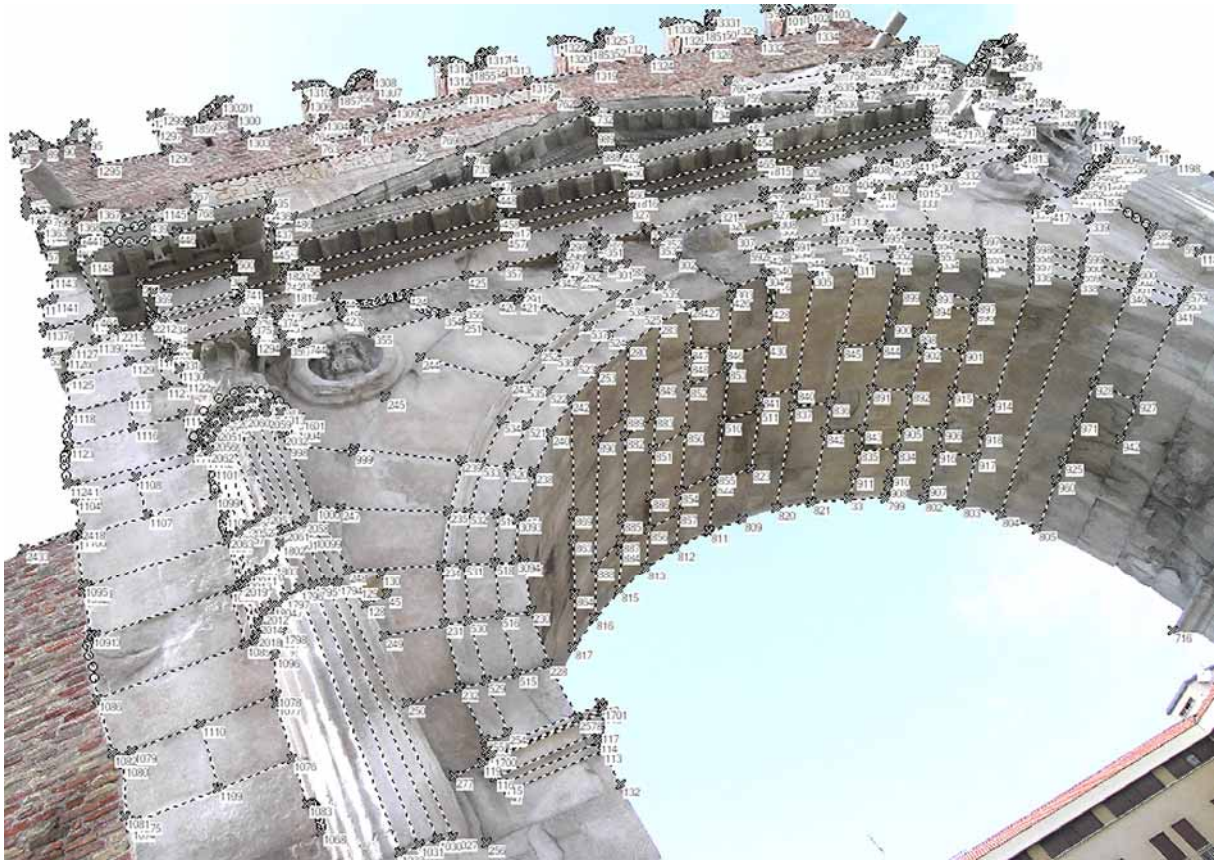


Figura 5.58 – Presa n. 27 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

Figura 5.59 – Presa n. 28 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

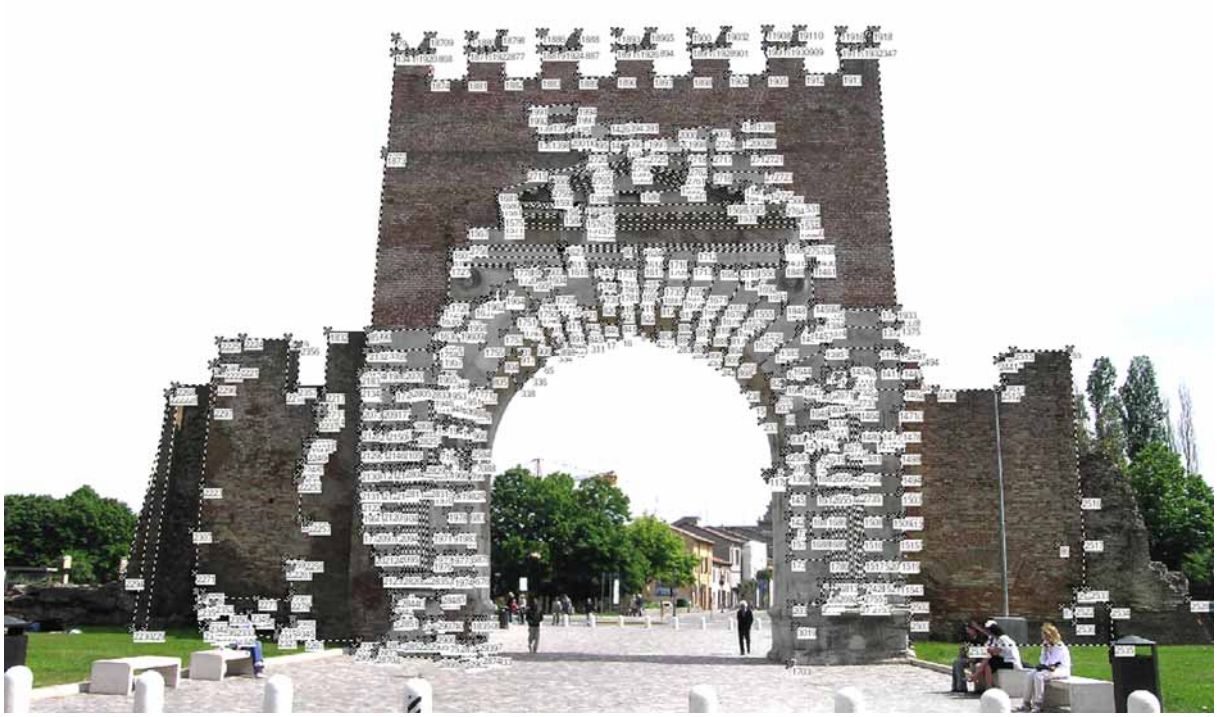


Figura 5.60 – Presa n. 29 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

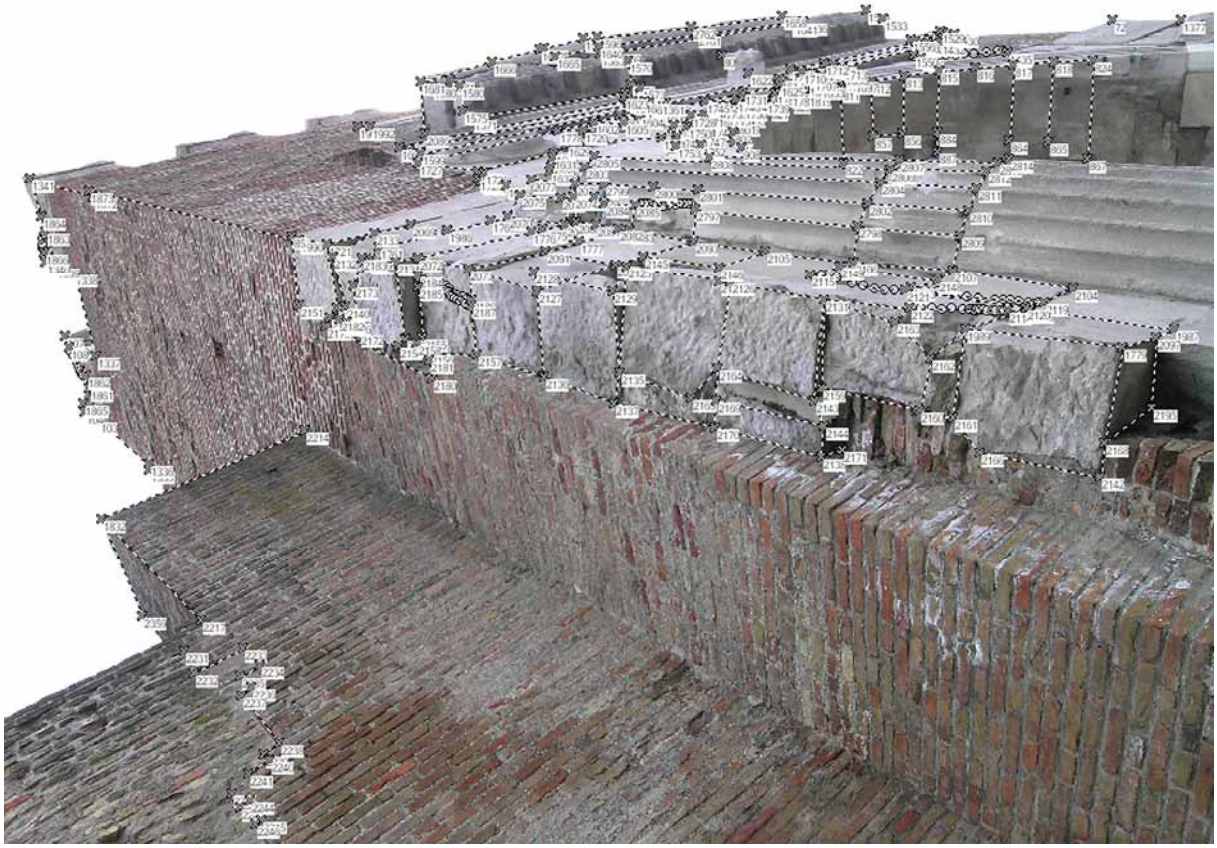


Figura 5.61 – Presa n. 30 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

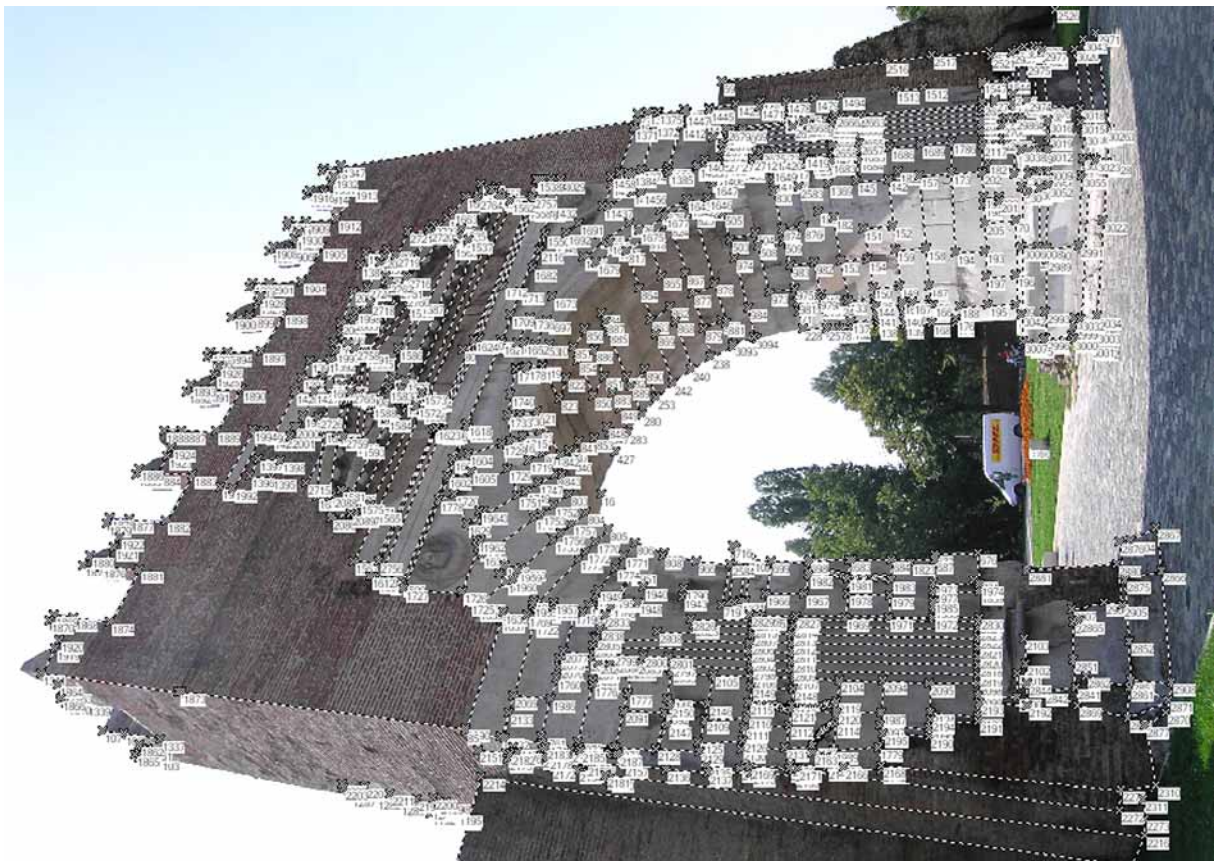


Figura 5.62 – Presa n. 31 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

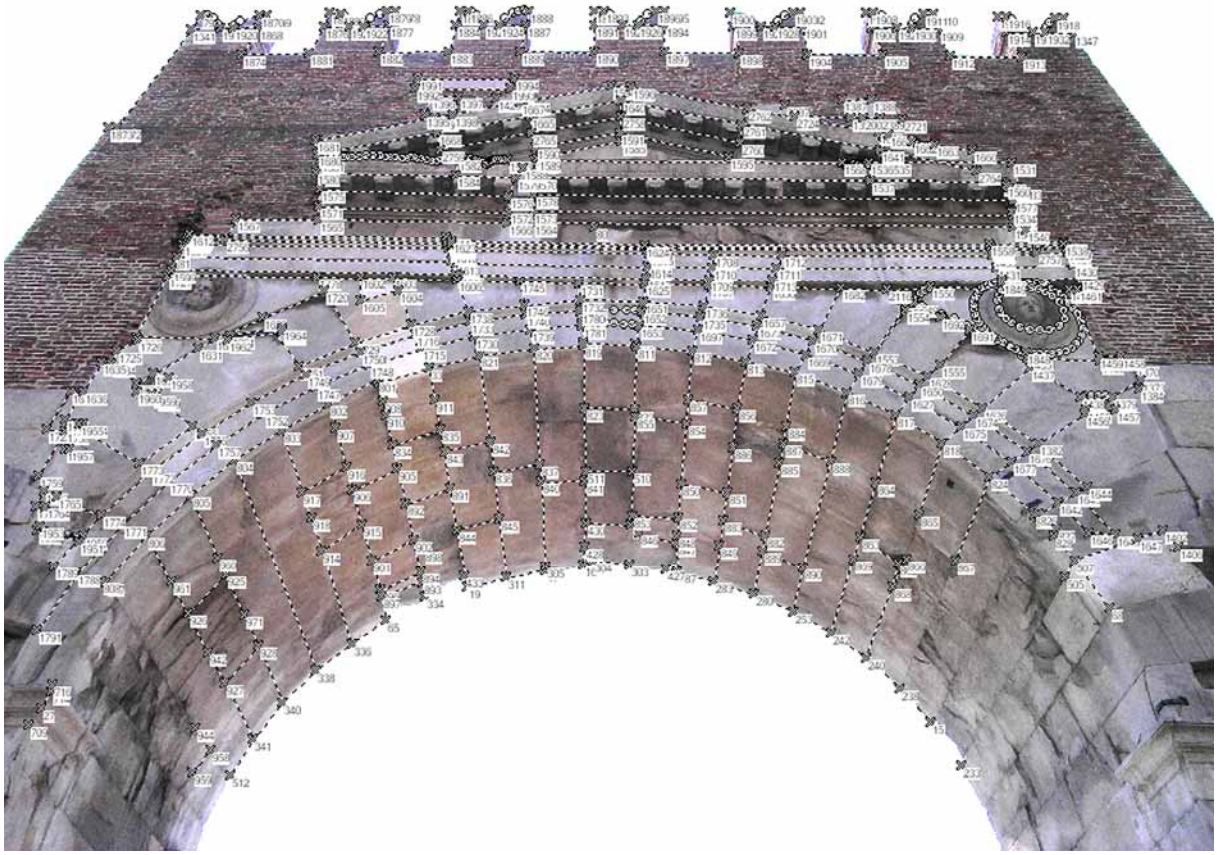


Figura 5.63 – Presa n. 32 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

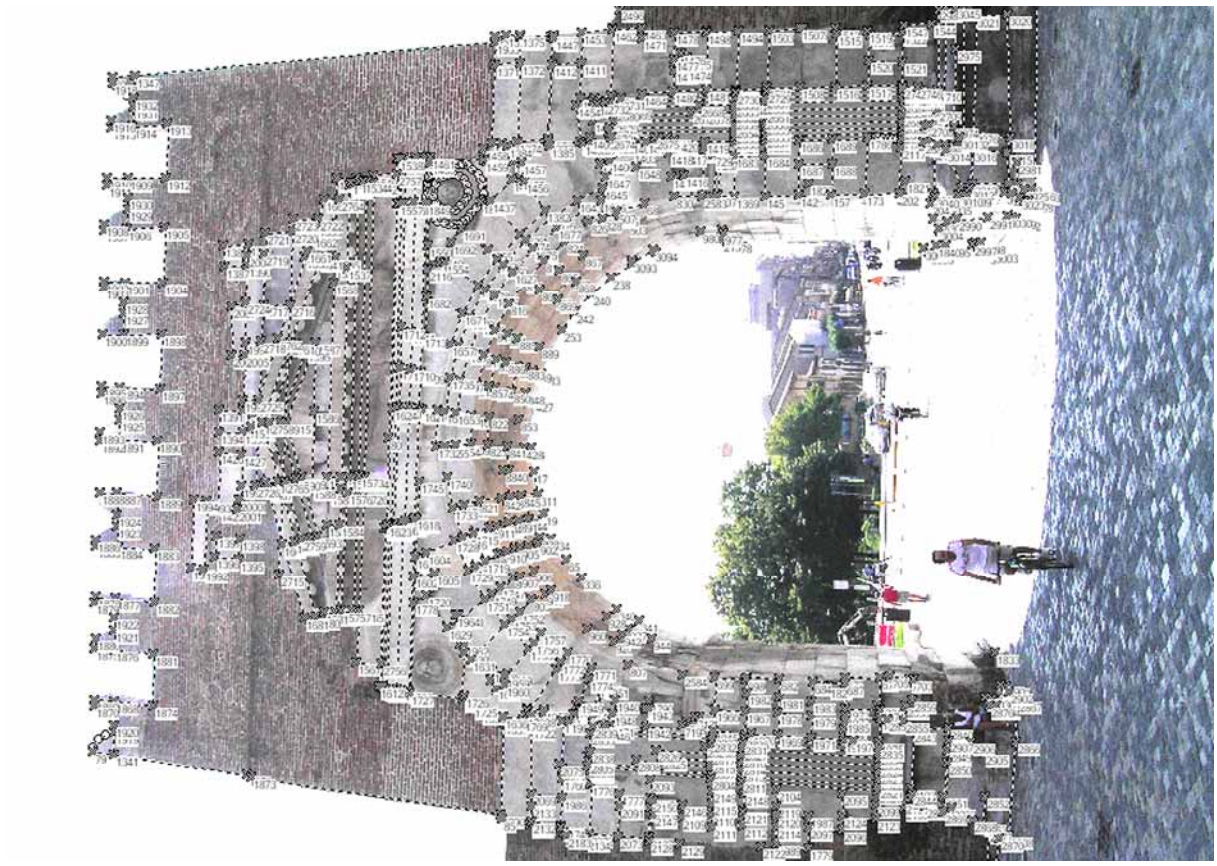


Figura 5.64 – Presa n. 33 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

Figura 5.65 – Presa n. 34 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

Figura 5.66 – Presa n. 38 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

Figura 5.67 – Presa n. 39 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

Figura 5.68 – Presa n. 42 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

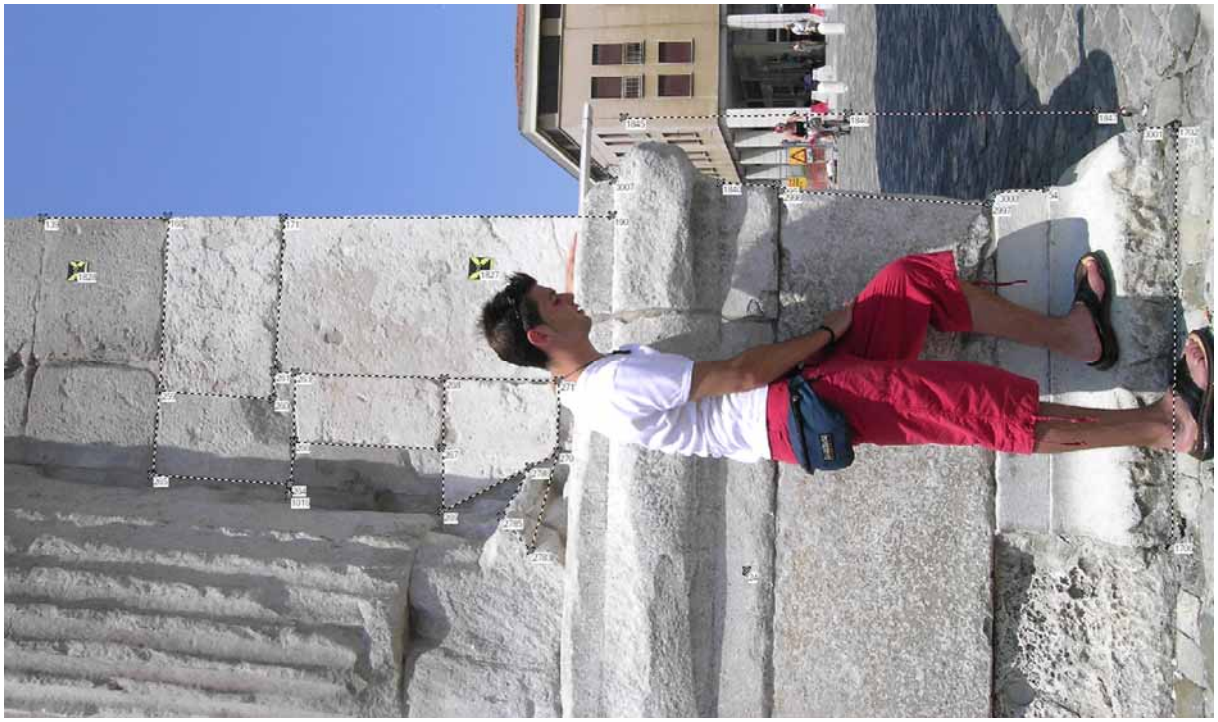


Figura 5.69 – Presa n. 43 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

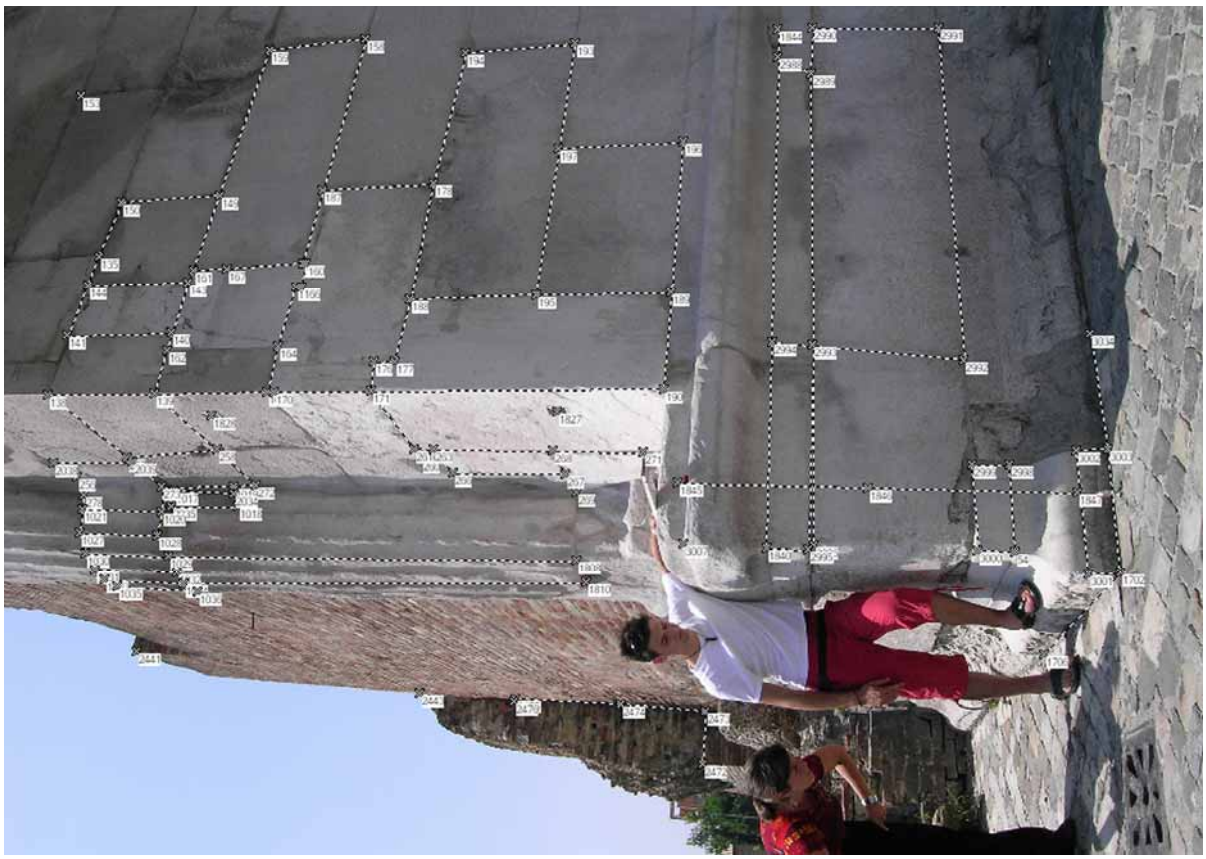


Figura 5.70 – Presa n. 44 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

Figura 5.71 – Presa n. 45 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

Figura 5.72 – Presa n. 46 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

Figura 5.73 – Presa n. 47 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

Figura 5.74 – Presa n. 48 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

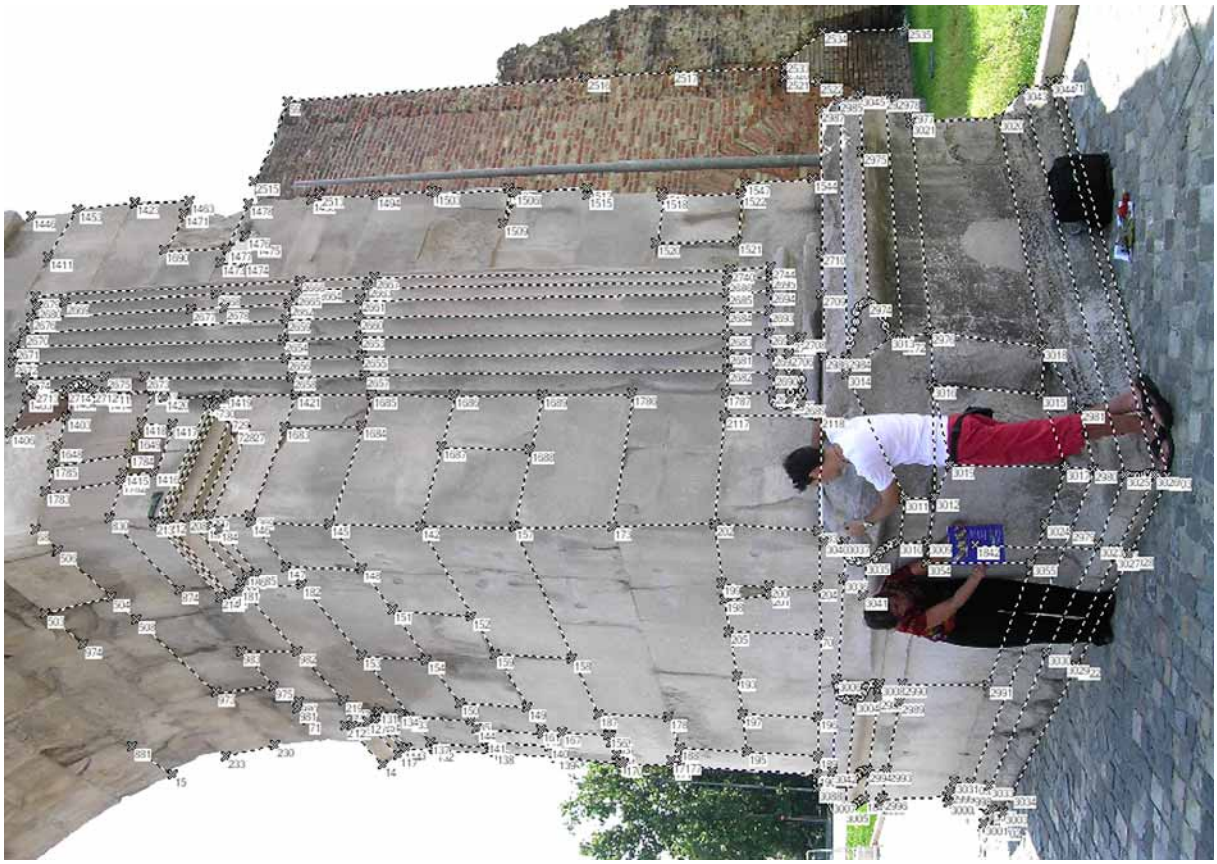


Figura 5.75 – Presa n. 50 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

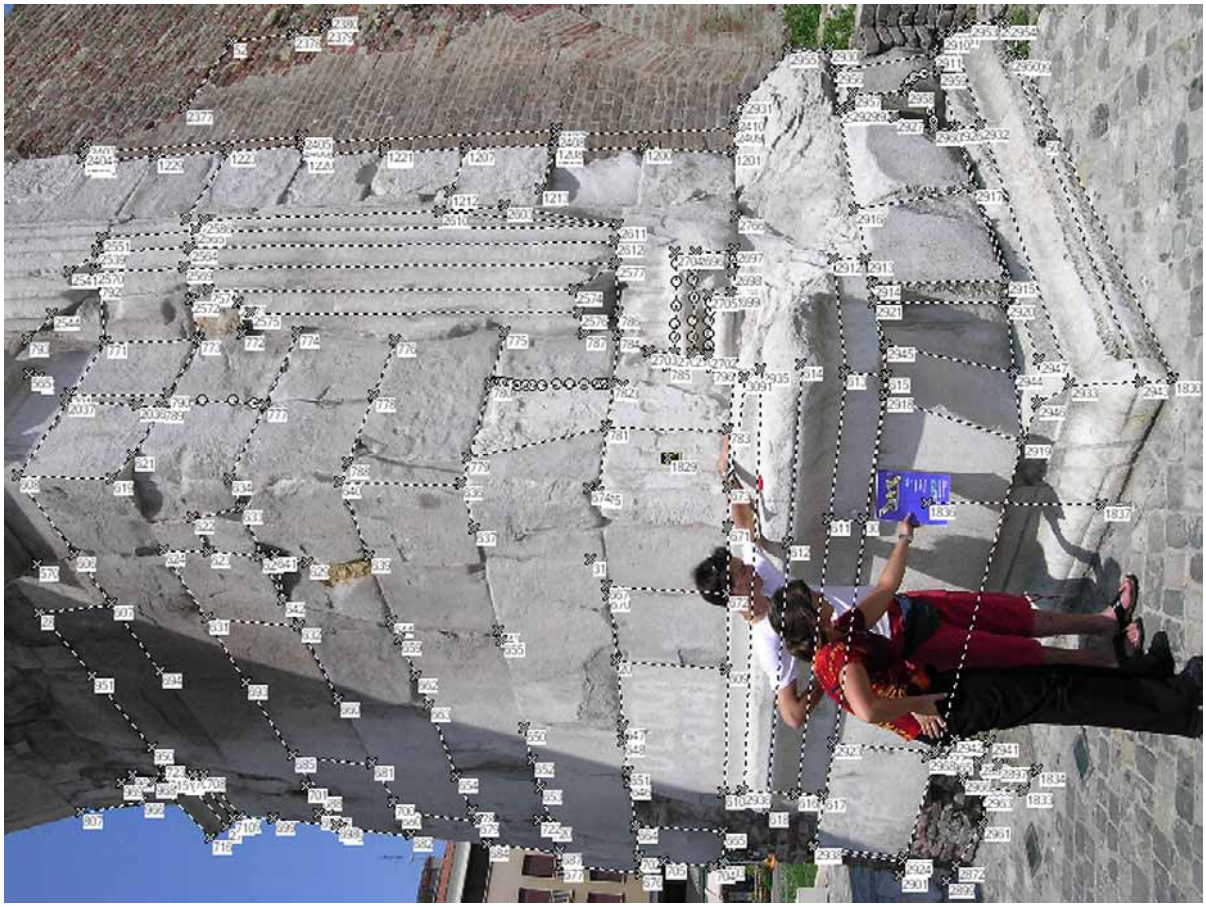


Figura 5.76 – Presa n. 53 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

Figura 5.77 – Presa n. 54 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

Figura 5.78 – Presa n. 55 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

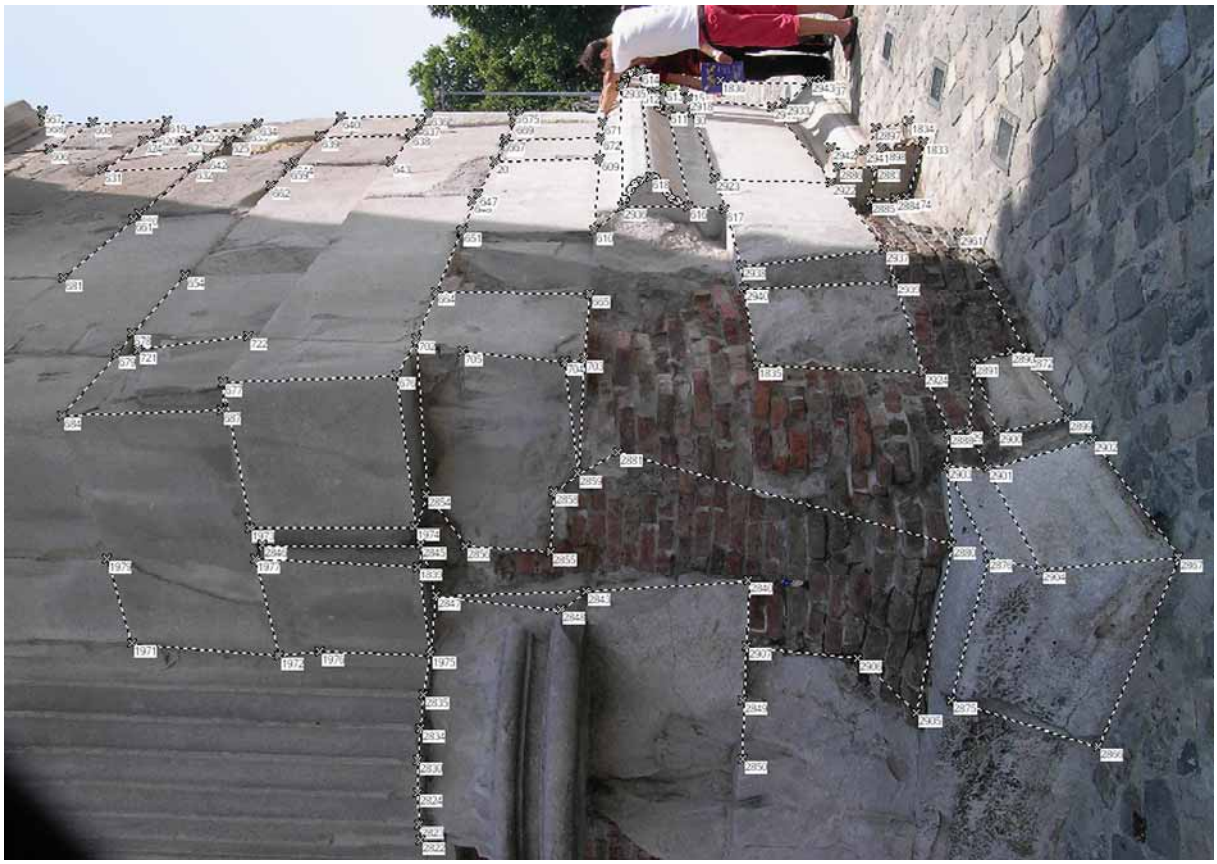


Figura 5.79 – Presa n. 56 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

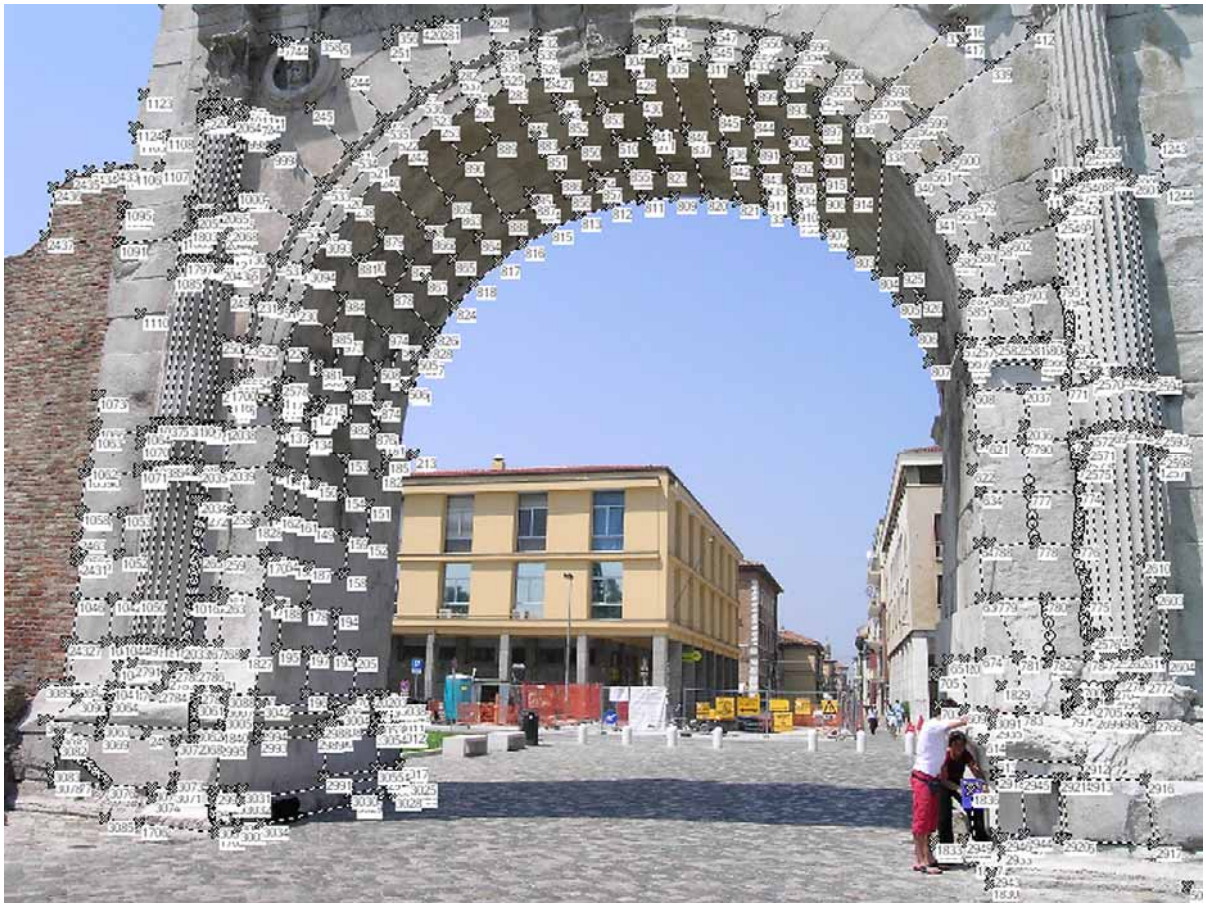


Figura 5.80 – Presa n. 58 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

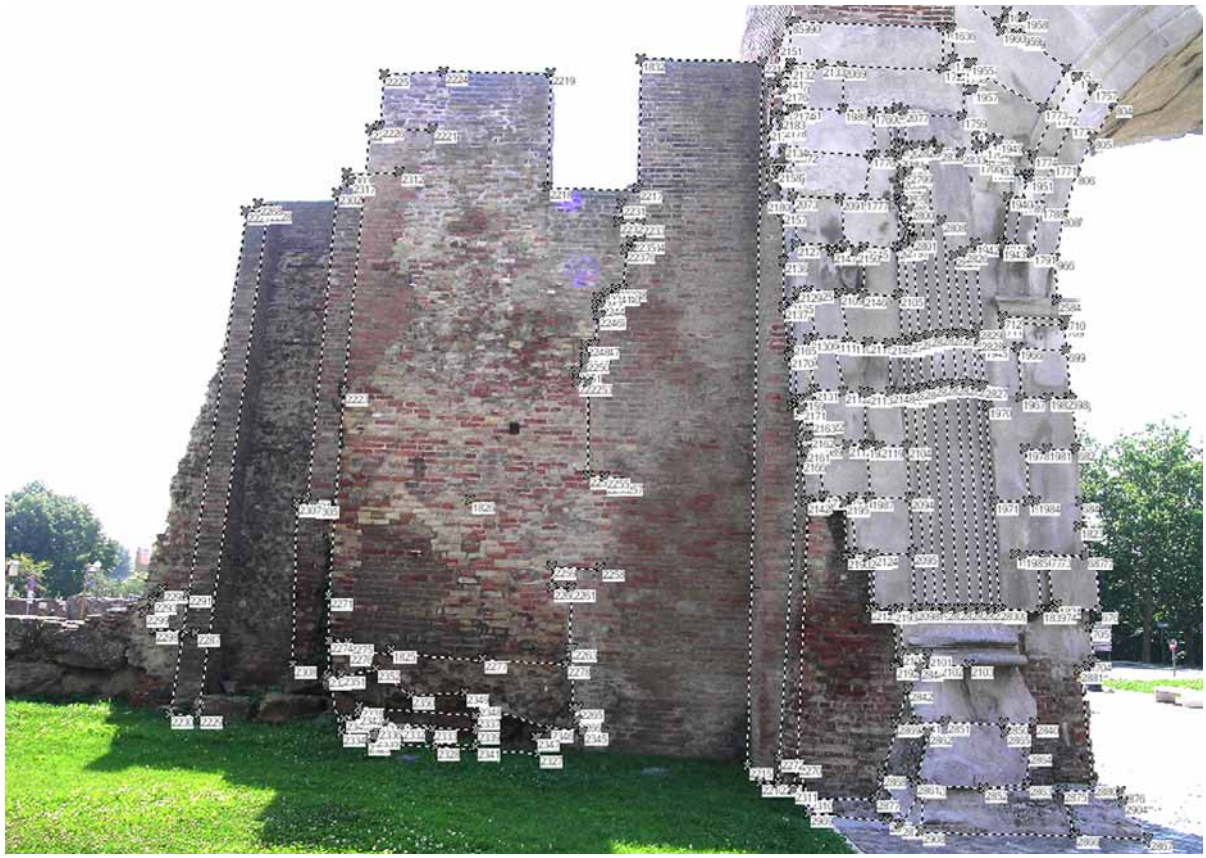


Figura 5.81 – Presa n. 59 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

Figura 5.82 – Presa n. 60 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

Figura 5.83 – Presa n. 61 In sovrimpressione sono riportati i punti collimati e le linee restituite

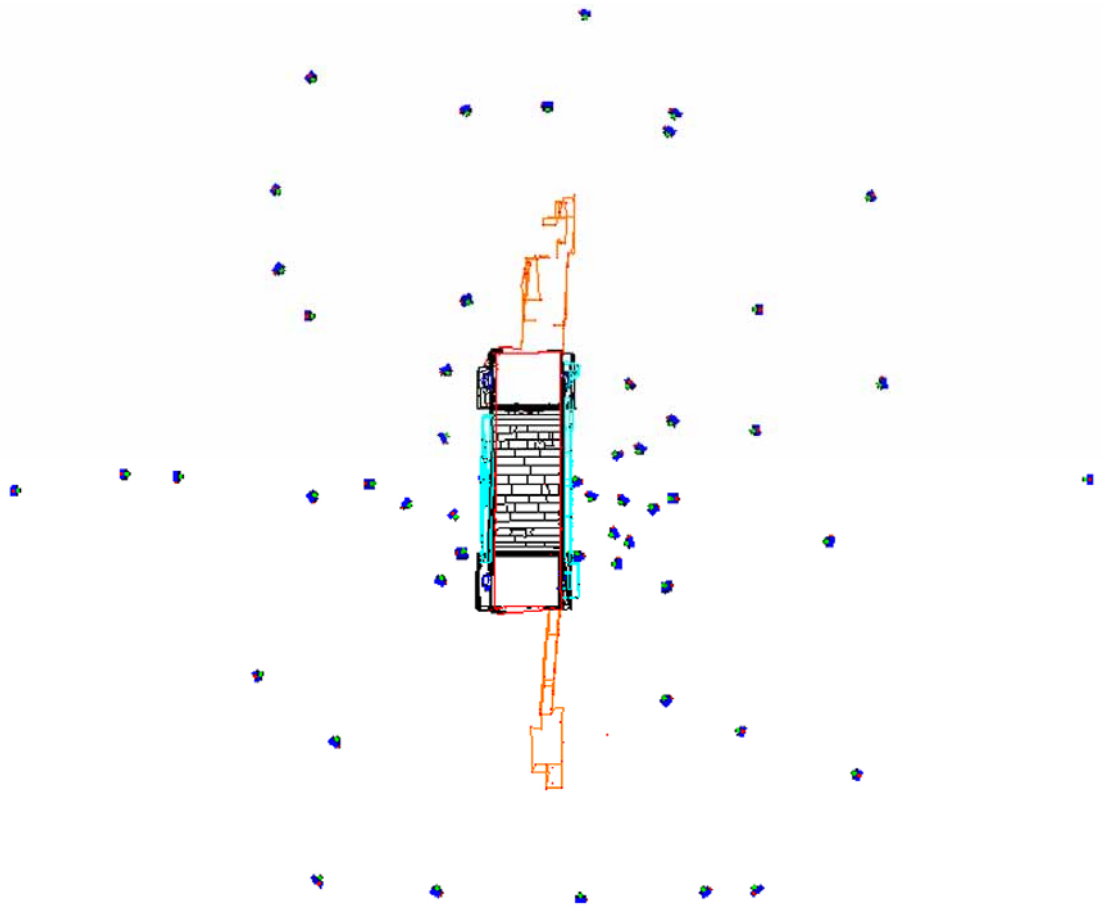


Figura 5.84 – Pianta dell'arco d'Augusto con indicazione della posizione ed assetto delle prese eseguite. Immagine esportata dal software PhotoModeler dopo la fase di restituzione.

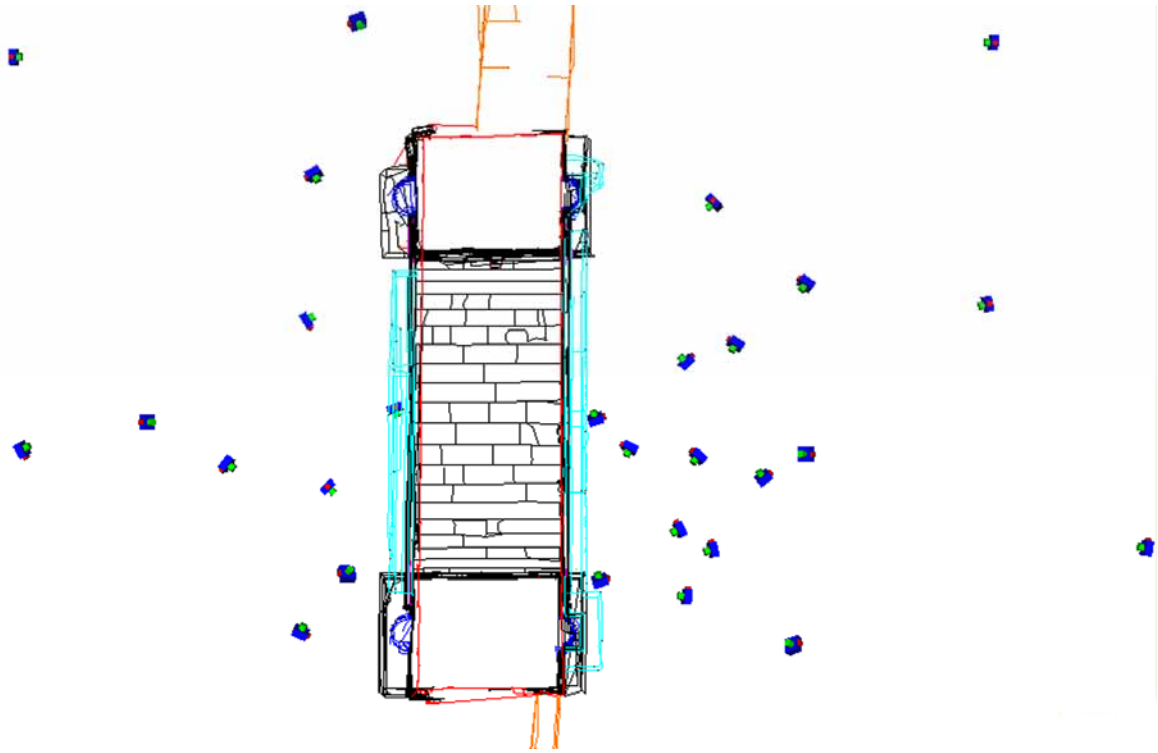


Figura 5.85 – Ingrandimento della figura 5.84.

## 5.11 CONCLUSIONI

Concludendo voglio ricordare che tutti gli obiettivi prefissati sono stati raggiunti, anzi, il più delle volte la precisione dei punti rilevati ed il grado di dettaglio della rappresentazione ha ampiamente superato le aspettative. Nel complesso il rilievo dell'arco d'Augusto ha mostrato parecchie problematiche che sono state discusse nei paragrafi precedenti, per risolvere le innumerevoli questioni si è dovuto sforzare al massimo l'ingegno, in quanto data solamente la disponibilità di modeste strumentazioni e mezzi non si potevano attuare le ordinarie soluzioni. Per tutte le fasi del rilievo topo-fotogrammetrico le elevate dimensioni del monumento, ma soprattutto la sua altezza hanno creato non pochi problemi. L'impossibilità di poter raggiungere postazioni a quote elevate ( a causa dell'indisponibilità del carrello elevatore ) è stato poi un fattore assillante, una fonte di disturbo costante in ogni fase del rilievo. Oltretutto la complessità geometrica-formale delle superfici della struttura da rilevare ha reso ancor più difficile ogni fase del rilievo fotogrammetrico, questa complessità delle forme dell'arco ha fatto si che molti punti venissero occultati dalle sporgenze e quindi non potevano essere rilevati. Per ovviare a quest'ultimo problema il numeroso dispiegamento di riprese sotto diverse angolazioni ha permesso di catturare sui fotogrammi ogni angolo dell'arco, tranne ovviamente molti punti situati in cima al monumento. Purtroppo per diverse parti della struttura situate sulla sommità non è stato possibile far molto, difatti non è possibile restituire punti che non possono essere in alcun modo visualizzati sui fotogrammi delle prese. In definitiva dall'esperienza di rilievo si evince che il rilevamento fotogrammetrico dei monumenti, in generale abbastanza alti, può essere tranquillamente eseguito con camere digitali amatoriali e con schemi di ripresa non convenzionali ( ad assi di presa convergenti ) ma per ottenere un buon risultato senza impazzire è indispensabile possedere almeno un sistema di elevazione.

# Capitolo VI

I computer sono incredibilmente veloci, accurati e stupidi.
Gli uomini sono incredibilmente lenti, inaccurati e intelligenti.
Insieme sono una potenza che supera l'immaginazione.
Albert Einstein ( 1879 – 1955 )

# ELABORAZIONE DEI DATI RILEVATI E CONSEGUENTI PRODOTTI DI OUTPUT

## 6.1 INTRODUZIONE

In questo capitolo vengono illustrati tutti i passi e procedimenti utilizzati nell'elaborazione dei dati dedotti dal rilievo sul campo, di seguito verrà quindi spiegato attraverso quali procedure si è riusciti ad ottenere i diversi prodotti metrici forniti attraverso rappresentazioni cartacee e file numerici-digitali.

Alla base dell'elaborazione di tutti dati topografici e fotogrammetrici acquisiti in sito sussiste la teoria fotogrammetrica della compensazione in blocco del fascio di stelle proiettive ( *bundle adjustment* ), difatti questo metodo, impiegato spesso nella triangolazione aerea, è quasi l'unico possibile quando si deve procedere nell'orientamento e restituzione di prese eseguite in modalità non convenzionale ( ad assi ottici convergenti ) come nel rilievo dell'arco d'Augusto. La teoria del *bundle adjustment* nasce per risolvere problemi di fotogrammetria aerea, ma in seguito si è rivelata molto utile anche nella fotogrammetria terrestre dei vicini ( *close-range photogrammetry* ). L'elaborazione dei dati con questo metodo monoscopico porta con se diversi pregi, ma inevitabilmente anche alcuni svantaggi. Fra i pregi possiamo ricordare:

a) La possibilità di eseguire prese posizionate in modo qualsiasi nello spazio.

b) La possibilità di eseguire prese con fotocamere diverse fra loro ed anche non calibrate ( tramite l'aggiunta di altre incognite alle equazioni risolutive si calibrano le prese al momento del rilievo, si esegue cioè un'autocalibrazione ).
c) Bassi costi della strumentazione necessaria per il rilievo.
d) Facilità delle operazioni di orientamento e restituzione permessa dall'utilizzo di un PC.
e) Possibilità di inserire vincoli metrici di vario tipo ( parallelismi fra linee, distanze fra punti, verticalità, complanarità di superfici o punti, ortogonalità fra linee…).
f) Possibilità di eseguire il lavoro anche da parte di utenti senza conoscenze di fotogrammetria.
g) Versatilità del metodo.

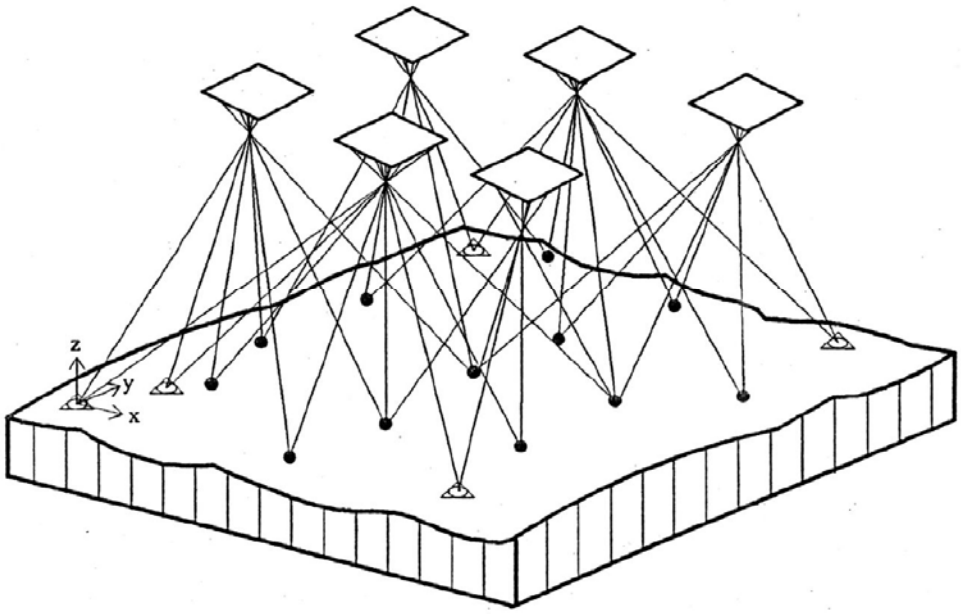



Figura 6.1 – Principio della compensazione di un blocco a stelle proiettive.

Fra i difetti del *bundle adjustment*, allo stato attuale della potenza di calcolo dei computer, il più grave e limitante risulta essere la necessità di lavorare in monoscopia, il problema non sussiste intrinsecamente nella metodologia di compensazione in blocco del fascio di rette proiettive, ma piuttosto nella monoscopia che è l'unica

tecnica di restituzione utilizzabile nel *bundle adjustment*. Lavorare in monoscopia difatti produce vantaggi alle utenze non molto esperte di questioni fotogrammetriche, in quanto si richiede a loro solamente di collimare sulle varie foto i punti omologhi, certamente più facile che navigare in stereoscopia.

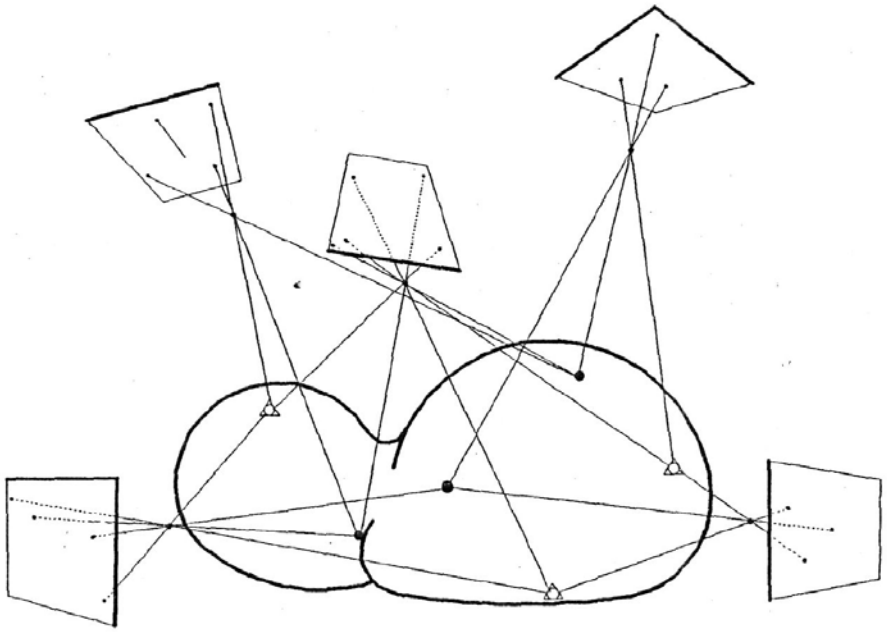


Figura 6.2 – Rete di raggi omologhi nello spazio.

Ma la facilità di collimazione decade del tutto quando i punti da collimare e rilevare non siano i classici spigoli dei fabbricati ben identificabili e visibili sulle varie foto; infatti spesso nella restituzione dei beni culturali si devono modellare e restituire superfici, punti e curve dalla forma non nel tutto semplice ed intuitiva che non può essere accuratamente dedotta dall'analisi monoscopica. Durante la restituzione dell'arco problemi di questo tipo, con superfici dalla forma complicata sono stati tutt'altro che rari, si sono così resi evidenti i limiti della monoscopia di fronte alla restituzione di oggetti dalla forma complessa sui quali in monoscopia è alquanto difficile riconoscere e collimare punti omologhi.

Menziono si da ora che per tutte le fasi di elaborazione dei dati topo-fotogrammetrici è stato usato il software PhotoModeler Pro 5, programma che lavora esclusivamente in monoscopia digitale.

## 6.2 IMPIEGO DEL SOFTWARE PHOTOMODELER

Compiute tutte le fasi del rilievo topo-fotogrammetrico dell'arco d'Augusto si era in possesso di circa 140 riprese con 25 misure di distanza fra coppie di punti materializzati dai target; inoltre si era a conoscenza di 3 linee sicuramente verticali definite dal filo a piombo. Vista l'enormità di riprese effettuate la prima operazione svolta nella fase di elaborazione dati è stata quella di sfoltire il numero di prese fotogrammetriche, per fare ciò si sono selezionate le foto maggiormente significative e necessarie per restituire l'intero arco. Dall'analisi visiva di tutte le fotografie scattate sono state quindi scelte 52 foto necessarie allo scopo prefissato. Selezionate le prese è stato poi necessario servirsi di un software di restituzione monoscopica adatto alla fotomodellazione che permettesse di elaborare al meglio i dati acquisiti sul campo. La scelta è così caduta sul programma PhotoModeler Pro 5, esso è un applicativo di fascia medio-bassa adatto alla fotogrammetria, di costo non troppo elevato e dall'interfaccia semplice ed intuitiva. Le sue caratteristiche di versatilità e facilità congiunta ad un medio livello qualitativo lo hanno reso protagonista nell'elaborazione dei dati metrici acquisiti, nonché per le fasi di restituzione e modellazione dei particolari architettonici del monumento.

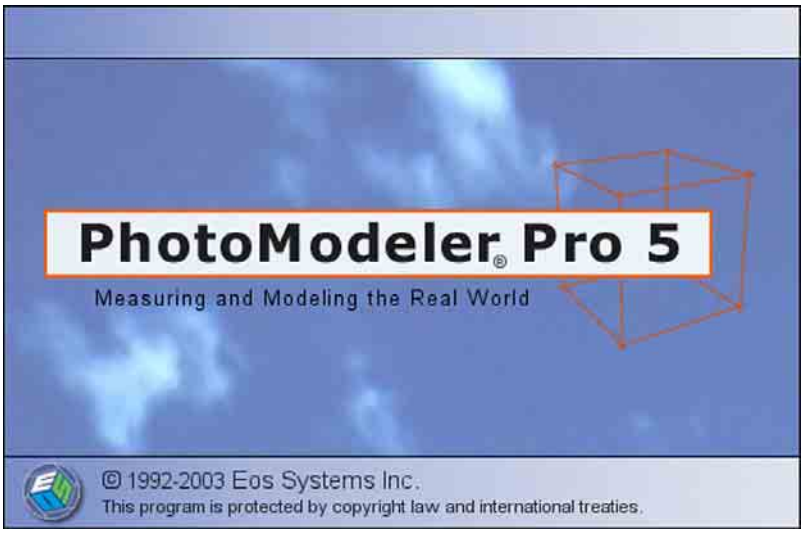



Figura 6.3 – Interfaccia iniziale di presentazione del software PhotoModeler Pro 5.

Il software PhotoModeler Pro permette di risolve molti problemi fotogrammetrici sfruttando la teoria del *bundle adjustment* applicata alla fotogrammetria monoscopica digitale, difatti il programma contiene al suo interno tutte le direttive ed equazioni della fotogrammetria necessarie per poter calcolare le coordinate oggetto $X_i, Y_i, Z_i$ dei punti di cui, tramite la collimazione sulle varie foto, sono note le coordinate immagine $\xi_{ij}, \eta_{ij}$. Il programma è in grado cioè, tramite la fotomodellazione, di restituire modelli metrici 3D per mezzo di fotografie; ovvero è possibile ricostruire strutture architettoniche attraverso la proiezione, in uno spazio tridimensionale, di punti e linee generate dal calcolo dell'intersezione dei raggi ottici provenienti da ogni foto. Conoscendo ( o calcolandosi ) la posizione spaziale ed assetto dei fotogrammi nello spazio reale si è in grado di ottenere una ricostruzione 3D dell'oggetto rilevato mediante l'analisi delle prese prospettiche ( vedi figura 6.2 ).
Il risultato, dell'orientamento e restituzione in ambienti digitali per mezzo di software quali quello impiegato, è la costruzione di modelli geometrici scalati completi di textures ortorettificate, esportabili in qualunque formato digitale; con tali programmi di fotogrammetria si riescono ad ottenere sia prodotti vettoriali che raster, molto utili per la definizione di ortofoto e realizzazione delle classiche rappresentazioni 2D dell'oggetto quali prospetti, sezioni, profili, piante, alzati ecc…

### *6.2.1 La creazione del progetto*

La prima azione che si deve compiere all'avvio del programma è appunto la creazione di un nuovo progetto, questa operazione è resa più semplice da un'apposita interfaccia di aiuto che riporta sequenzialmente le fasi da eseguire.
In primis si devono stabilire le dimensioni approssimate dell'oggetto rilevato e l'unità metrica di misura da utilizzare.

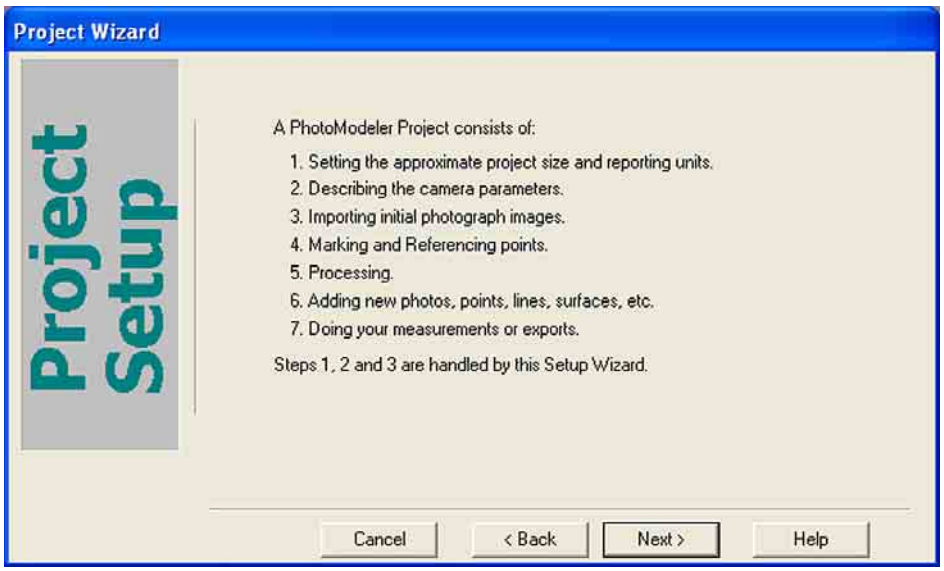



Figura 6.4 – Interfaccia grafica di aiuto nella fase di definizione del progetto.

La fase successiva ( n. 2 ) è invece dedicata alla definizione della camera: questa fase è cruciale, difatti l'esatta determinazione nonché definizione dei parametri caratteristici e di calibrazione della fotocamera è fondamentale; se non si conoscono rigorosamente i dati tipici della macchina da presa non è possibile ricostruire in modo preciso il fascio delle rette proiettive dei punti oggetto, e quindi la geometria dell'intero prodotto restituito sarà distorta e falsata.

Durante la procedura di input dei parametri della camera vengono richieste dal programma varie specifiche: è possibile adottare una fotocamera già usata in precedenza in altri progetti, conoscendone quindi tutti i parametri, oppure è possibile definirne una ex-novo. Nel progetto di rilievo dell'arco è stata appunto definita una nuova camera, specificandone tutte le caratteristiche, ovvero è stato detto che la camera in esame era una digitale considerata a focamento fisso con i parametri di calibrazione pari a quelli di figura 5.3.

Compiuta la fase n. 2 di definizione della macchina, il software richiede poi il caricamento delle immagini su cui si desidera lavorare all'interno del progetto. Le riprese importate sono state il frutto di una selezione eseguita in precedenza con lo scopo di ricercare quelle fotografie migliori e necessarie per coprire interamente l'arco con una

certa percentuale di sovrapposizione. Queste considerazioni hanno portato alla scelta di 52 foto adatte allo scopo.

Se in seguito, dopo l'inizio della restituzione ci si accorge di una mancanza di informazioni al riguardo di alcuni punti è sempre possibile importare altri fotogrammi in un secondo momento. Questo è proprio quello che è stato fatto nel caso del rilievo dell'arco d'Augusto, infatti la prima sessione di prese fotogrammetriche è stata effettuata il 14/05/05, mentre la seconda è stata svolta il 28/07/05.

Nella prima fase di orientamento delle prese e restituzione delle stesse sono state caricate nel software le foto numerate dalla 1 alla 30, mentre successivamente sono state importate le restanti 22, eseguendo una nuova orientazione e restituzione.

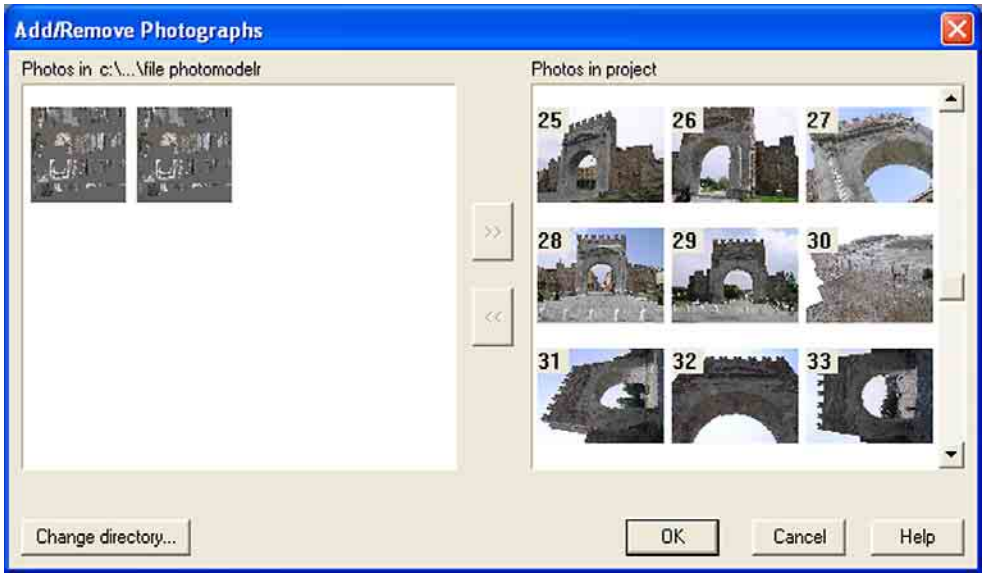



Figura 6.5 – Finestra di caricamento delle immagini nel progetto di PhotoModeler.

Eseguiti i primi tre passi descritti dalla figura 6.4 è possibile incominciare a lavorare sul progetto cominciando a collimare i punti omologhi sulle fotografie che li riportano; così operando si cominciano ad orientare relativamente a due a due tutte le coppie di fotogrammi fino ad arrivare all'orientazione completa di tutte le prese. Finita la fase di orientazione delle prese è poi possibile cominciare a restituire tutti gli elementi voluti: punti, linee, curve, superfici, bordi.

### *6.2.2 L'orientamento interno dei fotogrammi*

L'orientamento interno dei fotogrammi serve per eliminare tutti gli errori e distorsioni che vengono indotti durante il processo di ripresa e nel successivo sviluppo della pellicola, a seguito dell'imperfezione della camera e degli obiettivi la ripresa non è una perfetta proiezione centrale dell'oggetto e quindi non è possibile utilizzare le leggi della geometria proiettiva ( leggi teoriche che si basano su proiezioni prospettiche perfette ) per ottenere le coordinate dei punti oggetto dall'intersezione spaziale dei raggi proiettivi di punti omologhi.
Quindi tramite l'orientamento interno ci si riconduce al caso ideale di proiezione prospettica centrale perfetta, si impone cioè la condizione di passaggio per il centro di proiettività della stella dei raggi proiettivi. Operativamente consiste nella correzione delle coordinate immagine che sono state alterate da vari fattori quali: la non perfetta disposizione planare della pellicola al momento dello scatto, imperfezioni meccaniche del complesso camera-obiettivo, disallineamento dell'ottica, trasformazioni e stiramenti della pellicola in fase di sviluppo, ecc…
Nel caso in esame, avendo impiegato una fotocamera digitale è facilmente intuibile che tutte le deformazioni ed errori indotti nelle fasi successive allo scatto non possono esistere, difatti il file digitale non subisce modifiche. Nonostante ciò non è pensabile di trascurare tutte le variazioni indotte sulle coordinate immagine durante l'aquisizione, specie quando si parla di fotocamere amatoriali non metriche come quella utilizzata nel rilievo dell'arco.
Nelle camere metriche con pellicola il sistema di riferimento delle coordinate immagine è definito dalla disposizione di marche fiduciali di coordinate immagine ben note, mentre la distorsione dell'obiettivo è modellizzata matematicamente mediante l'utilizzo di un polinomio di distorsione che fornisce la correzione da apportare alle coordinate immagine per ricondursi alla prospettiva centrale ideale. Nelle prese

con pellicola quindi l'operazione di orientamento interno consiste in una prima fase nella quale ci si riconduce alle coordinate immagini originarie mediante una trasformazione che permetta di conoscere le coordinate nel sistema di riferimento fiduciale ( quello originario al momento dello scatto che poi è stato deformato a seguito di stiramenti ed altre cause dopo lo sviluppo della pellicola ), ed in seguito si esegue una correzione alle coordinate immagine secondo il modello matematico che rappresenta la distorsione indotta dall'obiettivo. A questo punto ci si è ricondotti al caso ideale di proiezione prospettica centrale perfetta, e quindi è possibile utilizzare le leggi della geometria proiettiva per determinare le coordinate oggetto X,Y,Z dei punti collimati. Nel caso in esame, avendo adoperato la camera digitale Nikon Coolpix 5400 la prima fase per ricondursi al sistema fiduciale non è necessaria in quanto l'assenza di sviluppo della pellicola non modifica il sistema di riferimento immagine, che nei file digitali è definito dalla posizione dei pixel. Quindi per operare l'orientamento interno delle prese in modo da ricondursi al caso ideale è stato necessario definire solamente il modello di distorsione dell'immagine indotta dal complesso camera-obiettivo.

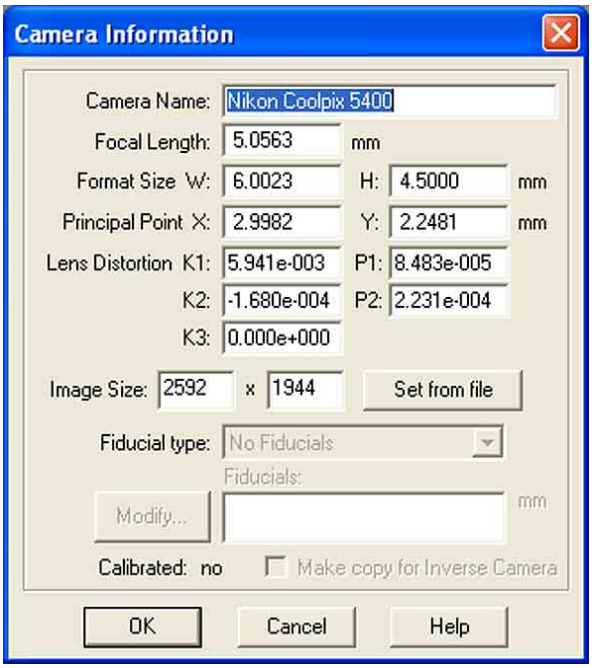



Figura 6.6 – I parametri di calibrazione della camera Nikon Coolpix 5400, necessari per ripristinare l'orientamento interno dei fotogrammi.

Per far ciò sono stati definiti all'interno del software PhotoModeler i parametri di orientamento interno e la curva di distorsione dell'obiettivo fornita matematicamente in forma polinomiale ( vedi figura 6.6 ).

### *6.2.3 L'orientamento esterno relativo fra i fotogrammi*

Finita la prima fase di orientamento interno dei fotogrammi si è quindi passati all'orientamento relativo degli stessi.
Tramite l'orientamento relativo dei fotogrammi si va ad imporre la complanarità dei raggi omologhi, tale condizione risulta semplificata per le prese eseguite in assetto pseudo-normale, difatti per questa configurazione di ripresa la condizione di complanarità si esprime matematicamente attraverso l'annullamento delle parallassi verticali.
Come è noto ogni fotogramma possiede 6 incognite di orientamento chiamate parametri di orientamento esterno, questi parametri esprimono la posizione ( definita dalle 3 coordinate del centro di presa X,Y,Z ) e l'assetto ( definito dai 3 angoli $\omega,\varphi,\kappa$ ) della camera al momento dello scatto. Per una coppia di fotogrammi in definitiva sussistono quindi 12 incognite che devono essere determinate tramite i punti fotogrammetrici di appoggio. Visto che la seconda fase di orientamento esterno assoluto ( rototraslazione nello spazio con fattore di scala isotropo, ovvero una trasformazione conforme ) richiede la conoscenza di 7 parametri, possiamo dedurre che per eseguire l'orientamento esterno relativo fra una coppia di fotogrammi si necessitano di 5 equazioni atte a determinare i 12-7=5 parametri che definiscono l'orientamento esterno relativo. Per orientare relativamente fra loro una coppia di fotogrammi non è necessario conoscere nulla a riguardo dell'oggetto da rilevare, infatti per realizzare l'orientamento relativo è solamente indispensabile misurare le coordinate immagine di soli 5 punti ben distribuiti sul modello.

Il software PhotoModeler richiede comunque l'inserimento di almeno 6 punti omologhi in modo da poter effettuare una stima dei residui valutati dalla compensazione con i minimi quadrati.

Per orientare relativamente fra loro tutte le 52 prese caricate nel progetto si proceduto per fasi: si è scelta una prima coppia di fotogrammi e mediante l'inserimento di poco più dei necessari 6 punti omologhi è stata determinata l'orientazione della prima coppia di prese, a questo punto si è scelta una terza foto avente una certa area di sovrapposizione con le due già precedentemente orientate e tramite l'aggiunta di altri punti omologhi questo terzo fotogramma è stato orientato attraverso la concatenazione ai primi due.

Figura 6.7 – La collimazione del punto omologo n. 38, necessario per l'orientamento relativo.

Così in modo analogo si è proceduto fino all'orientamento di tutti i 52 fotogrammi.

Come regola generale nella scelta dei punti adatti alla fase di orientamento esterno relativo sono stati privilegiati quelli facilmente

riconoscibili ed univocamente definiti sulla superficie dell'arco, sono stati utilizzati quindi tutti i punti definiti dai target tape adesivi, ed inoltre ( essendo questi non sufficienti ) sono stati selezionati anche punti naturali ben definiti, quali spigoli della pietra calcarea di rivestimento.

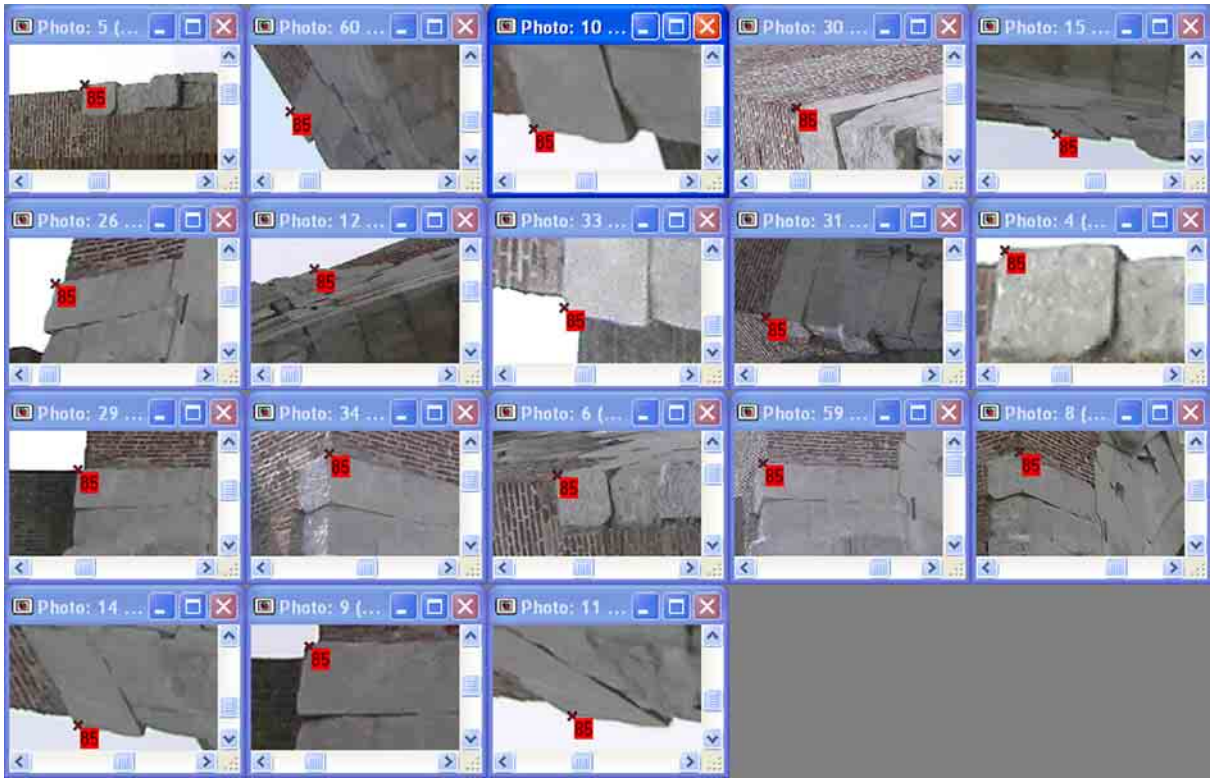



Figura 6.8 – La collimazione del punto n. 85, necessario per l'orientamento esterno relativo.

Come regola per la scelta e disposizione sull'oggetto dei punti omologhi per l'orientamento relativo vale quanto detto nel paragrafo 5.3.3 e 5.6 al riguardo dei target tape e dei punti fotogrammetrici d'appoggio, brevemente si ricorda che il posizionamento dei punti per l'orientamento relativo andrebbe effettuato cercando di coprire interamente l'oggetto con una distribuzione uniforme sia sulla superficie dello stesso, sia sulla sua profondità; in linea di massima la chiusura dei punti dovrebbe definire una regione immaginaria di volume capace di contenere l'intera opera oggetto del rilievo.
Questa regola è stata ben seguita nella definizione dei punti necessari all'orientamento relativo dell'arco d'Augusto di Rimini.

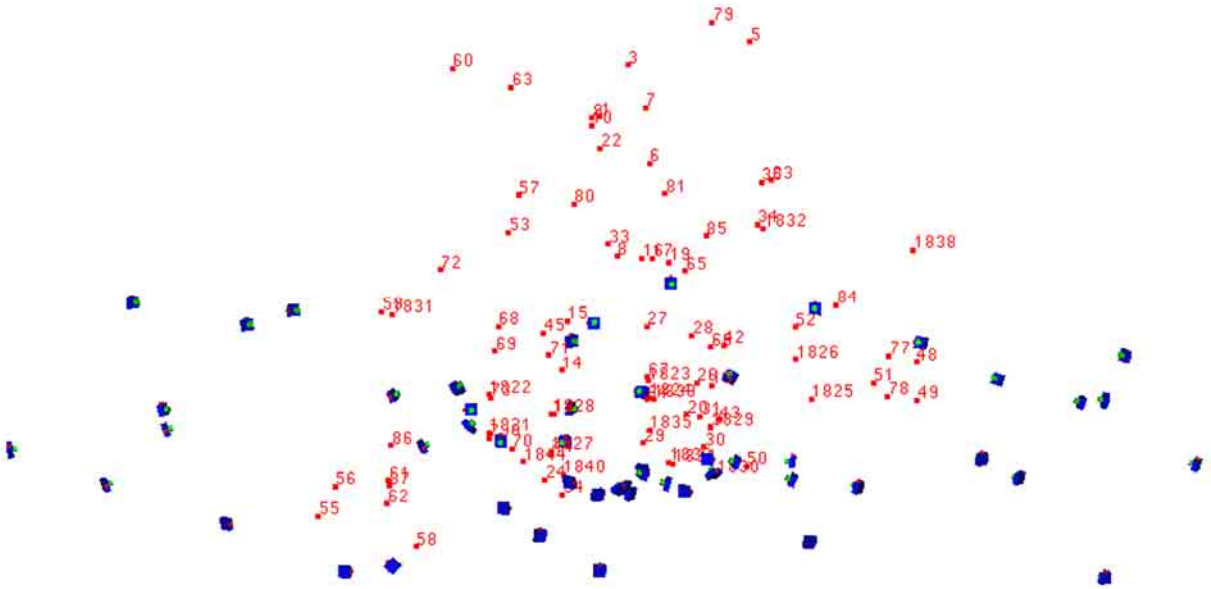


Figura 6.9 – Indicazione nello spazio oggetto dei punti utilizzati per effettuare l'orientamento esterno relativo di tutti i 52 fotogrammi utilizzati nel progetto.
Grazie all'impiego dei punti visualizzati in rosso è stato possibile determinare l'orientamento di tutte le prese, tale operazione di orientazione è visualizzata mediante la posizione ed assetto delle fotocamera in blu.

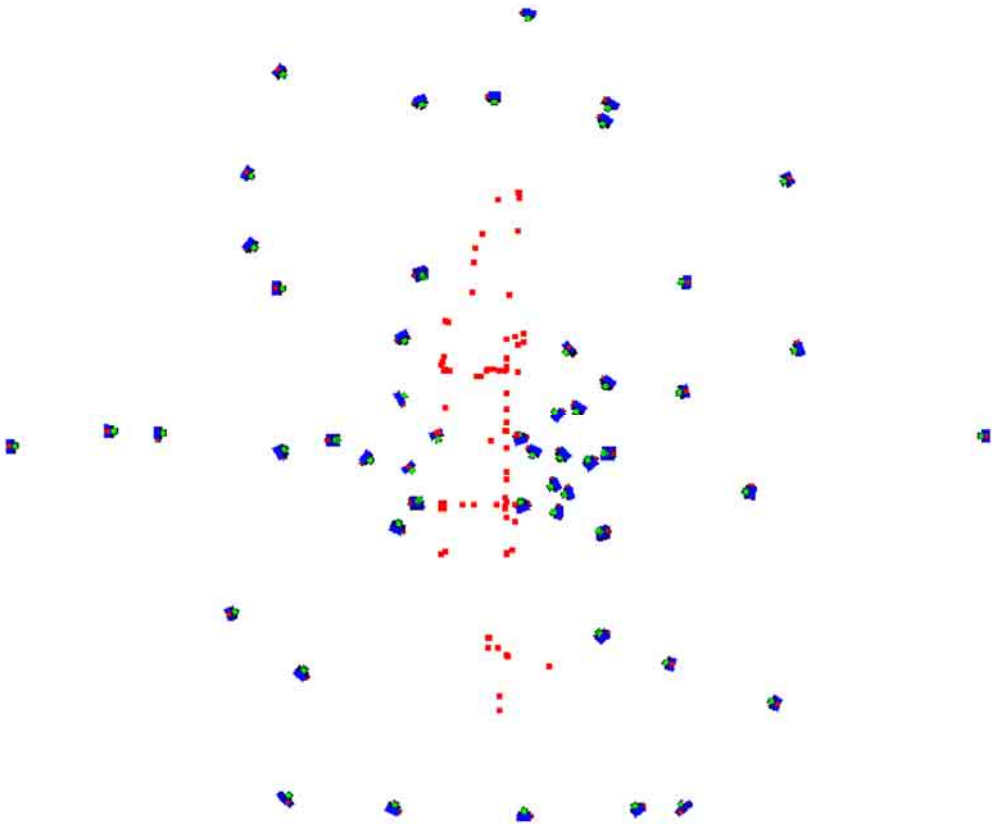


Figura 6.10 – Indicazione in pianta dei punti utilizzati per effettuare l'orientamento esterno relativo di tutti i 52 fotogrammi utilizzati nel progetto.

Fino ad ora si è sempre parlato dell'operazione di orientamento esterno relativo spiegando come si può e come si è messa in atto, ma non si è mai detto a cosa porta tale orientamento: finita la fase di orientamento relativo si perviene alla determinazione dei parametri di orientamento esterno di tutte le prese eseguite, è cioè possibile conoscere la posizione ed assetto delle prese in uno spazio che però non ha ancora caratteri metrici, ovvero è uno spazio in scala di cui non si conosce il valore. Teoricamente la restituzione dell'oggetto può avvenire interamente senza la successiva fase di orientamento esterno assoluto, ma senza tale operazione non è fattibile la conoscenza metrica dell'oggetto che risulta rototraslato e scalato in modo isotropo rispetto allo spazio oggetto reale.

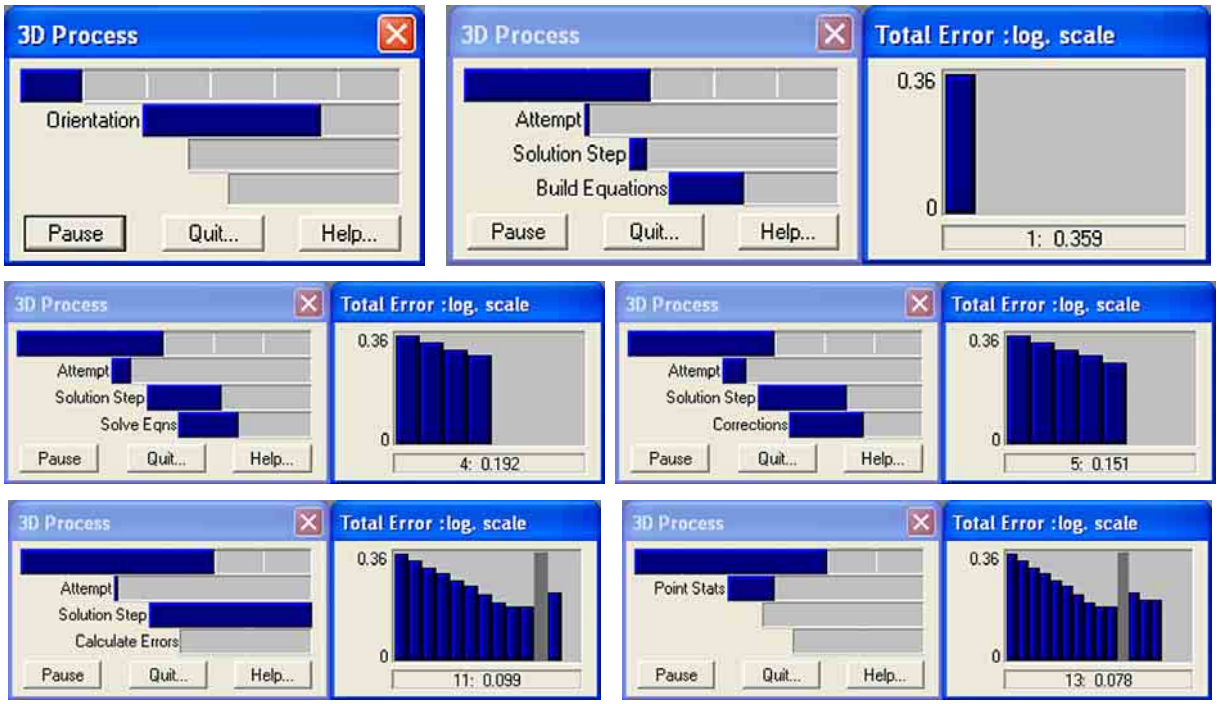
Una volta che le foto sono state orientate il software mette a disposizione un utile strumento per la collimazione dei punti omologhi: la linea epipolare; questa retta è la traccia dell'intersezione del piano epipolare con i fotogrammi.

Figura 6.11 – La linea epipolare.

Questo piano epipolare è appunto definito come passante per tre punti: il centro di proiettività del primo fotogramma, il centro di proiettività del secondo fotogramma ed il punto da restituire.

Completata l'orientamento relativo di tutti i 52 fotogrammi sono stati aggiunti ulteriori punti omologhi in modo da irrobustire il modello e diminuire l'errore medio del rilievo che alla fine dell'intera restituzione di circa 2850 punti appartenenti all'arco si è assestato ad un valore medio di circa 8 mm.

Importante è ricordare che questo procedimento dell'orientamento relativo dei fotogrammi attuato per concatenazione è quello più adatto per orientare le foto; infatti prove sperimentali hanno evidenziato che è conveniente procedere in questo modo, inserendo inizialmente un numero di punti omologhi di poco superiore ai 6 necessari richiesti dal software. Così facendo l'errore medio di orientamento si riduce al minimo. Per elaborare i dati si utilizza sempre il tasto process



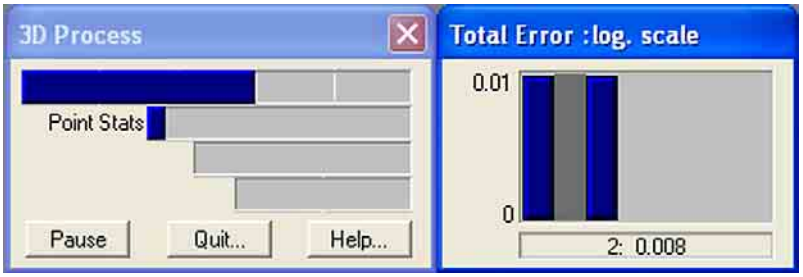



Figura 6.12 – Il report d'errore durante l'orientamento.

Dalla prima finestra in alto a sinistra scendendo fino all'ultima in basso a destra si può seguire come con l'evolversi delle iterazioni di calcolo l'errore medio sul rilievo sia andato scemando fino a stabilizzarsi attorno al valore medio di 8 mm, visibile nell'ultima iterazione riportata nella finestra qui sopra.

### *6.2.4 La restituzione vettoriale dell'arco d'Augusto*

Arrivati alla fine della fase di orientamento esterno relativo generalmente si procede con l'orientamento esterno assoluto, ovvero si procede ad una rototraslazione con fattore di scala isotropo del sistema di riferimento sul quale sono date le coordinate dei punti utilizzati per l'orientamento relativo. Operando questa trasformazione conforme si riesce quindi a scalare opportunamente l'oggetto e posizionarlo esattamente nello spazio. Per far ciò si devono determinare i 7 parametri incogniti della trasformazione conforme, ovviamente per calcolare queste 7 incognite si necessitano di almeno 3 punti fotogrammetrici di appoggio di coordinate oggetto note. Nel caso particolare del rilievo dell'arco quanto appena descritto è stato saltato in quanto non possedendo alcuna coordinata spaziale di punti fotogrammetrici di appoggio non è stato possibile attuare la procedura di orientamento assoluto; se avessimo usato una total station al posto della cordella metrica per eseguire le misure topografiche allora non ci sarebbe stato alcun problema nell'eseguire l'orientamento assoluto.

Dall'analisi di queste considerazioni si è pensato di procedere direttamente alla restituzione vettoriale dell'intero arco tramite punti, linee e curve; mentre si è lasciata la fase di orientamento assoluto per ultima. Già da ora sottolineo il fatto che l'orientamento assoluto è avvenuto in modo un po' particolare, distinto in due tappe: la prima è

stata la scalatura del modello geometrico dell'arco mediante la definizione di vincoli di distanze note fra coppie di punti, mentre nella seconda fase si è definita la rototraslazione mediante la posizione e l'assetto della terna cartesiana di riferimento.

Come regola generale di restituzione si sono volute riportare tutte le discontinuità principali del monumento e per quanto riguarda le superfici lapidee sono state restituite anche le discontinuità fra un concio di pietra e l'altro.

Fondamentale prima di iniziare una restituzione è definire i livelli di rappresentazione dell'oggetto, nel caso del rilievo dell'arco d'Augusto sono stati definiti numerosi layer in modo da ottenere un prodotto grafico in output sufficientemente segmentato in cui è possibile visualizzare la struttura in diversi elementi logici ed architettonici.

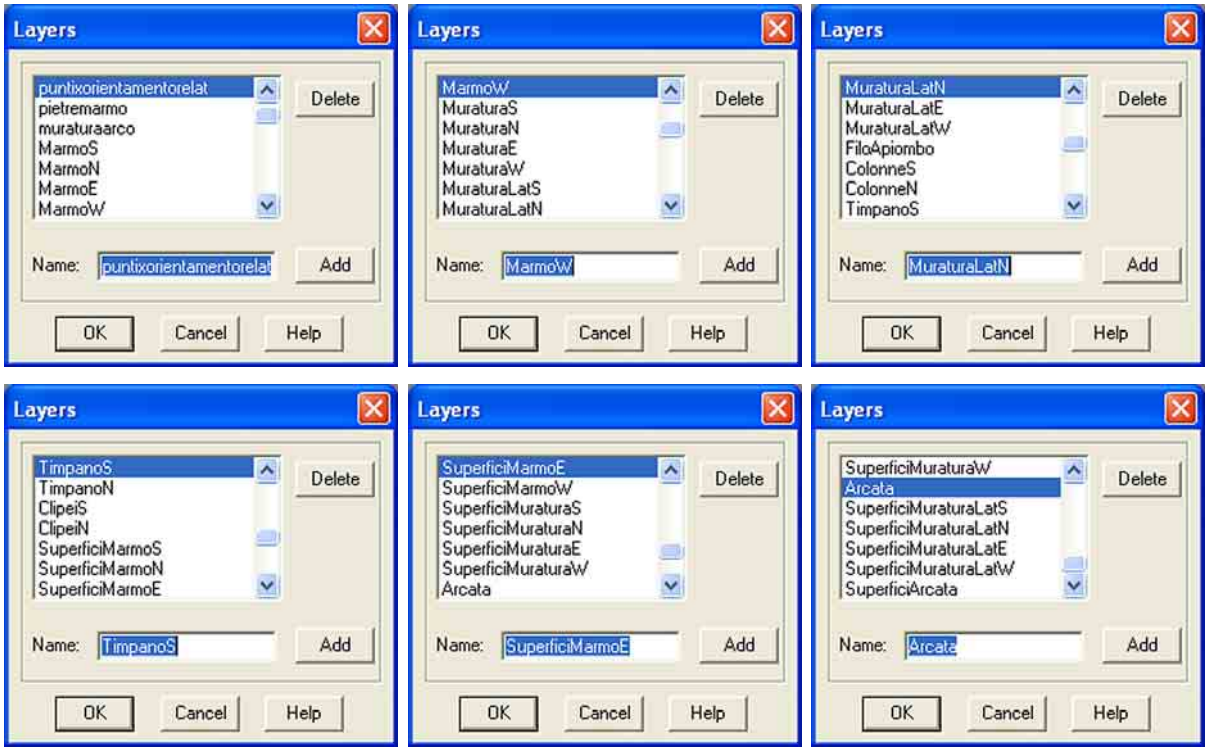



Figura 6.13 – I 37 layers utilizzati nella restituzione dell'arco d'Augusto di Rimini.

Assieme ai layers sono anche stati definiti i materiali tramite un'altra apposita finestra predisposta dal programma, durante la restituzione dell'arco è possibile quindi associare ad ogni elemento di restituito (

linea, punto, curva, superficie ) una determinato layer ed uno specifico materiale.

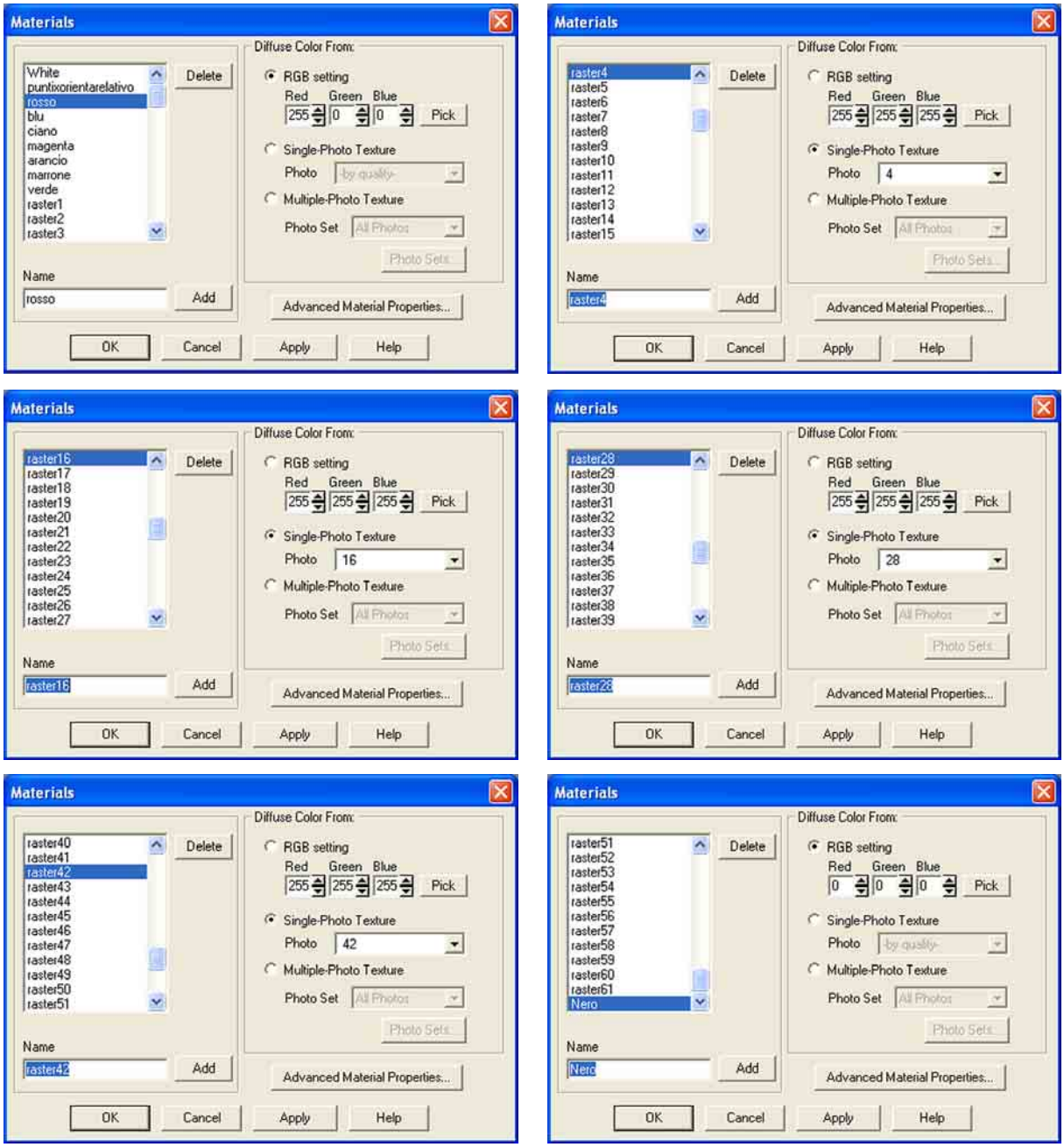



Figura 6.14 – I 71 materiali utilizzati nella restituzione dell'arco d'Augusto di Rimini.

Finita la fase di definizione dei layers e materiali necessari per restituire tutti gli elementi architettonici dell'arco si è proceduto con la vera e propria restituzione, ovvero sono stati collimati tutti i punti omologhi necessari per definire la geometria dell'arco. Durante la collimazione dei punti sono state anche costruite le rette e curve che collegano fra loro i vari punti in modo da ricalcare come in un ricamo

tutte le discontinuità indispensabili per rappresentare al meglio l'arco nella sua interezza e plasticità 3D. Nel scegliere i punti, linee e curve da restituire si è anche sempre pensato in funzione della successiva fase di definizione delle superfici dell'arco con applicazione di textures, difatti le linee e curve restituite fanno da contorno alle superfici e mesh che sono state applicate nella consecutiva fase di restituzione raster.

Tutte le collimazioni dei punti omologhi effettuate sulle 52 foto orientate ed il collegamento di tali punti mediante rette e curve è visibile nelle figure del paragrafo 5.10 che vanno dalla 5.32 alla 5.83.

Tutti i comandi necessari per eseguire la restituzione e che sono stati ampiamente utilizzati nel rilievo dell'arco si trovano nella barra dei menù del software sotto l'indicazione di "*marking*" e "*referencing*".

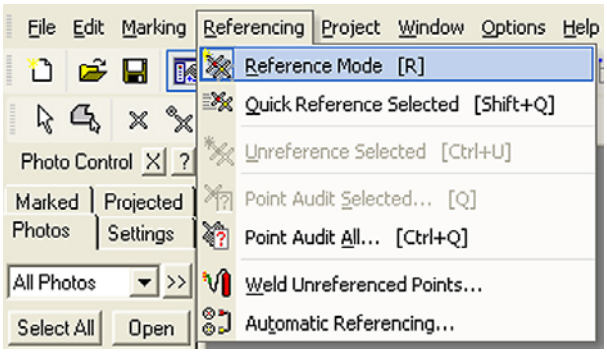



Figura 6.15 – Menù del comando Referencing.

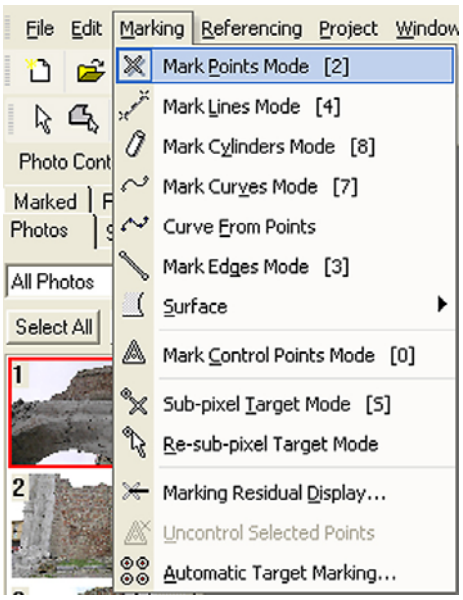



Figura 6.16 – Menù del comando Marking.

Tramite i comandi del menù "*Marking*" sono stati segnati sulle varie foto i punti da restituire attraverso il comando "*Mark Points Mode*", mentre le linee e curve sono state eseguite attraverso i comandi "*Mark Lines Mode*" e "*Mark Curves Mode*".

Una volta marcati con questi comandi i punti, linee e curve che si desiderano restituire bisogna far intendere al programma quali sono i

punti omologhi, ovvero è fondamentale dire al software quali siano gli stessi punti sulle diverse prese eseguite.
Per attuare ciò viene in aiuto il menù *"Referencing"*, il quale attraverso la funzione *"Reference Mode"* permette di referenziare e definire punti, linee e curve omologhe sulle diverse foto una volta che queste entità siano state precedentemente selezionate con il mouse.
Ovvero, si selezionano tutte le entità ( punti, linee, curve, superfici…) che si desiderano referenziare poi si clicca sul tasto *"Reference Mode"* ed automaticamente il software fornisce degli strumenti utili che indicano la posizione approssimata sulle altre foto dell'oggetto selezionato, facilitando così la collimazione di punti omologhi.

### 6.2.4.1 Problematiche di restituzione

Durante la fase di restituzione sono stati riscontrati numerosi problemi di modellazione degli elementi architettonici dell'arco augusteo, infatti per i motivi esposti nel capitolo V la collimazione e restituzione dei punti situati a quota elevata non è stata semplice, ed in alcuni casi l'occlusione prospettica dovuta agli elementi in aggetto ha impedito la totale restituzione di alcune parti. Man mano che la restituzione stava avanzando si è andato di volta in volta a processare il modello ottenendo delle precisioni medie sulle coordinate dei punti in aumento fino al definitivo assestamento attorno al valore di 8 mm, analizzando più in dettaglio la distribuzione degli errori sull'intera struttura si è riscontrato che la precisione metrica dei punti diminuiva andando dai piedi verso la sommità dell'arco; questo fenomeno era già stato previsto durante la fase del rilievo topo-fotogrammetrico descritta nel capitolo V. Per contrastare questa disomogeneità delle precisioni dovute alla consistente variazione di scala sui fotogrammi ed agli angoli di presa troppo stetti ed errati per i punti in cima all'arco si è provveduto mediante l'irrobustimento del modello, infatti i punti situati nella parte superiore del monumento augusteo hanno una

ridondanza molto elevata in modo da compensare la perdita di precisione metrica dovuta ad altri fattori. Generalmente si sa che per determinare le coordinate oggetto di un punto è necessaria la collimazione dello stesso in almeno due foto, ma è stato riscontrato che anche per punti e prese ben disposti la determinazione della posizione di un punto da sole due foto non fornisce precisioni e garanzie sufficienti, le cose vanno un po' meglio se si opera con tre prese, ma anche in questo caso le precisioni sono un po' basse. Analizzando la situazione si è capito che la soluzione minima per ottenere un discreto grado di precisione sulle coordinate dei punti prevede l'utilizzo di quattro prese ben disposte, e nei casi di punti "difficili", quali quelli in sommità o quelli non facilmente identificabili sulle varie foto, è meglio utilizzare più di quatto prese.
Da quanto appena detto si capisce subito in maniera molto chiara che se si vuole ottenere un buon rilievo in monoscopia è necessario effettuare tantissime collimazioni di uno stesso punto sulle varie foto, allungando inevitabilmente tutte le operazioni di restituzione; questo è proprio quello che è avvenuto nel rilievo dell'arco. Infatti per ottenere un'elevata precisione da un rilievo che per vari motivi di forza maggiore, esposti nel capitolo V, non è ottimale è stato necessario collimare mediamente lo stesso punto su 10 diverse foto.
Altri problemi che hanno rallentato e reso difficoltoso il lavoro di restituzione sono quelli legati alla tecnica monoscopica, infatti, data la complessità delle forme e delle superfici degli elementi architettonici dell'arco, in monoscopia è alquanto difficile ritrovare i punti omologhi sui vari fotogrammi. Le prese prospettiche appiattiscono tutti i volumi, e nel caso di superfici a tinta unita come le lapidee dell'arco è veramente un'impresa riuscire a riconoscere i punti omologhi. Nonostante queste difficoltà l'aiuto della linea epipolare ha facilitato molte operazioni di collimazione. Ancora più difficile invece è stato restituire alcuni elementi architettonici dalla forma non

modellabile in alcun modo con gli strumenti di modellazione messi a disposizione dal software, in particolare ci si riferisce alle semicolonne lapidee, ai capitelli, ed al timpano del monumento. Oltretutto questi elementi, già intrinsecamente difficili da modellare sono anche smussati e rovinati dall'erosione del tempo, il ché ha reso ad esempio impossibile la restituzione dei capitelli.

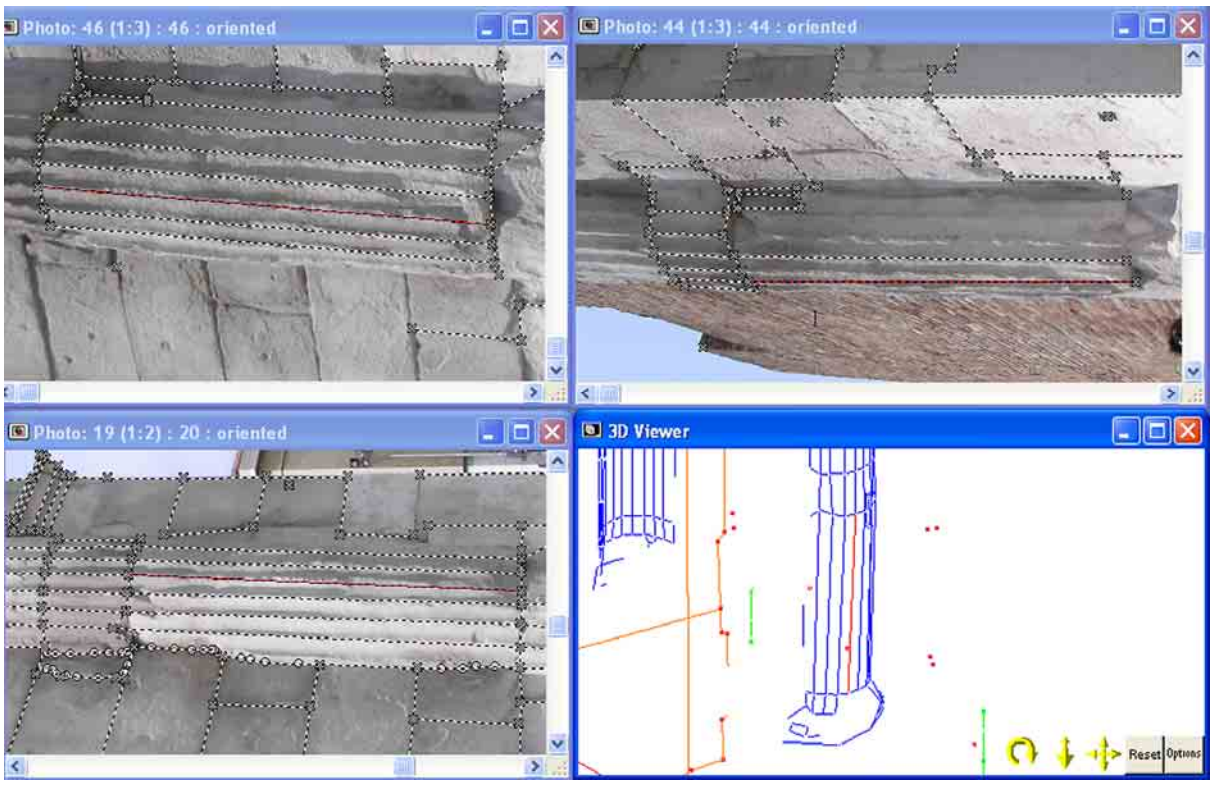



Figura 6.17 – Modellazione delle colonne.

Come si può osservare dalle fotografie riportate qui sopra la modellazione delle colonne è stata intrapresa mediante la definizione di linee passanti per l'asse medio della rigatura delle stesse, purtroppo non è stato possibile usare il *tool* di modellazione di cilindri, infatti oltre ad essere delle semicolonne questi elementi sono tutt'altro che regolari ed assimilabili a dei semicilindri, quindi la soluzione che si vede qui sopra è stata quella più consona.

Se la modellazione geometrica dei capitelli è risultata impossibile per la sua complessità, ne caso delle semicolonne in stile dorico le difficoltà sono state superate con un espediente visibile in figura 6.17. Le linee restituite che si vedono nella raffigurazione di sopra in realtà sono in parte immaginarie, infatti non esistono delle linee nette di discontinuità ed oltretutto l'erosione avvenuta nei secoli ha fatto si che non fossero neanche linee, ma delle curve. Comunque per

semplificare la restituzione sono state pensate e restituite come in figura 6.17.

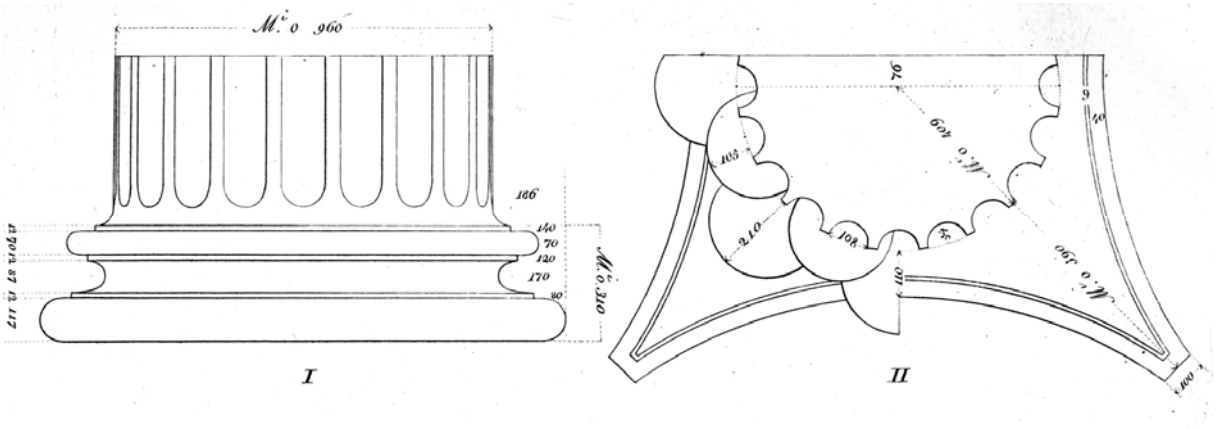



Figura 6.18 – Particolare della colonna.
Raffigurazione estratta dalla tavola n. V del rilievo eseguito da Maurizio Brighenti nel 1825.
Da questa rappresentazione è possibile vedere quale sia stata la vera forma originaria delle semicolonne che si trovano ai lati dell'arcata, la forma di questi elementi era, come si può osservare, già di per sé complicata e l'erosione avvenuta nei secoli a reso ancor più complessa ed irregolare la forma di questi elementi architettonici di decorazione.

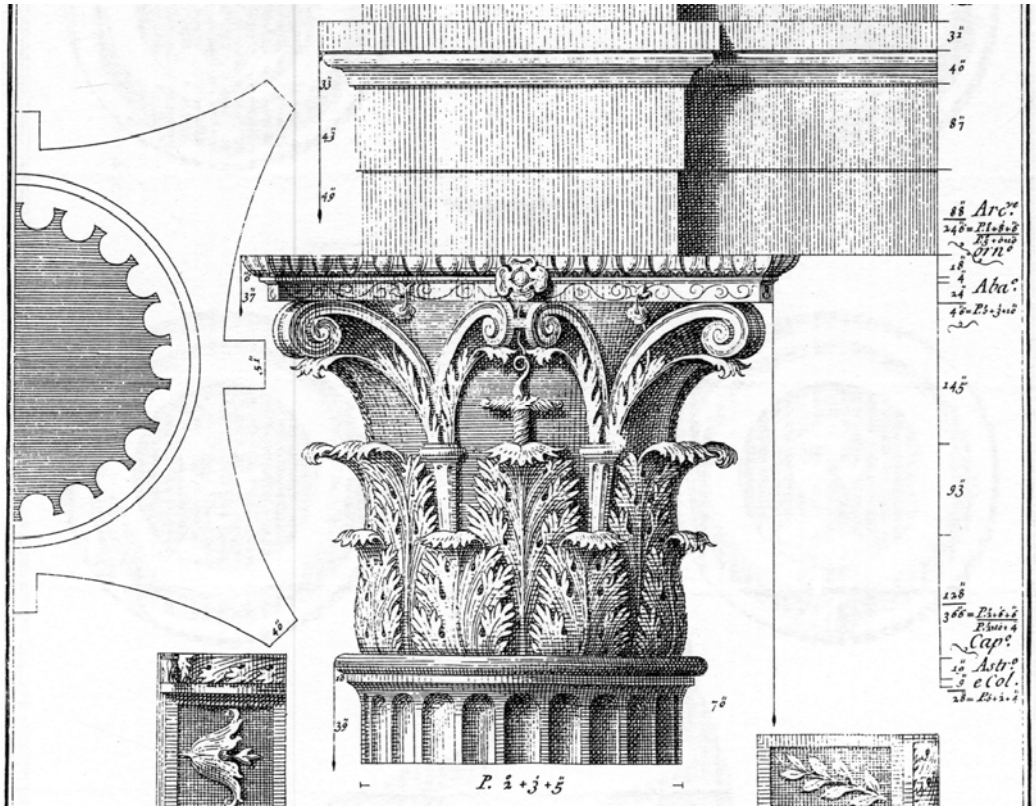



Figura 6.19 – Particolare della colonna e del capitello.
Raffigurazione estratta dalla tavola n. IV del rilievo eseguito da Tommaso Temanza nel 1741.
Da questa rappresentazione è possibile capire il perché sia stato impossibile restituire il capitello: la ricchezza di particolari e la complessità formale degli stessi non poteva essere restituita attraverso le prese eseguite con un obbiettivo grandangolare posizionato a bassa quota, la scala del fotogramma non era adatta per restituire particolari così fini.

Modellate le colonne un altro grande problema di restituzione si è presentato di fronte alla esatta modellazione del timpano dell'arco, difatti questo elemento architettonico si trova nella sommità del monumento, zona dove ci sono molte occlusioni prospettiche e dove la precisione metrica cala in modo sensibile. Oltretutto essendo così lontano dalle posizioni in cui sono state scattate le foto il timpano risente fortemente della bassa risoluzione dell'immagine che rende molto difficile l'individuazione di punti omologhi in zone che peraltro hanno anche una bassa luminosità dovuta alla presenza di ombre portate dagli aggetti.

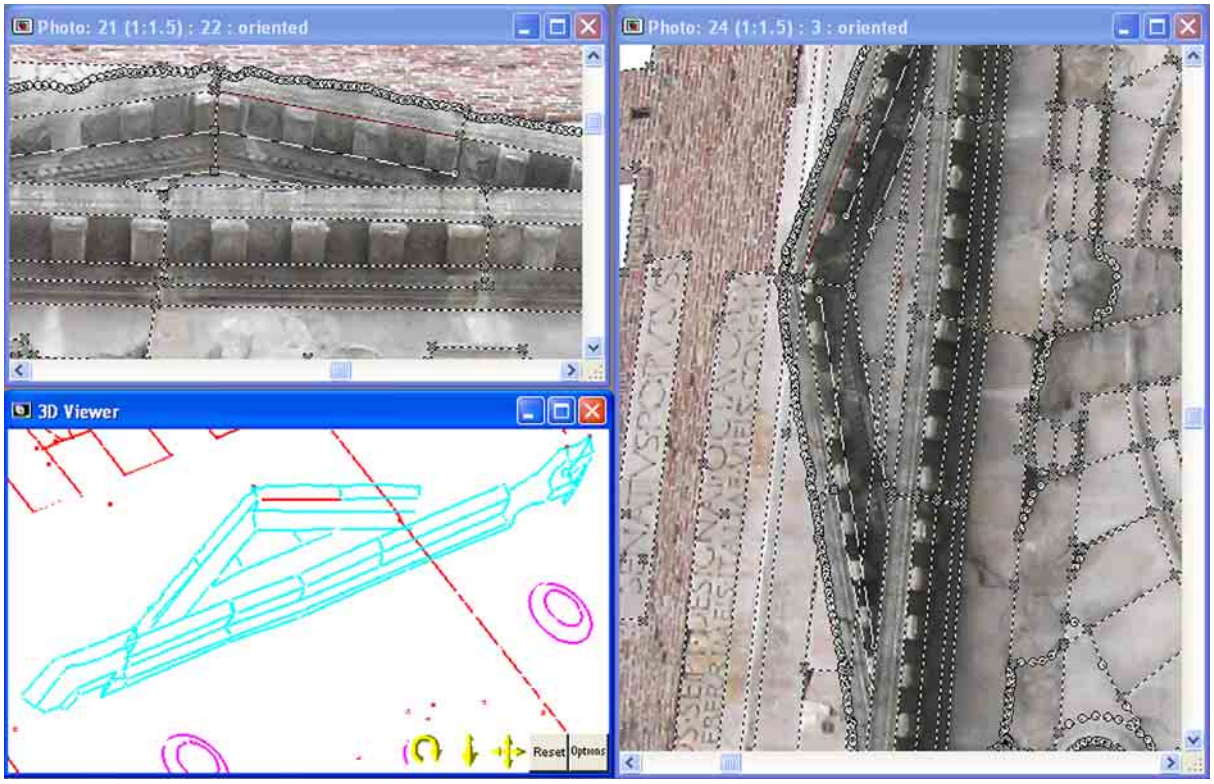



Figura 6.20 – Modellazione del timpano.

Come si vede dalla raffigurazione riportata qui sopra, la modellazione del timpano non è stata fatta in modo rigoroso, infatti esso risulta ricco di decorazioni che sono state trascurate in fase di restituzione, anche perché risultano troppo complesse e fini per essere restituite alla scala 1:50-1:100 adottata per tutto il rilievo dell'arco. Per restituire questi particolari, le modanature e tutte le finezze si sarebbe dovuto progettare un rilievo apposito per i particolari con una scala di 1:20-1:10 e poi tramite dei punti di legame si sarebbero potuti referenziare i due rilievi a diverse precisioni sullo stesso sistema di riferimento in modo da ottenere un unico prodotto finale.

Figura 6.21 – Particolare del timpano.
Nella raffigurazione qui riportata si può osservare la ricchezza dei particolari e decorazioni che il timpano porta con sé. Questa abbondanza di ornamenti ha contribuito all'infedeltà della restituzione dei timpani, che sono stati riportati in maniera semplificata definendo solamente i lineamenti principali.

Figura 6.22 – Particolare di un capitello affiancato dal vicino clipeo raffigurante il dio Giove.
Da questa fotografia si nota chiaramente il motivo per cui in monoscopia non e pensabile di poter restituire i capitelli che hanno una forma molto complessa ed una ricchezza di dettagli veramente strepitosa.

Modellati il timpano, i clipei e le colonne la parte più difficile e delicata della restituzione vettoriale è stata superata, infatti per gli altri elementi non si sono riscontrati particolari problemi; anche se in alcuni casi, superfici erose, dalla forma un po' insolita e casuale non sono state facilmente modellabili.
I conci di pietra d'Istria sono stati restituiti con delle linee che passano all'incirca nel mezzo della fuga fra un concio e l'altro.

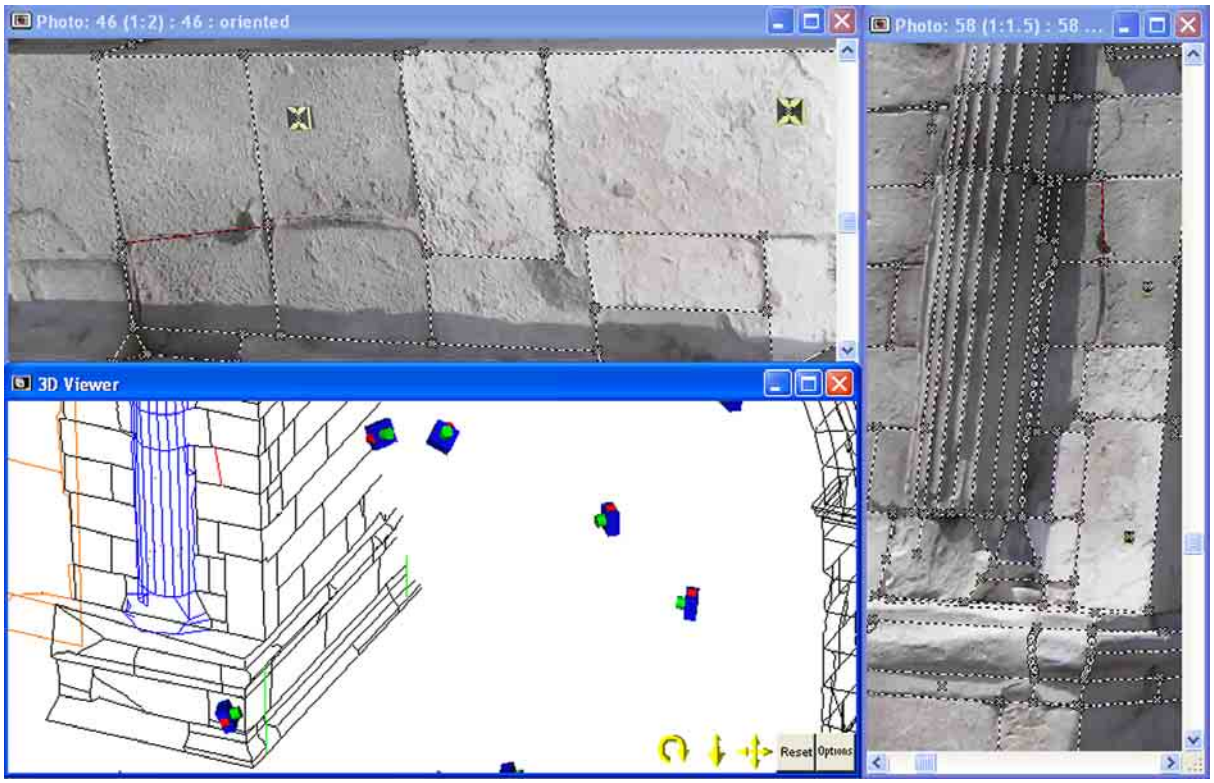



Figura 6.23 – Modellazione dei conci lapidei.
Come è possibile vedere dalla figura qui sopra, i conci lapidei sono stati modellati seguendo il loro contorno con delle rette ove fosse possibile, per conci dalla forma un po' più complessa il perimetro degli stessi è stato definito attraverso delle curve.

Fra le problematiche di rilievo è bene annoverare anche la difficoltà di definire nel modo giusto le curve nello spazio, infatti durante la restituzione dell'arco ho riscontrato qualche problema con la funzione per modellare le curve: essa è un *tool* molto importante ma non sempre si comporta correttamente, difatti spesso è bene fermarsi a definire la curva solamente su di due fotogrammi ben disposti, se si delimita la curva su molti fotogrammi ( tipo quattro o cinque ) spesso accade che

la curva restituita si discosta anche di molto da quella reale. Questo fenomeno avviene probabilmente perché nel fissare le curve sulle varie prese non si è seguita esattamente la stessa curva omologa, basta una piccola discordanza di posizione e curvatura che la restituzione viene falsata. Per questo motivo ho utilizzato le curve ove strettamente necessario, ed ho preferito in certi casi spezzare le curve con vari segmenti di retta.

Alla fine di tutta la fase di restituzione sono stati collimati circa 27300 punti su tutti i 52 fotogrammi orientati, dall'elaborazione di queste 27300x2=54600 equazioni sono state determinate le coordinate spaziali X,Y,Z di 2855 punti e la posizione ed assetto delle 52 prese. Questo significa che mediamente ogni fotogramma riporta circa 27300/52=525 punti, ovvero ogni punto appare in media su di 27300/2855≈10 fotogrammi.

Figura 6.24 – Statistiche e verifiche sulla restituzione.

### *6.2.5 La scalatura del modello tramite i vincoli metrici di distanza*

Finita la fase di restituzione vettoriale appena descritta si possiede un modellino geometrico dell'arco perfettamente in scala fra le sue parti, ma non è possibile in alcun modo conoscere la distanza fra una qualunque coppia di punti restituiti. In altre parole si è in possesso di un modello in scala di cui però non si possiede il valore numerico di tale scala. Per scalare il modello geometrico dell'oggetto è quindi sufficiente una sola misurazione di distanza fra una coppia qualunque di punti restituiti per poter valutare la scala della rappresentazione e scalare quindi il modello. A questo punto si chiarisce il perché siano state effettuate anche delle misurazioni di distanza con la cordella metrica fra le coppie di punti materializzati sul monumento tramite i target tape adesivi, ( vedi paragrafo 5.3.2, 5.7 e 5.9 ) queste misure di distanza riportate nelle monografie del paragrafo 5.9 servono appunto in questa fase di scalatura del modello. In realtà le stime di distanza effettuate sono in misura molto maggiore rispetto alla unica strettamente necessaria, questo per i motivi già spiegati nei paragrafi 5.7 e 5.9. In totale le misure distanziometriche realizzate risultano essere 25.

Per inserire nel software PhotoModeler Pro i vincoli di distanza misurati fra le coppie di target adesivi esistono due appositi comandi situati nel sottomenù di *"Project"*: *"Constraint Definition Mode"* e *"Constraint List"*

Per prima cosa si seleziona il tasto *"Constraint Definition Mode"* e quindi si vanno a selezionare sui fotogrammi quei punti ai quali si vuole associare un qualunque tipo di vincolo, ad esempio di distanza, ma potrebbe essere definita anche una condizione di complanarità fra più punti, oppure un parallelismo fra rette, un allineamento fra punti, u parallelismo fra piani, una perpendicolarità fra rette, ecc…

In seguito si seleziona il tasto *"Add NewConstraint"* e si entra in una finestra di dialogo che permette di impostare la scelta del tipo di vincolo voluto nonché tutti i parametri ad esso inerenti.

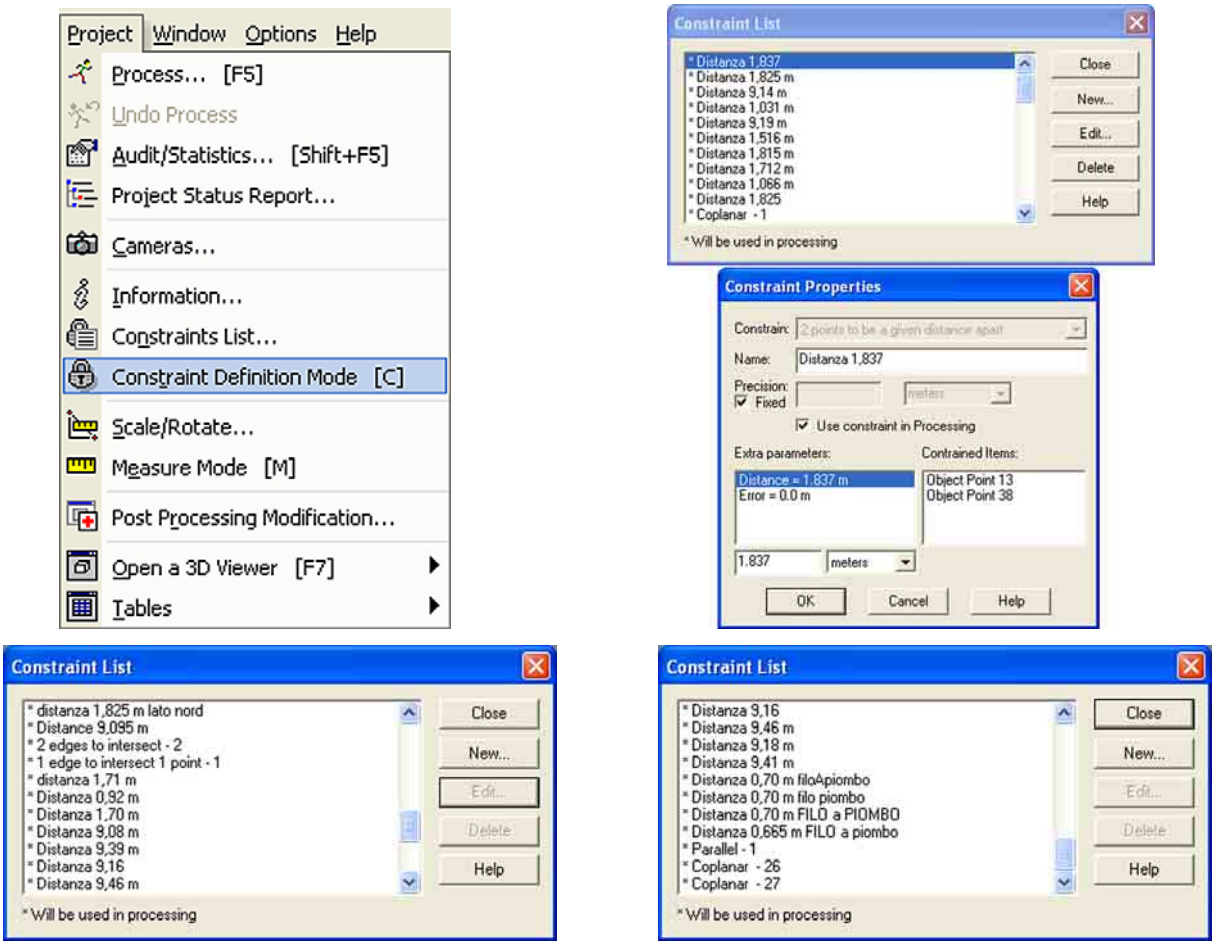



Figura 6.25 – Sottomenù Project e finestre dei vincoli definiti sull'arco.

In alto a sinistra è possibile vedere il sottomenù project con i due *tool* necessari per definire i vari tipi di vincoli sul modello. Nelle finestre denominate *"Constraint List"* si possono notare invece tutti i vincoli definiti sul modello geometrico dell'arco, si nota che in prevalenza sono vincoli di distanza fra due punti, ma sono state definite anche complanarità di punti e parallelismi fra rette. In particolare per il vincolo denominato "Distanza 1,837" si vede la finestra *"Constraint Properties"* dove vengono indicati i punti a cui è riferito questo vincolo ( 13 e 38 ) ed altri dettagli tecnici.

Nel caso dell'arco d'Augusto i vincoli più usati sono stati quelli di distanza ricavati dalle 25 misure topografiche compiute in sito, ma in alcuni casi sono stati definiti anche vincoli di altra natura, quali parallelismi fra rette e complanarità di punti.

Qui di seguito viene ora riportato un esempio di definizione del vincolo di distanza fra i due punti n. 13 e n. 38 materializzati dai

target tape adesivi. Per analogia tutti i restanti 24 vincoli metrici sono stati stabiliti in modo similare.

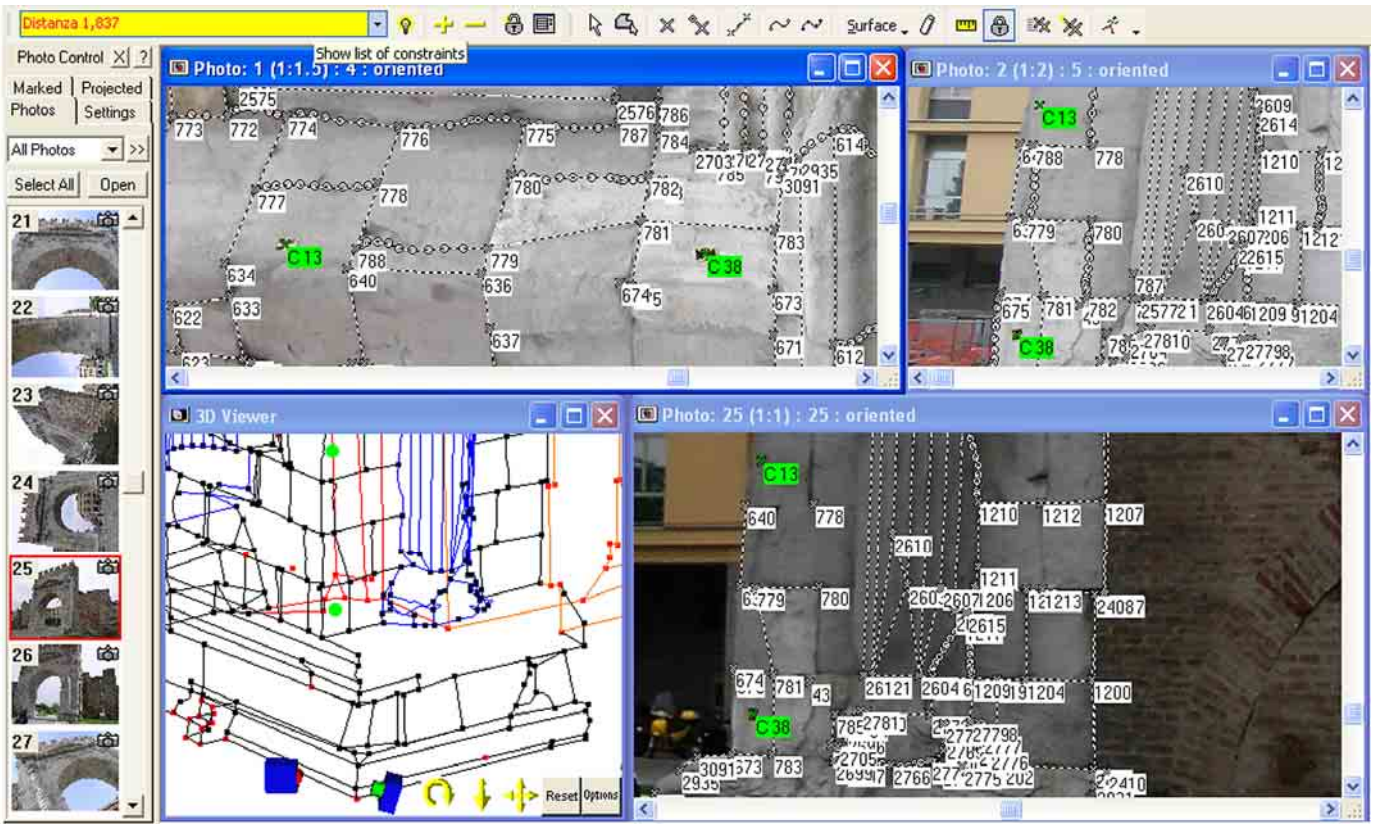



Figura 6.26 – Definizione del vincolo di distanza fra il punto n. 13 ed il p.to n. 38.
Notare in alto a sinistra il riquadro in giallo, esso riporta la distanza fra i due punti in verde.

Figura 6.27 – Monografia dei punti n. 12,13,38,44.
Da questa monografia è possibile conoscere la distanza fra i punti n. 13 e 38 ( 1,837 m ) che deve essere impostata nel software attraverso un'apposita finestra di input dati.

Il primo passo per vincolare la distanza fra i punti 13 e 38 è stato quello di ciccare sul tasto *"Constraint DefinitionMode"*, poi si sono selezionati i punti 13 e 38 come visibile in figura 6.26; a questo punto si seleziona il tasto *"Add NewConstraint"* e compare una finestra ( *"Constraint Properties"* ) su cui si è scelto il tipo di vincolo voluto ( *2 points to be a given distance apart* ) e si sono anche definiti i parametri di tale vincolo ( vedi figura 6.28 ).

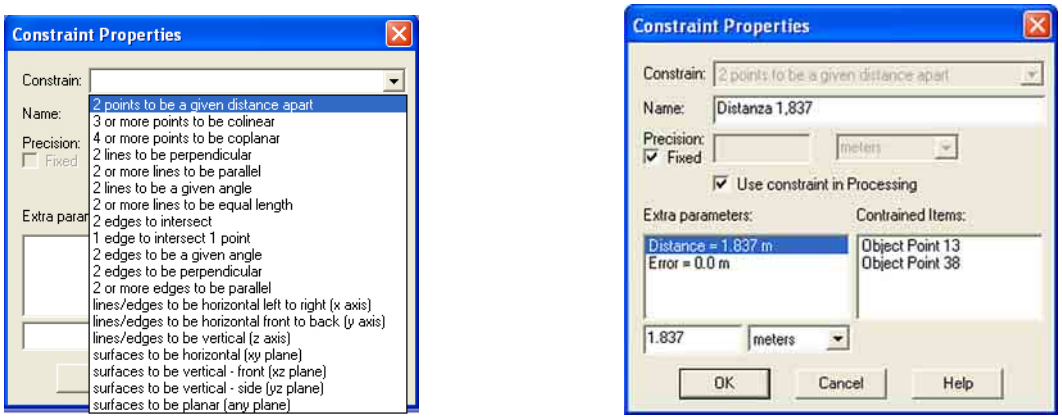



Figura 6.28 – La finestra *"Constraint Properties"*.
In questo riquadro fornito dal software si è scelto il tipo di vincolo voluto ( vedi finestra di sinistra ) ed le caratteristiche di tale vincolo ( vedi finestra di destra ).

La procedura appena descritta è quella tipica per definire qualunque tipo di vincolo metrico sul modello, tale sequenza di operazioni è stata poi ripetuta per tutte le restanti 24 distanze fra coppie di target di cui si era in possesso.

Come già menzionato i vincoli di distanza fra due punti sono stati quelli più frequenti, ma in certi casi sono state definite anche complanarità di punti e parallelismi fra rette.

Fissati tutti i vincoli voluti si è proceduto al riprocessamento del modello attraverso il solito tasto *"Process"*, facendo ciò il software ricalcola tutto il modello tenendo a mente i vincoli impostati e tramite la solita compensazione ai minimi quadrati perviene alla soluzione che minimizza gli scarti.

Alla conclusione di questa fase di scalatura del modello dell'arco attraverso le 25 misurazioni di distanza effettuate sul campo si è

pervenuti ad una rappresentazione numerico-digitale del monumento augusteo perfettamente in scala in cui si può conoscere la distanza fra due punti qualsiasi dello stesso; purtroppo giunti a questa situazione non era ancora possibile stabilire l'assetto della struttura nello spazio, infatti non si era ancora definita alcuna linea verticale.

### *6.2.6 Definizione di linee verticali tramite le misure ottenute per mezzo del filo a piombo*

A modello geometrico scalato il sistema di riferimento locale su cui vengono restituite le coordinate spaziali di tutti i punti misurati possiede ancora 6 gradi di libertà, 3 di traslazione e 3 di rotazione. Per mezzo della definizione di un piano orizzontale o in modo equivalente definendo una linea verticale si vincolano 2 gradi di libertà.

Per ottenere la direzione delle linee verticali su cui indirizzare l'asse Z della terna locale di riferimento è stato quindi usato un filo a piombo seguendo le procedure riportate nei paragrafi 5.3.4 e 5.7 a cui si rimanda per le informazioni tecniche.

Per definire delle linee verticali e parallele fra loro all'interno dell'ambiente PhotoModeler si usano le stesse procedure descritte nel paragrafo precedente, solamente che in questo caso si vanno a selezionare delle linee al posto dei punti, infatti la verticalità ed il parallelismo fra rette è sempre un vincolo metrico che può essere impostato dal tasto funzione *"Constraint Definition Mode"*.

Così è stato fatto per le tre linee sicuramente verticali individuate sull'arco con il filo a piombo.

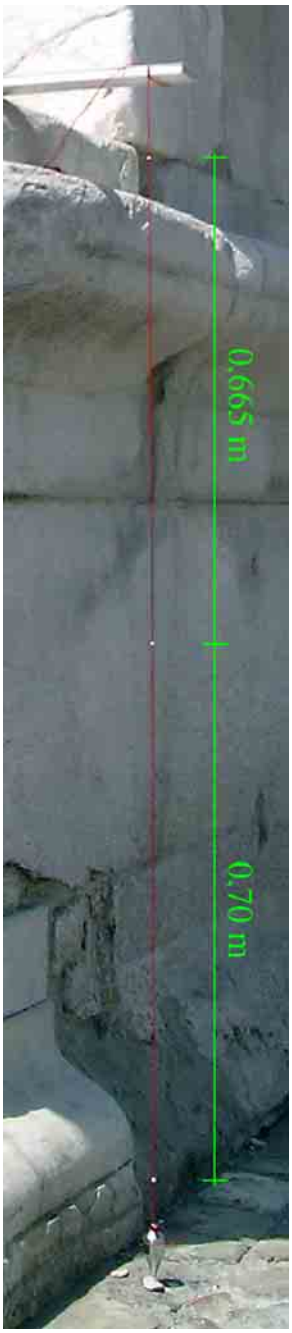


Figura 6.29

Come sempre, dal punto di vista teorico, per vincolare 2 gradi di libertà del sistema di riferimento cartesiano sarebbe stata sufficiente l'individuazione di una sola linea verticale, ma per ottenere una compensazione delle misure ed assicurarsi una migliore precisione ed affidabilità del metodo si è attuata una ridondanza disponendo ulteriori 2 fili a piombo oltre all'unico strettamente necessario.

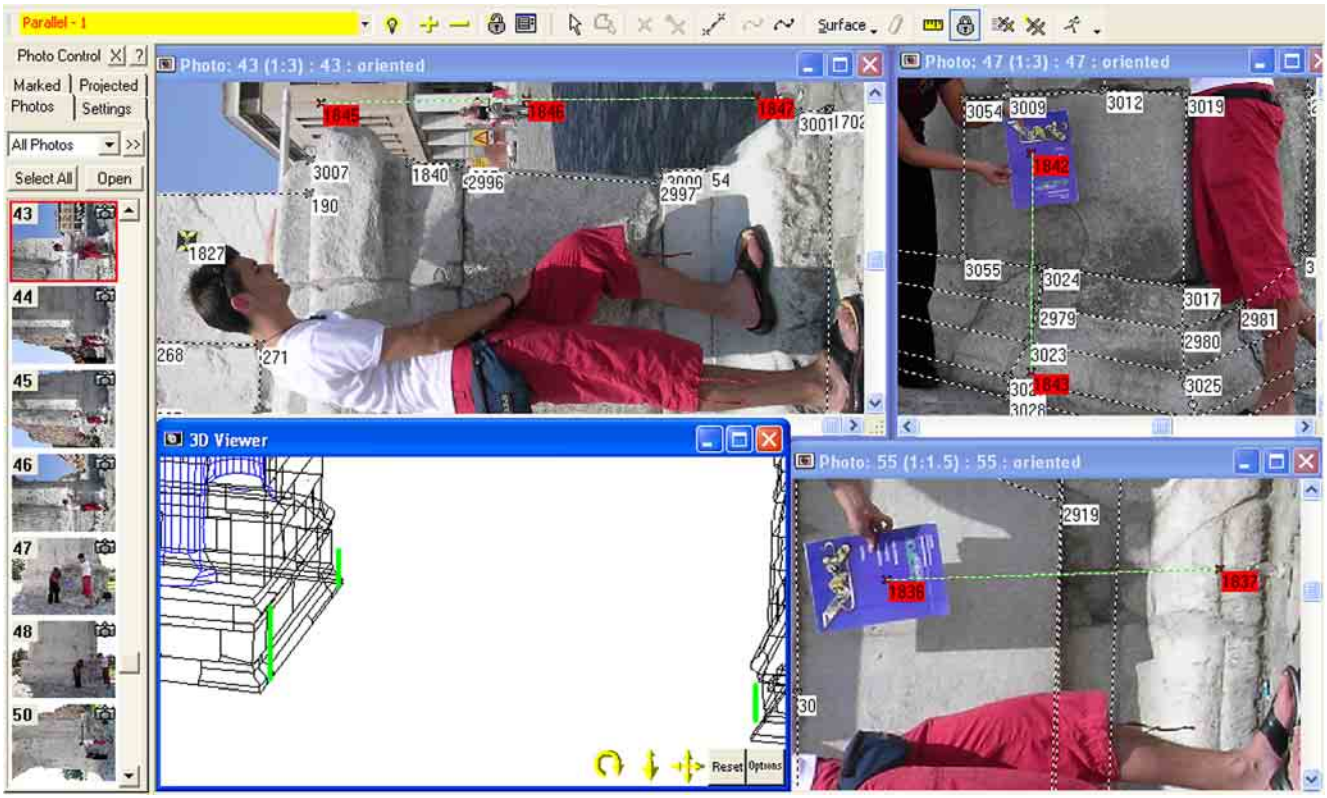



Figura 6.30 – Definizione del vincolo di parallelismo e verticalità fra tre rette trovate con il filo a piombo.
Nella finestra in basso a sinistra ( 3D Viewer ) è possibile vedere in verde le tre linee in questione, esse sono disposte presso gli spigoli dei piedritti dell'arco.

Assegnato il parallelismo fra le tre linee verticali trovate per mezzo del filo a piombo, ed avendo definito come asse Z della terna cartesiana locale la direzione formata dalle rette rappresentate in verde si è giunti all'orientazione nello spazio del monumento. Più precisamente per compensare le misure, e trovare una direzione verticale media delle tre definite dai vari fili a piombo è stato usato il tasto "*Process*" del software; esso ha elaborato i dati e fornito in

output un modello dell'arco completamente scalato ed orientato nello spazio.

### *6.2.7 L'orientamento esterno assoluto tramite l'assegnazione dell'origine ed assetto della terna cartesiana locale*

Giunti a questa fase dell'elaborazione dei dati praticamente il lavoro di processing è finito, difatti avendo già eseguito tutti i passi precedentemente descritti si è già giunti ad ottenere un modello geometrico dell'arco completamente in scala ed orientato secondo la verticale; è possibile quindi analizzare i profili, piante, sezioni, prospetti della struttura per ottenere informazione metriche ed esaminare eventuali strapiombi, disassamenti, disallineamenti, ed altre variazioni geometriche-formali degli elementi architettonici e strutturali. In sostanza è possibile lasciare liberi i restanti 4 gradi li libertà che la terna cartesiana locale ancora possiede ( 3 di traslazione ed uno di rotazione attorno all'asse Z ), infatti non importa sapere dove il software PhotoModeler abbia posizionato la terna cartesiana e come questa sia ruotata attorno all'asse Z, quello che spesso è ritenuto importante è la conoscenza dell'assetto della struttura rispetto alla verticale ( cosa già possibile ) e la possibilità di fare misurazioni di distanza relativa fra coppie di punti.
Se invece si vuole referenziare il modello ad un sistema di coordinate, per così dire "assoluto", come ad esempio le coordinate piane cartografiche o quelle geocentriche GPS è necessario effettuare una corretta disposizione della terna cartesiana di riferimento, tale collocazione si attua mediante l'utilizzo di punti doppi di legame ( è necessario che essi siano almeno 3 ), ovvero punti di cui si conoscono le coordinate nei due sistemi di riferimento ( quello di origine e quello di arrivo ).
Nel caso dell'arco non si possedevano le coordinate di alcun punto rispetto ad un sistema di riferimento "assoluto", tipo quello GPS o

cartografico; quindi non è stato possibile referenziare la struttura. Nonostante ciò è stato comunque deciso di istituire una terna cartesiana locale che seguisse certi criteri:

1. Asse Z diretto secondo la verticale
2. Origine della terna nella base di un piedritto nel punto di più bassa quota, in modo da avere solamente punti restituiti con coordinate Z di valore positivo.
3. Asse Y della terna complanare al piano del fronte dell'arco che volge verso Roma.

Considerando queste tre condizioni l'origine della terna cartesiana locale è stata definita nel punto 1702, ( l'asse Z era ormai da tempo diretto secondo la verticale ) fatta questa assegnazione la terna possedeva ancora un grado di libertà: poteva ancora ruotare attorno all'asse Z. Per fissare l'ultimo vincolo alla rotazione è stata seguita l'indicazione n. 3, quindi si è fatto in modo che il punto n. 1703 avesse coordinata X nulla.

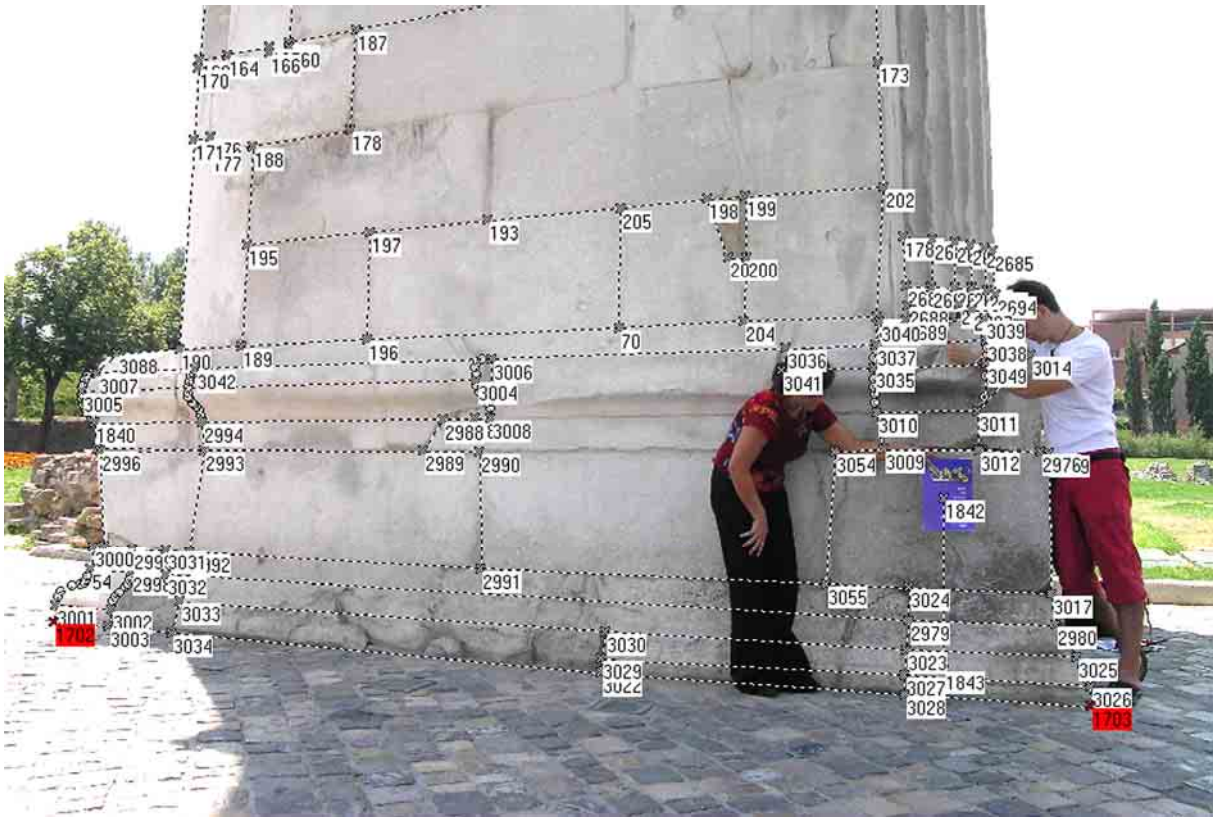



Figura 6.31 – I punti 1702 e 1703 utilizzati per il posizionamento ed orientamento della terna.

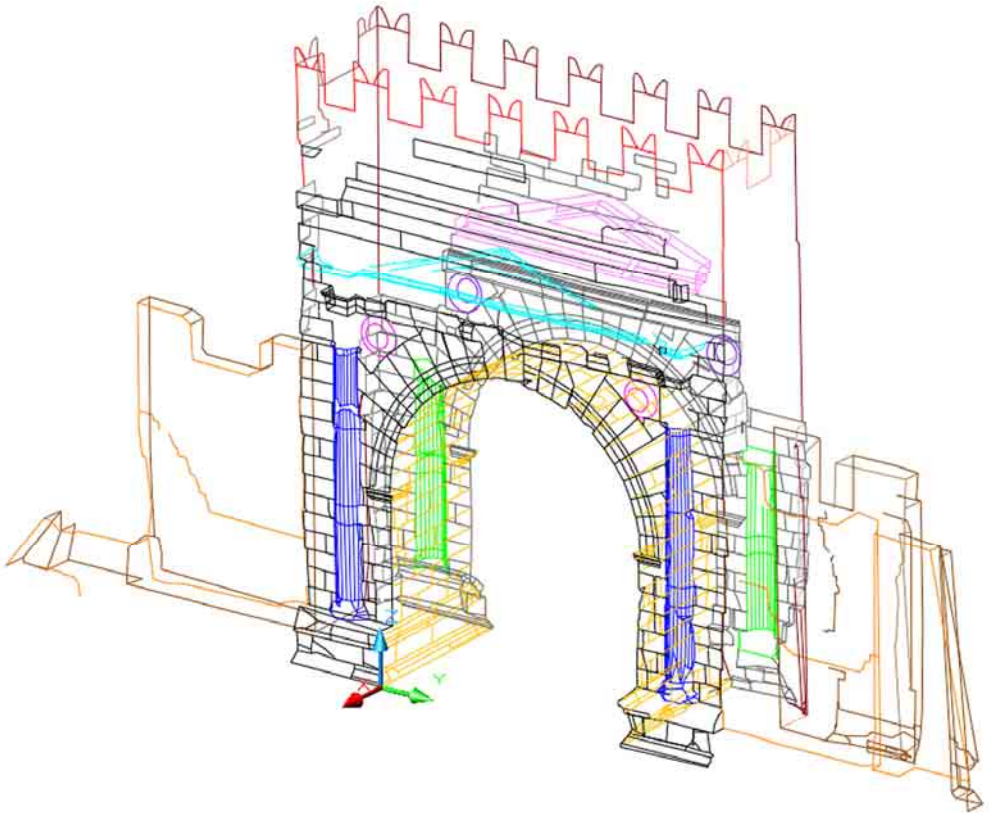


Figura 6.32 – Proiezione assonometrica dell'arco d'Augusto di Rimini.
Questa proiezione raffigura l'arco da un punto di vista situato verso il lato mare al di fuori del centro storico della città. In questa immagine è possibile vedere chiaramente come è stata posizionata la terna cartesiana locale.

Ad orientamento esterno avvenuto secondo le modalità appena descritte la fase di costruzione del modello vettoriale dell'arco si è completata in maniera definitiva, ora si è in possesso di un elaborato digitale 3D che rappresenta fedelmente tutte le principali discontinuità della struttura. Purtroppo un simile prodotto numerico-digitale è molto utile e funzionale, in quanto permette di eseguire misure molto precise e non variabili ne tempo, ma senza un PC a portata di mano non è possibile effettuare alcuna misura e considerazione sull'oggetto rilevato; di qui si capisce l'importanza di estrapolare delle rappresentazioni grafiche 2D che possono essere facilmente stampate in una scala adatta alla precisione e grado di dettaglio del rilievo eseguito. I disegni 2D che spesso si richiedono dopo un rilievo sono: Piante, sezioni, profili, alzati, prospetti, ecc…

E questi elaborati appena citati sono proprio quelli che sono stati estratti dal file digitale 3D dell'arco d'Augusto, di cui si parlerà al capitolo 6.3.

### *6.2.8 La creazione del DSM dell'arco con l'applicazione di textures raster*

DSM è l'acronimo di *Digital Surface Model* , generalmente nell'ambito della fotogrammetria digitale esso viene generato in modo automatico o semi-automatico mediante degli algoritmi di *image matching* che restituiscono la posizione di migliaia di punti mediante correlazione fra le immagini digitali. In sostanza l'algoritmo cerca di trovare in modo automatico migliaia di punti omologhi senza alcuna collimazione da parte dell'operatore, una volta trovati tutti questi punti poi ne calcola le coordinate oggetto e li restituisce nello spazio. Alla fine di questa prima fase di ottiene quindi una nuvola di punti appartenenti all'oggetto, arrivati a ciò il software di elaborazione provvede ad una interpolazione di questi punti con delle superfici che verranno a rappresentare appunto il DSM.
La creazione di un DSM in modo automatico funziona molto bene per superfici da modellare che posseggono una forma molto regolare e non troppo complicata, questo si verifica nella aerofotogrammetria quando si vuole modellare il terreno ( si ottiene quindi un DTM, Digital Terrain Model ) in zone prive di boscaglie o centri abitati. Nel caso di modellazione di superfici molto complicate come quelle dei monumenti e costruzioni edificate in genere, la creazione di un DSM in maniera automatica non risulta ottimale, difatti anche gli algoritmi di correlazione più avanzati e recenti non riescono a restituire esattamente la sagoma di superfici a tinta unita e dalla forma molto complessa con presenza di discontinuità nette. In questi casi si procede preventivamente all'inserimento manuale di linee di discontinuità che il software interpreta durante l'autocorrelazione, ad

elaborazione avvenuta il software provvede poi a fornire una nuvola di punti restituiti che deve essere necessariamente corretta e sfoltita dai punti errati, fatto ciò si procede con l'interpolazione e si ottiene un DSM che però risulta ancora in parte errato, e quindi deve essere corretto manualmente.

Come si nota da quanto descritto sopra, nel caso di correlazioni automatiche che devono portare alla restituzione di superfici complesse la procedura completamente automatica di estrazione del DSM risulta errata, in questi casi si agisce sempre in maniera semi-automatica con l'intervento di un operatore si prima che dopo il processing dei dati.

Nel caso particolare del rilievo dell'arco d'Augusto il DSM è stato costruito in maniera completamente manuale, le superfici sono state costruite tramite degli appositi comandi di modellazione forniti dal software forniti sotto il tasto funzione "*Surface*".

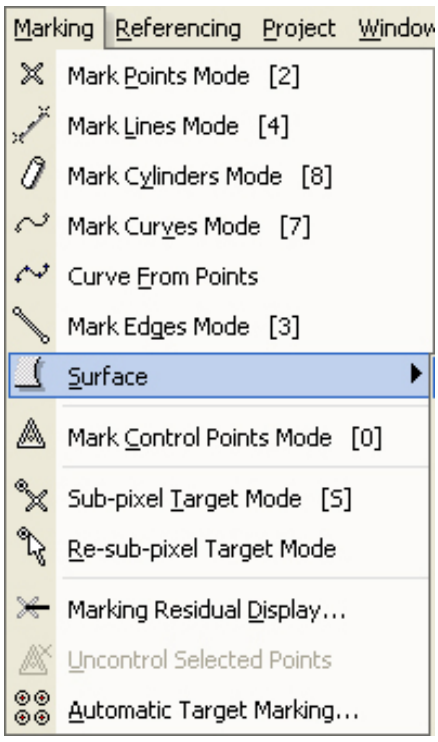



Figura 6.33 – Comando "*Surface*" nel menù "*Marking*".

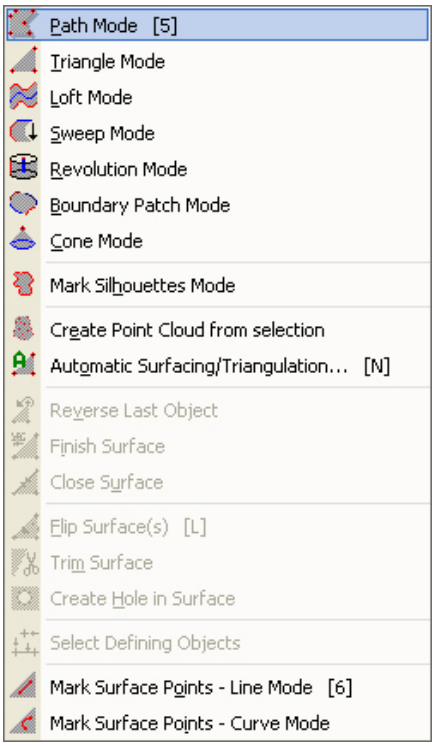



Figura 6.34 – Tipi di superfici messe a disposizione dal programma.

Il comando più usato durante tutta la fase di definizione dei tasselli di superficie che andavano a formare il DSM è il *"Path Mode"*, tramite esso si selezionano dei punti che sono approssimativamente complanari ed il software provvede a definire una superficie a maglia di triangoli che passi per tutti i punti selezionati. In qualche caso, ma abbastanza raramente, è stato usato anche il comando *"Loft Mode"* e *"Sweep Mode"*, questi due comandi permettono di costruire delle superfici di forma curvilinea che si sono rivelate adatte per modellare elementi dalla forma tutt'altro che piana.

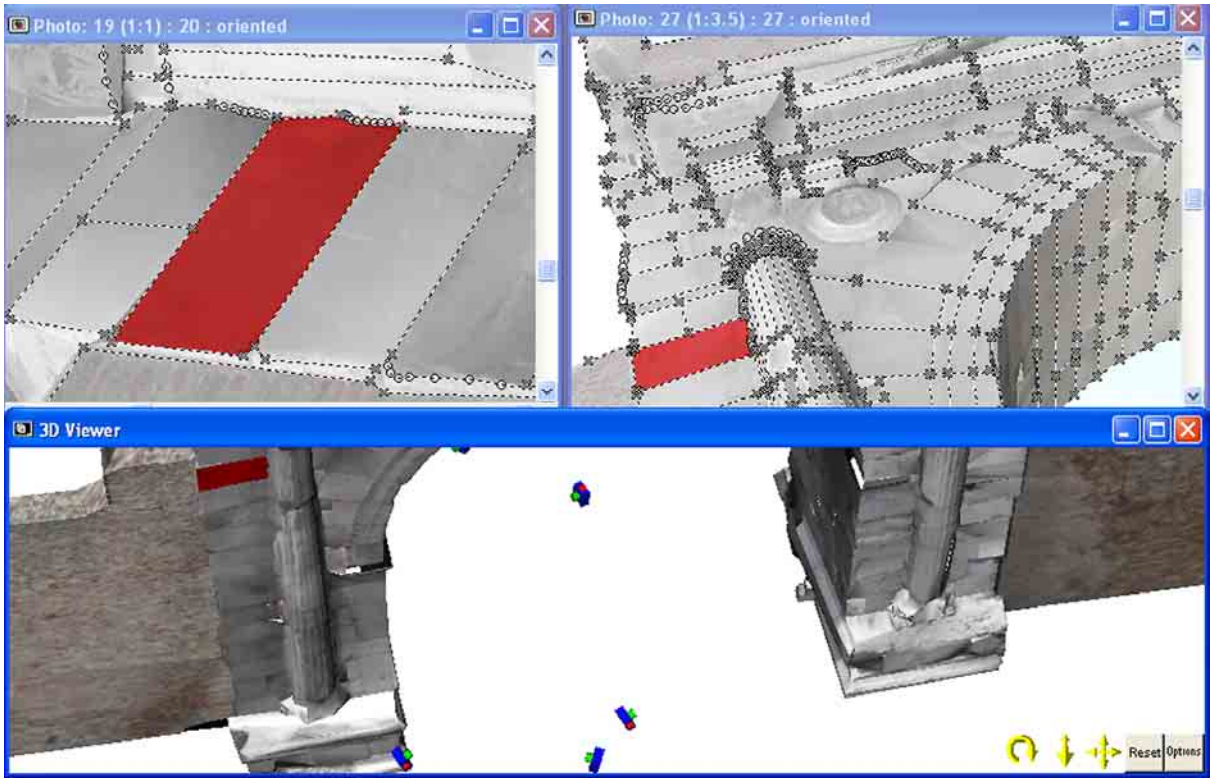



Figura 6.35 – Elemento di superficie del DSM dell'arco modellato tramite il comando *"Path"*

In linea generale tutti i conci di pietra d'Istria, come quello visibile in figura 6.35, sono stati modellati mediante una superficie del tipo *"Path"*, questa infatti si è rivelata la più adatta per riprodurre elementi pseudo-piani e dalla forma pseudo-rettangolare come i blocchi lapidei.

Visto che per la maggioranza dei casi è stato usato il suddetto comando, il DSM che è risultato in output è un "tappezzamento" di

piccole superfici triangolari piane che ricalcano ognuna un concio di pietra lapideo.

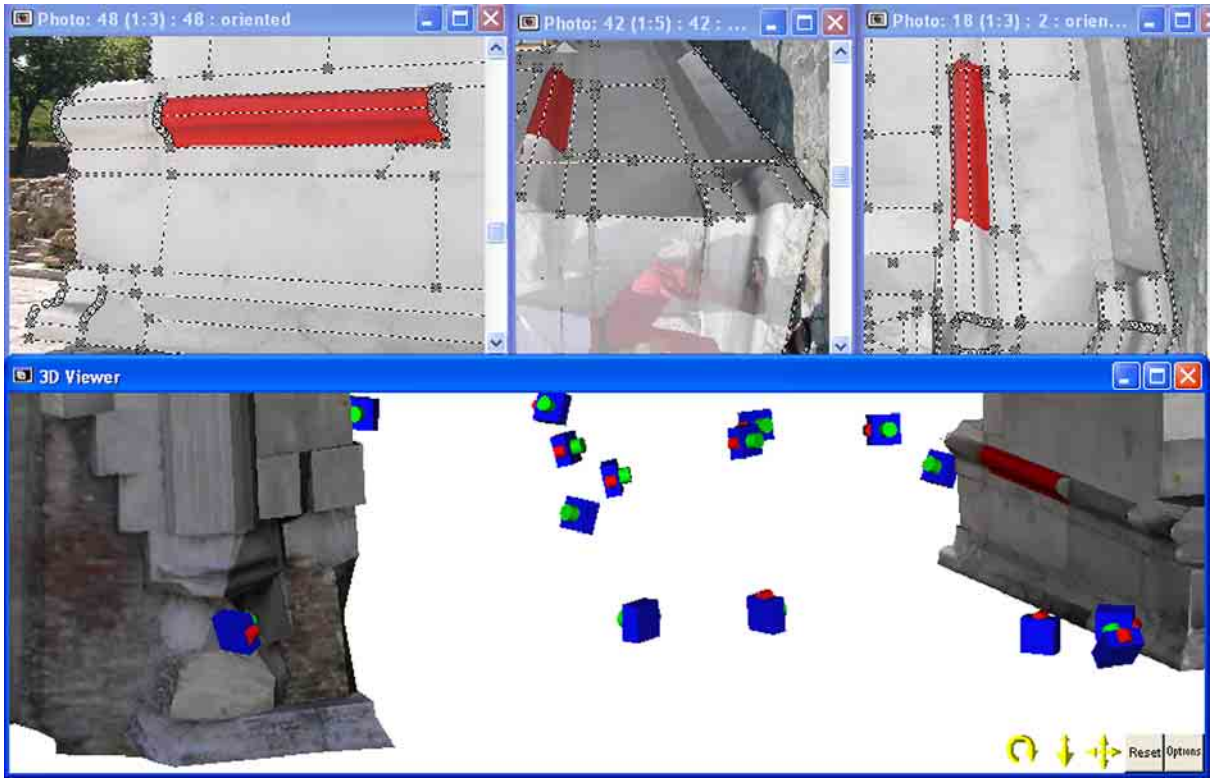



Figura 6.36 – Elemento di superficie del DSM dell'arco modellato tramite il comando *"Loft"*.

Durante la fase di "tassellamento" dei conci lapidei con delle superfici a maglie triangolari si è anche provveduta l'assegnazione di una texture fotografica per ogni elemento di superficie del DSM, in tal modo ogni triangolino di superficie ha collegata a se una texture fotografica ortorettificata proveniente da una delle 52 foto eseguite.
Applicando le textures fotografiche alla fine si è ottenuto un DSM dal forte impatto visivo e dal grande realismo.
Grazie a questa vestizione raster del DSM è possibile ottenere in seguito dei prodotti fotografici di valenza metrica, come ad esempio le ortofoto. Per ottenere un'esatta rappresentazione ortofotografica è necessario aver determinato un DSM in maniera molto precisa, per questo si è preferito utilizzare un metodo manuale per la definizione del modello di superficie piuttosto che il più rapido, ma meno preciso processo di autocorrelazione ed estrazione automatizzata del DSM.

## 6.3 ELABORATI GRAFICO-NUMERICI OTTENUTI IN OUTPUT DA PHOTOMODELER

Un grande pregio del software PhotoModeler Pro 5 sta nella possibilità di esportare i risultati ottenuti nell'elaborazione in diversi formati di grafica 2D e 3D, in tal modo il programma risulta molto flessibile e permette all'utente di far comunicare fra loro diversi ambienti di modellazione 3D.

Fra i dati numerici che si possono ottenere in output dall'elaborazione e restituzione dell'oggetto possiamo ricordare l'esportazione sotto forma di tabelle di tutte le caratteristiche che riguardano i punti, linee, curve e superfici rilevate; inoltre esiste anche la possibilità di indagare ed esportare tabelle che mostrino tutte le caratteristiche al riguardo delle prese eseguite e delle fotocamere impiegate.

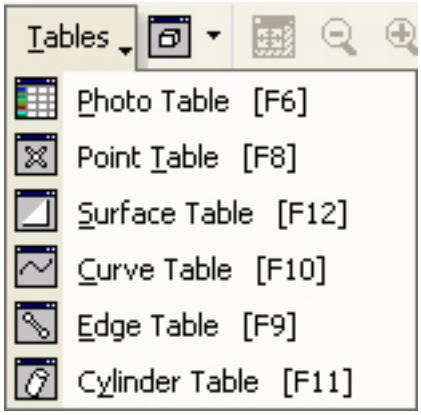



Figura 6.37 – Il comando *"Tables"* nella barra dei menù.

Per conoscere qualche principale dato numerico al riguardo del rilievo dell'arco d'Augusto, tipo le coordinate dei punti rilevati e la posizione ed assetto delle prese eseguite, vedere l'appendice A.

Fra gli elaborati grafici che sono stati ottenuti ed esportati si possono elencare:

1. Un file vettoriale 3D con 37 layers, perfettamente scalato, vincolato, ed orientato nello spazio secondo la verticale da cui sono state ricavate rappresentazioni grafiche 2D quali piante, sezioni, profili e prospetti in scala 1:50 e 1:100.

2. Un DSM dell'arco formato da superfici con textures fotografiche ortorettificate.
3. Cinque rappresentazioni ortofotografiche raster ottenute dal DSM, in scala 1:50.
4. Un modello stereoscopico costruito con la tecnica anaglifica.
5. Un file .3DS ( 3D Studio MAX ) con texture fotografica.
6. Un file .WRL ( file VRML ) con texture fotografica.
7. Un file .3DM ( file Rhino ) con texture fotografica.
8. Un file di animazione video .AVI in cui si esegue una ripresa "a volo d'uccello" attorno al modello virtuale dell'arco.

### *6.3.1 Immagini in proiezione prospettica ed assonometrica del modello digitale 3D ottenuto dalla restituzione dell'arco d'Augusto.*

Qui di seguito vengono riportate una serie di immagini che raffigurano il modello vettoriale ed il DSM con textures dell'arco d'Augusto di Rimini osservato sotto diversi punti di vista ed angolazioni.

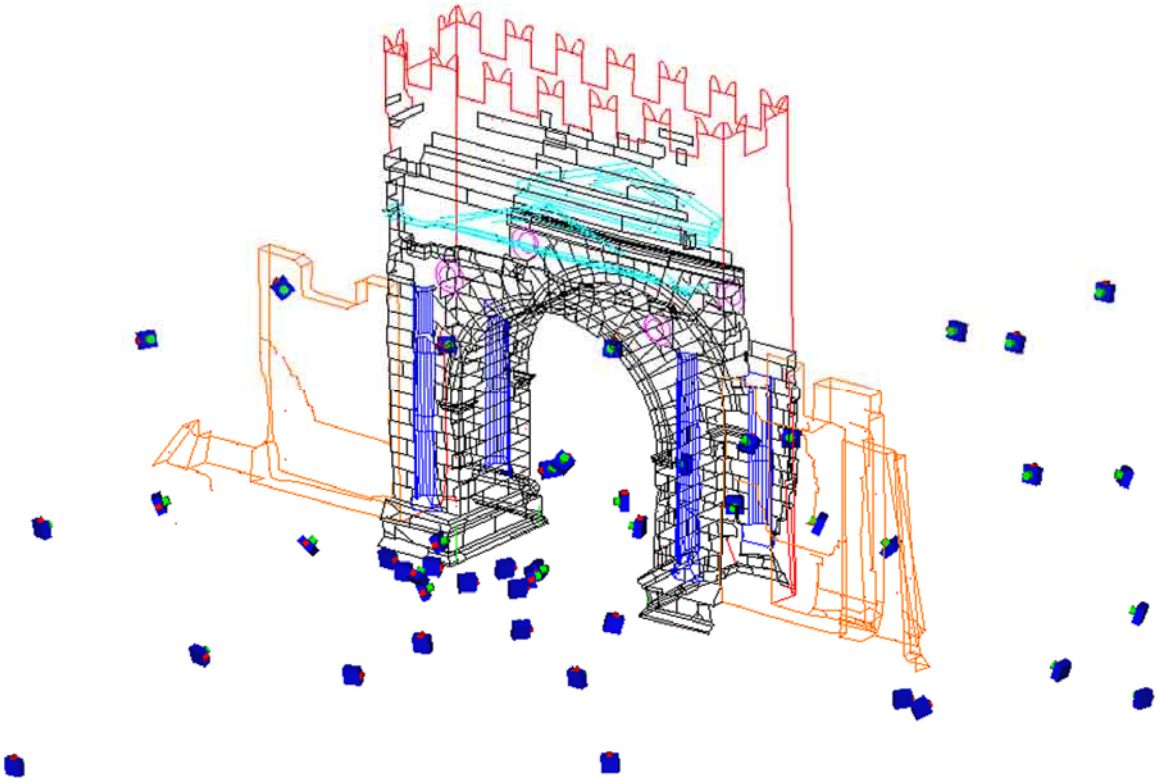


Figura 6.38 – L'arco d'Augusto in proiezione assonometrica visto dal lato mare-periferia. In questa rappresentazione è visibile il modello vettoriale del monumento con tutti i layer di restituzione e con indicazione della posizione ed assetto delle prese eseguite.

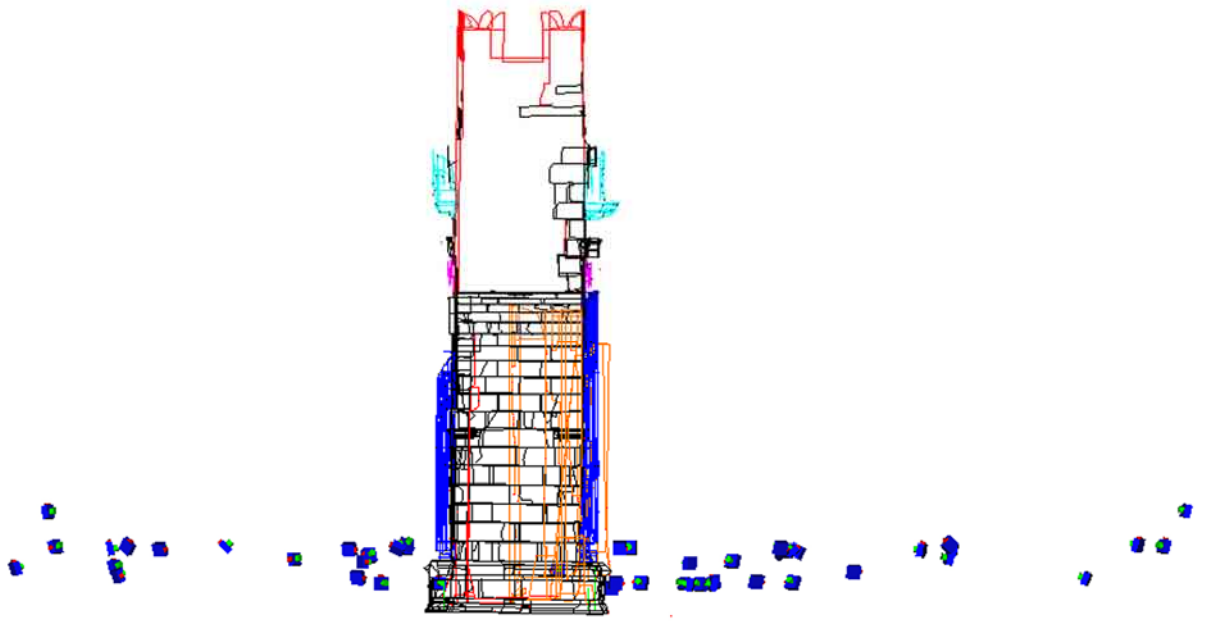


Figura 6.39 – L'arco d'Augusto in proiezione assonometrica. Prospetto verso monte.
Dalla raffigurazione riportata qui sopra è possibile notare la distribuzione delle prese fotogrammetriche eseguite, esse si trovano all'incirca tutte alla medesima quota. Questa situazione è accaduta per l'indisponibilità di un mezzo di elevazione che avrebbe semplificato notevolmente il rilievo e la restituzione.

Figura 6.40 - L'arco d'Augusto in proiezione assonometrica. Prospetto verso monte.
La figura qui sopra riporta il modello vettoriale sovrapposto al DSM.

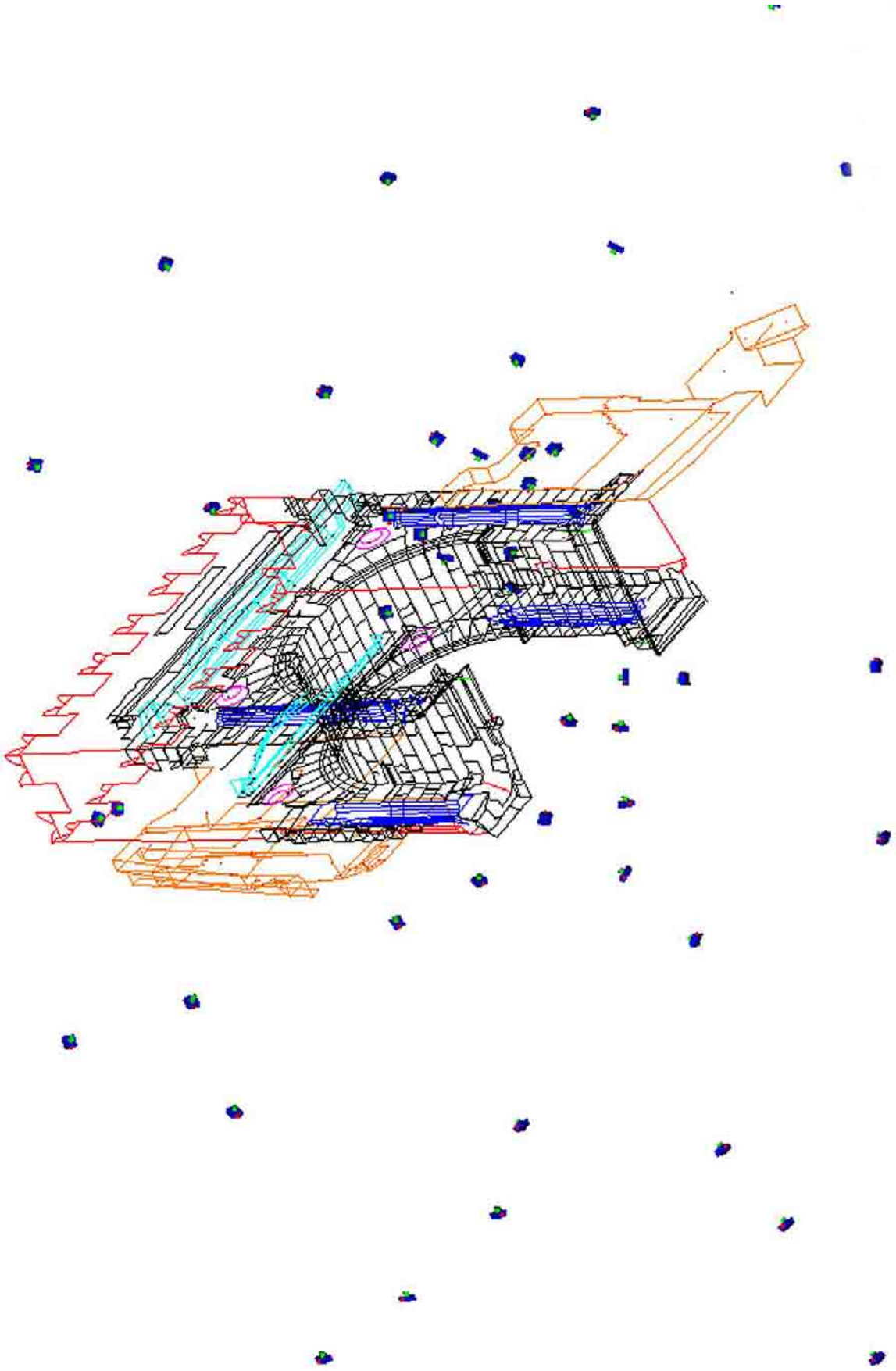


Figura 6.41 – L'arco d'Augusto in proiezione assonometrica visto dal lato monte-città. In questa rappresentazione è visibile il modello vettoriale del monumento.

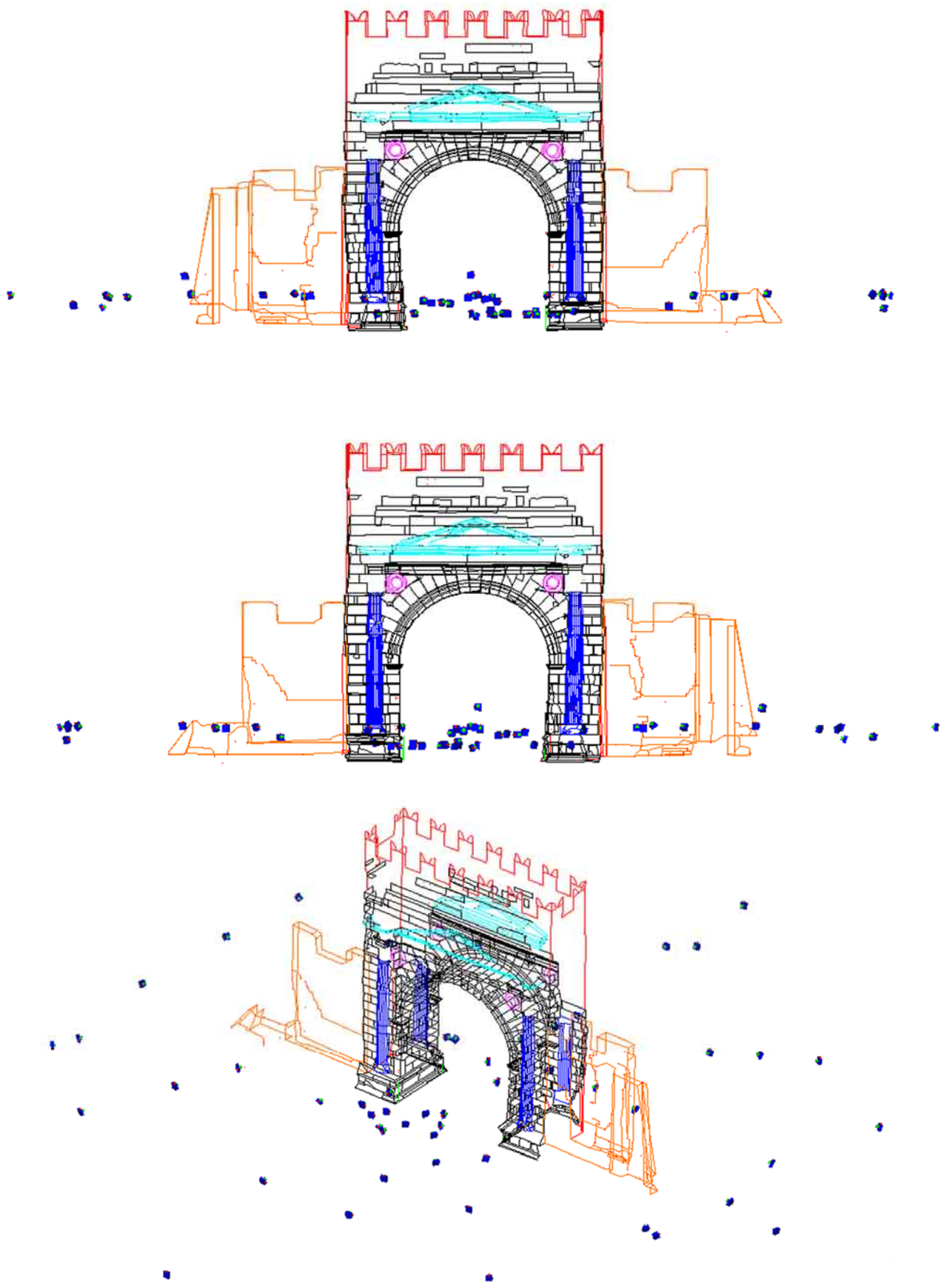


Figura 6.42 – L'arco d'Augusto. Prospetto verso Roma ( in alto ), prospetto verso Rimini ( nel mezzo ) e proiezione assonometrica con punto di vista lato mare-periferia ( in basso ).

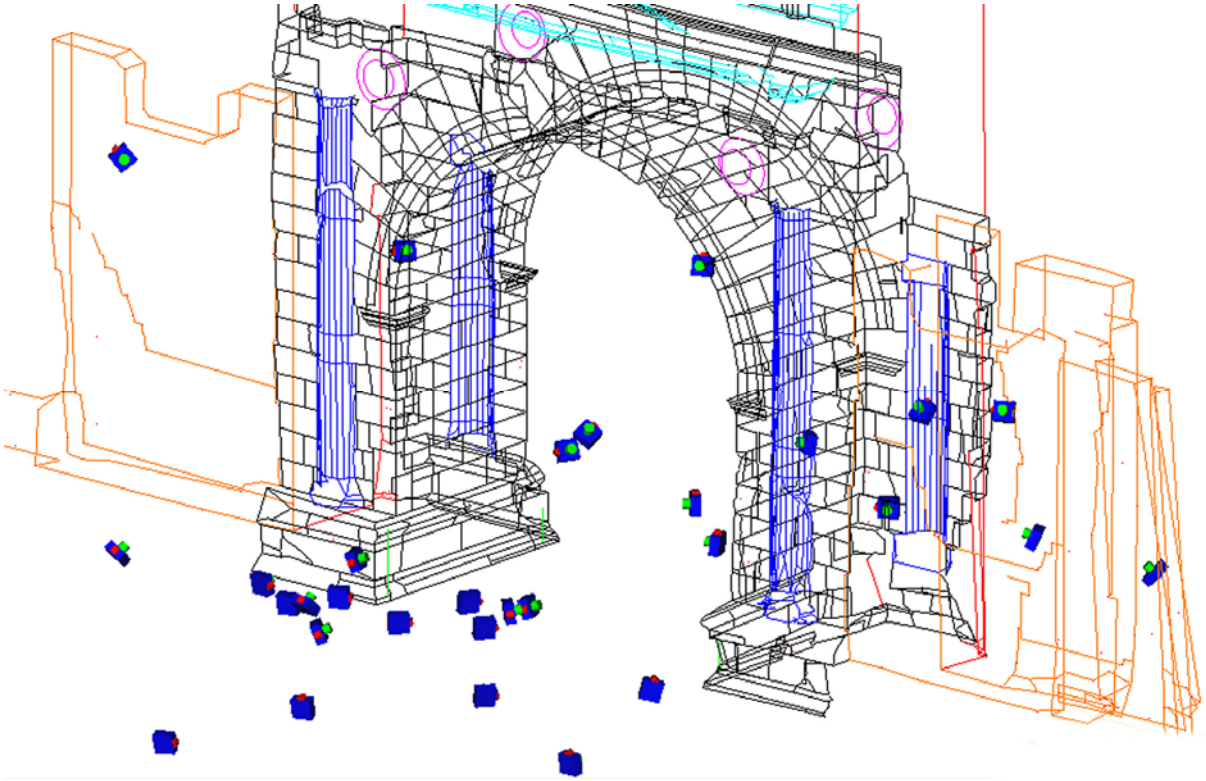


Figura 6.43 – L'arco d'Augusto in proiezione assonometrica visto da lato mare-periferia. In questa rappresentazione è visibile il modello vettoriale del monumento.

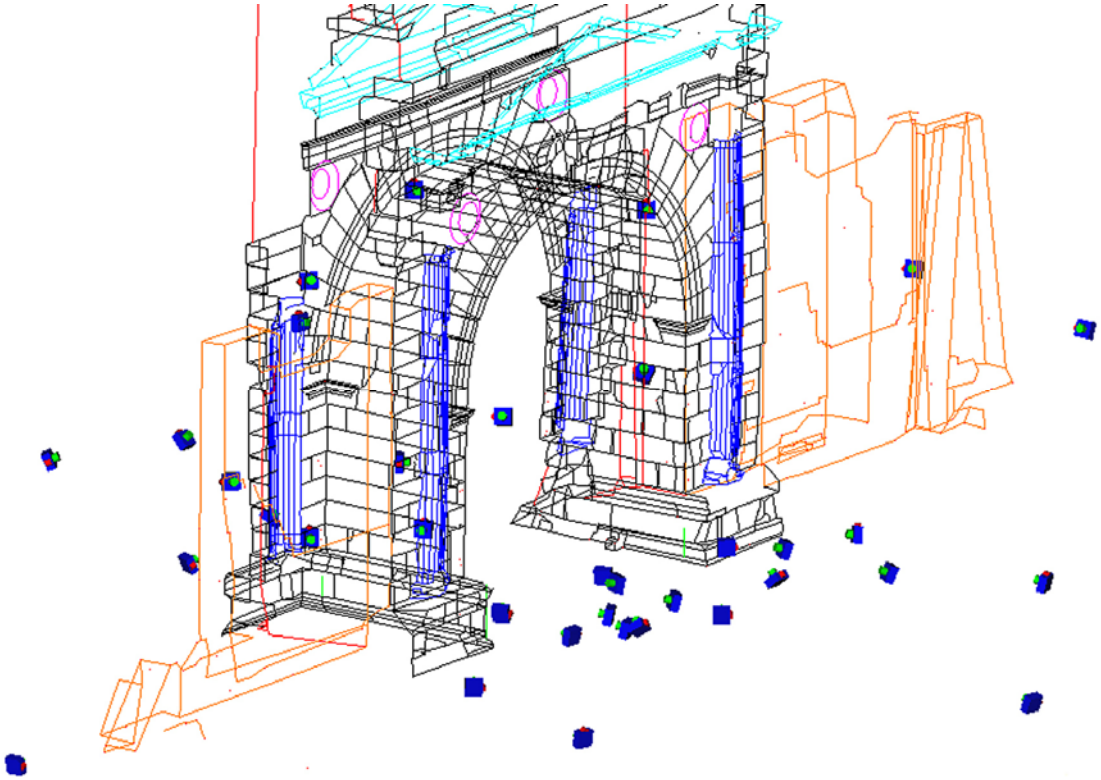


Figura 6.44 - L'arco d'Augusto in proiezione assonometrica visto da lato monte-periferia. In questa rappresentazione è visibile il modello vettoriale del monumento.

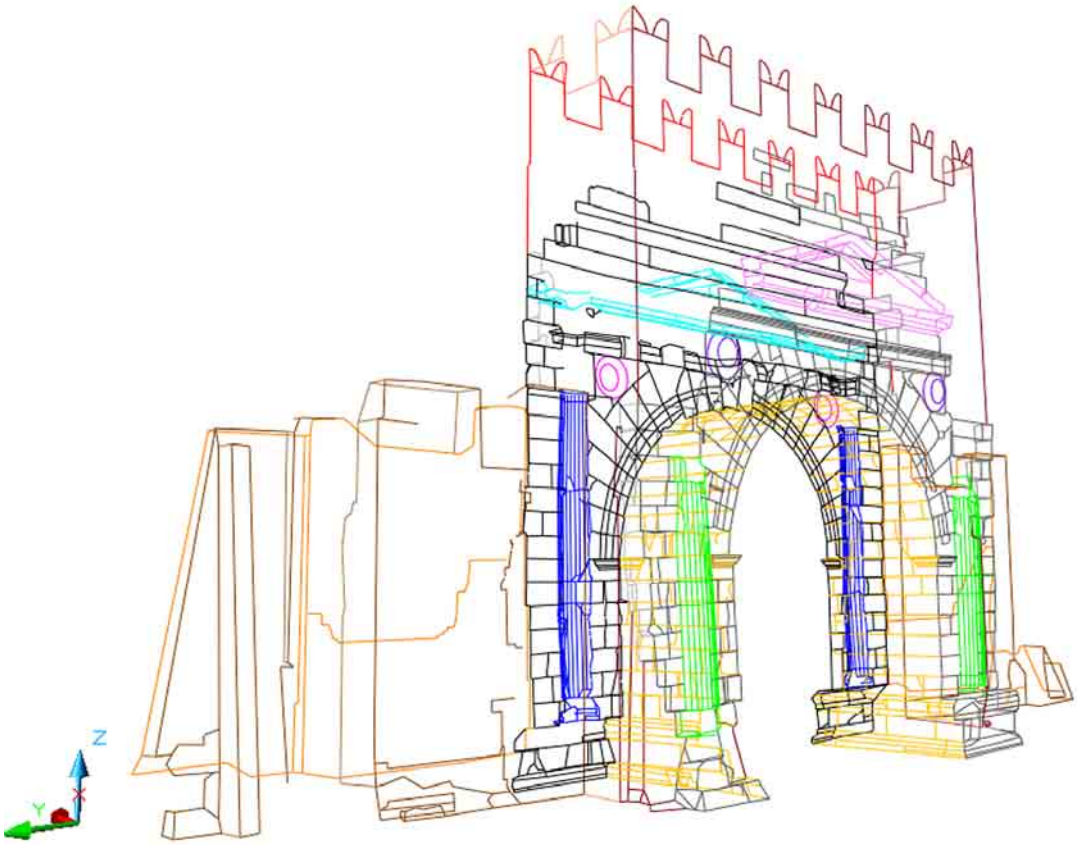



Figura 6.45 - L'arco d'Augusto in proiezione prospettica visto da lato monte-città.
La rappresentazione riportata qui sopra deriva dall'esportazione del file .pmr ( PhotoModeler ) nel formato .DXF che è stato modificato nell'ambiente AutoCAD fino ad ottenere questa immagine.

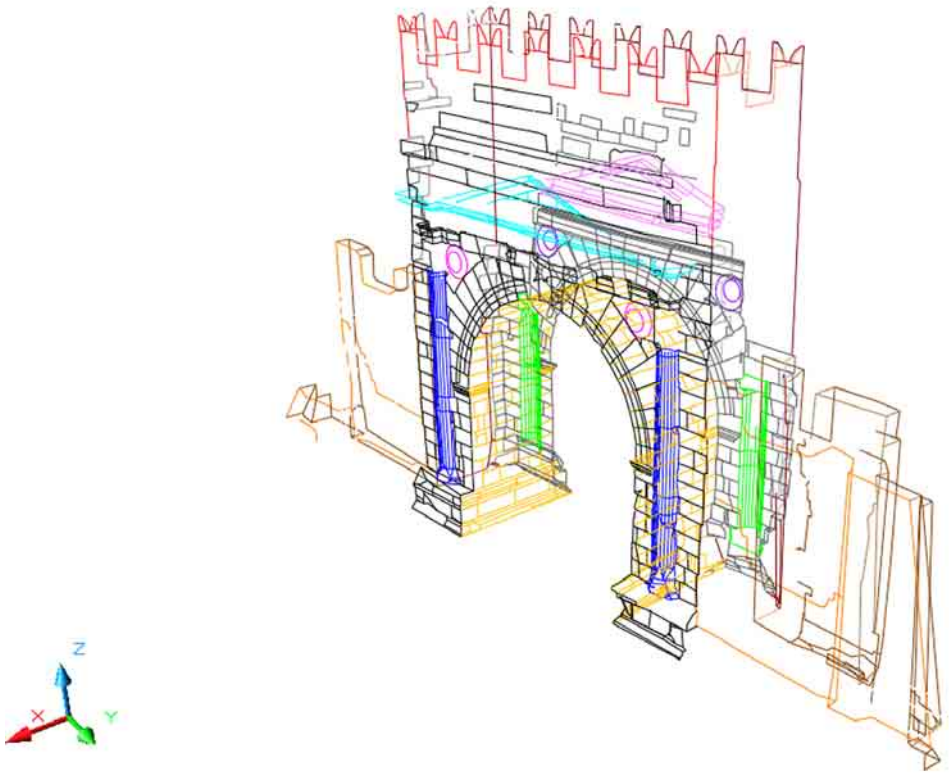



Figura 6.46 - L'arco d'Augusto in proiezione prospettica visto da lato mare-periferia.

Figura 6.47 - L'arco d'Augusto in proiezione prospettica visto da lato monte-periferia.

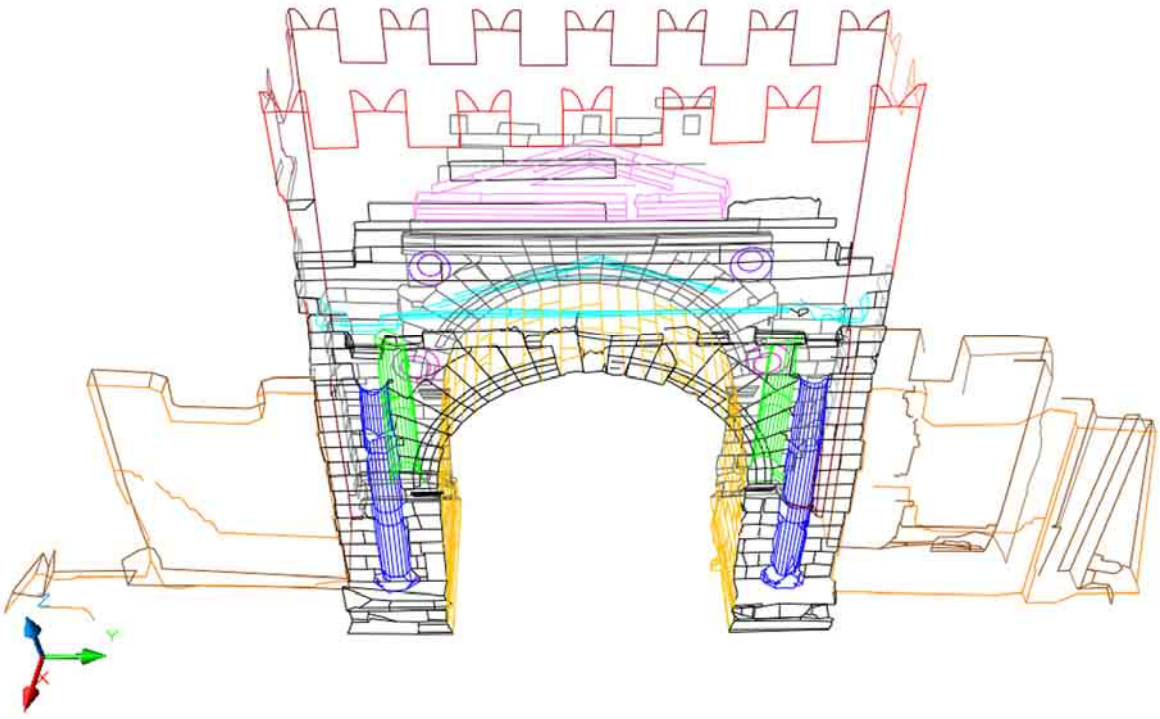


Figura 6.48 - L'arco d'Augusto in proiezione prospettica visto dalla periferia della città.

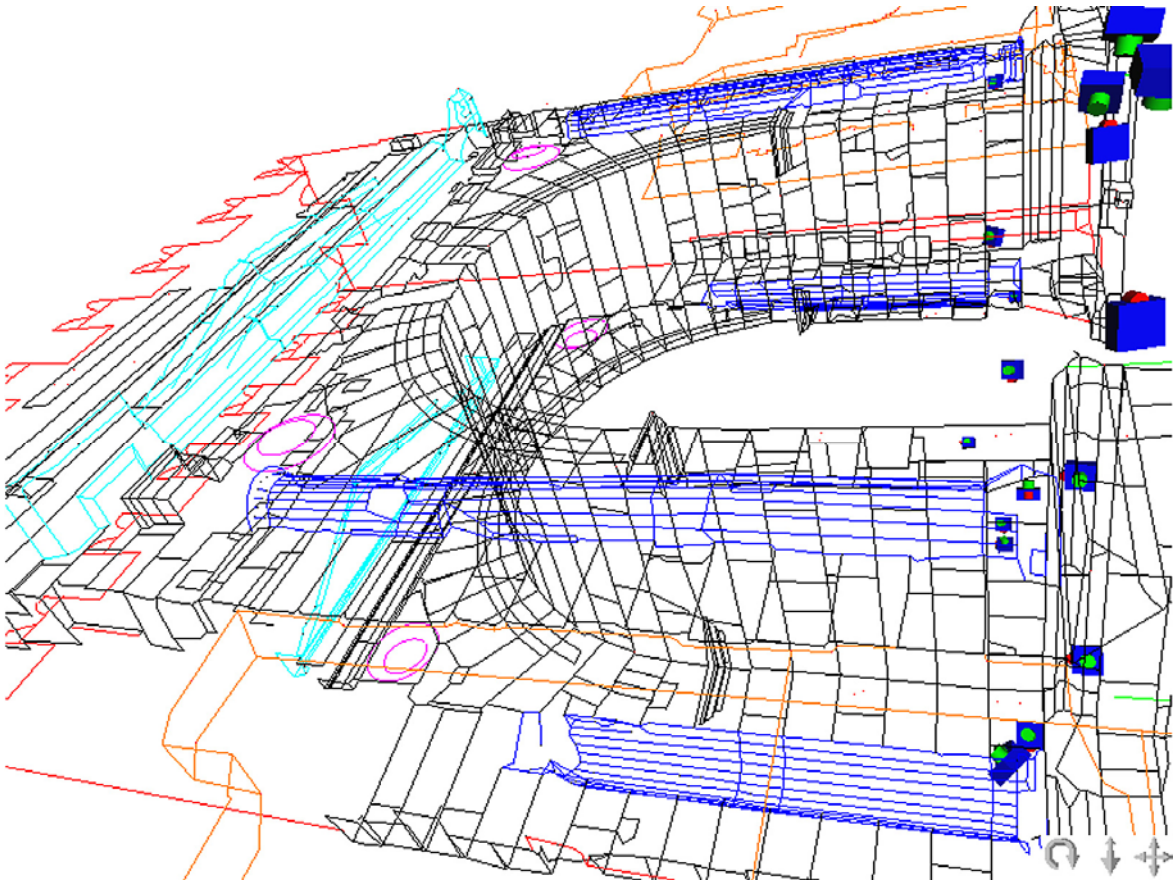


Figura 6.49 – Modello vettoriale dell'arco d'Augusto visto dalla fotocamera n. 19.
In questa raffigurazione è possibile notare anche la posizione ed assetto delle prese eseguite.

Figura 6.50 – Presa n. 19 con sovrapposto il modello vettoriale dell'arco.

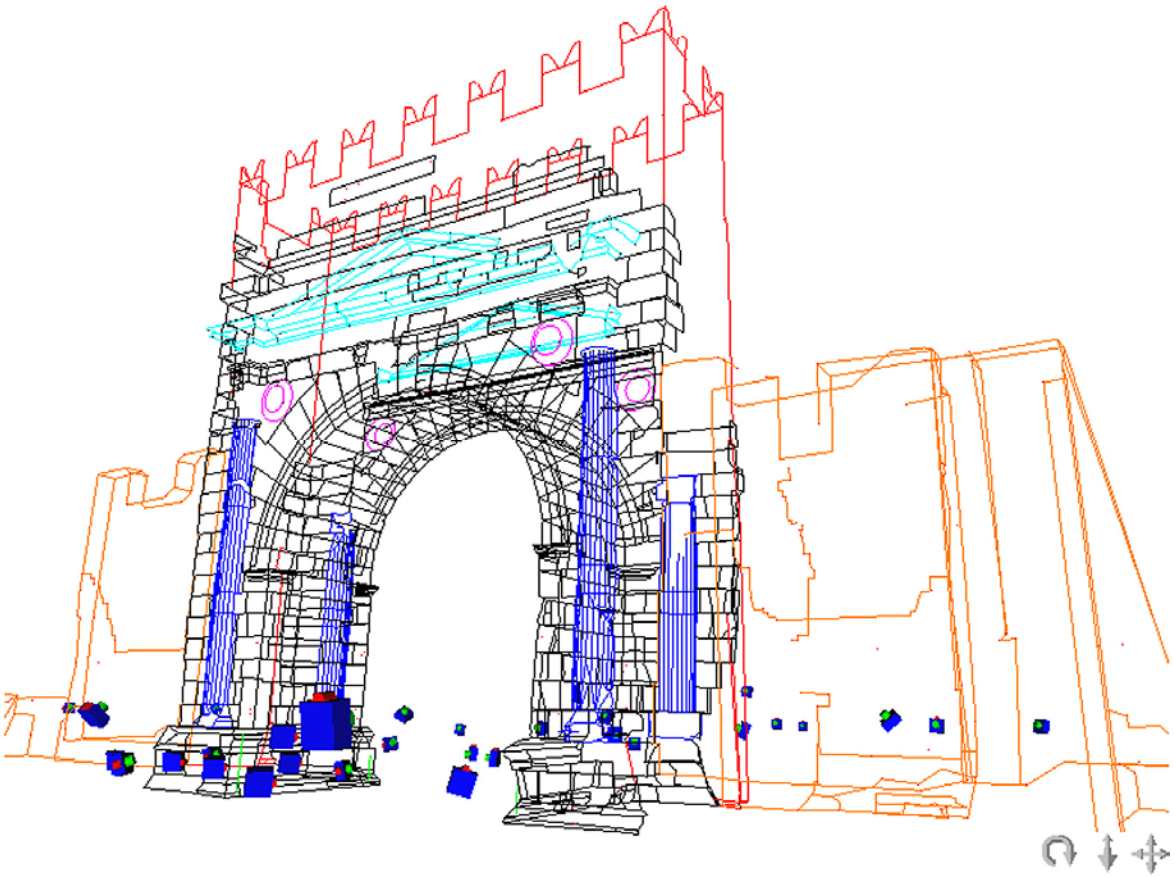


Figura 6.51 - Modello vettoriale dell'arco d'Augusto visto dalla fotocamera n. 25.

Figura 6.52 - Presa n. 25 con sovrapposto il modello vettoriale dell'arco.

Figura 6.53 – DSM dell'arco con textures fotografiche, visto dalla fotocamera n. 25.

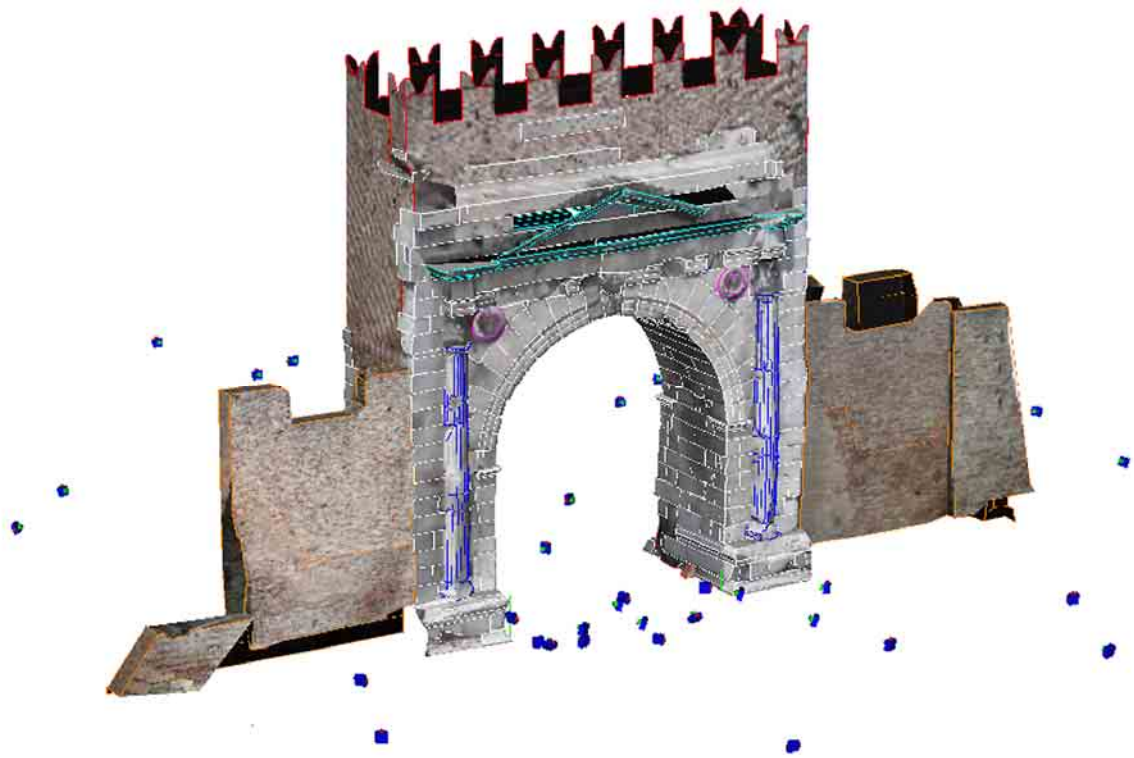


Figura 6.54 – DSM dell'arco con textures fotografiche e sovrapposto il modello vettoriale. L'immagine riportata qui sopra raffigura l'arco in proiezione prospettica con punto di vista a lato monte-periferia.

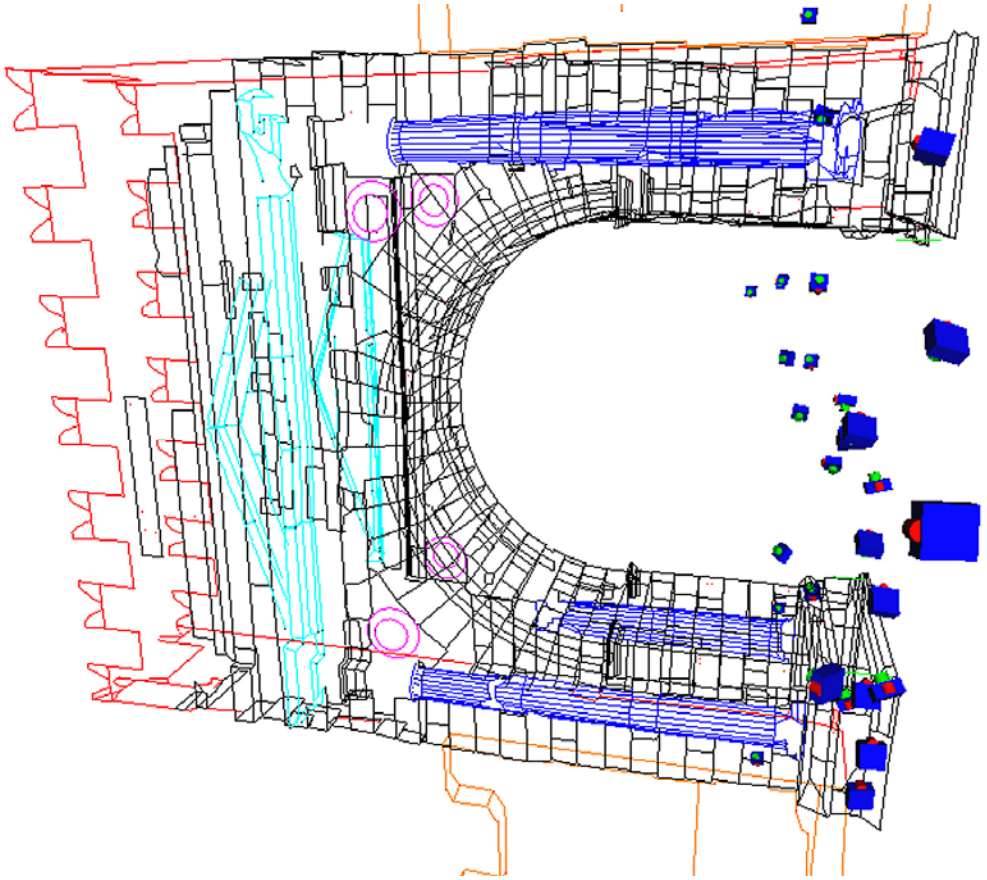


Figura 6.55 - Modello vettoriale dell'arco d'Augusto visto dalla fotocamera n. 38.

Figura 6.56 - Presa n. 38 con sovrapposto il modello vettoriale dell'arco.

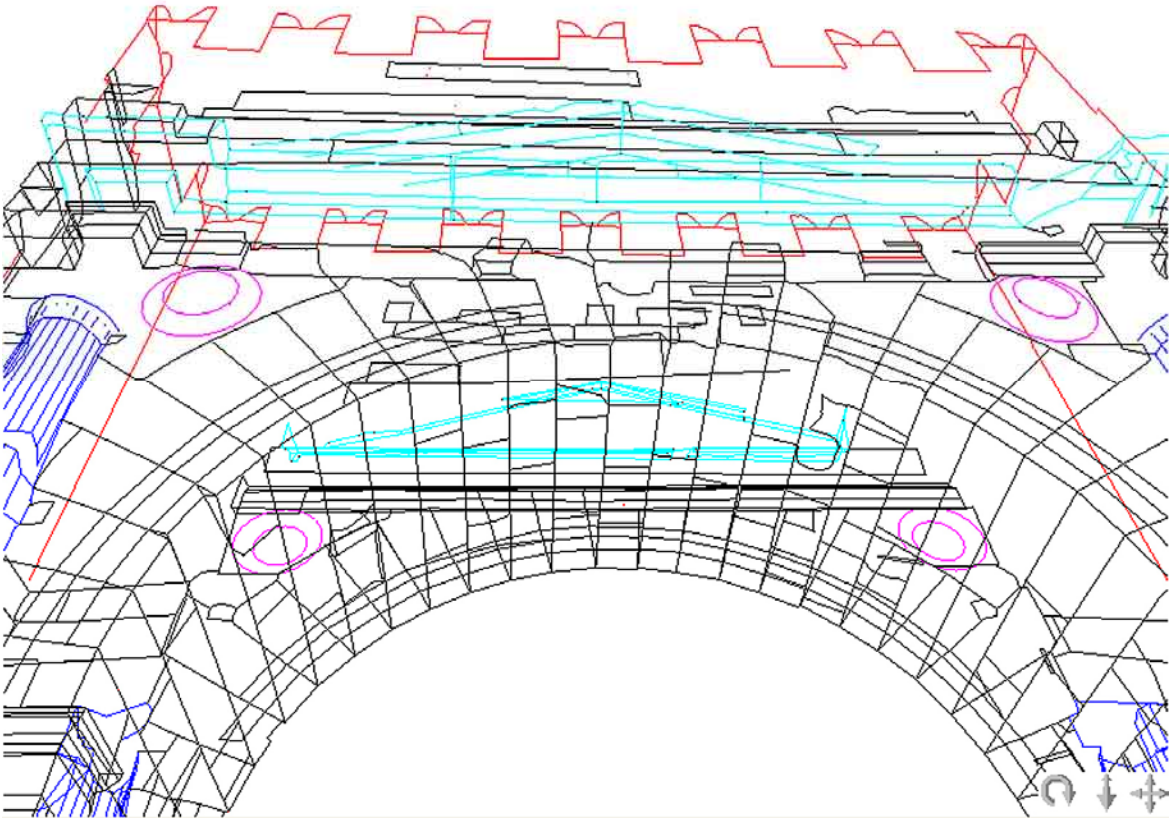


Figura 6.57 - Modello vettoriale dell'arco d'Augusto visto dalla fotocamera n. 21.

Figura 6.58 - Presa n. 21 con sovrapposto il modello vettoriale dell'arco.

Figura 6.59 - Presa n. 28 con sovrapposto il modello vettoriale dell'arco.

Figura 6.60 – Presa n. 29 con sovrapposto il modello vettoriale dell'arco.

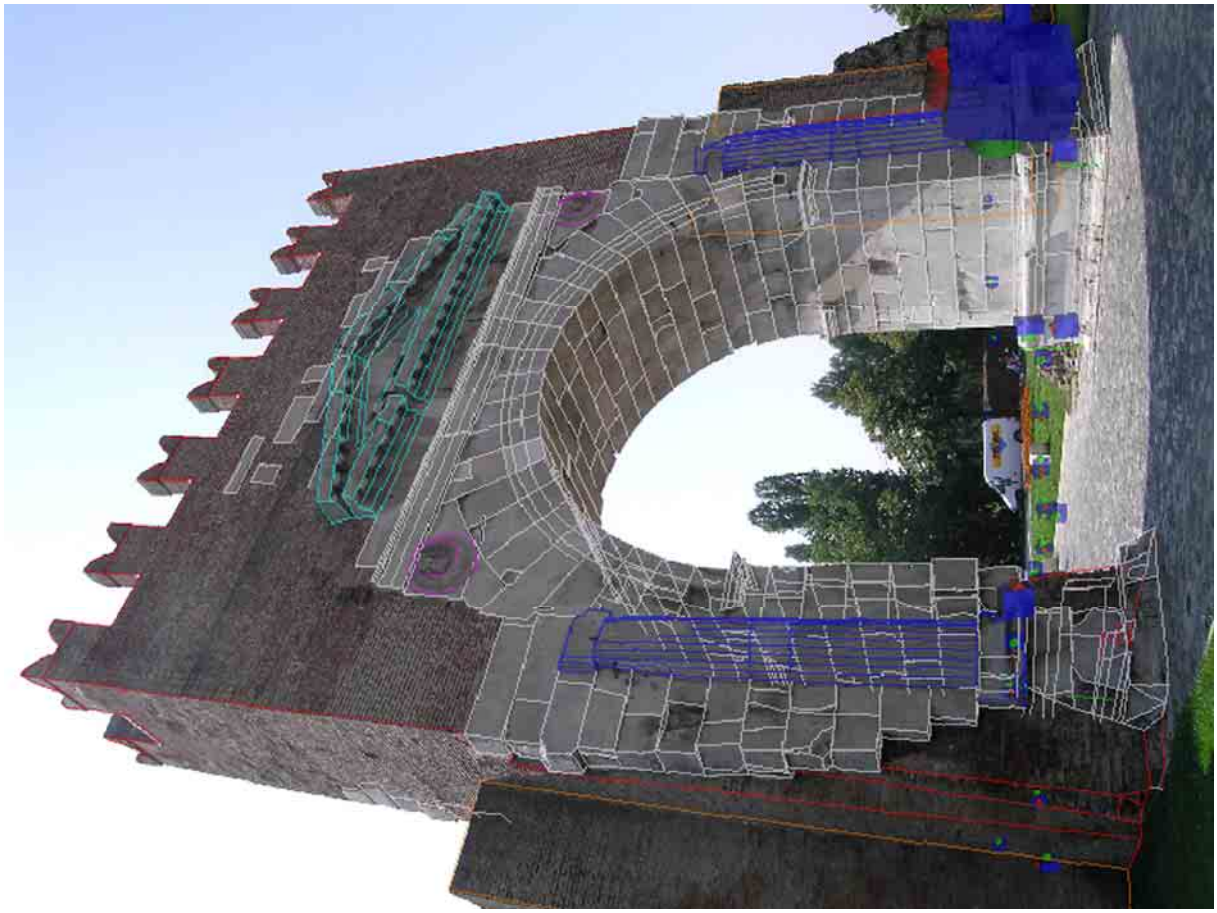


Figura 6.61 - Presa n. 31 con sovrapposto il modello vettoriale dell'arco.

Figura 6.62 - Presa n. 22 con sovrapposto il modello vettoriale dell'arco.

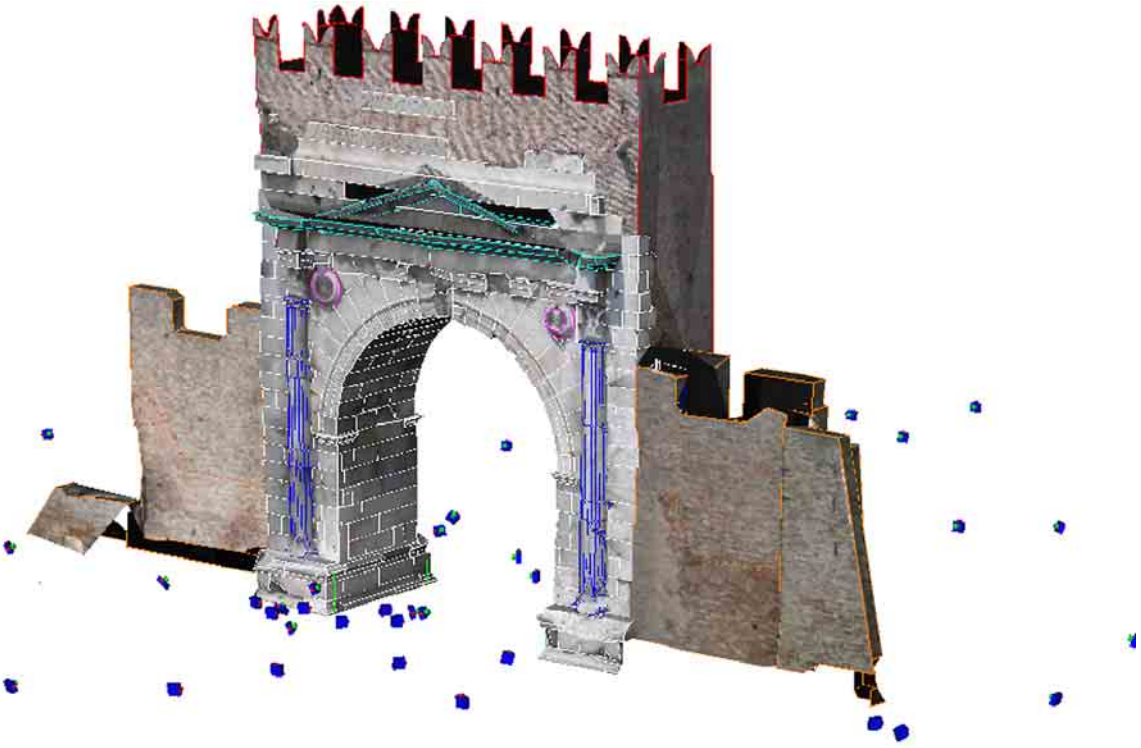


Figura 6.63 - DSM dell'arco con textures fotografiche e sovrapposto il modello vettoriale. L'immagine riportata qui sopra raffigura l'arco in proiezione prospettica con punto di vista a lato mare-periferia.

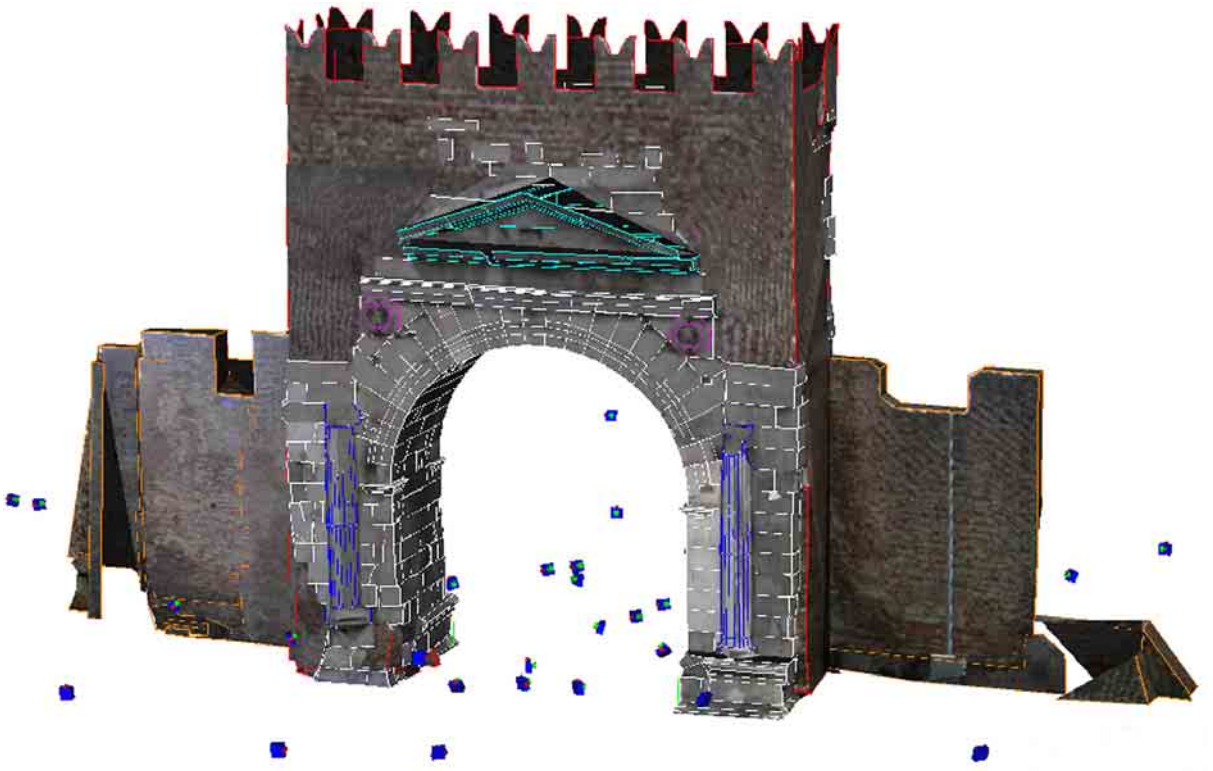


Figura 6.64 - DSM dell'arco con textures fotografiche e sovrapposto il modello vettoriale. L'immagine riportata qui sopra raffigura l'arco in proiezione prospettica con punto di vista a lato monte-città.

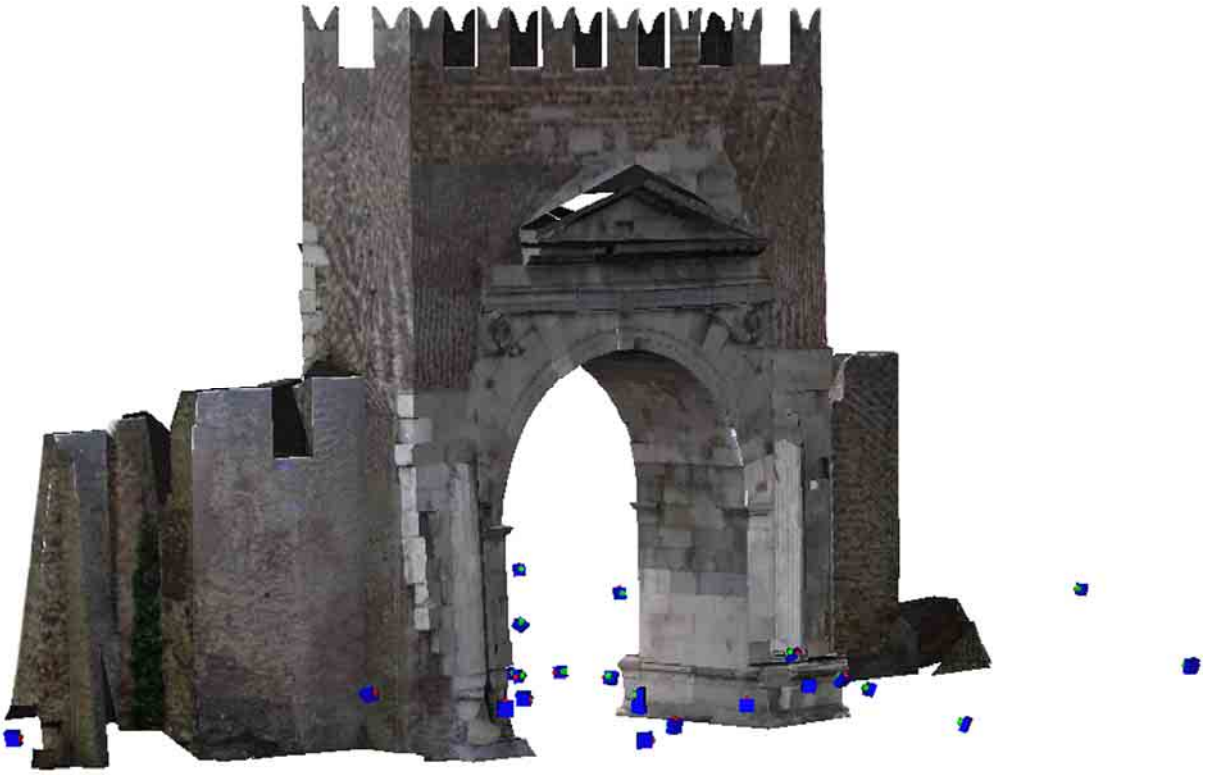


Figura 6.65 – DSM dell'arco con textures fotografiche visto in proiezione prospettica da lato mare-città.

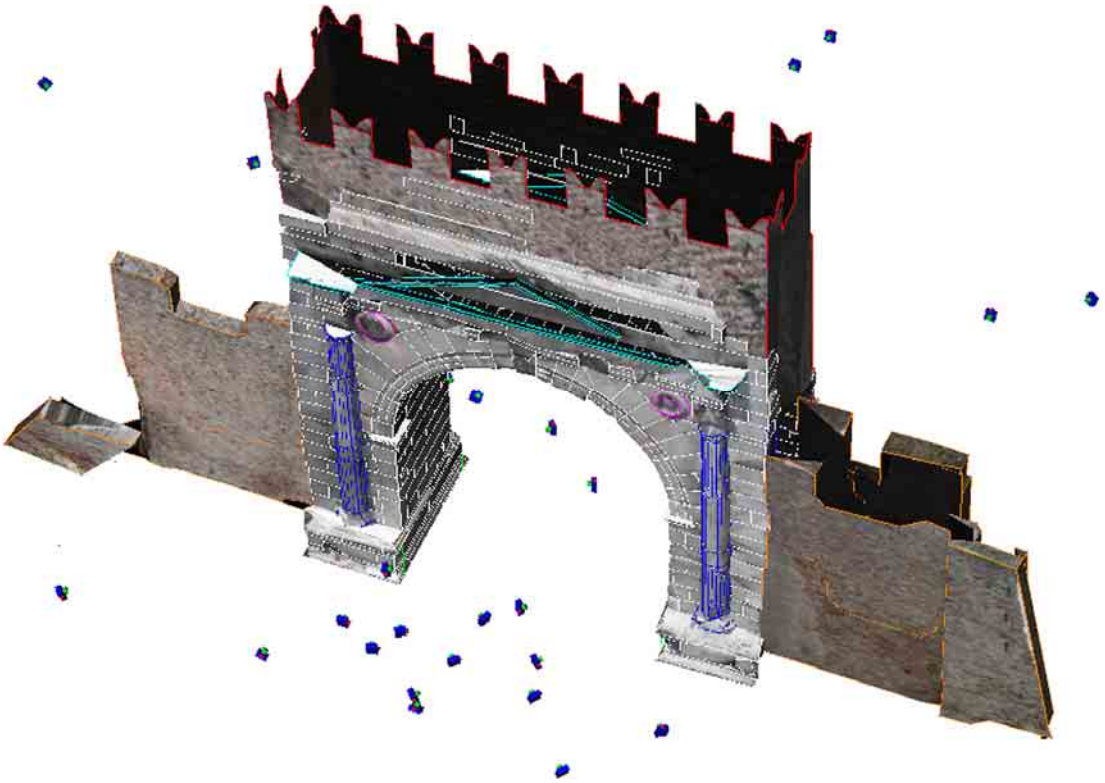


Figura 6.66 - DSM dell'arco con textures fotografiche e sovrapposto il modello vettoriale. L'immagine riportata qui sopra raffigura l'arco in proiezione prospettica con punto di vista a lato mare-città.

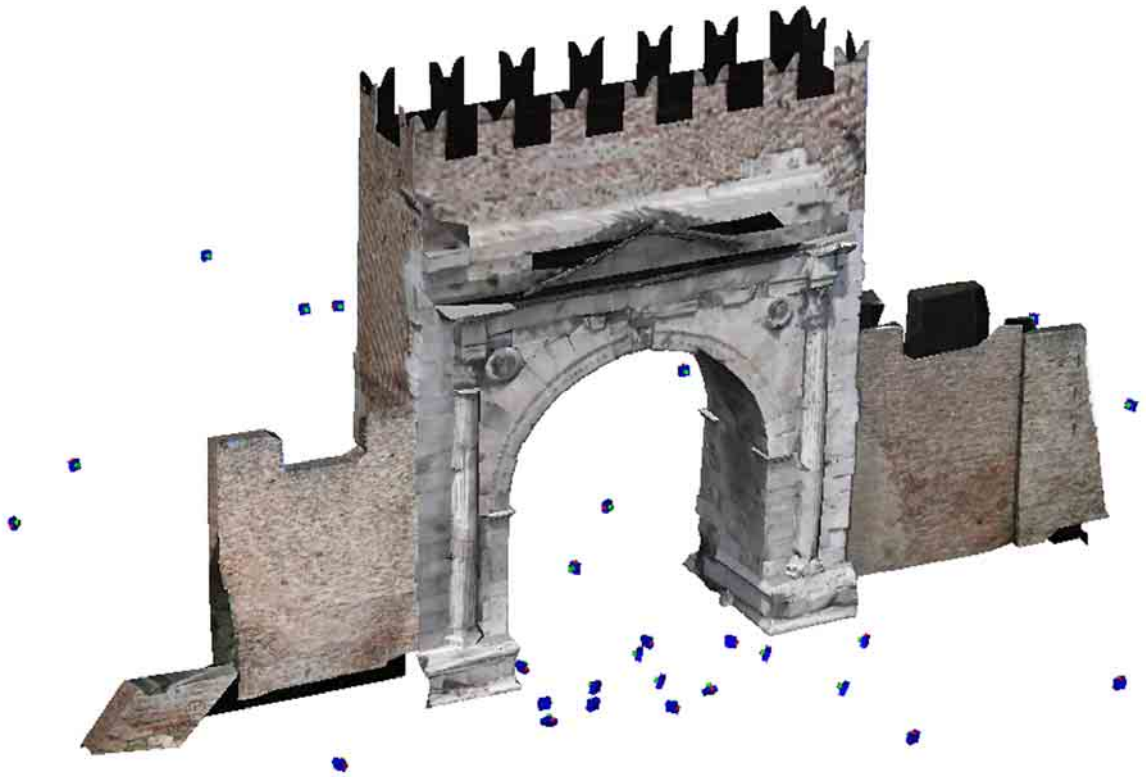


Figura 6.67 - DSM dell'arco con textures fotografiche visto in proiezione prospettica da lato monte-periferia.

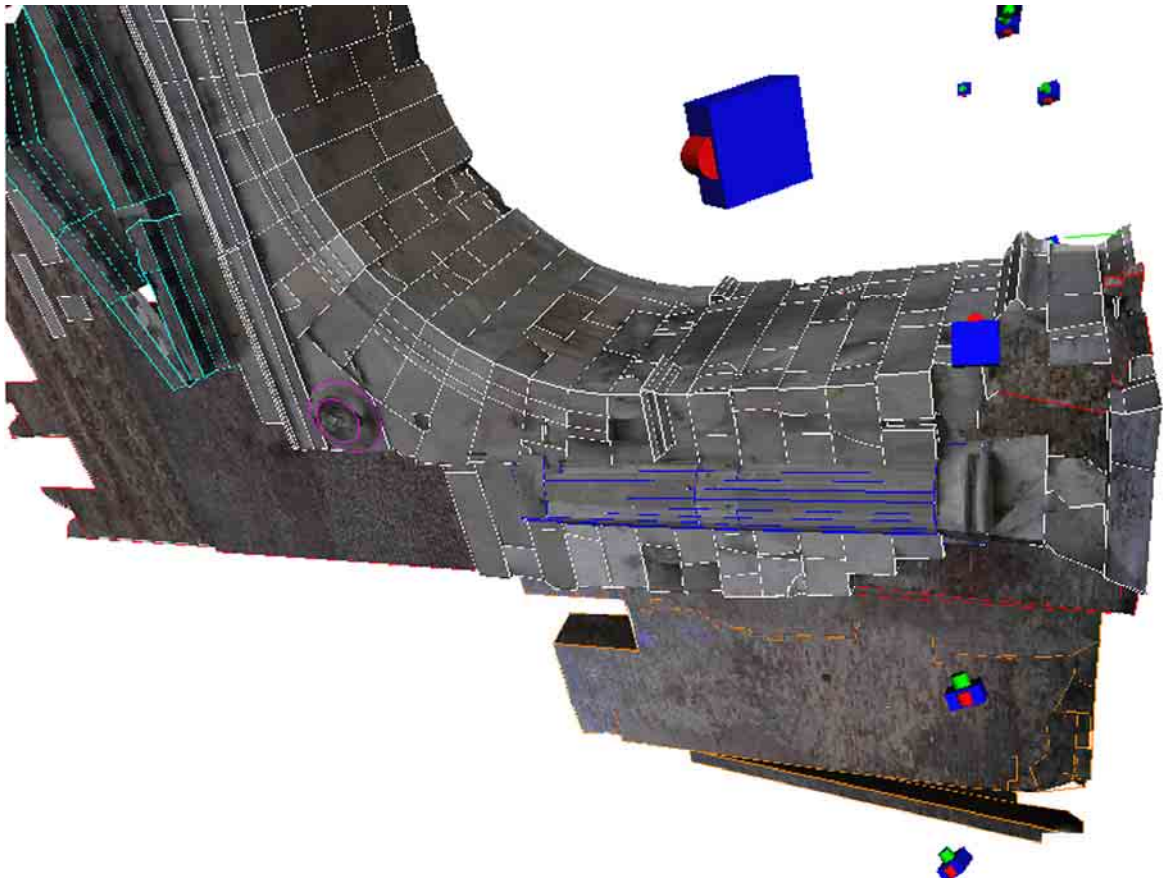


Figura 6.68 – DSM dell'arco con textures fotografiche e sovrapposto il modello vettoriale. L'immagine riportata qui sopra rappresenta il modello visto dalla fotocamera n. 10.

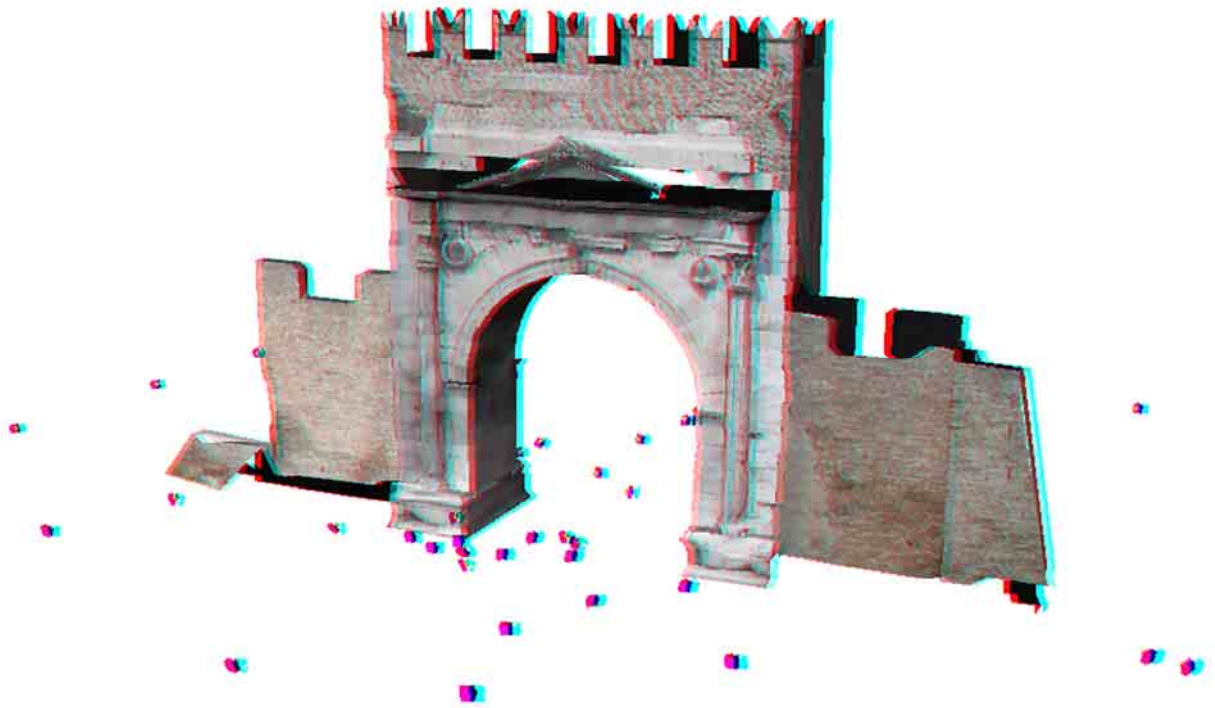


Figura 6.69 – DSM dell'arco con textures fotografiche stampato con la tecnica dell'anaglife. Questa immagine può diventare un modello stereoscopico per mezzo di una visione attraverso occhiali con appositi filtri.

### *6.3.2 Dalla restituzione vettoriale 3D agli elaborati grafici 2D*

Il prodotto che si ottiene in output dalla restituzione è sempre un elaborato tridimensionale, che è sempre molto efficiente dal punto di vista della perfetta comprensione formale e metrica dell'oggetto, ma non si presta ad una facile consultazione ed interpretazione sulla superficie di una carta stampata. L'elaborato grafico digitale 3D è molto importante per ottenere dei dati metrici veramente precisi ed è pregiato anche per il fatto di non subire gli attacchi del tempo che invece affliggono le carte stampate, le quali possono anche soffrire di variazioni di scala, falsando così la rappresentazione che vi è sopra impressa. Generalmente si richiedono quindi entrambi i prodotti: sia le rappresentazioni grafiche 2D che l'elaborato digitale 3D.

Per attuare la trasformazione del rilievo tridimensionale in un rilievo bidimensionale si è esportato l'intero modello digitale dell'arco nel formato .DXF, formato leggibile da moltissimi software di grafica, fra i quali anche AutoCAD. Proprio quest'ultimo software è stato

impiegato per attuare la trasformazione dal 3D al 2D e realizzare delle tavole di disegno in cui venissero riportati di volta in volta vari particolari architettonici del monumento rilevato.

Per eseguire tutte le operazioni di esportazione del file PhotoModeler ( .pmr ) in altri tipi di file viene in aiuto il tasto funzione *"Export Model"* situato sotto la voce *"File"*. Tramite esso si può scegliere il formato del file di destinazione, gli elementi geometrici che si vogliono esportare e con quali caratteristiche.

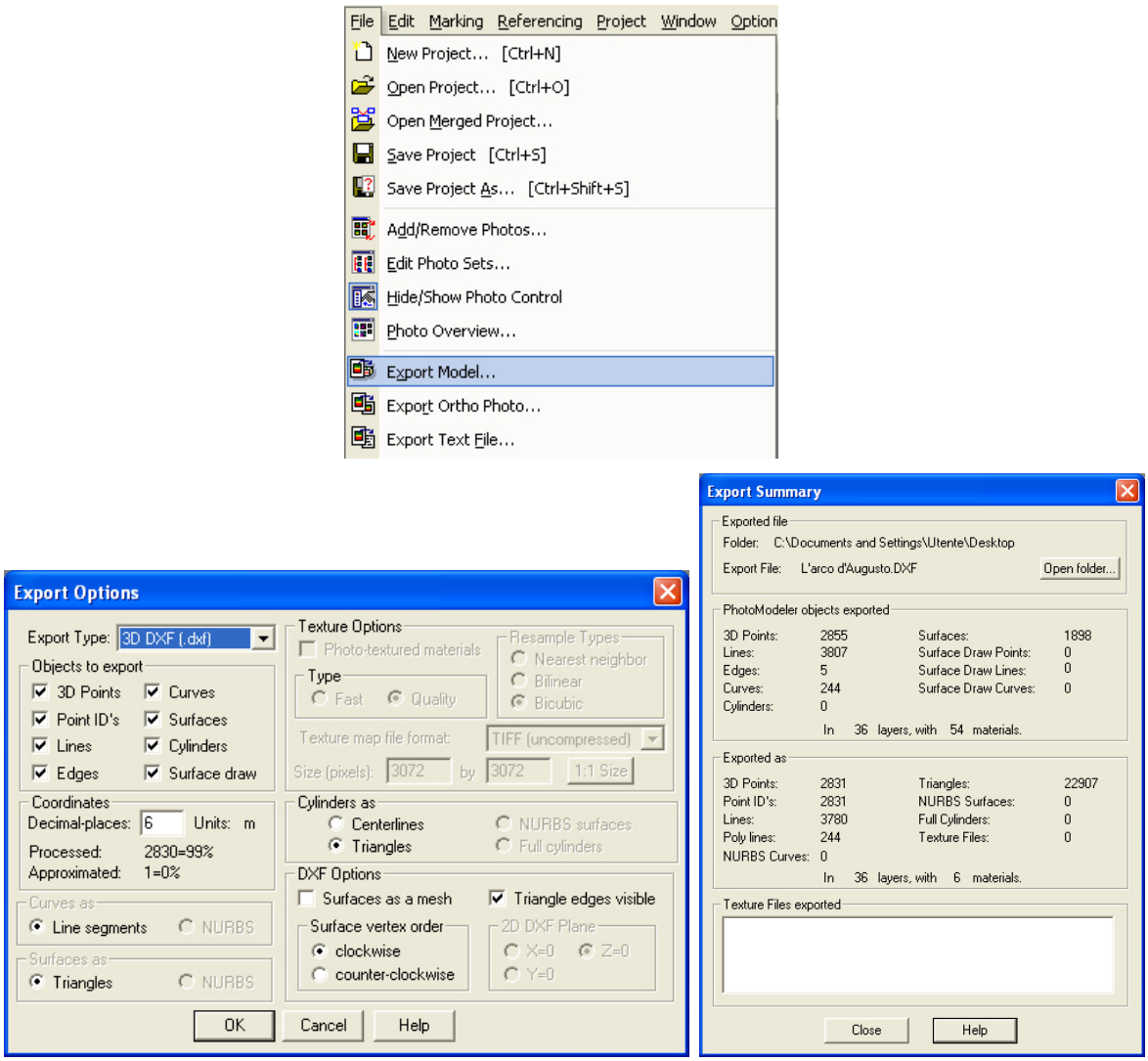



Figura 6.70 – La funzione *"Export Model"* e le finestre di comandi ad essa associata.

Dalla figura 6.70 è possibile notare che il modello esportato nel formato .DXF contiene 2831 punti, 3780 linee, 244 polilinee e 22907 triangoli che vanno a definire il DSM dell'arco.

Ottenuto questo file 3D nel formato .DXF si è provveduto a trasformarlo in un disegno 2D attraverso l'applicazione "Flatten" contenuta nel software AutoCAD, che proietta qualunque rappresentazione 3D sul piano Oxy.
Di volta in volta sono stati selezionati i layers da proiettare e trasformare in file 2D ottenendo così i due prospetti delle due facciate del monumento, una pianta dello stesso ed alcune sezioni e profili.
Per realizzare le sezioni è stato usato un apposito tool di AutoCAD, che permette di ricavare in maniera automatica delle sezioni da una rappresentazione tridimensionale.
Ottenute tutte le riproduzioni piane volute, tramite AutoCAD si sono aggiunte delle stringhe di testo e delle quote sugli elementi più importanti e particolari dell'arco; tale arricchimento grafico si è concluso con la realizzazione di otto tavole di grande formato in cui sono state riassunte tutte le rappresentazioni grafiche del monumento in scala variabile da 1:100 a 1:50. Tale scala è stata scelta proprio per contenere l'errore medio del rilievo ( circa 8 mm ) all'interno dell'errore di graficismo della rappresentazione grafica.

### 6.3.2.1 Tavola n. 1

"PROIEZIONI ORTOGONALI DELL'INTERO ARCO" SCALA 1:50
In questa prima tavola di disegno sono stati riportati, mediante diversi colori, tutti i livelli di restituzione. Inoltre tramite delle linee di colore rosso vengono anche evidenziate in quale modo sono state eseguite le sezioni riportate nella successiva tavola n. 2.
Nella tavola in questione l'arco è stato raffigurato nella sua interezza, con tutti i suoi particolari seguendo le regole della proiezione ortogonale, infatti è riportata una vista in pianta, un prospetto ed una vista laterale. Per completare il quadro raffigurativo e fornire un'idea della struttura rilevata nel suo complesso è stata riportata anche una rappresentazione tridimensionale in proiezione assonometrica.

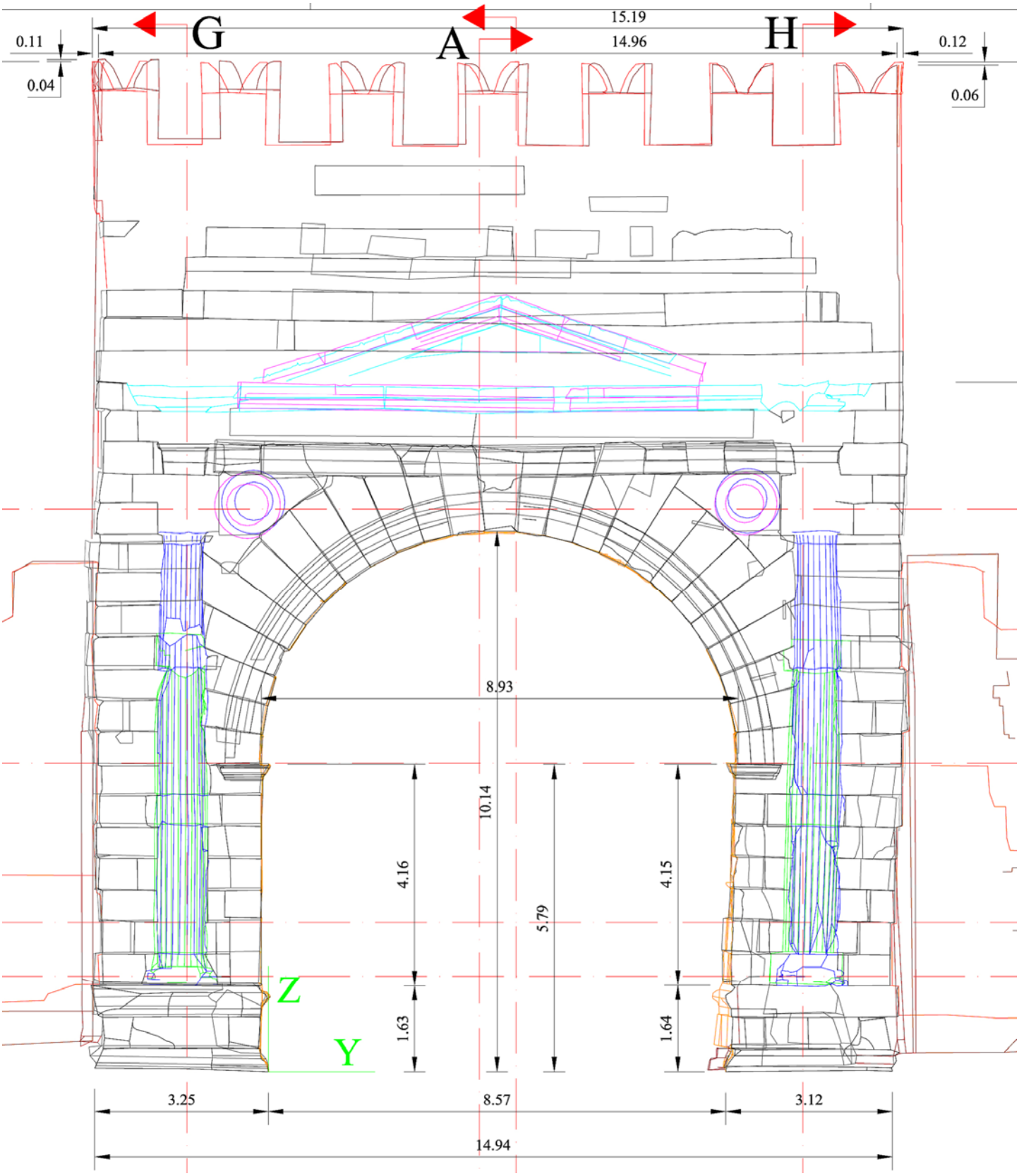



Figura 6.71 – Proiezione ortogonale frontale del modello vettoriale dell'arco. Scala 1:100
Questa rappresentazione è un estratto della tavola n. 1 in scala 1:50.

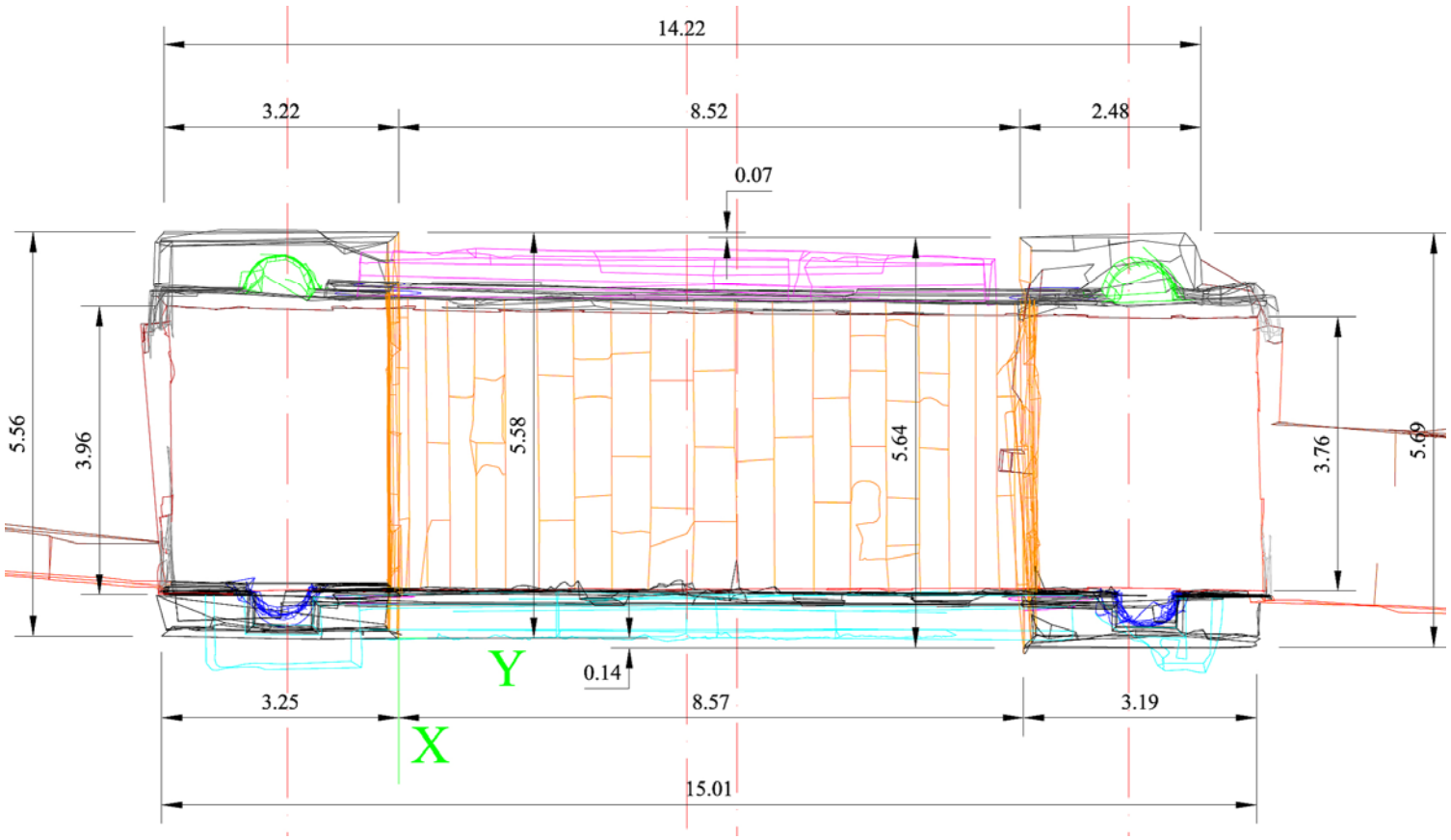



Figura 6.72 – Pianta dell'arco d'Augusto. Scala 1:100
Questa rappresentazione è un estratto della tavola n. 1 in scala 1:50.

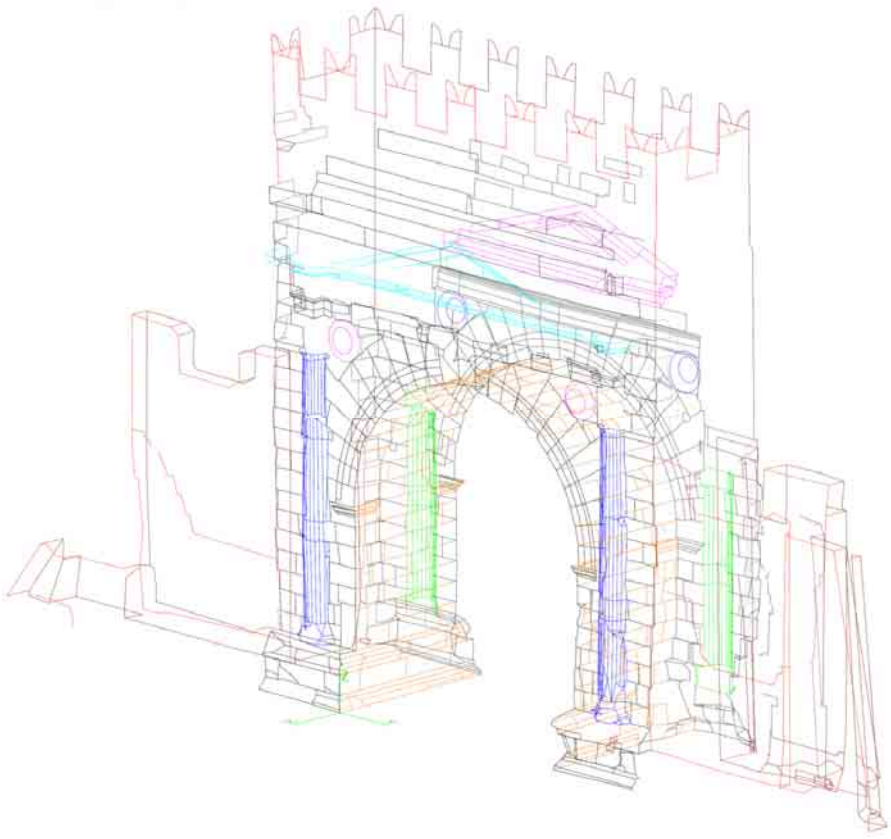


Figura 6.73 – Proiezione assonometrica dell'arco d'Augusto. Estratto dalla tavola n. 1

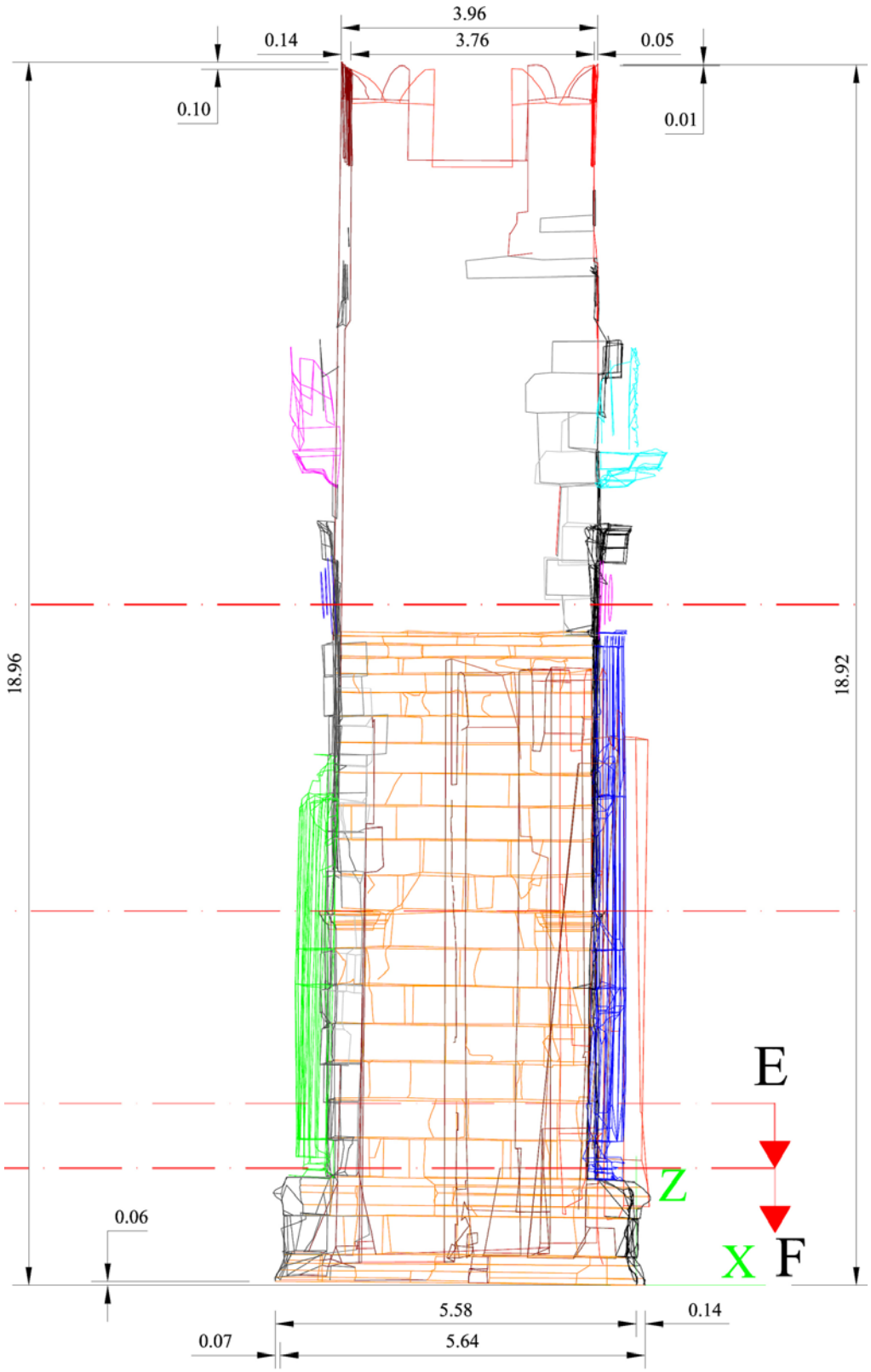



Figura 6.74 – Prospetto laterale dell'intero modello vettoriale dell'arco. Scala 1:100
Questa rappresentazione è un estratto della tavola n. 1 in scala 1:50.

Dall'analisi visiva di questa prima tavola si può notare come l'arco sia complessivamente verticale, nell'insieme non si notano pendenze e strapiombi molto accentuati; nelle successive tavole più dettagliate è invece possibile notare qualche sganciamento, strapiombo, disallineamento e deformazioni varie che però si manifestano solamente in maniera localizzata in certi punti della struttura.

Analizzando il prospetto del monumento ( figura 6.71 ) ci si accorge che su di questo piano Ozy l'arco è sostanzialmente non ruotato, ovvero non si notano pendenze dello stesso nella direzione Y, difatti osservando i merletti si nota che le differenze di quota fra le punte è solamente di qualche centimetro, toppo poco per suggerire una qualche pendenza. Che l'arco non possegga pendenze nella direzione Y lo si può anche comprendere dall'orizzontalità del piano d'imposta dell'arcata, visibile proprio nel prospetto.

Osservando il piedritto a lato mare ( quello a destra nella figura 6.71 ) ci si accorge che esso risulta notevolmente deformato rispetto al suo gemello a lato monte, infatti il pilone è ruotato sia nel piano Ozy che nel piano Oxy. La rotazione nel piano Ozy è riscontrabile dal fatto che la luce del fornice diminuisce di circa 13 cm andando dal piano d'imposta fino al piano di base delle semicolonne ( misura sul prospetto verso la periferia ). La rotazione sul piano Oxy ( rotazione attorno all'asse Z ) del piedritto a mare è invece possibile individuarla attraverso la visibilità di una porzione arancione ( livello di restituzione dell'arcata ) che sporge dal piano medio dell'intradosso dell'arcata. Tale fenomeno di rotazione risulta meglio visibile dalla rappresentazione in pianta di figura 6.72. Da questa proiezione dall'alto è poi anche possibile osservare un disallineamento fra i due piedritti che può essere mediamente valutato attorno ai 10 cm.

Dalla proiezione laterale di figura 6.74 invece il particolare più evidente che emerge è la rotazione del piano di base dei piedritti attorno all'asse Y, valutabile in circa 6 cm sullo spessore dell'arco.

Sempre nella proiezione laterale di figura 6.74 è anche possibile notare qualche strapiombo sulle due superfici dei frontoni dell'arco, in particolare sulla facciata verso l'interno della città ( lato sinistro nella figura 6.74 ).
Ritornando al prospetto di figura 6.71 e concentrandosi sull'intradosso dell'arcata si può osservare che la linea generatrice dell'arco si mantiene sempre sub-orizzontale, infatti l'intradosso dell'arco nel fronte verso periferia coincide esattamente all'intradosso dell'arco del fronte verso la città ( la curva arancione coincide esattamente con quella nera ). Questo fatto non risulta più vero nel piedritto di sinistra ( a lato mare ), questo accade per il motivo di rotazione descritto precedentemente. La causa della malformazione che affligge il piedritto a lato mare è da ricercare nell'esplosione di una mina fatta brillare dai tedeschi nel 1944. Tale ordigno esplosivo era stato piazzato alla base del piedritto in questione, nel fronte interno alla città. Tuttora i segni lasciati dalla deflagrazione sono molto evidenti.
Osservando lo sviluppo dell'intradosso dell'arcata nella figura 6.71 si può constatare che questo non disegna un semicerchio esatto, infatti la freccia dell'arco misura 4,35 m, mentre la sua luce è di 8,93 m; il concio in chiave dell'arco risulta ribassato di circa 11,5 cm rispetto all'ideale arco a tutto sesto.

### 6.3.2.2 Tavola n. 2

"SEZIONI VERTICALI ED ORIZZONTALI" SCALA 1:50
In questa tavola sono riportate alcune significative sezioni dell'arco d'Augusto ottenute con piani orizzontali e piani verticali.
Rispetto alla tavola precedente, in questa rappresentazione grafica è possibile osservare dei dettagli più minuti e localizzati della struttura. In particolare si possono notare il disassamento dei piedritti, di cui si era già accennato nella tavola n. 1, e lo strapiombo della facciata rivolta verso l'interno della città.

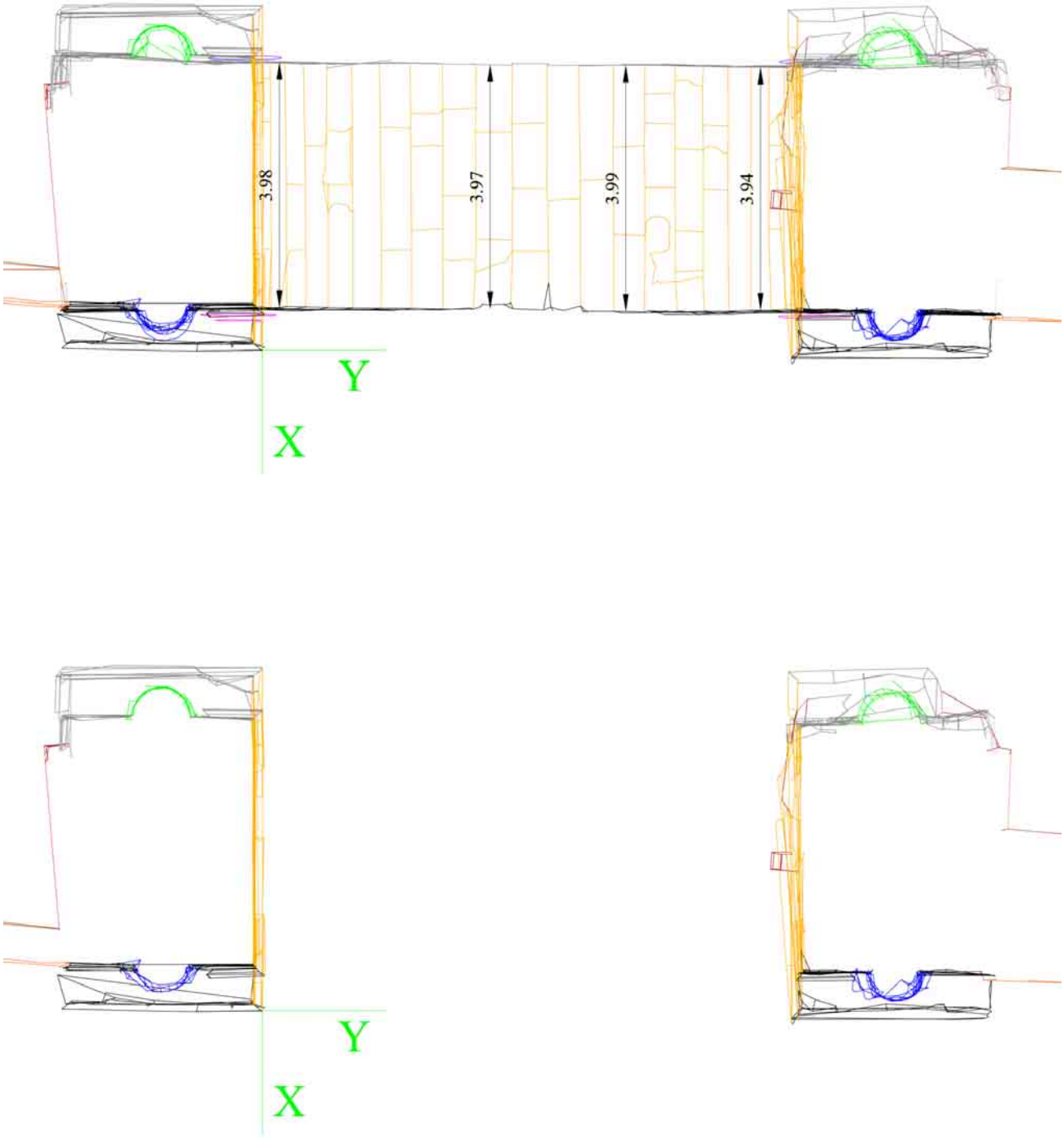



Figura 6.75 – Sezioni C-C e D-D dell'arco d'Augusto di Rimini. Scala 1:100
Questa rappresentazione è un estratto della tavola n. 2 in scala 1:50.

La prima raffigurazione in alto si riferisce alla sezione C-C, mentre la seconda in basso è riferita alla sezione D-D.

Dalla sezione C-C è possibile notare come l'arcata non sia perfettamente retta ma tale volta cilindrica risulta un po' obliqua, difatti la proiezione della volta invece di formare un rettangolo forma un parallelogramma. Questo fenomeno è da imputare al disallineamento dei piedritti.

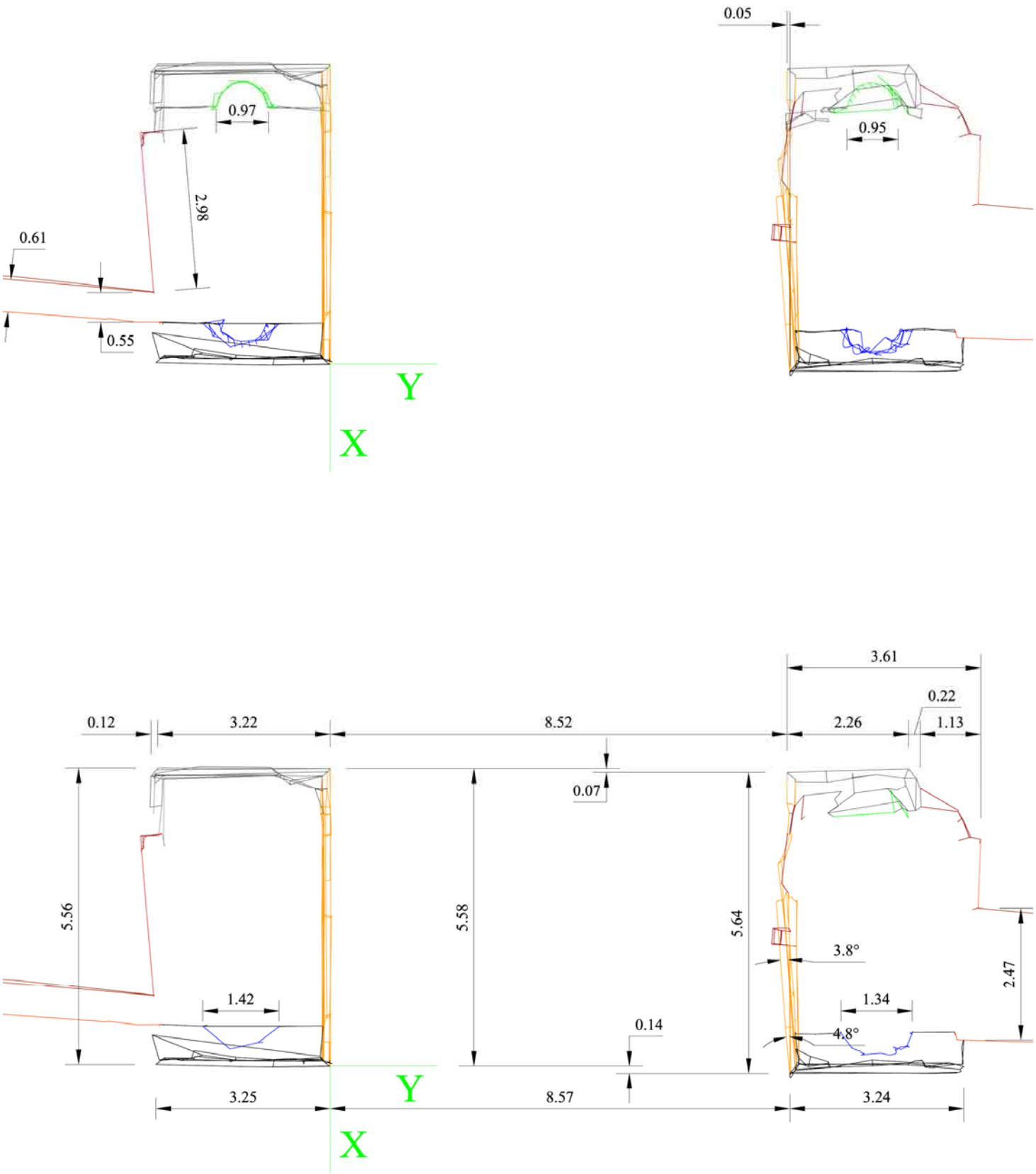



Figura 6.76 – Sezioni E-E ed F-F dell'arco d'Augusto di Rimini. Scala 1:100

Questa rappresentazione è un estratto della tavola n. 2 in scala 1:50.

La prima raffigurazione in alto si riferisce alla sezione E-E, mentre la seconda in basso è riferita alla sezione F-F.

Nella sezione F-F è possibile notare molto bene sia la rotazione del piedritto a lato mare ( a destra ) sia il disallineamento fra i due piedritti, valutabile mediamente attorno ai 10 cm.

Osservando la sezione C-C in figura 6.75 si può constatare che la volta cilindrica formata dall'arco non è perfettamente retta, ma risulta una volta un po' obliqua, infatti la proiezione della stessa sul piano orizzontale va a formare un parallelogramma, invece del regolare rettangolo. Questo fenomeno può essere piegato attraverso il disallineamento dei due piedritti, meglio visibile nella sezione F-F di figura 6.76, il valore medio di questa malformazione può essere considerato una media fra i 7 e 14 cm, quindi circa 10-11 cm.
Sempre dalla stessa sezione F-F è anche possibile riscontrare molto chiaramente la rotazione attorno all'asse Z della base del piedritto a lato mare ( quello di destra ), questa rotazione è molto pronunciata in prossimità del terreno, ma man mano che si sale di quota la superficie verso l'interno dell'arco del piedritto in questione tende a riassestarsi alla naturale geometria. Si ha cioè una sorta di rotazione localizzata del piedritto che tende ad annullarsi salendo in quota, fino a ritornare quasi alla sua originaria geometria in prossimità del piano d'imposta dell'arco.
Analizzando ora le sezioni verticali ed in particolare la sez. G-G e B-B di figura 6.77 si riscontrano alcuni strapiombi, nella sez. G-G è possibile ad esempio vedere lo strapiombo del fronte dell'arco rivolto verso la città ( a destra ); in particolare il fronte verso Rimini sembra "cadere" verso la periferia, il fenomeno di strapiombo pare però appartenere solamente alla superficie muraria posta sulla sommità del monumento, difatti il paramento lapideo del fronte verso Rimini sale uniformemente senza strapiombi. Nonostante questa non verticalità della superficie laterizia posta verso Rimini non si riscontra una generale pendenza dell'intero arco verso la periferia, infatti le quote delle punte di tutti i merletti sono all'incirca uguali, oltretutto il fronte verso Roma ( quello a sinistra nella sez. G-G ) non presenta strapiombi. Altra particolarità che si può notare nella sezione B-B è la malformazione delle semicolonne di decoro.

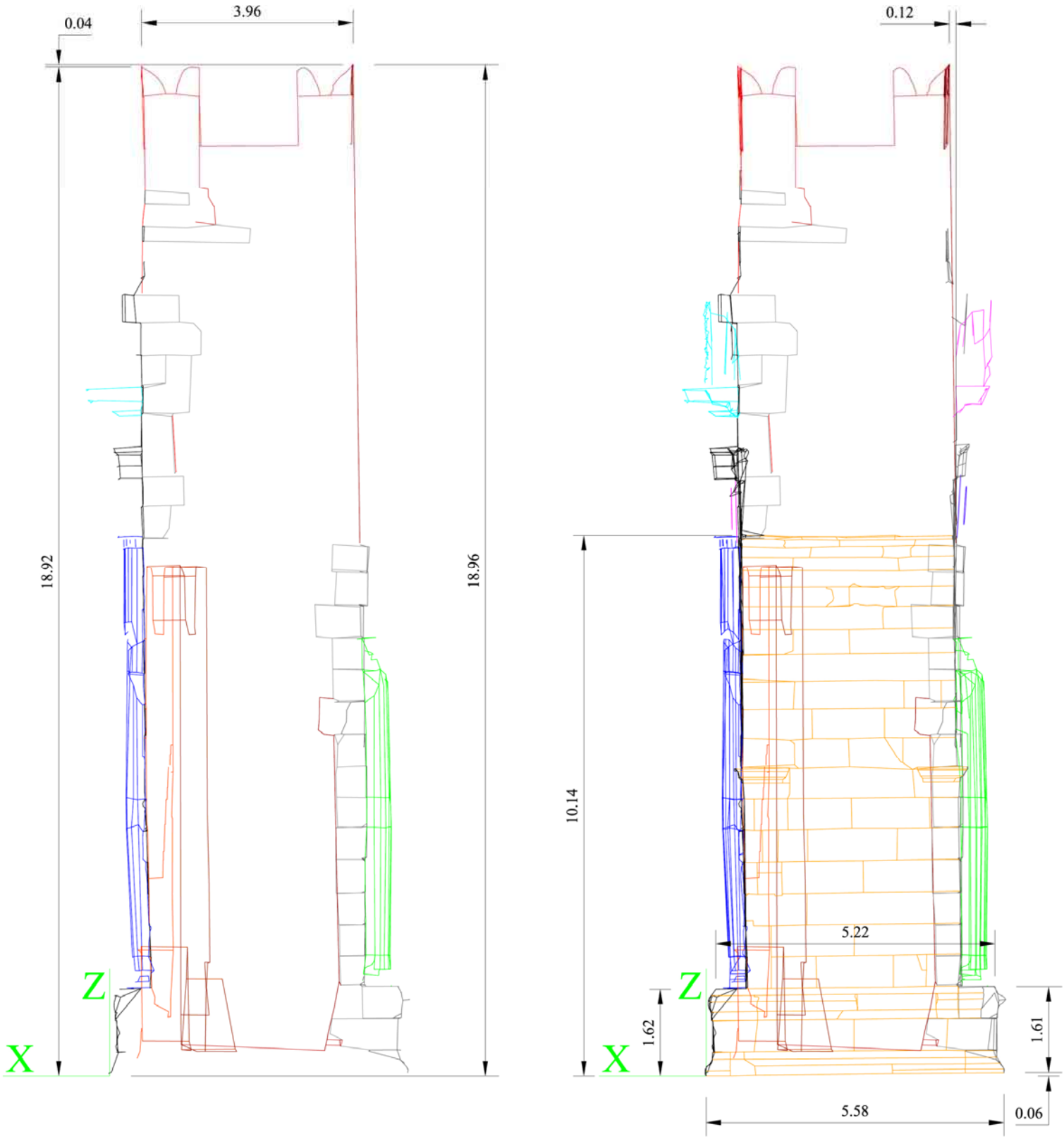



Figura 6.77 – Sezioni G-G e B-B dell'arco d'Augusto di Rimini. Scala 1:100
Questa rappresentazione è un estratto della tavola n. 2 in scala 1:50.
La prima raffigurazione a sinistra si riferisce alla sezione G-G, mentre la seconda a destra è riferita alla sezione B-B.

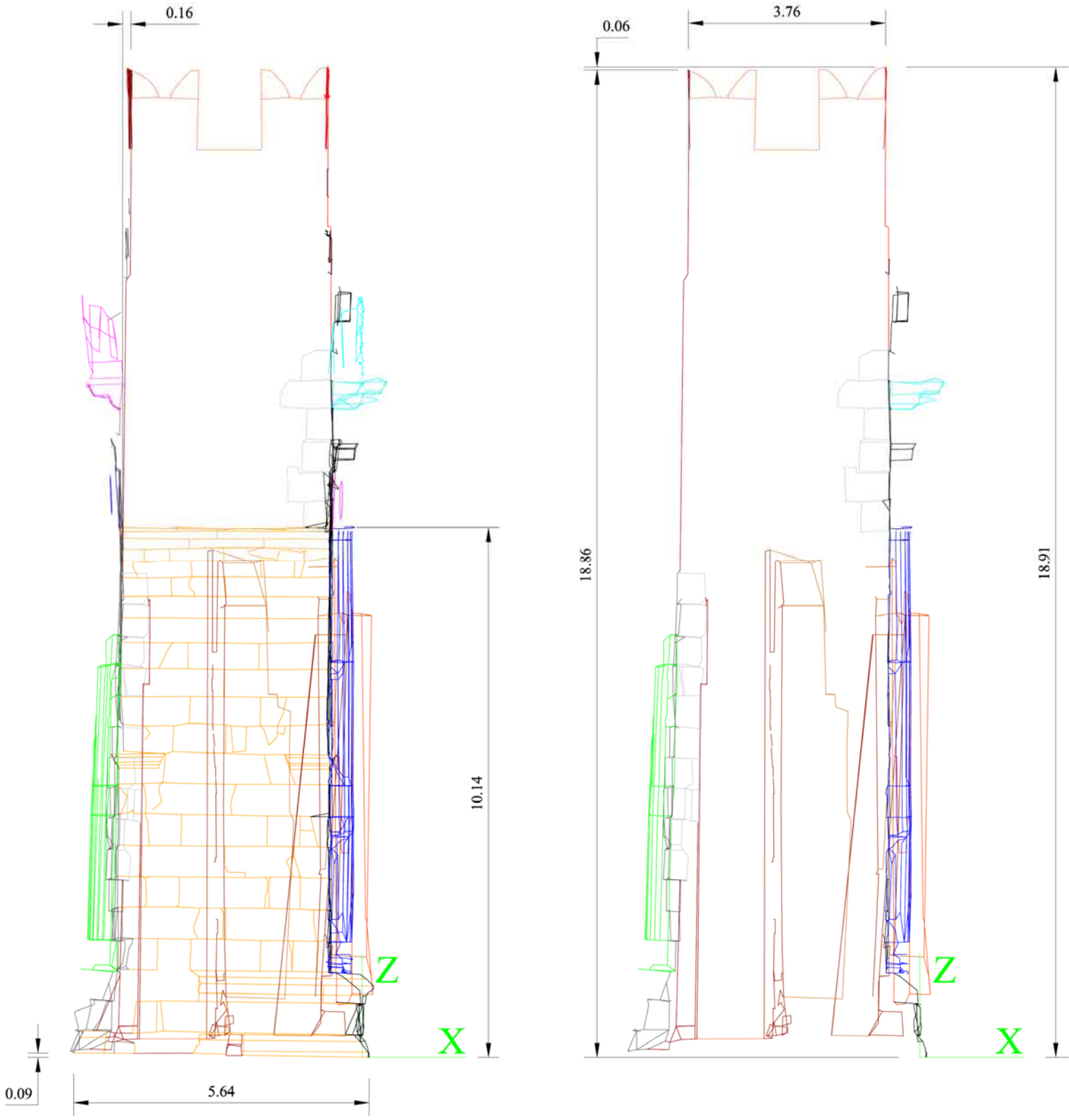



Figura 6.78 – Sezioni A-A e H-H dell'arco d'Augusto di Rimini. Scala 1:100
Questa rappresentazione è un estratto della tavola n. 2 in scala 1:50.
La prima raffigurazione a sinistra si riferisce alla sezione A-A, mentre la seconda a destra è riferita alla sezione H-H.

Altro particolare degno di nota che si osserva nella sezione B-B di figura 6.77 è la rotazione attorno all'asse Y del piano di posa dei piedritti, tale rotazione si evince dalla differenza di quota valutabile in circa 6-9 cm fra il terreno verso Rimini e quello verso la periferia. Osservando il piano su cui poggiano le semicolonne si comprende che tale piano non risulta orizzontale, quindi la differenza di quota di cui si è parlato non può essere imputata ad un diverso livello del terreno o infossamento di una parte di piedritto, la base dell'arco risulta realmente ruotata in senso orario attorno all'asse Y. Questo fenomeno di rotazione dovrebbe far pendere l'intero monumento verso la periferia della città, ma ciò non accade, infatti se la base della struttura risulta così ruotata, questo non si può dire per l'intero arco. La spiegazione sta nel fatto che, man mano che si sale di quota la rotazione che si vede alla base tende ad annullarsi, è come se l'arco abbia cercato di correggere la sua postura errata.
Dalla sezione H-H di figura 6.78 è visibile un altro interessante particolare: la semicolonna a lato mare-città, con assieme il paramento lapideo adiacente risultano fortemente pendenti verso la periferia, la stessa cosa accade per il già citato paramento laterizio sulla sommità dell'arco.

### 6.3.2.3 Tavola n. 3

"PROIEZIONI ORTOGONALI DELL'INTRADOSSO DELL'ARCATA" SCALA 1:50

In questa tavola è raffigurato l'intradosso dell'arcata dell'arco d'Augusto in proiezione ortogonale: è riportata una pianta, un prospetto frontale ed un prospetto laterale. Per rendere migliore la comprensione della struttura è stata anche disegnata una proiezione assonometrica della stessa.
Dal prospetto frontale di figura 6.79 è ben visibile quanto già detto in precedenza: si nota senza ombra di dubbio la rotazione del piedritto.

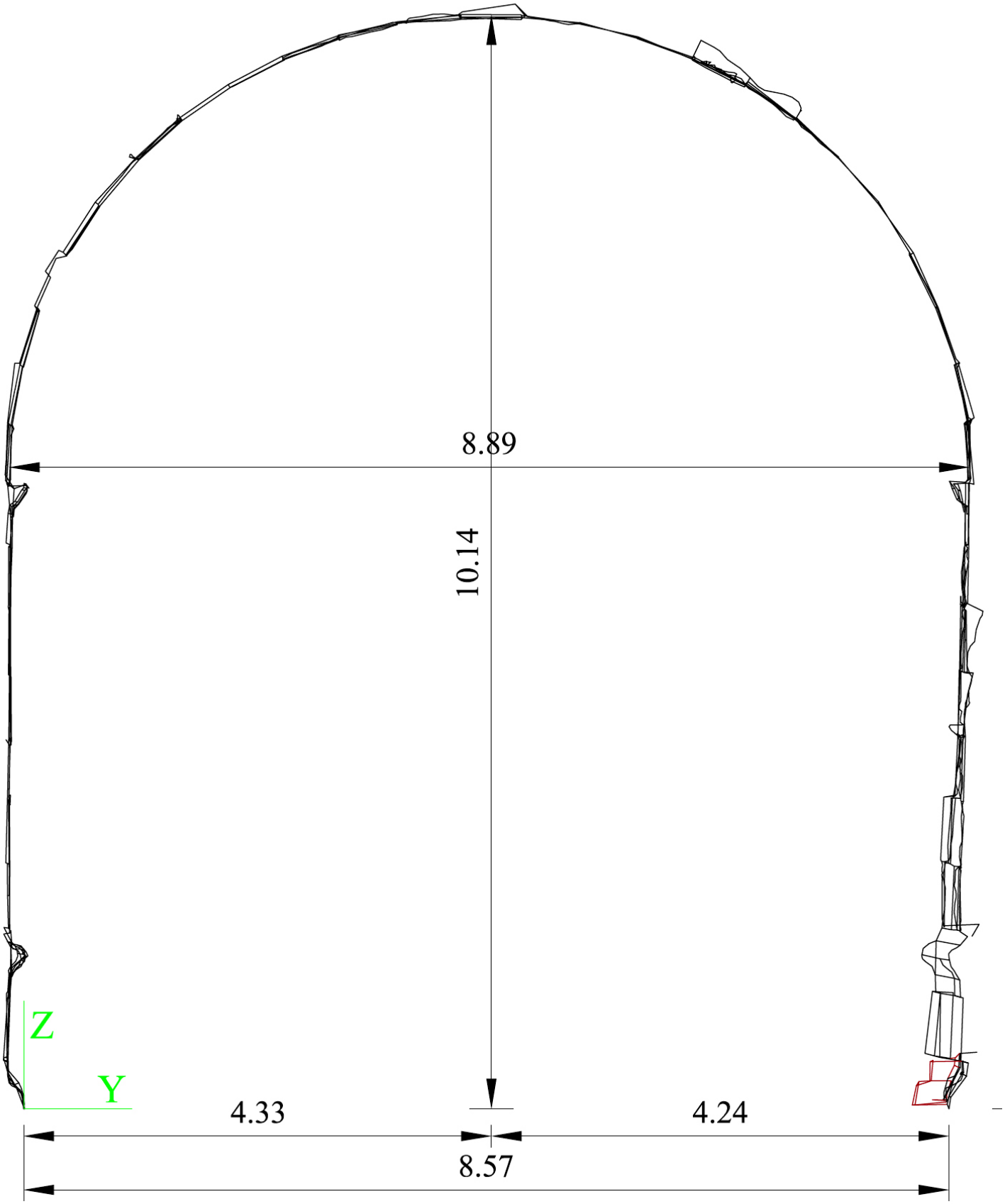



Figura 6.79 – Prospetto frontale dell'intradosso dell'arcata. Scala 1:50.
Questa rappresentazione è un estratto della tavola n. 3 in scala 1:50.
Ben visibile in questo disegno è la rotazione del piedritto a lato mare ( a destra ).

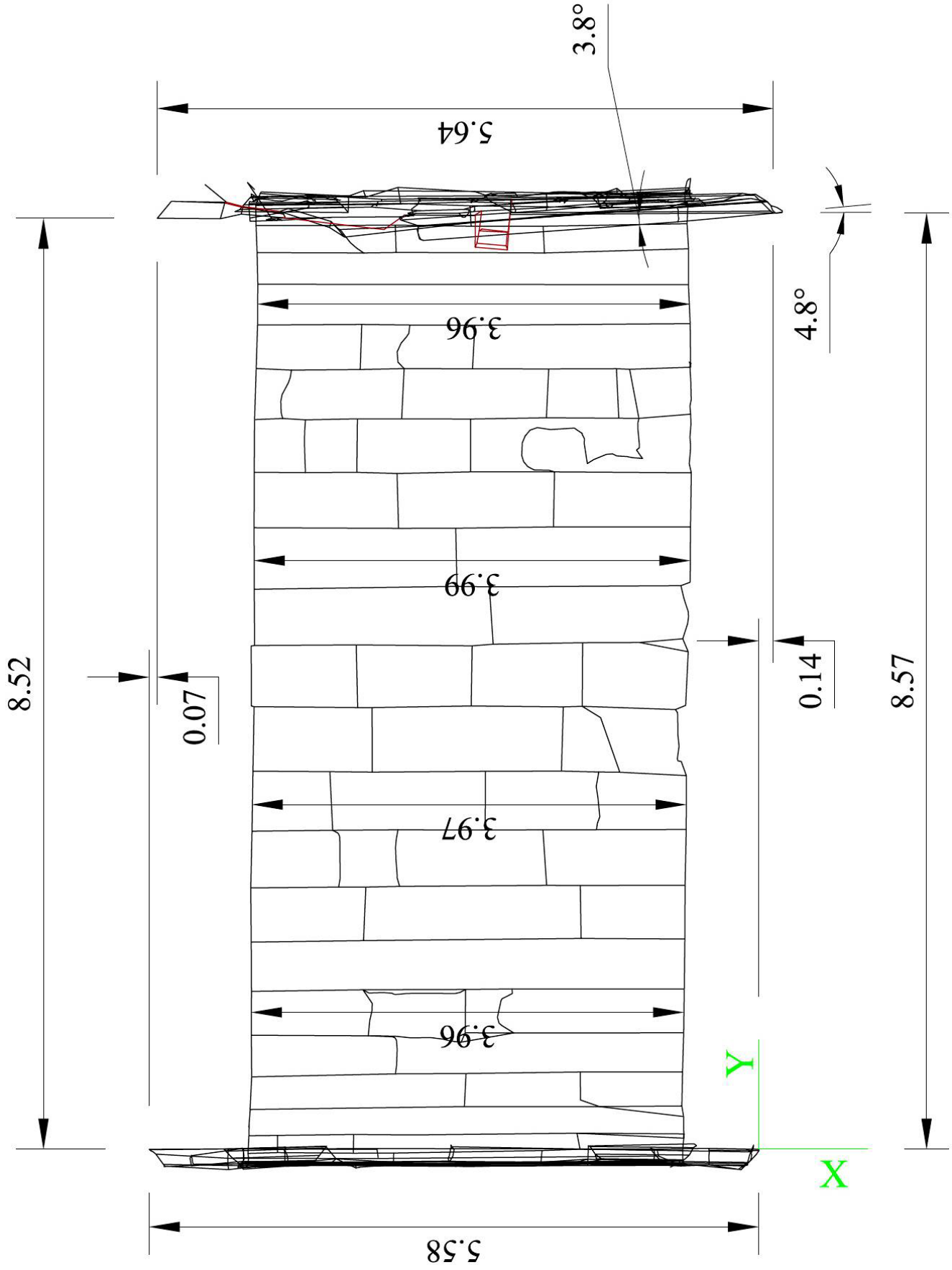



Figura 6.80 – Pianta dell'intradosso dell'arcata. Scala 1.50.
Questa rappresentazione è un estratto della tavola n. 3 in scala 1:50.

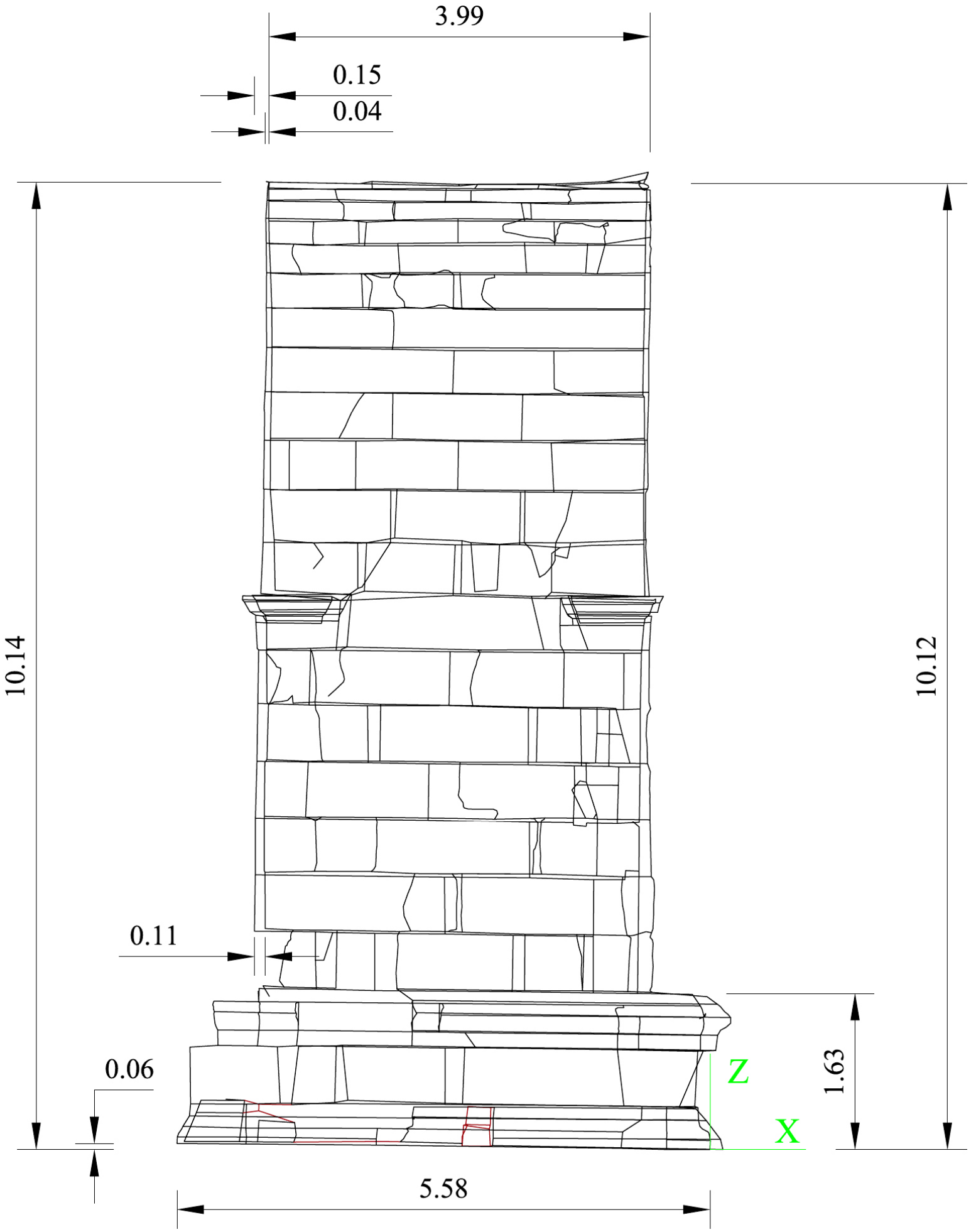

3.99
0.15
0.04
10.14
10.12
0.11
0.06
1.63
Z
X
5.58

Figura 6.81 – Prospetto laterale dell'intradosso dell'arcata. Scala 1:50
Questa rappresentazione è un estratto della tavola n. 3 in scala 1:50.

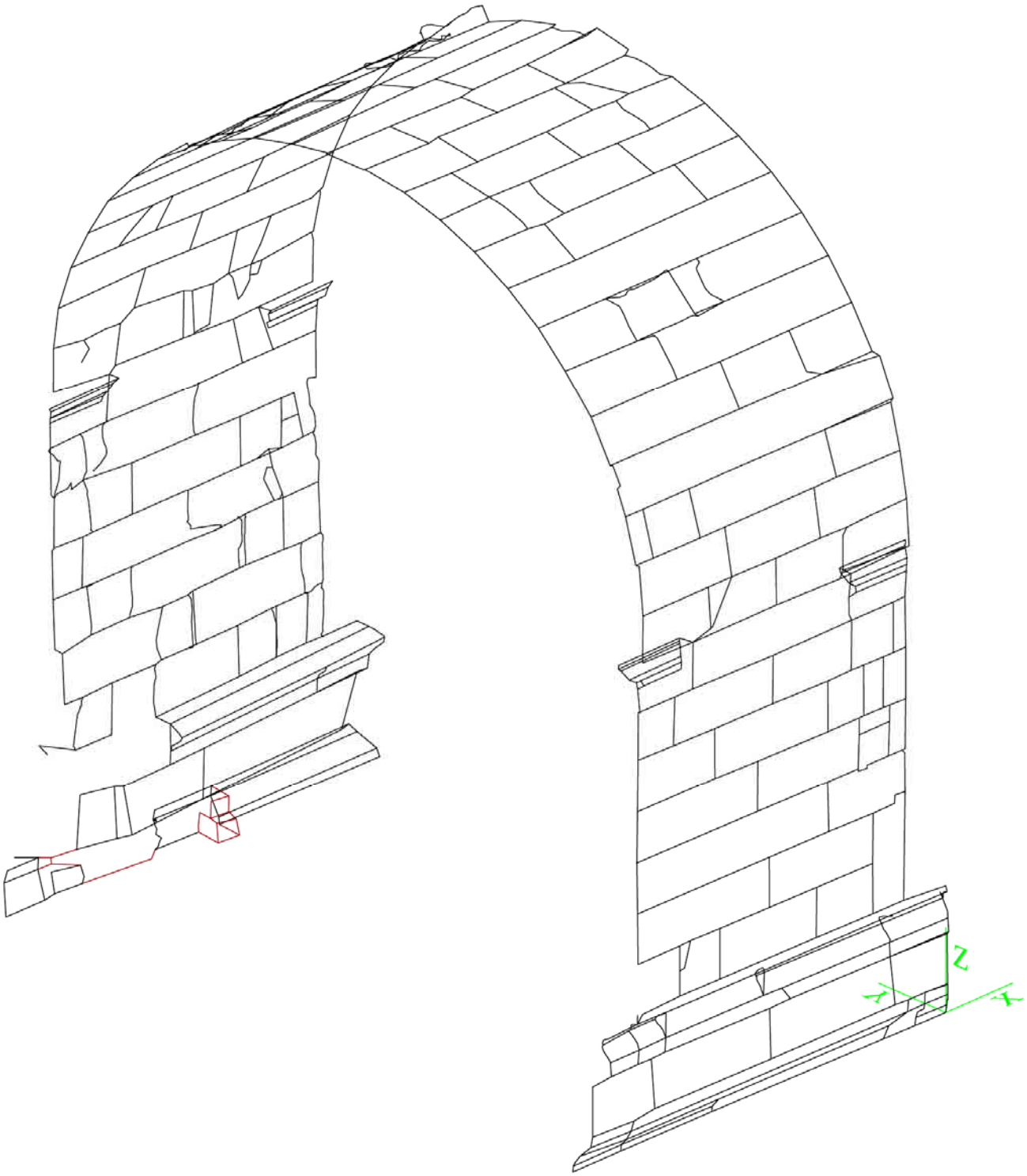



Figura 6.82 – Proiezione assonometrica dell'intradosso dell'arcata.
Questa rappresentazione è un estratto della tavola n. 3 in scala 1:50.

Analizzano la pianta di figura 6.80 si può inoltre rivedere meglio quanto era già stato detto al riguardo dell'obliquità della volta e del disallineamento dei piedritti.
Passando invece ora da analizzare il prospetto laterale di figura 6.81 possiamo notare la rotazione del piano di base dei piedritti ( argomento già affrontato e discusso nelle tavole precedenti ), ma ancor meglio da questa raffigurazione che riporta solamente la volta si può analizzare la pendenza verso la periferia dell'intera arcata sottolineata dalle linee di giuntura fra i vari conci lapidei. Questa situazione tende invece ad assestarsi e migliorare per le quote superiori a quella del piano d'imposta dell'arco.

### 6.3.2.4 Tavola n. 4

"PROIEZIONI ORTOGONALI DELLA FACCIATA VERSO ROMA" SCALA 1:100
Come riporta appunto il titolo della tavola, in questo disegno sono raccolte in forma di proiezione ortogonale tutte le informazioni che riguardano il fronte dell'arco rivolto verso la periferia della città.

### 6.3.2.5 Tavola n. 5

"PROIEZIONI ORTOGONALI DELLA FACCIATA VERSO RIMINI" SCALA 1:100
L'impianto formale di questa tavola è del tutto analogo a quella precedente, ma in questo caso viene raffigurato il fronte dell'arco che volge verso l'interno della città.

### 6.3.2.6 Tavola n. 6

"PROSPETTI DELL'ARCO" SCALA 1:50
In questa tavola sono riportati i due prospetti fondamentali dell'arco d'Augusto arricchiti di dettagli supplementari rilevati con metodi non

fotogrammetrici, ovvero, in queste rappresentazioni ci sono dei particolari che non derivano direttamente dal rilievo fotogrammetrico, ma che sono stati aggiunti in seguito per mezzo di misurazioni effettuate direttamente sul campo ed in alcuni casi per frutto di interpretazioni metriche basate su di altri rilievi ed osservazioni effettuate in sito.

Inoltre sempre sulla stessa tavola sono state riportate le due ortofoto realizzate da Roberto Angelini nel suo rilievo dell'anno 1982.

Tali prodotti ortorettificati possedevano però un sistema di riferimento diverso da quello utilizzato nel mio rilievo, inoltre deformazioni varie subite nel processo di stampa e scannerizzazione della stampa stessa hanno sicuramente indotto delle deformazioni sulla rappresentazione digitale acquisita.

Per ricondurmi ad uno stesso sistema di riferimento ho quindi pensato di effettuare una trasformazione affine nel piano che mi permettesse di trasformare le coordinate rilevate sul rilievo degli anni '80 alle coordinate del mio rilievo.

Calcolati quindi i parametri della trasformazione, ricavati dall'analisi metrica di punti corrispondenti nei due rilievi, si sono applicati i 6 parametri della trasformazione affine alle ortofoto dell'Angelini; facendo ciò tali prospetti hanno subito una rotazione, due scalature nelle direzioni ortogonali, due traslazioni ed uno scorrimento che hanno permesso di referenziare le ortofoto sulle coordinate del mio rilievo ed ottenere così un confronto metrico fra i due.

Ora che i due elaborati ( il mio rilievo vettoriale e l'ortofoto dell'Angelini ) "comunicano" con uno stesso sistema di riferimento è stato possibile sovrapporre le due rappresentazioni grafiche in modo da ottenere un confronto anche visivo sui due rilievi.

Per conoscere i dettagli della trasformazione affine adoperata e del metodo per referenziare i due rilievi vedere il capitolo VII ad esso dedicato.

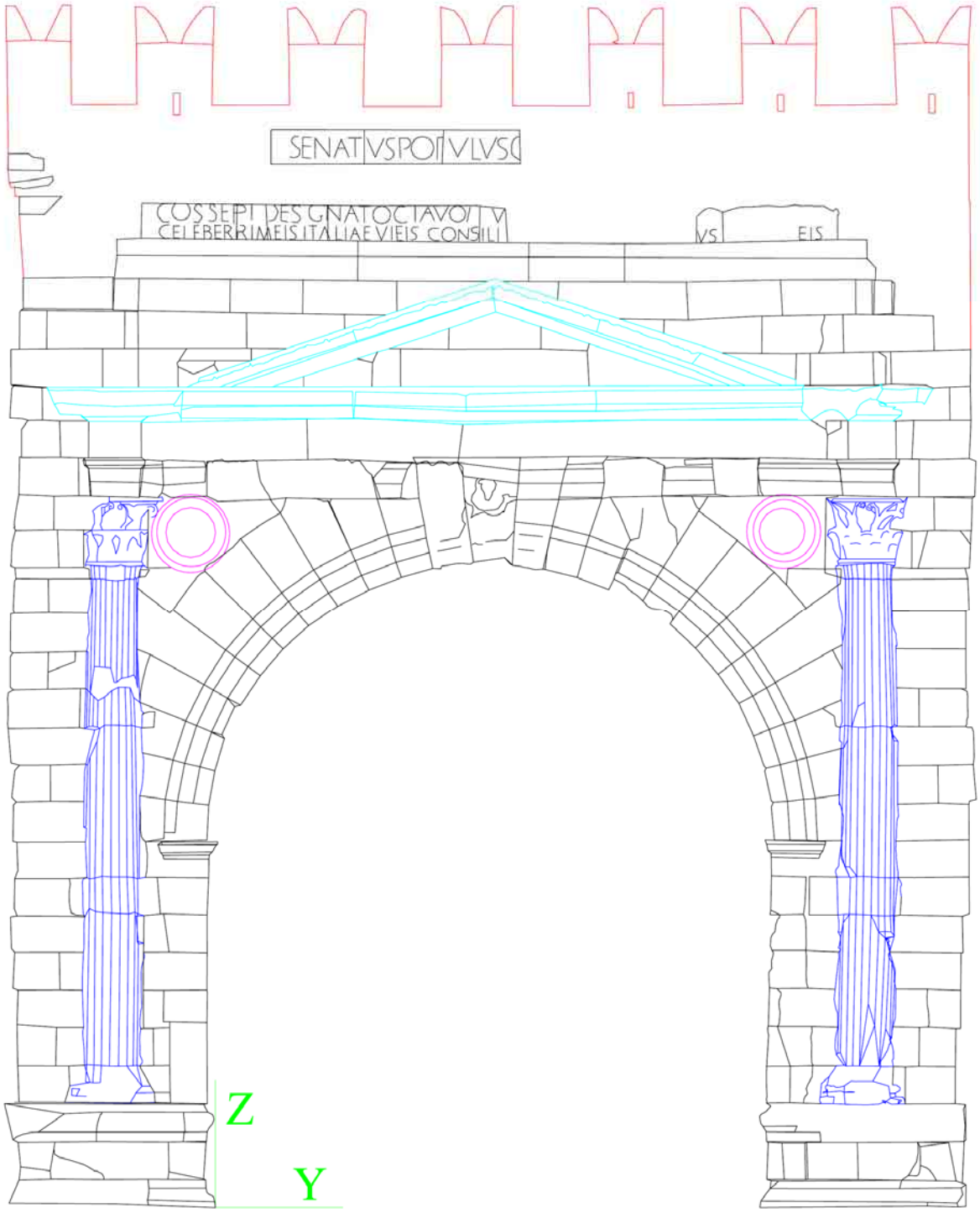



Figura 6.83 – Prospetto del fronte verso Roma dell'arco d'Augusto di Rimini. Scala 1:100.
Questa rappresentazione è un estratto della tavola n. 6 in scala 1:50.

Il disegno riportato qui sopra deriva in parte dalla restituzione fotogrammetrica ed in parte da misure ed interpretazioni metriche effettuate direttamente sul campo, difatti per motivi già spiegati nel capitolo precedete ed in questo, non è stato possibile rilevare alcuni dettagli costruttivi ed alcune parti della sommità dell'arco.

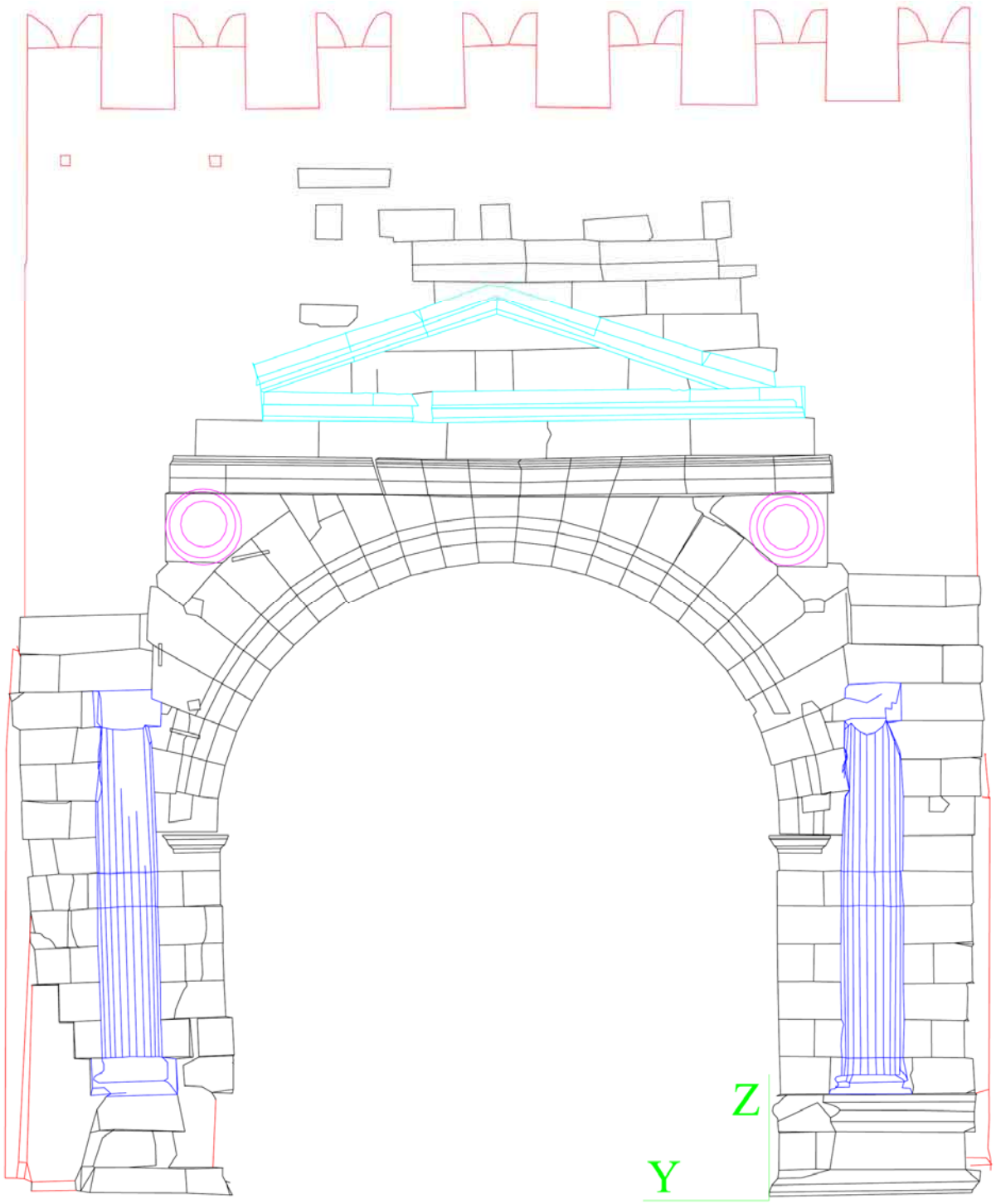



Figura 6.84 – Prospetto del fronte verso la città dell'arco d'Augusto di Rimini. Scala 1:100.
Questa rappresentazione è un estratto della tavola n. 6 in scala 1:50.

Il disegno riportato qui sopra deriva in parte dalla restituzione fotogrammetrica ed in parte da misure ed interpretazioni metriche effettuate direttamente sul campo, difatti per motivi già spiegati nel capitolo precedete ed in questo, non è stato possibile rilevare alcuni dettagli costruttivi ed alcune parti della sommità dell'arco.

La situazione più evidente che emerge dall'analisi del prospetto verso Rimini ( figura 6.84 ) è il grande schiacciamento e rotazione che ha subito il piedritto a lato mare ( quello a sinistra ) a causa del brillamento di una mina piazzata proprio alla base del pilone; i danni di questa esplosione sono tuttora evidenti, sia perché ha modificato l'intera geometria del piedritto a lato mare, sia perché si nota la grande perdita del materiale lapideo nelle zone limitrofe allo scoppio.

### *6.3.3 Le ortofoto estrapolate dal DSM dell'arco*

Fra i tanti prodotti che il software PhotoModeler Pro 5 riesce a fornire in output uno molto importante è l'ortofoto. Essa è di grande interesse perché ci consente di coniugare l'informazione metrica con quella fotografica; da un'ortofoto si possono quindi ricavare direttamente delle misure possedendo un righello ( infatti è come un disegno in scala ) ed in più osservando la foto si possono trarre indizi e dettagli molto minuti sullo stato di conservazione dell'oggetto nonché di tutte le più piccole variazioni di colore dello stesso.
Per produrre un'esatta ortofoto di un oggetto tridimensionale dalla forma complessa quale l'arco d'Augusto è necessario possedere un buon DSM dell'oggetto, altrimenti l'operazione di ortorettificazione non può essere attuata correttamente, difatti il semplice raddrizzamento del fronte dell'arco non risulta possibile in quanto ( a causa dei forti aggetti di elementi architettonici ) lo spostamento d'altezza non può essere contenuto entro l'errore di graficismo dell' ortofoto. Se il prospetto dell'arco fosse stato molto più "piatto" allora un semplice raddrizzamento sarebbe stata la soluzione migliore, ma in questo caso gli aggetti della struttura impedivano l'effettuazione di una simile procedura, oppure era comunque possibile operare nel modo appena detto ma si doveva pagare lo scotto di avere una scala della rappresentazione veramente piccola che avrebbe reso illeggibile ogni particolare.

Da quanto detto si comprende che per gli oggetti dalla forma complessa si può costruire un'ortofoto degli stessi solamente tramite una procedura di raddrizzamento differenziale basata sulla conoscenza di un DSM.

L'ortofoto non è altro che una proiezione ortogonale di un DSM ( *Digital Surface Model* ) su di un piano, generalmente si scelgono piani coordinati secondo il sistema di riferimento, ma nulla vieta di sceglierne altri.

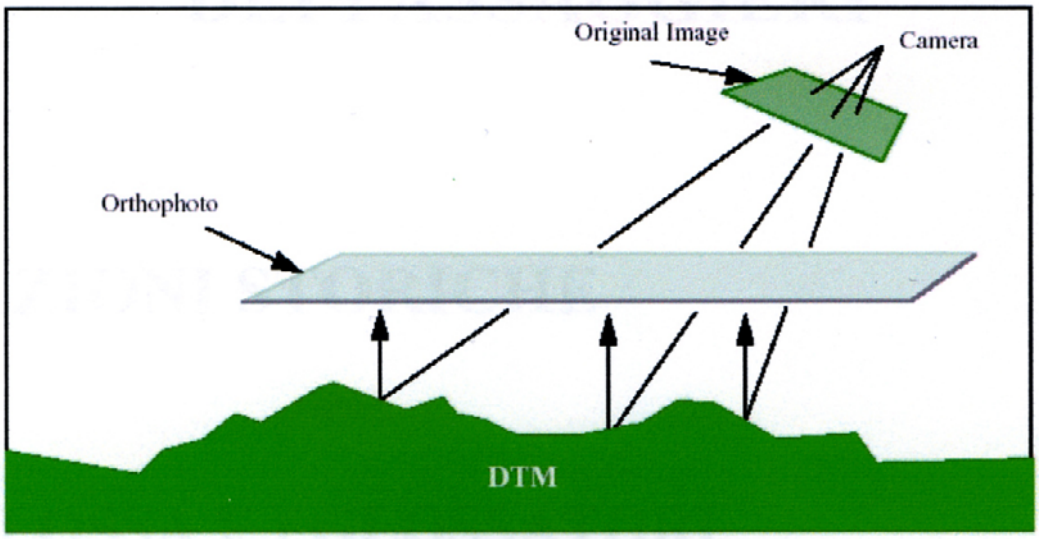



Figura 6.85 – Schema esplicativo della produzione di un'ortofoto dalla conoscenza di un DTM ( *Digital Terrain Model* ), o in maniera del tutto simile da un DSM ( *Digital Surface Model* ).

Per generare delle ortofoto il software PhotoModeler mette a disposizione dell'utente l'apposito comando *"Export Ortho Photo"* situato sotto la voce *"File"*, tramite esso si accede successivamente ad una finestra di controllo dei parametri di esportazione.

La finestra in questione permette di scegliere ad esempio su quale piano si vuole proiettare il DSM, con quale scala e risoluzione si vuole ottenere il prodotto finale, oppure in modo analogo si può chiedere al software di fornire in output un file con determinate dimensioni in pixel. Sempre nella stessa finestra è inoltre possibile scegliere il metodo di ricampionamento dell'immagine.

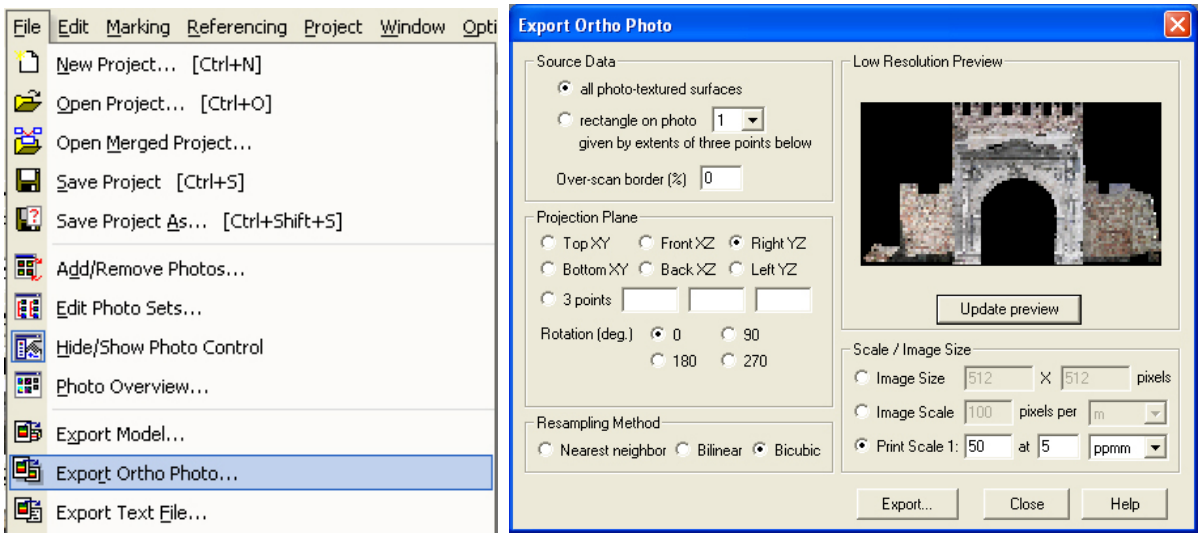



Figura 6.86 – Funzione *"Export Ortho Photo"* e relativa finestra di controllo parametri.

Nel caso dell'arco d'Augusto le soluzioni adottate sono quelle di figura 6.86, l'intero modello DSM con applicate le textures fotografiche è stato ortorettificato secondo 5 piani coordinati ( Right YZ, Left YZ, Front XZ, Back XZ, Bottom XY ) adottando una scala di stampa pari a 1:50 ( conforme alla precisione del rilievo ) con 5 pixel al mm ( conforme all'errore di graficismo di 0,2 mm ).

Il metodo di ricampionamento adottato nell'estrazione delle ortofoto è quello di convoluzione cubica.

Con la convoluzione cubica il valore radiometrico di un pixel dell'ortofoto viene determinato dalla media pesata dei 16 pixel più vicini al corrispondente punto sull'immagine da cui si vuole estrarre l'ortofoto.

Estratte le 5 rappresentazioni ortofotografiche dell'arco con i metodi illustrati sopra si è provveduto a sintetizzarle in due tavole di disegno: la tavola n. 7 e la tavola n. 8.

### 6.3.3.1 Tavola n. 7

"ORTOFOTO E MODELLO VETTORIALE" SCALA 1:50

In questa tavola sono riportati i risultati della ortorettificazione del DSM con textures dell'arco assieme alla restituzione vettoriale.

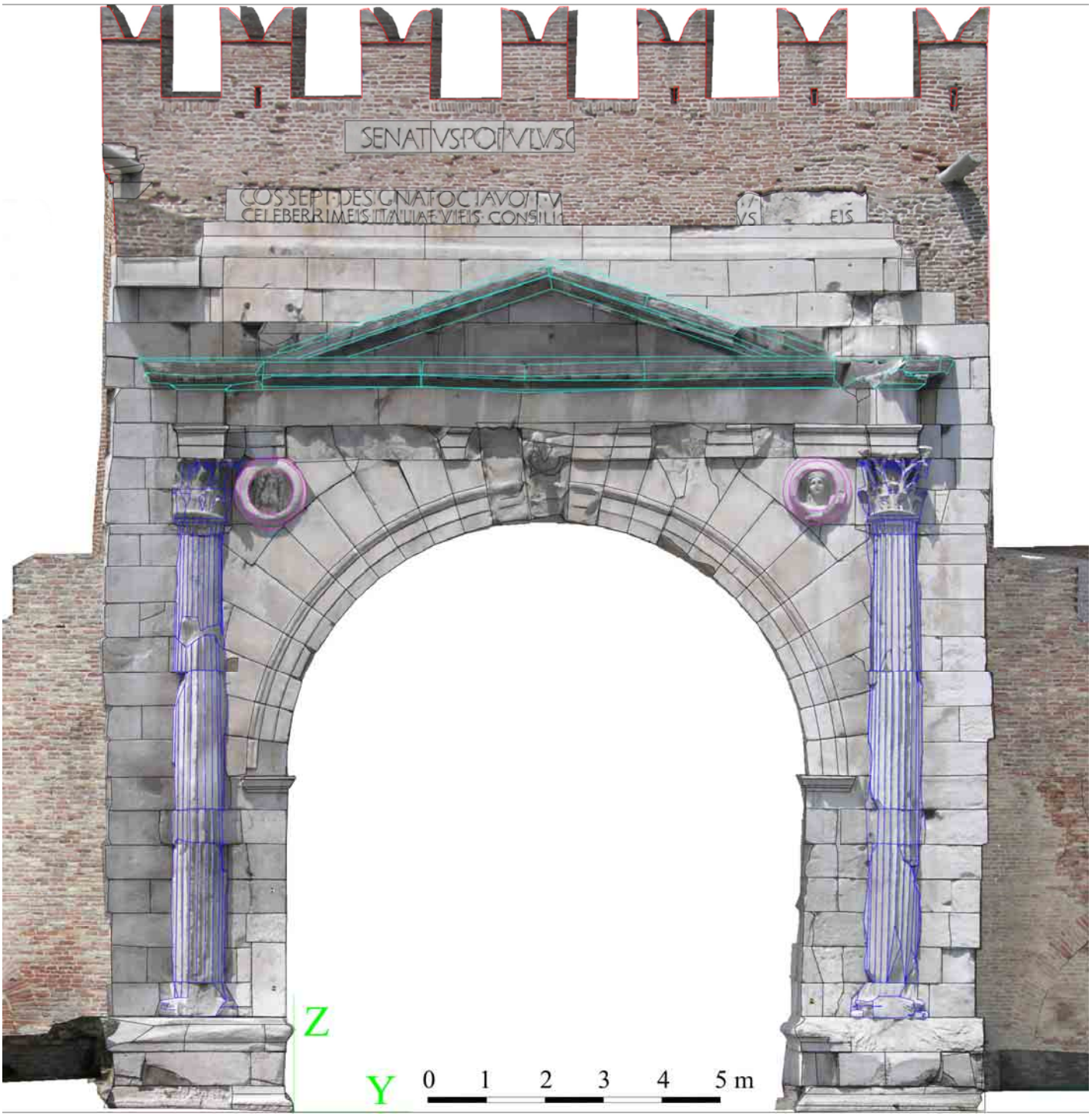



Figura 6.87 – Ortofoto del DSM dell'arco sul piano *Right YZ*, con sovrapposta la restituzione vettoriale. Scala 1:100

Questa rappresentazione è un estratto della tavola n. 7 in scala 1:50.

In questa ortofoto è ancor meglio visibile quanto già detto nel paragrafo 6.3.2.1 e seguenti al riguardo delle deformazioni del piedritto a lato mare ( quello a destra ).

Ben visibile è la rotazione di tale pilone attorno all'asse Z ed all'asse X.

Figura 6.88 - Ortofoto del DSM dell'arco sul piano *Left YZ*, con sovrapposta la restituzione vettoriale. Scala 1:100
Questa rappresentazione è un estratto della tavola n. 7 in scala 1:50.
In questa raffigurazione, alla base del piedritto a lato mare ( a sinistra ), è ben visibile il danno causato dall'esplosione di una mina tedesca avvenuta nel 1944.

## 6.3.3.2 Tavola n. 8

"ORTOFOTO" SCALA 1:50

In questa tavola di disegno sono riportate tutte le 5 rappresentazioni ortofotografiche del DSM con textures dell'arco d'Augusto.

Figura 6.89 – Ortofoto del DSM dell'arco sul piano *Right YZ*. Scala 1:100
Questa rappresentazione è un estratto della tavola n. 8 in scala 1:50.

Figura 6.90 - Ortofoto del DSM dell'arco sul piano *Left YZ*. Scala 1:100.
Questa rappresentazione è un estratto della tavola n. 8 in scala 1:50.

Figura 6.91 – Ortofoto del DSM dell'arco sui piani *Back XZ* e *Front XZ*. Scala 1:100
Questa rappresentazione è un estratto della tavola n. 8 in scala 1:50.
Nell'ortofoto di sinistra è riportata la proiezione sul piano *Back XZ*, mentre in quella di destra è riportata la proiezione sul piano *Front XZ*.

Figura 6.92 – Ortofoto del DSM dell'arco sul piano *Bottom XY*. Scala 1:100

### *6.3.4 Creazione del modello stereoscopico dell'arco d'Augusto con la tecnica dell'anaglife.*

Parliamo ora di un metodo molto semplice, ma anche un po' rudimentale e poco rigoroso, per osservare delle immagini in stereoscopia. Per osservare dei modelli stereoscopici 3D di un qualunque oggetto la condizione essenziale è possedere due fotogrammi realizzati con assetto pseudo-normale ad una determinata fotobase. A questo punto tramite l'utilizzo di uno stereoscopio è possibile "navigare" nel mondo 3D, questa procedura è quella più rigorosa è che permette di ottenere i migliori risultati, ma in alcuni casi può essere utile possedere un'immagine stampata che possa essere vista in stereoscopia senza l'utilizzo di costosi strumenti. In questi casi la tecnica dell'anaglife risolve alcuni problemi, infatti tramite appositi occhiali con una lente rossa ed un'altra di colore ciano è possibile vedere l'oggetto in 3D. Il principio su cui si basa è sempre lo stesso per tutti gli altri metodi di esplorazione in 3D: l'occhio sinistro deve ricevere solamente l'immagine di sinistra, mentre l'occhio destro deve osservare solamente l'immagine di destra. Per realizzare questa condizione si stampano le due fotografie: una in monocromia rossa e l'altra in ciano, poi si sovrappongono le due foto fino a fonderne i colori; la sovrapposizione però non è esatta, ma si lascia un certo scartamento ( parallasse ). A questo punto l'immagine stereoscopica è pronta per essere osservata in 3D tramite l'utilizzo degli appositi occhiali.

Nel caso dell'arco d'Augusto è stato eseguito proprio quanto citato sopra, solamente che non sono stati realizzati tutti i passi descritti, infatti il software PhotoModeler Pro 5 possiede una funzione per generare in modo automatico modelli stereoscopici con la tecnica anaglifica.

I risultati di queste elaborazioni sono riportati nelle pagine seguenti.

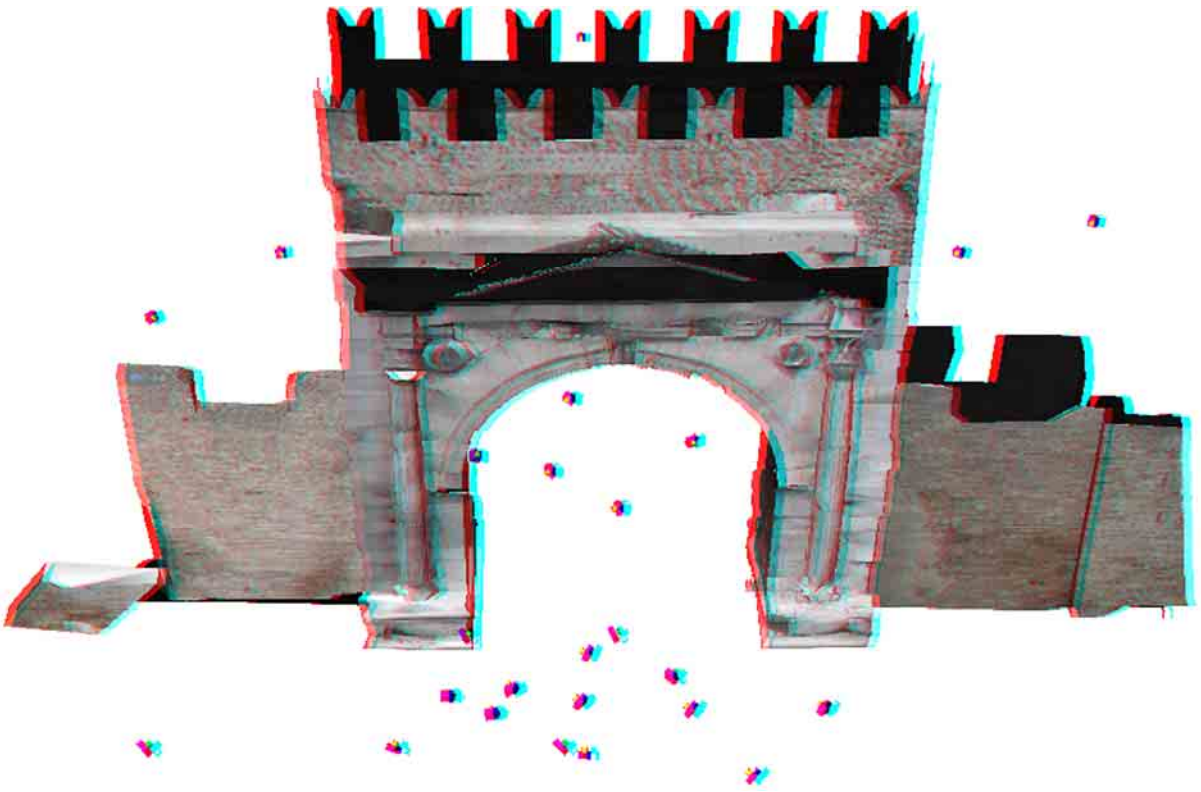


Figura 6.93 – Modello stereoscopico dell'arco d'Augusto creato con la tecnica anaglifica.

Figura 6.94 - Modello stereoscopico dell'arco d'Augusto creato con la tecnica anaglifica.

Figura 6.95 – Modello stereoscopico del prospetto verso la periferia della città creato con la tecnica anaglifica.

Figura 6.96 – Modello stereoscopico del prospetto verso la città creato con la tecnica anaglifica.

## 6.4 LA REALTA' VIRTUALE E L'ARCO

Gli scenari di realtà virtuale sono realizzati a partire dalla costruzione di un modello tridimensionale dell'oggetto che si vuole rappresentare, questi modelli sono sempre basati su di informazioni metriche che possono essere fittizie o derivate da reali dati acquisiti secondo le più svariate metodologie di rilievo. Per rendere più realistica la rappresentazione dell'oggetto in realtà virtuale si applicano delle textures fotografiche o di altro tipo al modello, in tal modo l'effetto di realismo è veramente stupefacente.

Nell'ambito delle applicazioni fotogrammetriche e del laser scanning la realizzazione di uno scenario virtuale dell'oggetto rilevato può essere l'ultimo naturale passo di un processo di elaborazione e restituzione dati. Ormai gli strumenti e software di restituzione fotogrammetrica permetto di esportare il modello digitale rilevato in vari tipi di formati grafici 3D, leggibili dalla maggior parte dei programmi di grafica e simulazione virtuale. Attualmente la realtà virtuale offre notevoli vantaggi di visualizzazione rispetto a quanto si poteva fare in passato, l'esplorazione del mondo virtuale del modello 3D rilevato è più importante di quanto possa sembrare, difatti navigando in 3D si riesce a comprendere molto bene la reale forma dell'oggetto studiato, che spesso ( vista la complessità formale di molti beni culturali ) è difficile riuscire a capire dalle sole rappresentazioni 2D riportate in stampa su carta. Oltretutto in un ambiente 3D interattivo è anche possibile osservare da vicino eventuali deformazioni o particolarità geometriche dell'oggetto rilevato, anche se poi le analisi dettagliate e quantitative si fanno quasi sempre sulle rappresentazioni piane; la realtà virtuale può quindi servire per una prima analisi qualitativa dell'oggetto che permette di osservare delle particolarità che si andranno ad indagare dettagliatamente nelle raffigurazioni 2D, dalle quali si "tireranno" dei numeri e delle conclusioni. Altro grande pregio della realtà virtuale è

insito nella possibilità di creare animazioni e presentazioni degli oggetti rilevati, tali prodotti video possono essere molto utili per pubblicare su Internet i risultati di lavori eseguiti, oppure per presentare gli oggetti rilevati ad un pubblico poco esperto di fotogrammetria. Tornando a parlare di Internet non si può far a meno di non citare il famoso linguaggio VRML ( *Virtual Reality Modeling Language* ), esso è un codice di programmazione creato nei primi anni '90 al fine di generare rappresentazioni tridimensionali compatibili con le specifiche web e, come tali, pubblicabili e fruibili via Internet.
Con l'invenzione del linguaggio VRML l'utilità di produrre realtà virtuali degli oggetti rilevati è cresciuta in modo considerevole, difatti esportando in questo formato e pubblicando su Internet il rilievo eseguito si mette a disposizione di tutti il modello virtuale dell'oggetto. In questo modo tutti gli utenti della rete possono navigare in un mondo 3D ed estrarre maggiori informazioni da quelle che normalmente possono trarre da fotografie dell'oggetto.
La disponibilità di un comune *browser web* e di *plug-in* specifici, gratuiti e facilmente reperibili sulla rete, permette al navigatore web di esplorare interi mondi VRML in modo semplice ed immediato.
In termini di grafica tridimensionale, il VRML offre possibilità analoghe a quelle dei sistemi CAD, sia nella gestione delle prospettive che relativamente all'illuminazione ad al *rendering*, consentendo inoltre di aggiungere *link* ad altre "pagine html" in modo da integrare la rappresentazione con informazioni di carattere alfa-numerico o multimediale. Purtroppo un grave difetto affligge il VRML: esso non permette di ricavare informazioni metriche sull'oggetto. per superare questo limite è possibile quindi integrare gli scenari virtuali con funzionalità espresse nel linguaggio JAVA.
Nel caso dell'arco d'Augusto la realizzazione di un file video che mostra il monumento da diverse angolazioni e quote è stato di grande realismo ed impatto visivo, esso da subito un'idea, anche agli utenti

meno esperti, dell'oggetto rilevato. La navigazione entro il modello 3D dell'arco ha invece risolto spesso svariati problemi, per citare uno posso dire che dalle rappresentazioni piane è un po' difficile comprendere la reale deformazione che affligge il piedritto a lato mare; muovendosi nello spazio virtuale è invece possibile osservare le varie sfumature della malformazione del pilone, infatti nel mondo virtuale è stato possibile osservare tale elemento, nonché tutto l'arco, da punti di vista inaccessibili nella realtà ( ad esempio da punti di vista in quota ).

In conclusione ricordo che allo stato attuale della scienza e della tecnologia topo-fotogrammetrica la creazione di scenari virtuali in possesso di connotati metrici è alquanto complicata, laboriosa e costosa; quindi, aldilà di una giusta ed opportuna sperimentazione metodologica, non si può pensare di adottare questo approccio in modo estensivo, considerando i costi elevatissimi di rilevamento ed elaborazione che un buon prodotto ha alle spalle, a meno che non diventino più accessibili tecniche di rilevamento di alta precisione ed alta automazione. Nuove tecniche di rilievo con il laser scanning integrato con la fotogrammetria ed altre tecniche topografiche combinate all'uso di superevoluti PC potrebbero in futuro rendere prodotti metrici e restituzioni fotogrammetriche di elevatissima precisione in brevissimi tempi e a costi ridotti. In questa era futuristica il rilievo di beni culturali ed oggetti degni di nota in genere diventerà una prassi comune per catalogare questi oggetti e georeferenziarli in un sistema di riferimento comune, oltretutto sarà possibile un monitoraggio quasi continuo di un elevato numero di edifici che permetterà di consolidare le vecchie tecniche di rilievo e sperimentarne delle altre nuove, inoltre tramite il monitoraggio ( reso più facile, rapido ed economico dalle future tecniche e strumentazioni ) sarà possibile comprendere in modo più raffinato il reale

comportamento meccanico-strutturale delle più svariate tipologie di strutture.

In questa era digitale la realtà virtuale avrà sicuramente uno spazio più vasto di quello che attualmente possiede, un modo immaginario 3D con connotati metrici probabilmente potrebbe fare da base grafica ad un'enorme archivio di dati riguardanti tutti gli oggetti rilevati.

Fino a quel momento ci dobbiamo invece accontentare di utilizzare le applicazioni in realtà virtuale solamente per un piccolo numero di oggetti veramente importanti per cui vale la pena di affrontare ingenti spese e tante ore di lavoro per il rilievo.

## 6.5 CONCLUSIONI

Concludendo questo capitolo relativo alla elaborazione dei dati rilevati voglio sottolineare che durante l'intero lavoro di rilievo, dal rilevamento topo-fotogrammetrico vero e proprio fino alla computazione dei dati e successiva restituzione del modello dell'arco, le difficoltà riscontrate sono state molteplici; a conti fatti il rilievo di beni culturali dalla forma generalmente complessa ( quali l'arco ) sono restituibili con tecniche digitali non convenzionali con particolari difficoltà, anche se esse risultano superabili. La situazione sarebbe senz'altro migliorata se si avesse avuto in dotazione un carrello elevatore per scattare foto da postazioni a quote elevate e per collocare i target ed il filo a piombo anche nella sommità del monumento. Anche in tal caso, comunque la restituzione della struttura con tecniche monoscopiche sarebbe stata abbastanza difficile, infatti il problema più grave della restituzione in monoscopia sta appunto nell'impossibilità di individuare punti omologhi su di superfici monocromatiche e dalla forma complessa che dalle sole foto non si riesce ad intuire esattamente. Molto probabilmente le procedure di rilievo e restituzione fotogrammetrica utilizzate in questa tesi sarebbero state molto più efficienti se fossero state impiegate per

rilevare la facciata di un edificio, che generalmente non presenta elementi architettonici dalle forme molto contorte; nel caso dell'arco d'Augusto invece alcuni elementi, come le semicolonne ed il timpano, hanno reso molto difficile la restituzione in monoscopia. Nonostante i diversi problemi riscontrati durante le varie fasi di lavoro si è comunque riusciti ad ottenere un prodotto finale degno di nota, infatti il modello 3D restituito presenta una precisione media di 8 mm ( limite di confidenza al 95% ) ed è sufficientemente ricco di dettagli architettonici; oltretutto si è riusciti ad ottenere anche un DSM con textures fotografiche abbastanza preciso e dettagliato da cui sono state ricavate delle discrete ortofoto.

Altra nota dolente a sfavore del rilievo eseguito con le tecniche utilizzate in questa tesi è relativo ai lunghi tempi necessari per ottenere un prodotto metrico di sufficiente qualità, difatti restituendo la struttura interamente a mano, senza alcuna procedura automatizzata dal software, si sono dovuti collimare manualmente 27300 punti sulle 52 foto eseguite per ottenere in output le coordinate spaziali di 2855 punti appartenenti all'arco, questo enorme lavoro ha inevitabilmente richiesto molto tempo, rendendo così molto lenta la fase di restituzione. In alternativa, per sveltire il lavoro si sarebbe potuto procedere mediante la collimazione automatica dei punti omologhi tramite gli algoritmi di *image matching*, ottenendo così in output una nuvola di punti che descrivono la superficie dell'oggetto. Questo metodo automatizzato è molto rapido ma è anche meno preciso di una restituzione eseguita punto per punto come quella attuata sull'arco, oltretutto dalla nuvola di punti si potrebbe ottenere facilmente un DSM dell'oggetto ma risulterebbe molto più complicato estrapolare un rilievo vettoriale per linee,curve e punti dello stesso.

In definitiva, con questa tesi si è dimostrato che è comunque possibile ottenere un buon rilievo, anche di oggetti formalmente complessi, con tecniche e strumenti di rilievo semplici ed economici come quelli

impiegati ( un filo a piombo, una cordella metrica, una comune fotocamera digitale, dei target adesivi ed un intuitivo software di elaborazione ); questa economicità e semplicità di rilievo viene però pagata da una pesante e lunga opera di restituzione. Il nocciolo della questione sta semplicemente nel fatto che ( come dimostrato ) non è impossibile ottenere dei buoni rilievi con tecniche modeste e poco costose, ma è praticamente improduttivo, almeno allo stato attuale, in quanto si paga lo scotto o di una bassa precisione ( se si utilizzano procedure automatizzate ) o di lungi tempi di elaborazione-restituzione ( se si esegue il tutto manualmente ). Utilizzando strumentazioni ad alto rendimento e di qualità elevata ( e quindi costose ) si sarebbe potuto ottenere un rilievo dell'arco con maggiori precisioni ed in minor tempo, probabilmente per scopi professionali questa sarebbe stata la miglior soluzione. Difatti nel mondo del lavoro si richiedono i risultati in tempi brevi e inoltre lo stesso professionista preferisce acquistare strumenti di classe elevata, che, nonostante il loro costo, possono essere molto produttivi e capaci di reintegrare il capitale speso con alcuni rilievi di ottima qualità in cui si vanno a richiedere al committente molti soldi.

Per superare i problemi descritti legati alla monoscopia si sarebbe potuto impiegare uno schema di presa pseudo-normale ed attuare una restituzione in stereoscopia; certamente la spesa per la strumentazione sarebbe stata un poco superiore, per lo più legata all'utilizzo dello stereorestitutore, ma i vantaggi sarebbero stati evidenti sia in termini di precisione, sia per quanto riguarda i tempi necessari alla restituzione. Infatti oltre alla possibilità di comprendere senza ombra di dubbio la reale forma di tutte le superfici, in stereoscopia non è necessario ricollimare lo stesso punto per varie volte sulle diverse foto, e per questo motivo il tempo indispensabile alla restituzione si restringe. Nel caso specifico dell'arco ogni punto è stato ricollimato mediamente per 10 volte, e questo è come voler dire che il lavoro è

stato 10 volte più lungo rispetto a quello che si sarebbe potuto effettuare in stereoscopia.

Come è stato appena descritto, i problemi, legati al semplice ed economico metodo di rilievo dell'arco, sono stati molteplici, ma non insuperabili.

Questa non impossibilità ha permesso quindi di ottenere un buon rilievo dell'arco pagandolo attraverso moltissima pazienza ed ore di lavoro nella restituzione metrica.

# Capitolo VII

Imitare le qualità e le caratteristiche altrui
è molto più vergognoso del portare abiti altrui:
perché è il giudizio della propria nullità espresso da se stessi.
Arthur Schopenhauer ( 1788 – 1860 )

# CONFRONTO FRA IL RILIEVO ESEGUITO IN QUESTA TESI E QUELLO DELL'ANGELINI DEL 1982

## 7.1 INTRODUZIONE

In questo capitolo viene affrontata la problematica del confronto metrico fra due rilievi che non posseggono un sistema di riferimento comune, in questo caso particolare i due rilievi sono appunto quello eseguito nel 1982 dall'architetto Roberto Angelini e quello ricavato nel 2005 da questa tesi.

Come si può constatare da quanto scritto nel capitolo VI, la restituzione fotogrammetrica ottenuta in questa sede per l'arco d'Augusto ha prodotto un modello 3D digitale dell'oggetto, mentre la restituzione dell'Angelini ha portato alla sola realizzazione 2D dei due prospetti dei fronti dell'arco.

Visto che il rilievo eseguito dall'Angelini è solamente di tipo bidimensionale non è possibile confrontare direttamente tale rilievo con quello svolto in questa tesi, il confronto invece si rende attuabile se piuttosto di considerare l'intero modello vettoriale 3D dell'arco si vanno a prendere in considerazione le classiche rappresentazioni piane riportate nelle varie tavole di disegno allegate. Per confrontare fra loro i due rilievi si è quindi cercata una correlazione fra i prospetti realizzati dall'Angelini e quelli di questa tesi.

Purtroppo le ortofoto pubblicate dall'Angelini non riportano alcuna indicazione al riguardo della scala della stampa, inoltre non esiste

neppure alcuna indicazione sul sistema di riferimento che egli ha utilizzato. Per ovviare a questi inconvenienti si è quindi applicato uno scalimetro verosimile ( 1:100 ) sull'ortofoto, inoltre si è anche costruito un sistema di riferimento per le due ortofoto pubblicate dall'Angelini.

Giunti a ciò, non è ancora possibile un confronto diretto fra i due rilievi, quindi si è proceduto ad una trasformazione affine nel piano per le ortofoto dell'Angelini. Tale mutamento affine trasforma un quadrato in un parallelogramma qualsiasi traslato e ruotato nel piano.

Il processo di trasformazione affine è il tipico processo di deformazione piano degli oggetti, ovvero: qualunque oggetto sottoposto ad uno stato deformativo piano subisce un procedimento di trasformazione affine. Definiamo ora le ortofoto dell'Angelini come rilievo O, mentre poniamo i prospetti realizzati in questa tesi come rilievi D. Tramite il procedimento di trasformazione affine applicato al rilievo O si è riusciti a trasformare tale rilievo nel sistema di coordinate utilizzato per il rilievo D. L'ortofoto O è stata quindi trasformata affinemente, cosicché è stato possibile confrontare direttamente le coordinate dei punti nei due rilievi O e D. Da tale confronto sono emerse delle differenze che mettono in evidenza la precisione dei due rilievi. In sostanza, tramite la trasformazione affine applicata al rilievo O si è riusciti a far "comunicare" il rilievo O e D con uno stesso sistema di riferimento comune ad entrambi.

Per determinare il 6 parametri ( 2 traslazioni, 2 fattori di scala, 1 rotazione, 1 scorrimento ) che descrivono la trasformazione affine nel piano sono stati utilizzati 14 punti omologhi sul rilievo O e D, determinati tali parametri ci si è poi ricondotti dal sistema di riferimento O al sistema di riferimento D.

Con la trasformazione affine si sono poi corretti molti errori di scala e distorsione che la stampa O ha subito nel corso del tempo e durante il processo di scansione.

## 7.2 LA TRASFORMAZIONE AFFINE NEL PIANO

$$\begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & \gamma \cdot \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad (7.1)$$

Dove:

$\lambda_1$, $\lambda_2$ = fattori di scala

$\gamma$ = scorrimento angolare

$Y_0$, $Z_0$ = traslazioni del sistema di riferimento Oxy

$\alpha$ = angolo di rotazione del sistema Oxy rispetto al sistema OYZ

La 7.1 definisce completamente la trasformazione affine nel piano, come si nota essa è governata da 6 parametri ( $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\gamma$, $Y_0$, $Z_0$, $\alpha$ ).
Per determinarli è necessario conoscere le coordinate ( x,y ) ed ( Y,Z ) di almeno tre punti omologhi, difatti conoscendo le coordinate di almeno tre punti doppi nei due sistemi di riferimento ( Oxy ed OYZ ) è possibile scrivere ( per mezzo della 7.1 ) 6 equazioni ( non lineari ) che permettono la determinazione di queste 6 incognite che caratterizzano la trasformazione affine. Generalmente è comunque conveniente utilizzare più di tre punti doppi ( ovvero più di 6 equazioni ) in modo da poter effettuare una compensazione con i minimi quadrati. Nel caso dell'arco d'Augusto il sistema di riferimento Oxy è quello dell'ortofoto dell'Angelini, mentre il sistema OYZ è quello del prospetto realizzato in questa tesi. Sempre nel caso particolare in esame, per determinare i 6 parametri della trasformazione affine sono stati impiegati ben 14 punti doppi distribuiti uniformemente sulla facciata del monumento.
La 7.1 è un tipo di trasformazione che permette di mutare un quadrato in un parallelogramma qualsiasi ( vedi figura 7.1 ), in questo modo si possono eliminare molte delle eventuali deformazioni che l'ortofoto dell'Angelini può aver subito nel corso del tempo e durante il processo di scansione. In realtà non tutte le deformazioni possono essere eliminate con una trasformazione affine: ad esempio le

deformazioni indotte dal processo di scansione hanno una distribuzione più o meno aleatoria e complessa che non risulta correggibile con una semplice trasformazione affine. Le cause di tali deformazioni sono da ricercare sia nello stesso procedimento di acquisizione delle immagini, sia nella non perfetta ed uniforme adesione fra stampa e superficie dello scanner durante il processo di digitalizzazione. Per riuscire a correggere le deformazioni indotte durante la scansione bisognerebbe predisporre sull'oggetto da scannerizzare una griglia di geometria nota ( tipo i reseau sul dorso delle camere semi-metriche ), in tal modo il file scansito mostrerà tale griglia deformata, la quale potrà essere ripristinata alla forma originale tramite particolari algoritmi di correzione.

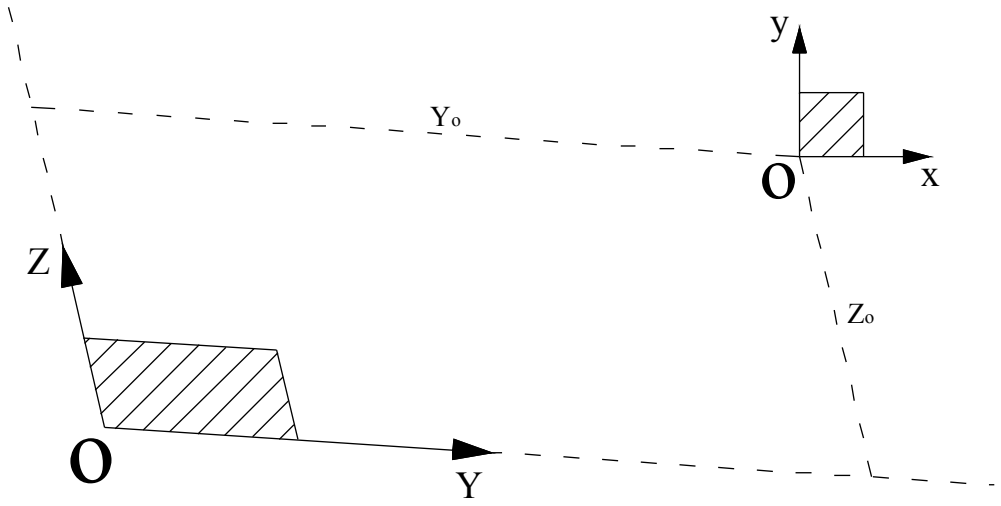



Figura 7.1 – Schema della trasformazione affine fra il sistema di riferimento Oxy e quello OYZ. Da questa figura si può notare molto bene quando detto nel testo del paragrafo: la trasformazione affine trasforma un quadrato in un parallelogramma qualsiasi traslato e ruotato di α nel piano.

A parte per particolari problemi, come quello della scansione, la trasformazione affine riesce a correggere moltissime deformazioni che le stampe subiscono nel corso del tempo, purtroppo però la determinazione dei 6 parametri risulta un po' complessa senza l'ausilio di un particolare software dedicato a risolvere questo tipo di problemi. Infatti le equazioni non sono lineari, e quindi per risolverle con l'approccio ai minimi quadrati bisogna prima linearizzarle

nell'intorno di una soluzione approssimata, e poi tramite iterazioni ci si va ad avvicinare sempre più alla soluzione definitiva.

Nell'ambito di questa tesi si è voluto procedere al calcolo dei parametri senza l'utilizzo di particolari software, ( se non per risolvere le equazioni e matrici ) quindi il procedimento è stato effettuato interamente "a mano". Così facendo è stato possibile seguire passo passo tutte le varie fasi di calcolo dei parametri.

Un primo passo per linearizzare la 7.1 consiste nel fare le seguenti posizioni:

$$a_1 = \lambda_1 \cos\alpha + \lambda_1 \cdot \gamma \cdot \text{sen}\alpha \qquad a_2 = -\lambda_1 \text{sen}\alpha + \lambda_1 \cdot \gamma \cdot \cos\alpha \qquad a_3 = Y_0$$

$$b_1 = \lambda_2 \text{sen}\alpha \qquad b_2 = \lambda_2 \cos\alpha \qquad b_3 = Z_0 \tag{7.2}$$

Allora il sistema 7.1 diventa il seguente:

$$\begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \qquad \underline{l} = \widetilde{A} \cdot \underline{x} \tag{7.3}$$

Dove le incognite sono rappresentate dal vettore [ $a_1$, $a_2$, $a_3$, $b_1$, $b_2$, $b_3$ ]

Visto che il vettore incognito **x** è formato da 6 componenti, allora risulta che per determinare tali incognite bisogna poter scrivere almeno 6 equazioni, per fare ciò basta conoscere le coordinate di almeno 3 punti doppi.

In generale per ogni punto doppio $P_i$, di cui si conoscono quindi sia le coordinate ( $x_i$, $y_i$ ) sia quelle ( $Y_i$, $Z_i$ ), è possibile scrivere due equazioni, data quindi la conoscenza di n punti doppi è possibile quindi scrivere 2n equazioni che serviranno per determinare i 6 parametri della trasformazione affine. Dato che le equazioni sono spesso sovrabbondanti rispetto al numero delle incognite, la soluzione

del sistema algebrico non è unica, quindi fra le diverse soluzioni si va a scegliere l'unica che minimizza il quadrato degli scarti ( criterio dei minimi quadrati ).

Dati n punti doppi, la scrittura del sistema per determinare le componenti incognite di **x** diventa il seguente:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Z_1 \\ . \\ . \\ Y_i \\ Z_i \\ . \\ . \\ Y_n \\ Z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ x_i & y_i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_i & y_i & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ x_n & y_n & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \qquad \underline{l} = \widetilde{A} \cdot \underline{x} \qquad (7.4)$$

Tramite la metodologia dei minimi quadrati è poi possibile determinare il vettore incognito **x** nel seguente modo:

$$\underline{\hat{x}} = \left(\widetilde{A}^T \cdot \widetilde{A}\right)^{-1} \cdot \widetilde{A}^T \cdot \underline{l} \qquad (7.5)$$

A questo punto, determinate le componenti di **x**, il calcolo dei parametri della trasformazione affine non è ancora terminato: infatti i parametri [ $a_1$, $a_2$, $a_3$, $b_1$, $b_2$, $b_3$ ] sono legati in modo non lineare ai 6 parametri originari della trasformazione affine [ $\lambda_1$, $\lambda_2$, $Y_0$, $\gamma$, $\alpha$, $Z_0$ ] secondo la seguente relazione:

$$a_1 = \lambda_1 \cos\alpha + \lambda_1 \cdot \gamma \cdot \text{sen}\alpha \qquad a_2 = -\lambda_1 \text{sen}\alpha + \lambda_1 \cdot \gamma \cdot \cos\alpha \qquad a_3 = Y_0$$

$$b_1 = \lambda_2 \text{sen}\alpha \qquad b_2 = \lambda_2 \cos\alpha \qquad b_3 = Z_0 \qquad (7.2)$$

Purtroppo in questo caso, il sistema è a 4 equazioni e 4 incognite ( le due traslazioni $Y_0$ e $Z_0$ sono già determinate, in quanto uguali ad $a_3$ e $b_3$ ), quindi non si necessita del metodo ai minimi quadrati, ma le equazioni di legame non sono lineari; questa non linearità comporta allora una linearizzazione in serie di Taylor delle 7.2 nell'intorno di una soluzione approssimata $\mathbf{y_0} \equiv [\ \lambda^0_1, \lambda^0_2, \gamma^0, \alpha^0\ ]$

Linearizzazione in serie di Taylor nel punto $\mathbf{y_0} \equiv [\ \lambda^0{}_1,\ \lambda^0{}_2,\ \gamma^0,\ \alpha^0\ ]$ del sistema algebrico 7.2:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \left(\lambda_1^0 \cos\alpha^0 + \lambda_1^0 \cdot \gamma^0 \cdot \operatorname{sen}\alpha^0\right) + \left(\cos\alpha^0 + \gamma^0 \operatorname{sen}\alpha^0\right)\left(\lambda_1 - \lambda_1^0\right) + \left(\lambda_1^0 \operatorname{sen}\alpha^0\right)\left(\gamma - \gamma^0\right) \\
&+ \left(-\lambda_1^0 \operatorname{sen}\alpha^0 + \lambda_1^0 \cdot \gamma^0 \cdot \cos\alpha^0\right)\left(\alpha - \alpha^0\right) \\
a_2 &= \left(-\lambda_1^0 \operatorname{sen}\alpha^0 + \lambda_1^0 \cdot \gamma^0 \cdot \cos\alpha^0\right) + \left(-\operatorname{sen}\alpha^0 + \gamma^0 \cos\alpha^0\right)\left(\lambda_1 - \lambda_1^0\right) + \\
&+ \left(\lambda_1^0 \cos\alpha^0\right)\left(\gamma - \gamma^0\right) + \left(-\lambda_1^0 \cos\alpha^0 - \lambda_1^0 \cdot \gamma^0 \cdot \operatorname{sen}\alpha^0\right)\left(\alpha - \alpha^0\right) \qquad (7.6) \\
b_1 &= \left(\lambda_2^0 \operatorname{sen}\alpha^0\right) + \left(\operatorname{sen}\alpha^0\right)\left(\lambda_2 - \lambda_2^0\right) + \left(\lambda_2^0 \cos\alpha^0\right)\left(\alpha - \alpha^0\right) \\
b_2 &= \left(\lambda_2^0 \cos\alpha^0\right) + \left(\cos\alpha^0\right)\left(\lambda_2 - \lambda_2^0\right) + \left(-\lambda_2^0 \operatorname{sen}\alpha^0\right)\left(\alpha - \alpha^0\right)
\end{aligned}
$$

Analogamente in forma matriciale più compatta, il sistema 7.6 può essere scritto nel seguente modo:

$$\widetilde{B}_{(0)} \cdot \underline{y}_{(1)} = \underline{l}_{(0)} \qquad (7.7)$$

$$
\widetilde{B}_{(0)} = \begin{bmatrix}
\cos\alpha^0 + \gamma^0 \operatorname{sen}\alpha^0 & 0 & \lambda_1^0 \operatorname{sen}\alpha^0 & -\lambda_1^0 \operatorname{sen}\alpha^0 + \lambda_1^0 \cdot \gamma^0 \cdot \cos\alpha^0 \\
-\operatorname{sen}\alpha^0 + \gamma^0 \cos\alpha^0 & 0 & \lambda_1^0 \cos\alpha^0 & -\lambda_1^0 \cos\alpha^0 - \lambda_1^0 \cdot \gamma^0 \cdot \operatorname{sen}\alpha^0 \\
0 & \operatorname{sen}\alpha^0 & 0 & \lambda_2^0 \cos\alpha^0 \\
0 & \cos\alpha^0 & 0 & -\lambda_2^0 \operatorname{sen}\alpha^0
\end{bmatrix}
$$

$$
\underline{y}_{(1)} = \begin{bmatrix} \lambda_1^1 \\ \lambda_2^1 \\ \gamma^1 \\ \alpha^1 \end{bmatrix} \qquad \underline{l}_{(0)} = \begin{bmatrix}
a_1 + \gamma^0 \cdot \lambda_1^0 \cdot \operatorname{sen}\alpha^0 - \alpha^0 \cdot \lambda_1^0 \operatorname{sen}\alpha^0 + \alpha^0 \cdot \lambda_1^0 \cdot \gamma^0 \cos\alpha^0 \\
a_2 + \gamma^0 \cdot \lambda_1^0 \cos\alpha^0 - \alpha^0 \cdot \lambda_1^0 \cos\alpha^0 - \lambda_1^0 \cdot \alpha^0 \cdot \gamma^0 \operatorname{sen}\alpha^0 \\
b_1 + \lambda_2^0 \cdot \alpha^0 \cdot \cos\alpha^0 \\
b_2 - \alpha^0 \cdot \lambda_2^0 \operatorname{sen}\alpha^0
\end{bmatrix}
$$

Effettuata la linearizzazione delle 7.2 si è giunti alle 7.6, le quali sono state scritte nella forma matriciale 7.7.

A questo punto la risoluzione del sistema 7.7 risulta alquanto semplice, difatti la soluzione del vettore incognito $\mathbf{y_{(1)}}$ si può ricavare nel seguente modo:

$$\underline{y}_{(1)} = \left(\widetilde{B}_{(0)}\right)^{-1} \cdot \underline{l}_{(0)} \qquad (7.8)$$

A calcolo compiuto, tramite la 7.8 troviamo le componenti approssimate del vettore $\mathbf{y_{(1)}} \equiv [\ \lambda^1{}_1,\ \lambda^1{}_2,\ \gamma^1,\ \alpha^1\ ]$, dico approssimate, perché questa soluzione non è esatta, infatti il sistema è stato

linearizzato e quindi bisogna procedere tramite iterazioni per giungere alla soluzione corretta. Effettuata la prima iterazione si procede quindi con la seconda, immettendo in essa come dato approssimato di partenza il valore di $\mathbf{y_{(1)}}$ ricavato dalla prima iterazione; risolvendo nuovamente il sistema in modo analogo alla prima iterazione si ottiene in output un vettore $\mathbf{y_{(2)}}$ che risulterà più accurato rispetto al precedente.

$$\widetilde{B}_{(1)} \cdot \underline{y}_{(2)} = \underline{l}_{(1)} \tag{7.9}$$

$$\widetilde{B}_{(1)} = \begin{bmatrix} \cos\alpha^1 + \gamma^1 \mathrm{sen}\alpha^1 & 0 & \lambda_1^1 \mathrm{sen}\alpha^1 & -\lambda_1^1 \mathrm{sen}\alpha^1 + \lambda_1^1 \cdot \gamma^1 \cdot \cos\alpha^1 \\ -\mathrm{sen}\alpha^1 + \gamma^1 \cos\alpha^1 & 0 & \lambda_1^1 \cos\alpha^1 & -\lambda_1^1 \cos\alpha^1 - \lambda_1^1 \cdot \gamma^1 \cdot \mathrm{sen}\alpha^1 \\ 0 & \mathrm{sen}\alpha^1 & 0 & \lambda_2^1 \cos\alpha^1 \\ 0 & \cos\alpha^1 & 0 & -\lambda_2^1 \mathrm{sen}\alpha^1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{y}_{(2)} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 \\ \lambda_2^2 \\ \gamma^2 \\ \alpha^2 \end{bmatrix} \qquad \underline{l}_{(1)} = \begin{bmatrix} a_1 + \gamma^1 \cdot \lambda_1^1 \cdot \mathrm{sen}\alpha^1 - \alpha^1 \cdot \lambda_1^1 \mathrm{sen}\alpha^1 + \alpha^1 \cdot \lambda_1^1 \cdot \gamma^1 \cos\alpha^1 \\ a_2 + \gamma^1 \cdot \lambda_1^1 \cos\alpha^1 - \alpha^1 \cdot \lambda_1^1 \cos\alpha^1 - \lambda_1^1 \cdot \alpha^1 \cdot \gamma^1 \mathrm{sen}\alpha^1 \\ b_1 + \lambda_2^1 \cdot \alpha^1 \cdot \cos\alpha^1 \\ b_2 - \alpha^1 \cdot \lambda_2^1 \mathrm{sen}\alpha^1 \end{bmatrix}$$

Risolvendo il sistema 7.9 si ottiene:

$$\underline{y}_{(2)} = \left(\widetilde{B}_{(1)}\right)^{-1} \cdot \underline{l}_{(1)} \tag{7.10}$$

Giunti a ciò si potrebbe procedere con una terza iterazione immettendo come dato di partenza approssimato il vettore $\mathbf{y_{(2)}}$, per ottenere così un vettore $\mathbf{y_{(3)}}$. In teoria il calcolo iterativo, per convergere, dovrebbe procedere fino all'infinito. In pratica il processo di iterazione viene arrestato quando:

$$\frac{\left\| \underline{y}_{(n+1)} - \underline{y}_{(n)} \right\|}{\left\| \underline{y}_{(n)} \right\|} < \varepsilon \tag{7.11}$$

Dove ε è un prefissato valore numerico della tolleranza di calcolo.
In parole più semplici la 7.11 esprime che il procedimento iterativo va bloccato quando la variazione fra la soluzione $\mathbf{y_{(n+1)}}$ e la precedente $\mathbf{y_{(n+1)}}$ risulta sufficientemente piccola.

In realtà la formula 7.11, definita come criterio per arrestare il procedimento iterativo, subirebbe pesanti critiche da parte di un matematico. Utilizzando questo principio infatti si va ad arrestare il calcolo quando la funzione $f = \| \mathbf{y}_{(n+1)} - \mathbf{y}_{(n)} \|$ tende ad oscillare sempre meno, ma i matematici ci dicono che non è affatto detto che se la funzione sembra convergere ed oscillare sempre meno essa converga veramente; infatti potrebbe anche succedere che continuando con le iterazioni le oscillazioni potrebbero ritornare a crescere per poi stabilizzarsi attorno ad altri valori. Quanto appena detto è solamente una precisazione matematica, infatti in campo ingegneristico questo fenomeno non avviene mai, evidenze sperimentali lo dimostrano. Probabilmente la causa di tale fenomeno di quasi sempre convergenza è da ricercare nella natura delle cose, nel fatto che le equazioni ingegneristiche modellizzano la fisica della realtà, mentre in campo matematico le funzioni possono essere del tutto inventate e senza alcun fondamento fisico.

Trovati ora tutti i 6 parametri che descrivono la trasformazione affine è possibile utilizzare le formule 7.1 per passare dal sistema di riferimento Oxy al sistema OYZ e viceversa ( vedi anche figura 7.1 ).

Ovvero, note le coordinate di un punto nel sistema di riferimento Oxy, tramite le 7.1 è possibile trovare le coordinate dello stesso punto nel sistema OYZ.

Questa possibilità di collegare fra loro diversi sistemi di riferimento con delle trasformazioni ( affini, omografiche, proiettive, conformi, ecc… ) è una potenzialità utilissima in tutte le discipline del rilevamento, difatti conoscendo le coordinate di alcuni punti doppi ( stessi p.ti di cui si conoscono le coordinate nei diversi sistemi di riferimento ) è sempre possibile effettuare delle trasformazioni che portino da un sistema di riferimento all'altro. Giunti a questa situazione è quindi possibile referenziare fra loro rilievi che posseggono anche sistemi di riferimento del tutto diversi fra loro.

Nel caso dell'arco d'Augusto, la trasformazione ha permesso di referenziare l'ortofoto dell'82 sul prospetto restituito in questa tesi, calcolati i 6 parametri ( come descritto fino ad ora ) sulla base di 14 punti doppi è stato poi possibile tramite le 7.1 trasformare le coordinate ( $x_i$, $y_i$ ) di alcuni punti dell'ortofoto nel sistema di riferimento OYZ del prospetto permettendo il confronto diretto fra i due rilievi.

## 7.3 CONFRONTO FRA I PROSPETTI VERSO ROMA

Descritta la trasformazione affine, e spiegato come si possono ricavare i 6 parametri che governano la trasformazione attraverso le formule riportate nel paragrafo precedente, ora andiamo ad applicare i suddetti passi al caso particolare dell'arco d'Augusto di Rimini.
Lo scopo finale del presente paragrafo è quello di riuscire a referenziare l'ortofoto dell'Angelini sul prospetto verso Roma realizzato in questa tesi. Per fare ciò si è utilizzata quindi la trasformazione affine così come è stata spiegata nel paragrafo 7.2.
La trasformazione affine è servita per eliminare in parte le deformazioni anisotrope che la stampa riportante l'ortofoto ha subito nel corso del tempo ( ripristinando così l'originaria geometria ), mentre le deformazioni indotte dal processo di scansione non è stato possibile eliminarle, in quanto troppo complesse ed aleatorie ( vedi inizio paragrafo 7.2 ). L'unico controllo sulle deformazioni durante il processo di scansione è stato possibile attuarlo sull'aderenza fra il piano dello scanner e la stampa da scansionare.
La determinazione dei parametri è stata fatta sulla base di ben 14 punti doppi distribuiti in modo uniforme sul fronte dell'arco, tali punti sono stati scelti fra quelli facilmente ed inequivocabilmente collimabili e che potessero, con la loro chiusura, delimitare un'area capace di contenere l'intero prospetto. I criteri per la scelta dei punti doppi è analogo a quello per la scelta dei punti fotogrammetrici di appoggio.

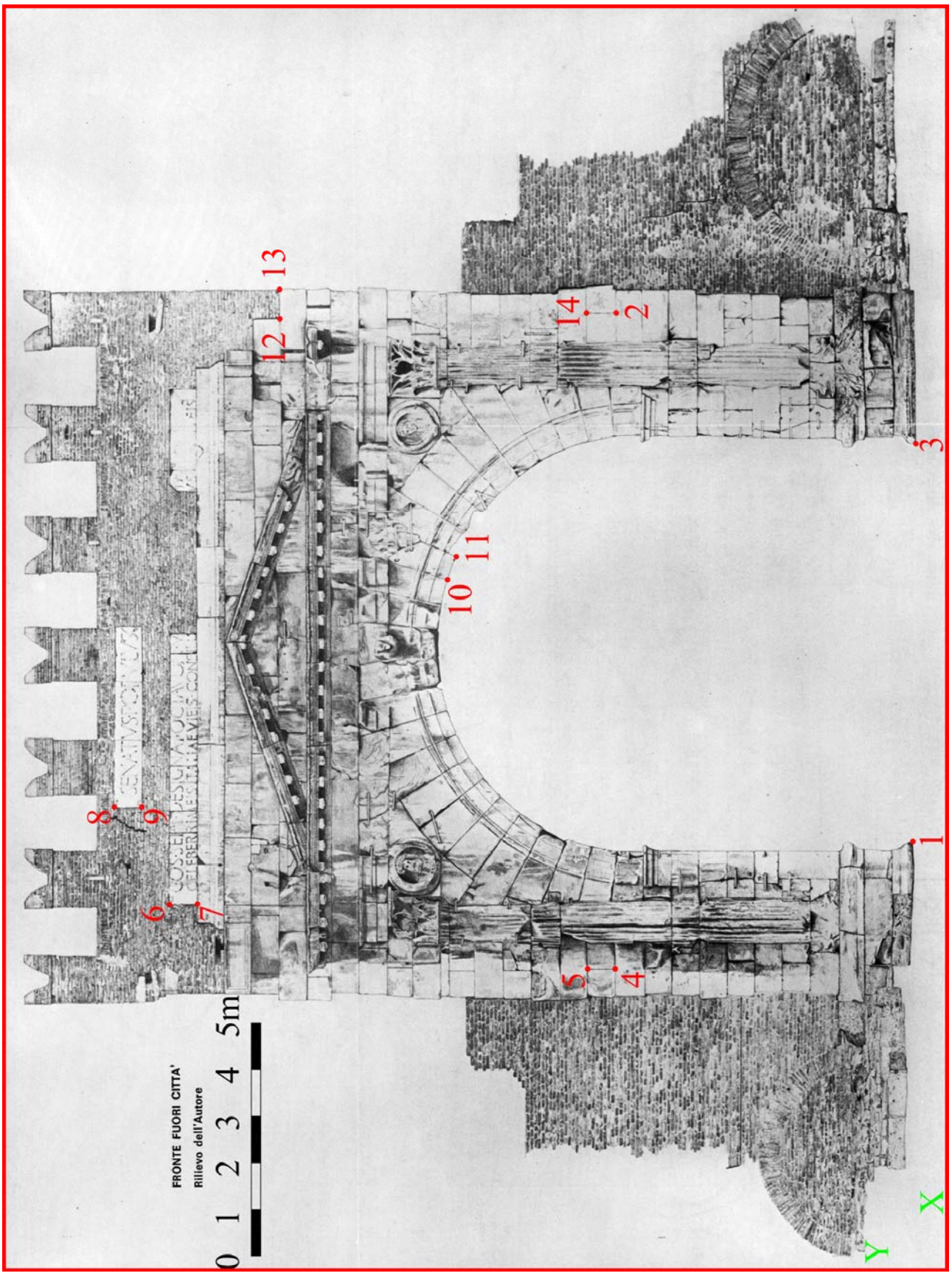



Figura 7.1 – Ortofoto del prospetto verso Roma dell'arco d'Augusto. Realizzato nel 1982 da Roberto Angelini. Scala 1:120. In rosso sono riportati i punti doppi scelti per determinare i parametri della trasformazione affine.

Osservando l'ortofoto dell'82 riportata in figura 7.1 si può notare che in sovrimpressione sono stati riportati anche i 14 punti doppi scelti per determinare i 6 parametri della trasformazione affine. In basso a sinistra è anche possibile vedere il sistema di riferimento locale Oxy ( riportato in verde ) da cui sono state misurate le coordinate di tutti i 14 punti, i valori numerici di tali coordinate sono espressi in metri in base allo scalimetro riportato assieme all'ortofoto. Ricordo che l'ortofoto originaria non possedeva ne il sistema di riferimento Oxy ( che è stato posizionato da me ) ne la scala della rappresentazione ( anch'essa fissata da me su base di opportune considerazioni e misure ). Questo è stato un passo necessario per poter determinare delle coordinate ( $x_i$, $y_i$ ) dei punti doppi che altrimenti non possedevano un sistema di riferimento.

Le coordinate degli stessi 14 punti doppi sono state poi misurate ( rispetto al sistema di riferimento OYZ ) anche sul prospetto del fronte verso Roma ricavato dalla restituzione fotogrammetrica effettuata per questa tesi ( vedi figura 7.2 ). A tal punto, essendo in possesso delle coordinate ( $x_i$, $y_i$ ) ed ( $Y_i$, $Z_i$ ) dei suddetti punti doppi è stato utilizzato il sistema algebrico lineare 7.4, costituito da una matrice disegno **A** di $(2*14) = 28$ righe e 6 colonne, di un vettore delle misure **l** di 28 righe ed un vettore incognito **x** di 6 righe.

Dalla risoluzione, per mezzo della 7.5, di tale sistema algebrico è stato possibile determinare il vettore incognito **x**, che è legato ai 6 parametri della trasformazione affine per mezzo delle equazioni non lineari 7.2.

Come già descritto nel paragrafo precedente, essendo le equazioni non lineari, queste sono state linearizzate secondo la 7.6 e 7.7, e per mezzo di sole tre iterazioni si è riusciti a far convergere la soluzione fino alla precisione prefissata, permettendo di ottenere in output i valori del vettore $\mathbf{y_{(3)}} \equiv [\ \lambda^3_1, \lambda^3_2, \gamma^3, \alpha^3\ ]$.

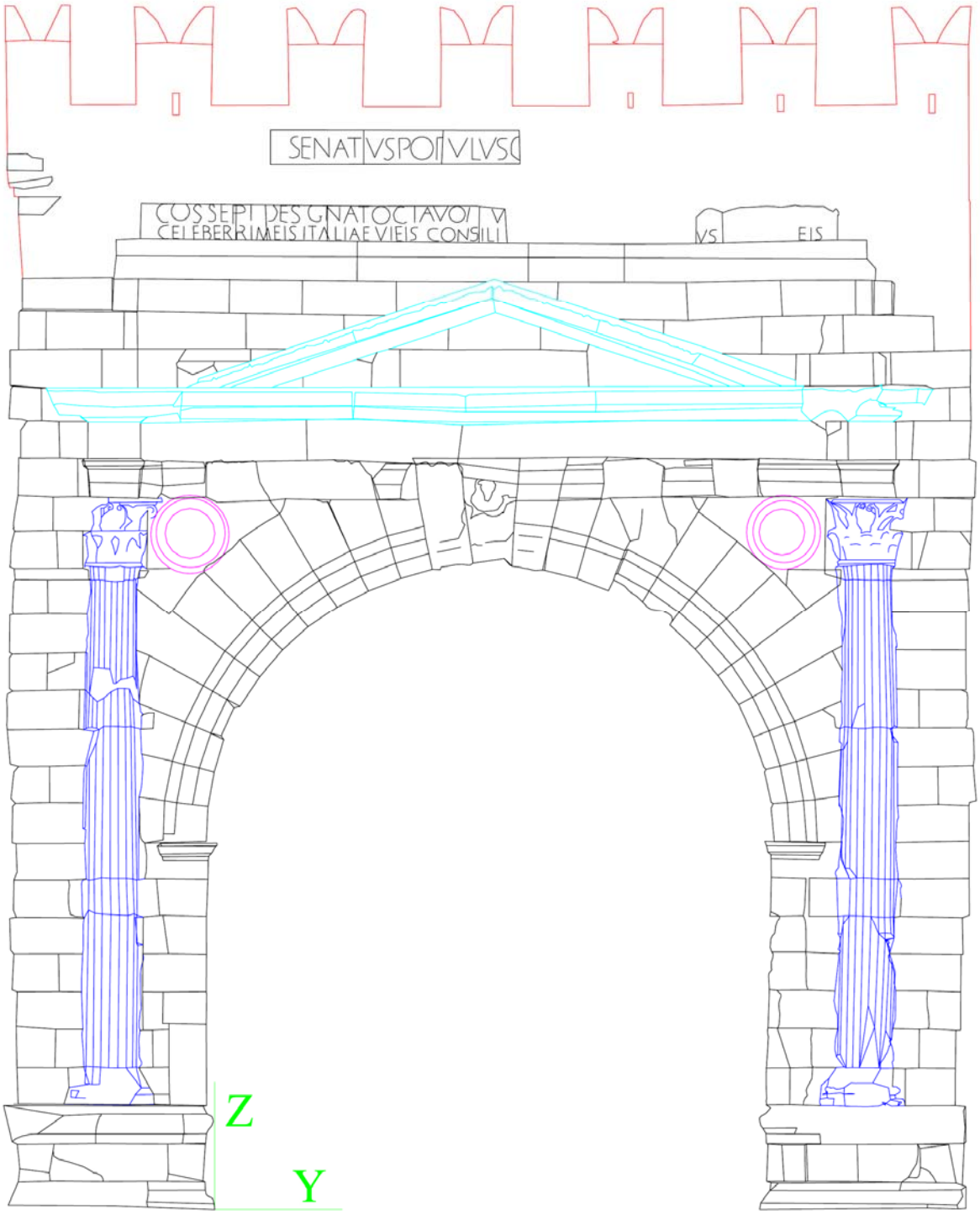



Figura 7.2 – Prospetto verso Roma dell'arco d'Augusto. Scala 1:100

L'immagine qui sopra riporta il prospetto ricavato dalla restituzione fotogrammetrica effettuata per questa tesi, tale raffigurazione è un estratto della tavola di disegno n. 6.

In questa rappresentazione piana non sono stati riportati i 14 punti utilizzati per determinare i parametri della trasformazione affine necessaria per passare dal sistema di riferimento Oxy, dell'ortofoto dell'Angelini, al sistema di riferimento OYZ del presente prospetto.

Tali punti doppi utilizzati risultano comunque essere sempre quelli visibili in figura 7.1.

A proposito del sistema di riferimento utilizzato nel rilievo eseguito per questa tesi, vale quanto detto nel capitolo VI: l'asse Z è orientato secondo la verticale e l'asse Y è disposto come visibile qui sopra.

**Prospetto dell'arco d'Augusto rivolto verso Roma**

| | Coordinate nel rilievo dell'Angelini del 1982 | | Coordinate nel rilievo eseguito in questa tesi | |
|---|---|---|---|---|
| **Punto** | x [ m ] | y [ m ] | Y [ m ] | Z [ m ] |
| **1** | 9.250 | 0.775 | 0.000 | 0.000 |
| **2** | 20.629 | 7.155 | 11.380 | 6.369 |
| **3** | 17.820 | 0.709 | 8.569 | 0.001 |
| **4** | 6.517 | 7.179 | -2.597 | 6.400 |
| **5** | 6.517 | 7.771 | -2.599 | 6.969 |
| **6** | 7.897 | 16.761 | -1.156 | 15.820 |
| **7** | 7.911 | 16.161 | -1.171 | 15.271 |
| **8** | 9.990 | 17.950 | 0.875 | 16.980 |
| **9** | 9.989 | 17.361 | 0.876 | 16.433 |
| **10** | 14.886 | 10.784 | 5.695 | 9.928 |
| **11** | 15.382 | 10.594 | 6.191 | 9.733 |
| **12** | 20.499 | 14.390 | 11.315 | 13.492 |
| **13** | 21.132 | 14.397 | 11.888 | 13.511 |
| **14** | 20.629 | 7.794 | 11.372 | 6.966 |

Tabella 7.1 – Coordinate dei 14 punti doppi nei due sistemi di riferimento Oxy ( quello dell'ortofoto dell'Angelini dell'82, vedi figura 7.1 ) ed OYZ ( quello del prospetto ricavato dalla restituzione fotogrammetrica eseguita per questa tesi, vedi figura 7.2 ).

Analizziamo ora più in dettaglio come è stato ottenuto in output il vettore $\mathbf{y_{(3)}} \equiv [\ \lambda^3{}_1,\ \lambda^3{}_2,\ \gamma^3,\ \alpha^3\ ]$.

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Z_1 \\ . \\ . \\ Y_i \\ Z_i \\ . \\ . \\ Y_n \\ Z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ x_i & y_i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_i & y_i & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ x_n & y_n & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \qquad \underline{l} = \tilde{A} \cdot \underline{x} \qquad (7.12)$$

Utilizzando il sistema 7.12, riportato qui sopra, con i valori numerici della tabella 7.1 è stato possibile determinare il vettore incognito **x** nel seguente modo:

$$\hat{\underline{x}} = \left(\tilde{A}^T \cdot \tilde{A}\right)^{-1} \cdot \tilde{A}^T \cdot \underline{l} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}9912122191 \\ 0{,}006676935942 \\ -9{,}124682176 \\ 0{,}0002334660174 \\ 0{,}9876912118 \\ -0{,}7219208959 \end{bmatrix} \qquad (7.13)$$

Determinato ora **x** ≡ [ 0.9912122191, 0.006676935942, -9.124682176, 0.0002334660174, 0.9876912118, -0.7219208959 ] si sono impiegate le 7.7 con la seguente condizione iniziale di parametri approssimati:

$\mathbf{y_0} \equiv [\ \lambda^0{}_1,\ \lambda^0{}_2,\ \gamma^0,\ \alpha^0\ ] \equiv [\ 1,\ 1,\ 0,\ 0\ ]$

$$\widetilde{B}_{(0)} \cdot \underline{y}_{(1)} = \underline{l}_{(0)} \qquad (7.7)$$

$$\widetilde{B}_{(0)} = \begin{bmatrix} \cos\alpha^0 + \gamma^0 \mathrm{sen}\alpha^0 & 0 & \lambda_1^0 \mathrm{sen}\alpha^0 & -\lambda_1^0 \mathrm{sen}\alpha^0 + \lambda_1^0 \cdot \gamma^0 \cdot \cos\alpha^0 \\ -\mathrm{sen}\alpha^0 + \gamma^0 \cos\alpha^0 & 0 & \lambda_1^0 \cos\alpha^0 & -\lambda_1^0 \cos\alpha^0 - \lambda_1^0 \cdot \gamma^0 \cdot \mathrm{sen}\alpha^0 \\ 0 & \mathrm{sen}\alpha^0 & 0 & \lambda_2^0 \cos\alpha^0 \\ 0 & \cos\alpha^0 & 0 & -\lambda_2^0 \mathrm{sen}\alpha^0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{y}_{(1)} = \begin{bmatrix} \lambda_1^1 \\ \lambda_2^1 \\ \gamma^1 \\ \alpha^1 \end{bmatrix} \qquad \underline{l}_{(0)} = \begin{bmatrix} a_1 + \gamma^0 \cdot \lambda_1^0 \cdot \mathrm{sen}\alpha^0 - \alpha^0 \cdot \lambda_1^0 \mathrm{sen}\alpha^0 + \alpha^0 \cdot \lambda_1^0 \cdot \gamma^0 \cos\alpha^0 \\ a_2 + \gamma^0 \cdot \lambda_1^0 \cos\alpha^0 - \alpha^0 \cdot \lambda_1^0 \cos\alpha^0 - \lambda_1^0 \cdot \alpha^0 \cdot \gamma^0 \mathrm{sen}\alpha^0 \\ b_1 + \lambda_2^0 \cdot \alpha^0 \cdot \cos\alpha^0 \\ b_2 - \alpha^0 \cdot \lambda_2^0 \mathrm{sen}\alpha^0 \end{bmatrix}$$

E quindi si è ottenuto il vettore $\mathbf{y_{(1)}}$ nel seguente modo:

$$\underline{y}_{(1)} = \left(\widetilde{B}_{(0)}\right)^{-1} \cdot \underline{l}_{(0)} = \begin{bmatrix} \lambda_1^1 \\ \lambda_2^1 \\ \gamma^1 \\ \alpha^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}991212219 \\ 0{,}9876912118 \\ 0{,}006910401959 \\ 0{,}0002334660173 \end{bmatrix} \qquad (7.14)$$

Giunti a ciò la prima iterazione si è conclusa, quindi si è proceduto con la seconda iterazione, immettendo nel sistema 7.7 come dati approssimati proprio il vettore $\mathbf{y_{(1)}}$ appena ricavato. Risolvendo il nuovo sistema 7.9 tramite la formula 7.10 ( analoga alla 7.8 ) si è ottenuto il seguente vettore $\mathbf{y_{(2)}}$:

$$\underline{y}_{(2)} = \left(\widetilde{B}_{(1)}\right)^{-1} \cdot \underline{l}_{(1)} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 \\ \lambda_2^2 \\ \gamma^2 \\ \alpha^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}9912106403 \\ 0{,}9876912663 \\ 0{,}006972518107 \\ 0{,}0002363755154 \end{bmatrix} \qquad (7.15)$$

In modo del tutto analogo a quanto appena effettuato fino ad ora è stato ottenuto anche l'ultimo vettore $\mathbf{y_{(3)}}$.

$$\underline{y}_{(3)} = \left(\widetilde{B}_{(2)}\right)^{-1} \cdot \underline{l}_{(2)} = \begin{bmatrix} \lambda_1^3 \\ \lambda_2^3 \\ \gamma^3 \\ \alpha^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}9912106408 \\ 0{,}9876912669 \\ 0{,}006972518206 \\ 0{,}0002363755157 \end{bmatrix} \tag{7.16}$$

Giunti alla terza iterazione si è deciso di arrestare il calcolo perché si era pervenuti ad una convergenza già superiore a quella voluta.

Arrivati alla determinazione dei 6 parametri della trasformazione affine per il prospetto sud dell'arco il problema di referenziare fra loro i due rilievi era stato risolto, difatti ora che sono noti tali parametri, tramite le equazioni 7.1 è possibile passare dal sistema di riferimento Oxy dell'ortofoto al sistema di riferimento OYZ del prospetto e viceversa. Essendo adesso così facile passare da un sistema di riferimento all'altro è anche abbastanza semplice paragonare i due rilievi, ed in particolare confrontare le coordinate di qualunque punto omologo, riuscendo in questo modo a valutare lo scarto metrico fra le due rappresentazioni. Purtroppo la formulazione matematica 7.1 della trasformazione affine permette si di passare fra i diversi sistemi di riferimento, ma non è in grado di dare un confronto visivo e diretto fra i due rilievi. L'idea del confronto visivo consiste nel sovrapporre i due rilievi in modo da poter notare molto bene, ed in ogni punto, la differenza fra i due rilievi. La formulazione matematica è molto precisa e consente di effettuare verifiche locali su alcuni punti in modo accurato, ma essa non è in grado di fornire l'andamento generale dello scostamento tra i due prospetti, cosa che invece è possibile se si riuscisse a soprapporre le due raffigurazioni.

Per riuscire in questo intento è stato utilizzato un software che una volta specificato il tipo di trasformazione voluta ed i valori dei parametri che la governano, esso applica la trasformazione a tutti i pixel dell'immagine da trasformare. Questo è quanto è stato realizzato per l'ortofoto dell'Angelini.

**Prospetto dell'arco d'Augusto rivolto verso Roma**

| | Coordinate nel rilievo dell'Angelini del 1982 | | Coordinate nel rilievo eseguito in questa tesi | | Coordinate del rilievo dell'Angelini trasformate affinemente | | Scarto in Y | Scarto in Z | Differenza |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punto | x [m] | y [m] | Y [m] | Z [m] | Y' [m] | Z' [m] | $\Delta Y = Y - Y'$ [m] | $\Delta Z = Z - Z'$ [m] | $((\Delta Y)^2 + (\Delta Z)^2)^{1/2}$ |
| 1 | 9.250 | 0.775 | 0.000 | 0.000 | 0.050 | 0.045 | -0.050 | -0.045 | **0.067** |
| 2 | 20.629 | 7.155 | 11.380 | 6.369 | 11.371 | 6.350 | 0.009 | 0.019 | 0.021 |
| 3 | 17.820 | 0.709 | 8.569 | 0.001 | 8.543 | -0.017 | 0.026 | 0.019 | 0.032 |
| 4 | 6.517 | 7.179 | -2.597 | 6.400 | -2.617 | 6.370 | 0.021 | 0.030 | 0.037 |
| 5 | 6.517 | 7.771 | -2.599 | 6.969 | -2.613 | 6.954 | 0.015 | 0.014 | 0.021 |
| 6 | 7.897 | 16.761 | -1.156 | 15.820 | -1.185 | 15.835 | 0.029 | -0.015 | 0.032 |
| 7 | 7.911 | 16.161 | -1.171 | 15.271 | -1.176 | 15.242 | 0.005 | 0.030 | 0.030 |
| 8 | 9.990 | 17.950 | 0.875 | 16.980 | 0.897 | 17.010 | -0.022 | -0.030 | **0.037** |
| 9 | 9.989 | 17.361 | 0.876 | 16.433 | 0.892 | 16.428 | -0.016 | 0.005 | 0.017 |
| 10 | 14.886 | 10.784 | 5.695 | 9.928 | 5.703 | 9.933 | -0.007 | -0.005 | 0.009 |
| 11 | 15.382 | 10.594 | 6.191 | 9.733 | 6.193 | 9.746 | -0.001 | -0.012 | 0.012 |
| 12 | 20.499 | 14.390 | 11.315 | 13.492 | 11.290 | 13.496 | 0.024 | -0.004 | 0.025 |
| 13 | 21.132 | 14.397 | 11.888 | 13.511 | 11.918 | 13.502 | -0.029 | 0.009 | 0.031 |
| 14 | 20.629 | 7.794 | 11.372 | 6.966 | 11.375 | 6.981 | -0.003 | -0.015 | 0.016 |
| | Parametri della trasformazione affine | | | | | | Media | m | **0.028** |
| a1 | 0.99121219100 | b1 | 0.00023346601 74 | | | | Varianza | $\sigma^2=(\Sigma(x_i-m)^2)/(n-1)$ | **0.000210885** |
| a2 | 0.006676935942 | b2 | 0.9876912118000 | | | | sqm | σ | **0.0145** |
| a3 | -9.124682176000 | b3 | -0.7219208959000 | | | | | | |

Tabella 7.2 – Confronto metrico fra l'ortofoto dell'82 ed il prospetto dell'arco ricavato in questa tesi. Il paragone si basa sulle 14 coordinate dei punti doppi scelti per determinare i parametri della trasformazione affine. In grassetto sono stati riportati i valori degli scarti troppo elevati, probabilmente causati da un'errata collimazione dei punti e dalle deformazioni indotte durante la scansione.

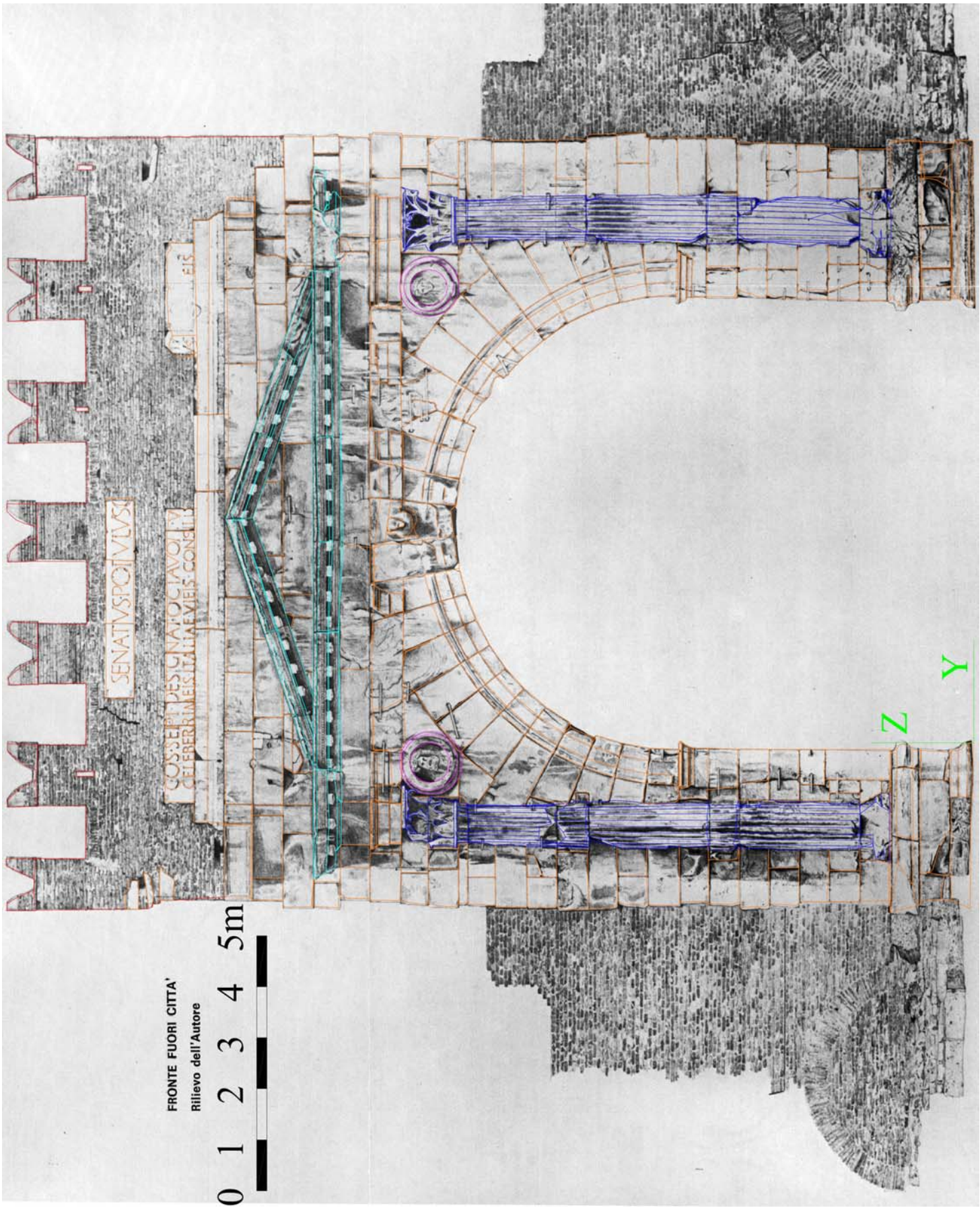



Figura 7.3 – Ortofoto dell'Angelini trasformata in modo affine secondo la formula 7.1 con i parametri della 7.13 e 7.16; sovrapposta ad essa e riportato il prospetto vettoriale realizzato per questa tesi. Scala 1:100. Questa rappresentazione è un estratto della tavola n. 6.
Questa immagine chiarisce il confronto fra i due rilievi, già eseguito nella tabella 7.2.

Quindi in output si è ottenuta un'ortofoto scalata, ruotata, traslata, deformata secondo i 6 parametri della trasformazione affine appena calcolata. Subita questa trasformazione affine per ogni pixel, l'ortofoto dell'82 era quindi pronta per essere sovrapposta al prospetto ricavato in questa tesi ( vedi figura 7.3 ).
Dalla sovrapposizione dei due elaborati grafici, derivanti dalle diverse metodologie di restituzione fotogrammetrica operate in diversi periodi storici, è possibile notare come gli scarti fra i due rilievi siano abbastanza piccoli, ovvero dell'ordine dei 3 cm ( vedi tabella 7.2 ).
In realtà tale valore di circa 3 cm potrebbe sembrare abbastanza alto, ma bisogna considerare che in questo scarto medio sono contenuti tutti gli errori di collimazione dei 14 punti per determinare i parametri della trasformazione, inoltre ci sono anche le approssimazioni di calcolo effettuate durante la trasformazione affine, tutti gli errori conseguenti alla deformazione dell'ortofoto avvenuta durante il processo di scansione, gli errori insiti nell'ortofoto originaria ( che essendo stata realizzata nell'82 è stata effettuata con metodi meno precisi degli attuali digitali ), infine va tenuta in considerazione anche l'eventualità di qualche reale spostamento della struttura, che non è possibile escludere a priori. Detto ciò si comprende chiaramente come i citati 3 cm siano un valore accettabile.

## 7.4 CONFRONTO FRA I PROSPETTI VERSO RIMINI

Il confronto fra l'ortofoto del prospetto verso Rimini ( realizzato dall'Angelini nell'82 ) ed il prospetto vettoriale ricavato dalla restituzione fotogrammetrica svolta per questa tesi è avvenuto in modo del tutto similare all'antecedente confronto dei prospetti verso Roma.
Per questo motivo si rimanda al precedente paragrafo 7.3 per ogni ulteriore informazione al riguardo dei metodi adottati per operare tale comparazione.

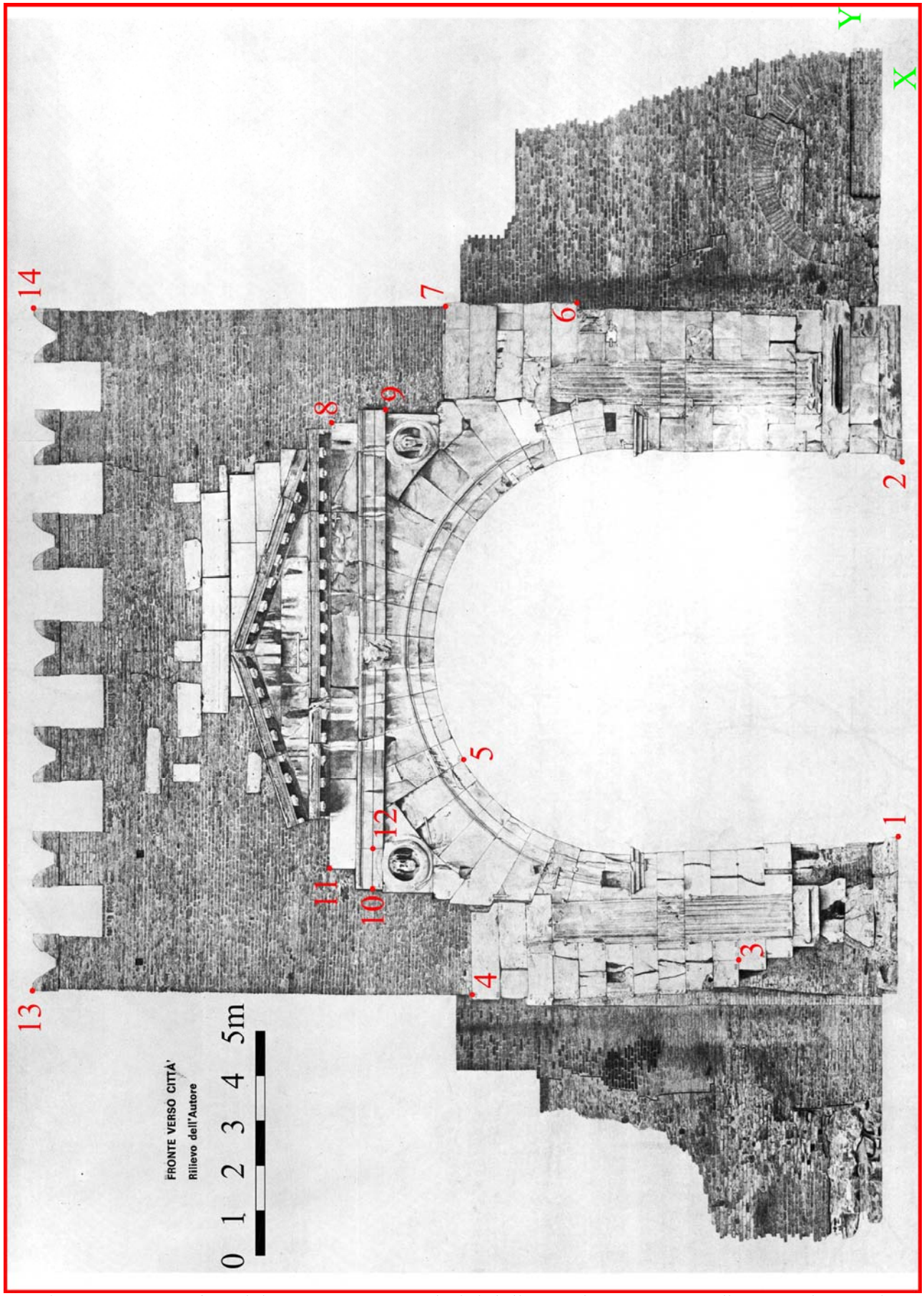



Figura 7.4 – Ortofoto del prospetto verso Rimini dell'arco d'Augusto. Realizzato nel 1982 da Roberto Angelini. Scala 1:120. In rosso sono riportati i punti doppi scelti per determinare i parametri della trasformazione affine.

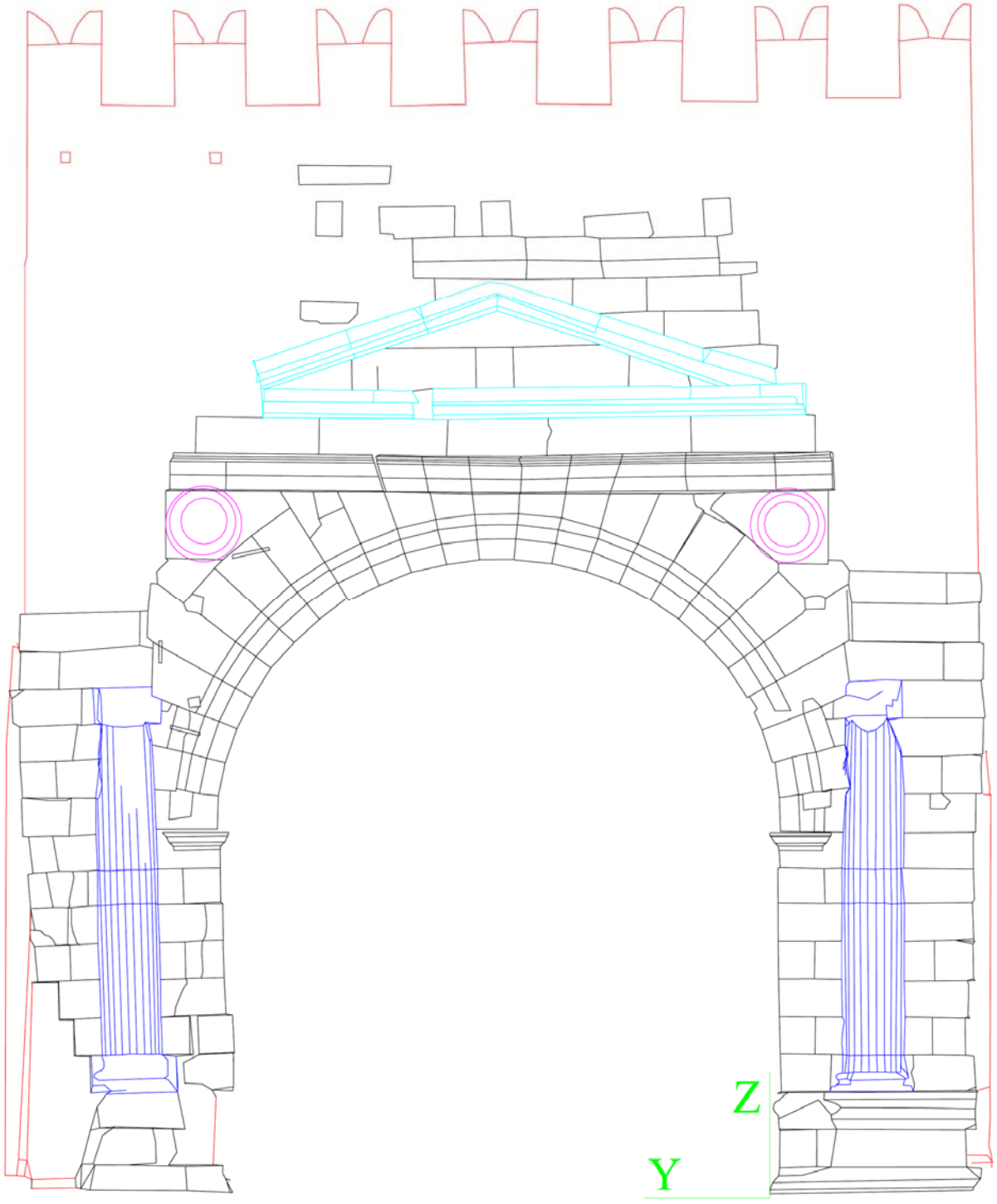



Figura 7.5 - Prospetto verso Rimini dell'arco d'Augusto. Scala 1:100

L'immagine qui sopra riporta il prospetto ricavato dalla restituzione fotogrammetrica effettuata per questa tesi, tale raffigurazione è un estratto della tavola di disegno n. 6.
In questa rappresentazione piana non sono stati riportati i 14 punti utilizzati per determinare i parametri della trasformazione affine necessaria per passare dal sistema di riferimento Oxy, dell'ortofoto dell'Angelini, al sistema di riferimento OYZ del presente prospetto.
Tali punti doppi utilizzati risultano comunque essere sempre quelli visibili in figura 7.4.
A proposito del sistema di riferimento utilizzato nel rilievo eseguito per questa tesi, vale quanto detto nel capitolo VI: l'asse Z è orientato secondo la verticale e l'asse Y è disposto come visibile qui sopra.

**Prospetto dell'arco d'Augusto rivolto verso Rimini**

| | Coordinate nel rilievo dell'Angelini del 1982 | | Coordinate nel rilievo eseguito in questa tesi | |
|---|---|---|---|---|
| **Punto** | x [ m ] | y [ m ] | Y [ m ] | Z [ m ] |
| **1** | 18.458 | 0.521 | 8.520 | 0.085 |
| **2** | 10.154 | 0.433 | 0.000 | 0.063 |
| **3** | 21.183 | 4.058 | 11.084 | 3.443 |
| **4** | 21.953 | 9.963 | 11.818 | 9.261 |
| **5** | 16.740 | 10.155 | 6.678 | 9.491 |
| **6** | 6.643 | 7.646 | -3.374 | 7.044 |
| **7** | 6.717 | 10.557 | -3.306 | 9.928 |
| **8** | 9.292 | 13.082 | -0.715 | 12.428 |
| **9** | 9.001 | 11.887 | -0.994 | 11.257 |
| **10** | 19.614 | 12.177 | 9.513 | 11.487 |
| **11** | 19.157 | 13.128 | 9.096 | 12.406 |
| **12** | 18.721 | 12.168 | 8.623 | 11.478 |
| **13** | 21.865 | 19.716 | 11.774 | 18.856 |
| **14** | 6.757 | 19.691 | -3.183 | 18.961 |

Tabella 7.3 – Coordinate dei 14 punti doppi nei due sistemi di riferimento Oxy ( quello dell'ortofoto dell'Angelini dell'82, vedi figura 7.4 ) ed OYZ ( quello del prospetto ricavato dalla restituzione fotogrammetrica eseguita per questa tesi, vedi figura 7.5 ).

Analizziamo ora in dettaglio come è stato ottenuto in output il vettore $\mathbf{y_{(4)}} \equiv [\ \lambda^4_1, \lambda^4_2, \gamma^4, \alpha^4\ ]$.

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Z_1 \\ . \\ . \\ Y_i \\ Z_i \\ . \\ . \\ Y_n \\ Z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ x_i & y_i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_i & y_i & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ x_n & y_n & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \qquad \underline{l} = \tilde{A} \cdot \underline{x} \qquad (7.17)$$

Utilizzando il sistema 7.17, riportato qui sopra, con i valori numerici della tabella 7.3 è stato possibile determinare il vettore incognito **x** nel seguente modo:

$$\hat{\underline{x}} = \left(\tilde{A}^T \cdot \tilde{A}\right)^{-1} \cdot \tilde{A}^T \cdot \underline{l} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}9945261042 \\ 0{,}001648698097 \\ -9{,}987919381 \\ -0{,}006368713437 \\ 0{,}9810430398 \\ -0{,}3518920850 \end{bmatrix} \qquad (7.18)$$

Determinato ora **x** si sono impiegate le 7.7 con la seguente condizione iniziale di parametri approssimati:

$\mathbf{y_0} \equiv [\ \lambda^0{}_1,\ \lambda^0{}_2,\ \gamma^0,\ \alpha^0\ ] \equiv [\ 1,\ 1,\ 0,\ 0\ ]$

$$\widetilde{B}_{(0)} \cdot \underline{y}_{(1)} = \underline{l}_{(0)} \qquad (7.7)$$

$$\widetilde{B}_{(0)} = \begin{bmatrix} \cos\alpha^0 + \gamma^0 \mathrm{sen}\alpha^0 & 0 & \lambda_1^0 \mathrm{sen}\alpha^0 & -\lambda_1^0 \mathrm{sen}\alpha^0 + \lambda_1^0 \cdot \gamma^0 \cdot \cos\alpha^0 \\ -\mathrm{sen}\alpha^0 + \gamma^0 \cos\alpha^0 & 0 & \lambda_1^0 \cos\alpha^0 & -\lambda_1^0 \cos\alpha^0 - \lambda_1^0 \cdot \gamma^0 \cdot \mathrm{sen}\alpha^0 \\ 0 & \mathrm{sen}\alpha^0 & 0 & \lambda_2^0 \cos\alpha^0 \\ 0 & \cos\alpha^0 & 0 & -\lambda_2^0 \mathrm{sen}\alpha^0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{y}_{(1)} = \begin{bmatrix} \lambda_1^1 \\ \lambda_2^1 \\ \gamma^1 \\ \alpha^1 \end{bmatrix} \qquad \underline{l}_{(0)} = \begin{bmatrix} a_1 + \gamma^0 \cdot \lambda_1^0 \cdot \mathrm{sen}\alpha^0 - \alpha^0 \cdot \lambda_1^0 \mathrm{sen}\alpha^0 + \alpha^0 \cdot \lambda_1^0 \cdot \gamma^0 \cos\alpha^0 \\ a_2 + \gamma^0 \cdot \lambda_1^0 \cos\alpha^0 - \alpha^0 \cdot \lambda_1^0 \cos\alpha^0 - \lambda_1^0 \cdot \alpha^0 \cdot \gamma^0 \mathrm{sen}\alpha^0 \\ b_1 + \lambda_2^0 \cdot \alpha^0 \cdot \cos\alpha^0 \\ b_2 - \alpha^0 \cdot \lambda_2^0 \mathrm{sen}\alpha^0 \end{bmatrix}$$

E quindi si è ottenuto il vettore $\mathbf{y_{(1)}}$ nel seguente modo:

$$\underline{y}_{(1)} = \left(\widetilde{B}_{(0)}\right)^{-1} \cdot \underline{l}_{(0)} = \begin{bmatrix} \lambda_1^1 \\ \lambda_2^1 \\ \gamma^1 \\ \alpha^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}9945261042 \\ 0{,}9810430398 \\ -0{,}004720015339 \\ -0{,}006368713436 \end{bmatrix} \qquad (7.19)$$

Giunti a ciò la prima iterazione si è conclusa, quindi si è proceduto con la seconda iterazione, immettendo nel sistema 7.7 come dati approssimati proprio il vettore $\mathbf{y_{(1)}}$ appena ricavato. Risolvendo il nuovo sistema 7.9 tramite la formula 7.10 ( analoga alla 7.8 ) si è ottenuto il seguente vettore $\mathbf{y_{(2)}}$:

$$\underline{y}_{(2)} = \left(\widetilde{B}_{(1)}\right)^{-1} \cdot \underline{l}_{(1)} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 \\ \lambda_2^2 \\ \gamma^2 \\ \alpha^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}9945158577 \\ 0{,}9810637043 \\ -0{,}004833955834 \\ -0{,}006491689209 \end{bmatrix} \qquad (7.20)$$

In modo del tutto analogo a quanto appena effettuato fino ad ora è stato ottenuto anche il vettore $\mathbf{y_{(3)}}$.

$$\underline{y}_{(3)} = \left(\widetilde{B}_{(2)}\right)^{-1} \cdot \underline{l}_{(2)} = \begin{bmatrix} \lambda_1^3 \\ \lambda_2^3 \\ \gamma^3 \\ \alpha^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}9945158513 \\ 0{,}9810637117 \\ -0{,}004833953216 \\ -0{,}006491686618 \end{bmatrix} \tag{7.21}$$

Proseguendo ulteriormente con l'iterazione si è ricavato anche l'ultimo vettore $\mathbf{y_{(4)}}$.

$$\underline{y}_{(4)} = \left(\widetilde{B}_{(3)}\right)^{-1} \cdot \underline{l}_{(3)} = \begin{bmatrix} \lambda_1^4 \\ \lambda_2^4 \\ \gamma^4 \\ \alpha^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}994515851372664 \\ 0{,}9810637117 \\ -0{,}00483395321678842 \\ -0{,}00649168661816991 \end{bmatrix} \tag{7.22}$$

Giunti alla quarta iterazione si è deciso di arrestare il calcolo perché si era pervenuti ad una convergenza già superiore a quella voluta.

Arrivati alla determinazione dei 6 parametri della trasformazione affine per il prospetto nord dell'arco il problema di referenziare fra loro i due rilievi era stato risolto, difatti ora che sono noti tali parametri, tramite le equazioni 7.1 è possibile passare dal sistema di riferimento Oxy dell'ortofoto al sistema di riferimento OYZ del prospetto e viceversa. Essendo adesso così facile passare da un sistema di riferimento all'altro è anche abbastanza semplice paragonare i due rilievi, ed in particolare confrontare le coordinate di qualunque punto omologo, riuscendo in questo modo a valutare lo scarto metrico fra le due rappresentazioni.

I risultati del confronto metrico fra l'ortofoto dell'82 e il presente prospetto vettoriale realizzato per questa tesi si possono osservare sia nella tabella 7.4, che permette di valutare gli scarti esatti sui 14 punti impiegati per la determinazione dei parametri della trasformazione, sia sulla figura 7.6, che riporta in forma grafica il risultato della trasformazione affine applicata sull'ortofoto.

**Prospetto dell'arco d'Augusto rivolto verso Rimini**

| | Coordinate nel rilievo dell'Angelini del 1982 | | Coordinate nel rilievo eseguito in questa tesi | | Coordinate del rilievo dell'Angelini trasformate affinemente | | Scarto in Y | Scarto in Z | Differenza |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punto | x [ m ] | y [ m ] | Y [ m ] | Z [ m ] | Y' [ m ] | Z' [ m ] | ΔY = Y-Y' [ m ] | ΔZ = Z-Z'[ m ] | ((ΔY)^2 + (ΔZ)^2)^1/2 |
| 1 | 18.458 | 0.521 | 8.520 | 0.085 | 8.370 | 0.041 | 0.150 | 0.044 | **0.157** |
| 2 | 10.154 | 0.433 | 0.000 | 0.063 | 0.111 | 0.008 | -0.111 | 0.055 | **0.124** |
| 3 | 21.183 | 4.058 | 11.084 | 3.443 | 11.086 | 3.494 | -0.003 | -0.051 | 0.051 |
| 4 | 21.953 | 9.963 | 11.818 | 9.261 | 11.861 | 9.283 | -0.043 | -0.021 | 0.048 |
| 5 | 16.740 | 10.155 | 6.678 | 9.491 | 6.677 | 9.504 | 0.001 | -0.012 | 0.012 |
| 6 | 6.643 | 7.646 | -3.374 | 7.044 | -3.369 | 7.107 | -0.005 | -0.063 | **0.064** |
| 7 | 6.717 | 10.557 | -3.306 | 9.928 | -3.290 | 9.962 | -0.016 | -0.034 | 0.037 |
| 8 | 9.292 | 13.082 | -0.715 | 12.428 | -0.725 | 12.423 | 0.010 | 0.005 | 0.011 |
| 9 | 9.001 | 11.887 | -0.994 | 11.257 | -1.017 | 11.253 | 0.022 | 0.005 | 0.023 |
| 10 | 19.614 | 12.177 | 9.513 | 11.487 | 9.538 | 11.469 | -0.025 | 0.018 | 0.031 |
| 11 | 19.157 | 13.128 | 9.096 | 12.406 | 9.086 | 12.405 | 0.010 | 0.001 | 0.010 |
| 12 | 18.721 | 12.168 | 8.623 | 11.478 | 8.651 | 11.466 | -0.027 | 0.012 | 0.030 |
| 13 | 21.865 | 19.716 | 11.774 | 18.856 | 11.790 | 18.851 | -0.016 | 0.005 | 0.017 |
| 14 | 6.757 | 19.691 | -3.183 | 18.961 | -3.236 | 18.923 | 0.053 | 0.038 | **0.065** |
| | | | | | | | Media | m | **0.048** |
| | | | | | | | Varianza | σ^2=(Σ(x-m)^2)/(n-1) | **0.001886960** |
| | | | | | | | sqm | σ | **0.0434** |

| Parametri della trasformazione affine | | | |
|---|---|---|---|
| a1 | 0.994526104200 | b1 | -0.006368713437 0 |
| a2 | 0.001648698097 | b2 | 0.981043039800 0 |
| a3 | -9.987919381000 | b3 | -0.351892085000 0 |

Tabella 7.4 – Confronto metrico fra l'ortofoto dell'82 ed il prospetto dell'arco ricavato in questa tesi. Il paragone si basa sulle 14 coordinate dei punti doppi scelti per determinare i parametri della trasformazione affine. In grassetto sono stati riportati i valori degli scarti troppo elevati, probabilmente causati da un'errata collimazione dei punti e dalle deformazioni indotte durante la scansione.

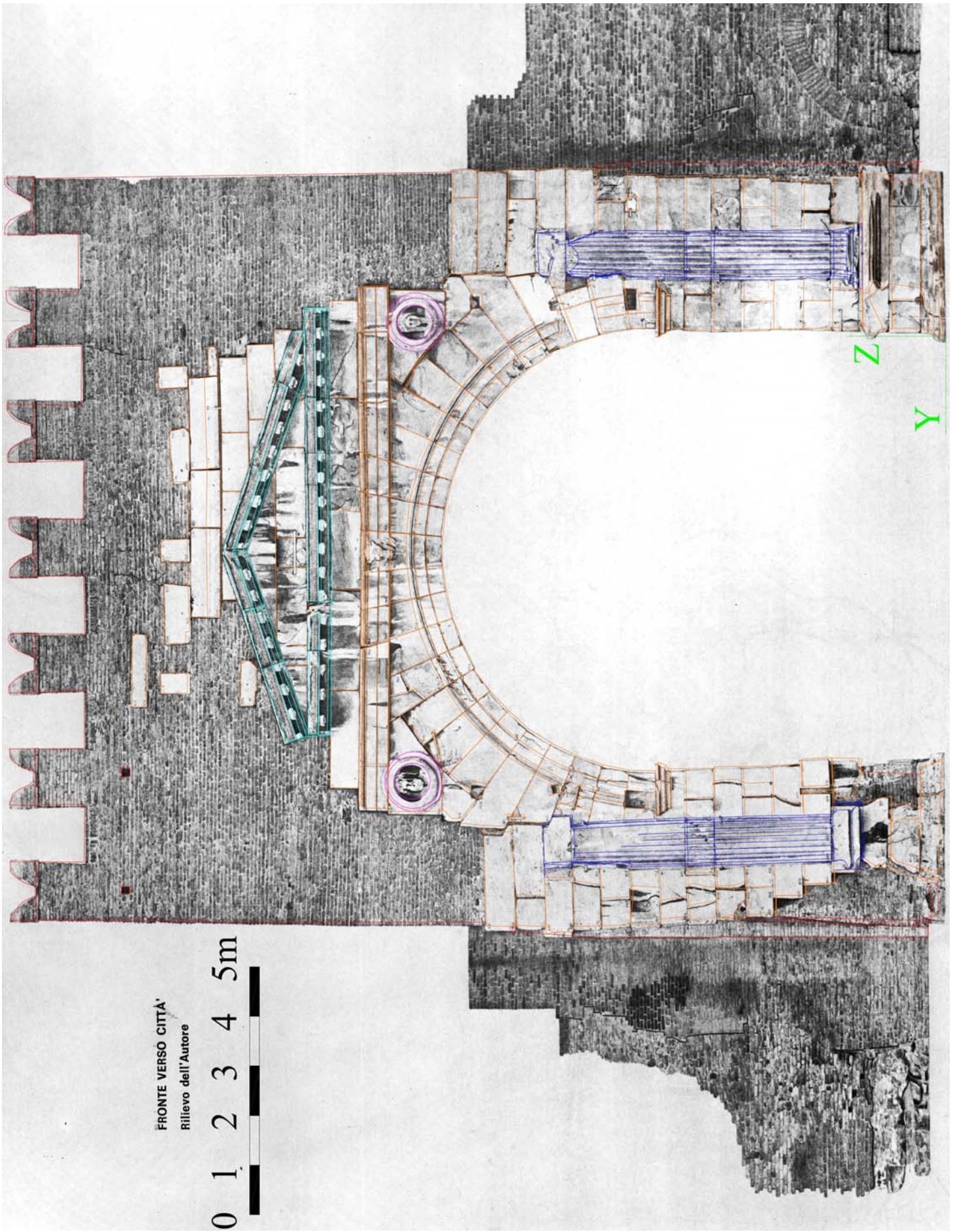



Figura 7.6 - Ortofoto dell'Angelini trasformata in modo affine secondo la formula 7.1 con i

parametri della 7.18 e 7.22; sovrapposta ad essa e riportato il prospetto vettoriale realizzato per questa tesi. Scala 1:100. Questa rappresentazione è un estratto della tavola n. 6.
Questa immagine chiarisce il confronto fra i due rilievi, già eseguito nella tabella 7.4.

Dalla sovrapposizione dei due elaborati grafici, derivanti dalle diverse metodologie di restituzione fotogrammetrica operate in diversi periodi storici, è possibile notare come gli scarti fra i due rilievi siano abbastanza piccoli per certi punti, mentre risultano elevati se non elevatissimi per altri punti ( vedi tabella 7.4 ). Questa disomogeneità nella distribuzione degli scarti è possibile osservarla ancor meglio sulla figura 7.6, qui si nota che i punti 1 e 2, impiegati per la taratura dei parametri della trasformazione affine, presentano scostamenti molto elevati, superiori ai 10 cm. Questa enorme differenza può essere spiegata solamente attraverso concause che hanno agito assieme: potrebbe essere che durante la digitalizzazione dell'ortofoto la porzione di immagine raffigurante il basamento dell'arco fosse un po' discostata dalla superficie dello scanner, inducendo così forti errori; altra possibile causa potrebbe essere ricercata nel reale spostamento dei punti 1 e 2, difatti tali spigoli potrebbero essere stati interrati nel corso dell'ultimo restauro del 1996, e quindi gli spigoli 1 e 2 del 1982 non coincidono con quelli del 2005. Molto probabilmente la combinazione delle due cause appena descritte deve aver portato ai disastrosi effetti sulla scarto di questi due punti.
Avendo calibrato la trasformazione affine su diversi punti che posseggono un grande scarto è successo che l'intera trasformazione è risultata un po' falsata, difatti la media dello scarto dei 14 punti della tabella 7.4 si avvicina ai 5 cm. Questo risulta essere un valore sufficientemente grande e non tollerabile, che comunque può essere spiegato attraverso i tipici errori indotti dalla scansione e dalla possibile reale deformazione che l'arco ha subito nel corso del tempo.
Vista la distribuzione disuniforme e l'elevata varianza degli scarti è molto probabile che tali errori siano stati indotti proprio da un'inesatta

scansione della stampa ed una possibile reale deformazione dell'oggetto. Se realmente il rilievo eseguito in questa tesi fosse stato poco preciso ( cosa non possibile ), allora anche il confronto fra i prospetti verso Roma avrebbe dovuto portare a forti errori, mentre ciò non è accaduto, quindi l'unica spiegazione del fenomeno sussiste in qualche errore indotto durante la scansione dell'ortofoto dell'Angelini.

# Capitolo VIII

La solitudine è per lo spirito ciò che il cibo è per il corpo.
Lucio Anneo Seneca ( 4 AC – 65)

# INQUADRAMENTO GEOLOGICO E GEOTECNICO DEL TERRENO AI PIEDI DELL'ARCO

## 8.1 INTRODUZIONE

In questo capitolo verranno esposte delle considerazioni al riguardo del terreno situato nei pressi dell'arco, in particolare si è cercato di riportare alcune caratteristiche geologiche generali sulla zona del centro storico di Rimini per poi concentrarsi sull'analisi specifica del terreno situato nei pressi del monumento augusteo, cercando di estrarre dei dati geotecnici dall'analisi di prove geotecniche eseguite sul terreno limitrofo alla struttura.

Purtroppo non è stato possibile rimediare molte informazioni al riguardo di tale terreno, un po' perché non sono state fatte molte prove dettagliate nella zona considerata ed un po' anche perché la reperibilità dei dati è tutt'altro che facile, soprattutto per un laureando o studente che non è abituato a "navigare" fra i meandri degli uffici comunali.

Nonostante diversi intoppi di vario tipo, alla fine l'unica informazione tecnica che sono riuscito ad ottenere al riguardo del terreno in questione è stato il grafico di una penetrometria statica meccanica C.P.T., tramite questa è stato poi possibile ricavare una stratigrafia del terreno, ed ipotizzando in modo verosimile i pesi specifici dei vari strati si è anche, tramite correlazioni proposte da vari autori, potuto stabilire i diversi parametri geotecnici del terreno. Fra questi vi è l'angolo di attrito interno $\varphi$, la coesione c ed il modulo edometrico M.

La determinazione di tali parametri geotecnici è stata mirata si dal principio, infatti l'obiettivo finale di tutta l'analisi geotecnica del terreno era quello di riuscire a determinare la capacità portante limite del terreno in questione avendo note la tipologia e geometria dell'apparato di fondazione dell'arco, questo è un classico problema di geotecnica che si è voluto mettere effettivamente in opera su di una struttura reale.

Altro motivo per cui si sono volute indagare in modo dettagliato le caratteristiche geotecniche del terreno sta nell'intenzione di voler approssimare il terreno come un solido elastico-lineare nella successiva fase di modellizzazione meccanica dell'arco agli elementi finiti; così è possibile simulare l'interazione fra sovrastruttura-fondazione-terreno ed osservare la distribuzione delle tensioni-deformazioni nel sottosuolo. Per approssimare il terreno ad un corpo elastico-lineare naturalmente sono necessari tutti i parametri reologici che caratterizzano i materiali elastici, essi sono sostanzialmente due: il modulo elastico normale di Young E ed il coefficiente di poisson ν. Per ricavare questi ultimi due parametri sono state quindi usate delle correlazioni che legano questi parametri a φ ed M del terreno. Naturalmente il terreno è tutt'altro che elastico-lineare, ma entro certi bassi range di deformazioni-tensioni l'ipotesi di comportamento ideale riesce a cogliere abbastanza bene il reale comportamento del materiale. Non certo esatta, ma comunque la modellizzazione del terreno come un solido elastico-lineare è senz'altro più veritiera rispetto alla classica schematizzazione di terreno alla Winkler, in questa teoria infatti il terreno è modellizzato come un letto uniforme di molle elastiche-lineari su cui poggia la fondazione e la sovrastruttura. Seppure elegante e semplice, la schematizzazione secondo Winkler non tiene conto dell'interazione reciproca fra le varie molle, tramite la teoria del terreno visto come corpo elastico invece si riesce ad eliminare quest'ultimo problema.

## 8.2 GEOMORFOLOGIA DEL CENTRO STORICO DI RIMINI

La zona di interesse è ubicata sul confine sud della cinta muraria medievale del centro storico di Rimini, la quota altimetrica di tale sito risulta essere a circa 5,0 m s.l.m., mentre l'intera area del centro storico si sviluppa su quote variabili dai 3,0 ai 7,0 m s.l.m.

Dal punto di vista geomorfologico il sito ricade in un'area di pianura alluvionale; i terreni in affioramento, appartenenti al 4° ordine dei terrazzi degli AA., descritti come formazione $a^4$ del Pleistocene medio-superiore nella carta del Lipparini C.G.I. F. 101 – Rimini alla scala 1:100000, sono rappresentati dalla prevalenza di sedimenti fini ( limi ed argille ) con locali aumenti di granulometria ( limosi, sabbiosi e talvolta ghiaiosi ) in corrispondenza dei paleoalvei ( ove la corrente fluviale presentava una maggiore forza trattiva ).

I depositi alluvionali fini nell'area di interesse, visti i sondaggi geognostici eseguiti in aree limitrofe fino a 20 m di profondità, e dalla bibliografia, raggiungono spessori considerevoli. I depositi di formazione marina più antichi affiorano invece qualche chilometro più a monte del sito in esame, precisamente nelle località di S. Fortunato, Spadarolo, S. Aquilina e S. Martino Monte L'Abate. In tali luoghi le formazioni in affioramento sono di tipo sabbiose-arenacee e sabbiose-argillose del Pliocene superiore.

Per quanto riguarda l'idrogeologia del sito si può dire che esso ricade ai margini dell'antico letto del torrente Ausa, dal 1968 tale fiume è stato prima tombinato e poi deviato nel letto del fiume Marecchia che passa proprio sotto il ponte di Tiberio, situato sul lato opposto della antica cinta muraria medievale rispetto al sito in esame. Nel considerare l'idrologia del sito dell'arco d'Augusto possiamo dire che il torrente Ausa ha creato in tempi passati delle modifiche idrogeologiche tuttora riscontrabili ed influenti, inoltre anche la vicinanza del sito indagato rispetto al fiume Marecchia ha le sue conseguenze al riguardo dell'idrogeologia della zona.

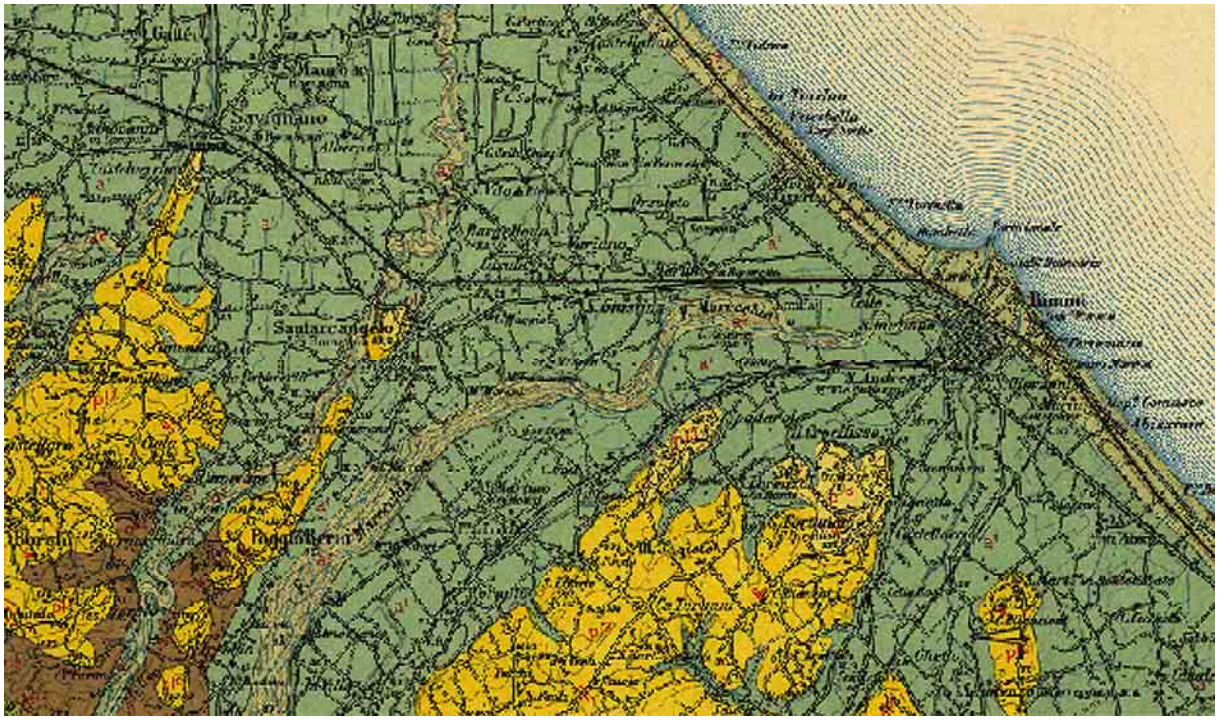


Figura 8.1 – Estratto della carta geologica d'Italia, su base topografica della cartografia italiana I.G.M. Fogli 100 e 101. Redatta da Sacco F. ( 1935 ) nella scala 1:100000.
Dalla raffigurazione riportata qui sopra è possibile notare come tutto il centro storico di Rimini ricada nella formazione verdastra, denominata $a^1$. Solamente la fascia costiera risulta invece formata da un diverso litotipo: $a^2$.

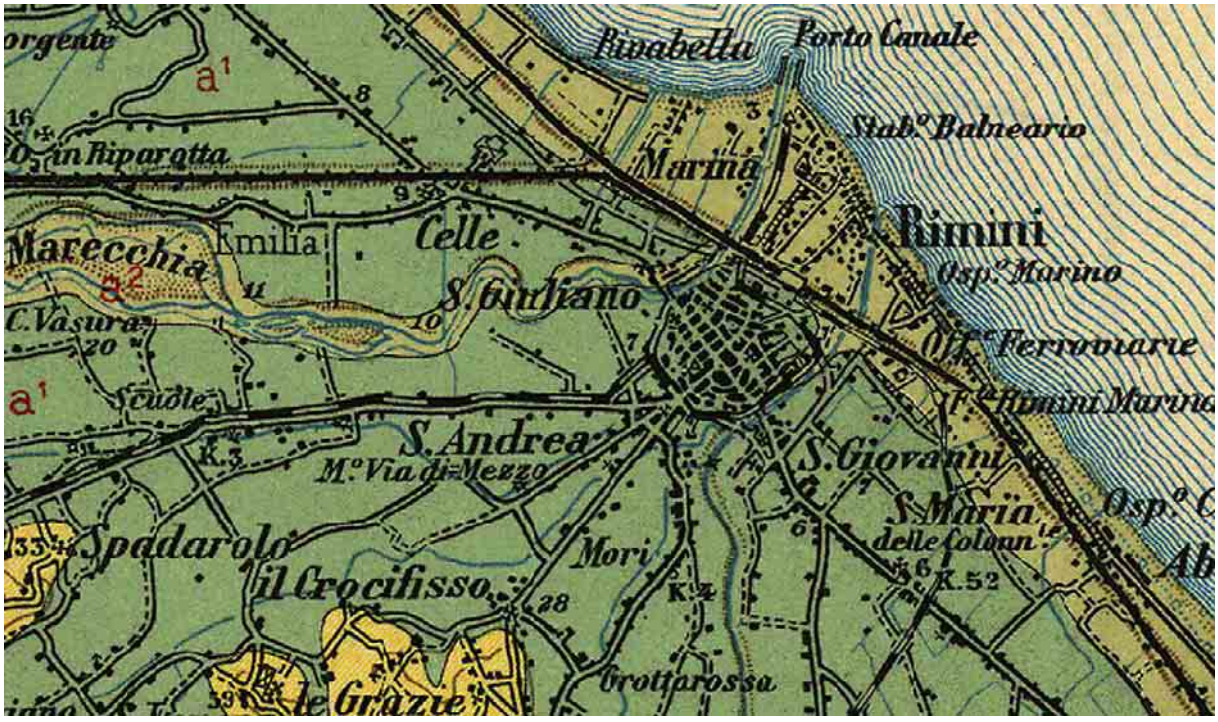



Figura 8.2 - Estratto della carta geologica d'Italia, su base topografica della cartografia italiana I.G.M. Fogli 100 e 101. Redatta da Sacco F. ( 1935 ) nella scala 1:100000.
Questa rappresentazione è un ingrandimento centrato su Rimini della precedente immagine, qui si può notare ancor meglio quanto detto per la precedente figura. E' anche possibile osservare che il fiume Marecchia è formato dagli stessi sedimenti $a^2$ che vanno a costituire anche la fascia costiera.

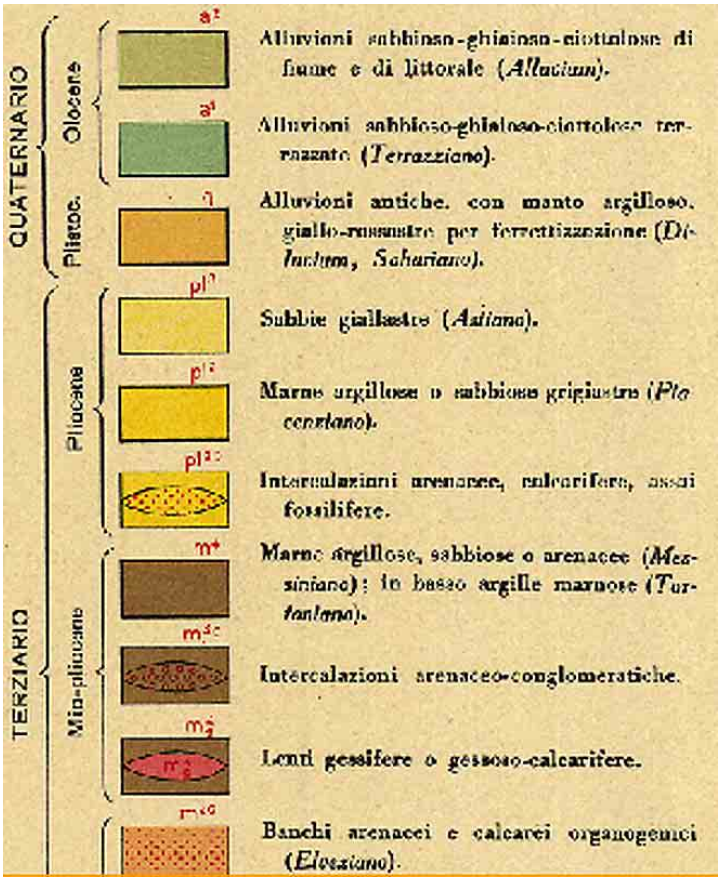



Figura 8.3 – Legenda delle formazioni della carta di Sacco.

La posizione della falda freatica non è stata possibile determinarla sulla base della prova C.P.T. fatta eseguire nei pressi dell'arco, difatti trattandosi di una prova di tipo meccanico non è effettuabile l'installazione sul penetrometro di celle di carico collegate a dei trasduttori elettrici che possono misurare la pressione interstiziale dell'acqua. Tramite una più tecnologica prova C.P.T.E. allestita con un piezocono sarebbe stato possibile misurare in continuo anche la pressione neutra u dell'acqua, in tal modo il livello della falda sarebbe stato determinato in modo inequivocabile; oltretutto con la C.P.T.E. sarebbe stato anche possibile individuare strati di terreno a bassa permeabilità, in cui la presenza di acqua produce un incremento dei valori della pressione neutra. Nonostante la prova C.P.T. non sia stata di aiuto nella determinazione del livello della falda si può comunque ipotizzare la variazione del livello della stessa da 0 a -2 m sotto il p.c. in base alle variazioni climatiche stagionali.

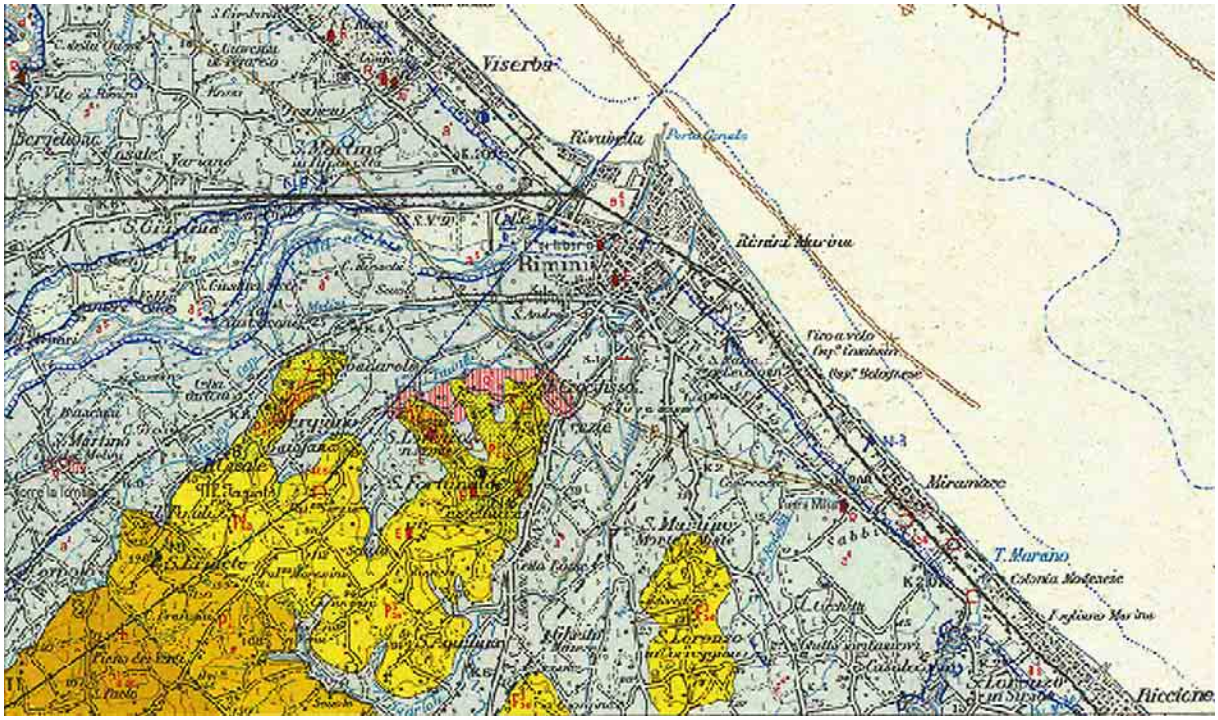



Figura 8.4 – Estratto della carta geologica del Lipparini T. ( 1967 ) nella scala 1:100000.
Nella carta riportata qui sopra sono rappresentate le formazioni geologiche affioranti nelle località vicine al comune di Rimini. E' qui possibile notare come gran parte delle zone vicine alla fascia costiera ( zone azzurrastre ) siano costituite da affioramenti di formazioni di origine continentale del Pleistocene-Olocene formate in prevalenza da sabbie, ghiaie ed argille. Inoltre sono visibili anche i depositi di conoidi alluvionali. Poco più a monte di Rimini è invece possibile constatare la presenza di intercalazioni di formazioni del Pliocene ( colore giallognolo ) costituite da argille con scarsa o modesta frazione sabbiosa.

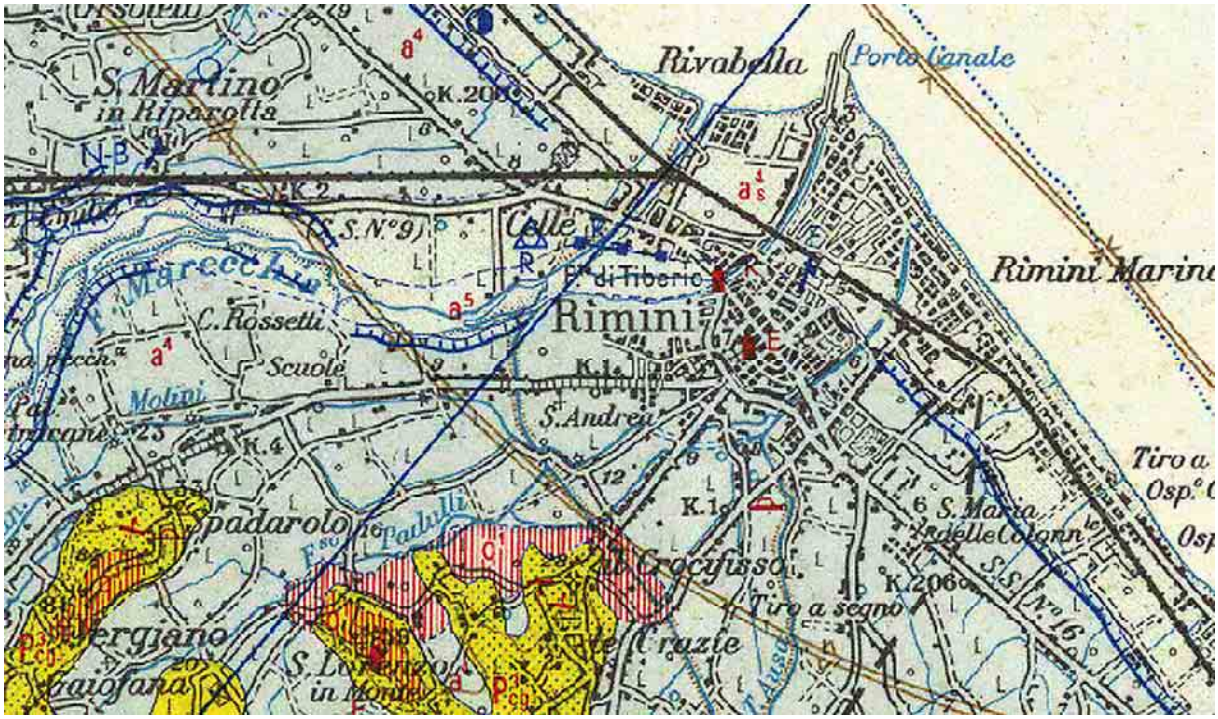
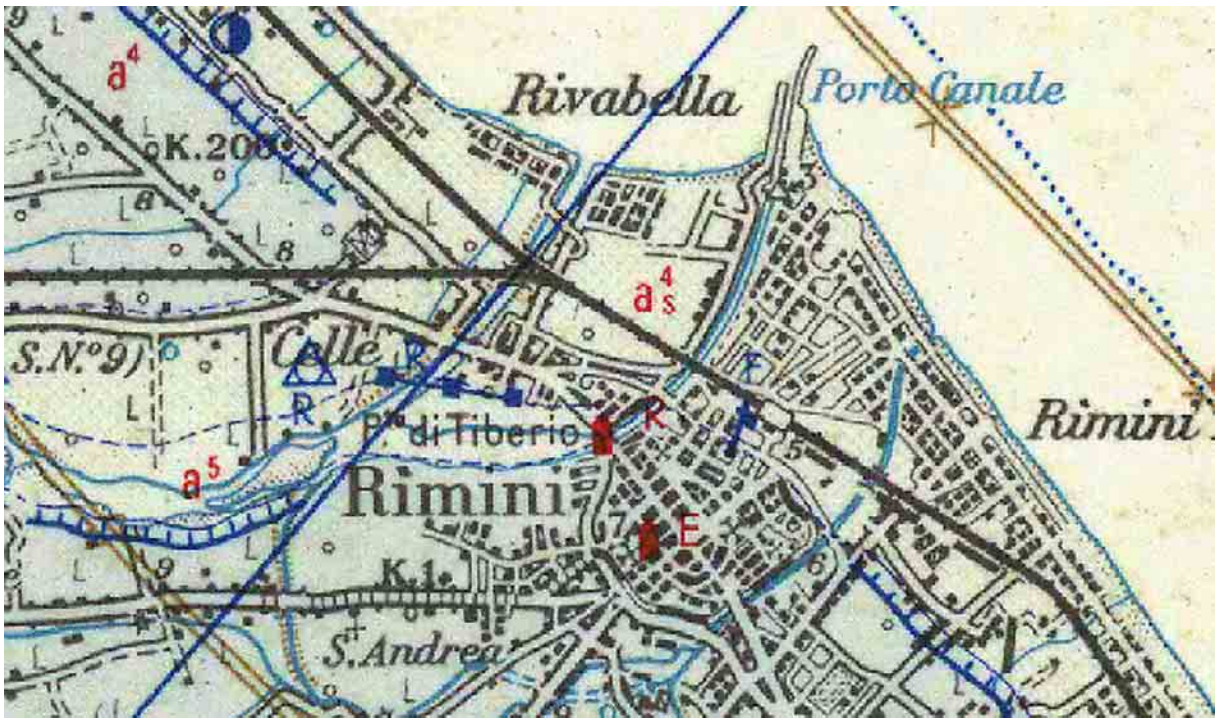



Figura 8.5 – Estratto della carta geologica del Lipparini T. ( 1967 ) nella scala 1:100000.
La rappresentazione riportata qui sopra deriva da un ingrandimento effettuato sulla parte centrale della precedente immagine. Da questa raffigurazione è possibile constatare quanto

citato nel presente paragrafo, ovvero che il centro storico di Rimini appartiene alla formazione denominata a4.




Fiugura 8.6 - Estratto della carta geologica del Lipparini T. ( 1967 ) nella scala 1:100000.
La rappresentazione riportata qui sopra deriva da un ingrandimento effettuato sulla parte centrale della precedente immagine.
La posizione dell'arco d'Augusto in questa illustrazione risulta essere poco più in basso a destra della lettera E riportata nel mezzo del centro storico di Rimini.

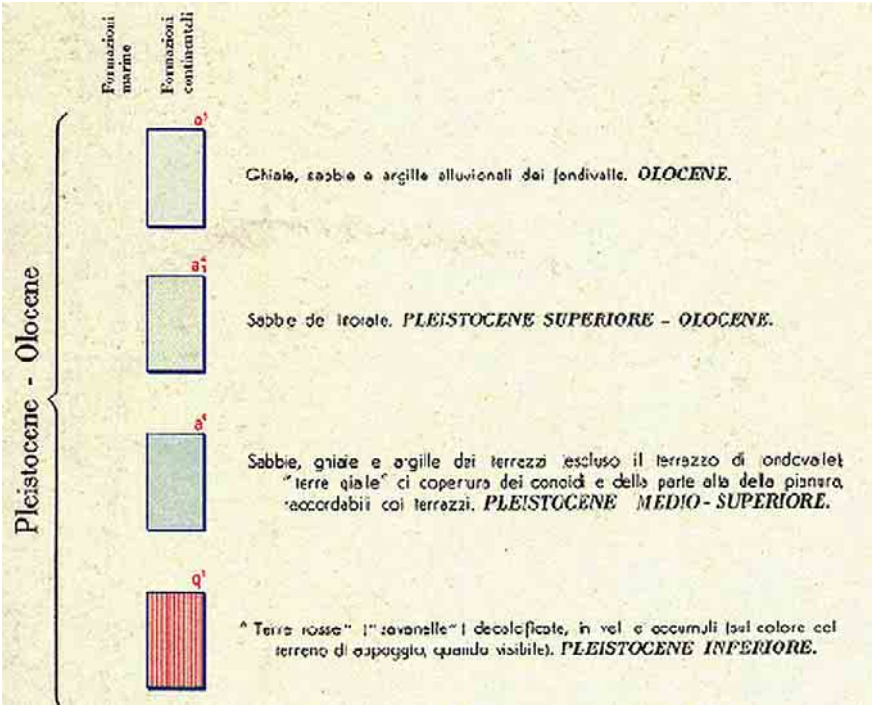



Figura 8.7 – Legenda delle formazioni continentali della carta del Lipparini T.

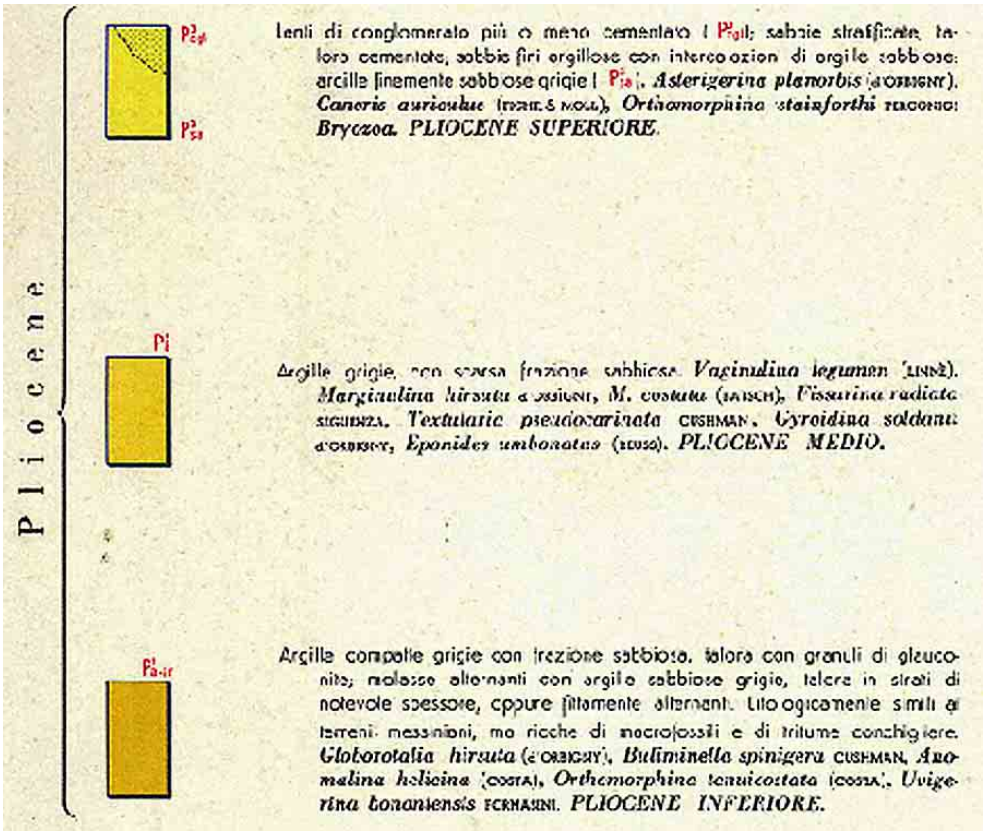



Figura 8.8 – Legenda delle formazioni marine della carta del Lipparini T.

## 8.3 LA PROVA PENETROMETRICA STATICA C.P.T.

Come è già stato detto in precedenza l'unica informazione geotecnica che si è potuta rimediare al riguardo del terreno situato nei pressi dell'arco d'Augusto è solamente un grafico risultante dall'esecuzione di una prova penetrometrica statica meccanica C.P.T. eseguita in un sito distante circa 50 metri dalla fondazione del monumento augusteo.
I risultati numerici di tale prova meccanica sono stati riportati su di un grafico in cui è visualizzato l'andamento della resistenza alla penetrazione della punta $R_p$ in funzione della profondità sotto il p.c., inoltre sempre sullo stesso foglio, ma con diversa scala, è stato riportato anche l'andamento della resistenza all'attrito laterale $R_f$. Per completezza sempre sullo stesso documento è stato graficizzato anche il rapporto $R_p$ / $R_f$.

Dopo aver analizzato in modo qualitativo i risultati della prova si è quindi proceduto ad una approssimazione delle curve graficizzate mediante una funzione discontinua costante a tratti.

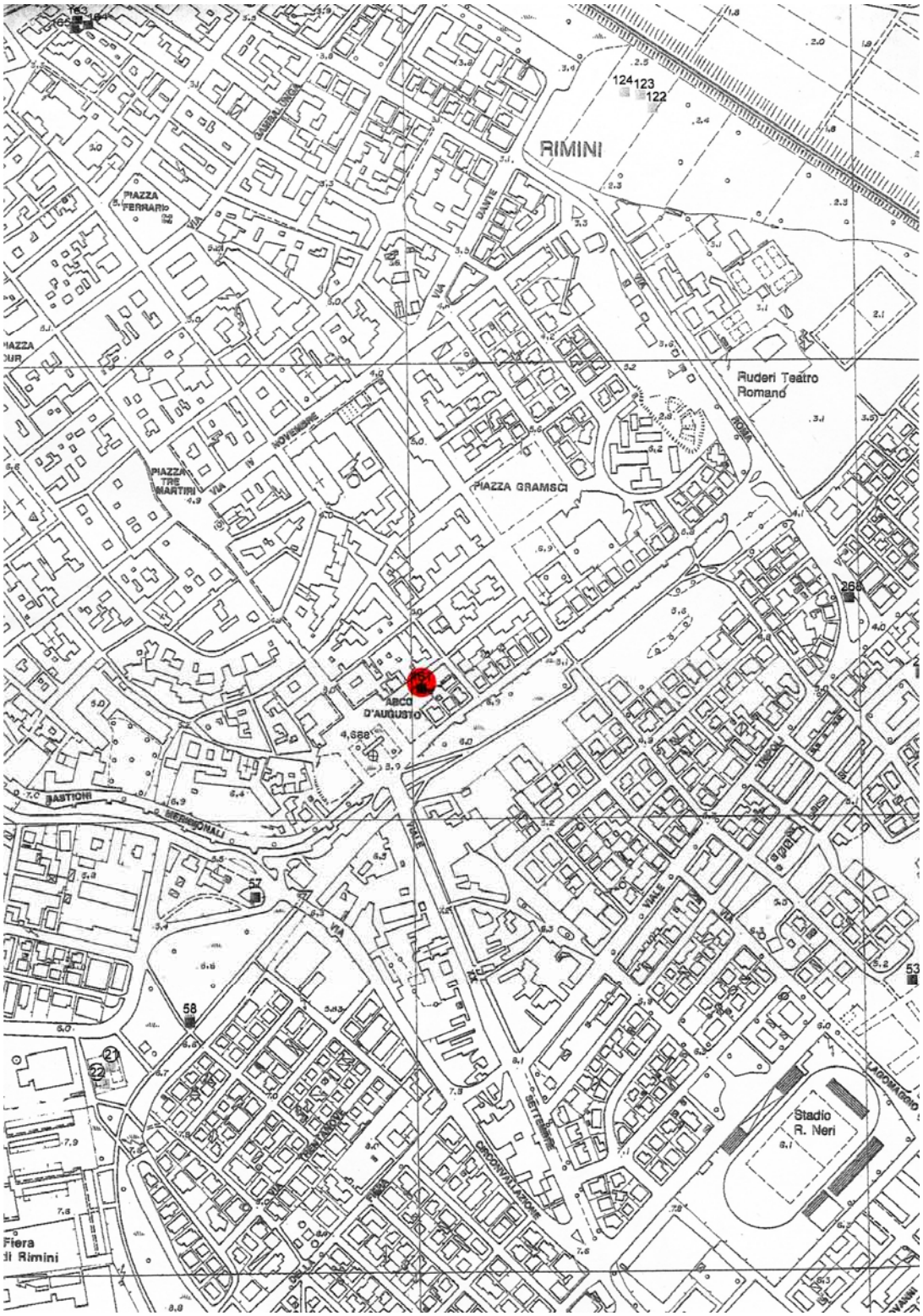



Figura 8.9 – Planimetria del centro storico di Rimini con indicazione ( in rosso ) del punto di indagine geognostica effettuata mediante la prova C.P.T. Come si vede il luogo di indagine è molto vicino all'arco d'Augusto.

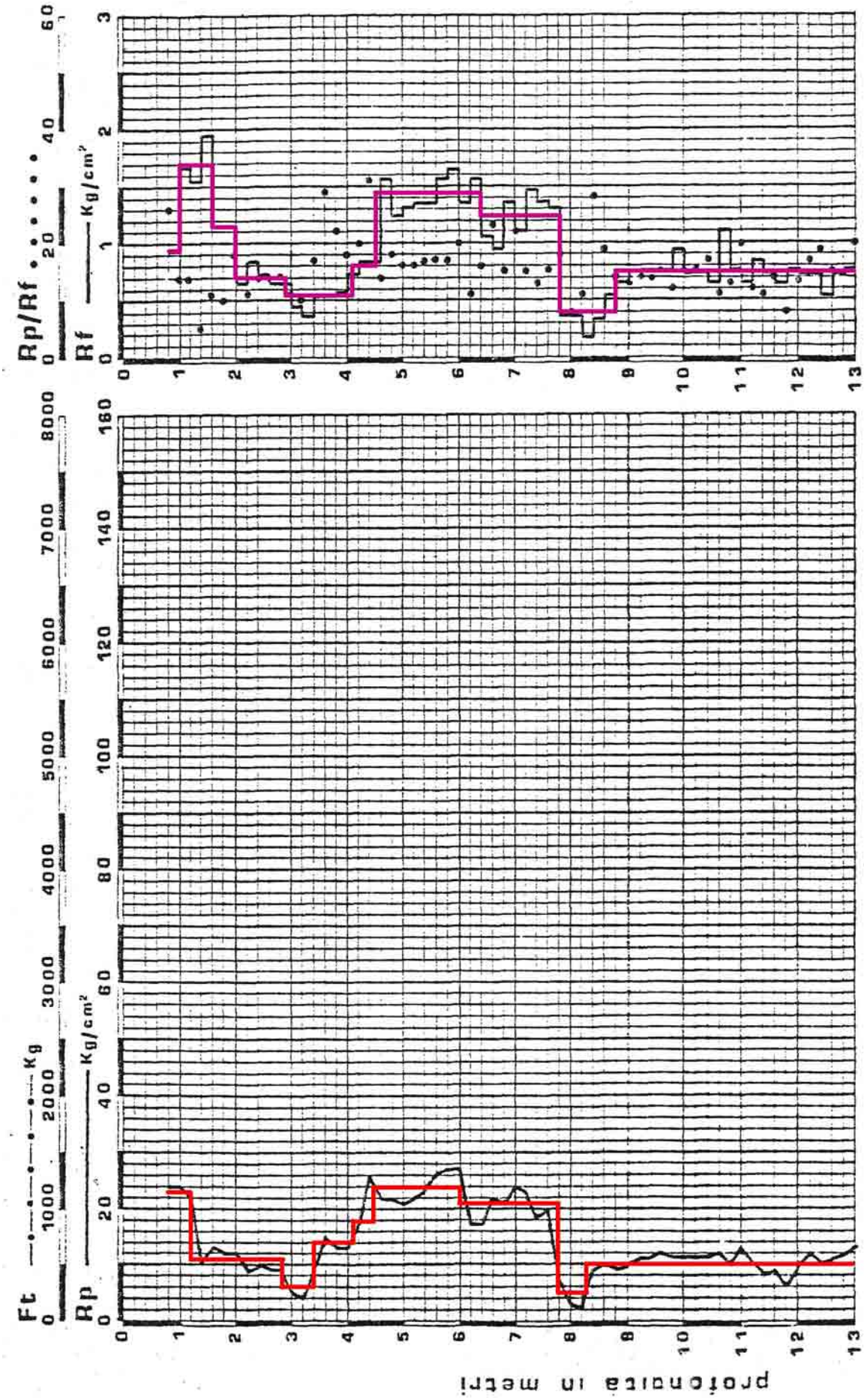



Figura 8.10 – Grafici della resistenza alla punta $R_p$ ed all'attrito laterale $R_f$ ricavati dalla C.P.T. In colore sono state riportate le funzioni che approssimano la $R_p$ e la $R_f$.

L'approssimazione dei risultati ottenuti dalla C.P.T. mediante una funzione costante a tratti è stata necessaria per poter suddividere il terreno in diversi strati dalle caratteristiche meccaniche-geotecniche omogenee; tale frammentazione risulta utile per estrarre, attraverso correlazioni proposte da diversi autori, i parametri geotecnici necessari per riuscire a modellizzare il terreno come un solido elastico-lineare costituito da diversi strati sovrapposti di caratteristiche elastiche diverse fra uno strato e l'altro, ma con omogeneità ed isotropia all'interno di ogni strato.
La segmentazione del terreno è stata effettuata in un numero di strati sufficienti per riuscire a schematizzare piuttosto bene la reale stratigrafia del terreno, naturalmente come in tutte le approssimazioni bisogna trovare un compromesso, e la scelta di una suddivisione più o meno fitta è funzione del grado di dettaglio a cui si vuole arrivare; è anche vero però che oltre certi limiti non è conveniente e significativo spingersi.
Nel caso della prova C.P.T. relativa al terreno prossimo all'arco la suddivisione del terreno in vari strati è stata la naturale conseguenza del processo di approssimazione dei grafici che riportano $R_p$ ed $R_f$ in funzione della profondità, difatti per ogni variazione numerica della coppia ( $R_p$ , $R_f$ ) è stato "creato" un diverso strato di terreno. Quest'ultima operazione è stata una giusta scelta, infatti tutti i grafici e tabelle di correlazione per individuare la stratigrafia di un terreno da una prova C.P.T. si basano sulla conoscenza di questi due valori tipici della prova: $R_p$ ed $R_f$.

## 8.4 DETERMINAZIONE DELLA STRATIGRAFIA DALLA PROVA C.P.T. E CLASSIFICAZIONE SECONDO SEARLE

Arrivati a questo punto si era gia in possesso di funzioni che approssimavano le curve $R_p = f(z)$ ed $R_f = f(z)$ e la suddivisione del terreno in vari strati era già stata effettuata, come spiegato nel

paragrafo precedente, sulla base delle variazioni della coppia di valori ( $R_p$ , $R_f$ ). Ora non restava che classificare i vari strati di terreno in base ad una correlazione che legasse i risultati della prova C.P.T. con i vari litotipi. Per fare ciò è stato utilizzato uno fra i tanti grafici di correlazione proposti da diversi autori: la classificazione secondo Searle.

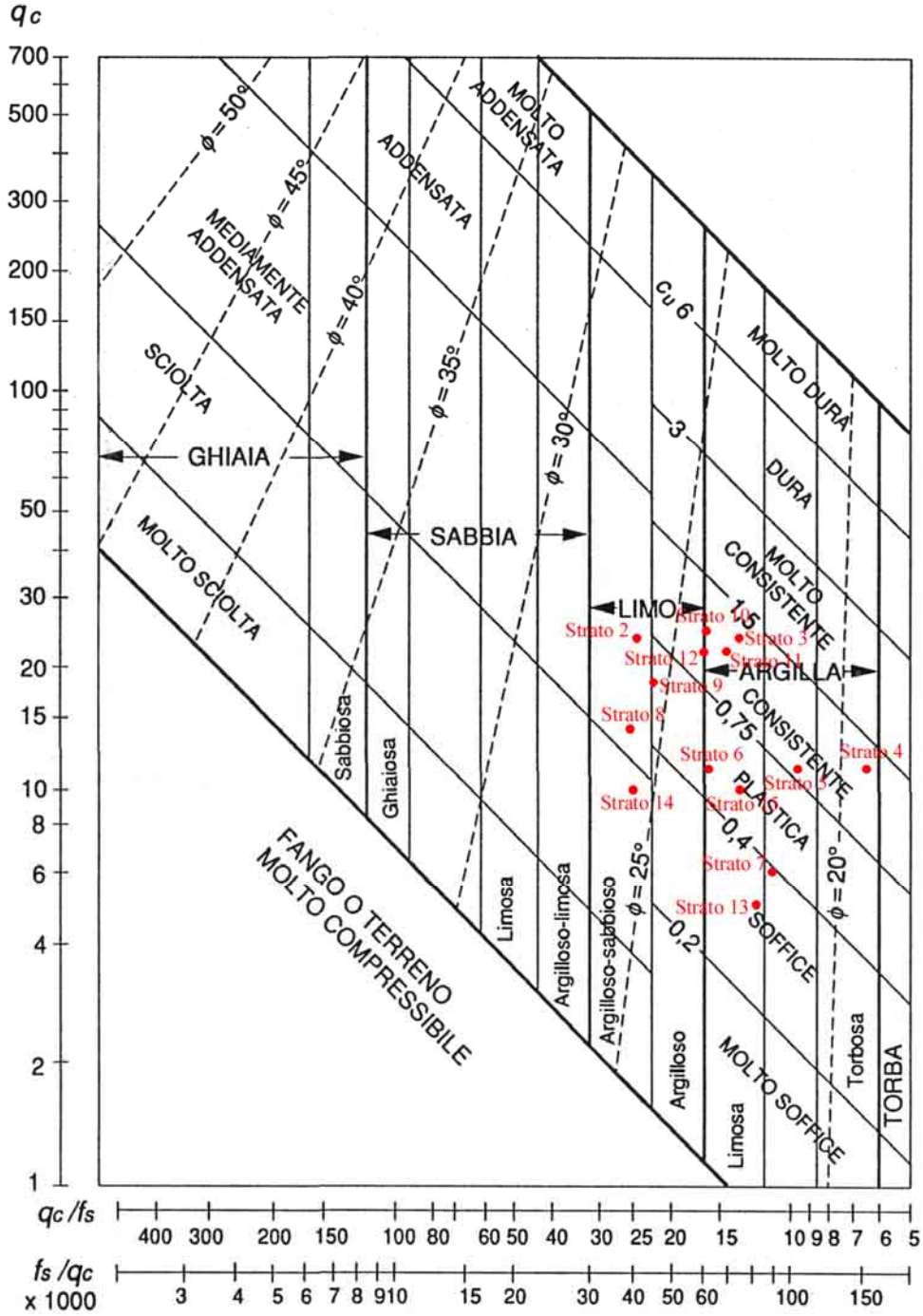



Figura 8.11 – Grafico per la classificazione dei terreni in funzione di $R_p$ ( $q_c$ ) ed $R_f$ ( $f_s$ ). ( $q_c$, $f_s$, e $c_u$ in $Kg/cm^2$ ) Con dei punti in rosso sono stati riportati i vari strati di terreno estrapolati dalla prova penetrometrica C.P.T. Classificazione secondo Searle.

Suddiviso il sottosuolo dell'arco in vari strati di terreno di spessore variabile con caratteristiche geotecniche costanti e classificati tali strati in base al grafico di figura 8.11, il passo successivo dell'analisi del terreno in questione è stato quello di ricavare i parametri geotecnici dei diversi strati mediante delle formule di correlazione che legano i parametri caratteristici della prova C.P.T. ( $R_p$ e $R_f$ ) ai tipici valori geotecnici, quali coesione c, angolo di attrito interno φ e modulo edometrico M.

## 8.5 DETERMINAZIONE DEI PARAMETRI GEOTECNICI DEI VARI STRATI SULLA BASE DELLA PROVA C.P.T.

Per determinare la capacità portante limite della fondazione dell'arco è necessario, oltre che conoscere la tipologia e geometria dell'apparato fondale, aver notizie al riguardo dei parametri del terreno quali il peso specifico allo stato naturale γ, la coesione c, l'angolo di attrito interno φ; difatti il valore limite della portanza di un terreno dipende proprio dai suddetti valori. Per questo motivo si è cercato, per mezzo di diverse formule di correlazione proposte da vari autori, di risalire a tali parametri geotecnici attraverso l'indagine C.P.T. eseguita nei pressi dell'arco.

Per la determinazione dell'angolo di attrito interno φ dei vari strati di terreno si è utilizzata la relazione proposta da Herminier:

$$R(\varphi) = \frac{R_p}{\sigma_{Vo}} \qquad (8.1)$$

Dove:

$\sigma_{Vo}$ = tensione litostatica verticale allo stato naturale = $\Sigma_i$ ( $\gamma_i * h_i$ ).

$\gamma_i$ = peso specifico dello strato i-esimo.

$h_i$ = spessore dello strato i-esimo.

$R(\varphi)$ = è un coefficiente correlato a φ tramite la tabella 8.1.

| R(φ) | 11,5 | 17,6 | 27,1 | 42,1 | 66 | 105 | 168 | 274 | 454 | 766 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| φ° | 18 | 20,5 | 23 | 26 | 28,5 | 31 | 34 | 36 | 39 | 41 |

Tabella 8.1 – Tabella di correlazione fra R(φ) e φ. Proposta da Herminier.
Per i valori intermedi non tabellati sono concesse interpolazioni lineari, mentre non è concessa nessuna estrapolazione.

Per calcolare il modulo edometrico M del terreno invece è stata adottata la seguente relazione proposta da Kulhawy e Mayne (1990):

$$M = 8{,}25 \cdot (q_t - \sigma_{Vo}) \qquad (8.2)$$

Dove:

$\sigma_{Vo}$ = tensione litostatica verticale allo stato naturale = $\Sigma_i$ ( $\gamma_i * h_i$ ).

$\gamma_i$ = peso specifico dello strato i-esimo.

$h_i$ = spessore dello strato i-esimo.

$q_t$ = resistenza alla penetrazione della punta corretta.

Per determinare la resistenza alla punta corretta è necessario avere indicazioni al riguardo della pressione neutra dell'acqua, che purtroppo non è stato possibile ricavare dalla semplice prova C.P.T. meccanica; inoltre è indispensabile conoscere anche la reale forma del penetrometro utilizzato, in modo da poter determinare l'area della superficie conica della punta.

$$q_t = R_p + u \cdot (1 - a) \qquad (8.3)$$

Dove:

$R_p$ = resistenza alla penetrazione della punta.

u = pressione neutra dell'acqua agente attorno alla punta.

a = area della superficie che descrive la punta del cono.

La mancanza dei suddetti dati ha reso un po' più difficile e meno precisa l'estrapolazione del valore M per i vari strati di terreno mediante la formula 8.2, che è stata utilizzata supponendo l'uguaglianza fra $R_p$ e $q_t$. Supposizione abbastanza lecita per grandi

penetrometri e piccoli valori delle pressioni interstiziali; d'altronde non era neanche possibile operare in un modo migliore.

Altra relazione sperimentale che permette di ricavare il modulo edometrico di un terreno sulla base di una prova C.P.T. è una dipendenza lineare fra la resistenza alla penetrazione della punta $R_p$ ed il modulo edometrico M.

$$M = \alpha_m \cdot R_p \qquad (8.4)$$

Dove:

$\alpha_m$ = coefficiente di correlazione tabellato in funzione del tipo di terreno e della classe di resistenza. Vedi tabella 8.2.

$R_p$ = resistenza alla penetrazione della punta.

| $M = 1/m_v = \alpha_m \cdot q_c$ | | |
|---|---|---|
| $q_c < 0.7$ MPa<br>$0.7 < q_c < 2.0$ MPa<br>$q_c > 2.0$ MPa | $3 < \alpha_m < 8$<br>$2 < \alpha_m < 5$<br>$1 < \alpha_m < 2.5$ | Clay of low plasticity (CL) |
| $q_c > 2$ MPa<br>$q_c < 2$ MPa | $3 < \alpha_m < 6$<br>$1 < \alpha_m < 3$ | Silts of low plasticity (ML) |
| $q_c < 2$ MPa | $2 < \alpha_m < 6$ | Highly plastic silts and clays (MH, CH) |
| $q_c < 1.2$ MPa | $2 < \alpha_m < 8$ | Organic silts (OL) |
| $q_c < 0.7$ MPa<br>$50 < w < 100$<br>$100 < w < 200$<br>$w > 200$ | <br>$1.5 < \alpha_m < 4$<br>$1 < \alpha_m < 1.5$<br>$0.4 < \alpha_m < 1$ | Peat and organic clay ($P_t$, OH) |

w = water content

Tabella 8.2 – Stima del modulo edometrico M per le argille.

Correlazioni proposte da Mitchell e Gardner ( 1975 ) sulla base delle precedenti tabelle sviluppate da Sanglerat ( 1972 ).

Nella tabella qui sopra è riportato il valore del coefficiente $\alpha_m$ in funzione del tipo di terreno, del grado di resistenza e compattazione e del contenuto d'acqua w.

Il parametro $q_c$ riportato in tabella risulta essere la resistenza di penetrazione alla punta del penetrometro C.P.T., ovvero l'equivalente di $R_p$.

Nell'ambito della determinazione del modulo edometrico M del sottosuolo dell'arco d'Augusto è stato deciso di utilizzare la relazione 8.2 in quanto questa risulta essere quella più adatta per i terreni coesivi ed a granulometria fine come quelli del sottosuolo del sito in esame.

Per quel che riguarda la coesione c invece non è stata trovata alcuna valida correlazione, difatti le uniche esistenti si basano su formule empiriche in cui ci sono coefficienti che per essere determinati necessitano di una calibrazione sperimentale.

Visti questi problemi si è quindi deciso di utilizzare i valori di c che per ogni strato è stato possibile estrapolare dalla figura 8.11., tali valori si riferiscono alla coesione non drenata $c_u$, difatti per i terreni a granulometria fine questo tipo di coesione è molto importante.

Giunti a questa situazione si è in possesso dei tre fondamentali parametri geotecnici che descrivono il comportamento meccanico del terreno, altro importante dato non ancora determinato risultava essere il peso specifico $\gamma$. Per ricavarlo, non era possibile utilizzare i dati della prova C.P.T., quindi ci si è basati sulla stratigrafia, ed a ogni strato è stato assegnato un peso specifico consono al litotipo presente. Tale assegnazione è stata fatta mediante tabelle che riportano le più svariate tipologie di terreni con diverse composizioni granulometriche.

## 8.6 MODELLIZZAZIONE DEL TERRENO COME UN SOLIDO ELASTICO-LINEARE

La schematizzazione di un terreno ad un solido elastico-lineare è abbastanza approssimativa, in realtà il terreno possiede un comportamento molto più complesso e difficilmente modellizzabile attraverso la teoria dell'elasticità, anche se combinata con quella della plasticità. Se si utilizza un modello reologico che impiega un legame fra sforzi $\sigma$ e deformazioni $\varepsilon$ di tipo elasto-plastico non lineare la simulazione meccanica del comportamento del terreno risulta più

veritiera, ma anche in questo caso non si riesce a tener conto del fatto che il terreno è un materiale che modifica i suoi parametri meccanici ( quali la compressibilità ) in funzione della storia dei processi di carico-scarico che esso ha subito nel corso del tempo, del grado di consolidazione, dal grado di saturazione e da altri fattori.
Oltretutto il terreno presenta anche un comportamento di *creep*, il quale fa si che sotto un carico costante esso continui a deformarsi.
Se il terreno risulta così complicato dal punto di vista della sua precisa modellazione numerica è anche vero che spesso non è utile spingersi fino a così complicate e raffinate simulazioni meccaniche, infatti il più delle volte per definire parametri del sofisticato modello sono necessarie precise, numerose e costose prove sperimentali dirette sul materiale in esame che possono essere giustificate solamente per casi di eccezionale importanza e di fronte a situazioni difficilmente modellabili con altri metodi più semplici.
Solamente nei casi in cui sia possibile arrivare alla determinazione sperimentale esatta di tutti i parametri del modello è legittimo l'impiego di un raffinato modello numerico, nelle altre situazioni, in cui spesso esiste una forte incertezza sulla conoscenza dei parametri geotecnici il maggior dispendio di energie non è giustificato, infatti anche se potenzialmente la simulazione numerica permette di ottenere dati in output molto precisi e dettagliati, di fatto questo non accade perché la simulazione è basata su parametri iniziali dotati di forti incertezze che finiscono per falsare i risultati finali.
Per i motivi appena suesposti si comprende quindi come la schematizzazione del terreno ad un solido elastico-lineare risulti già abbastanza accurata per la maggior parte dei casi, sicuramente più accurata della classica schematizzazione alla Winkler che non considera l'interazione reciproca fra le varie porzioni di terreno adiacenti fra loro.

Nel caso del terreno limitrofo all'arco d'Augusto la schematizzazione del sottosuolo come un corpo elastico-lineare potrebbe già essere un po' azzardata, infatti la determinazione dei parametri geotecnici si fonda solamente sulla prova penetrometrica C.P.T., che come noto, non fornisce risultati molto accurati, soprattutto perché le formule di correlazione sono empiriche e determinate in modo differente dai vari autori. La soluzione migliore sarebbe stata quella di utilizzare in modo combinato delle prove in sito ( C.P.T., sondaggi geoelettrici, esplorazioni sismiche, prove scissometriche, prove di carico con piastra, ecc…) calibrate sull'analisi di prove eseguite in laboratorio ( determinazione delle caratteristiche fisiche, composizione granulometrica, prove edometriche, prove triassiali, prove di taglio diretto, ecc…).

Naturalmente nel caso dell'arco d'Augusto, non avendo a disposizione i mezzi e permessi necessari per eseguire delle accurate indagini geognostiche ci si è dovuti accontentare dei dati che si sono ricavati dalla C.P.T. Nonostante una qualche incertezza sulla determinazione dei parametri geotecnici del terreno si è comunque voluto utilizzare una modellizzazione meccanica del terreno abbastanza complessa, che per i motivi precedentemente esposti potrebbe non essere del tutto giustificata. Questo è vero per un reale studio sul terreno commissionato effettivamente da un qualche ente, che certamente vuole ricavare dei dati il più esatti possibili; nel caso di questa tesi invece si è cercato di fare il possibile con i mezzi a disposizione, e più che del finale risultato numerico ci si è preoccupati di indagare quali siano le attuali possibilità offerte dall'elaborazione numerica.

Facciamo ora un passo indietro, e passiamo a parlare di come si può modellare il terreno come un solido elastico-lineare. Come ben noto, secondo questa teoria, il comportamento meccanico del terreno è governato dalle leggi dell'elasticità, quindi è necessario conoscere almeno i due parametri elastici fondamentali:

a) Il modulo di elasticità normale di Young E
b) Il coefficiente di poisson ν

Il modulo di elasticità tangenziale G può essere invece determinato dalla conoscenza dei precedenti due termini sulla base della seguente relazione:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \tag{8.5}$$

Purtroppo per i terreni risulta particolarmente difficile ottenere i due suddetti parametri di elasticità, un metodo che permette di procurarseli consiste nell'eseguire una prova di compressione con piastra.
Difatti per tale prova di carico realizzabile in sito è proposta la seguente formula:

$$E = C_d \cdot \frac{\Delta p \cdot D}{\Delta w} \cdot (1 - \nu^2) \cdot C_z \tag{8.6}$$

Dove:
$C_d$ = fattore di forma e rigidezza della piastra di carico.
$\Delta p$ = incremento di pressione applicato alla piastra.
D = diametro della piastra.
$\Delta w$ = cedimento del terreno.
$C_z$ = fattore di profondità dipendente dal tipo di piastra e dalla profondità sotto il piano di campagna a cui si esegue la prova.

| Forma | Centro | Bordo | Metà del lato minore | Metà del lato maggiore | Medio |
|---|---|---|---|---|---|
| Circolare | 1.00 | 0.64 | 0.64 | 0.64 | 0.85 |
| Circolare (rigida) | 0.79 | 0.79 | 0.79 | 0.79 | 0.79 |
| Quadrata | 1.12 | 0.56 | 0.76 | 0.76 | 0.95 |
| Quadrata (rigida) | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 |
| Rettangolare: Lungh./largh. | | | | | |
| 1.5 | 1.36 | 0.67 | 0.89 | 0.97 | 1.15 |
| 2 | 1.52 | 0.76 | 0.98 | 1.12 | 1.30 |
| 3 | 1.78 | 0.88 | 1.11 | 1.35 | 1.52 |
| 5 | 2.10 | 1.05 | 1.27 | 1.68 | 1.83 |
| 10 | 2.53 | 1.26 | 1.49 | 2.12 | 2.25 |
| 100 | 4.00 | 2.00 | 2.20 | 3.60 | 3.70 |
| 1000 | 5.47 | 2.75 | 2.94 | 5.03 | 5.15 |
| 10000 | 6.90 | 3.50 | 3.70 | 6.50 | 6.60 |

Tabella 8.3 – Fattore $C_d$

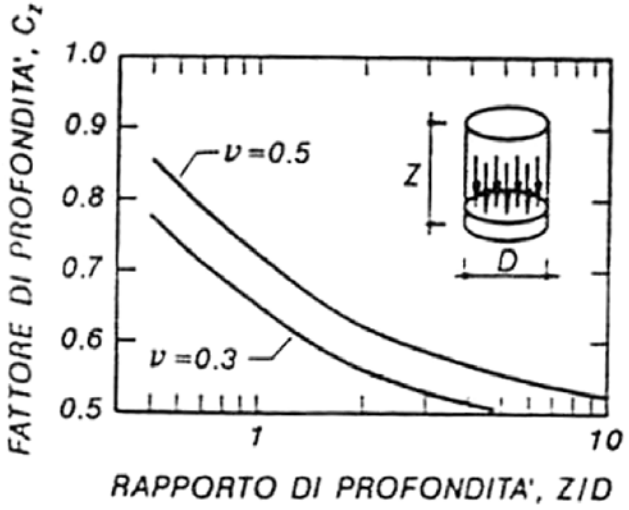



Tabella 8.4 – Fattore $C_z$

Nel caso dell'arco d'Augusto, non disponendo dei risultati di una prova di carico con piastra, per determinare i parametri elastici ν ed E sono state impiegate delle formule che correlano tali valori con i parametri geotecnici φ ed M ricavati dalla prova C.P.T.
Tali relazioni sono le seguenti:

$$\nu = \frac{1 - \operatorname{sen}\varphi}{2 - \operatorname{sen}\varphi} \tag{8.7}$$

$$E = M \cdot \frac{(1+\nu)\cdot(1-2\nu)}{1-\nu} \tag{8.8}$$

Attraverso le 8.7 ed 8.8 è quindi possibile caratterizzare il terreno come un corpo elastico, l'ultimo dato che per l'analisi delle tensioni-deformazioni nel terreno non può mancare è il peso specifico dei vari strati, che come detto in precedenza, esso è stato ricavato sulla base dell'analisi stratigrafica: ad ogni strato è stato assegnato un γ consono al litotipo presente. Tale assegnazione è stata fatta mediante tabelle che riportano il γ per le più svariate tipologie di terreni con diverse composizioni granulometriche.
Dall'impiego delle formule 8.1, 8.2, 8.5, 8.7 ed 8.8 sono stati ricavati tutti parametri necessari per "costruire" il modello meccanico del terreno, tutti i dati numerici ottenute con le suddette relazioni ( impiegate per ogni strato ) sono state poi sintetizzate nella tabella 8.5.
Il fine principale per cui si sono volute determinare le caratteristiche geotecniche ed i parametri elastici del terreno è quello di poter calcolare la capacità portante limite della fondazione dell'arco d'Augusto, inoltre, in secondo luogo, per schematizzare il sottosuolo come un solido elastico-lineare da utilizzare nella successiva modellazione meccanica F.E.M. del complesso arco-fondazione-terreno.

| Strato | Profondità sotto il piano di campagna da [ m ] | Profondità sotto il piano di campagna a [ m ] | Spessore dello strato h [ m ] | Calassificazione di Searle | Peso specifico γ [ Kg/mc ] | $R_P$ [ Kg/cmq ] | $R_T$ [ Kg/cmq ] | $R_P$ / $R_T$ | Tensione litostatica a metà strato $\sigma_{vo}$ [ Kg/cmq ] | Angolo di attrito φ° | Modulo edometrico M [ Kg/cmq ] | Coesione non drenata $c_u$ [ Kg/cmq ] | Coeff. di poisson ν | Modulo elastico normale di Young E [ kg/cmq ] | Modulo elastico tangenziale G [ Kg/cmq ] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.00 | 0.60 | 0.60 | Sabbia | 1850 | - | - | - | 0.056 | 33.0 | 600.00 | 0.00 | 0.31 | 429.03 | 163.39 |
| 2 | 0.60 | 1.00 | 0.40 | Limo argilloso-sabbioso | 1950 | 23 | 0.95 | 24.21 | 0.150 | 33.3 | 188.51 | 0.75 | 0.31 | 135.67 | 51.75 |
| 3 | 1.00 | 1.20 | 0.20 | Argilla limosa consistente | 1900 | 23 | 1.70 | 13.53 | 0.208 | 31.3 | 188.03 | 1.35 | 0.32 | 129.39 | 48.84 |
| 4 | 1.20 | 1.60 | 0.40 | Argilla torbosa consistente | 1850 | 11 | 1.70 | 6.47 | 0.264 | 25.5 | 88.57 | 1.30 | 0.36 | 51.97 | 19.07 |
| 5 | 1.60 | 2.00 | 0.40 | Argilla consistente-plastica | 1900 | 11 | 1.15 | 9.57 | 0.339 | 24.0 | 87.95 | 0.75 | 0.37 | 49.09 | 17.89 |
| 6 | 2.00 | 2.90 | 0.90 | Argilla limosa plastica | 1850 | 11 | 0.70 | 15.71 | 0.460 | 22.2 | 86.95 | 0.50 | 0.38 | 45.46 | 16.43 |
| 7 | 2.90 | 3.40 | 0.50 | Argilla plastica-soffice | 1800 | 6 | 0.55 | 10.91 | 0.589 | 18.0 | 44.64 | 0.40 | 0.41 | 19.43 | 6.90 |
| 8 | 3.40 | 4.10 | 0.70 | Limo argilloso-sabbioso mediamente addensato | 2000 | 14 | 0.55 | 25.45 | 0.704 | 21.1 | 109.70 | 0.40 | 0.39 | 54.90 | 19.75 |
| 9 | 4.10 | 4.50 | 0.40 | Limo argilloso plastico | 2000 | 18 | 0.80 | 22.50 | 0.814 | 21.7 | 141.79 | 0.60 | 0.39 | 72.69 | 26.21 |
| 10 | 4.50 | 6.00 | 1.50 | Argilla limosa consistente | 1900 | 24 | 1.45 | 16.55 | 0.996 | 22.2 | 189.78 | 1.30 | 0.38 | 99.21 | 35.85 |
| 11 | 6.00 | 6.40 | 0.40 | Argilla limosa consistente | 1900 | 21 | 1.45 | 14.48 | 1.177 | 20.6 | 163.54 | 1.30 | 0.39 | 80.17 | 28.77 |
| 12 | 6.40 | 7.80 | 1.40 | Limo argilloso consistente | 1900 | 21 | 1.25 | 16.80 | 1.348 | 19.7 | 162.13 | 1.10 | 0.40 | 76.44 | 27.33 |
| 13 | 7.80 | 8.30 | 0.50 | Argilla limosa soffice | 1780 | 5 | 0.40 | 12.50 | 1.525 | 18.0 | 28.67 | 0.30 | 0.41 | 12.48 | 4.43 |
| 14 | 8.30 | 8.80 | 0.50 | Limo argilloso-sabbioso sciolto | 2000 | 10 | 0.40 | 25.00 | 1.620 | 18.0 | 69.14 | 0.35 | 0.41 | 30.10 | 10.68 |
| 15 | 8.80 | 13.00 | 4.20 | Argilla limosa plastica | 1850 | 10 | 0.75 | 13.33 | 2.058 | 18.0 | 65.52 | 0.55 | 0.41 | 28.52 | 10.12 |
| 16 | 13.00 | 20.00 | 7.00 | Argilla limosa plastica | 1850 | 10 | 0.75 | 13.33 | 3.094 | 18.0 | 56.97 | 0.55 | 0.41 | 24.80 | 8.80 |
| **Media dei valori pesata sullo spessore degli strati** | | | | | *1870.75* | | | | | *20.0* | *103.88* | *0.65* | *0.40* | *54.94* | *20.05* |

Tabella 8.5 – Scheda riassuntiva della stratigrafia del terreno prossimo all'arco d'Augusto. In rosso sono riportati i valori medi pesati sullo spessore degli strati.

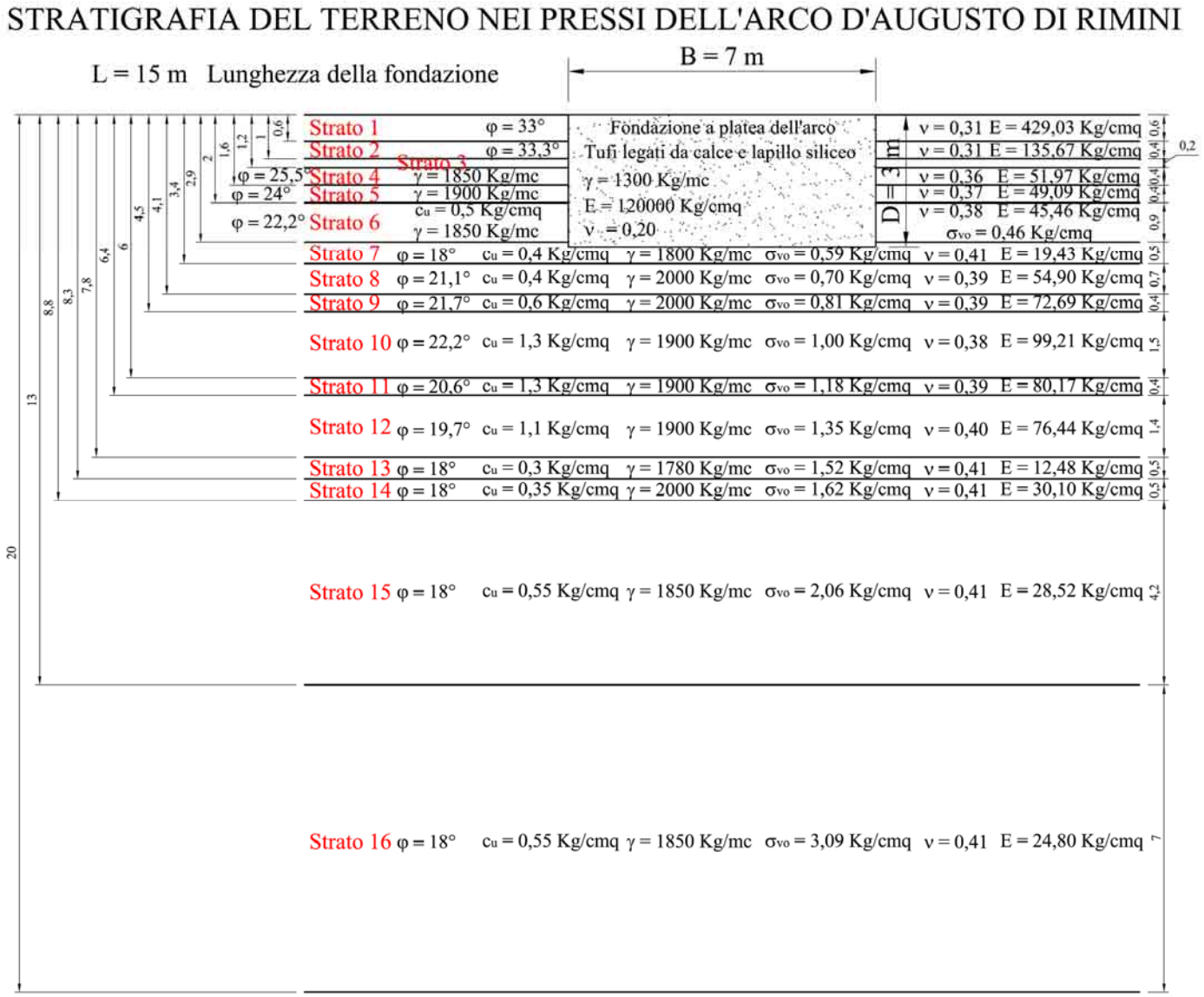



Figura 8.12 – Stratigrafia del terreno sottostante all'arco d'Augusto. Scala 1:150

In questa immagine è possibile vedere molto bene i vari spessori dei diversi strati di terreno con diverse caratteristiche geotecniche.

Assieme alla stratigrafia del sottosuolo è stato riportato anche l'apparato fondale dell'arco, che risulta essere una platea di fondazione, costituita da " Tufi legati da calce e lapilli silicei".

Le dimensioni della platea sono veramente enormi: 3 metri di profondità, 7 metri di larghezza e 15 metri di lunghezza. Tale mastodontico aggregato lapideo deve essere stato progettato dai Romani probabilmente per evitare ogni possibile cedimento differenziale della sovrastruttura, evitando così elevati stati tensionali nella stessa.

Per maggiori informazioni al riguardo della fondazione a platea dell'arco d'Augusto vedere i paragrafi 2.4.2 e 3.2.2.1.

A conclusione della fase di modellazione meccanica del terreno si può dire che esso è molto stratificato, soprattutto nei primi metri sotto il p.c., ( vedi figura 8.12 ) inoltre la granulometria prevalente negli strati è quella appartenete all'argilla e limo ( vedi figura 8.11 ).

## 8.7 CALCOLO DELLA CAPACITA' PORTANTE LIMITE

In questo paragrafo viene determinata la capacità portante limite del complesso terreno-fondazione dell'arco d'Augusto, per trovare questo valore di estrema importanza sono stati utilizzati due metodi: il primo è basato sulla prova C.P.T., mentre il secondo si basa sull'impiego di formule ricavate da studi teorici di equilibrio limite.

### *8.7.1 Determinazione della capacità portante limite $q_{lim}$ dall'analisi della prova C.P.T.*

Il primo metodo che andiamo ora a descrivere si basa sull'impiego della prova C.P.T., senza di essa non è possibile effettuare questo tipo di determinazione della capacità portante limite $q_{lim}$.
Il concetto su cui si basa questo metodo è molto semplice: si calcola il valore della resistenza alla punta $R_p$ come media fra le letture eseguite tra le quote B/2 sopra e 1,1B sotto il piano fondale; tramite delle correlazioni di origine sperimentale è poi possibile risalire al valore della capacità portante limite.
Nel caso in esame per determinare la $R_{p\ media}$ si deve esaminare lo strato di terreno che va da 0 a 10,7 m sotto il piano di campagna ( difatti B = 7 m, D = 3 m ).
Visto che il terreno è stato suddiviso in 16 strati, e tenuto conto anche del fatto che il quindicesimo strato arriva fino a 13 metri di profondità, per eseguire la media di $R_p$ si sono andati a prendere in considerazione i primi 15 strati di terreno.
Per definire la $R_{p\ media}$ la formula esatta da impiegare deriva dalla definizione di media di una funzione su di un intervallo; data la funzione $R_p = f(z)$, graficizzata nel grafico di figura 8.10, il valore medio di questa nell'intervallo $(z_1, z_2)$ risulta essere il seguente:

$$R_{p\ media} = \frac{\int_{Z_1}^{Z_2} R_p(z)\,dz}{z_2 - z_1} \qquad (8.9)$$

La precedente formula 8.9 risulta molto esatta, ma allo stesso tempo è anche abbastanza complicata da utilizzare; per semplificare il calcolo della $R_{p\ media}$ si è quindi utilizzata una media pesata sullo spessore degli strati ( formula 8.10 ). Tale mediazione è stata fatta impiegando i primi 15 strati di terreno.

$$R_{p\ media} = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_{p\,i} \cdot h_i}{\sum_{i=1}^{n} h_i} \qquad (8.10)$$

Dove:

$R_{pi}$ = resistenza alla punta dello strato i-esimo. Vedi tabella 8.5.

$h_i$ = spessore dello strato i-esimo. Vedi tabella 8.5.

n = numero degli strati presi in esame. Nel nostro caso i primi 15.

$$R_{p\ media} \cong \frac{\sum_{i=1}^{15} R_{p\,i} \cdot h_i}{\sum_{i=1}^{15} h_i} = 14{,}18\ \mathrm{Kg/cm^2}$$

A questo punto avendo calcolato il valore della $R_{p\ media}$ secondo le indicazioni prescritte dal metodo, tramite la tabella 8.6 si correla la $R_{p\ media}$ con la $q_{lim}$.

| | suoli granulari | suoli coesivi |
|---|---|---|
| fond. nastriformi | $q_d = 28 - 0.0052\ (300 - q_c)^{1.5}$ | $q_d = 2 + 0{,}28 q_c$ |
| fond. quadrate | $q_d = 48 - 0.009\ (300 - q_c)^{1.5}$ | $q_d = 5 + 0{,}34 q_c$ |
| $q_c$ in $kg/cm^2$ | | |

Tabella 8.6 – Formule di correlazione fra $q_{lim}$ ( $q_d$ ) e la $R_{p\ media}$ ( $q_c$ ).

Nel caso dell'arco d'Augusto dalla tabella 8.6 si è scelta la formula relativa ai suoli coesivi con fondazione nastriforme. Di fatto la platea dell'arco si avvicina maggiormente ad una fondazione quadrata, ma

per via cautelativa si è preferito adottare la correlazione proposta per le fondazioni nastriformi.

$$q_{lim}^{C.P.T.} = 2 + 0{,}28 \cdot R_{p\,media} = 2 + 0{,}28 \cdot 14{,}18 = 5{,}97\ Kg/cm^2$$

Giunti a determinare il valore di $q^{C.P.T.}_{lim}$, pari a 5,97 Kg / cmq si può proseguire ulteriormente con i calcoli trovando il valore massimo ammissibile della tensione sul piano di fondazione; difatti la tensione limite risulta quel valore per cui si ha una rottura generale del terreno intorno all'arco con conseguenti grandi cedimenti.
Generalmente ci si vuole cautelare dal fenomeno appena descritto con un certo margine di sicurezza, ecco quindi che la normativa propone di non superare mai un certo valore limite ammissibile della tensione sul piano di fondazione. Tale valore ammissibile è definito come un terzo del carico limite:

$$\sigma_{amm} = \frac{q_{lim}}{3} \qquad (8.11)$$

Servendosi della formula 8.11 si riesce a quantificare la $\sigma_{amm}$ per il caso in esame, tale valore risulta essere di $\sigma_{amm}$ = 2 Kg / cmq.

### *8.7.2 Determinazione della capacità portante limite $q_{lim}$ tramite formule teoriche di equilibrio limite*

Le principali equazioni sviluppate per il calcolo della capacità portante considerano una rottura del terreno provocata dal cedimento verticale della fondazione che cede solidale con un cuneo di terra sottostante e che provoca perciò la rottura del terreno laterale lungo una superficie arcuata ( vedi figura 8.13 ).
Le equazioni più diffuse sono quelle di *Terzaghi*, *Meyerhof*, *Hansen* e *Vesic*. Queste equazioni generali sono tutte composte da tre termini che rappresentano rispettivamente il contributo dovuto alla coesione,

all'angolo d'attrito interno ed al sovraccarico dello strato di terreno sopra il piano fondale.

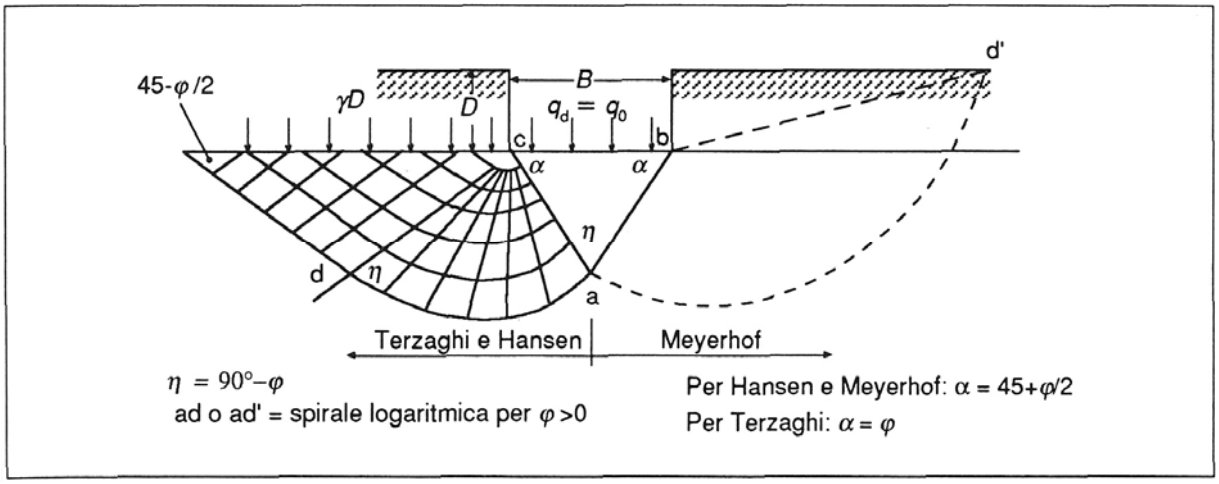



Figura 8.13 – Schema di rottura del terreno sotto la fondazione secondo Terzaghi, Hansen, e Meyerhof.

In tutte le equazioni compaiono tre caratteristici coefficienti di portanza, funzione dell'angolo di attrito interno e che sono rappresentati da tre lettere: $N_c$, $N_q$, $N_\gamma$.

*Terzaghi* considera nelle sue ipotesi un cuneo avente un angolo $\alpha = \varphi$ ( mentre gli altri autori usano $\alpha = 45° + \varphi/2$ ) e una superficie di rottura laterale che inizia a spirale per terminare con un tratto rettilineo.

Ciò porta a sostanziali differenze nel calcolo dei coefficienti di portanza rispetto agli altri autori.

Essendo quella di Terzaghi la prima formula utilizzata in grande scala è sicuramente anche la più verificata; è affidabile per fondazioni superficiali dove $D \leq B$ e per suoli prevalentemente argillosi ( come quello dell'arco d'Augusto ).

Bisogna ricordare che tutte le teorie sviluppate dai diversi autori presuppongono l'esistenza di un terreno omogeneo, quindi risulta impossibile impiegare queste formule ( derivanti dall'analisi di equilibrio limite del complesso fondazione-terreno ) per calcolare la capacità portante limite di un terreno fortemente stratificato come quello sotto l'arco.

Per ovviare a questo grave inconveniente, visto che tutti i diversi strati presentano caratteristiche geotecniche molto simili, si è pensato di approssimare il terreno stratificato ad un terreno omogeneo avente caratteristiche geotecniche pari alla media pesata sullo spessore di tutti i 16 strati. Matematicamente, per ogni parametro geotecnico è stato ricavato il parametro medio dell'equivalente terreno omogeneo, mediante l'utilizzo della seguente formula:

$$p_{medio} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot h_i}{\sum_{i=1}^{n} h_i} \qquad (8.12)$$

Dove:

p = parametro geotecnico considerato ( φ, γ, E, M, c, ecc… ).

$p_i$ = valore del parametro geotecnico nello strato i-esimo.

$h_i$ = spessore dello strato i-esimo.

$p_{medio}$ = valore medio pesato (sugli spessori) del parametro geotecnico considerato.

n = numero degli strati su cui si fa la media. Nel nostro caso 16.

I risultati ottenuti dalla media utilizzando la formula 8.12 sono stati poi riportati in rosso sulla tabella 8.5, per completezza li riportiamo anche qui di seguito.

$\gamma_{medio}$ = 1870,75 Kg / mc  $\varphi_{medio}$ = 20°  $M_{medio}$ = 103,88 Kg / cmq

$c_{u\ medio}$ = 0,65 Kg / cmq  $\nu_{medio}$ = 0,4  $E_{medio}$ = 54,94 Kg / cmq

## 8.7.2.1 La teoria di Terzaghi

Seguendo lo schema di figura 8.13, Terzaghi propone la seguente formulazione per ottenere la capacità portante limite.

$$q_{lim}^{T} = c \cdot N_c + \gamma \cdot D \cdot N_q + 0{,}5 \cdot \gamma \cdot B \cdot N_\gamma \qquad (8.13)$$

Dove:

B = larghezza della fondazione ( vedi figura 8.13 ).

D = profondità del piano di fondazione ( vedi figura 8.13 ).

$$N_q = \frac{a^2}{2 \cdot \cos^2(45 + \varphi/2)}$$

$$a = e^{(0,75 \cdot \pi - \varphi/2)\tan\varphi}$$

$$N_c = (N_q - 1)\cot\varphi$$

$$N_\gamma = \frac{\tan\varphi}{2} \cdot \left(\frac{K_{p\gamma}}{\cos^2\varphi} - 1\right)$$

I valori di $N_c$, $N_q$, $N_\gamma$ sono più semplicemente riportati nella tabella 8.6 qui a lato o nel grafico di figura 8.14.

| $\phi'$ | $N_c$ | $N_q$ | $N_\gamma$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 5,14 | 1,00 | 0,00 |
| 3 | 5,90 | 1,31 | 0,24 |
| 6 | 6,81 | 1,72 | 0,57 |
| 9 | 7,92 | 2,25 | 1,03 |
| 12 | 9,28 | 2,97 | 1,69 |
| 15 | 10,98 | 3,94 | 2,65 |
| 18 | 13,10 | 5,26 | 4,07 |
| 21 | 15,82 | 7,07 | 6,20 |
| 24 | 19,32 | 9,60 | 9,44 |
| 27 | 23,94 | 13,20 | 14,47 |
| 30 | 30,14 | 18,40 | 22,40 |
| 33 | 38,64 | 26,09 | 35,19 |
| 36 | 50,59 | 37,75 | 56,31 |
| 39 | 67,87 | 55,96 | 92,25 |
| 42 | 93,71 | 85,38 | 155,55 |
| 45 | 133,88 | 134,88 | 271,76 |

Tabella 8.6 – Fattori di capacità portante.

Terzaghi ipotizza per la sua teoria un terreno molto addensato, per cui per terreni poco addensati ( come quello sottostante all'arco ) egli consiglia di ridurre i coefficienti di capacità portante assumendo i 2/3 di φ e c ottenendo così la seguente formula ridotta:

$$q_{lim}^{T} = 2/3 \cdot c \cdot N_c' + \gamma \cdot D \cdot N_q' + 0,5 \cdot \gamma \cdot B \cdot N_\gamma' \qquad (8.14)$$

Dove:

$N'_c$, $N'_q$, $N'_\gamma$ sono riportati graficamente nella figura 8.14 con linee in tratteggio.

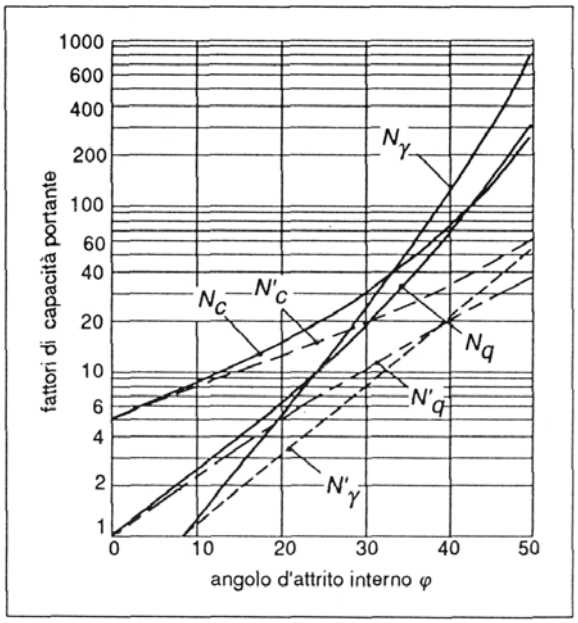



Figura 8.14 – Coeff. di capacità portante secondo Terzaghi.

Da ricordare è anche che l'equazione di Terzaghi per il calcolo della capacità portante è valida principalmente per fondazioni nastriformi, tramite alcuni coefficienti è anche possibile adattare la 8.13 per fondazioni quadrate e circolari.

La fondazione dell'arco d'Augusto risulta a metà fra una nastriforme e

una quadrata, difatti il rapporto B/L e circa 0,47.

Essendo una via di mezzo fra i due casi contemplati da Terzaghi, per determinare la capacità portante limite dell'arco si è utilizzata, a favore di sicurezza, la classica formulazione 8.14 per le fondazioni nastriformi posate su di terreni poco addensati.

Quindi, riassumendo tutto quanto detto fino ad ora, il calcolo della capacità portante limite del complesso terreno-fondazione dell'arco è stato effettuato mediante la formula 8.14, impiegando i parametri geotecnici del terreno omogeneo equivalente estrapolato dalla media pesata di quello stratificato.

Adottando allora:

$\gamma_{medio}$ = 1870,75 Kg / mc $\quad$ $\varphi_{medio}$ = 20° $\quad$ $c_{u\ medio}$ = 0,65 Kg / cmq

si perviene al calcolo dei seguenti fattori di capacità portante:

$N'_c$ = 10,035 $\quad$ $N'_q$ = 3,4 $\quad$ $N'_\gamma$ = 2,12

e quindi:

$$q_{lim}^{T} = 2/3 \cdot c \cdot N'_c + \gamma \cdot D \cdot N'_q + 0{,}5 \cdot \gamma \cdot B \cdot N'_\gamma =$$

$$= 2/3 \cdot 0{,}65 \cdot 10{,}035 + 1{,}87075 \cdot 10^{-3} \cdot 300 \cdot 3{,}4 + 0{,}5 \cdot 1{,}87075 \cdot 10^{-3} \cdot 700 \cdot 2{,}12 =$$

$q^{T}_{lim}$ = 6,3 Kg / $cm^2$ ( senza la presenza di falda )

Come si può notare, la $q_{lim}$ calcolata con la teoria di Terzaghi ( 6,3 Kg / $cm^2$ ) si avvicina di molto a quella precedentemente ricavata dalla prova C.P.T. ( 5,97 Kg / $cm^2$ ).

Supponiamo ora l'esistenza di una falda freatica che possa arrivare a coincidere con il piano di campagna ( questo è effettivamente quello che si verifica nel sottosuolo dell'arco in periodi particolarmente piovosi ), in questo caso le formulazioni viste non valgono più, difatti ora bisogna considerare la diminuzione di peso del terreno immerso a causa della spinta idrostatica.

Definendo $\gamma' = \gamma_{sat} - \gamma_w$ il peso specifico del terreno immerso, ed essendo $\gamma_{sat}$ il peso specifico del terreno saturo e $\gamma_w$ il peso specifico

dell'acqua, le formulazioni 8.13 ed 8.14 si riadattano diventando le seguenti:

$$q_{lim}^{T} = c \cdot N_c + \gamma' \cdot D \cdot N_q + 0{,}5 \cdot \gamma' \cdot B \cdot N_\gamma \qquad (8.15)$$

$$q_{lim}^{T} = 2/3 \cdot c \cdot N_c' + \gamma' \cdot D \cdot N_q' + 0{,}5 \cdot \gamma' \cdot B \cdot N_\gamma' \qquad (8.16)$$

Di fatto, nel caso specifico dell'arco, non è detto che la falda si trovi sempre alla condizione limite di coincidere con il piano di campagna, anzi, normalmente essa risulta essere situata a 1-2 metri sotto il p.c.
In questi casi intermedi, sicuramente molto frequenti, anche le formulazioni 8.15 e 8.16 cessano di valere, andrebbero utilizzate formule diverse; ma visto che le verifiche si fanno sempre nella condizione più sfavorevole si è comunque utilizzata la 8.16 per calcolare la minima capacità portante limite della fondazione dell'arco. Infatti quando la falda freatica coincide con il p.c. si raggiungono le minime capacità portanti del terreno.
Adottando allora:

$\gamma'_{medio}$ = 870,75 Kg / mc  $\varphi_{medio}$ = 20°  $c_{u\ medio}$ = 0,65 Kg / cmq

si perviene al calcolo dei seguenti fattori di capacità portante:

$N'_c$ = 10,035  $N'_q$ = 3,4  $N'_\gamma$ = 2,12

e quindi:

$$q_{lim}^{T} = 2/3 \cdot c \cdot N_c' + \gamma' \cdot D \cdot N_q' + 0{,}5 \cdot \gamma' \cdot B \cdot N_\gamma'$$

$$= 2/3 \cdot 0{,}65 \cdot 10{,}035 + 0{,}87075 \cdot 10^{-3} \cdot 300 \cdot 3{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}87075 \cdot 10^{-3} \cdot 700 \cdot 2{,}12 =$$

$q^{T}_{lim}$ = 5,88 Kg / cm$^2$ ( con presenza di falda coincidente con il p.c. )

Come si può notare dal calcolo riportato qui sopra ( con falda ) e quello precedentemente eseguito senza falda, la differenza fra i due valori di capacità portante limite $q_{lim}$ è di solamente 0,42 Kg / cm$^2$.
Il calcolo della capacità portante di una fondazione compiuto mediante l'utilizzo della formulazione di Terzaghi è sicuramente molto approssimativo, difatti le ipotesi che stanno alla base della teoria sono abbastanza limitanti, nonostante ciò il metodo di Terzaghi risulta

essere a tutt'oggi uno dei criteri maggiormente impiegati, innanzitutto perché la teoria è stata convalidata dall'esperienza costruttiva, e poi perché il calcolo della $q_{lim}$ con questa teoria si è dimostrato essere quasi sempre un valore a favore di sicurezza.

## 8.7.2.2 La teoria di Meyerhof

Visto che la formulazione di Terzaghi non tiene in considerazione la reale forma della fondazione, dell'inclinazione del carico su di essa applicato e dell'influenza della profondità a cui essa è sistemata, Meyerhof modificò la trattazione di Terzaghi inserendo dei fattori di forma, profondità ed inclinazione del carico. Per fondazioni aventi $D \leq B$ la capacità portante ottenuta non si discosta di molto da quella ricavata dalla formula 8.13; maggiori differenze si riscontrano quando il rapporto D/B aumenta.

Seguendo lo schema di figura 8.13, Meyerhof propone la seguente formulazione per ottenere la capacità portante limite.

*Per carico verticale*

$$q_{lim}^{M} = c \cdot N_c \cdot s_c \cdot d_c + \gamma \cdot D \cdot N_q \cdot s_q \cdot d_q + 0{,}5 \cdot \gamma \cdot B \cdot N_\gamma \cdot s_\gamma \cdot d_\gamma \qquad (8.17)$$

*Per carico inclinato*

$$q_{lim}^{M} = c \cdot N_c \cdot i_c \cdot d_c + \gamma \cdot D \cdot N_q \cdot i_q \cdot d_q + 0{,}5 \cdot \gamma \cdot B \cdot N_\gamma \cdot i_\gamma \cdot d_\gamma \qquad (8.18)$$

Dove:

| Fattori | Valori | Per |
|---|---|---|
| Forma | $s_c = 1 + 0{,}2K\frac{B}{L}$ | Ogni valore di $\varphi$ |
| | $s_q = s_\gamma = 1 + 0{,}1K_p\frac{B}{L}$ | $\varphi > 10°$ |
| | $s_q = s_\gamma = 1$ | $\varphi = 0$ |
| Profondità | $d_c = 1 + 0{,}2\sqrt{K_p}\frac{D}{B}$ | Ogni valore di $\varphi$ |
| | $d_q = d_\gamma = 1 + 0{,}1\sqrt{K_p}\frac{D}{B}$ | $\varphi > 10°$ |
| | $d_q = d_\gamma = 1$ dove $K_p = \tan^2(45 + \varphi/2)$ | $\varphi = 0$ |
| Inclinazione | $i_c = i_q = \left(1 - \frac{\theta}{90°}\right)^2$ | Ogni valore di $\varphi$ |
| | $i_\gamma = \left(1 - \frac{\theta}{\varphi}\right)^2$ | $\varphi > 10°$ |
| | $i_\gamma = 0$ | $\varphi = 0$ |

Tabella 8.7 – Fattori di forma, profondità e inclinazione dell'equazione di Meyerhof .

$$N_q = e^{\pi \tan \varphi} \tan^2(45 + \varphi/2)$$

$$N_c = (N_q - 1)\cot \varphi$$

$$N_{\gamma(M)} = (N_q - 1)\tan(1{,}4 \cdot \varphi)$$

| $\varphi$ | $N_c$ | $N_q$ | $N_{\gamma(H)}$ | $N_{\gamma(M)}$ | $N_{\gamma(V)}$ | $N_q / N_c$ | $2\tan\varphi(1-sin\varphi)^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 5,14 | 1,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,195 | 0,000 |
| 5 | 6,49 | 1,6 | 0,1 | 0,1 | 0,4 | 0,242 | 0,146 |
| 10 | 8,34 | 2,5 | 0,4 | 0,4 | 1,2 | 0,296 | 0,241 |
| 15 | 10,97 | 3,9 | 1,2 | 1,1 | 2,6 | 0,359 | 0,294 |
| 20 | 14,83 | 6,4 | 2,9 | 2,9 | 5,4 | 0,461 | 0,315 |
| 25 | 20,71 | 10,7 | 6,8 | 6,8 | 10,9 | 0,514 | 0,311 |
| 26 | 22,25 | 11,8 | 7,9 | 8,0 | 12,5 | 0,533 | 0,308 |
| 28 | 25,79 | 14,7 | 10,9 | 11,2 | 16,7 | 0,570 | 0,299 |
| 30 | 30,13 | 18,4 | 15,1 | 15,7 | 22,4 | 0,610 | 0,289 |
| 32 | 35,47 | 23,2 | 20,8 | 22,0 | 30,2 | 0,653 | 0,276 |
| 34 | 42,14 | 29,4 | 28,7 | 31,1 | 41,0 | 0,698 | 0,262 |
| 36 | 50,55 | 37,7 | 40,0 | 44,4 | 56,2 | 0,746 | 0,247 |
| 38 | 61,31 | 48,9 | 56,1 | 64,0 | 77,9 | 0,797 | 0,231 |
| 40 | 75,25 | 64,1 | 79,4 | 93,6 | 109,3 | 0,852 | 0,214 |
| 45 | 133,73 | 134,7 | 200,5 | 262,3 | 271,3 | 1,007 | 0,172 |
| 50 | 266,50 | 318,5 | 564,4 | 871,7 | 761,3 | 1,195 | 0,131 |

Tabella 8.8 – Coefficienti di capacità portante per le equazioni di Meyerhof (M), Hansen (H), e Vesic (V).
La teoria di Terzaghi usa i coefficienti di Vesic, mentre quella di Meyerhof usa proprio i suoi. I tre coefficienti riportati in forma di equazione in alto a sinistra si riferiscono alla presente trattazione di Meyerhof.

Illustrata la trattazione di Meyerhof ora la andiamo ad utilizzare per calcolare la $q_{lim}$ nel caso specifico dell'arco d'Augusto.
Considerando in un primo momento l'assenza della falda in prossimità della fondazione ed un carico verticale, i dati di partenza risultano:

$\gamma_{medio}$ = 1870,75 Kg / mc  $\varphi_{medio}$ = 20°  $c_{u\ medio}$ = 0,65 Kg / cmq

quindi tramite la tabella 8.7 ed 8.8 si perviene al calcolo dei vari coefficienti di capacità portante, di forma della fondazione, profondità ed inclinazione del carico. Consideriamo sempre un terreno a basso addensamento ed utilizziamo quindi un $\varphi = 2/3\ \varphi_{medio}$ e $c = 2/3\ c_{u\ medio}$.

$N'_c$ = 10,09  $N'_q$ = 3,43  $N'_{\gamma(M)}$ = 0,87  $K_p = \tan^2(45+\varphi/2)$ = 2,039607

$s_c = 1+0{,}2\ K_p\ B/L = 1+0{,}2\ (2{,}039607)\ 7/15 = 1{,}1904$

$s_q = s_\gamma = 1+0{,}1\ K_p\ B/L = 1+0{,}1\ (2{,}039607)\ 7/15 = 1{,}0952$

$d_c = 1+0{,}2\ K_p^{1/2}\ D/B = 1+0{,}2\ (1{,}42815)\ 3/7 = 1{,}1224$

$d_q = d_\gamma = 1+0{,}1\ K_p^{1/2}\ D/B = 1+0{,}1\ (1{,}42815)\ 3/7 = 1{,}0612$

Ricavati questi dati di partenza ora possiamo utilizzare la 8.17 per calcolare la $q_{lim}$.

$$q^M_{lim} = c \cdot N_c \cdot s_c \cdot d_c + \gamma \cdot D \cdot N_q \cdot s_q \cdot d_q + 0{,}5 \cdot \gamma \cdot B \cdot N_\gamma \cdot s_\gamma \cdot d_\gamma$$

$q^M_{lim}$ = 8,74 Kg / cm$^2$  ( senza la presenza di falda )

A questo punto, esaminiamo anche il caso di terreno con presenza di falda coincidente con il p.c., allora impieghiamo sempre la stessa formulazione di Meyerhof, ma al posto di γ utilizziamo γ'.

$q^{M}_{lim} = 7{,}19\ Kg / cm^2$ ( con presenza di falda coincidente con il p.c. )

Come si può evincere dai risultati numerici, la trattazione di Meyerhof produce risultati più esatti ma meno cautelativi rispetto a quella di Terzaghi. La conseguenza che la $q_{lim}$ ricavata con il metodo di Meyerhof sia leggermente più alta si può spiegare attraverso il fatto che la fondazione dell'arco in realtà è ben lontana dall'ipotesi di essere nastriforme ( ipotesi di Terzaghi ).

## 8.7.2.3 La teoria di Hansen

Per quanto la trattazione matematica dell'equilibrio limite avanzata da Meyerhof sia molto più sofisticata di quella di Terzaghi, anche quest'ultima non considera l'eventuale inclinazione del piano di posa della fondazione e della costruzione di fondazioni poste su pendii.
Per rimediare a questi inconvenienti, Hansen a sua volta ha rielaborato la prima versione del lavoro di Meyerhof aggiungendo nuovi fattori che tengono conto di una eventuale inclinazione della fondazione rispetto all'orizzontale e di un terreno posto in pendio.
L'equazione di Hansen è valida anche per fondazioni aventi D/B molto alto e quindi potrebbe essere utilizzata anche per fondazioni profonde.
Seguendo lo schema di figura 8.13, Meyerhof propone la seguente formulazione per ottenere la capacità portante limite.

$$q^{H}_{lim} = c\,N_c\,d_c\,s_c\,i_c\,g_c\,b_c + \gamma\,D\,N_q\,d_q\,s_q\,i_q\,g_q\,b_q + 0{,}5\,\gamma\,B\,N_\gamma\,d_\gamma\,s_\gamma\,i_\gamma\,g_\gamma\,b_\gamma \qquad (8.19)$$

Dove:

$N_q = e^{\pi \tan\varphi} \tan^2(45 + \varphi/2)$ tabellato nella tabella 8.8

$N_c = (N_q - 1)\cot\varphi$ tabellato nella tabella 8.8

$N_{\gamma(H)} = 1{,}5(N_q - 1)\tan\varphi$ tabellato nella tabella 8.8

I fattori di forma, di profondità, di inclinazione, di pendio e di base sono mostrati nella tabella 8.9 riportata qui sotto.

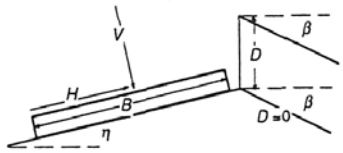
| Fattori di forma | Fattori di profondità | Fattori di inclinazione | Fattori di terreno (base su pendio) |
|---|---|---|---|
| $s'_c = 0{,}2\frac{B}{L}$<br>$s_c = 1 + \frac{N_q}{N_c}\frac{B}{L}$<br>$s_c = 1$<br>per f. nastrif. | $d'_c = 0{,}4k$<br>$d_c = 1 + 0{,}4k$<br>$d_q = 1 + 2\tan\varphi(1 - sin\varphi)k$<br>$d_\gamma = 1$ (ogni valore di $\varphi$) | $i'_c = 0{,}5 - 0{,}5\sqrt{1 - \frac{H}{A_f c_a}}$ (Hansen)<br>$i_c = 1 - \frac{mH}{A_f c_a N_c}$ (Vesic)<br>$i_c = i_q - \frac{1 - i_q}{N_q - 1}$ (Hansen e Vesic) | $g'_c = \frac{\beta}{147°}$<br>per Vesic usare $N_\gamma = -2sin\beta$ per $\varphi = 0$<br>$g_c = 1 - \frac{\beta}{147°}$ |
| $s_q = 1 + \frac{B}{L}\tan\varphi$<br>$s_\gamma = 1 - 0{,}4\frac{B}{L}$ | $k = \frac{D}{B}$ per $\frac{D}{B} \le 1$<br>$k = \tan^{-1}\frac{D}{B}$ per $\frac{D}{B} > 1$(rad) | $i_q = \left(1 - \frac{0{,}5H}{V + A_f c_a \cot\varphi}\right)^5$ (Hansen)<br>$i_q = \left(1 - \frac{H}{V + A_f c_a \cot\varphi}\right)^m$ (Vesic) | $g_q = g_\gamma = (1 - 0{,}5\tan\beta)^5$ (H)<br>$g_q = g_\gamma = (1 - \tan\beta)^2$ (V) |
| $A_f$ = area effettiva della fondazione ($B'$ x$L'$ )<br>$c_a$ = adesione alla base=coesione o valore ridotto<br>$D$ = profondità della fondazione<br>$e_B$, $e_L$ = eccentricità del carico<br>$H$= componente orizzontale del carico, con $H \le V\tan\delta + c_a A_f$<br>$V$= carico totale verticale sulla f.<br>$\beta$=inclinazione del pendio<br>$\delta$= angolo d'attrito tra terreno e fondazione ($\varphi = \delta$ per calcestruzzo-terreno)<br>$\eta$=inclinazione della fondazione | | $i_\gamma = \left(1 - \frac{0{,}7H}{V + A_f c_a \cot\varphi}\right)^5$ ($\eta = 0$) (H)<br>$i_\gamma = \left(1 - \frac{(0{,}7 - \eta°/450)H}{V + A_f c_a \cot\varphi}\right)^5$ ($\eta > 0$) (H)<br>$i_\gamma = \left(1 - \frac{H}{V + A_f c_a \cot\varphi}\right)^{m+1}$ (V) | Fattori di base (base inclinata)<br>$b'_c = \frac{\eta}{147°}$<br>$b_c = 1 - \frac{\eta}{147°}$<br>$b_q = \exp(-2\eta\tan\varphi)$ (H)<br>$b_\gamma = \exp(-2{,}7\eta\tan\varphi)$ (H)<br>$b_q = b_\gamma = (1 - \eta\tan\varphi)^2$ (V) |
|  | | $m = m_B = \frac{2 + B/L}{1 + B/L}$ ($H$ parall. a $B$)<br>$m = m_L = \frac{2 + L/B}{1 + L/B}$ ($H$ parall. a $L$) | Note:<br>$\beta + \eta \le 90°$<br>$\beta \le \varphi$<br>$i_q, i_g > 0$ |

Tabella 8.9 – Fattori di forma, profondità, inclinazione, pendio e di base delle equazioni di Hansen (H) e Vesic (V).

La formula di Vesic è essenzialmente una variante dell'equazione di Hansen dalla quale differisce per il valore del coefficiente $N_\gamma$:

$N_{\gamma(V)} = 1{,}5(N_q + 1)\tan\varphi$

e per piccole differenze dei fattori di inclinazione, pendio e base ( tabella 8.9 ).

Illustrata la trattazione di Hansen ora la andiamo ad utilizzare per calcolare la $q_{lim}$ nel caso specifico dell'arco d'Augusto.

Considerando in un primo momento l'assenza della falda in prossimità della fondazione ed un carico verticale, i dati di partenza risultano:

$\gamma_{medio}$ = 1870,75 Kg / mc $\varphi_{medio}$ = 20° $c_{u\ medio}$ = 0,65 Kg / cmq

quindi tramite la tabella 8.8 ed 8.9 si perviene al calcolo dei vari coefficienti di capacità portante, di forma della fondazione, profondità ed inclinazione del carico. Consideriamo sempre un terreno a basso addensamento ed utilizziamo quindi un $\varphi = 2/3\ \varphi_{medio}$ e $c = 2/3\ c_{u\ medio}$.

$N'_c = 10,09 \quad N'_q = 3,43 \quad N'_{\gamma(H)} = 0,93 \quad K_p = \tan^2 (45+\varphi/2) = 2,039607$

$s_c = 1+( N_q/N_c)\ B/L = 1+0,33994\ (7/15) = 1,1586$

$s_q = 1+ B/L \tan \varphi = 1+7/15 \tan 13,3333 = 1,1106$

$s_\gamma = 1 – 0,4\ B/L = 1 – 0,4\ (7/15) = 0,8133$

$d_c = 1+0,4\ D/B = 1+0,4\ (3/7) = 1,17143$

$d_q = 1+2 \tan \varphi\ ( 1 – \sin \varphi )\ D/B = 1+2 \tan 13,33\ ( 1 – \sin 13,33 )\ 3/7 =$
$= 1,1563$

$d_\gamma = 1$

Tutti gli altri fattori g, i, b risultano uguali ad 1, difatti la fondazione dell'arco è posata su di un terreno in pianura, non c'è eccentricità del carico, e il piano di posa risulta orizzontale.

Ricavati questi dati di partenza ora possiamo utilizzare la 8.19 per calcolare la $q_{lim}$ secondo Hansen.

$q^H_{lim} = 8,9\ Kg / cm^2$ ( senza la presenza di falda )

A questo punto, esaminiamo anche il caso di terreno con presenza di falda coincidente con il p.c., allora impieghiamo sempre la stessa formulazione di Hansen, ma al posto di $\gamma$ utilizziamo $\gamma'$.

$q^H_{lim} = 7,32\ Kg / cm^2$ ( con presenza di falda coincidente con il p.c. )

Come si nota dai risultati ottenuti, nel caso particolare della fondazione dell'arco d'Augusto, i valori di capacità portante limite ottenuti con il criterio di Meyerhof e con quello di Hansen sono praticamente coincidenti. Qualche differenza fra i due metodi si riscontra in presenza di fondazioni inclinate, posizionate su pendii, con carichi eccentrici, e piani di posa molto in profondità.

Per i casi più semplici e comuni le due formulazioni proposte da Meyerhof ed Hansen sono praticamente uguali.

## 8.7.2.4 Scheda riassuntiva delle capacità portanti limite

Qui di seguito, nella tabella 8.10, sono riportati in forma sintetica tutti i valori della $q_{lim}$ secondo le diverse teorie e metodologie di calcolo in diverse condizioni di presenza ed assenza di falda.

| $q_{lim}$ [ Kg / $cm^2$ ] | Prova C.P.T. | Teoria di Terzaghi | Teoria di Meyerhof | Teoria di Hansen |
|---|---|---|---|---|
| **Senza falda** | 5,97 | 6,30 | 8,74 | 8,90 |
| **Con falda coincidente al p.c. in condizioni drenate** | - | *5,88* | 7,19 | 7,32 |
| **Con falda coincidente al p.c. in condizioni non drenate** | - | 3,60 | 4,77 | 4,80 |

Tabella 8.10 – Scheda di sintesi delle capacità portanti limite calcolate per diverse condizioni del terreno e con varie teorie di equilibrio limite proposte da diversi autori.
In rosso è riportato il valore più cautelativo che si è scelto per andare ad eseguire le verifiche di stabilità della fondazione, le condizioni non drenate sono state scartate a priori: esse non sono possibili nel caso dell'arco d'Augusto, leggere il presente paragrafo per comprenderne i motivi.

La tabella 8.10 riportata qui sopra evidenzia chiaramente quanto la presenza di una falda possa influenzare negativamente le capacità portanti del complesso terreno-fondazione, soprattutto in condizioni non drenate ( $\varphi = 0$ e $c = c_u$ ).
A parità di condizioni fisiche del terreno invece, si può riscontrare che le due trattazioni proposte rispettivamente da Meyerhof e da Hansen non danno rilevanti differenze di valori, probabilmente anche perché il piano fondale non è a notevoli profondità, non presenta inclinazioni e non è posizionato su di un terreno in pendio. Se si fossero verificate le suddette condizioni particolari, allora sarebbe stato molto più facile

riscontrare delle sensibili differenze fra i valori della $q_{lim}$ ricavata con le diverse teorie.

L'unica tangibile differenza fra i valori della $q_{lim}$ è possibile riscontrarla nella trattazione di Terzaghi, quest'ultima infatti risulta molto approssimata e cautelativa rispetto alle altre due formulazioni di Meyerhof e Hansen. Tale sensibile differenza di capacità portante può essere spiegata con il fatto che la teoria di Terzaghi non prende in considerazione la reale forma della fondazione dell'arco ( che è molto vicina ad un quadrato e lontana quindi da quella nastriforme ipotizzata da Terzaghi ).

A conclusione di tutte le operazioni di calcolo eseguite per determinare la capacità portante limite possiamo dire che la trattazione di Terzaghi risulta forse un po' troppo approssimata per il caso specifico dell'arco d'Augusto, ma è sicuramente un metodo cautelativo, e vista l'incertezza generale sulle caratteristiche geotecniche del terreno probabilmente è meglio fidarsi proprio di una trattazione approssimata a favore di sicurezza piuttosto che cercare di impiegare complicate formule che alla fine producono risultati erronei perché alla base vi erano dati in input abbastanza aleatori.

Detto ciò, e tenendo a mente che spesso la falda si trova fra 1-2 m sotto il p.c., il valore di $q_{lim}$ che in definitiva si va a scegliere per verificare la fondazione è 5,88 Kg / $cm^2$ ricavato dalla teoria di Terzaghi in condizioni drenate e falda a 0 m sotto il p.c.

Tale condizione risulta la peggiore e più cautelativa fra tutte, infatti il calcolo della capacità portante in condizioni non drenate non ha senso sull'arco d'Augusto: la costruzione esiste da due millenni ed in questo enorme lasso di tempo la condizione attuale è sicuramente drenata, il processo di consolidazione deve essersi esaurito del tutto. La condizione non drenata invece è da prendersi in considerazione per le verifiche a breve termine, ovvero quando per esempio di deve andare a realizzare una fondazione che ancora non esiste, e quindi in un primo

momento l'apparato fondale dovrà fare i conti con le condizioni non drenate.

## 8.8 IL MODULO DI REAZIONE DEL TERRENO

Il modulo di reazione $k_r$ del terreno è un parametro utilizzato per caratterizzare in modo semplice la rigidezza di un terreno, esso è impiegato molto spesso nello studio dell'interazione fra terreno-struttura, difatti in questi casi il terreno viene schematizzato come un letto uniforme e distribuito di molle ( fra loro indipendenti e reagenti anche a trazione ) aventi una determinata rigidezza su cui posa la struttura ( fondazione, paratia, ecc…). La schematizzazione appena descritta è quella classica di Winkler (1867), in cui il parametro $k_r$ definisce la rigidezza elastica di tale letto di molle.
Il legame costituivo proposto da Winkler risulta il seguente:

$$p = k_r \cdot w \tag{8.20}$$

Dove:
p = pressione verticale esercitata sul terreno in un punto. [ $F / L^2$ ]
w = cedimento subito dal terreno in quel punto. [ L ]
$k_r$ = modulo di reazione del terreno o costante di sottofondo. [ $F / L^3$ ]

Come si può notare, la 8.20 proposta da Winkler è un legame lineare fra la pressione esercitata e cedimento subito; in epoche successive diversi autori hanno raffinato la 8.20 proponendo relazioni costitutive non lineari, considerando anche diversi strati di terreno a diverse rigidezze, tenendo conto della rigidezza della sovrastruttura, ecc…
Definito ora il terreno alla Winkler, il problema principale è determinare il valore di $k_r$, per fare ciò sono stati proposti diversi metodi: alcuni si basano su prove sperimentali eseguite in sito sul terreno ( prova di carico con piastra ), mentre altri si basano su metodi indiretti attraverso l'uso di formule più o meno empiriche.

### 8.8.1 Determinazione del modulo $k_r$ dalla prova di carico con piastra

Terzaghi propone di calcolare il modulo di reazione $k_r$ del terreno attraverso l'utilizzo di una prova di carico con piastra quadrata di 0,3 m di lato, in particolare egli suggerisce di calcolare un modulo $k_b$ ( del tutto analogo a $k_r$ ) della piastra, ricavato dalla seguente relazione:

$$k_b = \frac{\Delta p_{piastra}}{\Delta w_{piastra}} \qquad (8.21)$$

Dove:

$\Delta p_{piastra}$ = incremento di pressione applicato alla piastra.

$\Delta w_{piastra}$ = incremento di cedimento della piastra.

Determinato il valore di $k_b$ attraverso la 8.21, Terzaghi ci fornisce poi delle formule di correlazione per determinare il modulo di reazione del terreno:

$$k_r = k_b \cdot \left(\frac{B+b}{2B}\right)^2 \qquad \textit{per terreni incoerenti sabbiosi} \qquad (8.22)$$

$$k_r = \frac{k_b \cdot b}{1{,}5 \cdot B} \qquad \textit{per terreni coesivi argillosi} \qquad (8.23)$$

Dove:

B = larghezza della fondazione  b = larghezza della piastra

Nel caso dell'arco d'Augusto, non disponendo di una prova di carico con piastra non è stato possibile utilizzare questo approccio sperimentale.

In alternativa, possedendo il modulo edometrico M del terreno è possibile calcolare il valore di $k_r$ nel seguente modo:

$$k_r \cong \frac{M}{B} \qquad (8.24)$$

Dove:

M = modulo edometrico del terreno.  B = larghezza della fondazione.

### 8.8.2 Determinazione del modulo $k_r$ con la formula di Bowles

Un metodo teorico, che non richiede alcuna prova sperimentale, per determinare il modulo di reazione del terreno è la relazione proposta da Bowles:

$$k_r = C \cdot \left(A + B \cdot z^n\right) \cdot \Phi \quad [KN/m^3] \qquad (8.25)$$

Dove:

C = 40 KN/m costante di conversione.

$A = c\ N_c + 0{,}5\ \gamma\ N_{\gamma(H)}$ vedere tabella 8.8.

$\gamma$ = peso specifico del terreno.

c = coesione.

$B = \gamma\ N_q$ costante dipendente dal tipo di terreno.

$\Phi = 0{,}5 \div 1$ coefficiente di disturbo arrecato al terreno.

z = quota dal piano di campagna.

n = 0,5 coefficiente.

Come si può osservare dal termine z della 8.25, la relazione proposta da Bowles fornisce un modulo $k_r$ che aumenta al crescere della profondità entro il terreno, in tal modo l'autore riesce a modellizzare abbastanza bene il reale comportamento elastico del terreno, che di fatto tende a diventare sempre più rigido man mano che si scende nelle viscere della terra.

Utilizzando tale relazione 8.25 applicata al caso dell'arco d'Augusto si ottengono i seguenti valori:

Dati in input:

$\gamma_{medio}$ = 1870,75 Kg / mc $\varphi_{medio} = 20°$ $c_{u\ medio}$ = 0,65 Kg / cmq

$\Phi = 0{,}5$ z = 3 m

Dati in output:

$N_c = 14{,}83$ $N_{\gamma(H)} = 2{,}9$ $N_q = 6{,}4$

$k_r = 2{,}4$ Kg / $cm^3$

In conclusione vorrei ricordare che il modello alla Winkler, pur essendo una schematizzazione molto semplificata del comportamento del terreno, è stato utilizzato come unico metodo fino agli anni '60, infatti fino a quel periodo esso era l'unico approccio semplice e rapido per risolvere il problema dell'interazione terreno-struttura. Nel corso del tempo l'originario modello elastico-lineare di Winkler è stato affinato fino a considerare molle non lineari, terreni stratificati di diverse rigidezze, interazione della sovrastruttura, ecc…

Allo stato attuale questi metodi sono stati superati dalla applicazione generalizzata delle analisi numeriche ( F.E.M., differenze finite ) che consentono di caratterizzare il terreno o gli strati di terreno di fondazione con leggi costitutive molto più complesse ( elastiche, elasto-plastiche, elasto-plastiche accoppiate ) e di tenere conto dell'effetto della rigidezza non solo della fondazione, ma anche della sovrastruttura.

Tramite le moderne tecniche di analisi numerica è quindi possibile risolvere svariate tipologie di problemi anche in campo geotecnico, permettendo di analizzare in modo dettagliato il comportamento del terreno che interagisce con le strutture antropiche che vi si posano sopra.

# Capitolo IX

Non aver paura della perfezione: non la raggiungerai mai.
Salvador Dalí ( 1904 – 1989 )

# ANALISI STRUTTURALE F.E.M. DELL'ARCO D'AUGUSTO DI RIMINI

## 9.1 INTRODUZIONE ALLA MODELLAZIONE NUMERICA

Dopo aver rilevato con la tecnica fotogrammetrica il monumento augusteo ed essere riusciti a restituirne la geometria, sia nel 3D che tramite le classiche rappresentazioni piane, ora è arrivato il momento in cui è possibile utilizzare le informazioni metriche acquisite dalla restituzione per costruire il modello geometrico dell'arco. Quest'ultimo è infatti essenziale per riuscire a "costruire" il modello matematico della struttura da analizzare, tale modello analitico è infatti costituito da tre sottomodelli: il modello geometrico, il modello reologico ed il modello delle azioni esterne.
Il modello matematico è in sostanza un schematizzazione, più o meno accurata della realtà, tramite esso è possibile calcolare la risposta di una struttura sottoposta a vari tipi di eccitazioni in input. Ricordo che la schematizzazione è un passo cruciale e necessario, infatti il mondo reale è troppo complesso per essere modellizzato alla perfezione, e per quanto ci si sforzi ad simulare al meglio il comportamento meccanico delle strutture non si riesce mai a prevedere tutti i fenomeni. Ma questo non è molto importante, infatti l'ingegnere si deve fermare ad una schematizzazione sufficientemente accurata per i suoi scopi, sarebbe solamente tempo inutile voler simulare le finezze più piccole. D'altro canto non sarebbe neanche possibile riuscire a creare un modello matematico perfetto, la sola formulazione teorica della meccanica dei continui ( già molto avanzata ) è del tutto errata se si

considerano fenomeni a livello microscopico, difatti come tutti sanno la materia è praticamente discontinua e più vuota che piena, ed è anche vero che per modellizzare il reale comportamento delle strutture non si potrebbe trascurare la vera geometria atomica della materia. Detto ciò, si comprende che se volessimo realmente simulare il comportamento della realtà dovremmo far i conti con la fisica subatomica e tener conto di tutte le varie forze elettromagnetiche, nucleari forti e deboli che si scambiano fra loro gli atomi e le stesse particelle subatomiche di uno stesso atomo. Le cose diventerebbero veramente impossibili, inoltre entrerebbero in gioco effetti relativistici e quantistici che farebbero crollare qualunque teoria fisica di quelle ordinariamente utilizzate. La nostra fortuna è che, per quasi tutti gli scopi dell'ingegneria ( sicuramente per tutti quelli dell'ingegneria civile ) è possibile trascurare ogni causa,effetto e fenomeno che avviene al livello atomico della materia senza praticamente alcuna conseguenza sulla veridicità del risultato finale. Voglio ricordare che il discorso appena fatto è solamente una puntualizzazione, infatti gli ingegneri non pensano mai di non poter utilizzare un modello continuo della materia, perché nella pratica progettuale è ovvio che tale teoria funzioni molto bene.

Facciamo ora un passo indietro, e ritorniamo a parlare dei tre modelli che assieme definiscono il modello matematico numerico della struttura:

1. Il modello geometrico o strutturale: esso può essere definito come un'insieme di elementi strutturali disposti secondo una particolare geometria e collegati fra loro ed il telaio ( terreno ) attraverso vari tipi di vincoli. Il modello geometrico può essere più o meno complesso, a seconda del grado di schematizzazione adottato.
2. Il modello delle azioni esterne: esso definisce i carichi agenti sulla struttura, tali forze possono essere sia statiche che

dinamiche, e fra le sollecitazioni dinamiche si possono annoverare le forzanti periodiche, impulsive e non periodiche. Sempre tale modello definisce anche la distribuzione di tali forze esterne sulla struttura nonché la loro direzione ed intensità. Naturalmente anche tali forze applicate derivano da un processo di schematizzazione, difatti le reali condizioni di carico e distribuzione delle pressioni applicate risultano generalmente più complesse di quelle frequentemente adottate.

3. Il modello reologico ( o meccanico ) del materiale: esso definisce il comportamento del materiale sotto l'azione dei carichi esterni. Tale comportamento, che in generale si presenta sotto vari e complessi aspetti, può essere definito da relazioni che legano le azioni sollecitanti con la deformazione indotta. Anche in questo caso il reale comportamento del materiale viene enormemente semplificato attraverso relazioni matematiche che tentano di legare lo sforzo indotto alla deformazione subita.

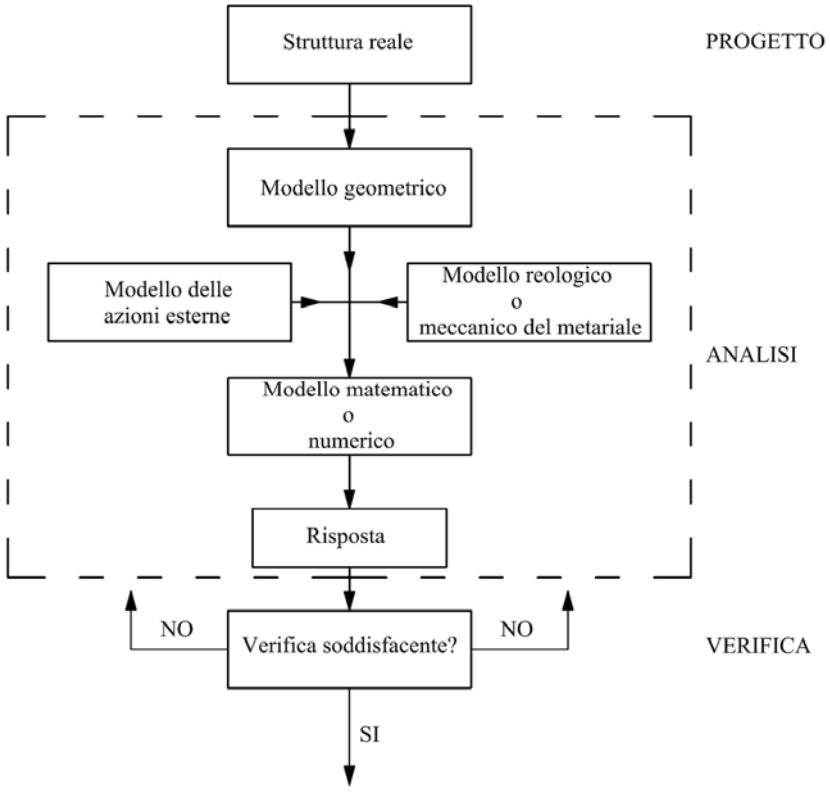



Figura 9.1 – Diagramma del processo di modellizzazione matematica del problema strutturale.

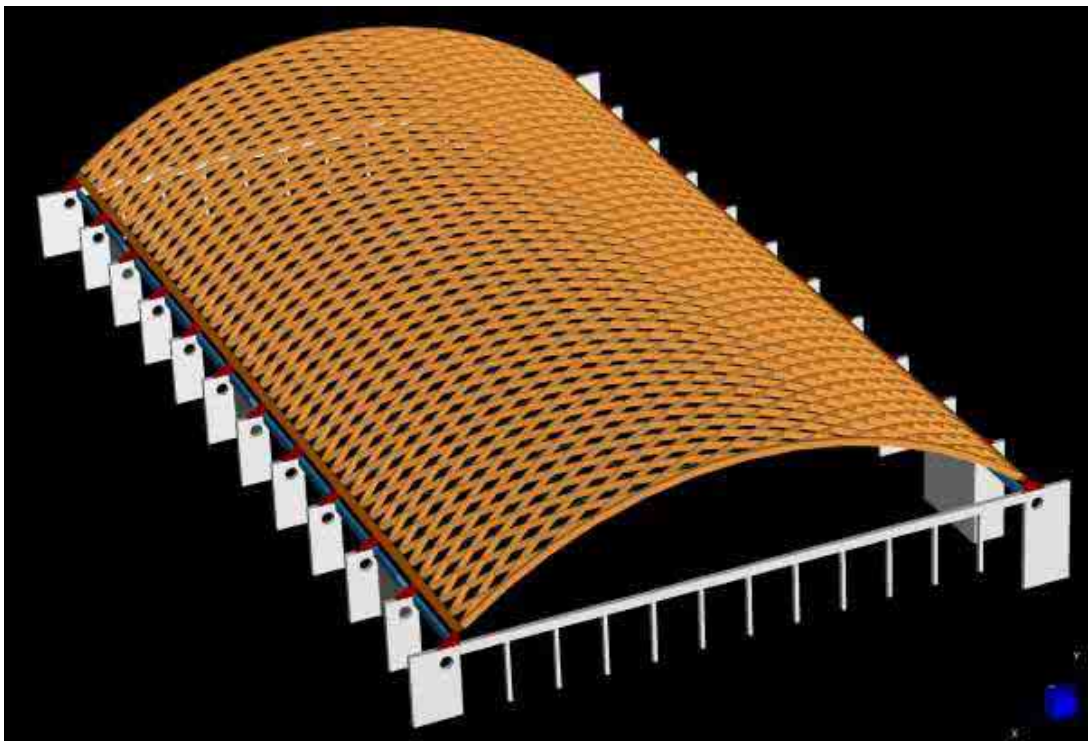


Figura 9.2 – Modello geometrico di un padiglione della nuova fiera di Rimini.
La copertura è una struttura reticolare spaziale formata da elementi in legno, schematizzati nel modello attraverso elementi monodimensionali del tipo trave, tale copertura lignea risulta vincolata ai pilastri tramite delle cerniere ( in rosso ), mentre i pannelli in c.a. sono schematizzati con elementi bidimensionali incastrati al terreno come mensole.

Quanto espresso sino ad ora rappresenta l'iter procedurale necessario per riuscire a simulare il comportamento meccanico di una qualunque struttura. Se fino adesso si è parlato di come riuscire a creare un modello numerico delle strutture, fra breve racconteremo invece quali siano i parametri che influiscono sulla creazioni di un buon modello analitico, capace di soddisfare tutte le esigenze progettuali richieste.
Essendo il modello matematico formato dai suddetti tre sottomodelli, affinché esso sia ottimale è necessario che lo siano anche i suoi sottocomponenti ed il legame fra i vari sub-modelli. Per fabbricare il modello geometrico dell'oggetto è necessario possedere delle buone informazioni metriche sulla struttura in esame, inoltre per mezzo dell'esperienza è indispensabile comprendere quale sia la giusta schematizzazione della struttura, ovvero dove posizionare i vincoli, che tipo di elementi impiegare, come individuare la struttura portante

da quella portata, come collegare fra loro i diversi elementi strutturali, ecc…

Per quel che riguarda il modello delle azioni esterne invece l'essenziale consiste nel prevedere e quantificare al meglio tutte le sollecitazioni degne di interesse che agiscono sulla struttura. Anche in questo caso non è possibile tener conto di tutte le forze che intervengono sulla struttura e quelle che si trasmettono fra loro i vari elementi strutturali, quindi bisogna come al solito individuare una schematizzazione adatta allo scopo prefissato delle effettive forze che agiscono sull'oggetto. Così ad esempio l'azione del vento viene spesso semplificata come un'azione statica equivalente, i carichi accidentali vengono spesso considerati come distribuiti, ecc…

Infine l'ultimo sottomodello, definito reologico ( o meccanico ) del materiale deve contenere un legame costitutivo capace di rispondere alle esigenze di progetto ( o verifica ), ovvero la schematizzazione del legame fra sforzi e deformazioni deve essere sufficientemente accurato per il fine perseguito, tentare di impiegare modelli molto più sofisticati sarebbe del tutto superfluo. Il compito di questo modello è fondamentale, difatti esso caratterizza il comportamento degli elementi strutturali sotto carico, per avvicinarsi al reale meccanismo fisico dell'oggetto è indispensabile scegliere la teoria più adatta per descrivere il materiale ( elastico lineare o non, elasto-plastico, viscoelastico, plastico, ecc… ) ed inoltre riuscire a determinare sperimentalmente tutti i parametri che governano la formulazione reologica scelta. Quest'ultima necessità sperimentale è un grande intoppo, infatti se è vero che attualmente sofisticate modellazioni possono simulare anche le finezze comportamentali più piccole, è anche vero che questi complicati modelli matematici necessitano la definizione di un'enormità di parametri caratteristici della struttura che per essere determinati esigono onerose prove sperimentali nonché calibrazioni post-analisi basate sulla struttura reale. Da un lato teorico

è quindi possibile simulare quasi ogni cosa, ma dal punto di vista pratico è sempre difficile definire dettagliatamente i parametri caratteristici del modello, e così alcune volte si rischia di impiegare intricate modellazioni ( nella speranza di simulare al meglio ) che però portano solamente a risultati errati per via della scorrettezza dei parametri in input, che sono magari supposti e non misurati.

Questo difetto di scorrettezza dei dati ricavati dalla post-analisi potrebbe aver intaccato anche la modellizzazione dell'arco d'Augusto di Rimini, infatti nell'ambito di questa tesi si è voluto schematizzare l'arco con una teoria di media complessità, che dal punto di vista teorico potrebbe avvicinarsi abbastanza al reale comportamento della struttura, dico in teoria, perché come già enunciato la buon riuscita di una modellizzazione fisica-meccanica del comportamento di un edificio non si basa solamente su di un corretto modello geometrico, ed una sofisticata scelta della schematizzazione strutturale, ma anche sulla esatta determinazione dei parametri che governano il modello reologico dei materiali strutturali impiegati sulla struttura. Purtroppo nel caso dell'arco d'Augusto, sia per il terreno che per i materiali del monumento, non è stato possibile effettuare prove sperimentali per caratterizzare esattamente i parametri reologici di queste entità. Spesso si sono ricavati i dati necessari attraverso metodi indiretti, correlazioni, tabelle e vecchi dati sperimentali derivanti da vecchie prove eseguite sulla struttura e sul terreno. In situazioni di forte incertezza sui parametri del modello risulta così del tutto inutile avventurarsi in sofisticate e laboriose modellazioni strutturali dell'oggetto. In questi casi una semplice schematizzazione dell'oggetto risulterebbe la soluzione migliore che porterebbe a rapide conclusioni ( certamente approssimate, ma tanto lo erano già i dati di partenza e quindi non si poteva far di meglio ) senza grandi perdite di tempo ed energie. Per evitare al meglio la inesattezza dei risultati numerici ricavati dall'analisi strutturale dell'arco si è cercato di

scegliere i parametri necessari mediante l'utilizzo di opportune formule di correlazione, tabelle, vecchi dati, ecc…

Comunque anche se inevitabilmente i risultati derivanti dalle post-analisi non fossero del tutto corretti non importa più di tanto ai fini di questa tesi, infatti lo scopo primario non era quello di simulare esattamente il comportamento strutturale dell'arco, ma piuttosto quello di mostrare come le attuali tecniche di simulazione numerica siano potenzialmente capaci di analizzare situazioni anche molto complesse con una precisione e grado di dettaglio che fino a qualche anno fa erano impensabili.

Detto ciò, anticipo che la modellizzazione dell'arco d'Augusto è stata eseguita mediante quella prassi basilare comune a tutti gli ingegneri: si parte da una semplice schematizzazione del problema per poi affinarla fino a giungere a modelli sempre più complessi, decidendo di fermarsi quando si sono raggiunti gli scopi prefissati.

## 9.2 INTRODUZIONE ALLA TECNICA F.E.M.

F.E.M. e l'acronimo di *Finite Element Method*, ovvero metodo agli elementi finiti. Tale metodo si propone come una tecnica numerica atta a fornire una soluzione approssimata di sistemi di equazioni differenziali alle derivate parziali o ordinarie. Siccome la stragrande maggioranza dei fenomeni fisici è governato dalle equazioni differenziali ( così anche il problema dell'equilibrio elastico dei solidi ), ecco ché la tecnica F.E.M. è diventata sinonimo di simulazione dei comportamenti e problemi fisici-meccanici della realtà. Tale metodo numerico nasce per esigenze strettamente di analisi strutturale, ma poi si è subito esteso a tutti gli altri settori dell'ingegneria e delle scienze in generale. Grazie alla sua versatilità e generalità, il metodo F.E.M. consente di risolvere qualunque problema di tipo differenziale, anche molto complesso, attualmente il metodo in questione è usato ( con varianti ) per simulare il comportamento dei fluidi, dei solidi, dei

terreni, per risolvere problemi di elettromagnetismo, di propagazione delle onde ( sonore, elettromagnetiche…), per simulare la propagazione del calore, per modellizzare fenomeni chimici e fisici in generale.

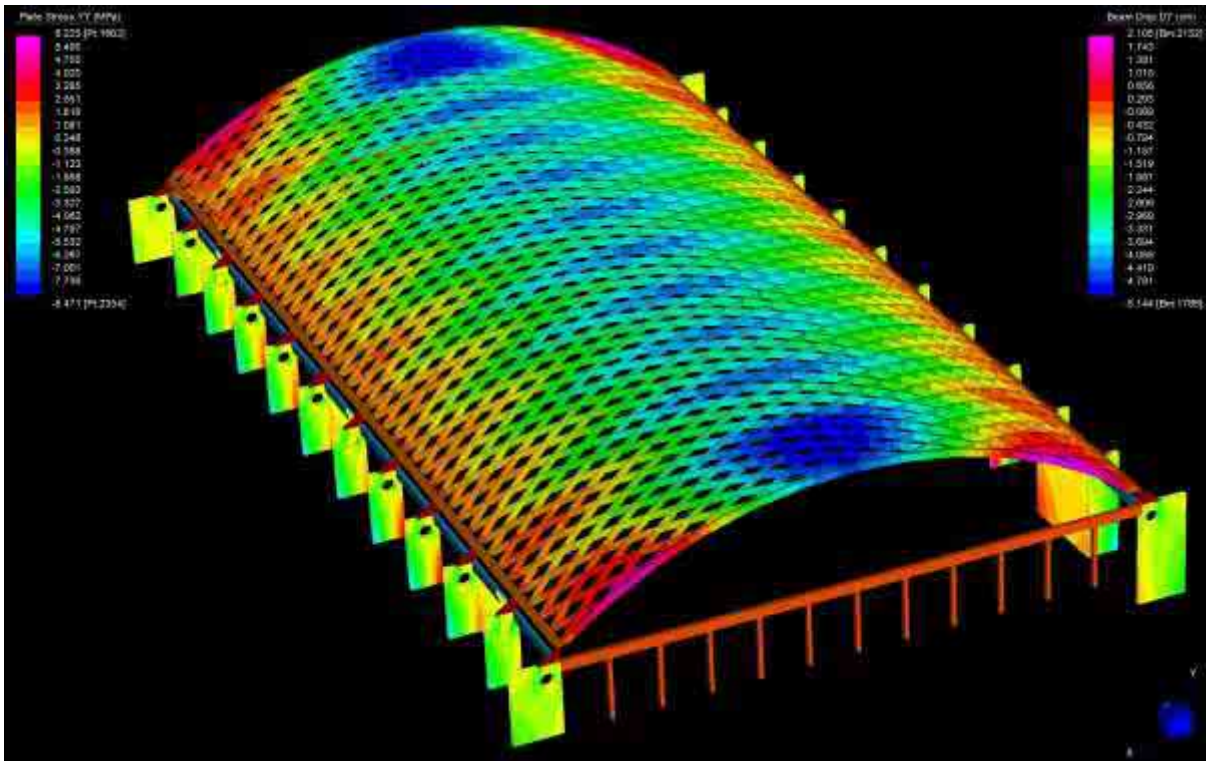


Figura 9.3 – Analisi numerica F.E.M. di un padiglione della nuova fiera di Rimini.
In mappa di colore sono riportati gli andamenti dello stress $\sigma_{YY}$ sulle superfici dei pannelli in c.a., mentre per la copertura è mappato l'andamento degli spostamenti in direzione Y ( verticale ). Purtroppo non è indicato quale sia l'azione sollecitante che provoca tale situazione, ma presumibilmente deve essere un'azione verticale distribuita uniformemente su tutta la copertura. In questa immagine è possibile notare anche gli "effetti di bordo", infatti mentre nel mezzo del padiglione l'andamento delle deformazioni è ripetitivo per ogni interasse, alle estremità si riscontra una diversa distribuzione del colore.
Il software F.E.M. impiegato per questa simulazione numerica risulta essere Straus7.

Matematicamente il metodo agli elementi finiti trasforma un qualunque sistema differenziale di equazioni ( alle derivate parziali o totali ) in un semplice sistema algebrico ( lineare o non, dipende com'era il sistema differenziale originario ) risolvibile mediante le matrici ( se è lineare ) oppure mediante iterazioni ( se non lineare ).
Per attuare questa trasformazione, il metodo si basa sulla discretizzazione di un dominio continuo in un dominio discreto

formato da un numero finito di punti collegati fra loro dagli elementi finiti.

La risoluzione del sistema di equazioni differenziali che governano il problema fisico fornisce in output delle funzioni, mentre la risoluzione del sistema algebrico associato alla discretizzazione fornisce solamente la soluzione sul numero finito di punti utilizzati per la discretizzazione del continuo. Quindi la funzione soluzione del problema fisico viene approssimata mediante un numero finito di punti ( più o meno fitti a seconda della discretizzazione del continuo ), da ciò si comprende che fra un punto e l'altro non è possibile sapere cosa accada. Per ovviare a questo inconveniente si può operare attraverso una fitta discretizzazione combinata all'utilizzo di funzioni interpolanti. Tali funzioni di interpolazioni ( definite anche funzioni di forma ) sono delle funzioni che passano per tutti i punti determinati e cercano di approssimare al meglio le zone "buche". Il fatto che siano chiamate anche funzioni di forma deriva dalla conseguenza che esse dipendono dal tipo, forma e posizione nel dominio dell'elemento finito.

Gli elementi finiti possono poi essere classificati a seconda della loro forma, tipologia e funzione interpolante associata.

In base alla tipologia si distinguono gli elementi monodimensionali, bidimensionali e tridimensionali; a seconda che essi discretizzino un dominio monodimensionale, piano o uno spazio.

A seconda della forma invece possono essere classificati come elementi triangolari e quadrilateri ( nel piano ) oppure tetraedrici ed esaedrici ( nello spazio ).

Infine le funzioni interpolanti associate all'elemento possono essere di tipo costante, lineare, quadratiche, cubiche, e così via. Logicamente aumentano il grado della funzione di forma la soluzione approssimata si avvicina maggiormente alla reale soluzione del problema

differenziale, però si paga lo scotto di una crescente difficoltà di calcolo con conseguenti allunghi sul tempo computazionale.

A questo punto qualcuno potrebbe chiedersi come mai non si risolve direttamente il problema differenziale originario piuttosto che complicare le cose attraverso la metodologia F.E.M.: la risposta è molto semplice, e consiste nel fatto che la soluzione in forma chiusa del problema dell'equilibrio elastico riesce possibile determinarla soltanto in pochi casi particolari (ad esempio nella teoria della trave).

Quindi occorre ricercare una soluzione approssimata del problema attraverso le suddette tecniche numeriche.

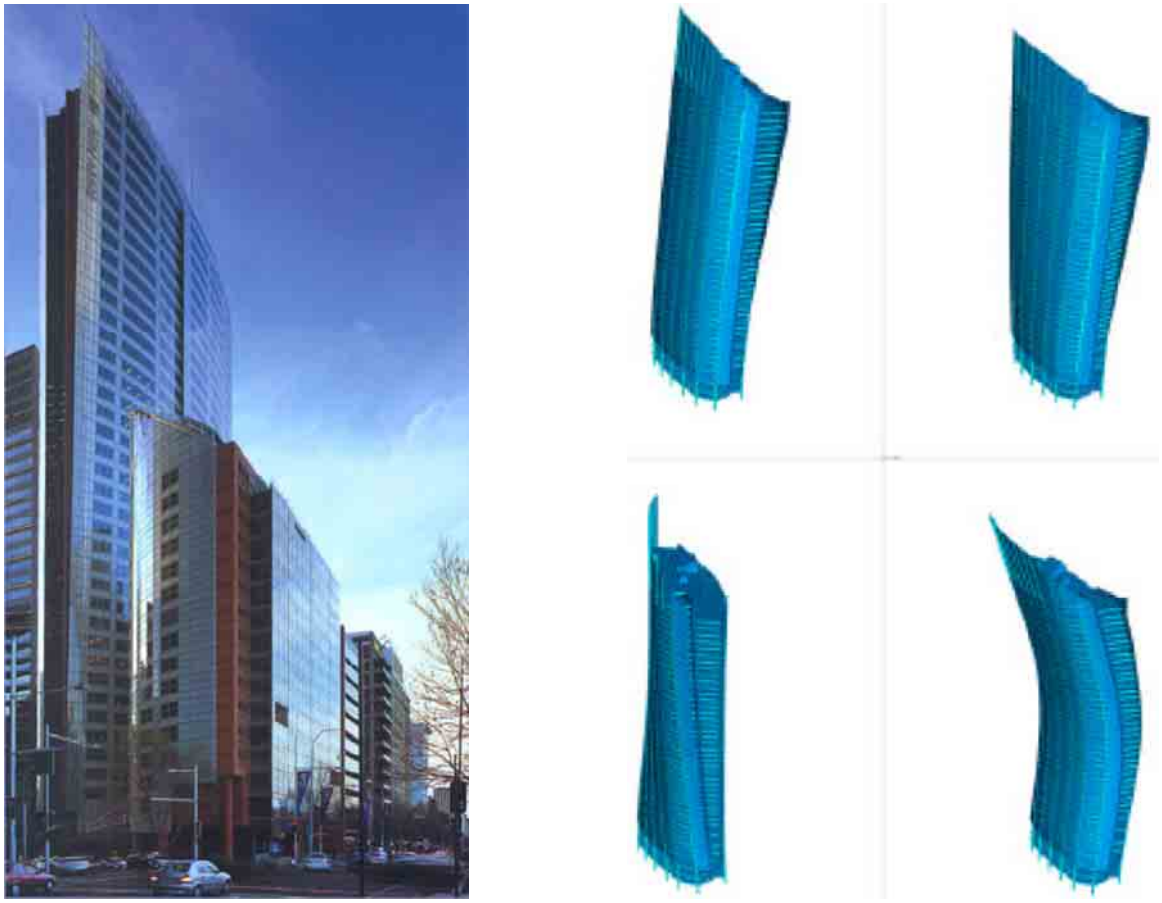


Figura 9.4 – Aurora Place di Sydney e relativi modi di vibrare.

Questo palazzo è stato disegnato dall'architetto italiano Renzo Piano, mentre la struttura è stata progettata da Bovis Lend Lease.

Nella raffigurazione a destra si possono osservare le prime quattro forme modali della struttura calcolate con il software Straus7.

Il primo modo di vibrare è soggetto ad una frequenza naturale di 0,18 Hertz.

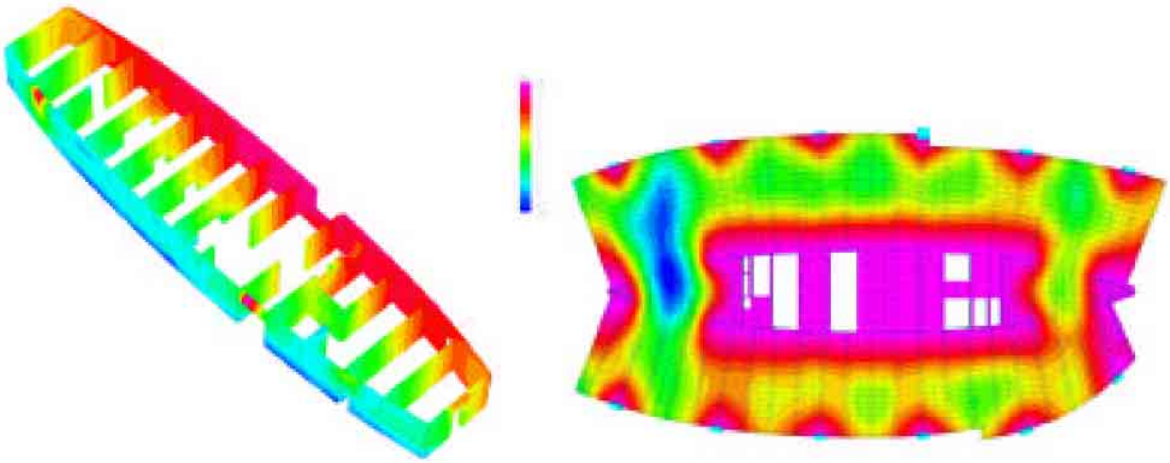


Figura 9.5 – Risultati numerici dell'analisi F.E.M. effettuata sull'Aurora Place di Sydney. A sinistra si può notare la distribuzione degli sforzi di compressione sulla fondazione del palazzo, mentre a destra è riportato l'andamento delle deformazioni in un piano alto dell'edificio.

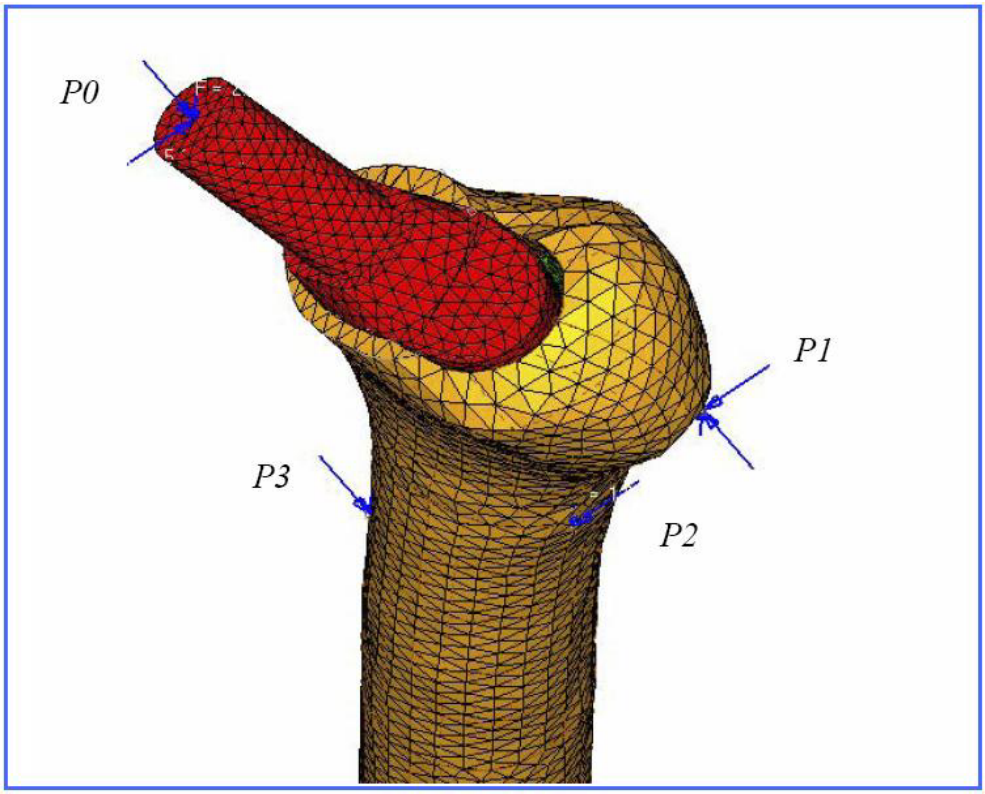



Figura 9.6 – Modello geometrico e delle azioni esterne per un osso umano con l'inserimento di una protesi ( in rosso ).
Questa immagine ci mostra come la tecnica F.E.M. possa essere utilizzata per studiare qualunque tipo di problema, in questo caso si voleva comprendere se la protesi poteva essere adatta allo scopo prefissato.
In questa rappresentazione è anche possibile notare la discretizzazione del dominio osseo e della protesi in elementi finiti di tipo tetraedrico, sempre in tale raffigurazione si possono anche osservare alcune delle azioni esterne applicate alla struttura.

## 9.3 IL SOFTWARE STRAUS7©

Figura 9.7 – Finestra iniziale di presentazione del software.

Visto che tutte le fasi di modellizzazione numerica dell'arco d'Augusto di Rimini sono state affrontate per mezzo del software *Straus7*©, mi pare utile fornire qualche informazione preliminare sul funzionamento ed utilizzo di questo programma.

*Straus7*© è un sistema generale per l'analisi agli elementi finiti sviluppato da *G+C Computing*.

Il sistema ha concezione unitaria, comprendendo, oltre ai solutori propri originali, pre-processori e post-processori. Si tratta di un ambiente unitario per la costruzione di modelli ad elementi finiti, la loro analisi ed estrazione dei risultati. La concezione e lo sviluppo di tutto il sistema avvengono interamente all'interno di un unico gruppo di competenze, per cui esso risulta realmente integrato in ogni sua parte e particolarmente compatto.

Tra i tipi di analisi che possono essere affrontati e risolti si ricordano:

- L'analisi statica, lineare e non lineare;
- L'analisi dinamica nel transitorio lineare e non lineare;
- La stabilità dell'equilibrio;
- Il calcolo delle frequenze naturali;

- L'analisi della risposta armonica;
- L'analisi della risposta spettrale;
- L'analisi del trasporto di calore in regime stazionario lineare e non lineare;
- L'analisi del trasporto di calore in regime transitorio lineare e non lineare.

*Straus7*© registra tutte le informazioni riguardanti il modello in un unico file con estensione *.ST7*. Questo file rappresenta tutto quanto occorre archiviare, quando si desidera fare un *backup* del proprio modello.
I risultati sono invece salvati in file differenti, in dipendenza del tipo di soluzione ( ad esempio un file *LSA* contiene i risultati di un'analisi statica lineare ).
Tutti i file sopra menzionati sono file binari e quindi non possono essere visualizzati o modificati con un normale editor di testo.
Il modello è la rappresentazione in Straus7 della struttura o del problema ingegneristico che si vuole simulare con il codice. Esso consta di entità, attributi, condizioni di carico e condizioni di vincolo.
Le entità sono le unità logico-costruttive di un modello. Sono entità i nodi, gli elementi, i cosiddetti *links* ( legami multi-nodo ), i vertici e la geometria.
Gli attributi sono caratteristiche associate alle entità. Per esempio una *Node-Force* è un attributo di un nodo. Essa descrive il valore della forza assegnata ad un certo nodo.
Una condizione di carico raggruppa l'insieme degli attributi di carico (come il momento applicato ad un nodo o un carico distribuito su di una trave) da considerare simultaneamente agenti sul modello ( ad esempio *Load case 1* può indicare il carico da vento e comprendere pressioni su elementi *plate* e carichi distribuiti su elementi *beam* ).
Nell'analisi lineare, le varie condizioni di carico agiscono

indipendentemente e sono risolte ogni volta che viene lanciato il solutore.

Una condizione di vincolo raggruppa l'insieme degli attributi di vincolo ( come l'impedimento allo spostamento di un nodo ) che interessano simultaneamente il modello. Nell'analisi lineare, il modello può essere risolto separatamente per più condizioni di vincolo, ed i risultati sono memorizzati in file diversi.

*L'Entity Inspector* rappresenta il modo più comodo per ottenere informazioni sulle entità del modello; è sufficiente posizionare il mouse sopra l'entità prescelta e premere il tasto *shift*. L'*Entity Inspector* visualizzerà una lista di informazioni come il numero, il gruppo, gli attributi e le coordinate per un nodo.

L'opzione *Summary* nel menu principale, invece, fornisce strumenti per un facile controllo di quantità, quali ad esempio, i dati relativi alle proprietà dei materiali, alla lista dei materiali od alla distribuzione delle masse.

E' possibile accedere ai contenuti, all'indice e alla ricerca delle parole chiave del manuale di riferimento *on-line* scegliendo *help topics* dal menu *help*. Oppure si possono avere informazioni dall'help di tipo sensibile al contesto, premendo *F1* dopo la selezione della funzione su cui si desiderano chiarimenti.

### *9.3.1 Principi di funzionamento*

#### 9.3.1.1 Introduzione

*Straus7*© riconosce le unità di misura e quindi è possibile scegliere di lavorare in uno qualunque dei sistemi di misura implementati. In ogni momento si può passare da un sistema di misura ad un altro, anche dopo aver risolto il modello. I sistemi di misura non devono essere necessariamente coerenti. Per esempio è possibile lavorare in *Newton*, *centimetri* e *MegaPascal* e lasciare che *Straus7*© operi internamente la conversione. I risultati saranno, poi, disponibili nelle unità di misura

scelte. Per cambiare le unità di misura, si selezioni l'opzione *Units* dal menu *Global*, si assegnino le unità di misura prescelte e quindi si prema *ok*.

Per *default*, *Straus7*© chiede di inserire il sistema di unità di misura ogni qual volta si crea un nuovo modello. Se però si preferisce lavorare in un sistema specifico, esso può essere impostato come sistema predefinito, evitando che sia specificato ogni volta. Per impostare il sistema di misura predefinito, scegliere *Preferences* dal menu file.

Una procedura tipica per la costruzione e l'analisi di un modello è la seguente:

- Costruzione della *mesh*;
- Immissione delle condizioni al contorno, delle condizioni di carico e delle proprietà dei materiali;
- Analisi ed interpretazione dei risultati.

### 9.3.1.2 La costruzione della mesh

La realizzazione della *mesh* ha inizio con l'introduzione dei nodi significativi.

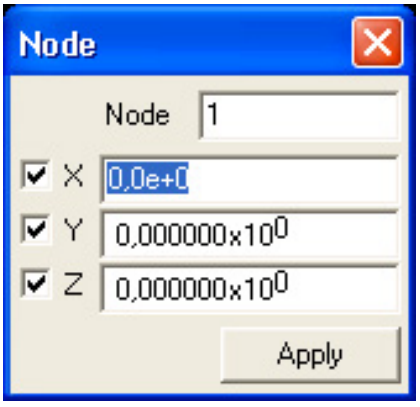



Figura 9.8 – Finestra di input delle coordinate dei nodi.

I nodi possono essere creati uno per uno selezionando la voce *Node* dal menu *Create* nella barra principale dei menu, Fig. 9.8. Nella finestra di dialogo che viene visualizzata, i valori da assegnare

all'interno dei campi x, y, z non devono necessariamente essere delle costanti, ma possono essere anche delle variabili. Una volta digitato *Apply*, il numero del nodo viene incrementato automaticamente.

Se la finestra di dialogo *Create Node* è attiva, si possono creare nodi semplicemente digitando con il mouse sopra ai punti della griglia regolare di riferimento predefinita. Posizionati i punti, si passa alla realizzazione degli elementi. La creazione dei singoli elementi avviene tramite l'opzione *Element* dal menu Create, Fig. 9.9.

La finestra di dialogo relativa permette di scegliere fra un elenco di elementi di tipo *beam*, *plate* e *brick*, quello più idoneo per il modello che si deve realizzare e di associare ad ognuno di essi un numero in *Property*.

Tale numero associa a ciascun gruppo, in cui viene suddiviso il modello, un colore differente e ciò permetterà in seguito di inserire parametri differenti relativi alle caratteristiche del materiale costituente il modello.

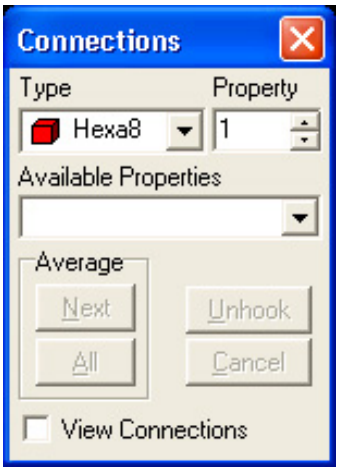



Figura 9.9 – Finestra per la definizione e l'inserimento dei vari tipi di elementi finiti.

### 9.3.1.3 Immissione delle condizioni al contorno, delle condizioni di carico e delle proprietà dei materiali

Ultimata la realizzazione della mesh, occorre introdurre le condizioni di vincolo.

Per poter applicare sui nodi desiderati le condizioni di vincolo volute occorre scegliere l'opzione *Node*, quindi *Restraint* dal menu principale *Attributes*, Fig. 9.10. Nella finestra di dialogo corrispondente basta scegliere *Fix* ( per impedire tutte le traslazioni e tutte le rotazioni ), indicare i nodi desiderati ( che assumeranno un colore differente ) ed applicare ad essi tale condizione. A conferma dell'applicazione effettuata, nei nodi selezionati appariranno due segmenti di colore differente, fucsia e bianco, che indicano rispettivamente le traslazioni e le rotazioni impedite.

Lo stesso comando serve, per introdurre anche le condizioni di carico ( spostamenti ). Volendo ad esempio introdurre uno spostamento lungo l'asse z, occorrerà fissare solamente la traslazione lungo tale asse, inserire il valore di tale spostamento ( con relativo segno ) ed applicarlo al nodo interessato. In questo ultimo comparirà un vettore con il verso concorde al segno precedentemente inserito.

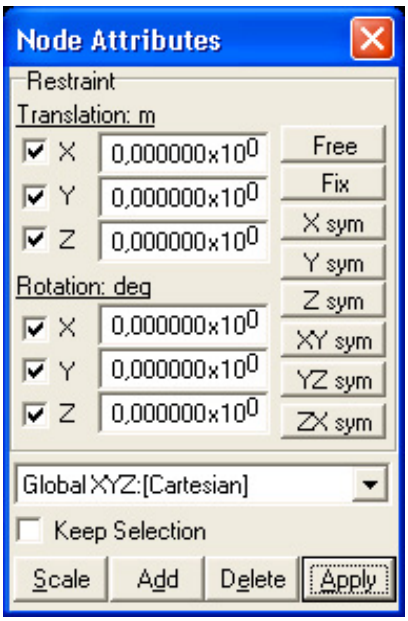



Figura 9.10 – Finestra di input delle condizioni di vincolo ai nodi.

Il passo successivo, prima di avviare l'analisi, è quello di introdurre le proprietà dei diversi materiali che compongono il modello.

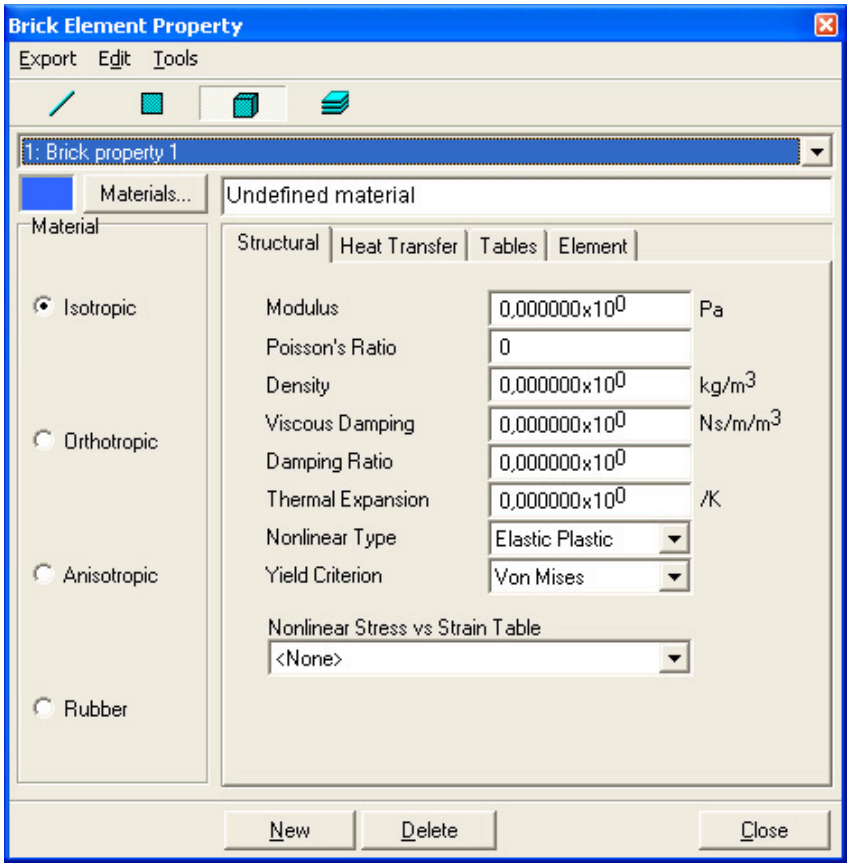



Figura 9.11 – Finestra di input parametri elastici del materiale.

Tali parametri servono per descrivere, il più fedelmente possibile le caratteristiche del materiale ed il suo comportamento.

Questa operazione viene effettuata attraverso *Property*, Fig. 9.11. I parametri indispensabili per la risoluzione del nostro modello e che pertanto sono stati introdotti sono:

- Modulo elastico normale di Young (E);
- Coefficiente di Poisson (ν);
- Densità (γ);
- Modulo di Taglio (G);
- Coefficiente di dilatazione termico lineare (α)
- Conducibilità termica (λ)

### 9.3.1.4 Analisi ed interpretazione dei risultati

Per poter svolgere l'analisi, occorre lanciare uno o più dei solutori di *Straus7*©. Di *default*, i solutori sovrascrivono i file dei risultati, se si risolve il modello una seconda volta.

La finestra del solutore è costituita da una barra degli strumenti e da una finestra con messaggi, che informano sullo stato di avanzamento della soluzione. Il solutore può essere arrestato in qualunque momento premendo il pulsante *stop*.

Volendo, noi, effettuare un'analisi statica, il comando da richiamare sarà *Solver: Linear Static*, Fig. 9.12. Nella corrispondente finestra deve essere in particolare specificato, quello che si vuole calcolare e la *Bandwidth Minimisation*. Quest'ultima opzione permette di rendere minima la larghezza di banda della matrice di rigidezza su cui si basa il metodo agli elementi finiti. L'ampiezza della banda infatti, condiziona fortemente sia il tempo di soluzione del modello che la quantità di memoria e spazio disco richiesti.

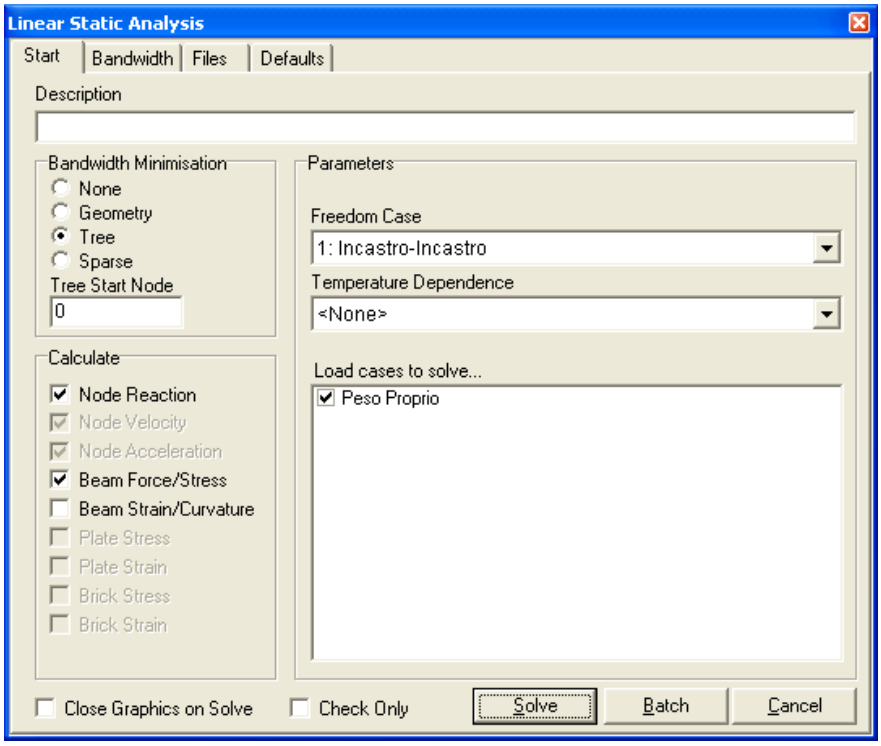



Figura 9.12 – Finestra del solutore statico.

Per migliorare le prestazioni del solutore, *Straus7*© offre due metodi di minimizzazione della larghezza di banda:

1) Il metodo *Geometry* considera la prossimità geometrica di elementi rispetto ai loro elementi attigui;
2) Il metodo *Tree* considera le relazioni di connettività di elementi adiacenti.

Generalmente per i modelli con direzioni dominanti secondo gli assi x, y e z è preferibile la modalità *Geometry*. Per gli altri casi si applica la modalità *Tree*. Quest'ultima è adatta anche a modelli che si diramano in tutte le direzioni.
Una volta ottenuta la soluzione, occorre cercare nel file *log* , *Results: View results log file*, l'eventuale presenza di avvertimenti o messaggi di errore. Se si trovano avvertimenti o messaggi di errore non conosciuti, è conveniente consultare l'help per avere maggiori informazioni. Se invece il file log non contiene segnali che mettono in dubbio la soluzione ottenuta, si può chiudere la finestra del solutore ed aprire il file dei risultati, *Results: Open results file*.

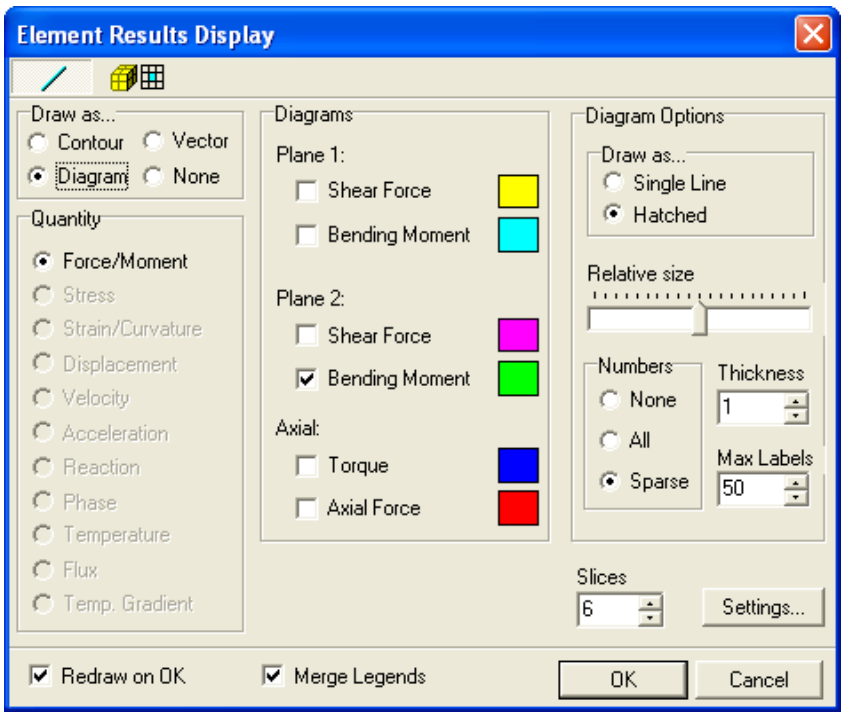



Figura 9.13 – Finestra di impostazione delle modalità di visualizzazione dei risultati.

*Straus7*© fornisce una serie di strumenti di *post-processing*, accessibili dal menu principale o dalla barra principale degli strumenti.
La funzione *Diagram*, Fig. 9.13, consente di vedere i diagrammi dei momenti, sforzo assiale taglio nei vari piani.
La funzione *Displacement Scala* è usata, ad esempio, per amplificare la scala di deformazione della mesh. In particolare *Absolute Scale* produce la moltiplicazione degli spostamenti reali per il fattore indicato nel campo *value*. Un valore di 100 significa che gli spostamenti visualizzati saranno 100 volte quelli reali. *Percent Scale* invece, utilizza informazioni sulle dimensioni della struttura per fornire una scala ragionevole, che mostri meglio le deformazioni avvenute. Valori tipici utilizzati stanno nell'intervallo tra il 10% ed il 20%.
*Straus7*© consente di eseguire il *contour* di tutti i tipi di entità e per tutte le quantità ottenute come risultato. All'interno di tale funzione è possibile scegliere *On cutting plane* per la rappresentazione tramite *contour* di una qualunque sezione del modello. Tale sezione è definita nel sistema di coordinate in uso. La definizione del piano 1, 2 e 3 si riferisce rispettivamente ai piani xy, yz, zx in un sistema di riferimento cartesiano.

## 9.4 REOLOGIA E CARATTERISTICHE DEI MATERIALI IMPIEGATI PER LA COSTRUZIONE DELL'ARCO

In questo capitolo vengono descritte le caratteristiche dei tre materiali impiegati per la costruzione dell'arco riminese:

1. Pietra di Nabresina ROMAN STONE.
2. Muratura a sacco con iniezioni consolidanti di malta cementizia M1.
3. Tufo legato da calce e lapillo siliceo.

In realtà i materiali esistenti sull'arco d'Augusto sono in numero superiore rispetto a quelli appena citati, tali elementi di diversa tipologia sono stati inseriti in epoche successive alla costruzione e sono stati adoperati per restaurare piccole zone danneggiate, vista la loro modesta estensione si possono trascurare durante la modellizzazione F.E.M. senza praticamente alcuna conseguenza sul risultato finale. Così fra la bianca pietra calcarea d'Istria si può trovare qualche blocco di arenaria proveniente dal monte Titano ( S. Marino ), la stessa cosa è accaduta in maniera più evidente per le pareti in muratura, infatti nei paramenti murari si possono osservare delle notevoli disomogeneità dei laterizi impiegati, questo fenomeno si spiega attraverso la modifica e rifacimento di tali strutture avvenute per via dei numerosi restauri che il monumento ha subito nel corso dei secoli.

Quanto appena citato è solamente una precisazione, per ricordare che in realtà le componenti ed i materiali costruttivi in uso sull'arco d'Augusto sono numerosi e molto variegati fra loro ( la stessa muratura a sacco contiene al suo interno una miriade di materiali differenti, vedi fig. 9.14 ), nonostante questa diversificazione è comunque possibile individuare i tre suddetti materiali principali, che assieme costituiscono la quasi totalità della struttura.

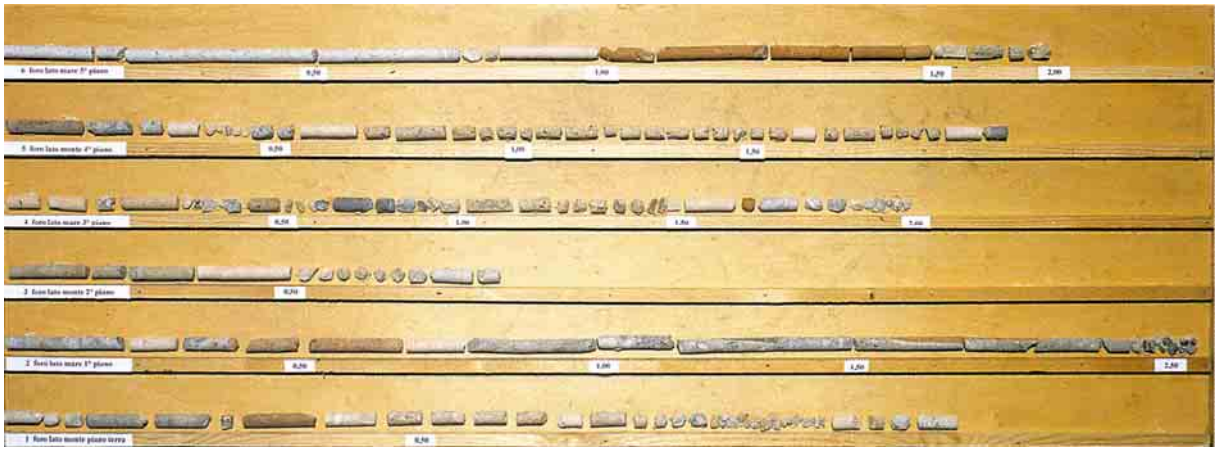


Figura 9.14 – Carotaggi effettuati per saggiare lo stato di coesione e consistenza del nucleo centrale della muratura a sacco, dopo l'iniezione delle resine consolidanti (1996). Da questa immagine è possibile notare la grande varietà di tipologie litoidi presenti nel nucleo.

## 9.4.1 Pietra di Nabresina ROMAN STONE

Figura 9.15 – Pietra di Nabresina ROMAN STONE. Brecciola calcarea fossilifera.
Questa pietra, di provenienza iulio-istriana, si è formata nel Cretaceo in ambiente di piattaforma-mare basso. E' discretamente cementata e si presenta omogenea e poco fratturata. A destra è visibile un ingrandimento della porzione di immagine di sinistra appena sotto il target tape adesivo.

Figura 9.16 – Pietra di Nabresina ROMAN STONE. Brecciola calcarea fossilifera.

Figura 9.17 – Disposizione sull'arco della bianca pietra calcarea d'Istria.

Questa biancastra pietra calcarea costituisce la parte di rivestimento superficiale dell'arco d'Augusto di Rimini, infatti tale materiale molto pregiato è stato usato solamente per la parte esteriore del monumento, la zona interna della struttura invece e costituita dalla ben più povera muratura a sacco. I blocchi lapidei sono quindi disposti in modo tale da formare una cassaforma, come si usa oggi per il conglomerato cementizio, e si "gettava" la muratura a sacco in attesa di procedere con un altro corso di pietra in elevazione ( vedi figura 3.4 e relativo paragrafo 3.2.2.1 ).
Esiste però anche una porzione dell'arco che è stata realizzata interamente con questa pietra: la volta cilindrica dell'arco ed i modo parziale i piedritti ( vedi figura 9.18 ).

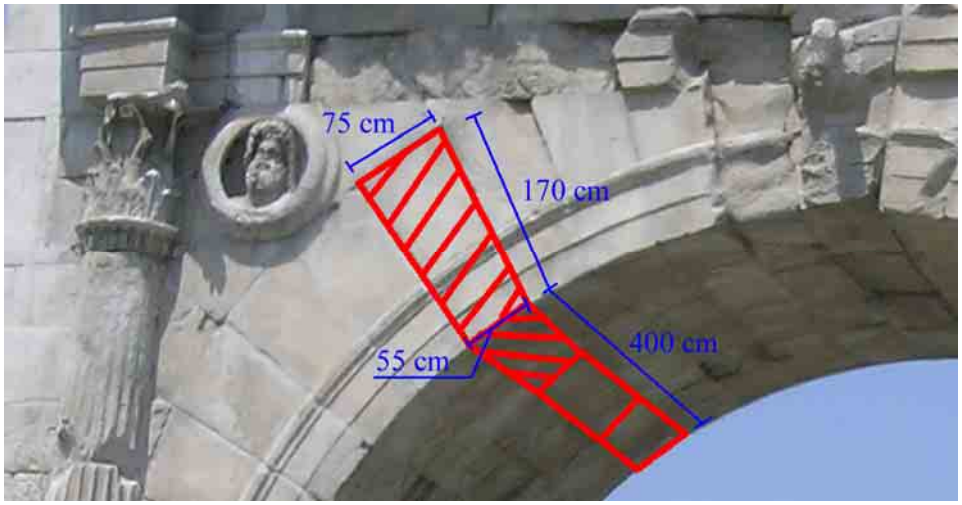



Figura 9.18 – Individuazione di un blocco lapideo nella volta cilindrica.
La zona campita rappresenta un concio di pietra della volta dell'arco; la sua altezza è di 170 cm, la larghezza media è di 55 cm all'intradosso e 75 cm all'estradosso, infine lo spesso del concio e variabile da 1/3 ad 1/4 dell'altezza dello stesso. Sempre da questa immagine è possibile comprendere che l'intera struttura della volta cilindrica è costituita integralmente da blocchi di pietra istriana per tutta l'altezza di 170 cm e per tutta la profondità di 400 cm.

Nei piedritti è più difficile comprendere quale sia l'entità dell'infossamento della struttura lapidea all'interno del nucleo centrale. E' comunque presumibile che sia circa uguale all'altezza del concio di figura 9.18 ( 170 cm ), ovvero il piedritto in pietra portante la volta dovrebbe avere una larghezza di 170 cm ed una profondità di 400 cm.

A questo punto, definite la volta ed il piedritto dell'arco come strutture portanti costituite interamente dalla pietra d'Istria è possibile dire che le restanti superfici lapidee visibili un po' su tutto il monumento si addentrano all'interno mediamente per 65-70 cm. Circoscritti ora i volumi occupati dalla preziosa pietra calcarea è possibile dire che il restante volume complementare è costituito interamente dalla muratura a sacco.
Descritto sino ad ora l'impiego che la pietra di Nabresina ha avuto nella costruzione dell'arco, adesso riporto qui di seguito tutte le sue caratteristiche tecniche che mi sono state gentilmente fornite dalla società CAVA ROMANA s.p.a., essa è la principale ditta che estrae questa pietra, la cava di estrazione è proprio quella che avevano utilizzato gli antichi romani per erigere questo arco riminese.

### 9.4.1.1 Scheda tecnica della pietra di Nabresina ROMAN STONE

Località di estrazione: AURISINA ( NABRESINA in sloveno )
Classificazione geologica: Brecciola calcarea fossilifera o calcarenite
Sinonimi: Aurisina Romana

DESCRIZIONE MACROSCOPICA
Il "Roman Stone" è un calcare compatto, costituito da una ricchissima frazione di minuti frammenti organici, immersi in una massa di fondo carbonatica cementante microcristallina.
Il colore di fondo è grigio molto chiaro, debolmente tendente all'avorio, con l'abbondante, fine ed uniforme presenza ( "fioritura" ) di resti organici di colore solitamente grigio scuro, raramente bianchi. I resti fossili, di dimensioni millimetriche o submillimetriche, sono omogeneamente distribuiti.
La cementazione è molto buona; sono assenti vene calcitiche e vacui, ed estremamente rare sono le superfici stilolitiche.

La stratificazione è indistinta, la fatturazione netta a spaziatura plurimetrica.
Microscopicamente la roccia è definibile come una finissima brecciola di origine organogena.

DESCRIZIONE MICROSCOPICA
L'ortochimico è costituito da un mosaico di fondo micritico con diffusi fenomeni di ricristallizzazione.
Gli allochimici sono costituiti da frammenti fossili, omogeneamente distribuiti, spesso con tracce di usura, di dimensioni millimetriche e submillimetriche. I bioclasti sono riconducibili a resti di Rudiste e di Lamellibranchi a guscio spesso.
La roccia è definibile come bioclastite.

CARATTERI
Si presenta omogeneo, compatto, a grana finissima, non gelivo, leggermente assorbente, con elevati parametri di caratterizzazione meccanica, buona resistenza all'usura ed agli urti e basso coefficiente di dilatazione lineare termica.
Questo "marmo" presenta ottima lavorabilità, si presta in particolare per la statuaria ed è perfettamente lucidabile a specchio.
Risulta adatto per qualsivoglia impiego interno ed esterno viste le buone doti di durevolezza. E' stato impiegato ed è impiegabile per pavimenti, rivestimenti, scale, arredi, opere ornamentali, contorni di aperture, ecc…
Una caratteristica propria di questo materiale è costituita da sporadiche "macchie" rugginose che si presentano in seguito ad un processo naturale di ossidazione.

PROPRIETÁ CHIMICHE, FISICHE E MECCANICHE

| | |
|---|---|
| a) Carbonato di calcio: | 99,18% |
| b) Carbonato di magnesio: | 0,41% |
| c) Carbonato di ferro: | 0,03% |
| d) Peso specifico ( $\gamma$ ): | 2644 Kg / mc |
| e) Coefficiente di imbibizione: | 0,13% |
| f) Resistenza media a compressione ( $f_{bm}$ ): | |
| - allo stato naturale: | 1734 Kg / $cm^2$ |
| - dopo cicli di gelività: | 1605 Kg / $cm^2$ |
| g) Resistenza alla flessione: | 190 Kg / $cm^2$ |
| h) Resistenza agli urti: | 34 cm |
| i) Resistenza all'usura: | 1,7 / 3,24 mm |
| j) Coefficiente di dilatazione termico lineare ( $\alpha$ ): | 4,3 * $10^{-6}$ /°C |
| k) Modulo elastico di Young ( E ): | 600000 Kg / $cm^2$ |
| l) Coefficiente di Poisson ( $\nu$ ): | 0,15 |
| m) Coeff. di conducibilità termica ( $\lambda$ ): | 2,9 W / m °C |
| n) Modulo di elasticità tangenziale ( G ): | 260870 Kg / $cm^2$ |
| o) Resistenza caratteristica a compressione ( $f_{bk}$ ): | |
| - allo stato naturale: | 1300 Kg / $cm^2$ |
| - dopo cicli di gelività: | 1200 Kg / $cm^2$ |

I parametri meccanici della pietra riportati qui sopra derivano da prove effettuate dalla società CAVA ROMANA s.p.a., tali valori sono stati impiegati nella definizione del modello reologico dell'arco d'Augusto. Ricordo che questi parametri non sono proprio quelli effettivi della pietra messa in opera sull'arco, ma essendo la stessa pietra cavata dalla stessa cava utilizzata dai romani è molto probabile che i valori siano praticamente coincidenti.

Sempre a scopo di precisazione, faccio presente che le pietre naturali non sono mai omogenee, isotrope ed elastiche-lineari, difatti, soprattutto quelle sedimentarie come questa, presentano stratificazioni, processi di metasomatismo e metamorfismo, inclusioni di vario tipo, ecc…

Nel caso particolare di questa roccia sedimentaria organogena non si commettono grossi errori nel considerarla elastica-lineare, omogenea ed isotropa, infatti non è stratificata, la distribuzione dei bioclasti è

molto omogenea, inoltre tutti i blocchi hanno caratteristiche quasi uguali fra loro in quanto derivano da un unico grande ammasso roccioso uniforme.

Figura 9.19 – Località di estrazione della pietra ni Nabresina ( Aurisina ) ROMAN STONE.
La cartina di sinistra riporta con un bollo rosso la posizione di estrazione della pietra che risulta essere vicino alla cittadina Duino Aurisina, che in sloveno è chiamata Nabresina.
Nell'immagine di destra è visibile un ingrandimento della cartina precedente.
Da queste immagini si vede chiaramente la vicinanza del sito di estrazione a Trieste e quindi ad Istria.

### *9.4.2 Muratura a sacco con iniezioni consolidanti di malta cementizia M1*

Altro materiale di cui è necessario conoscerne le caratteristiche per una modellizzazione F.E.M. è la muratura a sacco che occupa tutto il volume complementare a quello definito dalla pietra di Nabresina.
Tale ammasso murario è molto eterogeneo, anisotropo e certamente non elastico-lineare ( vedi figura 9.14 e 9.20 ), quindi la modellazione numerica F.E.M. di questa struttura è alquanto complicata, ma è anche vero che non è possibile indagare la disomogeneità e l'anisotropia del materiale in quanto questa risulta troppo variabile. A migliorare un po' la situazione sono intervenute poi le iniezioni ad alta pressione di malta cementizia del 1947 ( vedi paragrafo 3.2.1 ) e successivamente le iniezioni di resine consolidanti a bassa pressione del 1996 ( vedi

paragrafo 3.2.2 ). Grazie a questi interventi di restauro il nucleo strutturale dell'arco in muratura a sacco ha riacquistato la cementazione ed omogeneità necessaria.

Figura 9.20 – Particolare scoperto di una muratura a sacco come quella dell'arco d'Augusto. In questa immagine è visibile un pezzo di muratura appartenente alle antiche mura laterizie tardoromane che circoscrivevano la città. Il resto in questione è adiacente a pochi metri dall'arco, probabilmente deve essere emerso durante la demolizione della zona limitrofa all'arco voluta da Mussolini nel '37.
Qui è possibile vedere molto bene tutte le caratteristiche di eterogeneità ed anisotropia descritte nel testo.

A monte di tutti i restauri eseguiti, in questa tesi la muratura a sacco è stata approssimata ad un solido omogeneo, isotropo ed elastico-lineare, sicuramente questa assunzione è una ipotesi forte, ma grazie all'iniezione di consolidanti ora lo è un po' meno. D'altro canto non era neanche possibile riuscire a modellare la distribuzione eterogenea e l'anisotropia della muratura a sacco, l'impasto che la forma è troppo variegato. Quindi si è operato un po' come si fa per il calcestruzzo: "guardando la muratura da lontano" alla fine le disomogeneità e le anisotropie si compensano, e così è possibile determinare dei parametri medi del materiale. Tramite l'operazione di media il calcolo

numerico della struttura non subisce grosse varianti rispetto alla realtà, ma non è possibile sapere a livello locale e dettagliato il vero stato tensionale-deofrmativo, quello che si evince è una media della zona considerata. La stessa cosa avviene in modo analogo nell'idraulica quando invece di considerare il modo istantaneo del fluido ( che è troppo turbolento ) si considera il moto medio.

### 9.4.2.1 Parametri meccanici

a) Resistenza caratteristica a compressione ( $f_k$ ): 14 Kg / $cm^2$
b) Peso specifico ( $\gamma$ ): 2300 Kg / mc
c) Modulo elastico normale di Young ( E ): 14000 Kg / $cm^2$
d) Coefficiente di Poisson ( $\nu$ ): 0,25
e) Modulo elastico di taglio ( G ): 5600 Kg / $cm^2$
f) Coeff. di dilatazione termico lineare ( $\alpha$ ): $6 * 10^{-6}$ / °C
g) Coefficiente di conducibilità termica ( $\lambda$ ) 0,7 W / m °C

## *9.4.3 Tufo legato da calce e lapillo siliceo*

Questo è il materiale che compone la fondazione a platea dell'arco, al riguardo di tutte le caratteristiche geometriche e di altro tipo di questa struttura vedere il paragrafo 2.4.2 e 3.2.2.1.

### 9.4.3.1 Parametri meccanici

a) Peso specifico ( $\gamma$ ): 1300 Kg/mc
b) Modulo elastico normale di Young ( E ): 120000 Kg/$cm^2$
c) Coefficiente di Poisson ( $\nu$ ): 0,20
d) Modulo elastico di taglio ( G ): 50000 Kg / $cm^2$

## 9.5 ANALISI F.E.M. MONODIMENSIONALE DELL'ARCO

Arrivati fin qui, ora si è in possesso di tutte le informazioni necessarie per cominciare a costruire un modello numerico F.E.M. dell'arco d'Augusto attraverso il software *Straus7*© di cui si è parlato.

Il modello geometrico della struttura può essere ricavato dalla restituzione vettoriale 3D del monumento oppure dal D.S.M. dello stesso, mentre il modello reologico è possibile impostarlo in base alle informazioni sui materiali riportate nel paragrafo 9.4. L'unico modello che rimane completamente da definire è quello delle azioni esterne, fra le svariate forze che possono influire sulla sicurezza statica dell'edificio la più importante è sicuramente il peso proprio ed il carico sismico. Fra le due condizioni di carico appena citate è stata analizzata solamente quella riguardante il peso proprio. Per costruzioni molto massive come questa infatti le azioni accidentali sono una piccola percentuale rispetto a quelle permanenti. Per comprendere il perché di questa situazione si può paragonare l'arco ad un elefante che deve sostenere il peso di un uomo ( sovraccarichi tipo neve, vento…), il pachiderma praticamente non risente alcun sovraccarico in quanto il peso dell'uomo che porta è solo una piccola percentuale del suo peso. Attualmente le costruzioni invece seguono un principio opposto: sono molto leggere e resistenti, quindi risentono fortemente dei carichi accidentali. Le moderne strutture possono quindi essere paragonate alle forzute formiche che portano sulle spalle enormi pezzi di pane, molto più pesanti di loro.

Tornado a parlare dell'arco possiamo dire che una prima approssimativa modellizzazione meccanica si può effettuare individuando nella struttura degli elementi resistenti monodimensionali del tipo trave ( *beam* ). Questo è proprio quello che è stato fatto in questa prima fase dell'analisi statica del monumento soggetto al suo stesso peso.

### *9.5.1 Ipotesi sul modello numerico*

1. Materiale omogeneo,isotropo ed elastico-lineare.
2. Piccoli spostamenti.
3. Teoria della trave di De Saint-Venant.
4. Struttura monodimensionale contenuta nel piano.
5. Materiale resistente ugualmente a trazione e compressione.
6. Corpo elastico unico e continuo, senza giunture.

Purtroppo le ipotesi 5. e 6. non sono proprio adatte per schematizzare la struttura dell'arco, infatti il materiale lapideo ha un comportamento fragile e non resistente a trazione, inoltre la struttura è costituita da blocchi lapidei connessi fra loro con giunture a secco, e quindi le azioni si trasferiscono da un blocco all'altro per mezzo dell'attrito e non certo come se fosse un corpo elastico unico. Le altre ipotesi invece possono essere considerate più realistiche. E' necessario comunque ricordare che la schematizzazione dell'arco d'Augusto come una struttura monodimensionale è già di partenza troppo semplicistica, ma essa è in ogni caso un metodo veloce e facile per avere qualche preliminare informazione sullo stato tensionale del monumento.

### *9.5.2 Il modello geometrico e delle azioni esterne*

Per individuare uno schema statico monodimensionale dell'arco si è pensato di schematizzare la volta cilindrica di pietra in una trave curvilinea, mentre i piedritti ( anch'essi in pietra ) sono stati modellizzati come dei pilastri incastrati al terreno e connessi con trasmissione di momento all'arcata sovrastante ( vedi figura 9.21 ).
Le azioni esterne considerate sono invece solamente il peso proprio della struttura individuata ( piedritti+volta ) calcolato automaticamente dal software, più il peso permanente della muratura a sacco sostenuta dalla volta ( vedi figura 9.22 ).

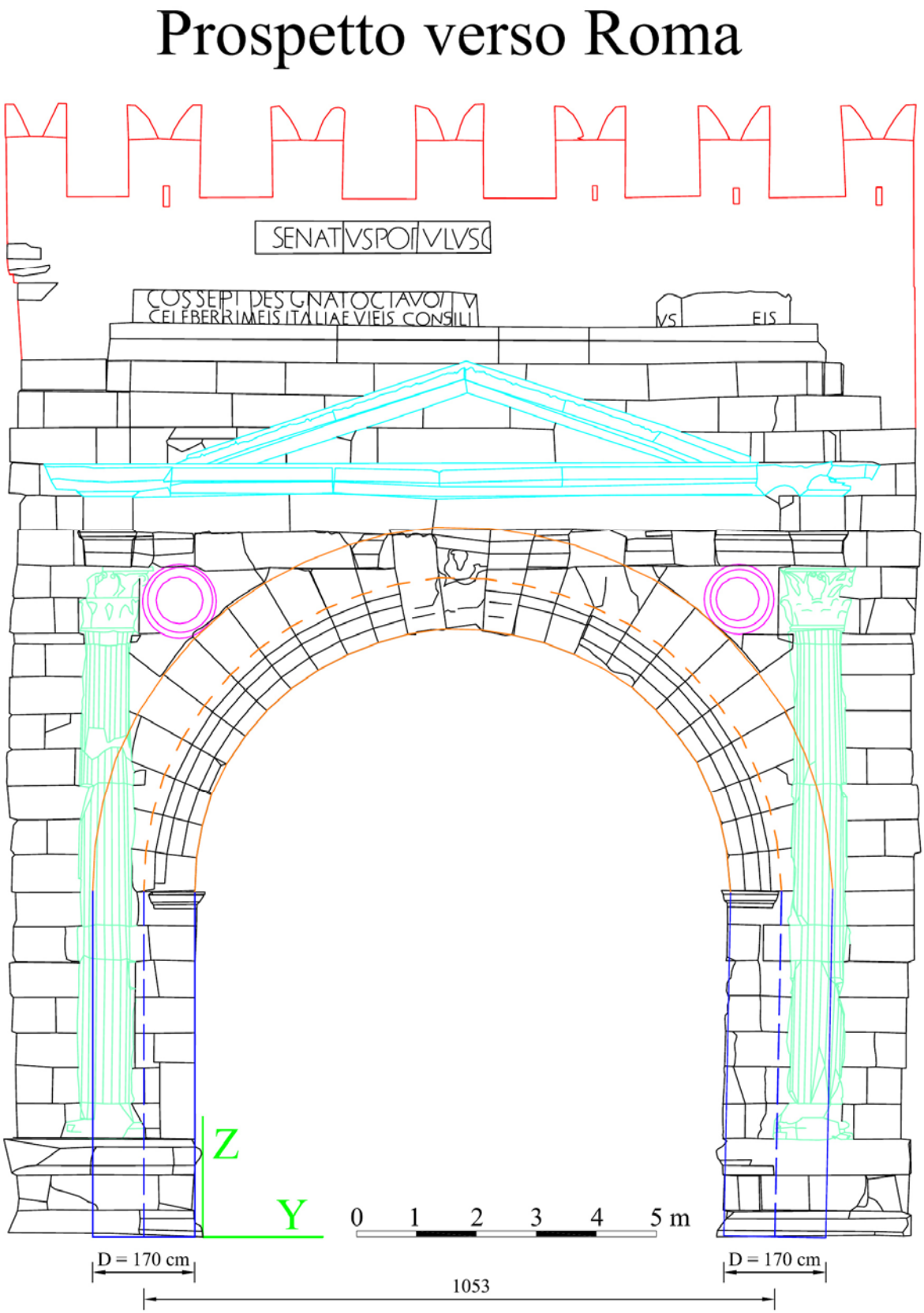



Figura 9.21 – Prospetto verso Roma dell'arco d'Augusto di Rimini con l'individuazione della struttura portante monodimensionale. Scala 1:100. In blu sono riportati i piedritti, mentre in arancione è riportata l'arcata. Da notare è che la struttura monodimensionale deriva dalla forma esatta dell'arco ricavata dalla restituzione fotogrammetrica effettuata per questa tesi. Osservare che nella costruzione del modello si è presa in considerazione anche l'inclinazione di 1,1° del piedritto a lato mare ( quello a destra ).

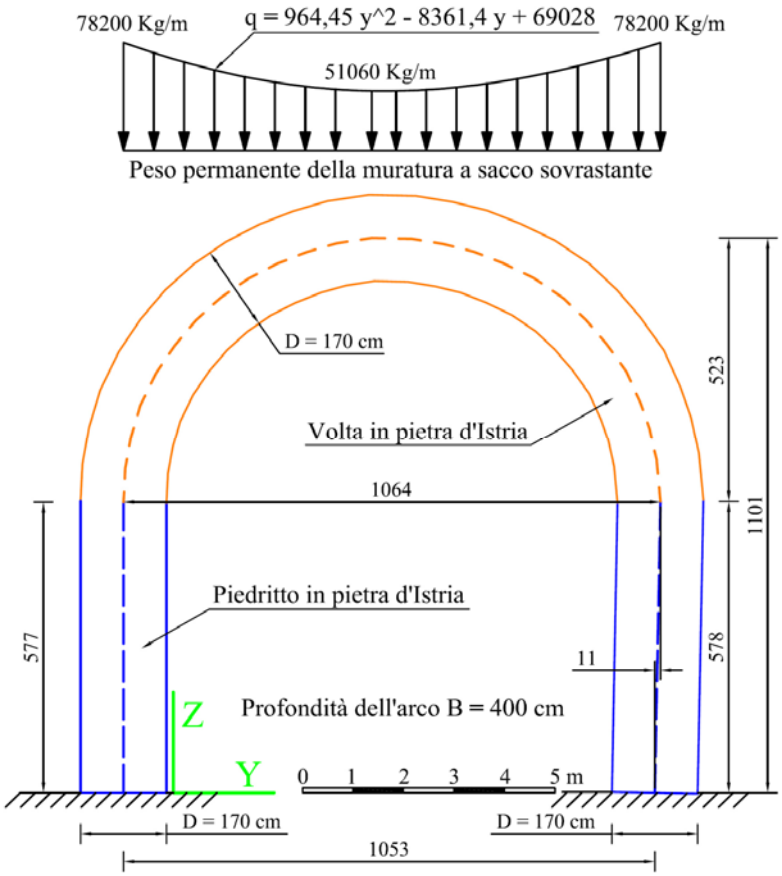



Figura 9.22 – Schema statico dell'arco d'Augusto. Scala 1:150.

Nella figura qui sopra è riportato insieme sia il modello geometrico sia quello delle azioni esterne. Come si può notare dalla presente immagine, l'arco è stato schematizzato come un corpo continuo incastrato al terreno su cui agisce il peso proprio ed il peso permanente della muratura a sacco che sovrasta la volta.

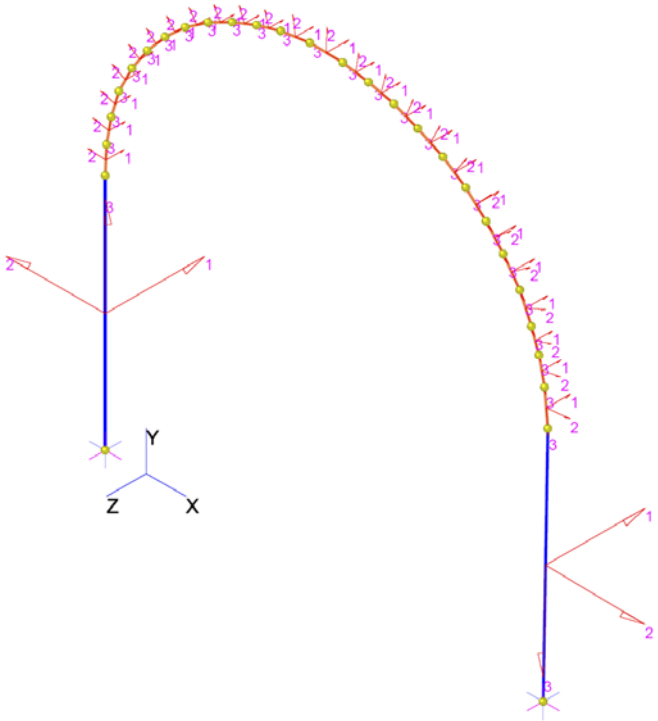



Figura 9.23 – Modello geometrico dell'arco nell'ambiente *Straus7* con indicazione dei nodi e degli assi locali dei vari elementi *beam*. Qui è riportato il solo asse degli elementi.

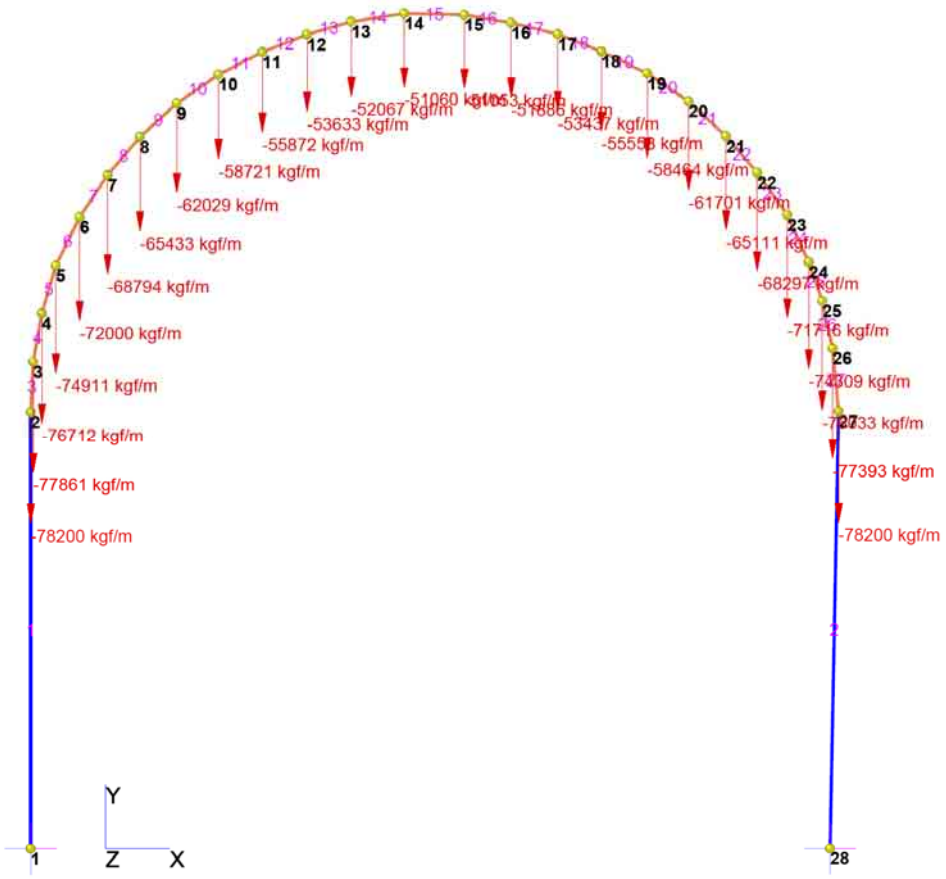



Figura 9.24 – Modello geometrico+modello delle azioni esterne dell'arco nell'ambiente *Straus7*. In questa raffigurazione è messa in evidenza il solo asse degli elementi.
Scala disegno 1:100. Questa figura non è altro che la definizione in *Straus7* della schematizzazione di figura 9.22. In questa rappresentazione è possibile notare la numerazione dei nodi ( in nero grassetto ) ed anche la numerazione delle aste *beam* ( in fucsia ).

Nella definizione del modello geometrico visibile in figura 9.22, 9.23 e 9.24 la geometria dell'arco è stata ricavata direttamente dalla restituzione fotogrammetrica effettuata per questa tesi ( vedi figura 9.21 ), da questo prospetto si è ricavato l'andamento dell'asse della struttura spostandosi esattamente di 85 cm dal profilo definito dall'intradosso dell'arcata e dei piedritti. Ottenuto l'asse della struttura si è quindi suddivisa la volta in 25 elementi *beam* che schematizzano i reali 25 conci di pietra, ogni nodo è stato poi posizionato all'inizio e fine di ogni concio. Questa discretizzazione della struttura risulta quindi naturale e la più adatta a simulare la realtà, oltretutto essendo l'analisi adottata di tipo elastica-lineare, non è necessario infittire la *mesh* in quanto le funzioni interpolanti ( di

forma ) dell'elemento *beam* non sono funzioni approssimanti casuali, ma derivano dalla risoluzione della linea elastica per questi elementi trave. Imposto uno spostamento generico ai nodi dell'elemento *beam* è possibile conoscere con esattezza ( perché è possibile la risoluzione del problema elastico in forma chiusa ) la forma della linea elastica, e di conseguenza anche l'andamento delle tensioni-deformazioni al suo interno. Questo discorso appena fatto invece non risulta vero per tutti gli altri tipi di elementi, di cui non è possibile trovare una soluzione in forma chiusa; per questo motivo nel caso di analisi 2D o 3D è necessario infittire la *mesh* se si voglio ottenere soluzioni di maggior precisione. Logicamente se si entra nella sfera della non linearità ( sia di tipo geometrico che reologico ) anche l'elemento trave deve essere suddiviso in più parti così come gli altri elementi bi-tridimensionali.

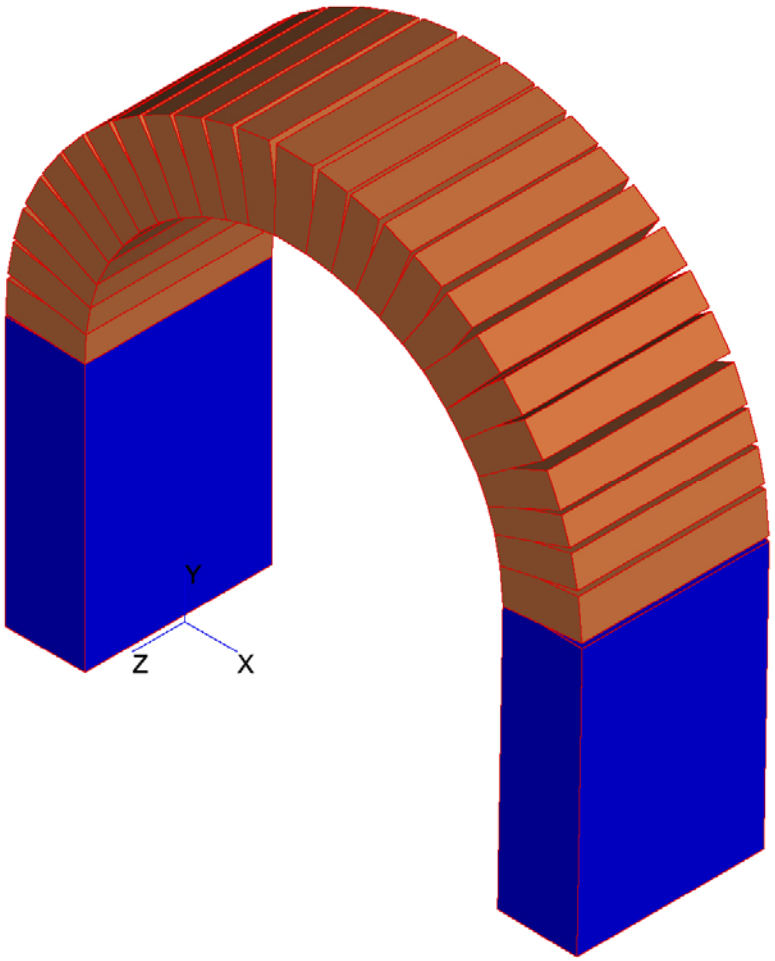



Figura 9.25 – Render del modello geometrico dell'arco d'Augusto.

### *9.5.3 Il modello reologico del materiale*

Sia la volta che i piedritti sono composti interamente dalla bianca pietra d'Istria, e quindi per caratterizzare il comportamento elastico di questi elementi si sono utilizzati i parametri elastici riportati nel paragrafo 9.4.1 relativo alla pietra di Nabresina.

Naturalmente in questo tipo di analisi la pietra viene considerata reagente anche a trazione, mentre ciò in realtà non può accadere, e quindi nelle zone tese si avrà un distaccamento dei conci di pietra che non riescono più a trasmettere le tensioni. Questo fatto comporta una ridistribuzione delle sollecitazioni che in questa analisi non è stata considerata, basti dire però che le zone compresse aumenteranno il loro valore di tensione a seguito di questa ridistribuzione.

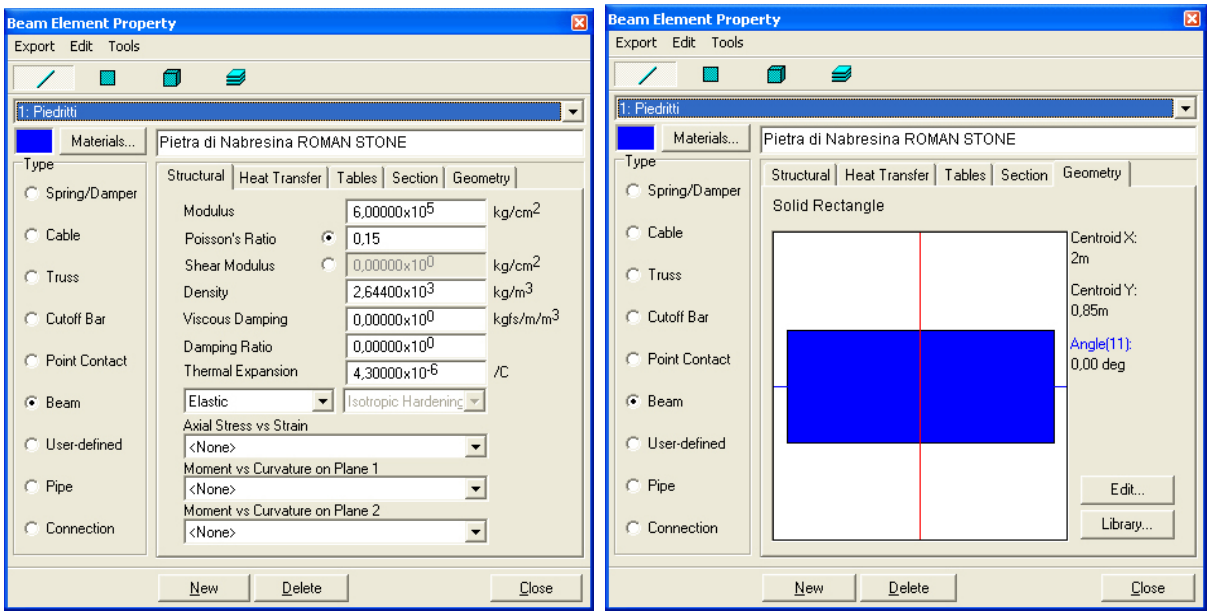



Figura 9.26 – Finestra *Beam Element Property* del software *Straus7* con dati relativi ai piedritti dell'arco.

In questa finestra è possibile scegliere il tipo di elemento finito più adatto alla modellizzazione ( mono-bi-tridimensionale, Beam, Truss, Cable, Spring, Damper, Plate, Brick…), dopo aver scelto l'elemento è possibile definirne tutte le caratteristiche strutturali e geometriche per mezzo di tabelle o tramite l'inserimento di parametri.

Nel caso qui riportato è raffigurato l'elemento *beam* utilizzato per schematizzare sia i piedritti che la volta dell'arco d'Augusto, nell'immagine di sinistra si possono notare tutti i parametri elastici impiegati per modellare il comportamento del materiale "Pietra" ( vedi paragrafo 9.4.1 ), mentre nella figura di destra è riportata la geometria ( sezione ) dell'elemento, il software calcola poi automaticamente i momenti di inerzia, le aree, e tutti i dati necessari per l'analisi.

### *9.5.4 Risultati dell'analisi statica. P.pr.+permanente della muratura*

Avendo già definito tutti i tre sottomodelli dell'arco è ora possibile riunirli nell'unica entità chiamata modello matematico, tale processo di unione dei modelli e intercomunicazione fra essi è del tutto trasparente allo strutturista, infatti il software provvede automaticamente a gestire i dati. Durante definizione dei tre sottomodelli il software si occupa di costruire le matrici di rigidezza locale dei singoli elementi, il vettore dei carichi nodali generalizzati ed impone le condizioni divincolo. A questo punto si procede alla fase di processing dei dati, ed il programma assembla le matrici di rigidezza degli elementi e dei vettori dei carichi nodali fino a formare un unico sistema algebrico con tante equazioni quante sono le incognite ( spostamenti nodali ).

Risolto il sistema algebrico si possono conoscere gli spostamenti nodali, e tramite le funzioni interpolanti anche tutto il campo di spostamento. Da tale campo è poi possibile risalire allo stato tensionale-deformativo nella struttura.

Parlando in termini pratici, per risolvere la struttura con un'analisi statica lineare è stato impiegato il comando *Linear Static* situato sotto il menù *Solver* della barra dei comandi di *Straus7*. Fatto questo appare la finestra di comando riportata in figura 9.12, da cui è possibile impostare tutti i parametri di regolazione del processing dati nonché quello che si vuole ottenere in output.

Ottenuta la risoluzione del problema è possibile indagare i risultati attraverso i molteplici strumenti di post-processing che il software mette a disposizione dell'utente ( vedi paragrafo 9.3.1.4 ).

Qui di seguito riporto ora i principali grafici ottenuti in uscita dall'elaborazione numerica del modello dell'arco, essi sono quelli generalmente richiesti dall'ingegnere, il quale per mezzo di essi riesce a formulare delle considerazioni sull'oggetto esaminato.

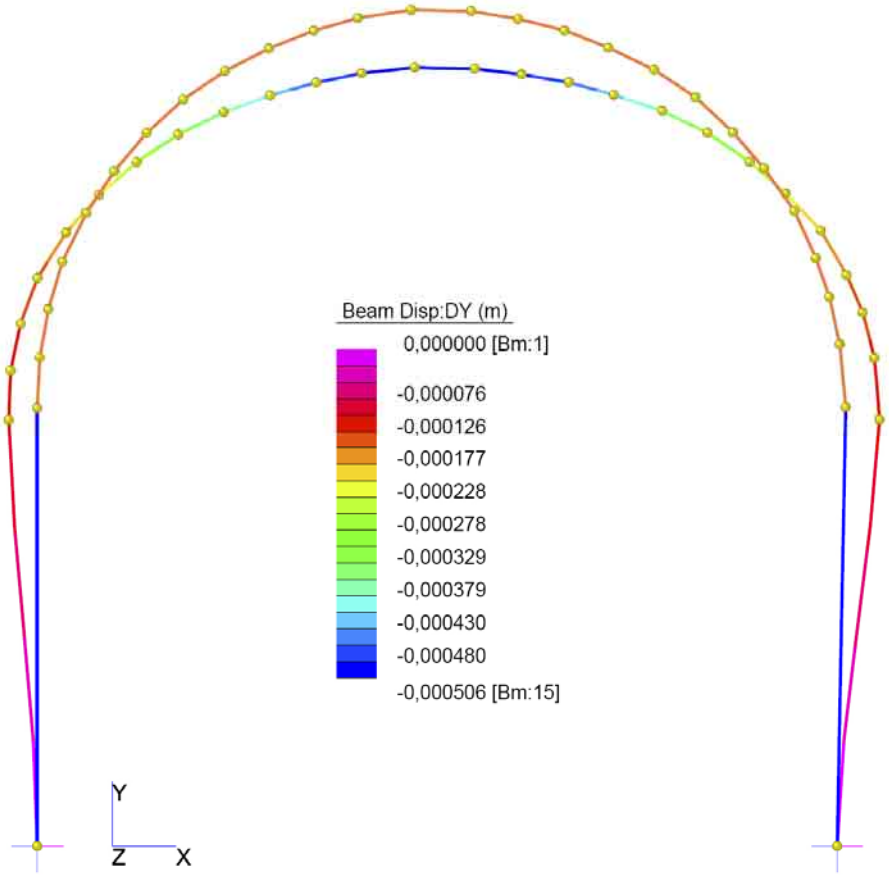



Figura 9.27 – Deformata con contour dello spostamento verticale DY. Scala 1:100.
Amplificazione della deformata: 1500x

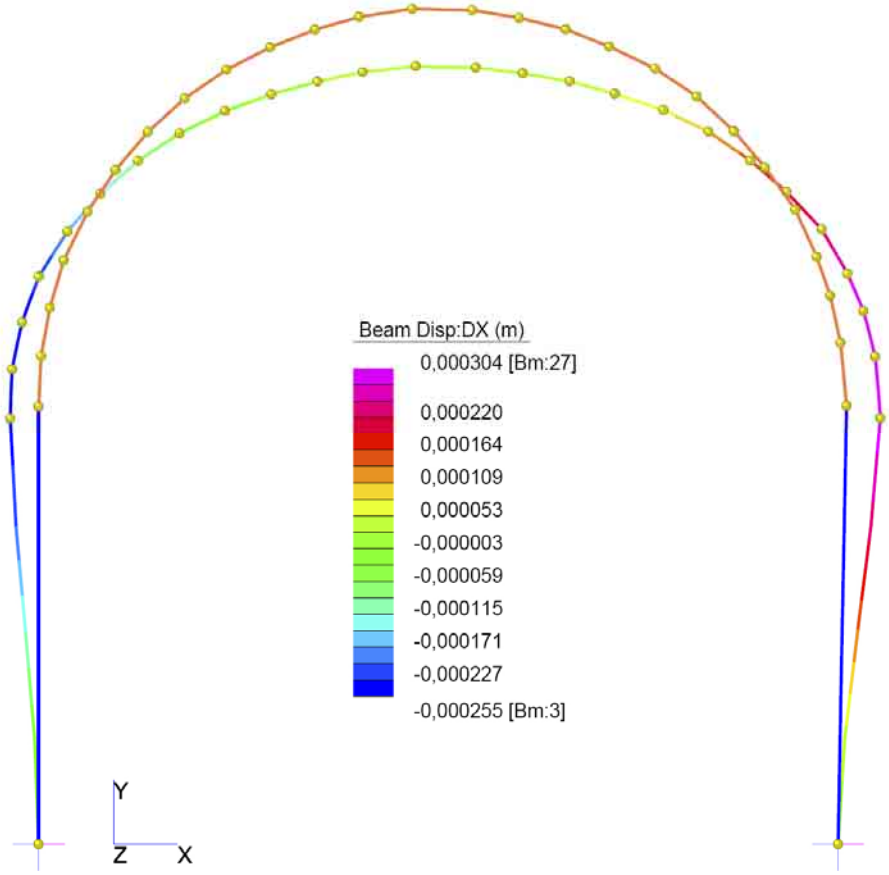



Figura 9.28 – Deformata con contour dello spostamento orizzontale DX. Scala 1:100.

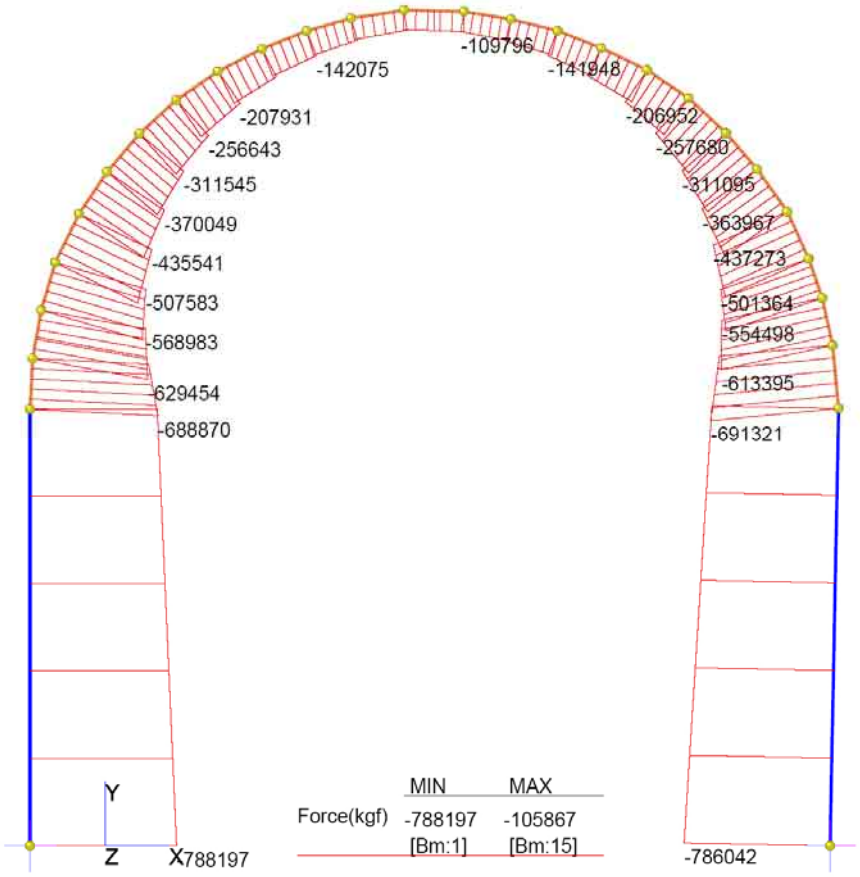



Figura 9.29 – Diagramma dello sforzo normale N. Scala 1:100.

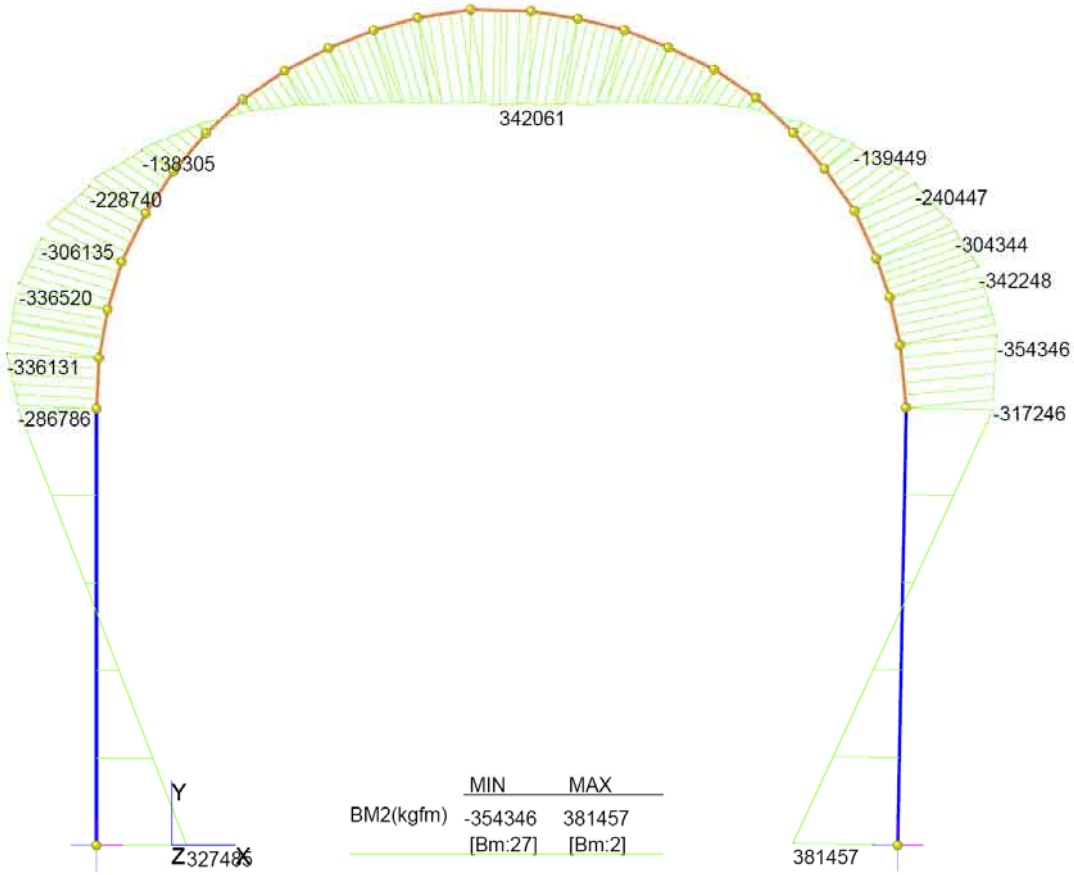



Figura 9.30 – Diagramma del momento M. Scala 1:100.

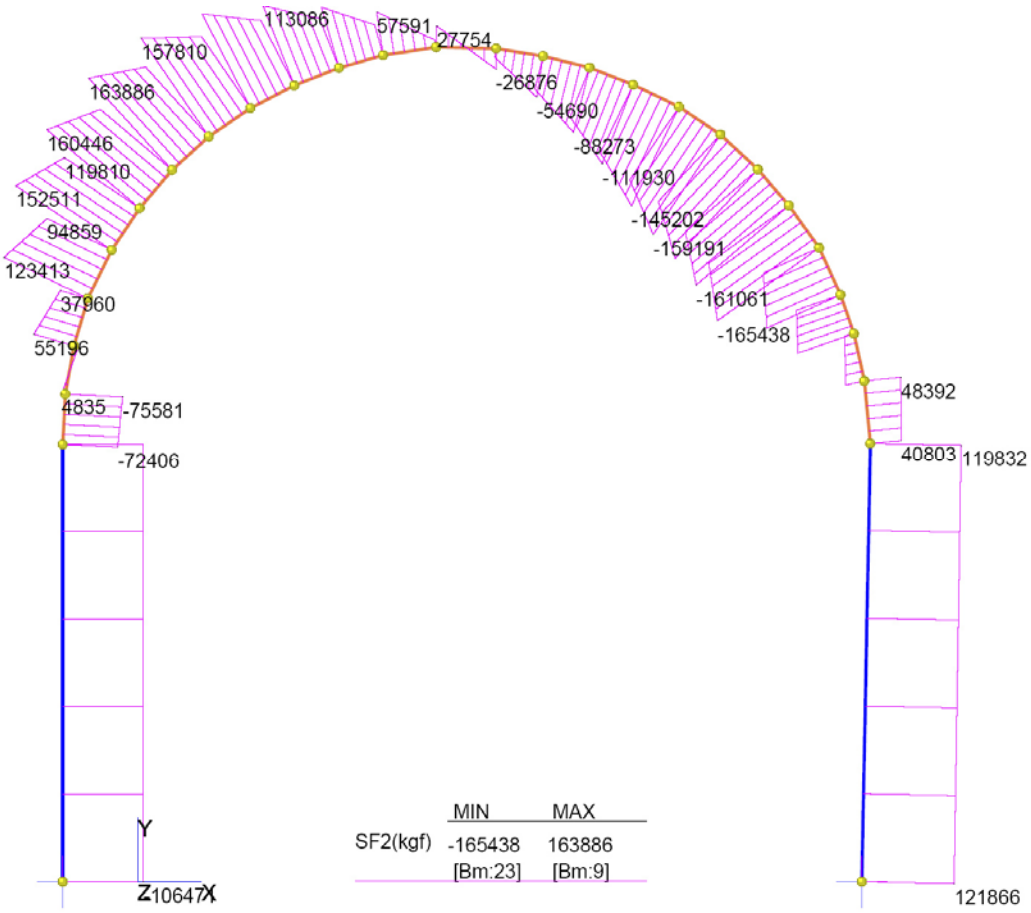



Figura 9.31 – Diagramma del taglio T. Scala 1:100.

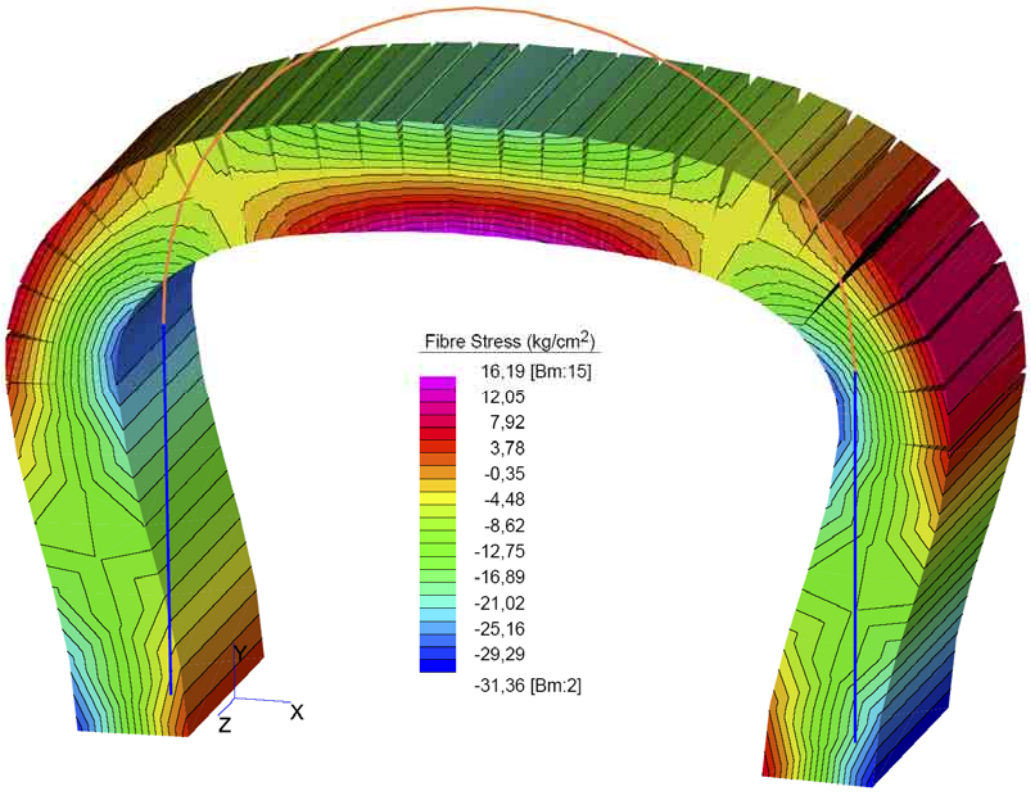



Figura 9.32 – Deformata nel 3D + contour dello stress σ in direzione parallela all'asse della struttura.

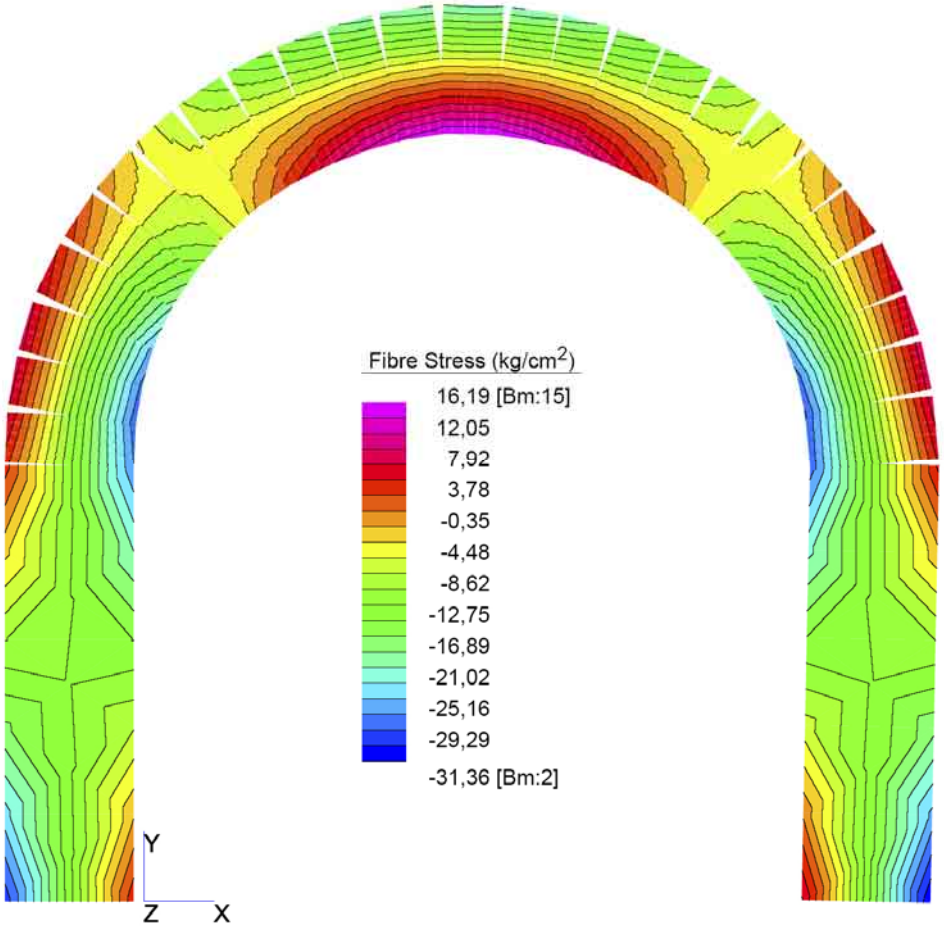



Figura 9.33 – Stress σ in direzione parallela all'asse della struttura. Scala 1:100.

In questa raffigurazione è riportato in mappa di colore l'andamento dello stress derivante dall'azione combinata della sollecitazione M ed N, tale andamento viene infatti ricavato dalla formula $\sigma = -N / A \pm M / W$ per le sezioni presso-inflesse.

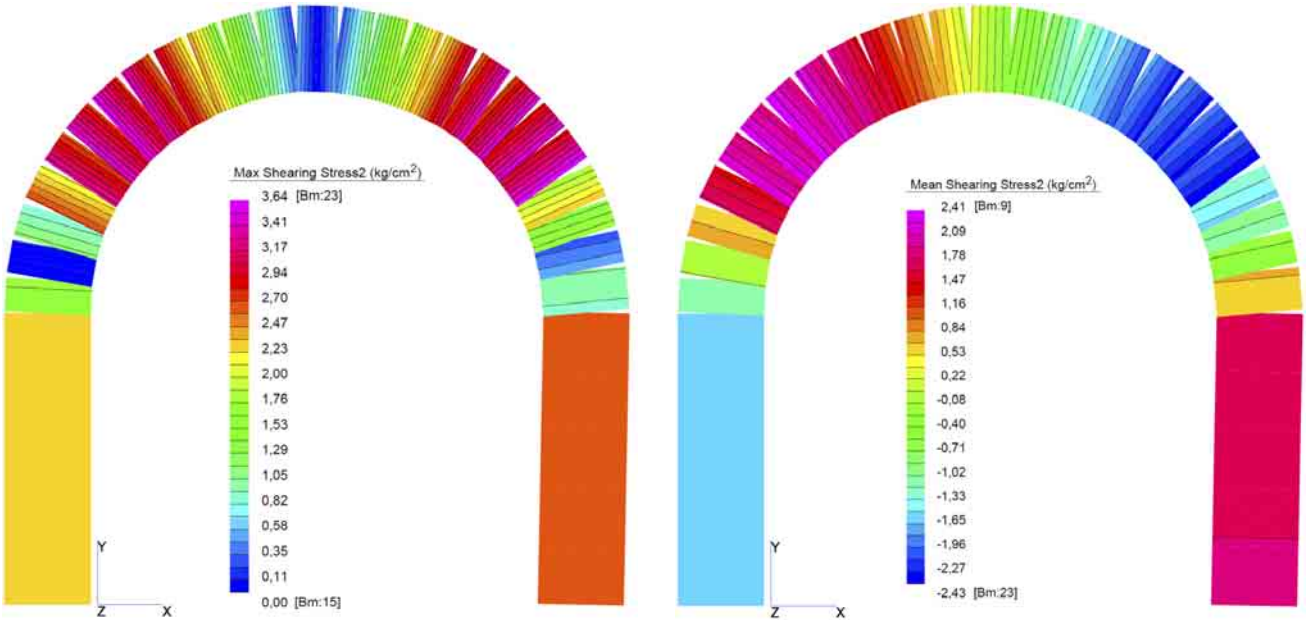



Figura 9.34 – Stress di taglio τ sul piano normale all'asse della struttura. Scala 1:150.

Nell'immagine di sinistra è mappato l'andamento del massimo sforzo τ, a destra la media dello sforzo τ sul piano considerato.

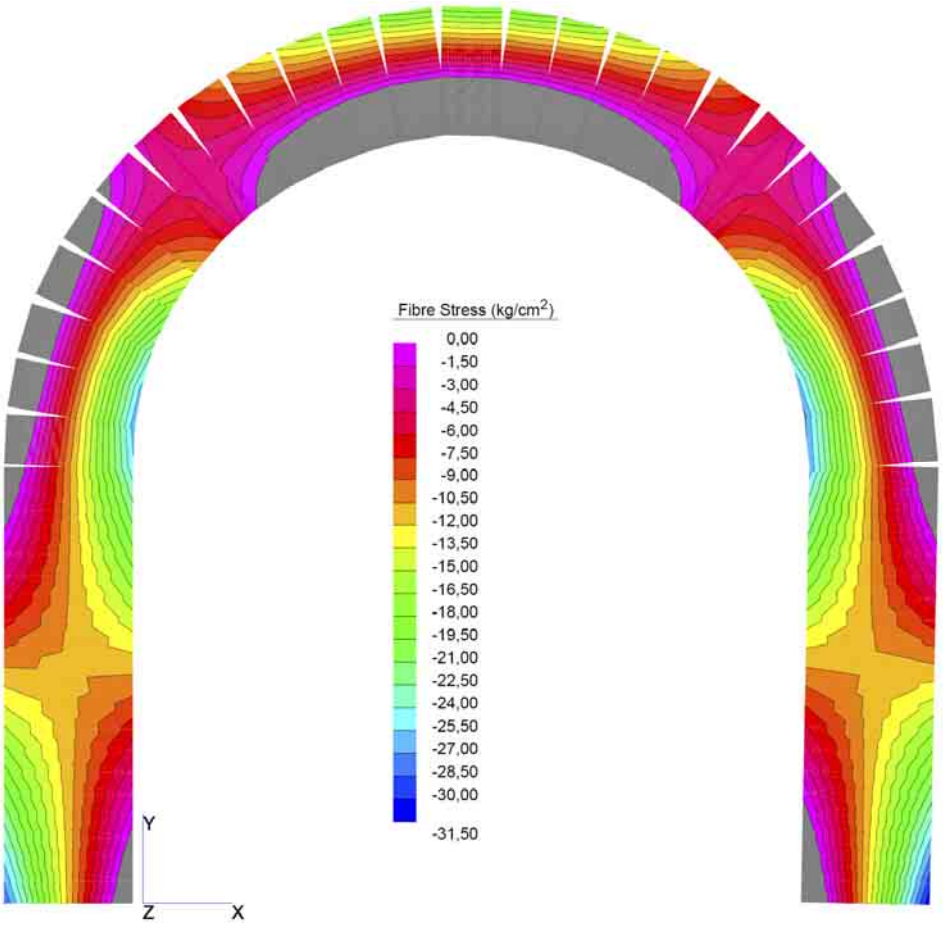



Figura 9.35 - Stress σ in direzione parallela all'asse della struttura. Scala 1:100.
Questa immagine è identica alla figura 9.33, riporta esattamente lo stesso stato tensionale, solamente che qui non sono raffigurate le zone tese. In tal modo risulta facile individuare le fasce ( in grigio ) dove avviene la parzializzazione delle sezioni con conseguente distaccamento dei conci lapidei. Ovviamente le zone non reagenti sono un po' più estese di quelle riportate qui ( in grigio ), questo a causa della ridistribuzione delle sollecitazioni; allo stesso tempo le zone compresse subiscono un aumento generale delle tensioni.

## 9.5.4.1 Considerazioni sui risultati ottenuti

Osservando la figura 9.27 possiamo riscontrare che lo spostamento massimo in direzione verticale avviene nel concio in chiave dell'arco, il valore di tale spostamento risulta molto piccolo, all'incirca 0,5 mm. Questa piccola entità della deformazione può essere spiegata attraverso l'alto modulo elastico della pietra calcarea che forma la struttura portante dell'arco. Esaminando poi la deformata della linea d'asse, riportata sempre nella figura 9.27, si può notare come essa non sia proprio simmetrica, in particolare si riscontra uno spostamento orizzontale maggiore per il nodo 27 ( 0,3 mm ) rispetto al nodo 2 (

0,25 mm ), vedi anche figura 9.28. L'aggravio di deformazione per il nodo 27, corrispondente alla cima del piedritto a lato mare, è dovuto alla non verticalità del piedritto stesso. L'asimmetria dello stato tensionale-deformativo è ancor meglio visibile nei diagrammi del momento e del taglio, in tali grafici delle sollecitazioni interne è infatti possibile osservare la sensibile differenza delle sollecitazioni fra le due basi dei piedritti ( vedi figura 9.30 e 9.31 ).
Concentrando l'attenzione ora sulla figura 9.29 possiamo dire che l'arco d'Augusto pesa approssimativamente 1550000 Kg, difatti sommando i due sforzi normali alla base dei piedritti è possibile avere una grossolana stima del peso della struttura.
Osservando le figure 9.27, 9.28 e 9.32 che riportano l'andamento deformato della struttura, si nota un certo "spanciamento" laterale sia della volta, ma soprattutto dei piedritti. Questo fenomeno è dovuto alla spinta orizzontale che tutti gli archi scaricano sui piedritti. In questa situazione di analisi monodimensionale non è stato tenuto conto dell'effetto di contrasto esercitato dalla muratura a sacco situata ai lati dei piedritti, e quindi le deformazioni-sollecitazioni qui ricavate sono sicuramente superiori rispetto al vero. La funzione di contenimento esplicata da tali strutture laterizie di rifianco è fondamentale e tutt'altro che trascurabile, infatti questi elementi laterali vanno con la loro massa a contrastare la spinta orizzontale dell'arco cercando di centrare la risultante delle azioni nel baricentro della sezione di base del piedritto. Il centramento della risultante è essenziale per tutte le strutture che non reagiscono a trazione ( come l'arco ), difatti portando la risultante all'interno del nocciolo centrale d'inerzia si elude la parzializzazione della sezione, e così il materiale risulta tutto compresso e quindi reagente. Nel caso che la sezione si parzializzi, si avrà invece una ridistribuzione delle tensioni, la quale va inevitabilmente ad aumentare lo stress nelle zone compresse.

Detto ciò al riguardo dell'azione del rifianco, si capisce come la presente analisi monodimensionale ( che non considera il rifianco ) sia una trattazione troppo approssimativa, che fornisce in output valori di tensioni-deformazioni sensibilmente più elevati rispetto alla realtà.
Per questo motivo si è affrontata anche un'analisi strutturale dell'arco in stato piano di tensione, in questa modellizzazione più sofisticata è stata considerata anche l'interazione fra le zone lapidee e quelle laterizie ( vedi paragrafo 9.6 ).
Tornando ad esaminare il presente modello monodimensionale è possibile trovare una graficizzazione dei risultati numerici ottenuti che riassume un po' tutto lo stato tensionale della struttura: la figura 9.33.
Come citato nella relativa didascalia, in questa immagine viene visualizzato l'andamento della tensione $\sigma$ parallela all'asse degli elementi, tale distribuzione delle forze è indotta dalla contemporanea presenza di momento e sforzo assiale. Qui è possibile osservare in blu le fibre compresse, mentre in rosso le fibre tese. Ovviamente questa distribuzione dello stress è esatta per un materiale perfettamente reagente sia a trazione che a compressione, siccome la reale pietra non resiste a tensioni di trazione allora nelle zone rosse si avrà un distaccamento dei conci lapidei che non riuscendo più a trasmettere le azioni di trazione si pazializzeranno con un conseguente aumento delle tensioni di compressione nelle zone blu ( vedi anche fig. 9.35 ).
Osservando sempre questa mappatura dello stress ( fig. 9.33 e 9.35 ) è anche possibile vedere l'effetto che l'inclinazione del piedritto a lato mare ( a destra ) ha causato sullo stato tensionale: un aumento delle tensioni interne proprio in tale pilastro con una parzializzazione della sezione di base. In realtà questo aumento dello sforzo non è molto accentuato, perché fortunatamente l'inclinazione del piedritto è molto lieve, ma è comunque un effetto sensibile ( vedi figura 9.35 ). La figura 9.35 mostra infatti che il piedritto a lato monte ( a sinistra ) ha una sezione di base quasi tutta compressa ( vedi figura 9.36 ),

solamente un piccolo lembo all'intradosso risulta teso ( e quindi scarico, distaccato dal terreno ), mentre il piedritto a lato mare presenta una evidente parzializzazione ( vedi figura 9.35 e 9.36 ).

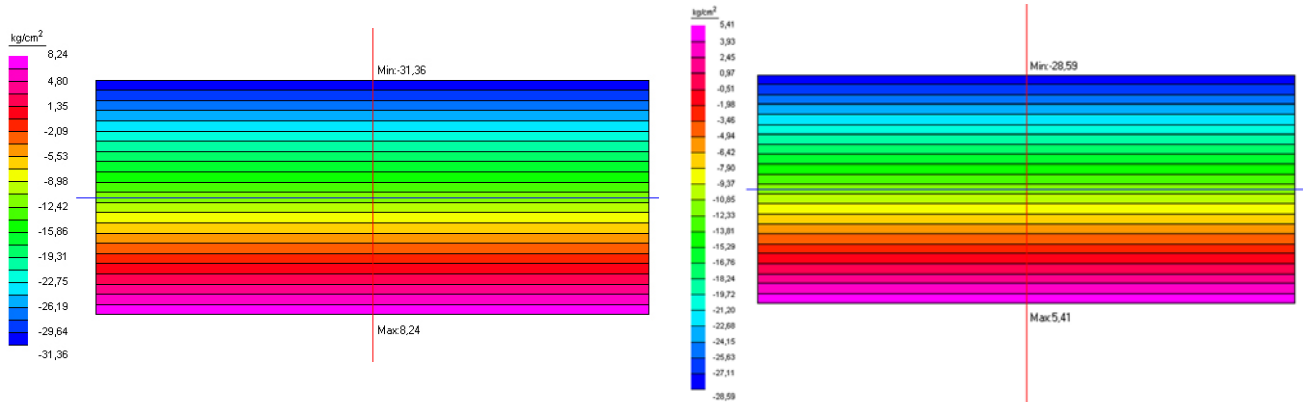



Figura 9.36 – Total fibre stress nelle sezioni di base dei piedritti.
L'immagine di sinistra riporta la sezione a contatto con la fondazione del piedritto a lato mare, mentre la raffigurazione di destra riporta la stessa sezione per il piedritto a monte. Come spiegato nel testo, qui si può notare l'aumento delle tensioni nel piedritto a lato mare con una maggiore parzializzazione della sezione.

A questo punto, avendo spiegato il perché le figure 9.33 e 9.35 non rappresentano il reale andamento delle tensioni interne, sarebbe interessante poter comprendere in che modo avviene la ridistribuzione delle sollecitazioni e l'ampliamento delle zone non reagenti visualizzate in grigio nella figura 9.35. Per fare questo prendiamo in considerazione la sezione dell'arco più sollecitata: la base del piedritto a lato mare ( a destra ). In questa sezione andiamo quindi a fare il confronto fra l'analisi elastica con sezione reagente sia a compressione che a trazione ( quella appena effettuata ) ed un'analisi con sezione reagente solo a compressione ( che simula il reale comportamento del materiale ). Dal confronto si ricavano poi i seguenti due dati principali: lo spostamento dell'asse neutro e l'aumento della tensione massima di compressione.
Qui di seguito riporto quindi il risultato di tale confronto risparmiando i passaggi numerici, ma a titolo informativo ricordo che il calcolo per ottenere i valori sulla sezione non reagente a trazione è del tutto analogo a quello che si fa per trovare le tensioni di contatto fra plinto rigido e terreno elastico-lineare.

Tensioni σ sulla sezione di base del piedritto a lato mare

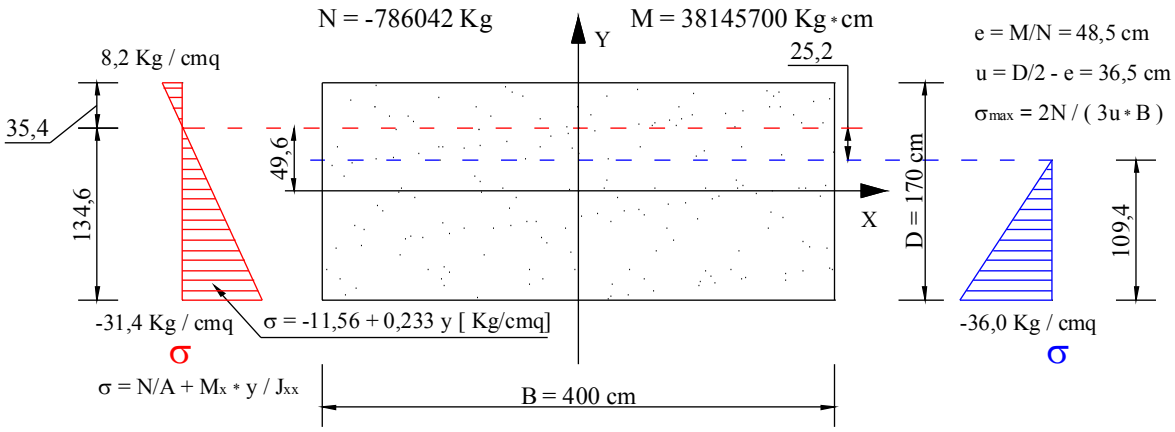



Figura 9.37 – Andamento delle tensioni σ sulla base del piedritto a lato mare.
In rosso è riportata la distribuzione dello stress σ nel caso di sezione reagente sia a trazione che a compressione, tale andamento delle tensioni è possibile osservarlo in modo analogo anche nella figura 9.36 e 9.33. In blu invece si è disegnato l'andamento dello stress per una sezione non resistente a trazione ( come la pietra utilizzata sull'arco ).

Dall'osservazione della figura 9.37 riportata qui sopra possiamo notare che la ridistribuzione delle sollecitazioni sulla sezione più critica agisce attraverso un aumento delle tensioni di compressione ( da -31,4 Kg / cmq a -36 Kg / cmq ), inoltre l'asse neutro si sposta di 25,2 cm verso il lembo compresso.
Concludendo possiamo dire che la presente analisi monodimensionale statica dell'arco non è certo esatta, ma comunque fornisce dei valori cautelativi che permettono di fare delle prime considerazioni sulla distribuzione delle tensioni all'interno della struttura.

### *9.5.5 Analisi modale dell'arco: calcolo delle forme modali e delle relative frequenze naturali*

Tramite l'analisi modale si vanno a determinare i modi naturali di vibrare della struttura e le relative frequenze proprie ( naturali ). La determinazione di modi principali di vibrare è sempre il primo passo verso l'analisi dinamica delle strutture, infatti tramite essa è possibile in seguito eseguire lo studio della risposta armonica nonché la risposta

spettrale ( utilizzata moltissimo per l'analisi sismica ). Lo scopo fondamentale dell'analisi modale è quello di semplificare la risoluzione del problema dinamico ( costituito matematicamente da un sistema di equazioni differenziali non disaccoppiate ), ovvero data una generica forzante dinamica si vuole determinare la risposta della struttura. Tramite il teorema di espansione dell'analisi modale si riesce ad operare una trasformazione lineare che permette il passaggio dallo spazio nodale ( formato da un sistema di equazioni differenziali non disaccoppiate ) allo spazio modale ( formato da un sistema di equazioni differenziali disaccoppiate ). Tale cambiamento semplifica notevolmente la risoluzione del problema, in quanto trasforma il sistema originario in un sistema disaccoppiato di equazioni differenziali, in cui ogni equazione contiene soltanto una variabile. Risolto il "facile" problema della risposta nello spazio modale si ritorna poi allo spazio originario attraverso la trasformazione lineare definita dal teorema di espansione. Questo teorema dice in sostanza che una qualunque risposta dinamica della struttura può essere ricavata da una combinazione lineare dei modi naturali di vibrare. Detto ciò si comprende quale sia il vantaggio dell'analisi modale: si trova facilmente la risposta della struttura nello spazio modale e tramite la suddetta trasformazione ci si riconduce allo spazio reale, dove è possibile vedere effettivamente come si comporta la struttura nei confronti della forzante assegnata. Ricordo che le forme modali e le relative frequenze sono tante quanti i gradi di libertà del sistema, quindi per un corpo elastico continuo sono infinite, ma tramite la discretizzazione operata con la tecnica F.E.M., l'arco è stato suddiviso in 27 elementi e 28 nodi ( di cui 2 vincolati ) quindi i g.d.l. nello spazio sono $6 * (28-2) = 156$. Per avere informazioni più dettagliate sull'analisi modale è stato necessario discretizzare in modo più fitto l'intera struttura ( con 1351 nodi ), a conclusione di questa operazione si è comunque trovata una leggera differenza dei valori.

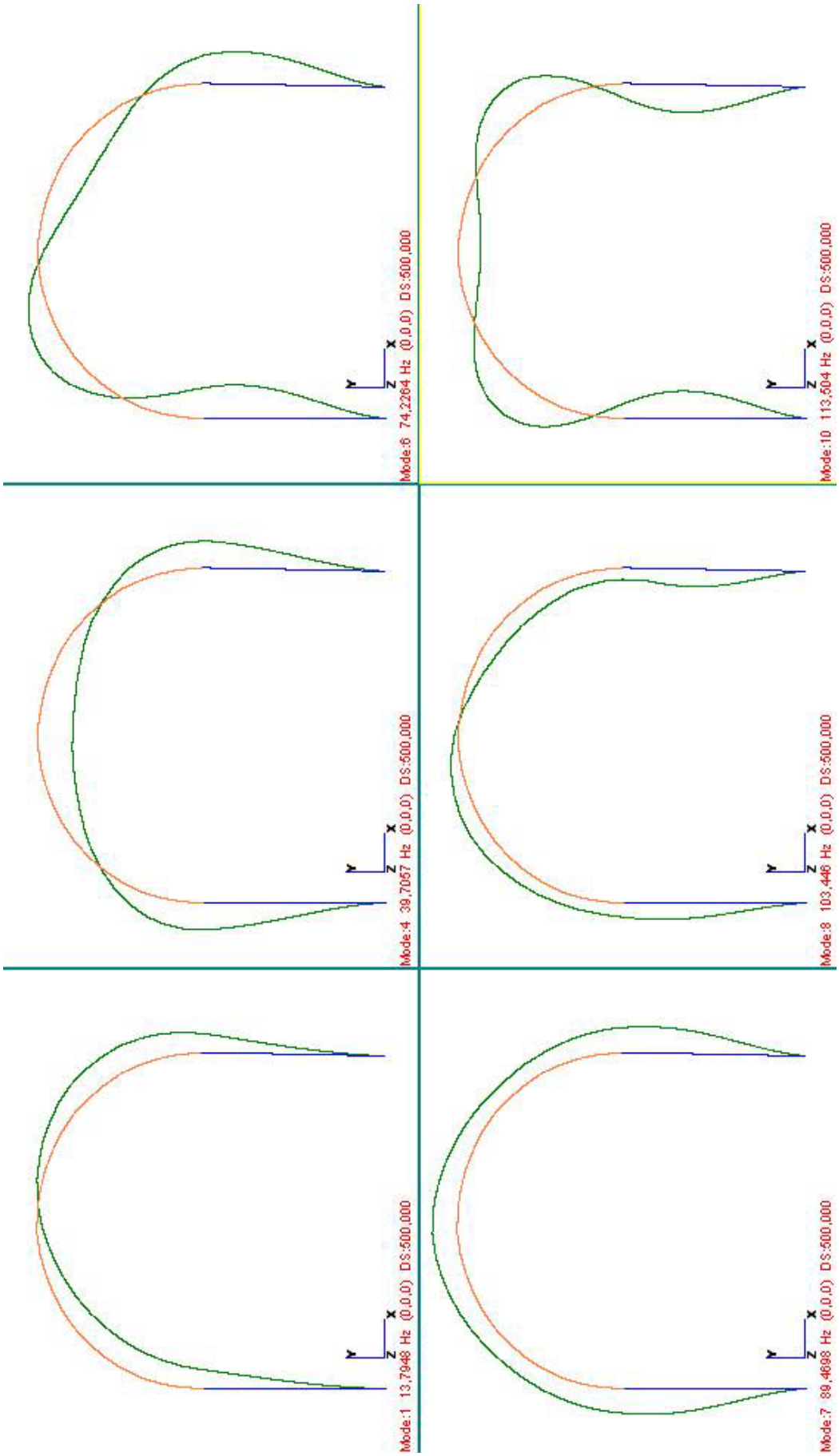



Figura 9.38 – I primi modi di vibrare nel piano.

In questa raffigurazione sono riportate le prime forme modali piane dell'arco con l'indicazione della relativa frequenza naturale.

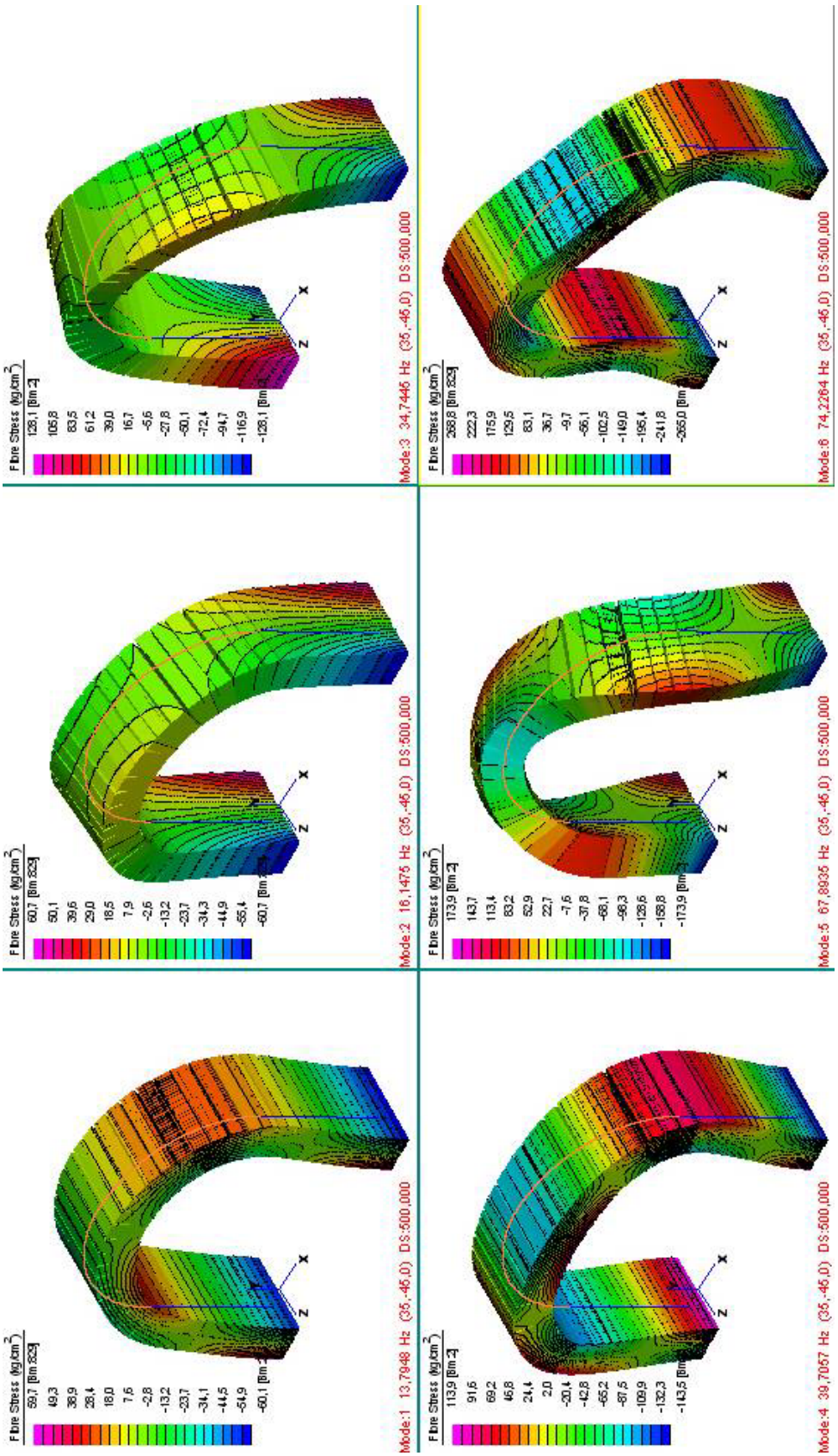



Figura 9.39 – Modi naturali di vibrare nello spazio.

In questa raffigurazione sono riportate le forme modali con il contour dello stress σ in direzione parallela alle fibre. L'andamento delle tensioni è corretto, ma i valori numerici non hanno alcun significato fisico, infatti le deformate modali non hanno una scala assoluta ma solo una relativa fra i vari elementi della struttura. Ovvero, fissata la deformazione di un nodo pari all'unità tutti gli altri nodi sono determinati in rapporto a quello.

Le figure 9.38 e 9.39 appena proposte riportano in forma grafica le prime sei forme modali, in quanto queste sono quelle che più influiscono sulla risposta dinamica della struttura nelle classiche condizioni di sisma ed azione del vento.
Per ulteriori informazioni numeriche al riguardo del presente modello monodimensionale vedere l'appendice B.

## 9.6 ANALISI F.E.M. NEL PIANO MEDIO DELL'ARCO SENZA CONSIDERARE L'INTERAZIONE CON IL TERRENO

In questo paragrafo si parla della stessa analisi eseguita in precedenza attraverso elementi monodimensionali, solamente che in questo caso è stato adottato un modello geometrico più raffinato: la struttura è stata modellata attraverso elementi finiti bidimensionali *Plate* aventi uno spessore di 4 m. In realtà per la condizione di carico adottata ( pesi propri ) lo spessore dell'elemento è irrilevante, si poteva ugualmente studiare la classica fetta di profondità unitaria. La scelta dei 4 m è stata effettuata solamente per avere un effetto realistico sul rendering della struttura e per avere informazioni al riguardo del peso totale dell'edificio nonché sui momenti d'inerzia dell'intero arco rispetto ai vari assi X,Y,Z. Essendo gli elementi sollecitati nel loro piano medio dal peso proprio si ha che lo stato tensionale conseguente è di tipo piano, infatti il pannello continuo che schematizza l'arco non è inflesso e quindi lo stato di stress è identico a qualunque profondità entro l'elemento *Plate*.
Il vantaggio di questa schematizzazione della struttura come un pannello sollecitato nel piano consiste nella possibilità di simulare l'interazione fra il nucleo portante in pietra d'Istria e la muratura a sacco adiacente che svolge la funzione di riempimento e contenimento della spinta orizzontale della volta. Fra i diversi piani paralleli ai due fronti dell'arco è stato scelto quello medio, in quanto questo riassume le caratteristiche geometriche dell'intero monumento.

Come al solito l'intera struttura è stata considerata incastrata alla base, mentre tutta la restate porzione del monumento è invece libera. Anticipo che in questa modellizzazione numerica la discretizzazione è stata molto fitta in modo da trovare una soluzione molto vicina alla realtà.

### *9.6.1 Ipotesi sul modello numerico*

1. Due tipi di materiali omogenei, isotropi ed elastici-lineari.
2. Piccoli spostamenti.
3. Teoria della lastra sollecitata nel piano medio.
4. Struttura bidimensionale contenuta nel piano.
5. Materiali reagenti sia a trazione che a compressione.
6. Corpo elastico continuo.

Al riguardo della ipotesi 1, 5 e 6 vale gia quanto detto in precedenza per il modello ad elementi monodimensionale dell'arco: sia la muratura a sacco che la pietra calcarea non possono essere considerati come reagenti sia a trazione che a compressione. Oltretutto la muratura a sacco è anche altamente disomogenea ed anisotropa, ma considerandola nel suo complesso si possono utilizzare dei parametri medi equivalenti in quanto le disomogeneità ed anisotropie tendono a compensarsi.
Nonostante alcune ipotesi non siano del tutto aderenti alla realtà si è comunque deciso di utilizzarle in modo da poter fare un confronto fra i risultati ricavabili dal presente studio con quelli ricavati dalla precedente analisi, infatti anche nello studio monodimensionale le ipotesi sul modello sono le stesse. Altro motivo per cui si è deciso di utilizzare in ogni modo le suddette ipotesi è perché non è possibile comprendere l'anisotropia, la disomogeneità e la non linearità degli elementi senza compiere delle accurate indagini sperimentali ( cosa che non era possibile fare ), inoltre considerare il materiale reagente

sia a trazione che a compressione semplifica i calcoli e non dovrebbe creare grossi problemi per la muratura a sacco, in essa non ci dovrebbero essere sforzi di trazione rilevanti, anche perché tramite l'iniezione di speciali consolidanti essa potrebbe aver raggiunto un discreto grado di coesione che ammette la trasmissione di piccoli sforzi di trazione.

### *9.6.2 Il modello geometrico e delle azioni esterne*

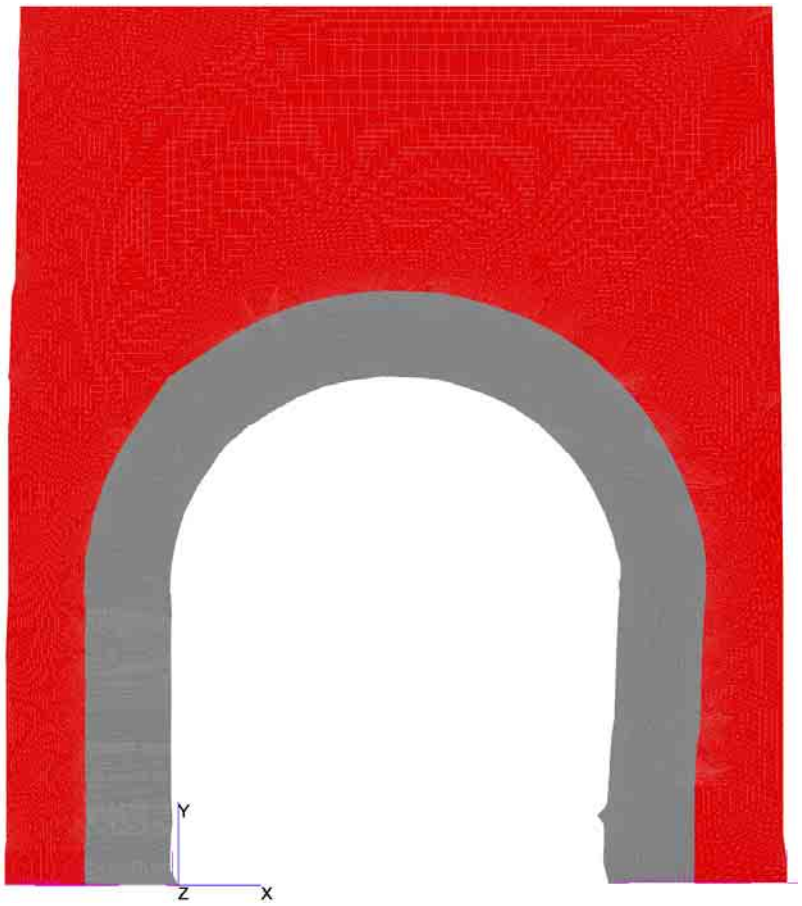



Figura 9.40 – Modello geometrico dell'arco d'Augusto nell'ambiente *Straus7*. Scala 1:150. In questa immagine è possibile osservare come l'arco sia stato schematizzato attraverso degli elementi *Plate*, la porzione in rosso rappresenta la muratura a sacco, mentre la zona in grigio raffigura l'elemento portante dell'arco costituito dalla pietra calcarea di Nabresina. Le condizioni di vincolo presenti nel modello sono quelle di incastro alla base, tutta la restante parte in elevazione risulta invece libera. Lo spessore degli elementi è di 4 m.

La figura 9.40 riportata qui sopra riassume quasi tutte le caratteristiche del modello geometrico e delle azioni esterne dell'arco, la geometria piana del monumento è stata ricavata da una sezione mediana effettuata sul DSM ( *Digital Surface Model* ) dell'arco

ricavato dal processo di restituzione fotogrammetrica ( vedi paragrafo 6.2.8 ).

Determinata la sezione tipica, il secondo passo è stato quello di segmentale l'area individuata in due diverse entità che rappresentassero la zona occupata dalla muratura a sacco e quella coperta dalla pietra calcarea di Nabresina. Fatto ciò sono state assegnate le condizioni di vincolo di incastro alla base, ed è stata assegnata la condizione di carico "pesi propri", che il software *Straus7* assegna in modo automatico in base alla densità dei materiali impiegati. A questo punto rimaneva l'ultimo cruciale passo da eseguire per concludere la definizione del modello geometrico e delle azioni: la costruzione della *mesh*. In realtà la discretizzazione poteva essere fatta anche in un primo momento, ma in questo caso è stato più naturale aspettare. Come tutti sanno la definizione della *mesh* è un passo delicato ed importante, infatti da essa dipende il buon risultato del calcolo numerico, discretizzazioni errate possono portare a soluzioni del tutto scorrette. Naturalmente, per quanto detto nel paragrafo 9.2, più è fitta la discretizzazione e migliore è il risultato; generalmente per trovare la *mesh* migliore si procede per tentativi ed iterazioni successive fino a che la soluzione tende a convergere. Si parte quindi da una discretizzazione rada che man mano viene infittita, soprattutto dove si concentrano gli sforzi; il procedimento iterativo viene arrestato quando si nota una variazione percentuale sui risultati in output ritenuta sufficientemente piccola. Questa metodologia di discretizzazione è stata quindi impiegata anche sull'arco d'Augusto, dove sono stati adottati elementi finiti di tipo triangolare a sei nodi; la scelta dell'elemento è caduta su quello a sei nodi perché esso possiede funzioni di forma di secondo grado che approssimano meglio il campo degli sforzi-deformazioni. A conclusione del processo iterativo si è giunti ad un modello numerico contenente 103353 nodi, 50949 *Plate* e 619530 equazioni. La discretizzazione a cui si è giunti è sicuramente

eccessiva per indagare la struttura dell'arco, ma la si è utilizzata comunque perché i tempi di calcolo per un'unica condizione di carico ed un materiale elastico-lineare sono veramente brevi, soprattutto per i moderni elaboratori. Nel caso di molteplici condizioni di carico ed analisi non lineari il ragionamento appena fatto non è più valido, a seguito delle iterazioni necessarie per risolvere i sistemi non lineari i tempi computazionali si allungano enormemente, ed ancora non esistono PC capaci di sopportare tali carichi di lavoro; in questi casi la ricerca della *mesh* migliore è d'obbligo. Bisogna allora trovare una discretizzazione abbastanza rada capace però di cogliere tutti gli aspetti del problema. Non essendo questo il nostro caso si è deciso di non preoccuparci troppo della esatta definizione della *mesh*, risparmiando così tempo prezioso e si è affidato il problema alla potenza di calcolo del PC.

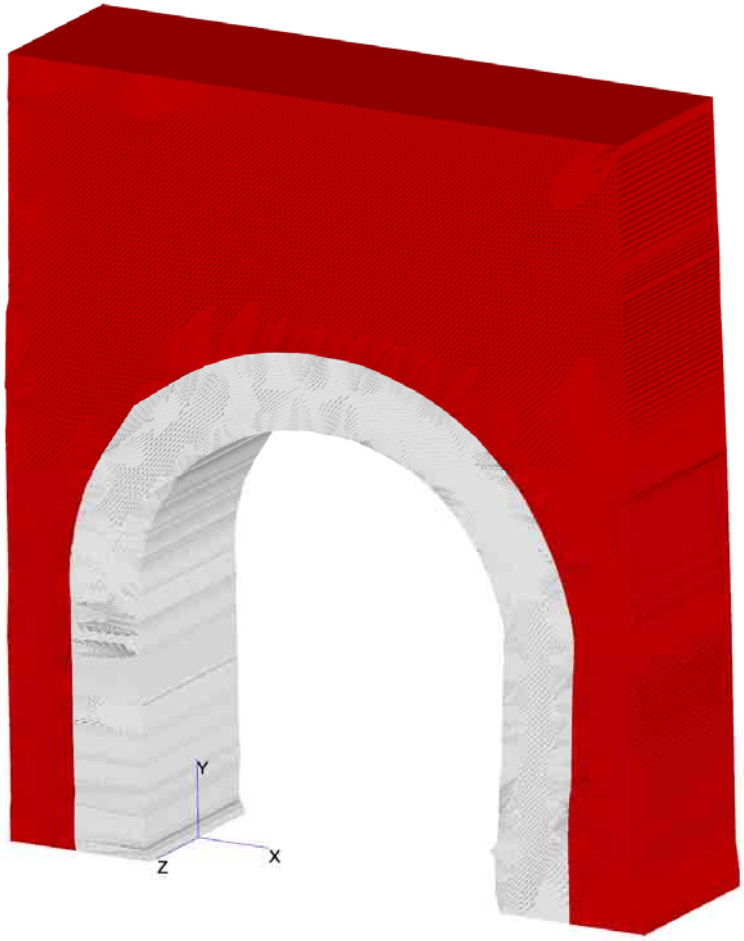



Figura 9.41 – Modello geometrico dell'arco d'Augusto visto in assonometria.

### *9.6.3 Il modello reologico dei materiali*

Il materiali ritenuti omogenei, isotropi ed elastici-lineari che compongono il presente modello sono due:

1. La pietra calcarea di Nabresina ROMAN STONE.
2. La muratura a sacco.

Tali due materiali sono distribuiti sul modello secondo le rappresentazioni di figura 9.40 e 9.41. Per caratterizzare il comportamento meccanico di queste due entità sono stati impiegati i parametri elastici riportati nei paragrafi 9.4.1 e 9.4.2 relativi alla pietra di Nabresina ed alla muratura a sacco. Naturalmente in questo tipo di analisi la pietra e la muratura vengono considerate reagenti anche a trazione, mentre ciò in verità non può accadere, e quindi il campo di tensione sarà leggermente diverso da quello qui ricavato. In particolare si avrà una ridistribuzione delle sollecitazioni che in questa analisi non è stata considerata, basti dire però che le zone compresse aumenteranno il loro valore di tensione a seguito di questa ridistribuzione.
Ora facciamo qualche cenno sul meccanismo di crisi dei materiali fragili ( quelli in uso sull'arco ), in regime di tensione monoassiale è molto semplice prevedere quando il materiale si fessura, questo avviene per un bassissimo valore di tensione di trazione ed un determinato ( molto più alto ) valore di sforzo di compressione. La presente analisi F.E.M. con elementi finiti piani porta però ad un regime piano di tensione, in cui non ha più senso il semplice criterio utilizzato per lo stato monoassiale. In questi regimi di tensione pluriassiali la crisi del materiale in un punto è funzione del tensore deviatorico dello sforzo in quel punto, o in modo analogo dipende dalla posizione e dimensione dei circoli di Mohr sul piano $\tau$-$\sigma$ di Mohr. Il problema allora consiste nel trovare quale siano i campi ( aree ) sul piano $\tau$-$\sigma$ in cui il materiale non va in crisi. Per individuare

questi domini di ammissibilità diversi autori hanno proposto vari criteri di resistenza, sia per i materiali duttili che per quelli fragili. In sostanza ogni autore va a definire sul piano τ-σ un'area entro la quale devono essere contenuti i circoli di Mohr affinché il materiale non si fessuri. Per i materiali fragili un criterio di resistenza largamente impiegato è quello di Coulomb, utilizzato anche per i terreni.
Secondo esso la fessurazione avviene lungo i piani dove la tensione di taglio supera quella massima sopportabile dal materiale, tale tensione di taglio limite non è però un valore costante ma aumenta al crescere della tensione normale al piano considerato.
Matematicamente il criterio di resistenza di Coulomb può essere così espresso:

$$|\tau| \leq c + \sigma_n \cdot tg\varphi \qquad (9.1)$$

Dove:
c = coesione
$\sigma_n$ = tensione di compressione normale al piano considerato
φ = angolo di attrito interno del materiale ( tg φ = coeff. di attrito )
τ = tensione di taglio sul piano considerato

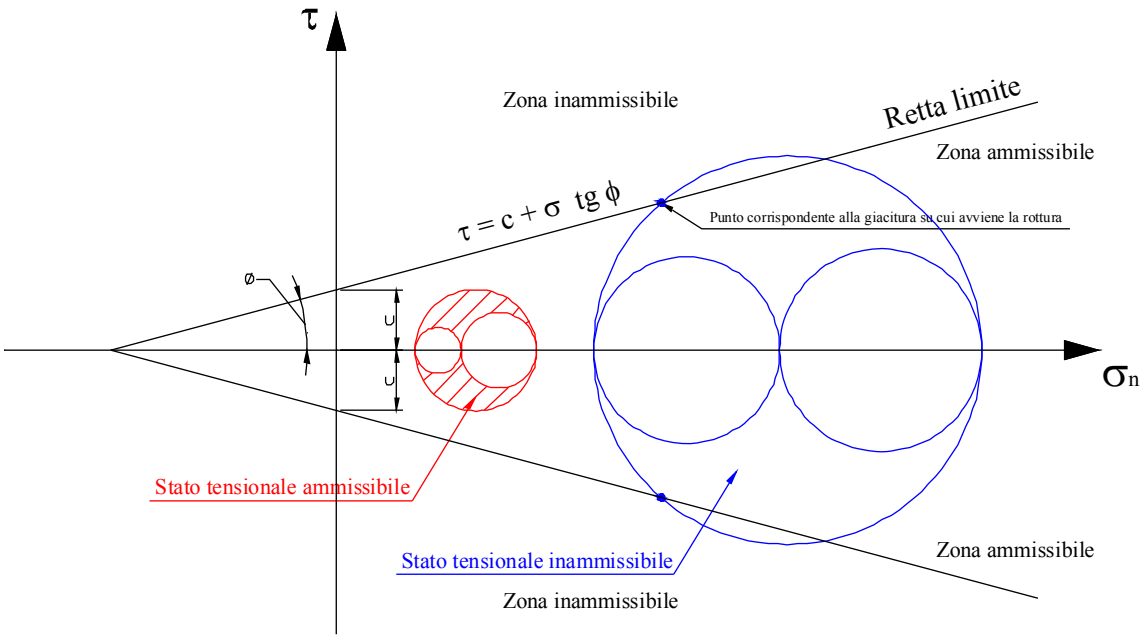



Figura 9.42 – Il piano di Mohr con indicata l'area ammissibile definita dal criterio di resistenza di Coulomb. In colore sono riportati gli stati tensionali in due diversi punti.

Riportando la disequazione 9.1 sul piano τ-σ di Mohr si può osservare che essa definisce un'area compresa fra due rette di coefficiente angolare tg φ ( vedi figura 9.42 ), tale area rappresenta il dominio ammissibile entro cui i circoli di Mohr devono essere contenuti se non si vogliono fessurazione del materiale.

Il discorso del criterio di resistenza è stato affrontato perché il software *Straus7* permette in fase di post-processing di visualizzare in mappa di colore l'andamento dello stress secondo Mohr-Coulomb, rendendo possibile così l'individuazione dei punti più sollecitati della struttura dove potrebbe avvenire la crisi del materiale.

Sia per la pietra di Nabresina che per la muratura a sacco è stato adottato un coeff. φ pari a 21,8° ( tg φ = 0,4 ) ed una coesione di 1 Kg / $cm^2$ che è resa possibile dalla presenza dei consolidanti iniettati durante l'ultimo restauro del 1996.

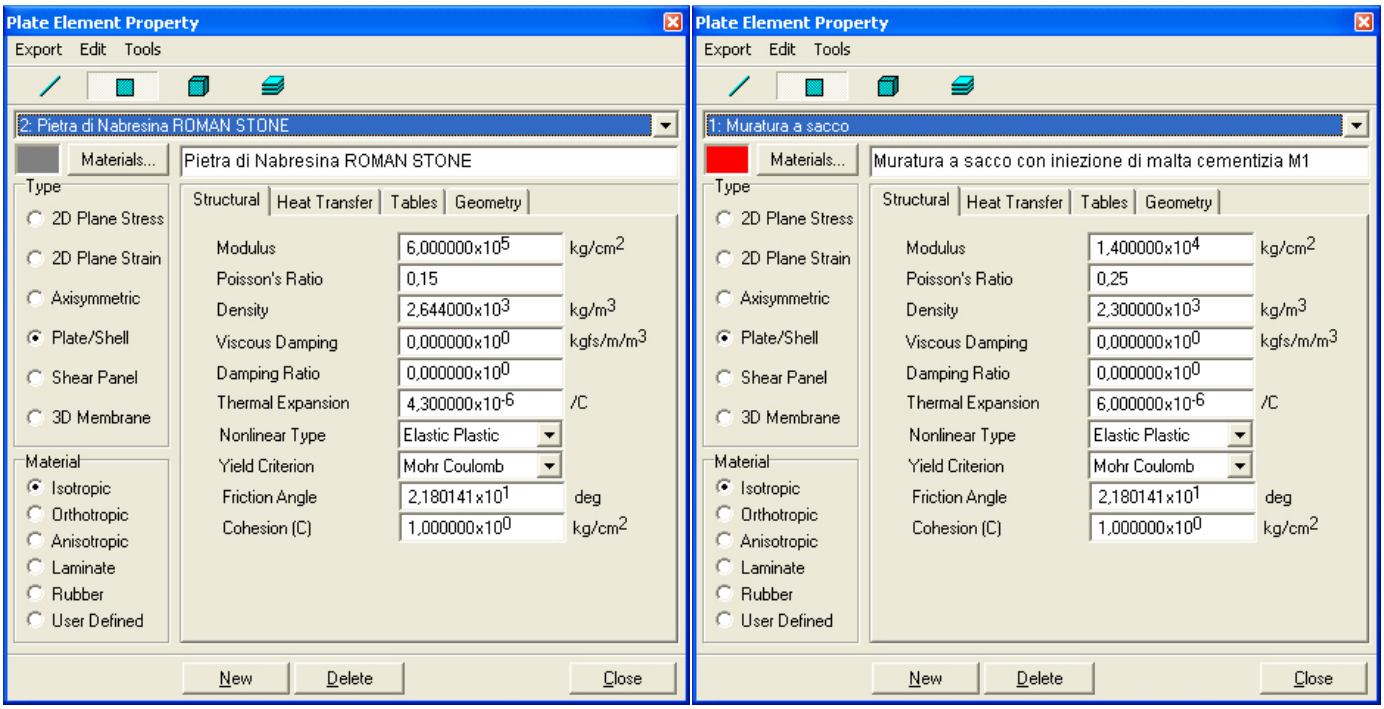



Figura 9.43 – Finestra per l'inserimento delle proprietà meccaniche e geometriche degli elementi finiti adottati nel modello.
In questo caso a sinistra sono riportati i parametri elastici della pietra di Nabresina, mentre a destra si possono vedere gli stessi parametri ma per la muratura a sacco consolidata con l'iniezione di malte cementizie e speciali resine.
Notare i valori che caratterizzano il criterio di resistenza di Mohr-Coulomb, essi sono i valori di cui si è già parlato nel testo. Sotto la voce *Geometry* è stato inserito il valore di spessore della piastra pari a 4 metri per entrambi i materiali.

### *9.6.4 Risultati dell'analisi statica nella condizione di peso proprio*

In modo analogo a quanto si è fatto per il precedente modello monodimensionale, si riportano ora qui di seguito in forma grafica i risultati dell'analisi del modello numerico dell'arco appena descritto.

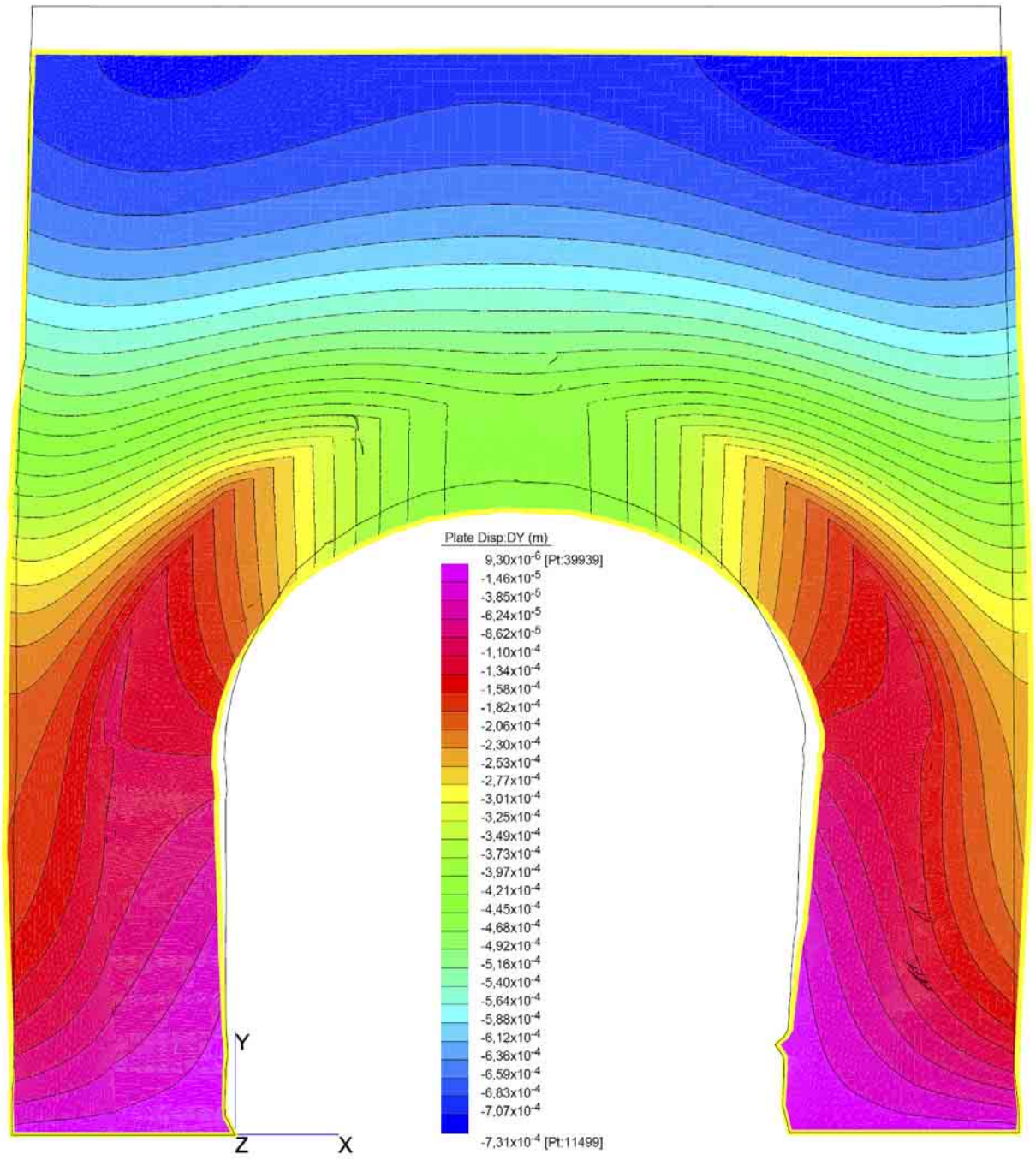



Figura 9.44 – Deformata dell'arco d'Augusto nella condizione di carico di peso proprio, più contour dello spostamento DY lungo l'asse Y. Scala 1:100. Amplificazione della deformata pari a 1000 volte.
In questa immagine è possibile notare come il nucleo in pietra, molto più rigido, influenzi l'andamento della deformazione che risulta più accentuata nel piedritto a mare ( a destra ).

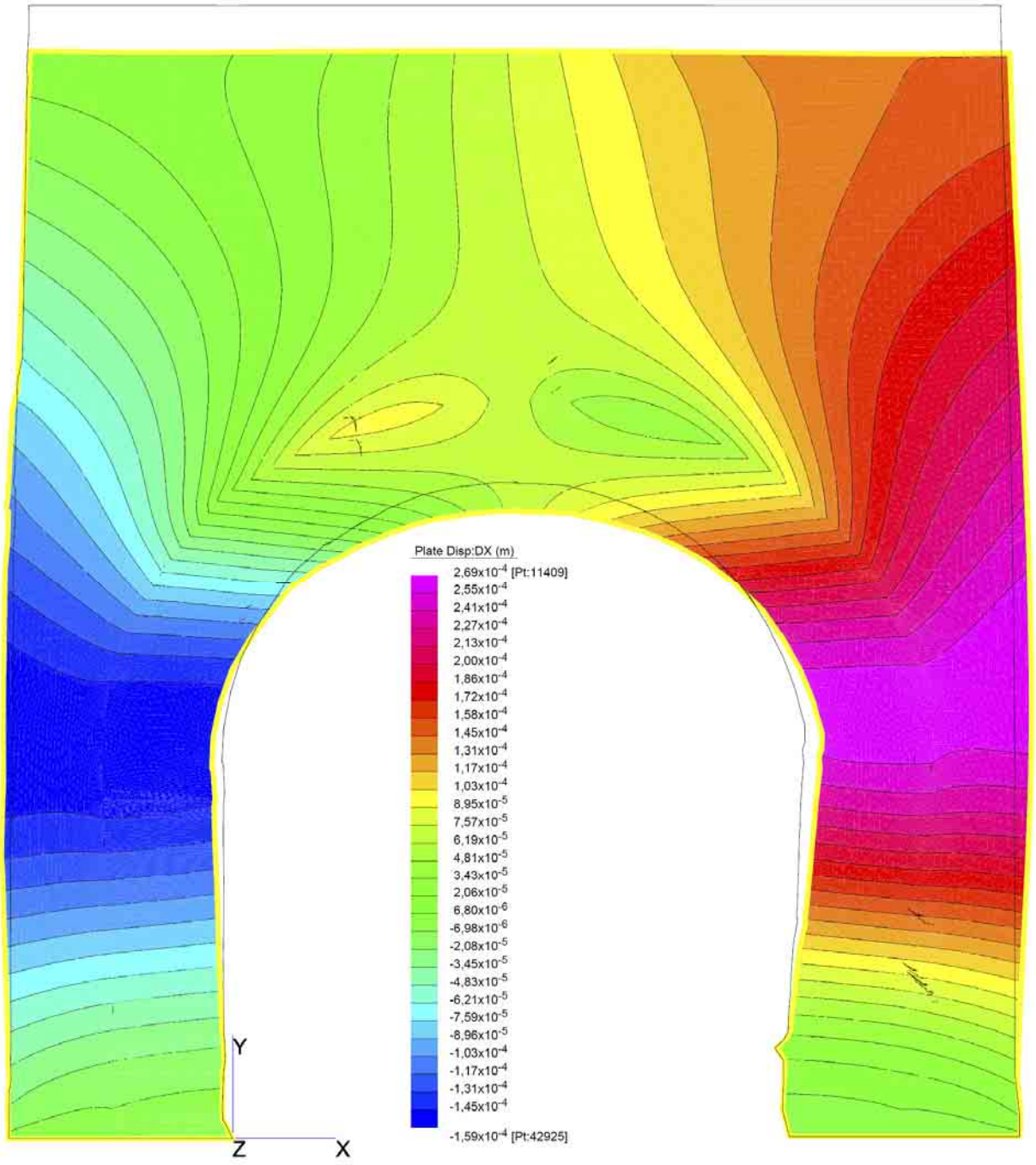



Figura 9.45 - Deformata dell'arco d'Augusto nella condizione di carico di peso proprio, più contour dello spostamento DX lungo l'asse X. Scala 1:100. Amplificazione della deformata pari a 1000 volte.

In questa immagine la mappatura di colore evidenzia come lo "spanciamento" del piedritto a lato mare ( a destra ) sia più accentuato rispetto al suo gemello a monte, infatti per quest'ultimo lo spostamento orizzontale massimo risulta di 0,16 mm; mentre per l'altro piedritto si arriva a 0,27 mm. Tale asimmetria può essere semplicemente spiegata attraverso l'inclinazione di 1,1° circa che l'elemento verso mare ha subito a seguito del brillamento di una mina tedesca fatta esplodere nel 1944 proprio alla base del piedritto.

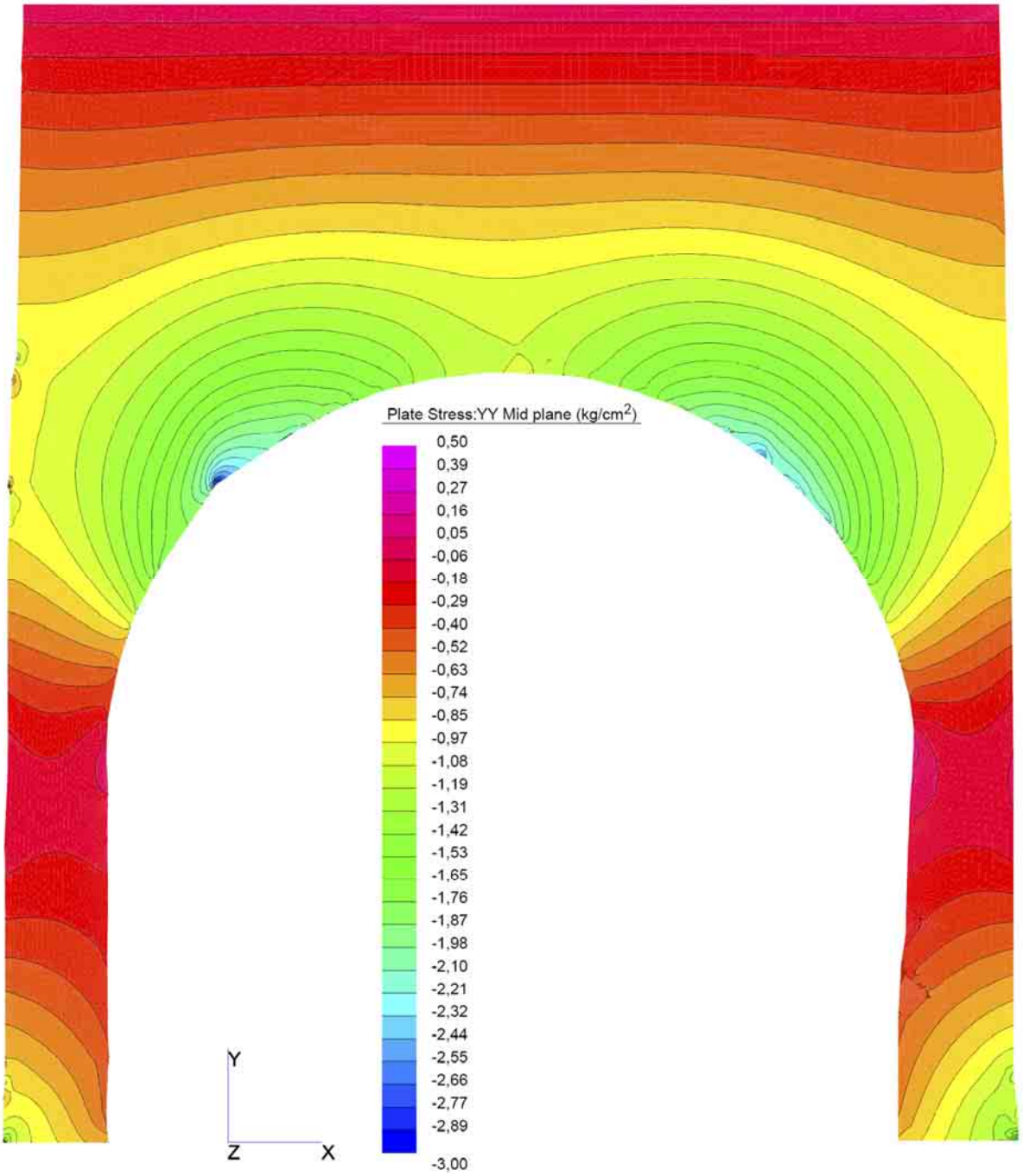



Figura 9.46 – Andamento dello stress $\sigma_{yy}$ nella muratura a sacco. Scala 1:100.

Da questa raffigurazione è possibile comprendere che le tensioni normali al piano orizzontale sono praticamente tutte di compressione e con valori abbastanza bassi, solamente in qualche piccolissima area si raggiungono dei bassi valori di trazione che peraltro sono sopportabili dalla muratura per mezzo della coesione acquistata tramite le iniezioni dei consolidanti.

Osservando il piedritto a lato mare si può notare come in esso le pressioni di contatto con la fondazione siano superiori rispetto al suo simile di monte, questo fenomeno è da imputare alla solita all'inclinazione del piedritto, che essendo in una geometria errata va per spingere maggiormente sulla muratura a sacco adiacente provocandone un'inflessione.

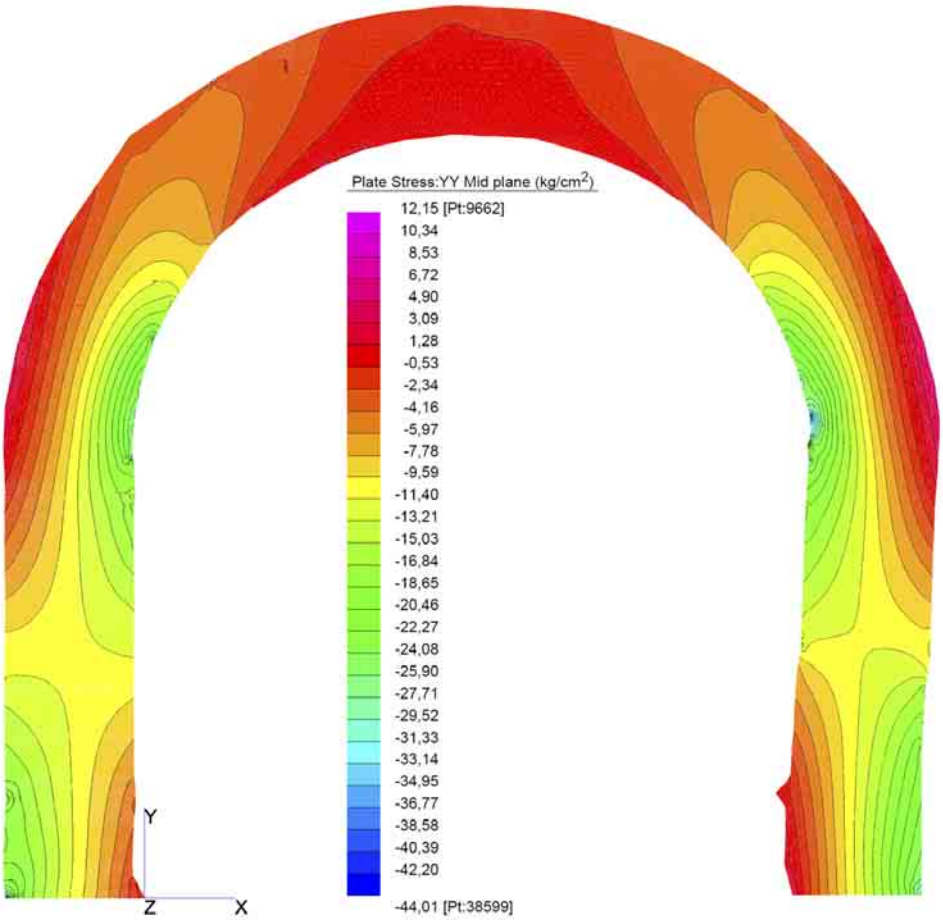



Figura 9.47 - Andamento dello stress $\sigma_{yy}$ nella pietra di Nabresina. Scala 1:100.

Confrontando questa mappatura dello stress con quella di figura 9.46 è possibile riscontrare che le tensioni all'interno della pietra sono notevolmente superiori rispetto a quelle nella muratura a sacco, ma questo era già facilmente intuibile prima di eseguire l'analisi. L'alta rigidezza della pietra rispetto alla muratura ha fatto si che gli sforzi si ripartissero maggiormente sulle strutture lapidee. Analizzando la distribuzione degli sforzi possiamo dire che difficilmente si raggiungono valori di compressione superiori ai -25 Kg / $cm^2$, analogamente i valori di trazione superano difficilmente i 1 Kg / $cm^2$, ciò avviene solo nella base del piedritto a destra e nelle sezioni poco sopra la fine dei piedritti.

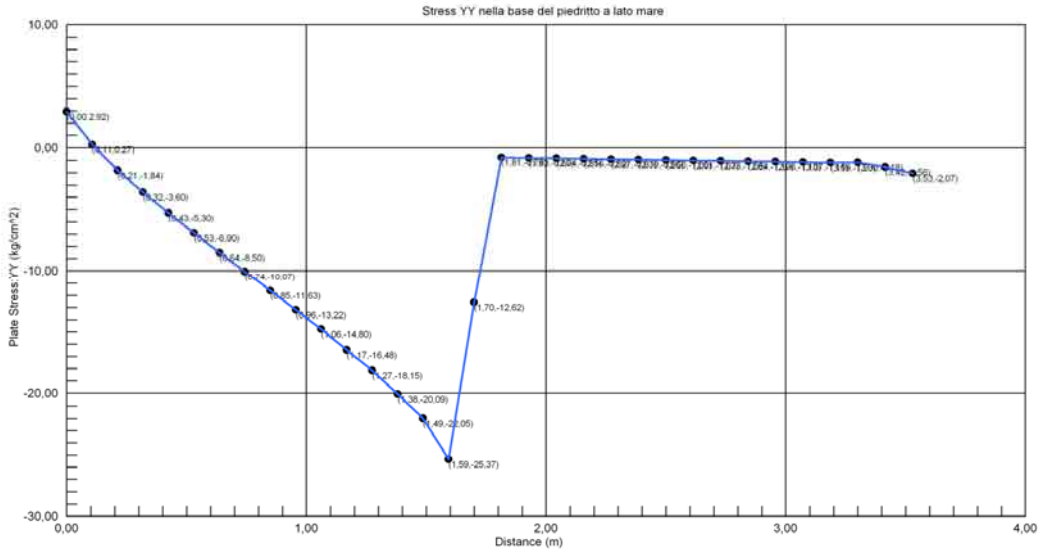



Grafico 9.1 – Stress $\sigma_{yy}$ nella base del piedritto a lato mare.

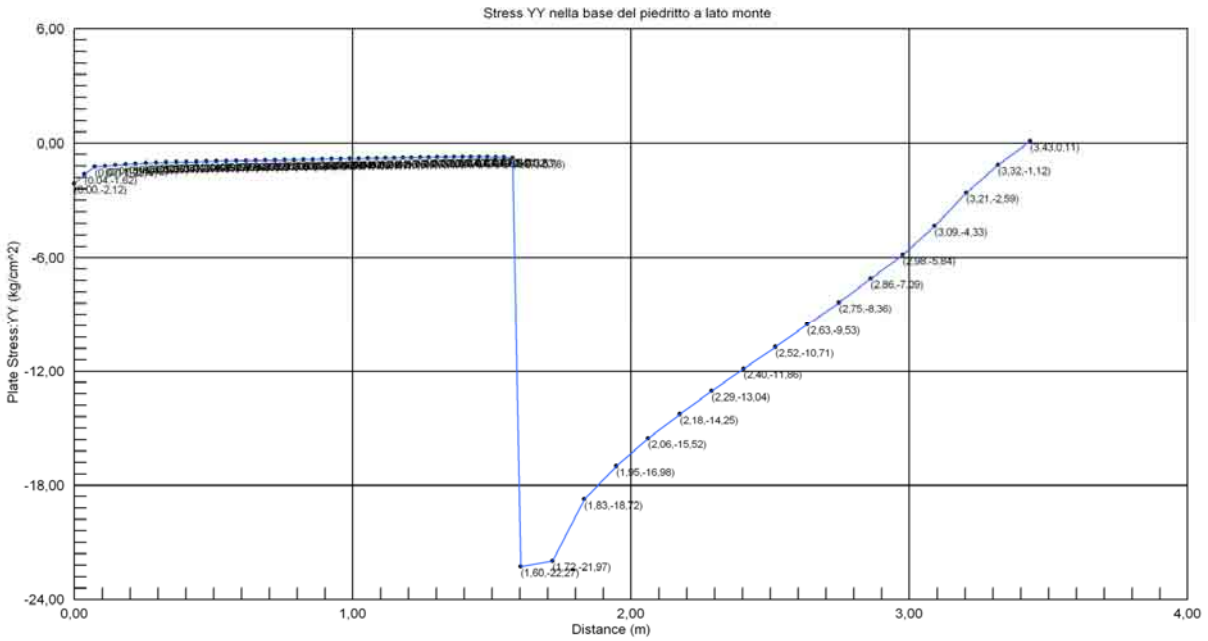



Grafico 9.2 – Stress $\sigma_{yy}$ nella base del piedritto a lato monte.

Esaminando ora i grafici 9.1, 9.2 e la figura 9.47 possiamo riscontrare che il piedritto a monte risulta tutto compresso, mentre quello a mare presenta una zona con leggera trazione. Confrontando queste tre immagini con le figure 9.33, 9.35 e 9.36 si può notare come la presenza del rifianco in muratura abbia abbattuto le pressioni di contatto fra piedritto e fondazione, riuscendo anche a rendere tutta compressa e reagente la sezione di base.

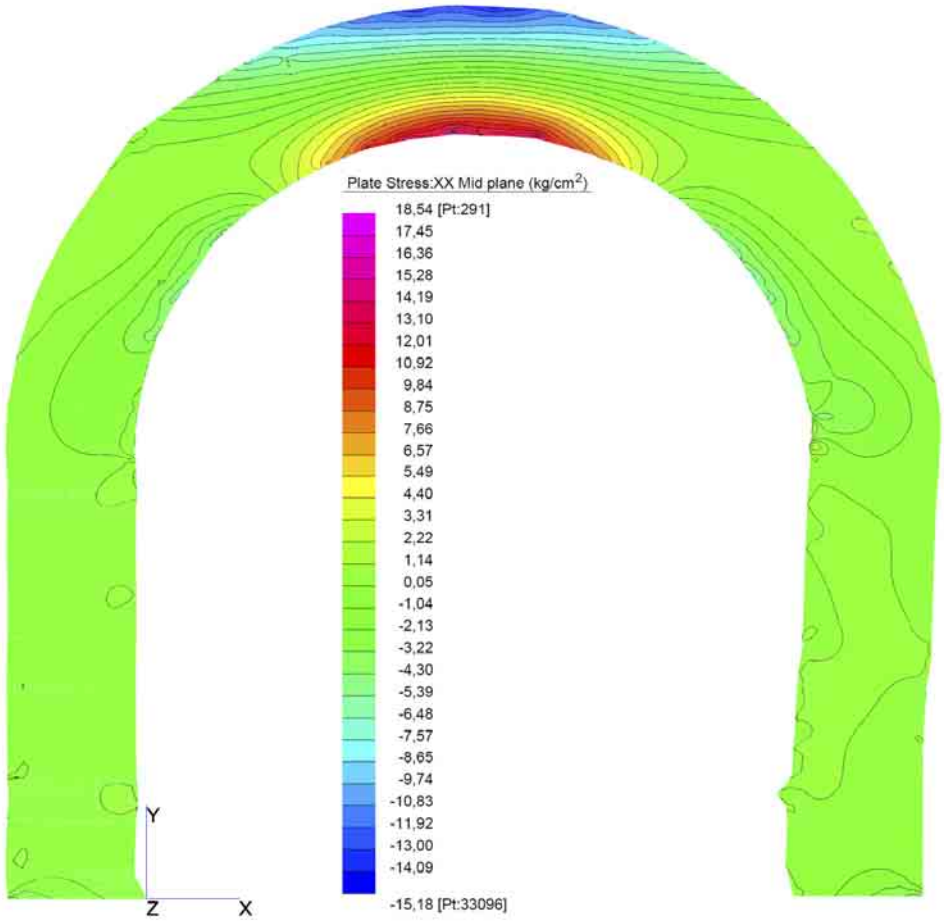



Figura 9.48 - Andamento dello stress $\sigma_{xx}$ nella pietra di Nabresina. Scala 1:100.

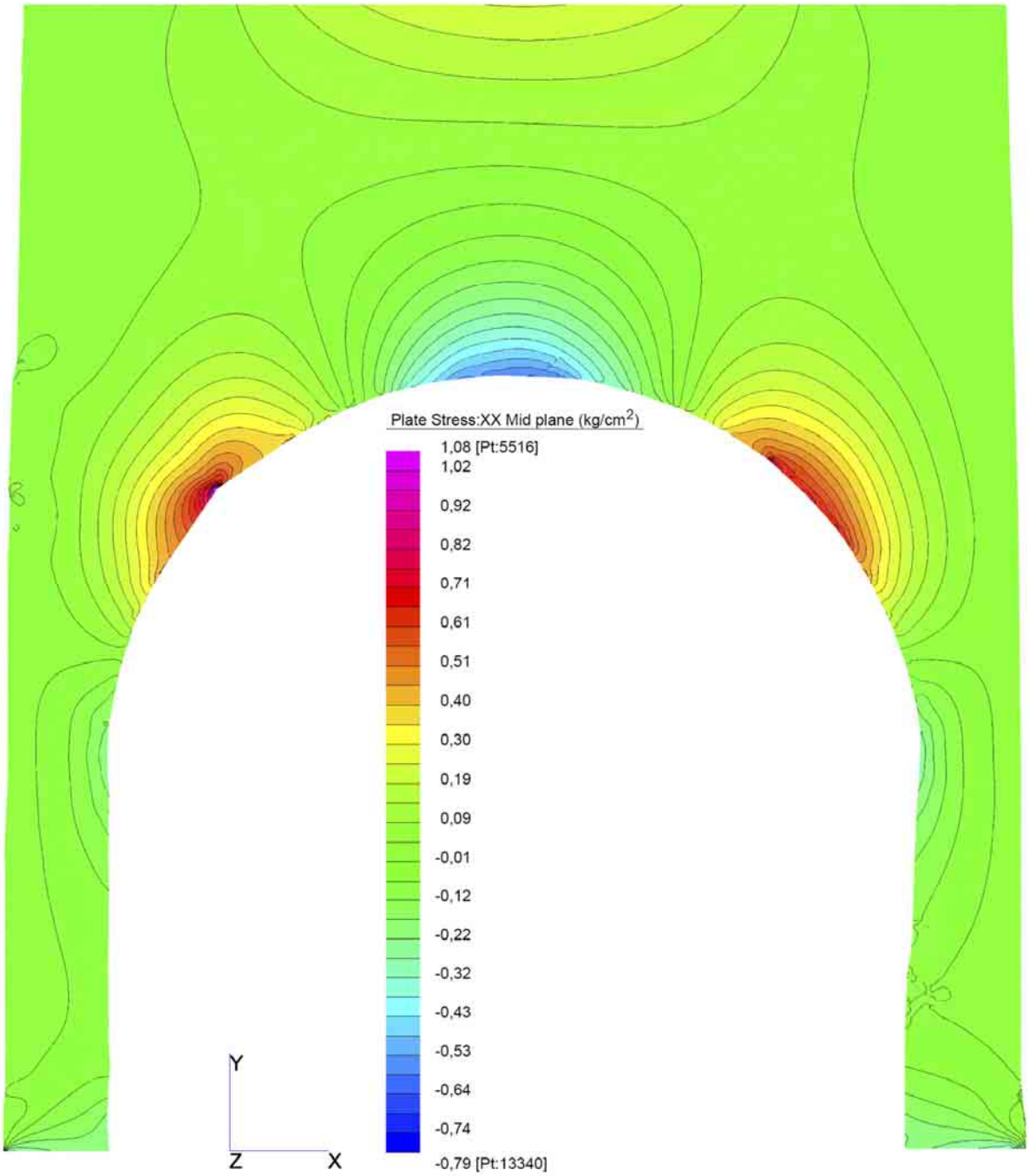



Figura 9.49 - Andamento dello stress $\sigma_{xx}$ nella muratura a sacco. Scala 1:100.

Da questa immagine è possibile comprendere che le tensioni normali al piano verticale sono per la stragrande maggioranza tutte comprese fra i -0,25 e 0,25 Kg / cm$^2$. Solamente in aree localizzate all'estradosso del concio in chiave e poco sopra la sezione di rene si raggiungono dei picchi di tensione che comunque rimangono sempre molto contenuti non superando mai gli ±1 Kg / cm$^2$. Questi bassi valori di tensione fa si che la muratura si comporti effettivamente come qui visualizzato, ovvero come un corpo elastico reagente anche a trazione. Visti i così bassi valori è molto probabile che i piccoli sforzi di trazione siano possibile grazie alla presenza dei consolidanti iniettati nel 1996.

Osservando ora la figura 9.48 possiamo fare circa le stesse considerazioni: anche qui la maggioranza dei valori è compresa in bassi range, fra -3 e 3 Kg / cm$^2$. Si osserva invece un considerevole aumento delle tensioni della sezione in chiave della volta.

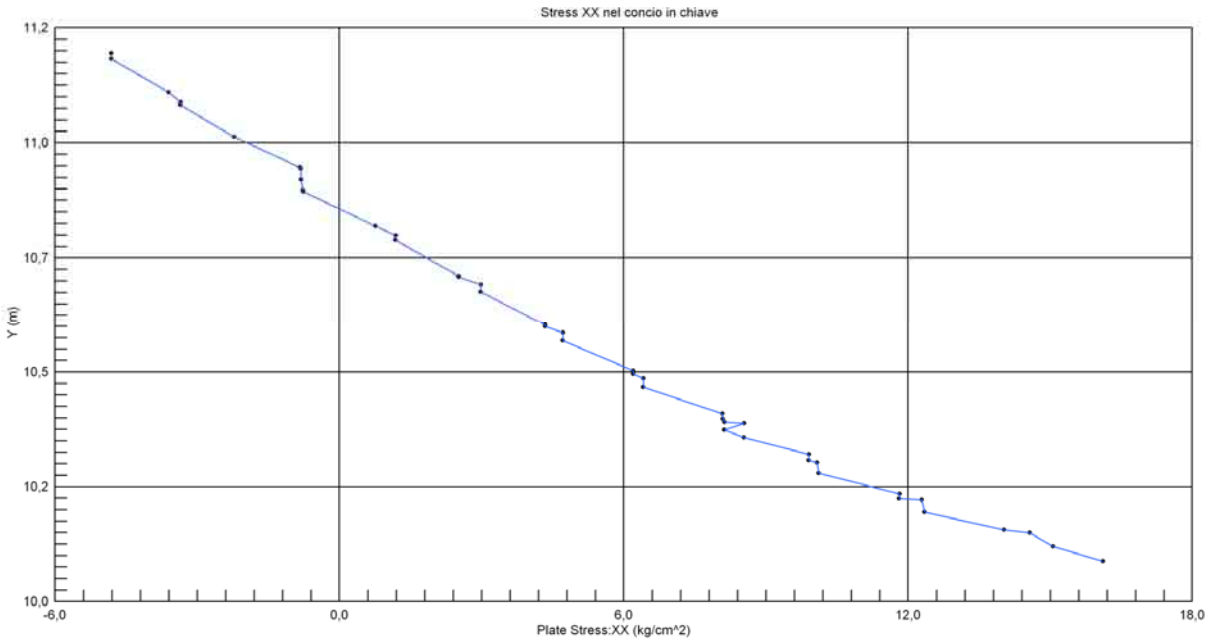



Grafico 9.3 – Stress $\sigma_{xx}$ nel concio in chiave della volta.

Da questo grafico è possibile riscontrare che l'andamento delle tensioni è quasi lineare, ovvero come ci si aspetterebbe da un'analisi monodimensionale.

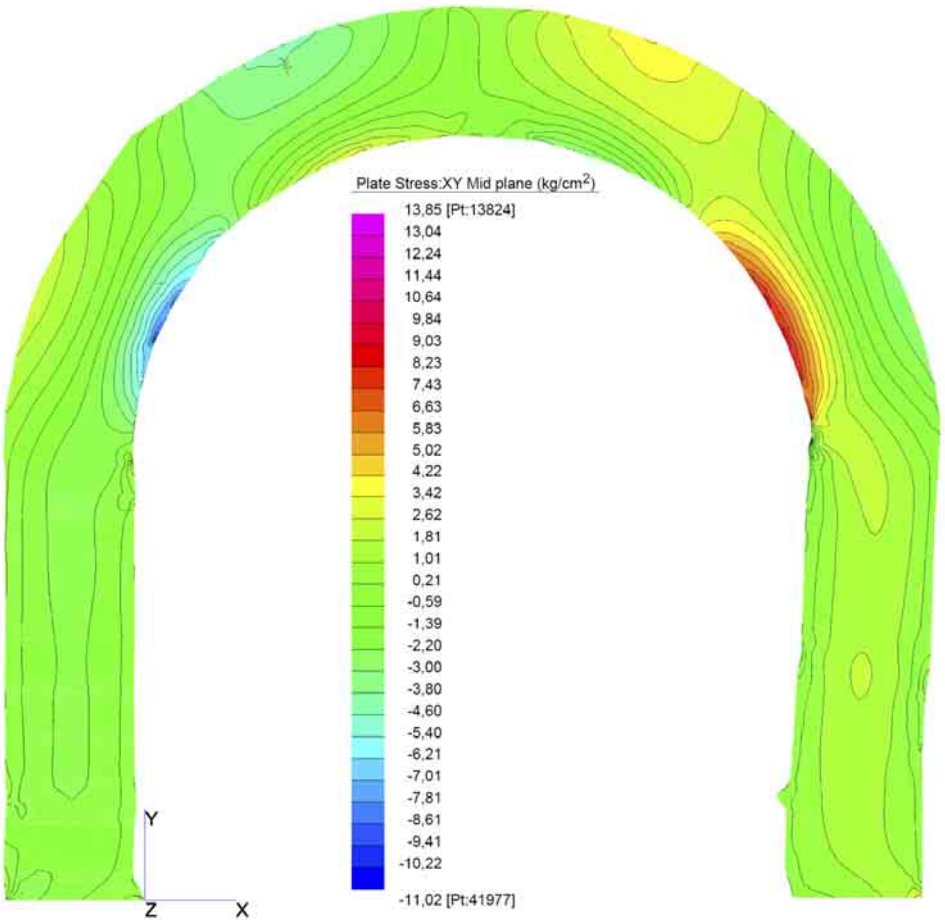



Figura 9.50 - Andamento dello stress $\tau_{xy}$ nella pietra di Nabresina. Scala 1:100.

Studiando la presente distribuzione delle tensioni di taglio si osserva che la maggior parte degli sforzi è contenuto nel range che va da -3 a 3 Kg / $cm^2$.

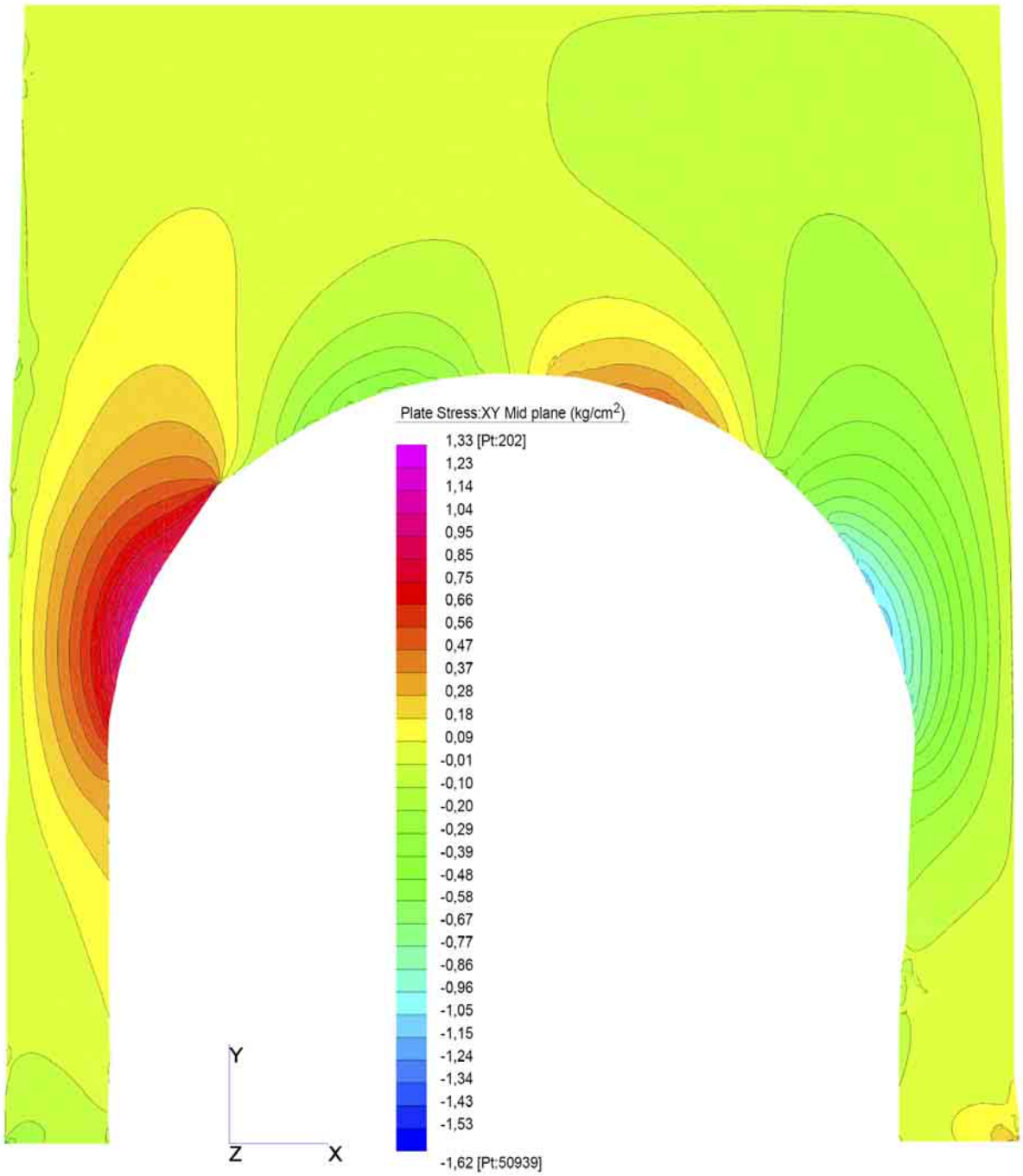



Figura 9.51 - Andamento dello stress $\tau_{xy}$ nella muratura a sacco. Scala 1:100.

Osservando questa mappatura dello sforzo di taglio è possibile vedere come la solita inclinazione del piedritto a lato mare ( a destra ) abbia influenzato anche tale distribuzione delle tensioni. In realtà l'influenza è comunque una cosa molto piccola, anche perché il presente campo di sforzo è contenuto entro due valori massimi e minimi molto bassi.

Nonostante la piccola entità della variazione ( in termini di valori assoluti ) è possibile notare l'asimmetria dello sforzo osservando la zona prossima a metà piedritto e nella sommità della struttura.

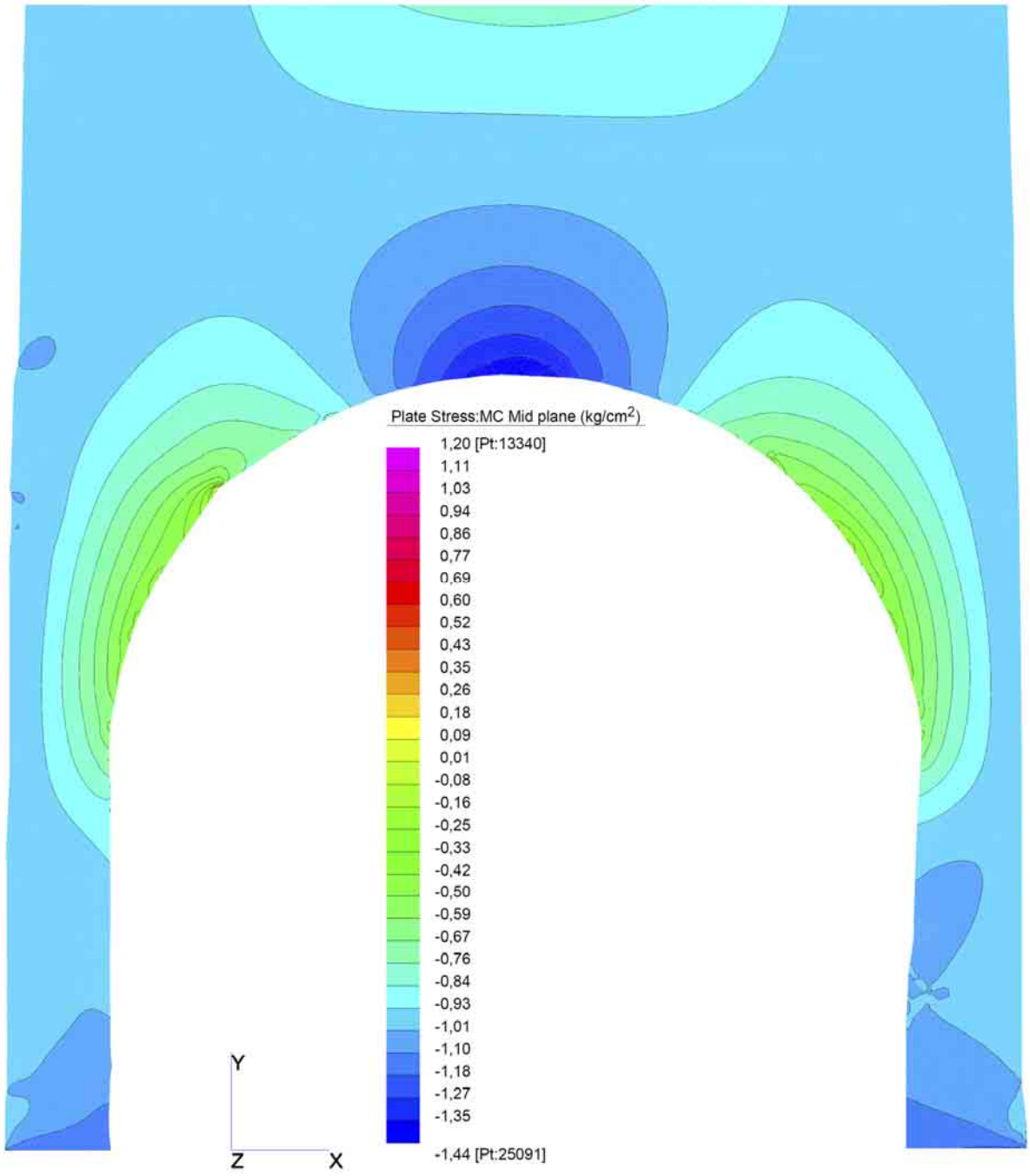



Figura 9.52 – Andamento dello stress nella muratura a sacco secondo il criterio di Mohr-Coulomb. Scala 1:100.

Esaminando questo andamento dello stress è possibile notare che la grande maggioranza dei valori di tensione sono compresi fra -1,1 e -0,8 Kg / $cm^2$, solamente in alcune aree ( in verde e blu scuro ) si raggiungono i picchi di -1,5 e 0 Kg / $cm^2$. La scala delle tensioni riporta però anche un massimo valore positivo di 1,2 Kg / $cm^2$, ma tali zone con tensioni positive non è possibile individuarle sulla presente figura. Probabilmente devono essere aree piccolissime dove avviene una concentrazione degli sforzi, sicuramente a causa di una inesatta convergenza della soluzione in quei punti.

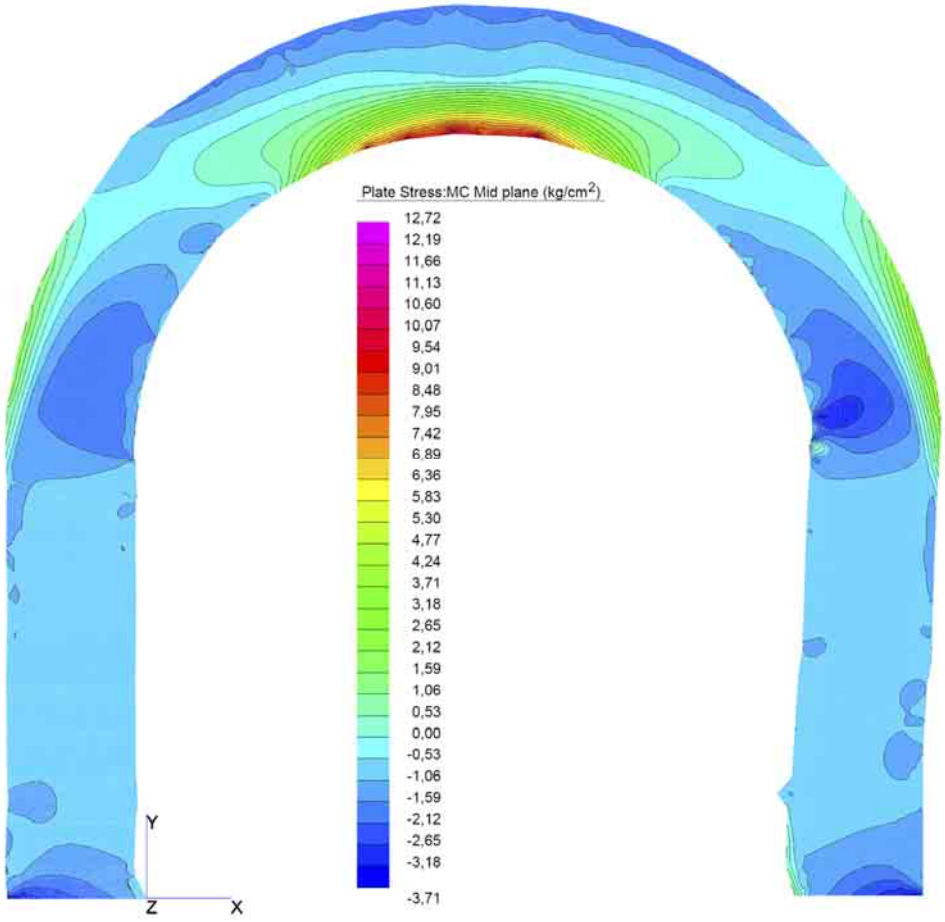



Figura 9.53 - Andamento dello stress nella pietra secondo il criterio di Mohr-Coulomb. Scala 1:100.

Analizzando il presente andamento dello stress si può riscontrare che la maggioranza dei valori di tensione è compresa fra -2 e 0 Kg / $cm^2$, solamente nelle aree prossime alla base dei piedritti si raggiungono valori negativi superiori ( - 3,7 Kg / $cm^2$ ) ed in prossimità delle sezioni di rene e nell'intradosso del concio in chiave è possibile osservare dei sensibili incrementi positivi dello stress.

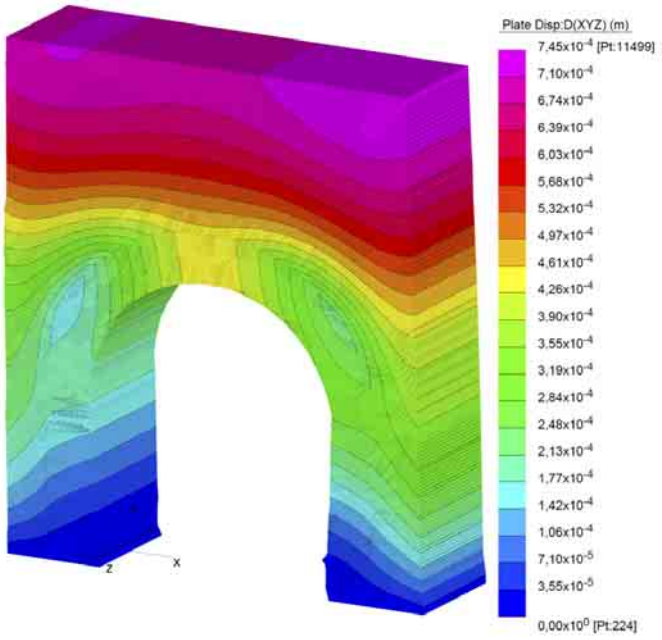



Figura 9.54 – Contour dello spostamento DXYZ.

Da questa raffigurazione è possibile constatare che la zona verso mare ( a destra ) subisce uno spostamento maggiore di quella verso monte, questo a causa della solita deformazione che affligge il piedritto verso mare. In particolare la cima del monumento subisce lo spostamento massimo di 0,75 mm, mentre il concio in chiave si sposta di soli 0,44 mm. Confrontando questa figura con la 9.27 si nota che la presenza del rifianco in muratura ha abbattuto l'abbassamento del concio in chiave da 0,5 mm a 0,44 mm.

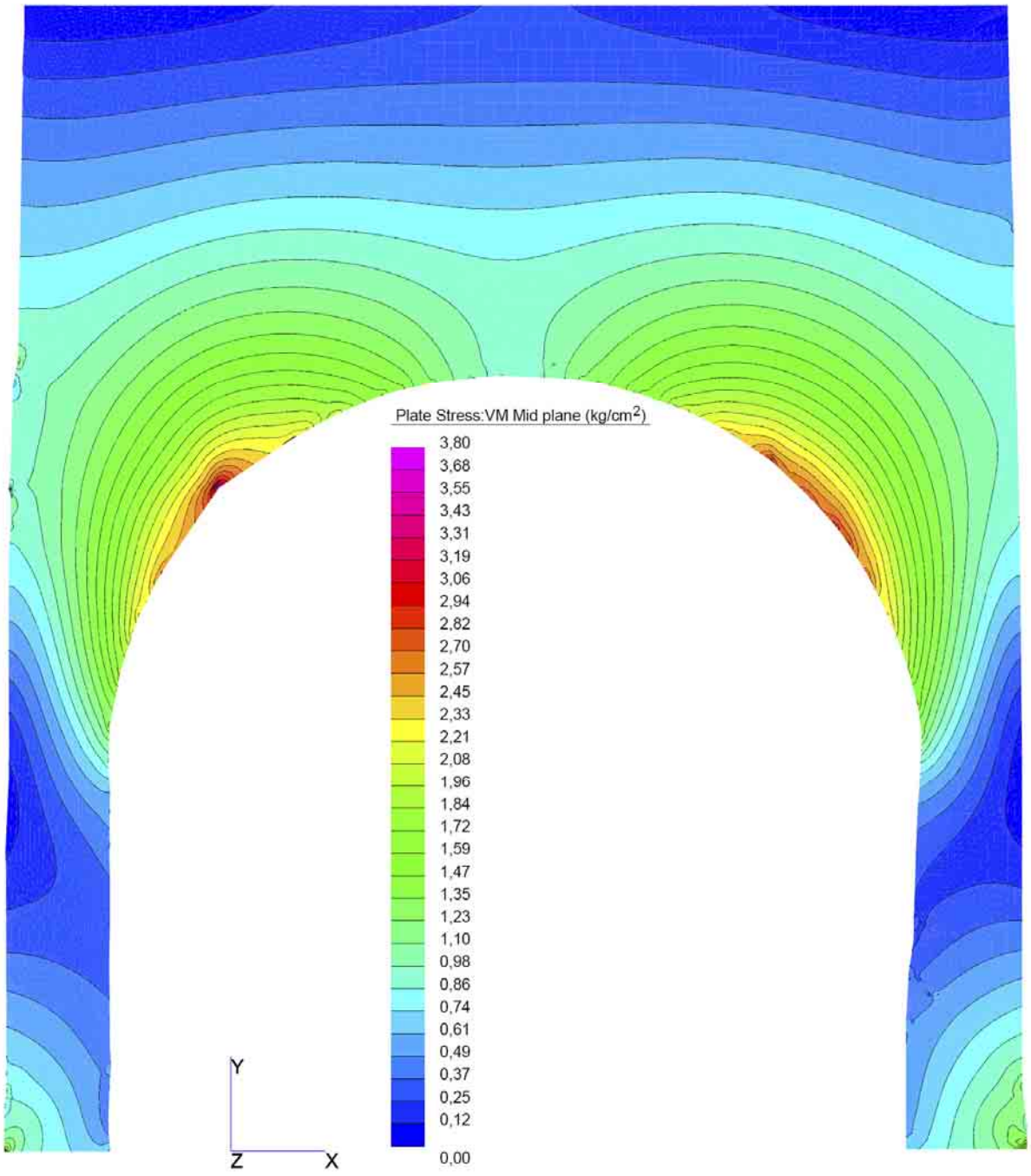



Figura 9.55 – Andamento dello stress nella muratura a sacco secondo Von Mises. Scala 1:100
Il criterio di resistenza di Von Mises non è adatto per i materiali fragili, esso è esatto solamente per i materiali duttili come l'acciaio. Per i materiali fragili si usa il criterio di Mohr-Coulomb ( vedi figure precedenti ). Quindi per la muratura a sacco e la pietra di Nabresina il presente criterio di Von Mises risulta un criterio errato e non valido, nonostante ciò si è voluto riportare l'andamento di queste tensioni combinate per poter individuare le zone dove un ideale materiale elastico perfetto e duttile andrebbe in crisi. Tali zone risultano essere dove si hanno i maggiori valori dello stress, ovvero in prossimità degli spigoli esterni della base dei piedritti e a metà altezza della volta.

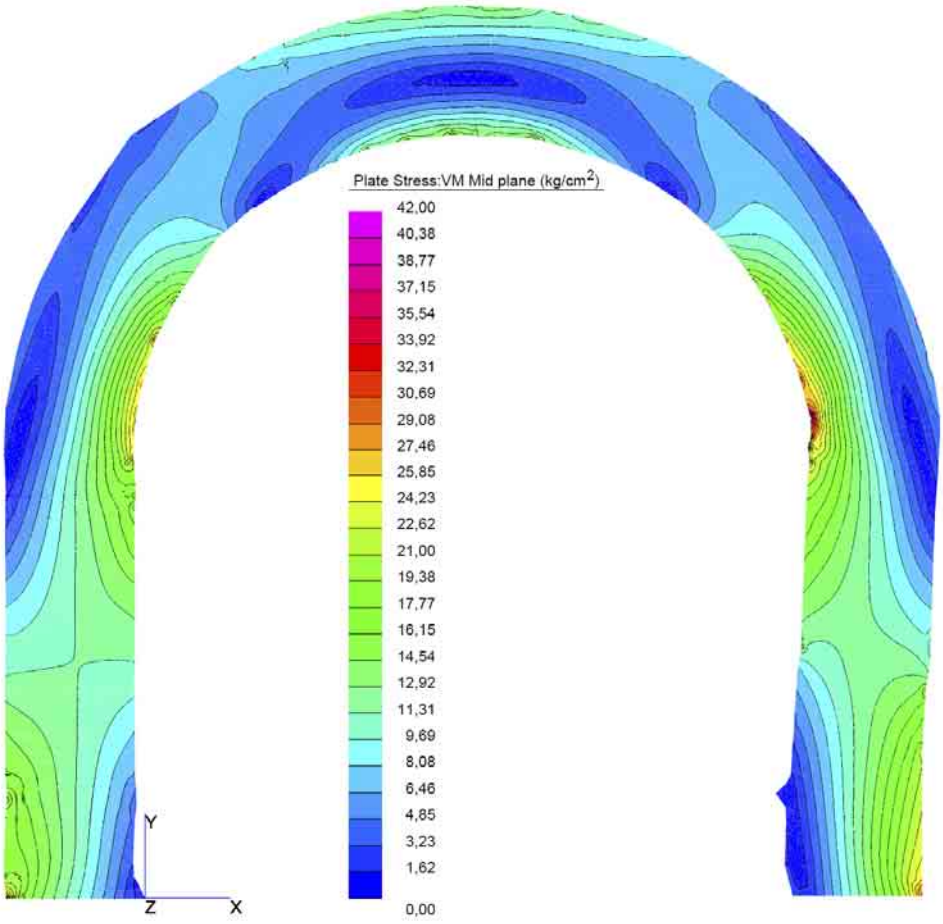



Figura 9.56 - Andamento dello stress nella pietra secondo Von Mises. Scala 1:100
Per questa figura vale esattamente il discorso fatto per quella precedente 9.54.

## 9.6.4.1 Considerazioni sui risultati ottenuti

Molte delle considerazioni sui risultati ottenuti in output dall'elaborazione numerica F.E.M. sono state menzionate nelle didascalie delle figure precedentemente riportate, quindi rimando ad esse per tutti i dettagli. Ora voglio invece far notare al lettore che in tutte le rappresentazioni delle varie componenti del tensore degli sforzi è visibile un'asimmetria nella distribuzione dello stress, dovuta principalmente all'inclinazione del piedritto a lato mare. In quest'ultimo elemento si rileva un aumento generalizzato degli sforzi.
Altra caratteristica peculiare dello stato tensionale è che esso risulta da 10 a 15 volte superiore nella pietra di Nabresina rispetto alla muratura a sacco, ciò è dovuto alla notevole rigidezza degli elementi in pietra, i quali vanno ad assorbirsi la maggioranza dello sforzo.

## *9.6.5 Analisi modale dell'arco: calcolo delle forme modali e delle relative frequenze naturali*

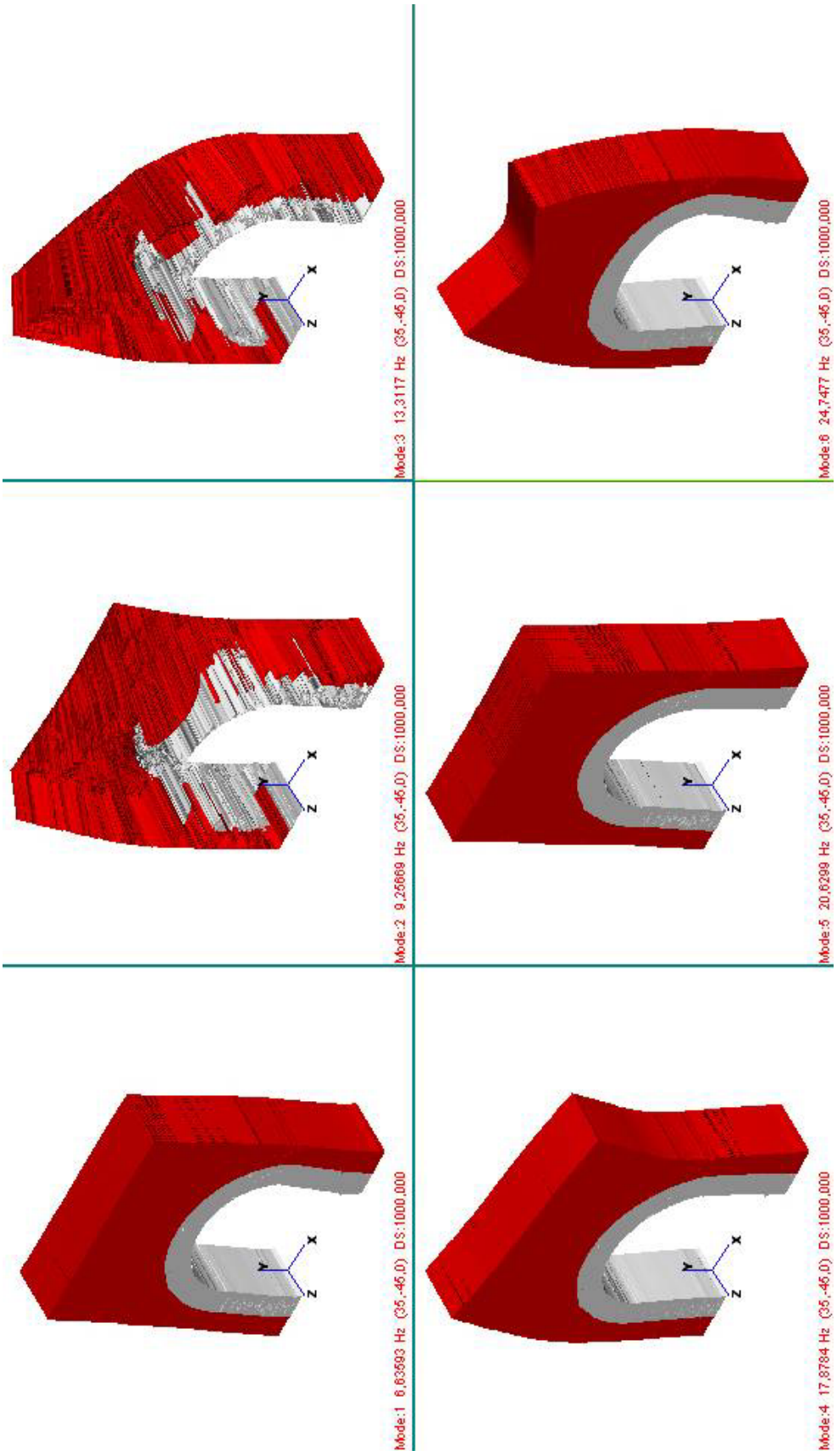



Figura 9.57 – I primi modi naturali di vibrare nello spazio e relative frequenze.

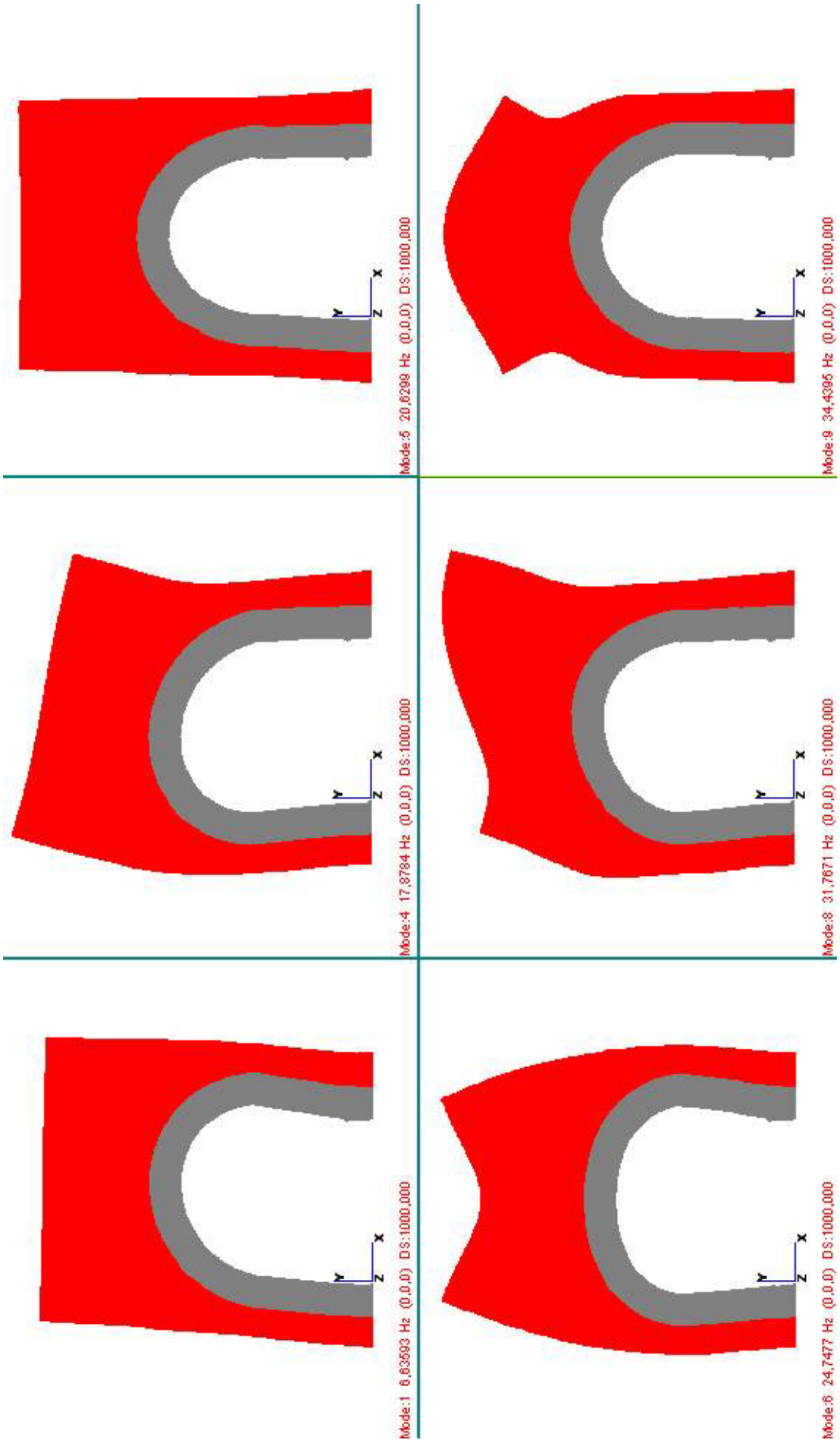



Figura 9.58 – I primi modi di vibrare nel piano.

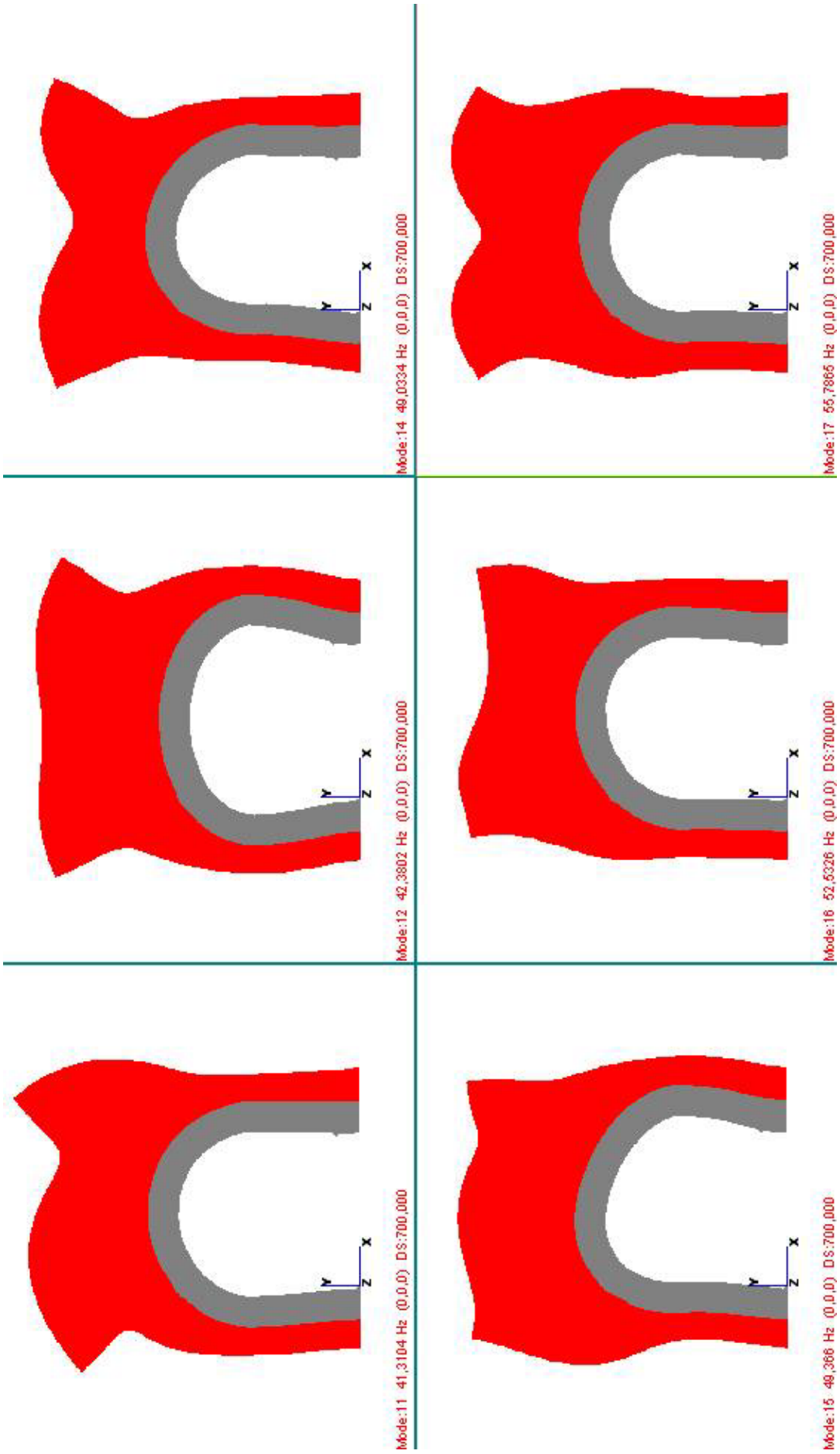



Figura 9.59 – Forme modali superiori nel piano.

Le figure 9.57, 9.58 e 9.59 riportano le forme modali con le relative frequenze naturali dell'arco d'Augusto di Rimini schematizzato secondo la figura 9.41 e considerato come incastrato alla base. Confrontano questa analisi modale con quella effettuata sul precedente modello numerico monodimensionale si può constatare come le differenze siano notevoli, sia in termini di frequenze naturali ma anche relativamente alle forme. In particolare le frequenze risultano particolarmente più basse nel caso del presente modello piuttosto che nel precedente; questo fenomeno può essere spiegato attraverso la presenza della zona muraria a sacco, che nel modello monodimensionale non era stata considerata. Tale struttura laterizia infatti aumenta la massa e l'altezza del sistema, che combinata alla minore rigidezza del materiale rispetto alla pietra permette un abbattimento delle frequenze naturali. La dinamica delle strutture insegna difatti che tanto più una struttura è massiva e poco rigida, tanto più le sue frequenze naturali si affievoliscono.
Detto ciò per i periodi di vibrazione dell'arco, un discorso analogo può essere affrontato anche nei riguardi delle forme modali: sempre la stessa struttura muraria che ne modello monodimensionale non era stata considerata ora viene qui a interferire con la struttura lapidea. Tale interazione fra i due corpi crea forme modali anche profondamente differenti da quelle prevedibili considerando il solo nucleo in pietra, inoltre la considerazione della zona in muratura permette all'arco di vibrare anche secondo altri modi che il precedente modello monodimensionale non era riuscito in alcun modo a prevedere. Altra osservazione che può effettuata dall'esame delle figure 9.58 e 9.59 è che la deformata modale è sempre più accentuata nella regione muraria piuttosto che in quella lapidea. Anche tale fenomeno è spiegabile attraverso profonda diversa rigidezza fra i due materiali.

## 9.7 CONCLUSIONI

Dal confronto fra le due analisi F.E.M. effettuare sull'arco d'Augusto per la stessa condizione di carico di peso proprio è possibile riscontrare numerose differenze, alcune sostanziali ma per lo più di poco conto.

Considerare la presenza del rifianco in muratura conduce a risultati sicuramente più corretti, difatti esso fornisce un'azione di contrasto alla spinta orizzontale esplicata dalla volta lapidea dell'arco, trascurando questo effetto benefico ( come è stato fatto nel modello monodimensionale ) si è constatato che si giunge a valori tensionali e deformativi leggermente ( leggermente perché la struttura lapidea è molto più rigida di quella laterizia, altrimenti non sarebbe così ) superiori rispetto alla realtà, oltretutto anche il campo di sforzo non è proprio quello reale. Resta comunque il fatto che la prima modellazione meccanica è molto semplice, può essere eseguita anche manualmente, portando a valori cautelativi e perciò a favore di sicurezza. Il secondo modello invece risulta molto più corretto ma complicato, in quanto considera sia l'interazione fra i due principali corpi strutturali sia l'esistenza di uno stato piano di tensione. Concentrando ora l'attenzione sulla struttura in pietra è possibile osservare che le differenze di stato tensionale-deformativo fra i due modelli non è molto accentuato, questo perché la struttura è molto rigida e si lascia influenzare poco da quello che gli sta attorno. Oltre a ciò la struttura lapidea si presta abbastanza bene ad essere schematizzata con elementi trave, è quindi ovvio che il risultato numerico con questa schematizzazione si presenta sufficientemente corretto. Per la muratura a sacco accade invece esattamente l'opposto di quanto appena detto: essa è poco rigida e non è possibile schematizzarla con elementi trave. Per ottenere qualche informazione sullo stato tensionale-deformativo di tale struttura laterizia è necessario impiegare una modellizzazione che preveda lo stato piano

di tensione. Questo è appunto quello che è stato fatto nel secondo modello numerico dell'arco.

Sulla base di quanto appena riportato si può quindi dedurre che le differenze fra i due modelli numerici sono sensibili ma non sostanziali, ma questo solamente perché esiste un nucleo strutturale portate in pietra molto più rigido dell'adiacente muratura a sacco; se non fosse così probabilmente le differenze fra le due modellazioni sarebbe stata ben più ragguardevole. Da questo reale caso di studio si può constatare la verità di quanto riportato sui libri di tecnica delle costruzioni: essi consigliano di semplificare una struttura mediante un sottostrutturazione, dove si vanno a considerare solamente le strutture portanti più rigide e si trascurano tutti gli altri elementi secondari che vengono considerati come azioni sulle strutture ma come se avessero rigidezza nulla. Ovvero le strutture secondarie scaricano il loro peso sulla primaria, senza però dare contributi di rigidezza. Questo è più o meno quello che accade anche sull'arco, anche se qui risulta un po' difficile trascurare del tutto l'interazione fra i due materiali. Dall'analisi dello stato tensionale riportato nelle varie figure è riscontrabile che la maggioranza dello sforzo viene assorbito dalla struttura lapidea, mentre sulla muratura a sacco si ripartisce solo una piccola parte della totalità delle azioni; questo avviene secondo il fondamentale principio di ripartizione delle sollecitazioni in base alla rigidezza.

In definitiva il comportamento statico della struttura è abbastanza simile in entrambe le modellazioni numeriche, ovvero non si riscontrano differenze di ordini di grandezza. La stessa cosa non si può dire per il comportamento dinamico dell'arco; nel calcolo delle forme modali e relative frequenze naturali le differenze fra i risultati sono veramente notevoli, questo perché nell'ambito dell'analisi dinamica non si può mai operare una sottostrutturazione, la struttura deve essere indagata nella sua totalità. Nel primo modello

monodimensionale la muratura a sacco non era in alcuno modo stata considerata, e per questo motivo i risultati sono del tutto diversi dal secondo modello. Risulta quindi che nell'ambito statico è anche possibile ( accettano gli errori e stando a favore di sicurezza ) impiegare una modellizzazione monodimensionale del monumento senza compromettere esageratamente la veridicità del risultato, mentre nelle analisi dinamiche non è ammissibile utilizzare il primo semplicistico modello, gli errori risultano troppo elevati.

Osservando la distribuzione degli sforzi ( soprattutto quelli di Mohr-Coulomb ) ricavati dall'analisi a stato piano di tensione è possibile constatare che nella muratura a sacco non esiste praticamente alcun punto critico dove essa possa andar in crisi, mentre per la pietra sussistono delle zone in cui avvengono delle considerevoli concentrazioni degli sforzi con la possibilità di lesioni, parzializzazioni e distaccamento dei conci lapidei. Tali zone risultano essere l'intradosso delle volta nella prossimità del concio in chiave, e l'estradosso della volta vicino alle sezioni di rene. Altro punto critico, risulta essere la base del piedritto a lato mare, in cui, a causa della già citata inclinazione del pilone, avviene una concentrazione delle tensioni che provoca una parzializzazione della sezione a contatto con la fondazione.

Al termine dell'analisi strutturale dell'arco si può dire che esso si mostra in uno stato di sicurezza senza particolari problemi, solamente nelle zone critiche citate si ha un distaccamento dei conci lapidei con conseguente parzializzazione della sezione e ridistribuzione delle tensioni. Comunque si tratta di fenomeni localizzati di poco conto che non compromettono in alcun modo la sicurezza statica della struttura.

L'inclinazione del piedritto a lato mare oltretutto non crea delle situazioni così critiche come a prima vista potrebbe apparire dal solo esame visivo.

# Conclusioni

Non hai veramente capito qualcosa
finché non sei in grado di spiegarlo a tua nonna.
Albert Einstein ( 1879 – 1955 )

Attraverso lo studio condotto con la presente tesi si è cercato di comprendere quali siano i reali limiti e capacità di un rilievo effettuato con tecniche fotogrammetriche digitali non convenzionali; e utilizzando strumentazioni di rilievo molto semplici ed economiche. L'oggetto di studio è stato l'Arco d'Augusto, per il cui rilievo si è utilizzato una fotocamera digitale amatoriale, una cordella metrica ed un filo a piombo. L'elaborazione dei dati raccolti è stata effettuata mediante il software PhotoModeler Pro 5; tale programma si presta molto bene alle più svariate esigenze di rilievo in quanto è versatile, facile da usare ed anche l'inesperto di fotogrammetria può impiegarlo in modo efficace. Allo stesso tempo l'applicativo è in grado di offrire una gamma di prodotti utili al tecnico, quali file vettoriali, ortofoto e la possibilità di esportare il modello in diversi formati grafici 3D e 2D.

Nonostante l'impiego di mezzi molto semplici si sono raggiunte precisioni paragonabili a quelle ottenibili con strumenti e metodologie di rilievo più sofisticate; per ottenere tali risultati si sono collimati 27300 punti sulle 52 fotografie utilizzate per la restituzione dell'arco. La collimazione ha permesso di ricavare le coordinate spaziali oggetto di 2850 punti atti a descrivere il monumento. Ogni punto oggetto è stato collimato mediamente su dieci fotogrammi, quando invece i minimi indispensabili sono due. Tale ridondanza nelle misure ha compensato ogni tipo di errore, permettendo di giungere ad una precisione teorica sul rilievo di circa 8mm. In realtà l'effettiva precisione è minore, probabilmente non di molto. Tramite un collaudo sarebbe stato possibile stabilire la vera accuratezza del rilievo fotogrammetrico eseguito con questa metodologia.

Diversi problemi sono sorti durante le fasi di rilievo ed elaborazione dei dati acquisiti, primo fra tutti l'impossibilità di raggiungere postazioni a quote elevate. Questa situazione ha reso difficile la restituzione dei punti situati sulla sommità dell'arco, rendendo la precisione degli stessi sensibilmente più bassa. Per ovviare a questo inconveniente sono state eseguite numerose riprese sotto diverse angolazioni; in tal modo si è aumentata la ridondanza delle misure, permettendo un miglior controllo della propagazione degli errori.
L'utilizzo della tecnica monoscopica su superfici contorte (come quelle dell'Arco) rende difficile l'individuazione dei punti omologhi, ciò porta ad inesatte collimazioni con conseguenti errori nella determinazione delle coordinate spaziali dei punti restituiti.
In definitiva la presente tesi dimostra che è possibile ottenere discreti rilievi di oggetti dalla forma complessa anche con strumentazioni e metodologie di rilievo semplici ed economiche. Risulta però indispensabile aumentare la ridondanza delle prese, misure d'appoggio e collimazioni, allungando così il tempo ed il lavoro necessario per restituire l'oggetto. L'elaborazione dei dati richiede un cospicuo impiego di tempo, cosa che sarebbe possibile evitare con la stereoscopia e strumenti di rilievo di classe elevata. Gli strumenti di buona fattura permettono di ottenere elevate accuratezze con poche misure ridondanti, risparmiando tempo nella fase di collimazione dei punti; l'utilizzo della tecnica stereoscopia produce restituzioni più precise ed in minor tempo, grazie alla esatta ed unica collimazione del punto da restituire nel modello 3D. In base a queste considerazioni risulta che tecniche e strumentazioni semplici sono versatili ma non produttive, e quindi sconsigliate per l'impiego professionale. E' veloce e si risparmia sulla strumentazione necessaria ma poi, se si vogliono ottenere rilievi di discreta precisione, bisogna spendere tantissimo tempo per effettuare numerose prese ed elaborare i dati. E' ovvio che se l'obiettivo è ottenere un rilievo economico, senza pretese

di grandi precisioni, l'approccio fotogrammetrico illustrato in questa tesi risulta la soluzione migliore.

Concluso il rilievo vettoriale, si è proceduto alla creazione del DSM (*Digital Surface Model*) con *textures* fotografiche dell'Arco; da questo sono state ottenute le ortofoto di precisione di tutti i prospetti del monumento. Con questa fase del lavoro si è dimostrato che il software PhotoModeler, nonostante sia di fascia medio-bassa, riesce comunque a fornire ottimi prodotti fotogrammetrici.

Alla fine della restituzione (sia vettoriale che raster) si può dire che l'Arco si presenta pressoché verticale. Qualche piccolo strapiombo è localizzato solamente nel paramento laterizio in cima alla struttura. Evidente è invece la rotazione del piedritto a lato mare; il quale risulta pendente verso N-E e ruotato attorno all'asse verticale. E' altresì visibile il disassamento fra i centri dei piedritti che trasforma l'originaria volta retta in una obliqua.

L'analisi strutturale del monumento tramite il software Straus7 è stata condotta mediante due modelli numerici: il primo ad elementi trave e limitato al nucleo lapideo, il secondo ad elementi piastra sollecitati nel piano medio e comprendente anche il rifianco laterizio.

Entrambi i modelli hanno evidenziato che l'asimmetria geometrica determina una concentrazione degli sforzi interni nella sezione di base del piedritto lato mare.

Esaminando i risultati delle analisi numeriche è possibile dire che le differenze nella distribuzione degli sforzi fra i due modelli non è rilevante; in quanto la struttura lapidea è molto più rigida rispetto alla muratura a sacco determinando una ridotta efficacia di quest'ultima.

A conclusione delle fasi di analisi strutturale è possibile dire che l'Arco si presenta in una situazione di globale sicurezza statica. Solamente il concio in chiave e la sezione di base del piedritto a lato mare presentano eccessive concentrazioni degli sforzi; in tali zone avviene un distaccamento dei conci con fessurazione degli stessi nelle

porzioni tese. Questi sono comunque problemi localizzati che non influiscono sull'assetto statico globale.

# APPENDICE A

Non tutto ciò che conta può essere contato
e non tutto ciò che può essere contato realmente conta.
Albert Einstein ( 1879 – 1955 )

Qui di seguito vengono riportati i dati numerici più significativi forniti in output dal software PhotoModeler, in particolare si riportano le coordinate di tutti i punti rilevati, la loro precisione con un limite di confidenza pari al 95% e lo scarto quadratico medio misurato in pixel dei punti rilevati.

## *Coordinate e precisione al 95% dei punti rilevati*

| Id | X (m) | Y (m) | Z (m) | X Precision | Y Precision | Z Precision | RMS Residual (pixels) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -0,64227 | 1,990198 | 16,851651 | 0,001471 | 0,003263 | 0,005232 | 1,305232 |
| 3 | -0,652566 | 3,545225 | 18,900028 | 0,003566 | 0,002985 | 0,005956 | 1,589802 |
| 5 | -0,639648 | 10,641732 | 18,891559 | 0,002296 | 0,003345 | 0,005149 | 1,193513 |
| 6 | -0,008373 | 4,361887 | 14,522634 | 0,003345 | 0,002768 | 0,005097 | 0,794623 |
| 7 | -0,664374 | 4,640506 | 16,837598 | 0,002281 | 0,003394 | 0,005652 | 1,068008 |
| 8 | -1,61325 | 4,054204 | 10,100494 | 0,00148 | 0,001491 | 0,00268 | 2,442277 |
| 9 | -0,638294 | 1,515587 | 16,846497 | 0,001634 | 0,00317 | 0,005108 | 1,023677 |
| 10 | -0,637473 | 1,501962 | 16,526428 | 0,001644 | 0,003143 | 0,005045 | 0,938283 |
| 12 | -0,718439 | -0,241625 | 3,820434 | 0,002461 | 0,0032 | 0,002769 | 0,920833 |
| 13 | -0,621129 | 8,865059 | 3,768821 | 0,003152 | 0,002829 | 0,003258 | 0,738762 |
| 14 | -0,588901 | 0,050526 | 5,753002 | 0,001589 | 0,001395 | 0,00191 | 2,582971 |
| 15 | -0,702541 | 0,396106 | 7,908217 | 0,001309 | 0,00134 | 0,002035 | 1,874728 |
| 16 | -0,693594 | 4,671977 | 10,122446 | 0,001659 | 0,00165 | 0,002829 | 2,827882 |
| 17 | -0,626277 | 5,189965 | 10,054297 | 0,001469 | 0,001603 | 0,002623 | 1,516628 |
| 19 | -0,615999 | 6,191153 | 9,73349 | 0,001498 | 0,001713 | 0,002574 | 1,690753 |
| 20 | -1,936089 | 8,618269 | 2,251383 | 0,001413 | 0,001455 | 0,001967 | 1,484769 |
| 22 | -0,593454 | 2,003023 | 15,427719 | 0,004355 | 0,002734 | 0,006375 | 1,036978 |
| 24 | -0,10058 | -1,199157 | 1,103876 | 0,001694 | 0,00141 | 0,002122 | 2,089173 |
| 26 | -1,445024 | 8,721732 | 3,767349 | 0,002586 | 0,00361 | 0,003243 | 1,018211 |
| 27 | -4,710109 | 8,64331 | 5,649336 | 0,000957 | 0,001207 | 0,001781 | 2,257518 |
| 28 | -1,868555 | 8,752172 | 5,79342 | 0,001662 | 0,001889 | 0,002255 | 1,401622 |
| 29 | -4,721758 | 8,619944 | 0,405114 | 0,001792 | 0,001853 | 0,002379 | 2,174947 |
| 30 | -0,747413 | 8,623187 | 1,050525 | 0,001277 | 0,001662 | 0,00195 | 1,550043 |
| 31 | -1,118181 | 8,669812 | 2,311398 | 0,002287 | 0,0026 | 0,002375 | 0,553571 |
| 33 | -4,615439 | 6,194822 | 9,729671 | 0,001383 | 0,001637 | 0,002533 | 1,968025 |
| 34 | -0,09564 | 10,823503 | 10,840112 | 0,002834 | 0,003296 | 0,003933 | 1,819008 |
| 35 | 0,450999 | 10,509497 | 12,895806 | 0,002393 | 0,002738 | 0,003815 | 2,235271 |
| 38 | -0,599409 | 8,864545 | 1,931927 | 0,002991 | 0,002527 | 0,003326 | 0,67095 |
| 42 | -0,626649 | 9,500552 | 5,501256 | 0,001991 | 0,00197 | 0,002386 | 1,536398 |
| 43 | -0,615289 | 9,36964 | 2,171656 | 0,001977 | 0,001121 | 0,002219 | 2,932007 |
| 44 | -0,757579 | -0,273971 | 1,996119 | 0,0039 | 0,002752 | 0,003694 | 1,207889 |
| 45 | -0,67465 | -0,970621 | 7,559834 | 0,002842 | 0,002097 | 0,003145 | 1,025195 |
| 47 | -0,675631 | -0,812239 | 5,4902 | 0,001846 | 0,001813 | 0,002198 | 1,356943 |
| 48 | 0,11211 | 20,12363 | 3,345511 | 0,003224 | 0,003731 | 0,003152 | 3,58389 |
| 49 | 0,201971 | 20,136681 | 1,6359 | 0,003051 | 0,003755 | 0,003299 | 4,546394 |
| 50 | 0,148926 | 10,314854 | 0,10362 | 0,00163 | 0,002266 | 0,002711 | 5,094539 |
| 51 | 0,074842 | 17,680371 | 2,747414 | 0,002791 | 0,00372 | 0,003486 | 1,420435 |
| 52 | -0,434561 | 13,472806 | 5,757553 | 0,001559 | 0,003386 | 0,002821 | 1,788273 |
| 53 | -0,622851 | -3,234903 | 12,435758 | 0,00191 | 0,002178 | 0,003184 | 1,39101 |
| 54 | -0,119508 | -0,147833 | 0,307898 | 0,000947 | 0,001 | 0,001594 | 2,234347 |
| 55 | -1,128136 | -13,468786 | 1,079901 | 0,002459 | 0,004058 | 0,003292 | 8,968003 |
| 56 | -1,110732 | -12,536307 | 2,275096 | 0,002612 | 0,004102 | 0,003453 | 4,406888 |
| 57 | -0,237184 | -3,025344 | 14,153329 | 0,002263 | 0,002807 | 0,004054 | 1,115526 |
| 58 | 2,11852 | -10,615684 | -0,068757 | 0,003583 | 0,006533 | 0,004848 | 3,743563 |
| 59 | -1,806618 | -9,439078 | 9,53196 | 0,002455 | 0,003115 | 0,003462 | 3,765141 |
| 60 | -4,55575 | -3,182952 | 18,961134 | 0,002287 | 0,003538 | 0,005566 | 2,736464 |
| 61 | -0,547922 | -9,945986 | 2,27681 | 0,009505 | 0,007487 | 0,008243 | 1,298395 |
| 62 | -0,642247 | -9,888766 | 1,221806 | 0,0244 | 0,018489 | 0,017452 | 3,905599 |
| 63 | -0,596539 | -3,295738 | 18,922066 | 0,001317 | 0,003024 | 0,004559 | 3,259807 |
| 64 | -4,694153 | 8,748354 | 2,351686 | 0,001746 | 0,001453 | 0,002316 | 1,673463 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 65 | -0,621972 | 7,156627 | 9,188682 | 0,001466 | 0,001576 | 0,002299 | 2,280311 |
| 66 | -0,618913 | 8,749669 | 5,519006 | 0,001163 | 0,001254 | 0,001892 | 1,720423 |
| 67 | -4,681378 | 8,73989 | 3,382584 | 0,001678 | 0,00171 | 0,002378 | 1,182988 |
| 68 | -4,672128 | -0,037227 | 6,9167 | 0,001428 | 0,001528 | 0,002114 | 1,392683 |
| 69 | -4,892695 | 0,001771 | 5,757158 | 0,001637 | 0,001708 | 0,002318 | 1,426384 |
| 70 | -3,507889 | -0,12987 | 1,662031 | 0,001127 | 0,001343 | 0,001842 | 1,290214 |
| 71 | -1,256063 | -0,10041 | 6,325483 | 0,001962 | 0,001982 | 0,002564 | 1,75942 |
| 72 | -4,856331 | -3,334439 | 9,927868 | 0,002008 | 0,003267 | 0,003687 | 2,677007 |
| 73 | -4,763387 | -0,333726 | 3,754953 | 0,002873 | 0,001557 | 0,003874 | 1,55541 |
| 77 | -1,20492 | 19,696163 | 3,419659 | 0,002725 | 0,005048 | 0,003098 | 1,083357 |
| 78 | -1,218907 | 19,696314 | 1,604691 | 0,002845 | 0,005055 | 0,002978 | 1,023299 |
| 79 | -4,410761 | 11,774047 | 18,856203 | 0,001871 | 0,003128 | 0,004836 | 1,932426 |
| 80 | -5,076471 | 4,552052 | 11,663329 | 0,001634 | 0,002514 | 0,004853 | 1,003868 |
| 81 | -4,704415 | 9,513269 | 11,486746 | 0,001358 | 0,002386 | 0,003551 | 1,344628 |
| 83 | 0,479377 | 11,063706 | 12,907003 | 0,002258 | 0,002731 | 0,003614 | 2,74372 |
| 84 | -2,161866 | 17,420127 | 5,834172 | 0,002362 | 0,005044 | 0,00452 | 0,758593 |
| 85 | -4,620647 | 11,888906 | 9,259586 | 0,001322 | 0,002234 | 0,002867 | 1,972642 |
| 86 | -1,769916 | -8,746211 | 3,434314 | 0,005202 | 0,005084 | 0,005516 | 1,387868 |
| 87 | -1,801612 | -8,766143 | 1,609676 | 0,005124 | 0,004941 | 0,005278 | 2,19983 |
| 88 | -0,600375 | -3,151413 | 18,919164 | 0,001862 | 0,003307 | 0,00545 | 3,331886 |
| 89 | -0,624033 | -2,888795 | 18,387057 | 0,002041 | 0,003261 | 0,005447 | 1,853702 |
| 90 | -0,619815 | -2,674254 | 18,383033 | 0,00295 | 0,003204 | 0,005901 | 2,299856 |
| 91 | -0,596483 | -2,40971 | 18,935486 | 0,001659 | 0,003264 | 0,005136 | 2,369363 |
| 94 | -0,593529 | -2,273778 | 18,932178 | 0,002052 | 0,00319 | 0,005177 | 2,309632 |
| 95 | -0,611462 | -2,272932 | 18,361485 | 0,001556 | 0,003217 | 0,004863 | 1,442162 |
| 96 | -0,614096 | -3,292158 | 18,37039 | 0,001786 | 0,002772 | 0,004384 | 2,615159 |
| 98 | -0,639482 | -3,282387 | 18,355322 | 0,002134 | 0,002749 | 0,004511 | 2,353718 |
| 99 | -0,64684 | 10,800936 | 18,896605 | 0,001901 | 0,003401 | 0,004984 | 1,219061 |
| 100 | -0,664226 | 11,179846 | 18,342011 | 0,003893 | 0,003979 | 0,006477 | 2,29153 |
| 101 | -0,641764 | 10,682533 | 18,321012 | 0,001757 | 0,003314 | 0,004651 | 1,79408 |
| 102 | -0,66258 | 11,356363 | 18,342689 | 0,002429 | 0,004028 | 0,005798 | 1,632566 |
| 103 | -0,647293 | 11,854482 | 18,312974 | 0,001561 | 0,002699 | 0,004188 | 1,553638 |
| 104 | -0,649096 | 11,893265 | 18,91451 | 0,001234 | 0,002781 | 0,004244 | 1,206827 |
| 105 | -0,654059 | 11,728641 | 18,906292 | 0,001973 | 0,00365 | 0,00523 | 1,443344 |
| 106 | -1,918515 | 11,83989 | 18,302517 | 0,00183 | 0,004329 | 0,006711 | 0,723222 |
| 107 | -1,924479 | 11,864507 | 18,864211 | 0,001831 | 0,004376 | 0,006883 | 0,747357 |
| 108 | -1,758473 | 11,865188 | 18,855425 | 0,002093 | 0,005122 | 0,007637 | 1,294151 |
| 113 | -0,692779 | -0,102602 | 5,487974 | 0,001425 | 0,001116 | 0,001751 | 2,029311 |
| 114 | -0,681012 | -0,095765 | 5,557531 | 0,00147 | 0,001234 | 0,001798 | 1,768399 |
| 115 | -0,659858 | -0,824178 | 5,549272 | 0,001849 | 0,001828 | 0,002215 | 1,301559 |
| 116 | -0,614659 | -0,86276 | 5,592867 | 0,002095 | 0,00194 | 0,002453 | 1,152595 |
| 117 | -0,633477 | -0,052699 | 5,603726 | 0,001509 | 0,001429 | 0,001829 | 2,328196 |
| 118 | -0,596875 | 0,01531 | 5,710026 | 0,001718 | 0,001507 | 0,002011 | 2,106194 |
| 119 | -0,591463 | -0,904035 | 5,717607 | 0,002323 | 0,002092 | 0,0027 | 2,270427 |
| 123 | -1,541413 | 0,025814 | 5,707545 | 0,002025 | 0,001877 | 0,002376 | 2,417873 |
| 124 | -1,433574 | -0,093557 | 5,489376 | 0,001737 | 0,001526 | 0,002179 | 1,248569 |
| 125 | -1,439454 | -0,08636 | 5,560396 | 0,001732 | 0,001403 | 0,002189 | 1,496427 |
| 126 | -1,483742 | -0,087439 | 5,59131 | 0,005401 | 0,004082 | 0,004627 | 1,621811 |
| 127 | -1,49486 | -0,044106 | 5,607447 | 0,001932 | 0,002012 | 0,002339 | 1,719769 |
| 128 | -0,686356 | -1,157519 | 7,552817 | 0,003608 | 0,00263 | 0,003738 | 1,107026 |
| 129 | -0,676669 | -1,15244 | 7,755657 | 0,003633 | 0,002655 | 0,003823 | 2,074758 |
| 130 | -0,670567 | -0,952577 | 7,805123 | 0,002861 | 0,002112 | 0,003214 | 1,414513 |
| 131 | -1,569775 | -0,120645 | 5,488691 | 0,002038 | 0,002892 | 0,00304 | 1,435966 |
| 132 | -0,718048 | -0,106499 | 5,198064 | 0,001499 | 0,001426 | 0,001791 | 1,454261 |
| 133 | -1,524706 | -0,118039 | 5,203636 | 0,001854 | 0,002206 | 0,00246 | 1,651691 |
| 134 | -1,564245 | -0,117048 | 5,282537 | 0,001911 | 0,00226 | 0,002515 | 1,918867 |
| 135 | -1,534435 | -0,120547 | 4,618896 | 0,001666 | 0,002004 | 0,002147 | 1,401343 |
| 136 | -0,90397 | -0,120415 | 4,607346 | 0,00176 | 0,001693 | 0,002085 | 1,587932 |
| 137 | -0,89955 | -0,114777 | 5,196452 | 0,001819 | 0,002249 | 0,002435 | 1,089155 |
| 138 | -0,729407 | -0,130695 | 4,614305 | 0,001312 | 0,001411 | 0,001702 | 2,089745 |
| 139 | -0,731191 | -0,130353 | 4,006821 | 0,001113 | 0,001053 | 0,001415 | 1,726989 |
| 140 | -1,057388 | -0,11961 | 4,013244 | 0,001248 | 0,001694 | 0,001839 | 1,109111 |
| 141 | -1,051115 | -0,119887 | 4,609174 | 0,001556 | 0,001651 | 0,001941 | 1,566142 |
| 142 | -4,740664 | -0,130258 | 4,066789 | 0,001632 | 0,001545 | 0,002134 | 1,326522 |
| 143 | -1,344424 | -0,119203 | 4,017807 | 0,001257 | 0,00144 | 0,001692 | 1,353593 |
| 144 | -1,353891 | -0,123736 | 4,61636 | 0,001602 | 0,001668 | 0,001962 | 1,58297 |
| 145 | -4,731329 | -0,129061 | 4,673192 | 0,001641 | 0,001562 | 0,002149 | 1,636377 |
| 146 | -4,722838 | -0,125355 | 5,231588 | 0,001707 | 0,001637 | 0,002224 | 1,399797 |
| 147 | -4,177116 | -0,124609 | 5,226361 | 0,001876 | 0,001824 | 0,002462 | 2,006222 |
| 148 | -4,19436 | -0,12183 | 4,656035 | 0,00191 | 0,001808 | 0,002463 | 1,263375 |
| 149 | -1,901672 | -0,140559 | 4,029485 | 0,00126 | 0,00168 | 0,001866 | 1,070451 |
| 150 | -1,900352 | -0,136531 | 4,625468 | 0,001647 | 0,001496 | 0,001889 | 1,426446 |
| 151 | -3,583474 | -0,128194 | 4,648344 | 0,001811 | 0,00174 | 0,00226 | 1,245208 |
| 152 | -3,57472 | -0,120595 | 4,051204 | 0,001828 | 0,001718 | 0,002252 | 1,15852 |
| 153 | -2,719363 | -0,138509 | 5,213554 | 0,001698 | 0,001665 | 0,002078 | 1,671569 |
| 154 | -2,730553 | -0,141812 | 4,649003 | 0,001843 | 0,001732 | 0,002202 | 1,521233 |
| 156 | -1,429621 | -0,119224 | 3,419572 | 0,001134 | 0,001184 | 0,001521 | 1,307377 |
| 157 | -4,756069 | -0,137497 | 3,469387 | 0,001111 | 0,001531 | 0,001825 | 1,345514 |
| 158 | -2,9482 | -0,131585 | 3,447017 | 0,001249 | 0,001386 | 0,001706 | 1,362963 |
| 159 | -2,940342 | -0,12983 | 4,039548 | 0,001732 | 0,001527 | 0,001936 | 1,557291 |
| 160 | -1,427633 | -0,117646 | 3,390588 | 0,00113 | 0,001458 | 0,001751 | 1,304057 |
| 161 | -1,419098 | -0,123649 | 4,018844 | 0,001262 | 0,001452 | 0,001706 | 1,600855 |
| 162 | -0,954983 | -0,115972 | 4,007222 | 0,001357 | 0,001579 | 0,001797 | 1,504124 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 163 | -0,958196 | -0,115948 | 3,815655 | 0,002633 | 0,003501 | 0,002809 | 0,867643 |
| 164 | -0,971089 | -0,112412 | 3,410416 | 0,001141 | 0,001467 | 0,001718 | 0,943643 |
| 165 | -1,290626 | -0,115284 | 3,414175 | 0,00113 | 0,001283 | 0,001596 | 1,474735 |
| 166 | -1,295025 | -0,116228 | 3,37985 | 0,001128 | 0,001282 | 0,001591 | 1,295936 |
| 167 | -1,416632 | -0,122173 | 3,818548 | 0,001259 | 0,001728 | 0,001877 | 1,450947 |
| 168 | -0,740118 | -0,132727 | 3,421757 | 0,001047 | 0,000997 | 0,001355 | 1,891113 |
| 169 | -0,807261 | -0,16368 | 3,428864 | 0,002777 | 0,003772 | 0,00282 | 0,838986 |
| 170 | -0,740482 | -0,126917 | 3,372666 | 0,001144 | 0,001174 | 0,001488 | 1,433739 |
| 171 | -0,742841 | -0,13367 | 2,911094 | 0,001053 | 0,00099 | 0,001374 | 1,763093 |
| 173 | -4,757601 | -0,149616 | 2,872392 | 0,001123 | 0,001525 | 0,001843 | 1,772831 |
| 176 | -0,881468 | -0,121724 | 2,917007 | 0,001141 | 0,001457 | 0,001692 | 1,510006 |
| 177 | -0,891429 | -0,124955 | 2,821283 | 0,001153 | 0,001278 | 0,001565 | 0,907451 |
| 178 | -1,886974 | -0,137689 | 2,840459 | 0,001144 | 0,001317 | 0,001697 | 1,511194 |
| 181 | -3,865654 | -0,087257 | 5,749412 | 0,001814 | 0,002087 | 0,002626 | 4,370572 |
| 182 | -3,911986 | -0,12523 | 5,227864 | 0,001764 | 0,001779 | 0,002314 | 0,99452 |
| 183 | -4,676864 | -0,114809 | 5,587652 | 0,001797 | 0,001438 | 0,002964 | 0,837097 |
| 184 | -4,635027 | -0,120639 | 5,515732 | 0,001805 | 0,001501 | 0,002531 | 0,968894 |
| 185 | -4,065338 | -0,10841 | 5,509495 | 0,001701 | 0,001298 | 0,002314 | 1,026983 |
| 186 | -4,054016 | -0,100992 | 5,585577 | 0,00186 | 0,001653 | 0,002896 | 1,629252 |
| 187 | -1,889336 | -0,122992 | 3,42503 | 0,001102 | 0,001274 | 0,001602 | 1,358297 |
| 188 | -1,216347 | -0,130244 | 2,820832 | 0,001142 | 0,001175 | 0,001526 | 1,645759 |
| 189 | -1,220149 | -0,131053 | 1,636891 | 0,001129 | 0,001272 | 0,001651 | 1,28088 |
| 190 | -0,757953 | -0,127979 | 1,632342 | 0,001033 | 0,000994 | 0,001475 | 1,87144 |
| 193 | -2,772377 | -0,135467 | 2,252974 | 0,00107 | 0,001205 | 0,001642 | 1,145056 |
| 194 | -2,778511 | -0,139285 | 2,847642 | 0,002299 | 0,002602 | 0,002357 | 1,282782 |
| 195 | -1,220795 | -0,127115 | 2,227717 | 0,001136 | 0,001168 | 0,001553 | 1,447942 |
| 196 | -2,069506 | -0,131162 | 1,651279 | 0,001102 | 0,001257 | 0,001689 | 1,725181 |
| 197 | -2,059209 | -0,130691 | 2,239921 | 0,001108 | 0,00126 | 0,001649 | 1,127463 |
| 198 | -3,946644 | -0,129589 | 2,269498 | 0,001077 | 0,001436 | 0,001866 | 1,510926 |
| 199 | -4,129041 | -0,150837 | 2,276325 | 0,00108 | 0,001573 | 0,001938 | 1,758279 |
| 200 | -4,1276 | -0,149046 | 1,979702 | 0,001114 | 0,001567 | 0,001931 | 1,674777 |
| 201 | -4,041286 | -0,134035 | 1,979258 | 0,001069 | 0,001411 | 0,00184 | 1,334024 |
| 202 | -4,766475 | -0,164194 | 2,28308 | 0,000879 | 0,001369 | 0,001703 | 3,423235 |
| 203 | -4,717071 | -0,181539 | 1,682372 | 0,000949 | 0,001413 | 0,001757 | 5,789842 |
| 204 | -4,118156 | -0,140072 | 1,677694 | 0,001118 | 0,001496 | 0,001902 | 2,257608 |
| 205 | -3,50759 | -0,130026 | 2,259208 | 0,001099 | 0,001353 | 0,00182 | 1,899416 |
| 206 | -4,754292 | -0,128765 | 5,596825 | 0,001314 | 0,001985 | 0,002471 | 1,689714 |
| 207 | -4,750535 | -0,143552 | 5,52137 | 0,0012 | 0,00166 | 0,002031 | 1,754521 |
| 208 | -4,813686 | -0,080679 | 5,631235 | 0,001443 | 0,001428 | 0,001974 | 1,307624 |
| 209 | -4,01777 | -0,055917 | 5,626331 | 0,001949 | 0,001439 | 0,002322 | 1,701286 |
| 210 | -3,952656 | 0,029236 | 5,752989 | 0,001957 | 0,002175 | 0,00301 | 2,311583 |
| 211 | -3,96511 | 0,01219 | 5,73481 | 0,001949 | 0,001655 | 0,002758 | 2,081811 |
| 212 | -4,874904 | -0,017942 | 5,737426 | 0,001463 | 0,001736 | 0,002252 | 1,780865 |
| 213 | -4,888797 | 0,003472 | 5,799255 | 0,001625 | 0,002127 | 0,002891 | 1,244425 |
| 214 | -3,959565 | 0,024779 | 5,791604 | 0,001909 | 0,001653 | 0,002399 | 2,596565 |
| 215 | -1,557931 | 0,031403 | 5,777435 | 0,001799 | 0,002061 | 0,002431 | 1,243109 |
| 216 | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a |
| 217 | -0,569175 | 0,034672 | 5,764086 | 0,002123 | 0,001887 | 0,00237 | 1,939253 |
| 219 | -1,728722 | -0,14511 | 5,770395 | 0,001807 | 0,002167 | 0,002526 | 1,296195 |
| 228 | -0,692488 | -0,105672 | 6,338867 | 0,001753 | 0,001687 | 0,002131 | 1,787376 |
| 230 | -0,694603 | -0,009447 | 6,874837 | 0,00173 | 0,001588 | 0,00219 | 1,523795 |
| 231 | -0,66005 | -0,666131 | 7,0486 | 0,00248 | 0,001794 | 0,002772 | 1,249873 |
| 232 | -0,664913 | -0,78988 | 6,431263 | 0,002362 | 0,001799 | 0,002573 | 1,438065 |
| 233 | -0,680808 | 0,140991 | 7,3876 | 0,001252 | 0,001323 | 0,001884 | 3,489446 |
| 234 | -0,661918 | -0,467194 | 7,662193 | 0,002755 | 0,001912 | 0,003107 | 1,508218 |
| 235 | -0,665974 | -0,180666 | 8,234267 | 0,002731 | 0,001847 | 0,003166 | 1,178327 |
| 238 | -0,695611 | 0,707636 | 8,373107 | 0,001466 | 0,001448 | 0,002262 | 1,5313 |
| 239 | -0,64717 | 0,160099 | 8,778249 | 0,002877 | 0,001961 | 0,003417 | 1,322297 |
| 240 | -0,685066 | 1,066348 | 8,79686 | 0,001515 | 0,001476 | 0,002382 | 1,678947 |
| 241 | -0,632811 | 0,587294 | 9,268888 | 0,003323 | 0,002424 | 0,003957 | 1,577108 |
| 242 | -0,680346 | 1,467343 | 9,160985 | 0,001648 | 0,001573 | 0,00264 | 2,055854 |
| 243 | -0,650745 | 1,042903 | 9,688468 | 0,002993 | 0,001979 | 0,003682 | 1,057972 |
| 244 | -0,664692 | 0,397664 | 10,535616 | 0,003191 | 0,002154 | 0,004075 | 1,704179 |
| 245 | -0,656241 | -0,163205 | 10,024401 | 0,003019 | 0,001973 | 0,003756 | 2,308655 |
| 246 | -0,659104 | -0,67054 | 9,410792 | 0,002834 | 0,002125 | 0,003549 | 0,909962 |
| 247 | -0,666155 | -1,027469 | 8,706005 | 0,00254 | 0,001947 | 0,003101 | 1,311367 |
| 248 | -0,659435 | -1,187075 | 7,951632 | 0,003437 | 0,002651 | 0,003742 | 1,251236 |
| 249 | -0,655899 | -1,144567 | 7,159465 | 0,003527 | 0,002368 | 0,003564 | 2,010721 |
| 250 | -0,683158 | -1,18978 | 6,484822 | 0,003328 | 0,002412 | 0,003462 | 0,781345 |
| 251 | -0,649865 | 1,019504 | 10,943256 | 0,002814 | 0,002013 | 0,00374 | 2,095539 |
| 252 | -0,646601 | 1,54682 | 10,049594 | 0,003042 | 0,001975 | 0,003788 | 1,095353 |
| 253 | -0,674781 | 1,924979 | 9,475162 | 0,001667 | 0,001587 | 0,002695 | 1,962368 |
| 254 | -0,662394 | -0,63557 | 5,907109 | 0,002077 | 0,001781 | 0,002309 | 0,931112 |
| 255 | -0,640155 | -0,806887 | 5,910008 | 0,00216 | 0,001942 | 0,002521 | 1,329892 |
| 256 | -0,715341 | -1,101021 | 5,207819 | 0,001932 | 0,002174 | 0,002343 | 3,474251 |
| 257 | -0,718188 | -0,815004 | 4,630694 | 0,001784 | 0,001981 | 0,002124 | 1,651386 |
| 258 | -0,733378 | -0,728667 | 4,016539 | 0,00161 | 0,001635 | 0,001827 | 2,108832 |
| 259 | -0,744437 | -0,81145 | 3,415008 | 0,001736 | 0,001338 | 0,001773 | 2,494995 |
| 260 | -0,745701 | -0,818813 | 2,921236 | 0,00148 | 0,001337 | 0,001609 | 1,834214 |
| 261 | -0,751705 | -0,719091 | 2,921777 | 0,001603 | 0,001379 | 0,001671 | 1,769844 |
| 262 | -0,751616 | -0,705389 | 1,644354 | 0,001792 | 0,002515 | 0,002535 | 1,625122 |
| 263 | -0,745865 | -0,719153 | 2,82799 | 0,001464 | 0,001309 | 0,001601 | 1,67706 |
| 264 | -0,729802 | -1,130375 | 2,817768 | 0,002542 | 0,00178 | 0,00211 | 1,827981 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 265 | -0,727157 | -1,136388 | 3,416174 | 0,002292 | 0,001728 | 0,002087 | 1,790665 |
| 266 | -0,742981 | -0,977456 | 2,818516 | 0,00172 | 0,001472 | 0,001731 | 1,867405 |
| 267 | -0,746576 | -0,971123 | 2,23062 | 0,00144 | 0,001375 | 0,001622 | 1,795904 |
| 268 | -0,74901 | -0,719368 | 2,232584 | 0,001417 | 0,001306 | 0,001607 | 1,585563 |
| 269 | -0,748062 | -1,191715 | 2,225744 | 0,001766 | 0,00166 | 0,00176 | 1,560747 |
| 270 | -0,748725 | -0,960574 | 1,809526 | 0,002043 | 0,001703 | 0,00202 | 1,338834 |
| 271 | -0,749681 | -0,71275 | 1,809135 | 0,001365 | 0,00148 | 0,001752 | 1,505942 |
| 272 | -0,713008 | -1,130815 | 4,014463 | 0,002243 | 0,002354 | 0,002292 | 1,741886 |
| 273 | -0,674752 | -1,124849 | 4,605284 | 0,002226 | 0,002564 | 0,002485 | 3,403962 |
| 277 | -0,677158 | -1,100699 | 5,76652 | 0,003609 | 0,002249 | 0,003534 | 1,805903 |
| 278 | -0,644728 | -1,199626 | 5,190338 | 0,002489 | 0,003594 | 0,003112 | 2,254151 |
| 279 | -0,646876 | -0,812066 | 5,815234 | 0,002726 | 0,002616 | 0,0033 | 0,239368 |
| 280 | -0,672414 | 2,416629 | 9,728436 | 0,001698 | 0,001615 | 0,002768 | 1,722775 |
| 281 | -0,644184 | 1,797973 | 11,105452 | 0,003275 | 0,002039 | 0,004239 | 0,960539 |
| 282 | -0,639095 | 2,128928 | 10,359163 | 0,003237 | 0,001972 | 0,00404 | 0,924498 |
| 283 | -0,662068 | 2,927043 | 9,929174 | 0,001479 | 0,00148 | 0,002597 | 1,444707 |
| 284 | -0,638605 | 2,548068 | 11,161886 | 0,002804 | 0,00202 | 0,00377 | 0,94953 |
| 285 | -0,638282 | 2,715786 | 10,59577 | 0,003127 | 0,001933 | 0,003954 | 1,198921 |
| 287 | -0,661639 | 3,419667 | 10,071224 | 0,001722 | 0,001608 | 0,002808 | 3,062195 |
| 288 | -0,63906 | 3,203708 | 11,172339 | 0,003097 | 0,002126 | 0,004242 | 0,716982 |
| 291 | -0,630732 | 1,827109 | 11,161396 | 0,002791 | 0,002064 | 0,003766 | 1,139831 |
| 292 | -0,554748 | 2,593395 | 11,16726 | 0,002825 | 0,002132 | 0,003929 | 0,674239 |
| 293 | -0,545627 | 2,513732 | 11,401044 | 0,001539 | 0,002317 | 0,003395 | 0,559025 |
| 294 | -0,545009 | 2,938696 | 11,399142 | 0,001539 | 0,002295 | 0,003393 | 0,648631 |
| 295 | -0,516302 | 3,022367 | 11,632895 | 0,001996 | 0,002252 | 0,003724 | 0,697559 |
| 296 | -0,516825 | 2,615239 | 11,635288 | 0,00128 | 0,002359 | 0,003324 | 1,361796 |
| 297 | -0,53466 | 2,482387 | 11,491381 | 0,001553 | 0,002332 | 0,003496 | 2,026158 |
| 298 | -0,450935 | 2,685816 | 11,730179 | 0,003666 | 0,002489 | 0,004897 | 1,324557 |
| 299 | -0,452469 | 3,093741 | 11,735544 | 0,003342 | 0,002523 | 0,004575 | 0,860974 |
| 300 | -0,557908 | 2,92025 | 11,17844 | 0,002825 | 0,002114 | 0,003929 | 1,172451 |
| 301 | -0,627787 | 3,024262 | 11,155871 | 0,002843 | 0,002111 | 0,003933 | 0,728205 |
| 302 | -0,735537 | 3,916935 | 11,181523 | 0,004565 | 0,002721 | 0,005425 | 1,316346 |
| 303 | -0,667347 | 4,062134 | 10,168612 | 0,001772 | 0,001691 | 0,003014 | 1,77802 |
| 304 | -0,644525 | 4,553927 | 10,241033 | 0,001827 | 0,001775 | 0,003022 | 1,279618 |
| 305 | -0,710936 | 5,157803 | 10,061774 | 0,001865 | 0,001789 | 0,003094 | 2,556048 |
| 306 | -0,618932 | 5,406441 | 11,152406 | 0,003289 | 0,002659 | 0,004288 | 0,89327 |
| 307 | -0,61646 | 4,740204 | 11,148962 | 0,003672 | 0,002645 | 0,004626 | 0,89411 |
| 308 | -0,542105 | 5,409082 | 11,189191 | 0,003267 | 0,002658 | 0,004285 | 0,657293 |
| 309 | -0,526431 | 6,078954 | 11,18533 | 0,003254 | 0,00271 | 0,004262 | 0,638806 |
| 310 | -0,611301 | 6,083631 | 11,168078 | 0,003278 | 0,002714 | 0,004271 | 0,547682 |
| 311 | -0,623062 | 5,695448 | 9,928068 | 0,001685 | 0,001784 | 0,002778 | 1,417585 |
| 312 | -0,608826 | 6,530773 | 10,514968 | 0,004469 | 0,002908 | 0,005125 | 0,742064 |
| 313 | -0,599236 | 6,355725 | 10,945701 | 0,003808 | 0,002791 | 0,004711 | 0,950023 |
| 314 | -0,630666 | 6,214651 | 11,190134 | 0,004778 | 0,002868 | 0,005598 | 1,591051 |
| 315 | -0,615881 | 7,048183 | 11,208069 | 0,00333 | 0,002787 | 0,004351 | 0,941993 |
| 316 | -0,536783 | 7,026617 | 11,212411 | 0,003456 | 0,003134 | 0,004669 | 0,963993 |
| 317 | -0,494552 | 5,50587 | 11,630611 | 0,003265 | 0,002693 | 0,004366 | 0,615002 |
| 318 | -0,492122 | 6,111124 | 11,638348 | 0,003677 | 0,002817 | 0,004709 | 0,796955 |
| 319 | -0,511174 | 6,12256 | 11,417536 | 0,003255 | 0,002727 | 0,004305 | 0,84717 |
| 320 | -0,521121 | 4,770377 | 11,406079 | 0,003861 | 0,002634 | 0,005027 | 1,345621 |
| 321 | -0,487678 | 4,782743 | 11,610374 | 0,004455 | 0,002625 | 0,005606 | 1,05326 |
| 322 | -0,599758 | 3,818259 | 11,733571 | 0,00383 | 0,002581 | 0,004951 | 0,563494 |
| 324 | -0,578522 | 9,374261 | 12,399017 | 0,004124 | 0,003177 | 0,005251 | 0,819704 |
| 326 | -0,592045 | 6,70222 | 12,402004 | 0,003857 | 0,002915 | 0,005046 | 1,390189 |
| 327 | -0,584252 | 3,896024 | 12,334073 | 0,00385 | 0,002637 | 0,005097 | 1,121288 |
| 328 | -0,556904 | -1,166989 | 12,360737 | 0,004501 | 0,003184 | 0,00625 | 0,969595 |
| 329 | -0,541456 | 7,039149 | 11,457834 | 0,005346 | 0,003403 | 0,006279 | 1,463075 |
| 330 | -0,595012 | 8,09 | 11,201724 | 0,002993 | 0,002516 | 0,004005 | 0,518074 |
| 331 | -0,589883 | 8,549001 | 11,212263 | 0,00293 | 0,002663 | 0,004101 | 0,861339 |
| 332 | -0,510216 | 8,62597 | 11,210417 | 0,002909 | 0,002675 | 0,004087 | 1,569806 |
| 333 | -0,615739 | 7,606635 | 10,975847 | 0,005397 | 0,003014 | 0,006007 | 0,918193 |
| 334 | -0,622074 | 6,727769 | 9,559776 | 0,001829 | 0,001745 | 0,002797 | 1,838506 |
| 335 | -0,603208 | 8,213614 | 10,511312 | 0,00534 | 0,002745 | 0,006062 | 0,543876 |
| 336 | -0,625815 | 7,555853 | 8,809892 | 0,001563 | 0,001641 | 0,002371 | 1,233184 |
| 337 | -0,600502 | 8,795773 | 10,010524 | 0,003407 | 0,002297 | 0,003924 | 1,24154 |
| 338 | -0,641864 | 7,912196 | 8,394229 | 0,001553 | 0,001678 | 0,002297 | 1,422122 |
| 339 | -0,628464 | 9,298456 | 9,44205 | 0,003332 | 0,002103 | 0,003678 | 1,581793 |
| 340 | -0,640714 | 8,240414 | 7,937307 | 0,001494 | 0,00166 | 0,002162 | 1,611837 |
| 341 | -0,655298 | 8,470701 | 7,428583 | 0,001495 | 0,001666 | 0,002108 | 1,541554 |
| 342 | -0,784697 | 2,460765 | 11,539879 | 0,00587 | 0,002733 | 0,007375 | 2,370818 |
| 343 | -0,440489 | -0,737179 | 11,770546 | 0,005031 | 0,002694 | 0,006492 | 1,349891 |
| 344 | -0,431863 | -0,170368 | 11,74645 | 0,004013 | 0,002314 | 0,005395 | 1,63947 |
| 345 | -0,497238 | -0,830225 | 11,653375 | 0,005058 | 0,002702 | 0,006459 | 0,453272 |
| 346 | -0,509681 | -0,14843 | 11,66549 | 0,003432 | 0,002391 | 0,004748 | 0,275594 |
| 347 | -0,525077 | -0,164126 | 11,425991 | 0,003092 | 0,002314 | 0,004337 | 0,847405 |
| 348 | -0,477315 | -0,816708 | 11,377485 | 0,003581 | 0,00233 | 0,004861 | 4,524729 |
| 349 | -0,581652 | -0,132848 | 11,750168 | 0,005194 | 0,002608 | 0,006561 | 1,36457 |
| 350 | -0,567837 | 3,155312 | 11,725396 | 0,004565 | 0,002549 | 0,005795 | 2,128126 |
| 351 | -0,639606 | 3,161009 | 11,711722 | 0,005883 | 0,002497 | 0,007181 | 1,900318 |
| 352 | -0,600347 | 3,900104 | 11,519982 | 0,00434 | 0,002624 | 0,005479 | 1,350082 |
| 353 | -0,755363 | 3,890802 | 11,5968 | 0,006408 | 0,003197 | 0,007833 | 1,885261 |
| 354 | -0,620425 | 0,86394 | 11,151572 | 0,003936 | 0,002291 | 0,005002 | 1,795334 |
| 355 | -0,583246 | 0,037347 | 11,123117 | 0,004359 | 0,002545 | 0,005319 | 2,64511 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 356 | -0,640942 | 1,112622 | 11,17853 | 0,003276 | 0,002082 | 0,004248 | 1,465194 |
| 357 | -0,624194 | 1,870423 | 11,786717 | 0,002984 | 0,00223 | 0,004239 | 1,182481 |
| 358 | -0,580068 | -0,133995 | 11,206963 | 0,006166 | 0,003627 | 0,006622 | 1,17596 |
| 359 | -0,550138 | -0,843629 | 11,262197 | 0,005383 | 0,002988 | 0,006482 | 0,963158 |
| 360 | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a |
| 361 | -0,495619 | -1,139282 | 11,648638 | 0,004426 | 0,003068 | 0,00598 | 1,092624 |
| 362 | -0,136635 | -1,190103 | 11,420768 | 0,002845 | 0,002273 | 0,004101 | 0,716166 |
| 363 | -0,115292 | -1,174232 | 11,640816 | 0,002647 | 0,002295 | 0,003931 | 0,829018 |
| 364 | -0,182315 | -1,98535 | 11,43589 | 0,002791 | 0,002244 | 0,004056 | 0,726797 |
| 365 | -0,159761 | -1,999468 | 11,645776 | 0,002577 | 0,002282 | 0,003858 | 1,182526 |
| 366 | -0,09842 | -2,060783 | 11,69165 | 0,002767 | 0,002257 | 0,004098 | 1,638147 |
| 367 | -0,077718 | -1,118269 | 11,698202 | 0,002644 | 0,002299 | 0,003944 | 0,892864 |
| 368 | -0,174104 | -1,174743 | 12,379507 | 0,002692 | 0,002357 | 0,004099 | 0,910164 |
| 369 | -0,17473 | -1,994845 | 12,379561 | 0,002611 | 0,002337 | 0,004024 | 1,356011 |
| 370 | -0,497257 | -0,04436 | 10,460357 | 0,004214 | 0,002974 | 0,005716 | 0,328838 |
| 371 | -0,450054 | -0,301413 | 11,014751 | 0,00516 | 0,003049 | 0,006948 | 0,223017 |
| 372 | -0,372996 | 9,245999 | 10,514907 | 0,019444 | 0,009002 | 0,018979 | 1,538609 |
| 373 | -0,360722 | 8,553285 | 10,514028 | 0,009792 | 0,005839 | 0,010411 | 2,003263 |
| 374 | -0,453484 | -0,82716 | 11,705246 | 0,004057 | 0,002777 | 0,005479 | 0,840055 |
| 375 | -0,443207 | -1,105839 | 11,693256 | 0,004396 | 0,00306 | 0,005981 | 1,404078 |
| 376 | -0,429219 | -1,081345 | 11,775317 | 0,004937 | 0,003061 | 0,00659 | 0,993423 |
| 377 | -0,061467 | -1,102461 | 11,768607 | 0,002644 | 0,002303 | 0,003959 | 0,872385 |
| 378 | -0,081407 | -2,085005 | 11,767905 | 0,002643 | 0,002275 | 0,003976 | 1,208828 |
| 379 | -0,440102 | 5,535022 | 11,707048 | 0,004369 | 0,00283 | 0,005426 | 0,600305 |
| 380 | -0,449654 | 6,098245 | 11,72435 | 0,004419 | 0,002916 | 0,005442 | 0,736788 |
| 381 | -0,580957 | 8,547013 | 11,797189 | 0,003732 | 0,003168 | 0,005196 | 1,052159 |
| 382 | -0,429405 | 8,565463 | 11,810899 | 0,003881 | 0,003472 | 0,005279 | 0,973951 |
| 383 | -0,432744 | 8,557737 | 11,722856 | 0,003761 | 0,003595 | 0,005277 | 0,797479 |
| 384 | -0,473458 | 8,531366 | 11,64796 | 0,003672 | 0,003154 | 0,005124 | 0,662092 |
| 385 | -0,523753 | 8,582965 | 11,283721 | 0,00333 | 0,002882 | 0,004573 | 2,061334 |
| 386 | -0,444049 | 9,823365 | 11,638404 | 0,003463 | 0,003181 | 0,004669 | 1,701741 |
| 387 | -0,405061 | 9,788042 | 11,718717 | 0,004523 | 0,00438 | 0,006121 | 1,672945 |
| 388 | -0,390272 | 9,776955 | 11,780947 | 0,003882 | 0,003557 | 0,005217 | 1,281263 |
| 389 | -0,463434 | 9,852742 | 11,437747 | 0,00347 | 0,003189 | 0,00462 | 1,028616 |
| 390 | -0,505403 | 8,558148 | 11,458248 | 0,00292 | 0,002644 | 0,004201 | 2,027507 |
| 391 | -0,159855 | 9,846781 | 11,429113 | 0,002547 | 0,00269 | 0,003702 | 1,130925 |
| 392 | -0,149616 | 10,65843 | 11,42569 | 0,002765 | 0,003117 | 0,003894 | 1,286114 |
| 393 | -0,144832 | 9,832795 | 11,635185 | 0,002547 | 0,002686 | 0,00374 | 1,233495 |
| 394 | -0,100809 | 9,783288 | 11,726991 | 0,002536 | 0,002678 | 0,003755 | 1,527964 |
| 397 | -0,505427 | 7,069222 | 11,45314 | 0,003723 | 0,003009 | 0,004756 | 0,49751 |
| 398 | -0,506656 | 7,84749 | 11,459496 | 0,003673 | 0,002986 | 0,004622 | 1,051101 |
| 399 | -0,488481 | 7,823239 | 11,66211 | 0,003206 | 0,002864 | 0,004275 | 0,594124 |
| 400 | -0,498988 | 7,233921 | 11,66703 | 0,003231 | 0,002824 | 0,004307 | 0,533735 |
| 401 | -0,495418 | 7,077362 | 11,64466 | 0,004021 | 0,003111 | 0,005002 | 0,481723 |
| 402 | -0,603231 | 6,7818 | 11,809344 | 0,004376 | 0,003055 | 0,005293 | 1,121033 |
| 403 | -0,581983 | 6,154927 | 11,770998 | 0,004212 | 0,00279 | 0,00528 | 0,86233 |
| 404 | -0,551384 | 7,063818 | 11,690325 | 0,006773 | 0,004694 | 0,007881 | 0,408927 |
| 405 | -0,439841 | 7,812817 | 11,799627 | 0,003612 | 0,002977 | 0,004654 | 0,447744 |
| 406 | -0,437845 | 7,826591 | 11,714587 | 0,003608 | 0,002974 | 0,004634 | 0,530248 |
| 407 | -0,430025 | 7,39226 | 11,698021 | 0,004488 | 0,003115 | 0,005432 | 0,854726 |
| 408 | -0,429463 | 7,383959 | 11,777552 | 0,003663 | 0,002951 | 0,004696 | 1,131995 |
| 409 | -0,5223 | 7,87068 | 11,234548 | 0,003199 | 0,002848 | 0,004193 | 0,570388 |
| 410 | -0,513634 | 7,084694 | 11,211134 | 0,003225 | 0,002789 | 0,004226 | 0,522003 |
| 411 | -0,56486 | 8,272273 | 11,784608 | 0,003711 | 0,003032 | 0,004855 | 1,144607 |
| 412 | -0,606545 | 9,831557 | 9,828339 | 0,004107 | 0,002622 | 0,004317 | 1,690083 |
| 413 | -0,588256 | 9,84903 | 10,06593 | 0,003493 | 0,003197 | 0,004272 | 1,350076 |
| 414 | -0,58817 | 9,593971 | 10,062758 | 0,004122 | 0,003223 | 0,004617 | 0,926676 |
| 415 | -0,554898 | 9,611512 | 11,175563 | 0,005477 | 0,00373 | 0,006201 | 2,016023 |
| 416 | -0,605967 | 9,011494 | 10,071189 | 0,004175 | 0,002474 | 0,004542 | 1,236839 |
| 417 | -0,615968 | 8,988233 | 9,812638 | 0,004074 | 0,002469 | 0,004346 | 1,911192 |
| 418 | -0,499455 | 9,792421 | 11,220531 | 0,003933 | 0,003572 | 0,005067 | 0,927552 |
| 419 | -0,558624 | 9,797238 | 11,197378 | 0,003965 | 0,00358 | 0,005074 | 0,950847 |
| 420 | -0,656757 | 1,52004 | 11,166907 | 0,00327 | 0,002062 | 0,00425 | 1,02711 |
| 421 | -0,724273 | 1,770733 | 11,131592 | 0,004915 | 0,002602 | 0,006221 | 1,085972 |
| 423 | -0,656791 | -0,133073 | 11,727451 | 0,006096 | 0,00291 | 0,00789 | 0,643171 |
| 424 | -0,660154 | 0,653377 | 11,751952 | 0,003634 | 0,002251 | 0,004931 | 1,302467 |
| 425 | -0,608838 | 1,392733 | 11,775465 | 0,003377 | 0,002431 | 0,004598 | 0,7426 |
| 426 | -0,760735 | 4,024109 | 10,141808 | 0,002757 | 0,001994 | 0,003833 | 1,235539 |
| 427 | -0,707532 | 3,548738 | 10,066367 | 0,00167 | 0,001565 | 0,002746 | 2,599361 |
| 428 | -1,089526 | 4,638099 | 10,141759 | 0,001575 | 0,001686 | 0,002837 | 1,57011 |
| 430 | -1,610138 | 4,635509 | 10,118599 | 0,00172 | 0,001601 | 0,002927 | 1,461687 |
| 431 | -0,4067 | -0,839257 | 11,757994 | 0,004994 | 0,002707 | 0,00647 | 2,084071 |
| 432 | -0,651395 | 3,291824 | 10,746423 | 0,00419 | 0,002141 | 0,004895 | 1,174188 |
| 433 | -0,634321 | 6,272955 | 9,905132 | 0,002101 | 0,001914 | 0,003154 | 1,659551 |
| 434 | -0,620547 | 7,193572 | 9,250453 | 0,001835 | 0,001738 | 0,002651 | 2,46396 |
| 435 | 0,407366 | -0,508707 | 12,860591 | 0,0027 | 0,002378 | 0,004292 | 0,925175 |
| 436 | 0,240544 | -0,497477 | 12,853048 | 0,003769 | 0,002804 | 0,005662 | 0,826896 |
| 437 | 0,021826 | -0,511855 | 12,851336 | 0,003517 | 0,002426 | 0,005273 | 1,683728 |
| 438 | -0,007654 | 2,159092 | 12,85173 | 0,003092 | 0,002521 | 0,004574 | 0,745801 |
| 439 | 0,434673 | -1,82851 | 12,848798 | 0,002479 | 0,002334 | 0,00407 | 1,259685 |
| 440 | 0,43758 | -2,561062 | 12,87115 | 0,002447 | 0,00235 | 0,004136 | 1,225667 |
| 441 | 0,445268 | -2,490576 | 12,866459 | 0,002594 | 0,002305 | 0,004256 | 1,380162 |
| 442 | -0,114651 | 2,161135 | 12,639586 | 0,003119 | 0,002511 | 0,004544 | 0,531323 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 443 | -0,113537 | -0,52706 | 12,632012 | 0,003138 | 0,002369 | 0,004642 | 1,426052 |
| 444 | 0,316427 | -0,651597 | 12,648451 | 0,00271 | 0,002364 | 0,004251 | 0,806925 |
| 445 | -0,087249 | -0,648491 | 12,620586 | 0,003691 | 0,002836 | 0,005415 | 1,820744 |
| 446 | 0,357339 | -1,585793 | 12,613467 | 0,002705 | 0,002328 | 0,00428 | 1,540686 |
| 447 | -0,011801 | 2,207948 | 12,846664 | 0,003683 | 0,002534 | 0,00521 | 0,755566 |
| 448 | -0,115709 | 2,19389 | 12,636467 | 0,003716 | 0,00252 | 0,005173 | 0,674616 |
| 449 | -0,019728 | 3,806819 | 12,812094 | 0,004108 | 0,002663 | 0,005599 | 1,148504 |
| 450 | -0,111342 | 3,945833 | 12,603181 | 0,004157 | 0,002666 | 0,005568 | 1,004947 |
| 451 | -0,06385 | 3,942076 | 12,779057 | 0,00366 | 0,002647 | 0,005111 | 0,592316 |
| 452 | -0,004455 | 4,001752 | 12,808598 | 0,00364 | 0,002651 | 0,005107 | 1,057025 |
| 453 | 0,004996 | 5,987856 | 12,863239 | 0,003262 | 0,002766 | 0,004669 | 1,112408 |
| 454 | -0,120483 | 5,998194 | 12,656524 | 0,003293 | 0,002761 | 0,004644 | 1,118416 |
| 455 | -0,442627 | 2,161152 | 12,626915 | 0,004069 | 0,002521 | 0,005534 | 1,081261 |
| 456 | -0,405214 | -0,336877 | 12,607466 | 0,004421 | 0,002611 | 0,005992 | 1,263795 |
| 457 | -0,636541 | 2,15346 | 12,432428 | 0,004504 | 0,002476 | 0,005906 | 3,113782 |
| 458 | -0,441502 | 2,192996 | 12,624959 | 0,003671 | 0,002534 | 0,005116 | 0,901349 |
| 459 | -0,64071 | 2,19592 | 12,437644 | 0,004001 | 0,002516 | 0,005396 | 2,252755 |
| 460 | -0,410944 | 3,950932 | 12,541164 | 0,003969 | 0,002637 | 0,005367 | 1,635081 |
| 461 | 0,033623 | 9,087113 | 12,877957 | 0,003408 | 0,003217 | 0,005001 | 1,244356 |
| 462 | -0,099723 | 9,249732 | 12,670927 | 0,003073 | 0,002967 | 0,004331 | 1,350536 |
| 463 | 0,339972 | -2,638145 | 12,877285 | 0,002388 | 0,002328 | 0,004018 | 1,839041 |
| 464 | -0,589763 | -2,648991 | 12,916682 | 0,003098 | 0,002394 | 0,004736 | 1,696701 |
| 465 | -0,366537 | 5,990613 | 12,540315 | 0,003962 | 0,002819 | 0,005276 | 3,80702 |
| 466 | -0,335639 | 9,55474 | 12,906724 | 0,004014 | 0,003298 | 0,005668 | 1,185265 |
| 467 | -0,57122 | 9,611725 | 12,255986 | 0,004787 | 0,003189 | 0,005938 | 1,81836 |
| 468 | -0,557658 | 9,634082 | 12,163629 | 0,00578 | 0,003746 | 0,006939 | 1,217645 |
| 469 | -0,56264 | 9,845705 | 12,276038 | 0,005808 | 0,00382 | 0,00697 | 0,510676 |
| 470 | -0,556547 | 9,846013 | 12,391402 | 0,005804 | 0,003816 | 0,007015 | 0,667948 |
| 471 | -0,560472 | 9,614156 | 12,387107 | 0,005783 | 0,003733 | 0,007034 | 0,728339 |
| 472 | 0,003463 | 8,346412 | 13,204596 | 0,003172 | 0,002931 | 0,004594 | 0,927094 |
| 473 | 0,344733 | 10,494203 | 12,667845 | 0,002481 | 0,002737 | 0,003902 | 1,420686 |
| 474 | 0,342925 | 11,038087 | 12,687729 | 0,002412 | 0,002976 | 0,003758 | 1,420498 |
| 475 | 0,376749 | 10,410449 | 12,723918 | 0,002448 | 0,002727 | 0,003853 | 1,432388 |
| 476 | -0,020475 | 10,090546 | 12,483848 | 0,002565 | 0,002707 | 0,003938 | 1,24529 |
| 477 | -0,002404 | 10,799877 | 12,47999 | 0,002503 | 0,002717 | 0,003855 | 1,385835 |
| 478 | 0,227928 | 11,130213 | 12,682792 | 0,002344 | 0,002803 | 0,003692 | 1,994478 |
| 479 | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a |
| 480 | 0,009445 | 10,476849 | 12,620397 | 0,009996 | 0,009574 | 0,013447 | 0,299107 |
| 481 | 0,027495 | 10,710684 | 12,605408 | 0,010164 | 0,009875 | 0,013597 | 0,253956 |
| 482 | 0,273692 | 10,662842 | 12,574036 | 0,002513 | 0,002777 | 0,003951 | 1,673641 |
| 483 | 0,295788 | 10,805161 | 12,548289 | 0,00253 | 0,002767 | 0,003926 | 1,778543 |
| 484 | -0,154057 | 9,956613 | 12,391093 | 0,002566 | 0,002698 | 0,003881 | 1,487013 |
| 485 | -0,135336 | 10,6666 | 12,386813 | 0,002412 | 0,002718 | 0,003656 | 1,675465 |
| 486 | 0,019876 | -0,271434 | 12,993726 | 0,004023 | 0,00249 | 0,006083 | 0,9348 |
| 487 | -0,021326 | 2,166492 | 13,8023 | 0,003709 | 0,002732 | 0,005649 | 0,732716 |
| 488 | -0,070948 | 4,38227 | 14,484124 | 0,005644 | 0,002849 | 0,007976 | 0,984271 |
| 489 | -0,012345 | 6,0521 | 13,978051 | 0,00387 | 0,003188 | 0,005689 | 0,874546 |
| 490 | -0,041806 | 7,643327 | 13,450991 | 0,00325 | 0,0029 | 0,004702 | 0,888174 |
| 493 | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a |
| 494 | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a |
| 495 | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a |
| 496 | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a |
| 497 | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a |
| 498 | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a |
| 500 | -0,045827 | -1,053165 | 12,460556 | 0,00267 | 0,002358 | 0,004112 | 1,209042 |
| 501 | -0,051463 | -2,101255 | 12,454408 | 0,002665 | 0,002323 | 0,004133 | 1,267322 |
| 502 | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a |
| 503 | -3,704511 | 0,135578 | 7,419116 | 0,001691 | 0,001815 | 0,002481 | 1,35392 |
| 504 | -3,708809 | -0,035759 | 6,90275 | 0,001786 | 0,002159 | 0,002721 | 1,309041 |
| 505 | -4,401406 | 0,127053 | 7,425867 | 0,001977 | 0,002112 | 0,00284 | 1,195408 |
| 506 | -4,402501 | -0,03043 | 6,90518 | 0,001687 | 0,002407 | 0,003105 | 1,482598 |
| 507 | -4,663491 | 0,124547 | 7,428104 | 0,00115 | 0,001405 | 0,002236 | 1,958421 |
| 508 | -3,338939 | -0,0344 | 6,901664 | 0,001905 | 0,002177 | 0,002888 | 1,362541 |
| 509 | -3,341959 | -0,140815 | 6,355297 | 0,002605 | 0,002501 | 0,002881 | 1,257131 |
| 510 | -2,629991 | 4,056804 | 10,114379 | 0,001467 | 0,001664 | 0,002957 | 1,757459 |
| 511 | -2,621107 | 4,607587 | 10,096666 | 0,00166 | 0,00188 | 0,003188 | 1,745313 |
| 512 | -0,647365 | 8,634909 | 6,956285 | 0,00173 | 0,0018 | 0,00235 | 1,600579 |
| 515 | -0,683752 | -0,349252 | 6,368216 | 0,002321 | 0,001766 | 0,002584 | 0,847208 |
| 516 | -0,676837 | -0,243577 | 6,940959 | 0,002046 | 0,001802 | 0,002421 | 1,36077 |
| 518 | -0,672517 | -0,060823 | 7,48671 | 0,002186 | 0,001839 | 0,00262 | 1,23242 |
| 519 | -0,675262 | 0,192151 | 8,01968 | 0,002509 | 0,001819 | 0,002957 | 0,87285 |
| 520 | -0,664512 | 0,513382 | 8,514883 | 0,002793 | 0,001958 | 0,003319 | 0,488508 |
| 521 | -0,653915 | 0,893479 | 8,96006 | 0,002828 | 0,001936 | 0,003449 | 0,864549 |
| 522 | -0,655261 | 1,305617 | 9,347461 | 0,00295 | 0,001987 | 0,003599 | 0,768716 |
| 523 | -0,65654 | 1,779479 | 9,683244 | 0,003166 | 0,002 | 0,003852 | 0,731204 |
| 524 | -0,654635 | 2,298561 | 9,958605 | 0,003439 | 0,001947 | 0,004133 | 0,979917 |
| 525 | -0,64684 | 2,843203 | 10,166163 | 0,003253 | 0,001909 | 0,004 | 0,889772 |
| 526 | -0,678151 | 3,367796 | 10,319784 | 0,003148 | 0,001873 | 0,003903 | 2,601266 |
| 527 | -0,507081 | 5,452938 | 11,407317 | 0,003484 | 0,003332 | 0,004534 | 0,64767 |
| 529 | -0,670817 | -0,598107 | 6,397705 | 0,002365 | 0,001784 | 0,002572 | 1,075967 |
| 530 | -0,66087 | -0,484012 | 6,996181 | 0,002046 | 0,00182 | 0,002428 | 1,56638 |
| 531 | -0,666633 | -0,295728 | 7,588813 | 0,002318 | 0,001875 | 0,002757 | 0,911118 |
| 532 | -0,666313 | -0,032284 | 8,145187 | 0,002513 | 0,001843 | 0,002983 | 1,018182 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 533 | -0,660493 | 0,306372 | 8,667678 | 0,002551 | 0,001839 | 0,003113 | 1,178957 |
| 534 | -0,647357 | 0,712784 | 9,138377 | 0,003298 | 0,002006 | 0,003853 | 1,468208 |
| 535 | -0,651361 | 1,150564 | 9,548285 | 0,002956 | 0,002009 | 0,003646 | 0,894609 |
| 536 | -0,648667 | 1,643459 | 9,898901 | 0,003176 | 0,002024 | 0,003909 | 0,731938 |
| 537 | -0,651339 | 2,201957 | 10,190876 | 0,003233 | 0,001958 | 0,003998 | 0,758743 |
| 538 | -0,652653 | 2,771478 | 10,411609 | 0,003036 | 0,001997 | 0,003875 | 0,801149 |
| 539 | -0,648176 | 3,317805 | 10,548543 | 0,003512 | 0,001892 | 0,004314 | 1,318023 |
| 540 | -0,617714 | 4,767618 | 10,372205 | 0,003393 | 0,002219 | 0,004121 | 0,782595 |
| 541 | -0,621981 | 5,016097 | 10,346681 | 0,005619 | 0,002298 | 0,005749 | 0,459702 |
| 542 | -0,605929 | 4,78319 | 10,607499 | 0,004632 | 0,002595 | 0,005392 | 0,361978 |
| 543 | -0,60739 | 5,1498 | 10,569526 | 0,004652 | 0,002181 | 0,005116 | 0,375754 |
| 544 | -0,61216 | 5,218911 | 10,31613 | 0,003145 | 0,002247 | 0,003855 | 0,823612 |
| 545 | -0,610736 | 5,768529 | 10,181866 | 0,003552 | 0,002259 | 0,00416 | 0,436036 |
| 546 | -0,606107 | 5,266815 | 10,552809 | 0,003359 | 0,002598 | 0,004287 | 0,32398 |
| 547 | -0,5969 | 5,83346 | 10,418961 | 0,00337 | 0,002259 | 0,004083 | 0,291432 |
| 548 | -0,611875 | 6,297866 | 9,98873 | 0,003715 | 0,002257 | 0,004242 | 0,957579 |
| 549 | -0,604934 | 6,396212 | 10,224109 | 0,003347 | 0,002272 | 0,004012 | 1,011653 |
| 550 | -0,610895 | 6,432968 | 10,240473 | 0,006021 | 0,002253 | 0,006124 | 0,515792 |
| 552 | -0,618942 | 6,334261 | 10,007132 | 0,004979 | 0,00219 | 0,005166 | 0,72027 |
| 553 | -0,612601 | 6,828004 | 9,730094 | 0,003919 | 0,002031 | 0,004378 | 0,600186 |
| 554 | -0,60581 | 6,959425 | 9,943253 | 0,003934 | 0,002064 | 0,004439 | 0,65063 |
| 555 | -0,605309 | 7,302588 | 9,389773 | 0,002789 | 0,00184 | 0,003346 | 1,854311 |
| 556 | -0,600915 | 7,460088 | 9,586334 | 0,002943 | 0,00186 | 0,003534 | 1,642067 |
| 557 | -0,608956 | 7,74187 | 8,996704 | 0,00283 | 0,001886 | 0,003319 | 1,116496 |
| 558 | -0,617368 | 7,928022 | 9,179305 | 0,003267 | 0,001915 | 0,003683 | 1,386376 |
| 559 | -0,624284 | 8,124782 | 8,557451 | 0,003071 | 0,001938 | 0,003375 | 0,980165 |
| 560 | -0,619624 | 8,329687 | 8,710265 | 0,003193 | 0,001956 | 0,003488 | 1,588764 |
| 561 | -0,626881 | 8,458437 | 8,056051 | 0,003226 | 0,002036 | 0,00339 | 0,852235 |
| 562 | -0,622653 | 8,675549 | 8,180261 | 0,003358 | 0,002061 | 0,0035 | 1,155865 |
| 563 | -0,630179 | 8,717088 | 7,524717 | 0,00262 | 0,001982 | 0,002911 | 1,699689 |
| 564 | -0,673325 | 8,646962 | 6,875556 | 0,002491 | 0,002244 | 0,003074 | 1,878356 |
| 565 | -0,61893 | 9,52413 | 5,572572 | 0,002005 | 0,001982 | 0,002422 | 1,315325 |
| 566 | -0,566138 | 9,562133 | 5,623372 | 0,002072 | 0,002239 | 0,002752 | 1,471798 |
| 567 | -0,548259 | 8,698398 | 5,624854 | 0,001211 | 0,001446 | 0,001947 | 1,795002 |
| 568 | -0,610383 | 8,74673 | 5,585831 | 0,001204 | 0,00142 | 0,001954 | 1,724373 |
| 570 | -1,359667 | 8,735446 | 5,514525 | 0,001503 | 0,00159 | 0,002116 | 1,449596 |
| 571 | -1,388044 | 8,731341 | 5,590959 | 0,001409 | 0,001575 | 0,002366 | 1,447103 |
| 572 | -1,397568 | 8,676577 | 5,630209 | 0,00146 | 0,001801 | 0,00238 | 1,604897 |
| 573 | -0,491526 | 9,605546 | 5,76782 | 0,002068 | 0,002234 | 0,002764 | 2,713754 |
| 574 | -0,486687 | 8,651559 | 5,793137 | 0,001397 | 0,001879 | 0,002164 | 2,085946 |
| 575 | -1,449225 | 8,610676 | 5,793328 | 0,001673 | 0,002687 | 0,002806 | 2,656324 |
| 576 | -0,523658 | 8,677254 | 5,72464 | 0,001346 | 0,001537 | 0,00208 | 2,818684 |
| 577 | -1,444991 | 8,651688 | 5,739146 | 0,001504 | 0,001898 | 0,002447 | 1,42776 |
| 578 | -0,548884 | 9,597977 | 5,72081 | 0,002312 | 0,002209 | 0,002966 | 2,628888 |
| 579 | -0,635934 | 8,948154 | 7,617132 | 0,003329 | 0,002097 | 0,003364 | 1,974572 |
| 580 | -0,648707 | 8,891604 | 6,974095 | 0,003359 | 0,002261 | 0,003662 | 0,905514 |
| 581 | -0,660549 | 9,1483 | 7,044177 | 0,003392 | 0,002282 | 0,003686 | 0,955033 |
| 582 | -0,652459 | 8,668658 | 6,918695 | 0,002191 | 0,002243 | 0,00289 | 1,391849 |
| 583 | -0,675203 | 8,749696 | 6,406934 | 0,002409 | 0,002177 | 0,003026 | 1,364545 |
| 584 | -0,667892 | 8,78117 | 6,38553 | 0,002317 | 0,00216 | 0,002943 | 1,683508 |
| 585 | -0,673247 | 8,750628 | 6,305827 | 0,002342 | 0,002151 | 0,002959 | 1,181179 |
| 586 | -0,65187 | 9,00529 | 6,398723 | 0,003306 | 0,002264 | 0,003597 | 0,928026 |
| 587 | -0,652388 | 9,258957 | 6,431906 | 0,003692 | 0,002209 | 0,003795 | 1,081514 |
| 588 | -0,633582 | 9,71208 | 8,77963 | 0,00372 | 0,002896 | 0,004232 | 1,682986 |
| 589 | -0,612869 | 9,865439 | 8,860652 | 0,003126 | 0,002929 | 0,003881 | 1,312823 |
| 590 | -0,600846 | 9,870251 | 8,474031 | 0,003018 | 0,002935 | 0,003715 | 4,751606 |
| 591 | -0,61244 | 5,305287 | 10,73382 | 0,003745 | 0,002652 | 0,004648 | 0,27727 |
| 592 | -0,636665 | 4,709047 | 10,802272 | 0,00481 | 0,002621 | 0,005726 | 0,614722 |
| 593 | -0,588407 | 5,886246 | 10,5869 | 0,003992 | 0,002706 | 0,004937 | 1,073378 |
| 594 | -0,578529 | 6,496308 | 10,381834 | 0,005609 | 0,002763 | 0,006208 | 0,935497 |
| 595 | -0,583126 | 6,452149 | 10,36532 | 0,003962 | 0,002752 | 0,00484 | 1,209307 |
| 596 | -0,577192 | 7,05198 | 10,09206 | 0,004039 | 0,002084 | 0,004624 | 1,224501 |
| 597 | -0,582688 | 7,570307 | 9,719244 | 0,004385 | 0,002683 | 0,005028 | 1,243871 |
| 598 | -0,599324 | 8,046729 | 9,286222 | 0,003277 | 0,001932 | 0,003708 | 1,349939 |
| 599 | -0,60182 | 8,464121 | 8,810935 | 0,003203 | 0,001976 | 0,003509 | 1,260296 |
| 600 | -0,610666 | 8,815382 | 8,266263 | 0,003235 | 0,002015 | 0,003443 | 2,179271 |
| 601 | -0,598882 | 9,121013 | 7,672949 | 0,003531 | 0,002318 | 0,003758 | 2,859185 |
| 602 | -0,626013 | 9,307676 | 7,083943 | 0,003927 | 0,002221 | 0,003995 | 1,233712 |
| 603 | -0,624369 | 9,442083 | 6,444762 | 0,003856 | 0,002222 | 0,003912 | 1,166172 |
| 604 | -0,436856 | 9,224346 | 12,555826 | 0,00334 | 0,00339 | 0,004852 | 2,222508 |
| 605 | 0,001287 | 9,237591 | 12,889237 | 0,003476 | 0,003492 | 0,004843 | 0,425995 |
| 606 | -1,274977 | 8,750226 | 5,230122 | 0,001294 | 0,001635 | 0,00192 | 1,412319 |
| 607 | -1,738582 | 8,746561 | 5,23384 | 0,00168 | 0,001946 | 0,002207 | 1,511946 |
| 608 | -0,635006 | 8,752792 | 5,229486 | 0,001324 | 0,001467 | 0,001837 | 1,460521 |
| 609 | -1,941358 | 8,591963 | 1,661542 | 0,001374 | 0,001455 | 0,001991 | 1,617464 |
| 610 | -3,275096 | 8,503791 | 1,678937 | 0,001354 | 0,001355 | 0,002047 | 1,384176 |
| 611 | -0,745771 | 8,620616 | 1,210822 | 0,001298 | 0,001661 | 0,00194 | 1,23843 |
| 612 | -0,737894 | 8,487291 | 1,393144 | 0,001319 | 0,001637 | 0,001921 | 2,203256 |
| 613 | 0,079782 | 8,669435 | 1,194753 | 0,001149 | 0,001154 | 0,001752 | 1,468323 |
| 614 | 0,215704 | 8,57411 | 1,379745 | 0,001169 | 0,001191 | 0,001738 | 4,441911 |
| 615 | 0,059746 | 8,676589 | 1,035347 | 0,001161 | 0,001172 | 0,001791 | 2,345797 |
| 616 | -3,113654 | 8,442725 | 1,244897 | 0,001352 | 0,001332 | 0,002067 | 1,937286 |
| 617 | -3,11939 | 8,446837 | 1,083241 | 0,001321 | 0,001326 | 0,002061 | 1,622983 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 618 | -3,068933 | 8,317313 | 1,430516 | 0,001375 | 0,001297 | 0,002055 | 1,845104 |
| 619 | -0,63973 | 8,742436 | 4,686474 | 0,001375 | 0,001494 | 0,001852 | 1,110325 |
| 620 | -0,984184 | 8,729864 | 4,619634 | 0,001471 | 0,0021 | 0,00233 | 0,922002 |
| 621 | -0,621826 | 8,883521 | 4,617667 | 0,001656 | 0,00175 | 0,002058 | 2,086391 |
| 622 | -0,916347 | 8,732144 | 4,345868 | 0,00149 | 0,001624 | 0,001956 | 1,214337 |
| 623 | -1,182023 | 8,717746 | 4,356889 | 0,001516 | 0,001704 | 0,002022 | 1,090163 |
| 624 | -1,180973 | 8,721623 | 4,630094 | 0,001506 | 0,001706 | 0,002039 | 1,143016 |
| 625 | -1,196751 | 8,710834 | 4,049777 | 0,001523 | 0,001699 | 0,002005 | 1,62621 |
| 626 | -1,300749 | 8,706026 | 3,470584 | 0,002202 | 0,003216 | 0,002674 | 1,408445 |
| 627 | -1,21806 | 8,704736 | 3,465874 | 0,002414 | 0,003679 | 0,002885 | 1,223534 |
| 628 | -1,187225 | 8,702061 | 3,518726 | 0,002285 | 0,003324 | 0,002822 | 0,643272 |
| 629 | -1,293686 | 8,742118 | 3,848131 | 0,002189 | 0,002392 | 0,002425 | 1,761591 |
| 630 | -1,360853 | 8,756317 | 3,86149 | 0,002318 | 0,003499 | 0,002919 | 1,136013 |
| 631 | -1,80392 | 8,714694 | 4,631446 | 0,001439 | 0,001596 | 0,002019 | 1,769751 |
| 632 | -1,815884 | 8,694569 | 4,055751 | 0,00146 | 0,001579 | 0,001997 | 1,051996 |
| 633 | -0,837749 | 8,738431 | 4,045139 | 0,001523 | 0,001756 | 0,002004 | 1,923578 |
| 634 | -0,653458 | 8,760708 | 4,041552 | 0,001389 | 0,001546 | 0,001856 | 1,654479 |
| 635 | -1,485463 | 8,758411 | 5,800925 | 0,001657 | 0,002676 | 0,002729 | 1,036964 |
| 636 | -0,613643 | 8,702712 | 2,853252 | 0,001352 | 0,001529 | 0,001827 | 1,258023 |
| 637 | -0,911283 | 8,683008 | 2,851353 | 0,001506 | 0,001738 | 0,001956 | 1,403106 |
| 638 | -1,184288 | 8,679127 | 2,862384 | 0,001509 | 0,00207 | 0,002186 | 1,161957 |
| 639 | -1,177226 | 8,699641 | 3,459614 | 0,001557 | 0,001707 | 0,002026 | 1,00818 |
| 640 | -0,627576 | 8,721877 | 3,453097 | 0,001374 | 0,001528 | 0,00183 | 1,230107 |
| 641 | -1,295707 | 8,793971 | 4,046119 | 0,002249 | 0,002342 | 0,002499 | 0,833782 |
| 642 | -1,574299 | 8,69934 | 4,05595 | 0,001517 | 0,001656 | 0,002019 | 1,601504 |
| 643 | -1,761631 | 8,678888 | 2,879911 | 0,00155 | 0,001644 | 0,002031 | 1,613618 |
| 644 | -1,728122 | 8,694514 | 3,47375 | 0,001521 | 0,001635 | 0,002011 | 1,44525 |
| 646 | -3,246836 | 8,533407 | 2,278739 | 0,001372 | 0,001371 | 0,002024 | 1,332402 |
| 647 | -2,591125 | 8,582631 | 2,272927 | 0,001469 | 0,001491 | 0,002057 | 1,844891 |
| 648 | -2,741185 | 8,566555 | 2,279187 | 0,001464 | 0,001488 | 0,002071 | 1,917374 |
| 649 | -2,595534 | 8,630279 | 2,884607 | 0,002411 | 0,002912 | 0,00267 | 0,547995 |
| 650 | -2,69703 | 8,601266 | 2,882395 | 0,002292 | 0,002211 | 0,002464 | 0,818224 |
| 651 | -3,131038 | 8,564644 | 2,283868 | 0,001416 | 0,001381 | 0,00204 | 1,044801 |
| 652 | -3,088845 | 8,589212 | 2,885494 | 0,002666 | 0,002304 | 0,002649 | 1,073272 |
| 653 | -3,545095 | 8,622985 | 2,905915 | 0,002357 | 0,002158 | 0,002561 | 1,70725 |
| 654 | -3,493195 | 8,64455 | 3,47905 | 0,001343 | 0,001455 | 0,002035 | 1,118318 |
| 655 | -1,856242 | 8,672191 | 2,879477 | 0,002478 | 0,00242 | 0,002485 | 1,014474 |
| 659 | -1,877397 | 8,677849 | 3,467104 | 0,001557 | 0,00163 | 0,002046 | 1,250806 |
| 660 | -2,615127 | 8,681183 | 4,057183 | 0,001457 | 0,001558 | 0,002071 | 1,433725 |
| 661 | -2,680902 | 8,687492 | 4,059871 | 0,001455 | 0,001869 | 0,002365 | 1,024462 |
| 662 | -2,254781 | 8,65845 | 3,459568 | 0,001528 | 0,00158 | 0,002049 | 2,288313 |
| 663 | -2,61889 | 8,669514 | 3,468398 | 0,002385 | 0,002252 | 0,002533 | 1,732743 |
| 664 | -3,902394 | 8,530085 | 2,292674 | 0,001507 | 0,00149 | 0,002254 | 1,094572 |
| 665 | -3,913966 | 8,52628 | 1,687495 | 0,001545 | 0,001468 | 0,002258 | 1,623263 |
| 667 | -1,315439 | 8,662102 | 2,246576 | 0,001555 | 0,001755 | 0,002045 | 2,078042 |
| 669 | -0,8673 | 8,683013 | 2,237385 | 0,0021 | 0,002847 | 0,003103 | 0,843424 |
| 670 | -1,393366 | 8,661113 | 2,248219 | 0,001504 | 0,001704 | 0,002024 | 1,799461 |
| 671 | -0,859042 | 8,671102 | 1,651954 | 0,001763 | 0,001745 | 0,002331 | 0,86672 |
| 672 | -1,33401 | 8,643648 | 1,659099 | 0,001383 | 0,001617 | 0,001978 | 0,978963 |
| 673 | -0,607261 | 8,673865 | 1,643423 | 0,001489 | 0,001628 | 0,002105 | 2,386936 |
| 674 | -0,611603 | 8,682772 | 2,267082 | 0,001164 | 0,001185 | 0,001682 | 2,084546 |
| 675 | -0,626975 | 8,674624 | 2,21938 | 0,001373 | 0,001165 | 0,00184 | 1,629029 |
| 676 | -4,653842 | 8,492298 | 2,310014 | 0,00101 | 0,001121 | 0,001818 | 2,332266 |
| 677 | -4,655318 | 8,5217 | 2,898963 | 0,000975 | 0,001135 | 0,001815 | 1,936764 |
| 678 | -4,064033 | 8,644376 | 3,482086 | 0,001236 | 0,001431 | 0,002027 | 0,92141 |
| 679 | -4,230907 | 8,652346 | 3,481503 | 0,001313 | 0,001652 | 0,002343 | 1,724897 |
| 680 | -4,202734 | 8,664349 | 4,066654 | 0,002432 | 0,002179 | 0,00291 | 1,266839 |
| 681 | -3,454447 | 8,676036 | 4,068594 | 0,001271 | 0,001456 | 0,002007 | 1,306823 |
| 682 | -4,6358 | 8,667943 | 4,084745 | 0,001351 | 0,001397 | 0,002243 | 1,630172 |
| 683 | -4,65779 | 8,673561 | 4,055468 | 0,001313 | 0,001731 | 0,002684 | 1,310141 |
| 684 | -4,662796 | 8,653706 | 3,49008 | 0,000928 | 0,001154 | 0,001827 | 1,185778 |
| 685 | -3,444622 | 8,693569 | 4,66295 | 0,002183 | 0,00195 | 0,002504 | 1,290607 |
| 686 | -4,619539 | 8,677794 | 4,661156 | 0,001286 | 0,001379 | 0,00224 | 1,410263 |
| 687 | -4,664425 | 8,625341 | 2,916121 | 0,001 | 0,001145 | 0,001856 | 1,976399 |
| 688 | -4,133411 | 8,73357 | 4,686939 | 0,002706 | 0,00246 | 0,003111 | 1,93287 |
| 689 | -4,182976 | 8,726402 | 5,248188 | 0,002749 | 0,002846 | 0,003299 | 1,072189 |
| 691 | -3,798059 | 8,720325 | 5,262951 | 0,002247 | 0,002402 | 0,002897 | 1,588835 |
| 693 | -2,481739 | 8,705947 | 4,649232 | 0,002292 | 0,002136 | 0,002605 | 1,427753 |
| 694 | -2,429228 | 8,724918 | 5,232578 | 0,002176 | 0,002015 | 0,002587 | 3,603283 |
| 695 | -4,363027 | 8,676161 | 4,676286 | 0,00297 | 0,002458 | 0,003214 | 1,214648 |
| 696 | -4,370476 | 8,677656 | 4,753846 | 0,003088 | 0,002576 | 0,003417 | 0,827231 |
| 697 | -4,492006 | 8,712852 | 5,041205 | 0,002825 | 0,004011 | 0,003885 | 0,908356 |
| 698 | -4,635173 | 8,708948 | 4,68862 | 0,00133 | 0,001378 | 0,002325 | 1,972922 |
| 699 | -4,639151 | 8,717031 | 5,240636 | 0,001247 | 0,001363 | 0,002264 | 1,729467 |
| 700 | -4,050802 | 8,667191 | 4,07093 | 0,002534 | 0,002107 | 0,002697 | 1,205166 |
| 701 | -3,993711 | 8,722921 | 4,749005 | 0,002456 | 0,002041 | 0,002762 | 1,293727 |
| 702 | -4,359524 | 8,502627 | 2,295447 | 0,00146 | 0,001487 | 0,002238 | 1,081236 |
| 703 | -4,456208 | 8,520065 | 1,698893 | 0,001412 | 0,001334 | 0,002124 | 1,745787 |
| 704 | -4,504878 | 8,506757 | 1,764046 | 0,001429 | 0,001366 | 0,002149 | 1,68604 |
| 705 | -4,443169 | 8,506923 | 2,121234 | 0,001409 | 0,001336 | 0,002141 | 1,534525 |
| 706 | -3,836235 | 8,661223 | 5,66016 | 0,001882 | 0,001458 | 0,002459 | 1,749873 |
| 707 | -3,871618 | 8,693103 | 5,605423 | 0,001865 | 0,001322 | 0,002484 | 1,229143 |
| 708 | -3,888341 | 8,708617 | 5,534873 | 0,001775 | 0,001284 | 0,002362 | 1,438961 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 709 | -4,63983 | 8,719999 | 5,539113 | 0,000901 | 0,001138 | 0,001775 | 1,582817 |
| 710 | -4,65422 | 8,706994 | 5,600409 | 0,000974 | 0,001203 | 0,002015 | 2,08766 |
| 711 | -4,644062 | 9,449896 | 5,519813 | 0,001878 | 0,002644 | 0,003234 | 1,758011 |
| 712 | -4,66123 | 9,461134 | 5,591582 | 0,001745 | 0,002654 | 0,003091 | 1,324128 |
| 713 | -4,716621 | 9,52716 | 5,64172 | 0,002182 | 0,003478 | 0,003609 | 1,2663 |
| 714 | -4,747974 | 8,599884 | 5,748833 | 0,001003 | 0,001376 | 0,002029 | 3,149873 |
| 715 | -3,794564 | 8,623143 | 5,751934 | 0,001807 | 0,00134 | 0,002407 | 2,707009 |
| 716 | -4,79058 | 8,581697 | 5,804124 | 0,001166 | 0,001316 | 0,002085 | 2,116358 |
| 717 | -3,756075 | 8,573513 | 5,81848 | 0,002255 | 0,001946 | 0,002727 | 1,453701 |
| 718 | -4,753022 | 9,571718 | 5,734977 | 0,002151 | 0,003272 | 0,003519 | 1,35737 |
| 719 | -4,793259 | 9,632888 | 5,804304 | 0,002567 | 0,003322 | 0,004207 | 1,353745 |
| 720 | -4,139403 | 8,610827 | 2,908241 | 0,002428 | 0,002281 | 0,002911 | 1,325205 |
| 721 | -4,129565 | 8,680283 | 3,444565 | 0,001605 | 0,002596 | 0,003306 | 1,575613 |
| 722 | -4,113855 | 8,626555 | 3,000047 | 0,001441 | 0,00161 | 0,002342 | 1,758696 |
| 723 | -3,751021 | 8,722898 | 5,808792 | 0,004166 | 0,002491 | 0,00385 | 1,775016 |
| 725 | -4,90439 | -0,97245 | 5,800307 | 0,001987 | 0,002696 | 0,004036 | 1,213745 |
| 726 | -4,897399 | -0,970026 | 5,758734 | 0,002021 | 0,002712 | 0,004161 | 0,980464 |
| 727 | -4,76253 | -0,833297 | 5,518424 | 0,001566 | 0,002677 | 0,00332 | 1,007069 |
| 728 | -4,766699 | -0,834662 | 5,596256 | 0,00138 | 0,002688 | 0,003127 | 0,772153 |
| 729 | -4,822361 | -0,897126 | 5,635624 | 0,001774 | 0,002658 | 0,003197 | 1,158753 |
| 730 | -4,882869 | -0,951458 | 5,73908 | 0,00176 | 0,002932 | 0,003328 | 1,154613 |
| 731 | -0,083997 | 4,355439 | 14,325713 | 0,005273 | 0,002788 | 0,00727 | 0,69684 |
| 732 | -0,084001 | 4,379239 | 14,31396 | 0,004546 | 0,002819 | 0,006457 | 1,208494 |
| 733 | -0,106593 | 2,226575 | 13,622873 | 0,004887 | 0,002776 | 0,007011 | 0,880976 |
| 734 | -0,110056 | 6,000647 | 13,784089 | 0,003901 | 0,003174 | 0,00566 | 0,860227 |
| 735 | -0,115353 | 7,501599 | 13,287632 | 0,004087 | 0,003215 | 0,005661 | 1,709995 |
| 741 | -0,435404 | -1,074005 | 12,456598 | 0,004432 | 0,003163 | 0,006247 | 1,836267 |
| 742 | -0,499145 | -0,583549 | 12,525167 | 0,006022 | 0,00313 | 0,008304 | 1,63447 |
| 743 | -0,539916 | -0,706734 | 11,185748 | 0,005368 | 0,002937 | 0,006437 | 0,781726 |
| 744 | -0,545098 | -0,658681 | 11,184555 | 0,005373 | 0,002924 | 0,006436 | 0,613599 |
| 745 | -0,220389 | 10,372137 | 14,611618 | 0,003216 | 0,003064 | 0,00477 | 0,912485 |
| 746 | -0,228878 | 10,364436 | 14,058047 | 0,00311 | 0,003057 | 0,00455 | 0,843349 |
| 747 | -0,236202 | 10,655133 | 14,077344 | 0,003153 | 0,003065 | 0,004636 | 1,813235 |
| 748 | -0,52047 | 10,675535 | 14,056402 | 0,003097 | 0,002844 | 0,00458 | 1,833723 |
| 749 | -0,412684 | 10,336068 | 14,61507 | 0,004842 | 0,00366 | 0,006195 | 1,061459 |
| 750 | -0,439906 | 10,339713 | 14,059431 | 0,003166 | 0,003067 | 0,004583 | 0,735687 |
| 751 | -0,204653 | 10,647297 | 14,601278 | 0,00344 | 0,003082 | 0,005093 | 1,90271 |
| 757 | -0,5822 | 9,795422 | 15,636848 | 0,003308 | 0,003098 | 0,004967 | 1,886751 |
| 758 | -0,580835 | 9,794154 | 15,249309 | 0,003808 | 0,003278 | 0,005352 | 0,664626 |
| 759 | -0,612856 | 7,570438 | 15,191727 | 0,005369 | 0,003271 | 0,006994 | 1,991953 |
| 760 | -0,601704 | 7,573804 | 15,607091 | 0,005838 | 0,003845 | 0,00795 | 1,012588 |
| 761 | -0,665899 | 4,786867 | 16,9743 | 0,002386 | 0,003226 | 0,005254 | 1,26665 |
| 762 | -0,664853 | 4,802083 | 16,443945 | 0,002362 | 0,003321 | 0,005352 | 2,849314 |
| 763 | -0,632041 | 0,87637 | 16,43282 | 0,001959 | 0,002973 | 0,004946 | 1,632461 |
| 764 | -0,63324 | 0,87502 | 16,980161 | 0,002022 | 0,003067 | 0,005298 | 1,710331 |
| 765 | -0,631265 | 4,598984 | 15,19919 | 0,00767 | 0,004182 | 0,00816 | 0,981588 |
| 766 | -0,614127 | 4,563421 | 15,738045 | 0,006063 | 0,003312 | 0,007708 | 2,657702 |
| 767 | -0,633217 | -1,156304 | 15,820136 | 0,003884 | 0,003072 | 0,006004 | 1,273872 |
| 768 | -0,645787 | -1,170849 | 15,27125 | 0,004195 | 0,002987 | 0,006257 | 0,755039 |
| 769 | -0,587631 | 2,510644 | 15,781819 | 0,005044 | 0,002892 | 0,007166 | 0,875643 |
| 770 | -0,607658 | 4,092448 | 15,784593 | 0,006342 | 0,003648 | 0,008432 | 0,748456 |
| 771 | -0,612956 | 9,783192 | 5,213123 | 0,002089 | 0,002117 | 0,002425 | 1,336839 |
| 772 | -0,603431 | 9,801161 | 4,331325 | 0,002416 | 0,002547 | 0,002528 | 2,295387 |
| 773 | -0,616343 | 9,799662 | 4,615187 | 0,002065 | 0,002146 | 0,002344 | 1,19701 |
| 774 | -0,604167 | 9,811646 | 4,018068 | 0,002425 | 0,002573 | 0,002502 | 1,197067 |
| 775 | -0,616867 | 9,796137 | 2,83578 | 0,002453 | 0,002832 | 0,00245 | 1,837879 |
| 776 | -0,620086 | 9,755841 | 3,429091 | 0,00237 | 0,002583 | 0,002422 | 2,661287 |
| 777 | -0,657496 | 9,294066 | 4,040592 | 0,003038 | 0,001955 | 0,002873 | 1,408198 |
| 778 | -0,634232 | 9,327527 | 3,448573 | 0,002767 | 0,002008 | 0,002729 | 0,968747 |
| 779 | -0,59111 | 8,848271 | 2,846514 | 0,002751 | 0,001894 | 0,00272 | 0,946846 |
| 780 | -0,615797 | 9,384539 | 2,844978 | 0,002721 | 0,002041 | 0,002776 | 0,98899 |
| 781 | -0,589314 | 9,048274 | 2,22156 | 0,001375 | 0,001202 | 0,001847 | 1,647442 |
| 782 | -0,626214 | 9,400555 | 2,230453 | 0,001902 | 0,001123 | 0,00217 | 2,07171 |
| 783 | -0,601083 | 9,041807 | 1,649061 | 0,002467 | 0,00198 | 0,002855 | 1,716598 |
| 784 | -0,636676 | 9,773021 | 2,228187 | 0,001838 | 0,002204 | 0,002225 | 1,46128 |
| 785 | -0,639302 | 9,539479 | 1,952274 | 0,001721 | 0,002095 | 0,002182 | 2,235152 |
| 786 | -0,588396 | 9,898371 | 2,234761 | 0,00231 | 0,002246 | 0,002656 | 4,298312 |
| 787 | -0,621318 | 9,775219 | 2,409195 | 0,001848 | 0,002203 | 0,002207 | 2,296258 |
| 788 | -0,612851 | 8,8372 | 3,442901 | 0,003434 | 0,002032 | 0,003017 | 1,203485 |
| 789 | -0,634324 | 9,257915 | 4,624113 | 0,002223 | 0,001989 | 0,002464 | 1,287996 |
| 790 | -0,623958 | 9,34666 | 4,61569 | 0,00223 | 0,002015 | 0,002469 | 1,176608 |
| 791 | -0,625904 | 9,351948 | 5,220553 | 0,002069 | 0,002 | 0,002433 | 1,973608 |
| 792 | -0,342075 | 9,980499 | 5,214519 | 0,002047 | 0,00215 | 0,002427 | 1,423582 |
| 793 | -0,640174 | 9,863645 | 5,784491 | 0,002445 | 0,002105 | 0,00281 | 1,075579 |
| 794 | -0,626825 | 9,83671 | 6,338337 | 0,005275 | 0,002958 | 0,004748 | 0,941742 |
| 795 | -0,669983 | 9,815522 | 6,498789 | 0,004046 | 0,002314 | 0,004025 | 1,143373 |
| 796 | -0,639065 | 9,520852 | 1,737807 | 0,002115 | 0,002085 | 0,002606 | 1,619283 |
| 797 | -0,621115 | 9,521642 | 1,633457 | 0,002595 | 0,002187 | 0,002985 | 1,716323 |
| 798 | -4,770771 | -0,336649 | 1,929948 | 0,003226 | 0,001451 | 0,003997 | 1,666078 |
| 799 | -4,611778 | 6,678003 | 9,49144 | 0,001416 | 0,001728 | 0,002585 | 1,462617 |
| 801 | -4,610874 | 6,706877 | 9,524479 | 0,001482 | 0,002279 | 0,003722 | 1,148826 |
| 802 | -4,597502 | 7,145038 | 9,184559 | 0,001413 | 0,001627 | 0,002397 | 1,565123 |
| 803 | -4,58464 | 7,543517 | 8,816606 | 0,001425 | 0,001635 | 0,00237 | 1,435039 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 804 | -4,582927 | 7,915318 | 8,412063 | 0,001503 | 0,00168 | 0,002393 | 2,048335 |
| 805 | -4,589022 | 8,205521 | 7,938803 | 0,001519 | 0,001723 | 0,002361 | 2,633265 |
| 806 | -4,59817 | 8,453028 | 7,448418 | 0,001505 | 0,001757 | 0,002343 | 2,909355 |
| 807 | -4,600836 | 8,637849 | 6,907686 | 0,001489 | 0,001517 | 0,002093 | 2,953659 |
| 808 | -4,603129 | 8,676975 | 6,921998 | 0,001713 | 0,002374 | 0,003254 | 0,841219 |
| 809 | -4,642318 | 4,606369 | 10,141471 | 0,001208 | 0,001528 | 0,002615 | 1,408086 |
| 810 | -4,641999 | 4,057373 | 10,144947 | 0,0012 | 0,001537 | 0,002691 | 1,709876 |
| 811 | -4,615786 | 4,051025 | 10,136955 | 0,001221 | 0,001615 | 0,002838 | 2,093016 |
| 812 | -4,626854 | 3,459936 | 10,07714 | 0,001348 | 0,001639 | 0,002872 | 1,878593 |
| 813 | -4,635067 | 2,910973 | 9,947282 | 0,001425 | 0,001744 | 0,002922 | 2,38208 |
| 814 | -0,41436 | 9,233853 | 12,611142 | 0,003605 | 0,003131 | 0,004761 | 2,739155 |
| 815 | -4,647371 | 2,392215 | 9,75833 | 0,00141 | 0,001649 | 0,002734 | 2,07133 |
| 816 | -4,642914 | 1,896356 | 9,496748 | 0,001385 | 0,001632 | 0,002697 | 1,5748 |
| 817 | -4,640283 | 1,445474 | 9,187592 | 0,00132 | 0,001584 | 0,002571 | 2,012313 |
| 818 | -4,641917 | 1,044286 | 8,821123 | 0,001249 | 0,001663 | 0,002688 | 2,997879 |
| 819 | -4,61095 | 4,610875 | 10,13591 | 0,00113 | 0,001746 | 0,003045 | 1,366053 |
| 820 | -4,615495 | 5,125144 | 10,061856 | 0,001249 | 0,001621 | 0,002756 | 2,012186 |
| 821 | -4,616146 | 5,687793 | 9,938626 | 0,001436 | 0,001729 | 0,002785 | 2,503997 |
| 822 | -3,668731 | 4,041791 | 10,120081 | 0,001461 | 0,00165 | 0,002954 | 1,656614 |
| 823 | -3,681303 | 4,615422 | 10,121093 | 0,001355 | 0,001618 | 0,002894 | 1,406972 |
| 824 | -4,638356 | 0,662865 | 8,406924 | 0,001196 | 0,001652 | 0,002758 | 1,672719 |
| 825 | -4,653341 | 0,364093 | 7,943399 | 0,001203 | 0,001574 | 0,002798 | 1,167443 |
| 826 | -4,654598 | 0,324922 | 7,961238 | 0,001166 | 0,001616 | 0,003012 | 1,176491 |
| 827 | -4,665242 | 0,201667 | 7,767884 | 0,001137 | 0,001577 | 0,002908 | 2,07044 |
| 828 | -4,660384 | 0,249155 | 7,709487 | 0,00114 | 0,001574 | 0,00286 | 2,109943 |
| 830 | -4,675889 | -0,14871 | 6,358335 | 0,001756 | 0,002398 | 0,003733 | 1,140864 |
| 831 | -4,666635 | -0,081939 | 6,916137 | 0,002796 | 0,003972 | 0,004617 | 1,502641 |
| 832 | -0,125834 | 10,67341 | 11,629487 | 0,002766 | 0,003113 | 0,003923 | 1,043883 |
| 833 | -0,075317 | 10,74976 | 11,72592 | 0,002466 | 0,003001 | 0,003663 | 1,438593 |
| 834 | -3,67142 | 6,684953 | 9,494066 | 0,001716 | 0,001805 | 0,002875 | 1,268495 |
| 835 | -3,676424 | 6,195158 | 9,735986 | 0,00167 | 0,001725 | 0,00286 | 1,037024 |
| 836 | -2,771976 | 5,683889 | 9,924849 | 0,001444 | 0,001646 | 0,002804 | 1,235267 |
| 837 | -2,760139 | 5,150969 | 10,070598 | 0,001429 | 0,001645 | 0,002818 | 1,257497 |
| 839 | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a |
| 840 | -2,463021 | 5,147071 | 10,068362 | 0,00173 | 0,001728 | 0,003204 | 1,488708 |
| 841 | -2,428533 | 4,622316 | 10,115289 | 0,001515 | 0,001637 | 0,003021 | 1,011695 |
| 842 | -3,293994 | 5,682865 | 9,921012 | 0,001396 | 0,001633 | 0,002771 | 1,208852 |
| 843 | -3,307631 | 6,184577 | 9,739122 | 0,00139 | 0,001497 | 0,002567 | 1,197328 |
| 844 | -1,868159 | 6,199128 | 9,748039 | 0,001506 | 0,001644 | 0,002781 | 1,115035 |
| 845 | -1,876748 | 5,695021 | 9,92215 | 0,001502 | 0,001644 | 0,002806 | 1,653842 |
| 846 | -1,445888 | 3,949966 | 10,08683 | 0,001711 | 0,001743 | 0,00332 | 1,759324 |
| 847 | -1,269323 | 3,451094 | 10,071093 | 0,001805 | 0,001709 | 0,003139 | 1,870208 |
| 848 | -1,462223 | 3,452935 | 10,051932 | 0,001825 | 0,001733 | 0,003212 | 1,240069 |
| 849 | -1,483893 | 2,924347 | 9,906814 | 0,001776 | 0,00171 | 0,003102 | 1,531993 |
| 850 | -2,499467 | 3,458778 | 10,049643 | 0,001488 | 0,001579 | 0,002859 | 1,489353 |
| 851 | -2,50158 | 2,921712 | 9,934605 | 0,001685 | 0,001718 | 0,003039 | 1,919252 |
| 852 | -1,80404 | 3,460773 | 10,062744 | 0,001797 | 0,001717 | 0,003147 | 1,962323 |
| 853 | -1,786894 | 4,048164 | 10,110607 | 0,00167 | 0,001604 | 0,003005 | 2,317321 |
| 854 | -3,534375 | 3,452247 | 10,059043 | 0,001537 | 0,001609 | 0,002956 | 2,151936 |
| 855 | -3,536811 | 4,042206 | 10,14402 | 0,001628 | 0,001798 | 0,003306 | 2,425645 |
| 856 | -3,897844 | 2,919293 | 9,955413 | 0,00148 | 0,001687 | 0,002862 | 1,062257 |
| 857 | -3,922597 | 3,455972 | 10,060179 | 0,001414 | 0,001705 | 0,003001 | 1,439374 |
| 862 | -2,685002 | 1,065737 | 8,809055 | 0,001509 | 0,001801 | 0,003183 | 1,593602 |
| 863 | -2,681338 | 1,462859 | 9,169194 | 0,001586 | 0,001666 | 0,002909 | 1,213267 |
| 864 | -3,620648 | 1,460366 | 9,17472 | 0,00147 | 0,001679 | 0,002825 | 1,242289 |
| 865 | -3,572054 | 1,038899 | 8,803694 | 0,001376 | 0,001631 | 0,002639 | 1,423673 |
| 866 | -2,722304 | 0,980746 | 8,824456 | 0,001616 | 0,001819 | 0,003297 | 2,558166 |
| 867 | -3,322786 | 0,690663 | 8,387105 | 0,001351 | 0,001623 | 0,002601 | 1,93184 |
| 868 | -2,240251 | 1,065112 | 8,798317 | 0,001611 | 0,001755 | 0,003097 | 0,984949 |
| 869 | -2,256158 | 1,467533 | 9,167747 | 0,001649 | 0,001692 | 0,002968 | 1,318608 |
| 874 | -3,68651 | -0,135115 | 6,350527 | 0,001761 | 0,002102 | 0,002637 | 1,164512 |
| 875 | -3,684051 | -0,171043 | 5,876953 | 0,00262 | 0,003614 | 0,003418 | 0,89316 |
| 876 | -3,641208 | -0,161943 | 5,891858 | 0,002667 | 0,002872 | 0,003194 | 1,537244 |
| 877 | -2,677164 | 0,693503 | 8,372674 | 0,002995 | 0,002893 | 0,003869 | 1,762941 |
| 878 | -2,692426 | 0,39151 | 7,91817 | 0,00286 | 0,002888 | 0,003671 | 1,418862 |
| 879 | -1,632736 | 0,707849 | 8,370081 | 0,002792 | 0,002801 | 0,003751 | 1,080395 |
| 880 | -1,629717 | 0,451658 | 7,974311 | 0,002978 | 0,002937 | 0,003795 | 0,855763 |
| 881 | -1,455463 | 0,391024 | 7,906706 | 0,002042 | 0,002229 | 0,003091 | 1,757935 |
| 882 | -1,939145 | 2,415952 | 9,727819 | 0,001711 | 0,001968 | 0,003639 | 1,084186 |
| 883 | -1,973779 | 2,923883 | 9,918214 | 0,001779 | 0,00179 | 0,003249 | 0,779608 |
| 884 | -3,842726 | 2,399761 | 9,742964 | 0,001502 | 0,00173 | 0,002932 | 1,350951 |
| 885 | -3,2852 | 2,405738 | 9,731995 | 0,001594 | 0,001742 | 0,003104 | 1,573649 |
| 886 | -3,299401 | 2,923343 | 9,937551 | 0,00164 | 0,001692 | 0,003032 | 1,777278 |
| 887 | -3,593832 | 2,399318 | 9,716606 | 0,001721 | 0,00186 | 0,003325 | 2,289386 |
| 888 | -3,615367 | 1,910051 | 9,468588 | 0,001671 | 0,001871 | 0,003491 | 2,636211 |
| 889 | -1,632138 | 2,414786 | 9,723581 | 0,001789 | 0,001719 | 0,003119 | 1,36761 |
| 890 | -1,624752 | 1,92972 | 9,474359 | 0,001776 | 0,001758 | 0,003153 | 2,288177 |
| 891 | -2,635982 | 6,199325 | 9,753726 | 0,001503 | 0,001551 | 0,002667 | 1,015154 |
| 892 | -2,636002 | 6,683326 | 9,501007 | 0,001481 | 0,001581 | 0,002644 | 1,038088 |
| 893 | -1,095505 | 6,689087 | 9,489494 | 0,001917 | 0,002097 | 0,003217 | 1,606321 |
| 894 | -1,279497 | 6,690292 | 9,492694 | 0,001857 | 0,002085 | 0,00328 | 1,574948 |
| 896 | -1,3005 | 7,143716 | 9,183121 | 0,001857 | 0,001903 | 0,002947 | 0,963974 |
| 897 | -1,179777 | 7,13794 | 9,177478 | 0,001854 | 0,001923 | 0,002969 | 1,29571 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 898 | -1,686963 | 6,600462 | 9,546329 | 0,001727 | 0,002057 | 0,00322 | 1,420044 |
| 899 | -1,072715 | 6,322501 | 9,71397 | 0,002154 | 0,001903 | 0,003283 | 1,61888 |
| 900 | -1,567081 | 6,275884 | 9,703216 | 0,002319 | 0,002791 | 0,00406 | 1,052379 |
| 901 | -1,920157 | 7,14118 | 9,18697 | 0,002263 | 0,001958 | 0,003262 | 1,805849 |
| 902 | -1,941328 | 6,694759 | 9,507452 | 0,001793 | 0,001842 | 0,002957 | 1,336556 |
| 905 | -3,266184 | 6,684553 | 9,495192 | 0,001741 | 0,001859 | 0,002945 | 1,116208 |
| 906 | -3,243795 | 7,144214 | 9,190173 | 0,001651 | 0,001805 | 0,00274 | 0,839132 |
| 907 | -4,274424 | 7,130267 | 9,167826 | 0,001701 | 0,001918 | 0,002886 | 0,935199 |
| 908 | -4,353888 | 6,687906 | 9,485854 | 0,001527 | 0,001764 | 0,002722 | 0,788427 |
| 910 | -4,146164 | 6,675293 | 9,473079 | 0,001678 | 0,002015 | 0,003178 | 1,085555 |
| 911 | -4,146471 | 6,192382 | 9,721943 | 0,001629 | 0,001991 | 0,003144 | 0,821769 |
| 914 | -2,595918 | 7,541609 | 8,816011 | 0,001738 | 0,00194 | 0,00279 | 1,738209 |
| 915 | -2,617598 | 7,142459 | 9,188995 | 0,001716 | 0,001897 | 0,002842 | 1,831177 |
| 916 | -3,646239 | 7,136209 | 9,179615 | 0,00164 | 0,002202 | 0,003106 | 0,741911 |
| 917 | -3,63097 | 7,548837 | 8,824962 | 0,001655 | 0,002265 | 0,003141 | 1,451014 |
| 918 | -3,191929 | 7,543531 | 8,818059 | 0,001696 | 0,002062 | 0,002948 | 1,019387 |
| 925 | -3,316568 | 8,207157 | 7,933932 | 0,001721 | 0,001975 | 0,002593 | 1,144296 |
| 926 | -3,323976 | 8,457483 | 7,443917 | 0,001675 | 0,002019 | 0,002575 | 1,162454 |
| 927 | -1,971669 | 8,447549 | 7,424303 | 0,001699 | 0,002081 | 0,002577 | 1,59871 |
| 928 | -1,959381 | 8,202948 | 7,917624 | 0,001723 | 0,002077 | 0,002687 | 1,141825 |
| 932 | -0,832181 | 8,617197 | 6,90091 | 0,001958 | 0,003105 | 0,003179 | 1,178755 |
| 942 | -2,631046 | 8,446917 | 7,42661 | 0,001665 | 0,00255 | 0,002996 | 1,076175 |
| 943 | -2,640114 | 8,634872 | 6,909638 | 0,001931 | 0,003064 | 0,003169 | 1,204766 |
| 944 | -1,934959 | 8,624406 | 6,903133 | 0,001682 | 0,00254 | 0,002861 | 1,19048 |
| 945 | -1,941855 | 8,749812 | 6,355682 | 0,001911 | 0,00304 | 0,003018 | 0,868229 |
| 946 | -2,594671 | 8,763966 | 6,375635 | 0,001952 | 0,003444 | 0,003351 | 1,44279 |
| 947 | -3,299431 | 8,803099 | 6,404353 | 0,002148 | 0,003793 | 0,003375 | 1,381279 |
| 948 | -3,274793 | 8,655447 | 6,917939 | 0,001935 | 0,003073 | 0,003166 | 1,871552 |
| 949 | -3,593551 | 8,713936 | 6,354837 | 0,002138 | 0,003707 | 0,003294 | 1,705569 |
| 950 | -3,616577 | 8,77152 | 5,848077 | 0,002002 | 0,002077 | 0,002507 | 1,907922 |
| 951 | -2,605273 | 8,765851 | 5,820114 | 0,001781 | 0,002007 | 0,002398 | 1,260677 |
| 952 | -1,493952 | 8,762712 | 6,192307 | 0,001661 | 0,002586 | 0,002779 | 0,974724 |
| 953 | -1,621124 | 8,752757 | 6,22305 | 0,001675 | 0,002573 | 0,002783 | 1,078413 |
| 954 | -1,783314 | 8,763832 | 5,993876 | 0,001685 | 0,00251 | 0,00266 | 1,334062 |
| 955 | -1,868323 | 8,761212 | 6,278613 | 0,001706 | 0,002517 | 0,002754 | 1,280281 |
| 956 | -1,458703 | 8,732306 | 6,353082 | 0,001902 | 0,003033 | 0,003013 | 1,001162 |
| 957 | -1,613686 | 8,739819 | 6,35352 | 0,001668 | 0,002514 | 0,002741 | 0,913836 |
| 958 | -1,438464 | 8,618083 | 6,899746 | 0,001708 | 0,002648 | 0,002913 | 1,12463 |
| 959 | -1,507637 | 8,696074 | 6,585688 | 0,001708 | 0,002641 | 0,002856 | 1,163737 |
| 960 | -3,612925 | 8,202312 | 7,93243 | 0,001722 | 0,002408 | 0,002895 | 1,537561 |
| 961 | -3,881891 | 8,454286 | 7,448305 | 0,001731 | 0,002756 | 0,003085 | 0,863206 |
| 962 | -2,500674 | 8,731639 | 6,355361 | 0,002092 | 0,003379 | 0,003173 | 1,187447 |
| 963 | -2,201696 | 8,715411 | 6,338963 | 0,001908 | 0,002869 | 0,00308 | 1,701451 |
| 964 | -2,227057 | 8,749698 | 5,859001 | 0,001888 | 0,002699 | 0,002807 | 1,478416 |
| 965 | -2,460802 | 8,743114 | 5,841841 | 0,002072 | 0,003366 | 0,003088 | 0,780771 |
| 966 | -4,560109 | 8,747637 | 6,386185 | 0,001756 | 0,001846 | 0,002391 | 2,359323 |
| 967 | -4,046275 | 8,730396 | 6,20974 | 0,001865 | 0,001989 | 0,002498 | 1,698633 |
| 968 | -4,148364 | 8,740389 | 6,083709 | 0,00185 | 0,001942 | 0,002426 | 1,196642 |
| 969 | -4,145503 | 8,710965 | 6,351744 | 0,00186 | 0,001939 | 0,002467 | 1,559079 |
| 970 | -3,812234 | 8,725274 | 6,360081 | 0,001852 | 0,002391 | 0,002758 | 1,350738 |
| 971 | -2,592313 | 8,205273 | 7,926544 | 0,001724 | 0,002459 | 0,003066 | 0,928521 |
| 973 | -1,98182 | -0,010906 | 6,885631 | 0,002033 | 0,002536 | 0,00323 | 1,050159 |
| 974 | -3,166645 | 0,1319 | 7,425214 | 0,001897 | 0,002517 | 0,003504 | 0,729059 |
| 975 | -1,992039 | -0,117682 | 6,33402 | 0,001848 | 0,002167 | 0,002597 | 1,05074 |
| 977 | -1,563867 | -0,146489 | 5,773356 | 0,003201 | 0,003139 | 0,005336 | 1,223807 |
| 979 | -1,658919 | -0,121507 | 5,836396 | 0,002852 | 0,004244 | 0,003967 | 0,679619 |
| 980 | -1,65683 | -0,117465 | 6,242632 | 0,001916 | 0,002099 | 0,002677 | 1,349486 |
| 981 | -1,570196 | -0,090264 | 6,303399 | 0,001938 | 0,002161 | 0,00273 | 3,474033 |
| 982 | -2,688524 | -0,15708 | 5,800544 | 0,0019 | 0,002176 | 0,00263 | 1,284398 |
| 983 | -2,666293 | -0,1238 | 6,332026 | 0,001877 | 0,002156 | 0,002644 | 1,786565 |
| 984 | -1,661925 | 0,147707 | 7,401472 | 0,002969 | 0,003759 | 0,004115 | 1,381129 |
| 985 | -1,634028 | 0,000157 | 6,882174 | 0,002978 | 0,00399 | 0,003985 | 1,04499 |
| 988 | -0,535038 | 4,344896 | 14,008632 | 0,004103 | 0,002787 | 0,005774 | 3,406911 |
| 989 | -0,345642 | 4,361498 | 14,247732 | 0,004544 | 0,002845 | 0,006376 | 2,478372 |
| 990 | -0,199591 | -1,968922 | 11,209218 | 0,002786 | 0,002227 | 0,004002 | 0,839283 |
| 991 | -0,435603 | 10,079819 | 14,064956 | 0,00287 | 0,002903 | 0,004439 | 1,489286 |
| 992 | -0,437505 | 10,097312 | 14,724545 | 0,006294 | 0,004318 | 0,008469 | 2,916666 |
| 998 | -0,655741 | -1,227626 | 9,759967 | 0,003889 | 0,002926 | 0,004705 | 1,383716 |
| 999 | -0,621762 | -0,718706 | 9,361353 | 0,003701 | 0,002255 | 0,004325 | 3,11757 |
| 1000 | -0,643447 | -1,234027 | 8,791037 | 0,003762 | 0,002806 | 0,004271 | 2,296522 |
| 1001 | -0,629312 | -1,039018 | 10,051422 | 0,003893 | 0,002907 | 0,004817 | 2,154138 |
| 1002 | -0,624361 | -1,184018 | 10,051892 | 0,003899 | 0,002943 | 0,004824 | 0,887046 |
| 1003 | -0,645861 | -1,207358 | 9,93457 | 0,003901 | 0,002939 | 0,004779 | 1,662816 |
| 1004 | -0,634808 | -1,103898 | 9,941317 | 0,003888 | 0,002912 | 0,004773 | 0,809452 |
| 1005 | -0,396597 | -1,258779 | 10,059744 | 0,003762 | 0,00292 | 0,004767 | 0,838015 |
| 1006 | -0,39725 | -1,272298 | 9,920139 | 0,003748 | 0,002908 | 0,004706 | 1,110975 |
| 1007 | -0,316875 | -1,331036 | 10,060271 | 0,002494 | 0,002076 | 0,003396 | 1,457836 |
| 1008 | -0,325845 | -1,343125 | 9,938986 | 0,003501 | 0,002874 | 0,004487 | 0,630844 |
| 1009 | -0,265966 | -1,42201 | 10,050249 | 0,002475 | 0,002078 | 0,003383 | 0,891133 |
| 1010 | -0,266994 | -1,424585 | 9,93745 | 0,002468 | 0,002072 | 0,003354 | 1,168522 |
| 1011 | -0,557905 | -1,183495 | 10,03558 | 0,006121 | 0,006472 | 0,007935 | 1,130782 |
| 1012 | -0,556088 | -1,18571 | 9,926418 | 0,006126 | 0,006472 | 0,007865 | 1,071988 |
| 1013 | -0,48439 | -1,212809 | 10,046608 | 0,003589 | 0,002883 | 0,00456 | 1,7076 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1015 | -0,605442 | 7,752181 | 11,199627 | 0,003646 | 0,00295 | 0,004551 | 0,53166 |
| 1016 | -0,717074 | -1,174629 | 2,810865 | 0,002547 | 0,001803 | 0,002112 | 2,966368 |
| 1017 | -0,700192 | -1,231413 | 4,598267 | 0,00222 | 0,00261 | 0,002465 | 4,326244 |
| 1018 | -0,615603 | -1,212571 | 4,144177 | 0,002157 | 0,002334 | 0,002287 | 4,021805 |
| 1019 | -0,700204 | -1,127547 | 4,158059 | 0,002164 | 0,002288 | 0,002271 | 1,92166 |
| 1020 | -0,575365 | -1,219401 | 4,629993 | 0,002191 | 0,002584 | 0,002482 | 1,704937 |
| 1021 | -0,568403 | -1,225635 | 5,186997 | 0,002494 | 0,00371 | 0,003177 | 2,075348 |
| 1027 | -0,442751 | -1,28668 | 5,203316 | 0,001602 | 0,001886 | 0,002046 | 5,823858 |
| 1028 | -0,442852 | -1,265245 | 4,655418 | 0,001752 | 0,002139 | 0,002133 | 4,522138 |
| 1029 | -0,368691 | -1,368443 | 4,628598 | 0,001558 | 0,001909 | 0,001945 | 3,995468 |
| 1030 | -0,368985 | -1,390729 | 5,213741 | 0,001559 | 0,00181 | 0,001997 | 4,460115 |
| 1031 | -0,321415 | -1,515269 | 5,214289 | 0,0015 | 0,001765 | 0,001925 | 4,955126 |
| 1032 | -0,325714 | -1,496036 | 4,635393 | 0,001533 | 0,001946 | 0,001929 | 5,790817 |
| 1033 | -0,30492 | -1,644 | 5,214489 | 0,001506 | 0,001785 | 0,001934 | 6,222348 |
| 1034 | -0,310895 | -1,632156 | 4,64278 | 0,001506 | 0,001941 | 0,001908 | 7,450969 |
| 1035 | -0,314311 | -1,78081 | 5,223974 | 0,001613 | 0,002315 | 0,002285 | 9,843306 |
| 1036 | -0,324027 | -1,769971 | 4,649353 | 0,001645 | 0,001968 | 0,002078 | 10,731695 |
| 1037 | -0,441922 | -1,897009 | 5,195715 | 0,003321 | 0,002677 | 0,003643 | 2,598797 |
| 1038 | -0,405556 | -1,890886 | 4,667634 | 0,002233 | 0,001957 | 0,002587 | 10,129489 |
| 1039 | -0,53486 | -1,98536 | 4,713991 | 0,005387 | 0,003622 | 0,004674 | 0,830393 |
| 1040 | -0,520498 | -1,980508 | 5,183206 | 0,005926 | 0,003928 | 0,0049 | 1,126091 |
| 1041 | -0,751862 | -2,373026 | 1,655452 | 0,002738 | 0,002541 | 0,003526 | 3,142876 |
| 1042 | -0,748782 | -2,50032 | 2,830922 | 0,001855 | 0,002053 | 0,002122 | 2,546868 |
| 1043 | -0,752473 | -2,513683 | 2,226209 | 0,001795 | 0,002067 | 0,002124 | 2,162393 |
| 1044 | -0,775383 | -2,306958 | 2,225569 | 0,001852 | 0,002031 | 0,002149 | 2,044456 |
| 1045 | -0,76866 | -2,291754 | 1,915691 | 0,002074 | 0,002033 | 0,00257 | 1,438277 |
| 1046 | -0,740086 | -3,12202 | 2,876678 | 0,001779 | 0,002402 | 0,002362 | 22,501262 |
| 1047 | -0,770548 | -3,111812 | 2,228451 | 0,001729 | 0,002386 | 0,002359 | 2,399763 |
| 1048 | -0,779927 | -3,090886 | 1,658292 | 0,001742 | 0,002504 | 0,002456 | 2,399362 |
| 1049 | -0,722628 | -2,059699 | 2,236909 | 0,004796 | 0,003581 | 0,004843 | 2,429352 |
| 1050 | -0,733618 | -2,074167 | 2,830467 | 0,003312 | 0,002767 | 0,003793 | 1,373582 |
| 1051 | -0,706198 | -2,093842 | 3,416204 | 0,005158 | 0,003589 | 0,004731 | 1,744831 |
| 1052 | -0,720488 | -2,447163 | 3,423501 | 0,003164 | 0,002611 | 0,003596 | 0,874536 |
| 1053 | -0,71522 | -2,455832 | 4,015852 | 0,001975 | 0,00219 | 0,002436 | 0,96935 |
| 1054 | -0,676702 | -2,078184 | 4,013153 | 0,005303 | 0,003597 | 0,004704 | 1,224356 |
| 1055 | -0,725987 | -3,106477 | 3,418665 | 0,00182 | 0,002408 | 0,002373 | 1,140509 |
| 1056 | -0,710473 | -3,186674 | 3,448168 | 0,001968 | 0,002418 | 0,002542 | 1,326296 |
| 1057 | -0,702216 | -3,160242 | 4,013357 | 0,001861 | 0,002409 | 0,002394 | 1,20733 |
| 1058 | -0,702977 | -3,210669 | 4,071342 | 0,001935 | 0,002415 | 0,002464 | 1,106117 |
| 1059 | -0,686642 | -3,223807 | 4,58441 | 0,001973 | 0,002414 | 0,002493 | 1,200137 |
| 1060 | -0,697403 | -3,120712 | 4,599198 | 0,001973 | 0,002413 | 0,002494 | 1,16544 |
| 1061 | -0,621061 | -2,056111 | 4,583807 | 0,005408 | 0,003604 | 0,004694 | 0,768563 |
| 1062 | -0,683126 | -3,1669 | 4,710664 | 0,00198 | 0,002412 | 0,0025 | 1,444798 |
| 1063 | -0,662688 | -3,158937 | 5,185761 | 0,001934 | 0,0024 | 0,002458 | 1,619032 |
| 1064 | -0,653414 | -2,298213 | 5,186688 | 0,003208 | 0,002622 | 0,00356 | 1,170096 |
| 1065 | -0,66435 | -2,019695 | 5,200237 | 0,00557 | 0,003619 | 0,004757 | 0,927688 |
| 1066 | -0,652462 | -3,109729 | 5,306589 | 0,002185 | 0,002403 | 0,002715 | 1,432537 |
| 1067 | -0,651887 | -3,124165 | 5,756333 | 0,0024 | 0,002494 | 0,002912 | 0,984926 |
| 1068 | -0,656246 | -2,045313 | 5,760112 | 0,00376 | 0,001818 | 0,003429 | 1,12256 |
| 1070 | -0,665697 | -2,29615 | 5,016043 | 0,003559 | 0,002636 | 0,003824 | 0,899761 |
| 1071 | -0,683698 | -2,272462 | 4,65736 | 0,003155 | 0,002617 | 0,003537 | 0,882973 |
| 1072 | -0,690824 | -2,287433 | 4,593588 | 0,002363 | 0,002079 | 0,002681 | 2,59397 |
| 1073 | -0,658895 | -3,187668 | 5,769942 | 0,002124 | 0,002399 | 0,002664 | 1,219613 |
| 1074 | -0,645487 | -3,177844 | 6,343417 | 0,002341 | 0,001902 | 0,002651 | 1,231324 |
| 1075 | -0,650476 | -3,135137 | 6,387752 | 0,002146 | 0,001928 | 0,002506 | 0,980482 |
| 1076 | -0,659895 | -2,068561 | 6,394374 | 0,004413 | 0,001817 | 0,00396 | 1,171654 |
| 1077 | -0,649643 | -2,057835 | 6,87166 | 0,004547 | 0,001927 | 0,004155 | 3,467803 |
| 1078 | -0,659689 | -2,036783 | 6,983724 | 0,004186 | 0,001921 | 0,003955 | 0,873843 |
| 1079 | -0,651908 | -3,085323 | 6,965928 | 0,002244 | 0,001936 | 0,002665 | 0,94606 |
| 1080 | -0,663163 | -3,159422 | 6,876198 | 0,002174 | 0,001956 | 0,002593 | 2,747031 |
| 1081 | -0,667723 | -3,204464 | 6,464248 | 0,002053 | 0,001932 | 0,002436 | 1,270057 |
| 1082 | -0,658562 | -3,215808 | 7,002229 | 0,002073 | 0,001959 | 0,002521 | 0,841228 |
| 1083 | -0,654029 | -2,073604 | 5,994626 | 0,004775 | 0,001768 | 0,004055 | 1,107395 |
| 1084 | -0,644585 | -2,060913 | 7,541857 | 0,004229 | 0,002064 | 0,004122 | 0,752267 |
| 1085 | -0,656288 | -2,140408 | 7,555525 | 0,003347 | 0,00196 | 0,003519 | 1,520076 |
| 1086 | -0,646482 | -3,262182 | 7,540006 | 0,002203 | 0,001991 | 0,00271 | 1,605473 |
| 1087 | -0,3455 | -1,817648 | 7,543268 | 0,004148 | 0,002095 | 0,00411 | 0,844738 |
| 1088 | -0,654388 | -2,125421 | 8,170266 | 0,003383 | 0,002014 | 0,003662 | 0,623728 |
| 1089 | -0,652278 | -2,039528 | 8,168414 | 0,003574 | 0,002045 | 0,003829 | 1,093912 |
| 1090 | -0,62782 | -3,180953 | 8,149507 | 0,002158 | 0,002002 | 0,002728 | 0,967033 |
| 1091 | -0,648892 | -3,229015 | 8,191864 | 0,003088 | 0,001989 | 0,003433 | 0,975198 |
| 1092 | -0,639605 | -3,228992 | 8,672098 | 0,002499 | 0,002061 | 0,003055 | 1,401328 |
| 1093 | -0,626025 | -3,186201 | 8,729401 | 0,002498 | 0,002062 | 0,003065 | 1,459097 |
| 1094 | -0,643946 | -2,027474 | 8,755227 | 0,003987 | 0,00215 | 0,004238 | 0,933879 |
| 1095 | -0,632241 | -3,2273 | 8,758997 | 0,003114 | 0,00203 | 0,003559 | 0,99269 |
| 1096 | -0,629084 | -1,958526 | 7,311709 | 0,004239 | 0,002054 | 0,00407 | 1,349806 |
| 1097 | -0,630983 | -1,900088 | 7,518696 | 0,004283 | 0,002092 | 0,004152 | 1,991955 |
| 1098 | -0,617272 | -3,220919 | 9,348916 | 0,002524 | 0,002095 | 0,00318 | 1,470994 |
| 1099 | -0,634537 | -2,006404 | 9,360971 | 0,004471 | 0,002323 | 0,004924 | 1,115527 |
| 1100 | -0,636801 | -1,986556 | 9,057114 | 0,004454 | 0,002292 | 0,004818 | 1,66365 |
| 1101 | -0,629009 | -1,947065 | 9,724166 | 0,004519 | 0,002376 | 0,005072 | 0,666943 |
| 1102 | -0,623953 | -1,959359 | 9,907016 | 0,004463 | 0,002351 | 0,004941 | 1,073257 |
| 1103 | -0,603232 | -3,139101 | 9,911103 | 0,002872 | 0,002117 | 0,003567 | 1,235946 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1104 | -0,608335 | -3,161963 | 9,871113 | 0,003106 | 0,002135 | 0,0038 | 0,917872 |
| 1105 | -0,631594 | -3,182473 | 9,404525 | 0,002531 | 0,002098 | 0,003194 | 1,526085 |
| 1106 | -0,616142 | -3,164294 | 9,358417 | 0,002525 | 0,002094 | 0,003183 | 0,958867 |
| 1107 | -0,630187 | -2,623511 | 9,367853 | 0,003596 | 0,002071 | 0,004086 | 2,321091 |
| 1108 | -0,611756 | -2,631173 | 9,904495 | 0,002904 | 0,002119 | 0,003595 | 0,841836 |
| 1109 | -0,672012 | -2,596604 | 6,400312 | 0,004299 | 0,001794 | 0,003903 | 1,126409 |
| 1110 | -0,64665 | -2,598526 | 6,96879 | 0,00349 | 0,001894 | 0,003521 | 1,061181 |
| 1111 | -0,611459 | -3,155199 | 10,081891 | 0,002349 | 0,002106 | 0,003149 | 2,136437 |
| 1112 | -0,618343 | -1,985915 | 10,062266 | 0,004064 | 0,002275 | 0,004615 | 0,98293 |
| 1113 | -0,61871 | -1,979081 | 9,918254 | 0,004149 | 0,00231 | 0,004699 | 0,668814 |
| 1114 | -0,621373 | -2,076439 | 10,676369 | 0,004483 | 0,002404 | 0,005179 | 1,227758 |
| 1115 | -0,640465 | -2,073129 | 10,087512 | 0,003095 | 0,002026 | 0,003872 | 1,251971 |
| 1116 | -0,617221 | -2,544409 | 10,680539 | 0,00398 | 0,002225 | 0,004732 | 1,031422 |
| 1117 | -0,603434 | -2,540323 | 11,205829 | 0,003132 | 0,002244 | 0,004271 | 0,600966 |
| 1118 | -0,607617 | -3,092561 | 11,231062 | 0,003 | 0,00244 | 0,004147 | 1,320941 |
| 1119 | -0,599188 | -3,083646 | 11,824082 | 0,002454 | 0,002465 | 0,003785 | 1,397429 |
| 1120 | -0,600639 | -2,156641 | 11,809182 | 0,004621 | 0,002612 | 0,00593 | 0,476132 |
| 1121 | -0,608637 | -2,150561 | 11,212144 | 0,003441 | 0,002245 | 0,004695 | 0,42652 |
| 1122 | -0,608221 | -1,956403 | 11,210417 | 0,003116 | 0,002277 | 0,004359 | 0,50236 |
| 1123 | -0,589733 | -3,148115 | 10,668168 | 0,002909 | 0,002188 | 0,003742 | 1,68411 |
| 1124 | -0,60877 | -3,221927 | 10,11014 | 0,002342 | 0,002107 | 0,003147 | 1,456772 |
| 1125 | -0,588025 | -3,0514 | 11,813624 | 0,003384 | 0,002465 | 0,004788 | 0,870395 |
| 1126 | -0,593349 | -3,05193 | 12,252788 | 0,002504 | 0,002301 | 0,00387 | 1,041752 |
| 1127 | -0,591659 | -2,95002 | 12,397834 | 0,002833 | 0,002343 | 0,00423 | 1,255379 |
| 1128 | -0,593413 | -2,451925 | 12,387568 | 0,003366 | 0,002313 | 0,004804 | 0,862837 |
| 1129 | -0,600688 | -2,435735 | 11,817581 | 0,00332 | 0,002273 | 0,004625 | 0,73089 |
| 1130 | -0,600117 | -1,971416 | 11,439488 | 0,004389 | 0,003176 | 0,005951 | 1,306308 |
| 1131 | -0,580884 | -1,99587 | 11,644225 | 0,004382 | 0,003199 | 0,00602 | 1,040629 |
| 1132 | -0,595968 | -2,062884 | 11,805538 | 0,004371 | 0,003201 | 0,00606 | 0,933998 |
| 1133 | -0,607818 | -2,037766 | 11,707785 | 0,004382 | 0,003196 | 0,006033 | 0,65306 |
| 1134 | -0,589312 | -2,004135 | 12,386847 | 0,00443 | 0,003318 | 0,006317 | 0,812937 |
| 1135 | -0,625023 | -3,205143 | 12,899215 | 0,002144 | 0,00233 | 0,003705 | 1,241294 |
| 1136 | -0,622861 | -3,173384 | 12,943545 | 0,003671 | 0,002404 | 0,005527 | 1,415364 |
| 1137 | -0,600697 | -3,216673 | 12,956391 | 0,002139 | 0,002332 | 0,003715 | 1,999742 |
| 1138 | -0,615089 | -2,727498 | 12,911145 | 0,003841 | 0,002712 | 0,005475 | 0,697474 |
| 1139 | -0,598246 | -2,720893 | 12,402182 | 0,00332 | 0,002314 | 0,00476 | 0,855269 |
| 1140 | -0,589265 | -3,21861 | 13,514118 | 0,002233 | 0,002567 | 0,003926 | 1,407733 |
| 1141 | -0,580711 | -3,085087 | 13,516711 | 0,003056 | 0,002888 | 0,00474 | 1,426895 |
| 1142 | -0,58172 | -3,081409 | 14,093897 | 0,003829 | 0,003109 | 0,00569 | 2,008186 |
| 1143 | -0,580117 | -3,061878 | 14,129635 | 0,002583 | 0,002937 | 0,004418 | 1,696458 |
| 1144 | -0,230855 | -3,026854 | 14,646002 | 0,00208 | 0,002604 | 0,003908 | 1,039123 |
| 1145 | -0,281626 | -1,614344 | 14,660573 | 0,003347 | 0,002844 | 0,005249 | 0,902594 |
| 1146 | -0,288793 | -1,611428 | 14,147045 | 0,00386 | 0,004043 | 0,005286 | 0,858846 |
| 1147 | -0,616137 | -2,533734 | 12,644799 | 0,00424 | 0,003164 | 0,006209 | 4,298257 |
| 1148 | 0,217167 | -2,512102 | 12,662109 | 0,002808 | 0,002332 | 0,004555 | 2,175502 |
| 1149 | -0,491759 | -1,611647 | 14,133564 | 0,003898 | 0,004061 | 0,005312 | 0,659714 |
| 1150 | -0,495732 | -1,215509 | 14,124417 | 0,004703 | 0,00413 | 0,00599 | 0,665103 |
| 1151 | -0,575028 | -1,219127 | 14,109357 | 0,004722 | 0,004138 | 0,006 | 0,678892 |
| 1152 | -0,595919 | -2,155271 | 13,525982 | 0,005589 | 0,00407 | 0,006509 | 0,562709 |
| 1153 | -1,29223 | -3,128705 | 14,637323 | 0,002763 | 0,004678 | 0,00589 | 1,886447 |
| 1154 | -1,302499 | -3,117557 | 14,146745 | 0,002777 | 0,004654 | 0,005791 | 1,071437 |
| 1155 | -1,568808 | -3,142661 | 14,120217 | 0,002757 | 0,004641 | 0,005784 | 1,119282 |
| 1156 | -1,709993 | -3,149358 | 13,968065 | 0,002751 | 0,004629 | 0,005753 | 1,406552 |
| 1157 | -1,705859 | -3,159196 | 13,538869 | 0,00267 | 0,003655 | 0,004974 | 1,062105 |
| 1158 | -1,487225 | -3,177759 | 12,444267 | 0,002809 | 0,004542 | 0,005452 | 2,942228 |
| 1159 | -1,19072 | -3,223788 | 12,420615 | 0,002825 | 0,004533 | 0,005439 | 0,99721 |
| 1160 | -1,157834 | -3,12895 | 12,372355 | 0,003639 | 0,005484 | 0,006155 | 1,121732 |
| 1161 | -0,618608 | -3,035878 | 12,425186 | 0,002715 | 0,003619 | 0,004777 | 1,270015 |
| 1162 | -1,529757 | -3,16736 | 13,518095 | 0,002669 | 0,003651 | 0,004971 | 1,287407 |
| 1163 | -1,044828 | -3,15513 | 12,989273 | 0,003027 | 0,003957 | 0,00523 | 2,420976 |
| 1164 | -1,047859 | -3,127231 | 13,532537 | 0,002811 | 0,004622 | 0,005666 | 1,313387 |
| 1165 | -1,216053 | -3,126746 | 11,301923 | 0,003603 | 0,005406 | 0,005899 | 1,790843 |
| 1166 | -1,238238 | -3,190779 | 11,332512 | 0,002858 | 0,00448 | 0,005247 | 1,244928 |
| 1167 | -1,174262 | -3,18495 | 12,39279 | 0,002831 | 0,004542 | 0,00544 | 0,652394 |
| 1169 | -0,694262 | -3,234443 | 10,094941 | 0,003716 | 0,004031 | 0,004887 | 1,621279 |
| 1170 | -0,991522 | -3,263747 | 10,091371 | 0,003197 | 0,003601 | 0,004653 | 1,683374 |
| 1171 | -1,091542 | -3,180906 | 10,084439 | 0,003551 | 0,003989 | 0,004924 | 1,797539 |
| 1172 | -1,109918 | -3,262349 | 10,270503 | 0,002935 | 0,003635 | 0,004396 | 1,408318 |
| 1173 | -1,146413 | -3,251858 | 10,700313 | 0,002928 | 0,003661 | 0,004455 | 4,240551 |
| 1174 | -0,715089 | -3,212236 | 10,690059 | 0,003475 | 0,003925 | 0,004757 | 1,023007 |
| 1175 | -1,380482 | -3,183153 | 11,246194 | 0,002851 | 0,004475 | 0,005233 | 1,439371 |
| 1176 | -1,392475 | -3,229872 | 10,706755 | 0,002916 | 0,003675 | 0,00447 | 1,752629 |
| 1177 | -0,661177 | -3,261911 | 16,598041 | 0,00215 | 0,002735 | 0,004307 | 1,869421 |
| 1178 | -0,653913 | -3,26503 | 16,346422 | 0,002347 | 0,002912 | 0,004752 | 1,465113 |
| 1179 | -1,47887 | -3,266427 | 16,544488 | 0,002683 | 0,004738 | 0,006277 | 2,025981 |
| 1180 | -1,487583 | -3,252456 | 16,330075 | 0,00269 | 0,00473 | 0,006232 | 1,575758 |
| 1181 | -0,596118 | 9,596342 | 9,998988 | 0,007924 | 0,005198 | 0,008387 | 0,657482 |
| 1182 | -0,607417 | 9,845011 | 9,925505 | 0,005301 | 0,003858 | 0,005541 | 1,584129 |
| 1183 | -0,595312 | 9,916372 | 9,906896 | 0,003984 | 0,00362 | 0,004671 | 1,425377 |
| 1184 | -0,591688 | 9,859189 | 8,158897 | 0,004814 | 0,005341 | 0,005089 | 1,924264 |
| 1185 | -0,641351 | 9,555163 | 7,862823 | 0,004149 | 0,00285 | 0,004557 | 1,198472 |
| 1186 | -0,598157 | 9,850195 | 7,990686 | 0,003154 | 0,002423 | 0,003619 | 1,572665 |
| 1187 | -0,629095 | 9,741168 | 7,736245 | 0,004187 | 0,002315 | 0,004203 | 1,302785 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1188 | -0,60808 | 9,765314 | 7,580007 | 0,00416 | 0,002314 | 0,004171 | 1,099761 |
| 1189 | -0,593614 | 9,832567 | 7,559964 | 0,003199 | 0,002407 | 0,00362 | 1,77661 |
| 1190 | -0,595125 | 9,824633 | 7,350529 | 0,003105 | 0,002413 | 0,003521 | 2,047613 |
| 1191 | -0,623096 | 9,847456 | 7,230782 | 0,004137 | 0,002319 | 0,004123 | 1,298496 |
| 1192 | -0,539161 | 11,96998 | 11,752985 | 0,002392 | 0,002815 | 0,003651 | 2,29928 |
| 1193 | -0,560645 | 11,953165 | 11,201917 | 0,002337 | 0,002802 | 0,003478 | 1,727747 |
| 1194 | -0,566828 | 11,312139 | 11,1922 | 0,003314 | 0,003266 | 0,004469 | 0,623527 |
| 1195 | -0,580976 | 11,913068 | 11,173928 | 0,00243 | 0,00282 | 0,003636 | 1,435725 |
| 1196 | -0,589021 | 11,900016 | 10,668519 | 0,002864 | 0,00319 | 0,003854 | 1,601717 |
| 1197 | -0,569551 | 11,885003 | 10,45176 | 0,002892 | 0,003193 | 0,003884 | 1,310457 |
| 1198 | -0,563307 | 11,869567 | 10,080326 | 0,003001 | 0,00328 | 0,003956 | 1,901531 |
| 1199 | -0,653275 | 10,860806 | 2,212236 | 0,003644 | 0,003369 | 0,004543 | 0,889647 |
| 1200 | -0,596335 | 11,64732 | 2,213725 | 0,00266 | 0,003033 | 0,003196 | 1,751469 |
| 1201 | -0,640415 | 11,645182 | 1,633893 | 0,002566 | 0,00303 | 0,003256 | 2,975896 |
| 1202 | -0,635151 | 10,857256 | 1,628766 | 0,004206 | 0,004194 | 0,005124 | 0,757015 |
| 1203 | -0,623128 | 11,082213 | 2,83177 | 0,004449 | 0,004167 | 0,005009 | 1,091001 |
| 1204 | -0,668589 | 11,075775 | 2,219846 | 0,004321 | 0,004164 | 0,005057 | 0,929798 |
| 1205 | -0,588339 | 11,655389 | 2,814297 | 0,002789 | 0,003026 | 0,003198 | 1,654558 |
| 1206 | -0,65512 | 10,666149 | 2,840787 | 0,004549 | 0,004281 | 0,005087 | 1,572583 |
| 1207 | -0,581739 | 11,731297 | 3,415694 | 0,002877 | 0,003029 | 0,003202 | 6,206204 |
| 1208 | -0,593205 | 11,729849 | 2,818128 | 0,002793 | 0,003039 | 0,00321 | 1,44289 |
| 1209 | -0,631832 | 10,670352 | 2,217459 | 0,003659 | 0,003383 | 0,004557 | 1,163266 |
| 1210 | -0,625852 | 10,710834 | 3,435035 | 0,004669 | 0,004278 | 0,005049 | 1,133077 |
| 1211 | -0,638851 | 10,702385 | 2,997728 | 0,004573 | 0,004271 | 0,005069 | 1,414156 |
| 1212 | -0,612131 | 11,209071 | 3,432784 | 0,002356 | 0,002707 | 0,002856 | 0,915987 |
| 1213 | -0,618073 | 11,22105 | 2,838228 | 0,002294 | 0,002723 | 0,002861 | 1,827479 |
| 1214 | -0,586432 | 11,738376 | 4,006299 | 0,003048 | 0,003004 | 0,0033 | 1,654367 |
| 1215 | -0,583843 | 10,613218 | 4,017999 | 0,004805 | 0,00431 | 0,005041 | 4,148235 |
| 1216 | -0,408154 | 10,472453 | 2,215776 | 0,004343 | 0,00425 | 0,005068 | 1,13098 |
| 1217 | -0,619447 | 10,621069 | 2,632236 | 0,00466 | 0,00459 | 0,00522 | 1,514566 |
| 1218 | -0,59927 | 10,682905 | 4,260533 | 0,005044 | 0,004628 | 0,005164 | 1,693304 |
| 1219 | -0,607144 | 10,685246 | 4,601224 | 0,005127 | 0,004644 | 0,005173 | 1,211351 |
| 1220 | -0,595989 | 11,757562 | 4,593668 | 0,003116 | 0,002988 | 0,003348 | 1,508877 |
| 1221 | -0,583128 | 11,768336 | 4,007967 | 0,003091 | 0,003006 | 0,003343 | 1,478631 |
| 1222 | -0,564716 | 11,868709 | 4,632568 | 0,003002 | 0,003035 | 0,003283 | 1,880774 |
| 1223 | -0,574459 | 11,863779 | 5,212166 | 0,003018 | 0,003 | 0,003292 | 1,720774 |
| 1224 | -0,592717 | 11,011876 | 5,203206 | 0,002501 | 0,002515 | 0,002896 | 1,697163 |
| 1225 | -0,604553 | 10,744797 | 5,204533 | 0,005037 | 0,004316 | 0,005053 | 0,890734 |
| 1226 | -0,639412 | 10,779425 | 4,613424 | 0,00375 | 0,002453 | 0,004029 | 2,125314 |
| 1227 | -0,614582 | 10,796562 | 4,893961 | 0,004966 | 0,004295 | 0,005037 | 1,307958 |
| 1228 | -0,578243 | 10,711516 | 5,775205 | 0,004281 | 0,003468 | 0,00458 | 1,402233 |
| 1229 | -0,576898 | 11,863838 | 5,796606 | 0,003052 | 0,002976 | 0,003365 | 1,714248 |
| 1230 | -0,578881 | 11,85937 | 6,352661 | 0,003075 | 0,002952 | 0,003448 | 1,451817 |
| 1231 | -0,583803 | 10,738022 | 6,354115 | 0,004371 | 0,003483 | 0,004622 | 1,514764 |
| 1232 | -0,609511 | 10,737217 | 6,95851 | 0,00447 | 0,003506 | 0,004688 | 0,931858 |
| 1233 | -0,601645 | 11,372292 | 6,965507 | 0,003347 | 0,002942 | 0,003903 | 0,729152 |
| 1234 | -0,603476 | 11,379513 | 6,369462 | 0,003843 | 0,002904 | 0,004252 | 1,259271 |
| 1235 | -0,566926 | 11,871193 | 6,405073 | 0,003167 | 0,002966 | 0,003577 | 1,652791 |
| 1236 | -0,582811 | 11,929001 | 6,977996 | 0,004198 | 0,003141 | 0,004603 | 1,773368 |
| 1237 | -0,573583 | 11,976263 | 6,429808 | 0,003084 | 0,002974 | 0,003469 | 2,310251 |
| 1238 | -0,596348 | 10,74327 | 7,342049 | 0,005424 | 0,004384 | 0,00526 | 1,204638 |
| 1239 | -0,593459 | 10,64411 | 7,473253 | 0,005726 | 0,004787 | 0,005475 | 0,684551 |
| 1240 | -0,6102 | 10,622149 | 7,56461 | 0,005757 | 0,004805 | 0,005502 | 0,379638 |
| 1241 | -0,612856 | 10,733345 | 7,576979 | 0,005471 | 0,004399 | 0,005303 | 0,685762 |
| 1242 | -0,578348 | 11,811542 | 7,575794 | 0,004194 | 0,002985 | 0,004493 | 1,339976 |
| 1243 | -0,582069 | 11,074411 | 8,170748 | 0,004144 | 0,002522 | 0,00426 | 1,931714 |
| 1244 | -0,598136 | 11,07866 | 7,572038 | 0,005138 | 0,002365 | 0,004755 | 1,989833 |
| 1245 | -0,581167 | 11,814491 | 8,16502 | 0,004105 | 0,002983 | 0,004434 | 1,268371 |
| 1246 | -0,588489 | 11,739484 | 8,169146 | 0,00446 | 0,002963 | 0,004723 | 1,163111 |
| 1247 | -0,591233 | 10,721361 | 8,183307 | 0,005555 | 0,004419 | 0,005405 | 1,245807 |
| 1248 | -0,596865 | 10,71104 | 8,800694 | 0,004802 | 0,00375 | 0,005066 | 1,146656 |
| 1249 | -0,568259 | 11,813083 | 8,796584 | 0,004168 | 0,002988 | 0,004529 | 1,210832 |
| 1250 | -0,565324 | 11,812633 | 9,395291 | 0,004228 | 0,002995 | 0,00463 | 1,191544 |
| 1251 | -0,588388 | 10,650249 | 9,393647 | 0,005732 | 0,004483 | 0,00568 | 0,829537 |
| 1252 | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a |
| 1253 | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a |
| 1254 | -0,581064 | 10,640458 | 9,896572 | 0,005791 | 0,004503 | 0,005809 | 0,362832 |
| 1255 | -0,55898 | 11,84332 | 9,908041 | 0,003213 | 0,002904 | 0,003961 | 1,450834 |
| 1256 | -0,570176 | 11,863351 | 9,406712 | 0,004422 | 0,002977 | 0,00478 | 1,625368 |
| 1257 | -0,248502 | 10,542479 | 4,236109 | 0,003617 | 0,002451 | 0,003969 | 2,792413 |
| 1258 | -0,550666 | 11,29533 | 11,780717 | 0,004928 | 0,00436 | 0,006082 | 0,349706 |
| 1259 | -0,564656 | 10,654907 | 10,085447 | 0,005786 | 0,005905 | 0,006657 | 1,631255 |
| 1260 | -0,574838 | 11,724897 | 10,664973 | 0,004736 | 0,004291 | 0,005776 | 0,536757 |
| 1261 | -0,560619 | 10,962214 | 10,653373 | 0,004854 | 0,004378 | 0,005871 | 0,650516 |
| 1262 | -0,58303 | 10,960202 | 10,073539 | 0,011381 | 0,003608 | 0,009355 | 0,974346 |
| 1263 | -0,56307 | 11,801767 | 10,077104 | 0,004717 | 0,004579 | 0,005828 | 0,565762 |
| 1264 | -1,124889 | 11,901818 | 10,064521 | 0,005512 | 0,010321 | 0,008013 | 1,426767 |
| 1265 | -0,57518 | 11,319484 | 10,671432 | 0,004803 | 0,004339 | 0,005831 | 0,918842 |
| 1266 | -0,559158 | 10,718847 | 11,194704 | 0,010054 | 0,015651 | 0,011982 | 1,771066 |
| 1267 | -0,559657 | 10,689607 | 11,623297 | 0,010117 | 0,015712 | 0,012411 | 0,743729 |
| 1268 | -0,572979 | 10,683236 | 11,410378 | 0,01011 | 0,015716 | 0,012209 | 1,04226 |
| 1269 | -0,56212 | 10,76183 | 11,725538 | 0,010116 | 0,015639 | 0,0125 | 0,284653 |
| 1273 | -0,560639 | 11,047008 | 11,787095 | 0,004974 | 0,004393 | 0,006118 | 0,561214 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1274 | -0,552117 | 10,625297 | 10,695523 | 0,012756 | 0,016559 | 0,013165 | 2,846957 |
| 1275 | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a |
| 1276 | -0,557236 | 10,765055 | 11,789472 | 0,010116 | 0,015635 | 0,012561 | 0,405382 |
| 1277 | -0,545974 | 10,673827 | 12,382959 | 0,010195 | 0,015766 | 0,013171 | 0,957798 |
| 1278 | -0,567411 | 11,562208 | 12,398758 | 0,00496 | 0,004341 | 0,006206 | 1,03697 |
| 1279 | -0,584155 | 11,556027 | 12,921944 | 0,005026 | 0,004354 | 0,006346 | 0,757596 |
| 1280 | -0,551876 | 11,29852 | 12,906138 | 0,006008 | 0,005758 | 0,00742 | 1,083392 |
| 1281 | -0,545537 | 11,157817 | 12,649501 | 0,006911 | 0,012565 | 0,010449 | 0,260054 |
| 1282 | -0,596321 | 11,881032 | 12,934833 | 0,002151 | 0,002823 | 0,003702 | 1,355854 |
| 1283 | -0,585277 | 11,893547 | 12,398544 | 0,002454 | 0,00311 | 0,00407 | 1,521731 |
| 1284 | -0,535016 | 11,300226 | 14,039115 | 0,003071 | 0,003476 | 0,004528 | 1,42937 |
| 1285 | -0,504985 | 10,689981 | 14,559941 | 0,010375 | 0,015835 | 0,01542 | 0,416544 |
| 1287 | -0,589743 | 11,888339 | 13,511092 | 0,00222 | 0,002964 | 0,003943 | 1,087355 |
| 1288 | -0,545754 | 10,792453 | 12,484925 | 0,010178 | 0,015636 | 0,013251 | 0,999932 |
| 1289 | -0,563983 | 11,866068 | 11,796331 | 0,00312 | 0,003246 | 0,004589 | 2,13554 |
| 1290 | -0,562305 | 10,993043 | 12,397258 | 0,005054 | 0,004413 | 0,006275 | 0,836537 |
| 1291 | -0,550866 | 10,965018 | 11,783833 | 0,004984 | 0,004401 | 0,006125 | 0,950288 |
| 1292 | -0,557803 | 11,314802 | 13,49164 | 0,004323 | 0,003984 | 0,00572 | 0,73016 |
| 1293 | -0,160192 | -1,198773 | 11,186093 | 0,00445 | 0,002825 | 0,005604 | 0,945382 |
| 1294 | -0,517786 | -1,159752 | 11,43179 | 0,004624 | 0,003069 | 0,005842 | 0,372493 |
| 1295 | -0,639609 | -2,267655 | 17,375601 | 0,004071 | 0,003033 | 0,006504 | 0,922607 |
| 1296 | -0,671197 | -1,236694 | 17,377852 | 0,003907 | 0,00304 | 0,006249 | 1,470527 |
| 1297 | -0,660959 | -1,241042 | 18,329288 | 0,003676 | 0,003127 | 0,006127 | 1,387423 |
| 1298 | -0,655078 | -1,263007 | 18,906069 | 0,003982 | 0,003141 | 0,006599 | 2,026739 |
| 1299 | -0,648873 | -1,124281 | 18,898819 | 0,003991 | 0,003138 | 0,006607 | 2,666055 |
| 1300 | -0,655289 | -0,037038 | 18,317068 | 0,003736 | 0,003112 | 0,006165 | 1,337992 |
| 1301 | -0,651732 | -0,019337 | 18,907207 | 0,003763 | 0,003149 | 0,006292 | 1,596447 |
| 1302 | -0,649206 | -0,16521 | 18,906852 | 0,00418 | 0,003307 | 0,006987 | 1,535418 |
| 1303 | -0,674009 | -0,054474 | 17,364356 | 0,004399 | 0,002994 | 0,006803 | 1,834211 |
| 1304 | -0,667483 | 1,165653 | 17,368538 | 0,004116 | 0,002829 | 0,006483 | 1,911679 |
| 1305 | -0,638879 | 1,135189 | 18,868748 | 0,004158 | 0,003132 | 0,006722 | 1,715641 |
| 1306 | -0,662138 | 1,154437 | 18,312877 | 0,003783 | 0,003109 | 0,006183 | 1,655443 |
| 1307 | -0,660981 | 2,345307 | 18,318139 | 0,003516 | 0,002907 | 0,005846 | 1,192517 |
| 1308 | -0,64448 | 2,370619 | 18,802339 | 0,004739 | 0,003097 | 0,007862 | 3,087887 |
| 1309 | -0,689694 | 2,325342 | 17,344391 | 0,004268 | 0,00292 | 0,006578 | 1,354632 |
| 1310 | -0,634345 | 1,275719 | 18,891574 | 0,004278 | 0,00329 | 0,007044 | 1,356766 |
| 1311 | -0,667893 | 3,554651 | 17,341934 | 0,00388 | 0,002961 | 0,006043 | 2,028382 |
| 1312 | -0,669744 | 3,559951 | 18,316781 | 0,003548 | 0,002962 | 0,005832 | 1,693996 |
| 1313 | -0,669663 | 4,677347 | 18,311041 | 0,00356 | 0,003009 | 0,005803 | 1,122996 |
| 1314 | -0,660965 | 4,689502 | 18,922771 | 0,003582 | 0,003033 | 0,005934 | 1,213804 |
| 1315 | -0,681088 | 4,680939 | 17,356266 | 0,003931 | 0,003037 | 0,006044 | 1,978244 |
| 1316 | -0,646132 | 3,764887 | 18,843582 | 0,003619 | 0,003082 | 0,006122 | 3,502034 |
| 1317 | -0,658396 | 4,535895 | 18,91624 | 0,004036 | 0,003171 | 0,006621 | 1,25335 |
| 1318 | -0,664666 | 5,868528 | 18,886512 | 0,004025 | 0,003176 | 0,006369 | 1,526592 |
| 1319 | -0,677981 | 5,894809 | 17,352693 | 0,003962 | 0,003117 | 0,00602 | 0,987249 |
| 1320 | -0,680925 | 5,881996 | 18,320376 | 0,003563 | 0,003058 | 0,005764 | 1,428986 |
| 1321 | -0,675728 | 7,049732 | 18,323176 | 0,003547 | 0,003099 | 0,005711 | 1,17635 |
| 1322 | -0,663471 | 6,018437 | 18,878595 | 0,004092 | 0,003251 | 0,006569 | 1,27736 |
| 1323 | -0,660815 | 7,049758 | 18,886887 | 0,003626 | 0,003184 | 0,006002 | 1,242147 |
| 1324 | -0,685779 | 7,04337 | 17,362833 | 0,00474 | 0,003408 | 0,006794 | 1,196037 |
| 1325 | -0,657468 | 6,887213 | 18,8725 | 0,004893 | 0,003504 | 0,007462 | 1,177968 |
| 1326 | -0,688936 | 8,299167 | 17,390168 | 0,003978 | 0,003263 | 0,005935 | 1,846404 |
| 1327 | -0,673374 | 8,262591 | 18,892057 | 0,004042 | 0,0033 | 0,006301 | 1,342185 |
| 1328 | -0,686314 | 8,282911 | 18,325436 | 0,003521 | 0,003134 | 0,005649 | 1,245705 |
| 1329 | -0,672729 | 9,459867 | 18,32585 | 0,003477 | 0,003158 | 0,005578 | 1,150263 |
| 1330 | -0,671186 | 8,401258 | 18,88906 | 0,004108 | 0,003355 | 0,00649 | 1,392176 |
| 1331 | -0,65517 | 9,454185 | 18,888054 | 0,0035 | 0,003169 | 0,005699 | 1,450641 |
| 1332 | -0,698566 | 9,443827 | 17,360953 | 0,004914 | 0,003691 | 0,006803 | 1,880393 |
| 1333 | -0,653253 | 9,30625 | 18,876628 | 0,004094 | 0,003387 | 0,006434 | 1,95248 |
| 1334 | -0,680006 | 10,723653 | 17,37905 | 0,003917 | 0,003375 | 0,005782 | 1,524867 |
| 1335 | -0,594153 | 11,877408 | 15,853574 | 0,002004 | 0,003324 | 0,004759 | 2,143493 |
| 1336 | -0,656631 | 11,862286 | 15,874545 | 0,002017 | 0,003392 | 0,004922 | 2,509788 |
| 1337 | -1,914061 | 11,818657 | 17,337041 | 0,001824 | 0,004239 | 0,006418 | 1,373883 |
| 1338 | -3,152504 | 11,783055 | 17,337978 | 0,002154 | 0,004937 | 0,007107 | 1,244079 |
| 1339 | -3,126878 | 11,796171 | 18,30523 | 0,00187 | 0,004286 | 0,006692 | 1,054631 |
| 1340 | -3,117455 | 11,807165 | 18,853674 | 0,001877 | 0,004337 | 0,006862 | 0,889831 |
| 1341 | -4,397228 | 11,772963 | 18,319738 | 0,001544 | 0,00271 | 0,004536 | 1,953727 |
| 1342 | -1,672771 | -3,265788 | 18,367014 | 0,003672 | 0,00697 | 0,008976 | 2,348305 |
| 1343 | -1,674939 | -3,281105 | 18,910398 | 0,003945 | 0,007107 | 0,009679 | 3,571621 |
| 1345 | -3,530307 | -3,130756 | 17,450551 | 0,003129 | 0,005563 | 0,007137 | 2,127975 |
| 1346 | -3,513837 | -3,113192 | 18,369291 | 0,002979 | 0,006533 | 0,008315 | 2,982263 |
| 1347 | -4,559812 | -3,180641 | 18,396337 | 0,002246 | 0,003405 | 0,005161 | 2,828236 |
| 1348 | -1,704338 | -3,10645 | 17,439814 | 0,002608 | 0,00782 | 0,009589 | 3,302619 |
| 1349 | -1,675815 | -3,243766 | 16,653429 | 0,003618 | 0,00683 | 0,00831 | 2,449334 |
| 1350 | -1,673582 | -3,245172 | 17,445074 | 0,003643 | 0,0069 | 0,008615 | 3,742272 |
| 1351 | -1,840625 | -3,256766 | 16,630198 | 0,003617 | 0,006811 | 0,008301 | 1,857151 |
| 1352 | -1,843572 | -3,239647 | 16,481584 | 0,003615 | 0,006807 | 0,00825 | 1,253976 |
| 1353 | -1,893996 | -3,235303 | 16,390433 | 0,003614 | 0,006798 | 0,008218 | 1,474426 |
| 1354 | -1,945648 | -3,230897 | 16,306932 | 0,00315 | 0,005444 | 0,006754 | 1,434248 |
| 1355 | -0,628975 | -3,245769 | 16,142034 | 0,002355 | 0,002845 | 0,004622 | 2,359703 |
| 1356 | -0,622523 | -3,222075 | 16,071287 | 0,002661 | 0,003682 | 0,005625 | 2,098392 |
| 1357 | -0,620557 | -3,162414 | 16,073174 | 0,00267 | 0,003694 | 0,005638 | 1,644957 |
| 1358 | -0,613416 | -3,152668 | 15,935371 | 0,002362 | 0,003018 | 0,004824 | 1,200559 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1359 | -0,609739 | -3,08602 | 15,928255 | 0,002355 | 0,002776 | 0,004458 | 1,246347 |
| 1360 | -1,606954 | -3,115678 | 16,00776 | 0,003769 | 0,005753 | 0,007185 | 1,237093 |
| 1361 | -1,979604 | -3,096429 | 15,95894 | 0,003168 | 0,005474 | 0,006689 | 1,294349 |
| 1362 | -1,95527 | -3,110108 | 16,311449 | 0,003784 | 0,005777 | 0,007295 | 1,341884 |
| 1363 | -0,608402 | -3,087754 | 15,651647 | 0,002355 | 0,00276 | 0,004406 | 1,04343 |
| 1364 | -2,613457 | -3,147902 | 15,618145 | 0,003136 | 0,005446 | 0,006608 | 1,209602 |
| 1365 | -2,633464 | -3,171329 | 15,886777 | 0,003134 | 0,005453 | 0,006675 | 2,231309 |
| 1366 | -1,444471 | -3,130018 | 15,90163 | 0,003179 | 0,00545 | 0,006651 | 1,595181 |
| 1367 | -0,646372 | -2,417685 | 15,930381 | 0,004461 | 0,003092 | 0,006744 | 1,10092 |
| 1368 | -0,633469 | -2,695535 | 15,644159 | 0,004392 | 0,003097 | 0,006619 | 1,559514 |
| 1369 | -4,736759 | -0,162863 | 5,247274 | 0,001982 | 0,002481 | 0,003759 | 1,962945 |
| 1370 | -4,687246 | -1,259842 | 9,965924 | 0,002044 | 0,002941 | 0,004882 | 1,046064 |
| 1371 | -4,82425 | -2,798765 | 9,931563 | 0,002253 | 0,003488 | 0,00454 | 2,293807 |
| 1372 | -4,811562 | -2,805114 | 9,426445 | 0,002758 | 0,003568 | 0,005563 | 1,679804 |
| 1373 | -4,681035 | -1,246686 | 9,755735 | 0,002097 | 0,002922 | 0,004997 | 1,248096 |
| 1374 | -4,680064 | -1,294437 | 9,449271 | 0,002528 | 0,003541 | 0,004996 | 1,316524 |
| 1375 | -4,821865 | -3,346683 | 9,461098 | 0,002168 | 0,003397 | 0,004102 | 1,282511 |
| 1376 | -4,667573 | -1,311206 | 8,835463 | 0,002262 | 0,003444 | 0,004191 | 1,714981 |
| 1377 | -4,821779 | -3,318187 | 8,814752 | 0,002009 | 0,003277 | 0,003442 | 3,428241 |
| 1378 | -4,840774 | -3,357829 | 9,719085 | 0,002155 | 0,003396 | 0,004141 | 1,518968 |
| 1379 | -4,652363 | -0,882034 | 9,524888 | 0,001905 | 0,002808 | 0,004221 | 1,269528 |
| 1382 | -4,674 | 0,096924 | 8,82296 | 0,002184 | 0,002833 | 0,005224 | 2,101813 |
| 1383 | -4,631694 | -1,25472 | 8,850017 | 0,002567 | 0,003538 | 0,004874 | 1,834008 |
| 1384 | -4,650651 | -1,219392 | 9,65664 | 0,002108 | 0,002917 | 0,004982 | 1,456405 |
| 1385 | -4,627809 | -1,178121 | 8,80329 | 0,002776 | 0,003625 | 0,005353 | 0,992311 |
| 1386 | -4,626335 | -1,257751 | 8,19295 | 0,002684 | 0,003544 | 0,004919 | 2,318236 |
| 1387 | -4,522701 | 1,065738 | 15,870086 | 0,002009 | 0,003501 | 0,006348 | 1,806303 |
| 1388 | -4,52573 | 0,633663 | 15,89029 | 0,002005 | 0,003499 | 0,006317 | 2,073647 |
| 1389 | -4,539096 | 0,596717 | 15,323831 | 0,001874 | 0,003261 | 0,005946 | 1,147937 |
| 1390 | -4,530669 | 1,039994 | 15,318955 | 0,001881 | 0,003271 | 0,005975 | 1,057006 |
| 1391 | -4,494207 | 4,126962 | 15,840447 | 0,002484 | 0,003955 | 0,006982 | 1,465517 |
| 1392 | -4,504251 | 4,09128 | 15,284944 | 0,002533 | 0,00394 | 0,006842 | 0,913638 |
| 1393 | -4,493813 | 4,556525 | 15,27976 | 0,002538 | 0,003941 | 0,006848 | 0,997019 |
| 1394 | -4,502918 | 4,583502 | 15,826892 | 0,002485 | 0,003954 | 0,00698 | 1,180238 |
| 1395 | -4,453258 | 7,200871 | 15,287536 | 0,00176 | 0,003135 | 0,006848 | 1,060674 |
| 1396 | -4,465412 | 7,196137 | 15,829266 | 0,001709 | 0,003487 | 0,007223 | 1,410195 |
| 1397 | -4,468451 | 6,779613 | 15,831705 | 0,001695 | 0,003437 | 0,007238 | 1,792789 |
| 1398 | -4,455214 | 6,785429 | 15,27848 | 0,001751 | 0,003104 | 0,006881 | 1,184826 |
| 1402 | -4,653112 | -0,810499 | 7,792568 | 0,00221 | 0,002756 | 0,004503 | 1,170477 |
| 1403 | -4,665945 | -1,024787 | 7,167949 | 0,001963 | 0,003081 | 0,004886 | 0,67371 |
| 1404 | -4,688828 | -1,190659 | 7,196993 | 0,001981 | 0,003135 | 0,004896 | 2,601036 |
| 1405 | -4,678821 | -1,197361 | 7,614565 | 0,001921 | 0,003144 | 0,005181 | 3,115145 |
| 1406 | -4,659269 | -0,882326 | 7,600815 | 0,001738 | 0,002721 | 0,004848 | 1,067092 |
| 1407 | -4,677028 | -1,203356 | 7,979839 | 0,002812 | 0,003612 | 0,005124 | 1,24816 |
| 1408 | -4,688164 | -1,2096 | 8,135289 | 0,003342 | 0,004036 | 0,006148 | 0,925171 |
| 1409 | -4,775703 | -1,286053 | 7,974773 | 0,002829 | 0,004056 | 0,005022 | 0,897408 |
| 1410 | -4,717325 | -2,089419 | 8,215861 | 0,003095 | 0,004221 | 0,005843 | 0,790138 |
| 1411 | -4,743995 | -2,75375 | 8,216326 | 0,001862 | 0,002917 | 0,004233 | 1,619579 |
| 1412 | -4,749897 | -2,754336 | 8,805248 | 0,002317 | 0,003491 | 0,004343 | 1,574972 |
| 1413 | -4,672568 | -1,273134 | 6,515202 | 0,002503 | 0,003926 | 0,005956 | 1,306973 |
| 1414 | -4,689441 | -1,19732 | 6,861356 | 0,002385 | 0,003969 | 0,00674 | 5,048037 |
| 1415 | -4,676519 | -0,516976 | 6,408383 | 0,00184 | 0,002603 | 0,003998 | 1,135456 |
| 1416 | -4,678294 | -0,535846 | 6,163263 | 0,001915 | 0,002601 | 0,004063 | 1,751174 |
| 1417 | -4,658394 | -0,963789 | 6,214159 | 0,002232 | 0,003057 | 0,004853 | 2,048837 |
| 1418 | -4,665751 | -0,966792 | 6,4776 | 0,00216 | 0,00306 | 0,004912 | 0,881438 |
| 1419 | -4,744061 | -1,162418 | 5,807925 | 0,002732 | 0,003118 | 0,005514 | 1,647834 |
| 1420 | -4,675447 | -1,200187 | 6,392173 | 0,002527 | 0,003885 | 0,005907 | 3,137429 |
| 1421 | -4,773281 | -1,140929 | 5,236539 | 0,002321 | 0,003077 | 0,004218 | 1,241631 |
| 1423 | -4,758076 | -3,41231 | 7,625753 | 0,001869 | 0,002935 | 0,003676 | 1,441535 |
| 1424 | -4,727158 | -2,101187 | 7,621502 | 0,003154 | 0,004188 | 0,005679 | 0,842353 |
| 1425 | -4,490444 | 6,197916 | 15,751609 | 0,00172 | 0,003101 | 0,007098 | 1,729821 |
| 1426 | -4,514795 | 4,996743 | 15,765818 | 0,002026 | 0,003325 | 0,006796 | 1,726824 |
| 1427 | -4,489381 | 5,004775 | 15,270828 | 0,003069 | 0,004167 | 0,008782 | 1,221007 |
| 1428 | -4,500293 | 5,956083 | 15,234662 | 0,003018 | 0,004116 | 0,008696 | 1,514444 |
| 1429 | -4,849629 | -0,994295 | 11,257465 | 0,001758 | 0,002859 | 0,004256 | 1,272402 |
| 1430 | -4,862032 | -0,988123 | 11,494353 | 0,001672 | 0,002848 | 0,003991 | 1,233674 |
| 1431 | -4,806701 | -0,091125 | 11,472585 | 0,001684 | 0,002889 | 0,004221 | 1,014101 |
| 1432 | -4,794841 | -0,097783 | 11,239256 | 0,001693 | 0,00288 | 0,004174 | 1,177741 |
| 1433 | -4,821316 | -0,081049 | 11,680836 | 0,001676 | 0,002897 | 0,004263 | 0,971796 |
| 1434 | -4,880134 | -0,983753 | 11,704951 | 0,001664 | 0,002855 | 0,004029 | 1,399863 |
| 1435 | -4,657412 | -0,13277 | 10,080731 | 0,00178 | 0,002834 | 0,004077 | 1,029658 |
| 1436 | -4,670292 | -0,916917 | 10,067452 | 0,001855 | 0,002806 | 0,00421 | 1,116405 |
| 1437 | -4,64503 | -0,133006 | 9,950905 | 0,001996 | 0,002887 | 0,004911 | 1,4511 |
| 1438 | -4,648648 | -0,549708 | 9,526424 | 0,002083 | 0,002875 | 0,004971 | 1,076055 |
| 1439 | -4,933816 | -1,551777 | 7,904417 | 0,002656 | 0,003592 | 0,004803 | 1,277554 |
| 1440 | -4,856932 | -2,015625 | 7,893254 | 0,002872 | 0,003827 | 0,005157 | 0,691851 |
| 1441 | -4,909499 | -1,944685 | 7,907763 | 0,003095 | 0,004198 | 0,005713 | 0,961624 |
| 1442 | -4,892496 | -1,946541 | 7,806949 | 0,00311 | 0,004195 | 0,005691 | 0,697542 |
| 1443 | -4,99873 | -1,843062 | 7,817523 | 0,002489 | 0,003705 | 0,004479 | 1,053306 |
| 1444 | -4,829165 | -3,314028 | 9,432423 | 0,002208 | 0,003432 | 0,004223 | 1,414973 |
| 1445 | -4,702718 | -3,381197 | 8,24128 | 0,00249 | 0,003961 | 0,00459 | 1,641077 |
| 1446 | -4,687437 | -3,387765 | 8,791871 | 0,001807 | 0,00295 | 0,00396 | 1,904778 |
| 1447 | -4,690525 | -3,322655 | 8,820039 | 0,002494 | 0,003626 | 0,004688 | 1,230659 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1448 | -4,157857 | -3,441726 | 9,489151 | 0,00266 | 0,005957 | 0,006526 | 1,405937 |
| 1449 | -4,153935 | -3,364952 | 9,453399 | 0,002676 | 0,005998 | 0,006535 | 1,825448 |
| 1450 | -4,173404 | -3,423214 | 9,972753 | 0,002593 | 0,006019 | 0,006708 | 1,833685 |
| 1451 | -3,865719 | -3,401735 | 8,237071 | 0,002896 | 0,005893 | 0,00616 | 1,94287 |
| 1452 | -3,839789 | -3,399449 | 8,83703 | 0,002817 | 0,005969 | 0,006379 | 1,245273 |
| 1453 | -4,761441 | -3,34903 | 8,213397 | 0,001818 | 0,002931 | 0,003763 | 1,430549 |
| 1454 | -4,9786 | -1,834939 | 8,225546 | 0,002503 | 0,003606 | 0,00459 | 1,282617 |
| 1455 | -4,639858 | -0,562762 | 9,341244 | 0,002098 | 0,002863 | 0,004924 | 1,494349 |
| 1456 | -4,641496 | -0,509497 | 9,272869 | 0,002099 | 0,002855 | 0,004907 | 1,00997 |
| 1457 | -4,637412 | -0,868932 | 9,347476 | 0,002152 | 0,0029 | 0,005096 | 1,230127 |
| 1458 | -4,689743 | -1,145473 | 10,125432 | 0,002029 | 0,002946 | 0,004924 | 2,110361 |
| 1459 | -4,674847 | -0,92349 | 10,134679 | 0,001879 | 0,002846 | 0,004339 | 0,972779 |
| 1460 | -4,688387 | -0,924536 | 11,235791 | 0,002109 | 0,003034 | 0,00532 | 0,802508 |
| 1461 | -4,671994 | -1,026599 | 11,242202 | 0,002176 | 0,003108 | 0,005672 | 1,607112 |
| 1462 | -4,76538 | -3,388185 | 7,619812 | 0,001985 | 0,003008 | 0,00422 | 1,59221 |
| 1463 | -4,767004 | -3,373912 | 7,043926 | 0,001885 | 0,002912 | 0,003506 | 1,492485 |
| 1464 | -4,777968 | -2,090821 | 7,012499 | 0,003205 | 0,004151 | 0,005505 | 0,97323 |
| 1465 | -4,173537 | -3,435439 | 7,632326 | 0,002913 | 0,005747 | 0,005872 | 1,730586 |
| 1466 | -4,163509 | -3,422328 | 8,213261 | 0,002838 | 0,005822 | 0,006075 | 1,306151 |
| 1467 | -4,294781 | -3,428112 | 7,033787 | 0,002971 | 0,005661 | 0,005651 | 1,250679 |
| 1468 | -4,182234 | -3,437454 | 7,080632 | 0,002985 | 0,005681 | 0,00569 | 1,944709 |
| 1469 | -4,205842 | -3,363068 | 7,018748 | 0,003 | 0,005712 | 0,005682 | 1,078709 |
| 1470 | -4,508053 | -3,36023 | 7,016133 | 0,002941 | 0,005658 | 0,005612 | 1,02213 |
| 1471 | -4,754945 | -3,194373 | 7,035597 | 0,001936 | 0,00292 | 0,003696 | 1,490503 |
| 1472 | -4,979956 | -1,8673 | 7,606232 | 0,003821 | 0,008582 | 0,008158 | 1,559614 |
| 1473 | -4,766355 | -2,542109 | 6,414845 | 0,00204 | 0,002866 | 0,003922 | 1,144095 |
| 1474 | -4,760774 | -2,539015 | 6,182863 | 0,002067 | 0,002862 | 0,003884 | 0,744842 |
| 1475 | -4,757315 | -2,771917 | 6,180222 | 0,002405 | 0,002967 | 0,004676 | 0,484221 |
| 1476 | -4,767711 | -2,860099 | 6,29855 | 0,002386 | 0,002979 | 0,004691 | 1,225615 |
| 1477 | -4,765274 | -2,724114 | 6,421128 | 0,002361 | 0,002967 | 0,004736 | 1,061775 |
| 1478 | -4,775967 | -3,266234 | 6,421738 | 0,001958 | 0,002917 | 0,003523 | 1,421243 |
| 1479 | -4,79261 | -3,261148 | 5,816808 | 0,00264 | 0,003515 | 0,004154 | 1,109417 |
| 1480 | -4,797601 | -2,129417 | 6,414661 | 0,003255 | 0,004112 | 0,005344 | 1,043538 |
| 1481 | -4,797834 | -2,127641 | 5,797449 | 0,003314 | 0,004081 | 0,005195 | 1,263275 |
| 1482 | -4,391267 | -3,337365 | 6,418266 | 0,003046 | 0,005625 | 0,005458 | 0,913359 |
| 1483 | -4,331813 | -3,360749 | 6,424415 | 0,003054 | 0,005623 | 0,005468 | 1,265342 |
| 1484 | -4,206703 | -3,378576 | 6,411817 | 0,004194 | 0,007321 | 0,007469 | 1,689024 |
| 1485 | -4,435407 | -3,347446 | 6,86568 | 0,002977 | 0,005662 | 0,005584 | 1,980915 |
| 1486 | -4,429083 | -3,351696 | 6,655562 | 0,003005 | 0,005637 | 0,005518 | 1,57147 |
| 1487 | -4,266668 | -3,299193 | 6,222969 | 0,003103 | 0,005647 | 0,005436 | 1,394532 |
| 1488 | -4,252389 | -3,27007 | 5,793242 | 0,003166 | 0,005616 | 0,005319 | 1,445629 |
| 1489 | -4,192929 | -3,50357 | 6,396018 | 0,003231 | 0,005561 | 0,005791 | 0,373669 |
| 1490 | -3,9261 | -3,426247 | 7,100269 | 0,003036 | 0,005737 | 0,005759 | 1,304806 |
| 1491 | -3,920277 | -3,46226 | 6,69007 | 0,003087 | 0,00567 | 0,005621 | 0,786771 |
| 1492 | -4,230998 | -3,281846 | 5,654438 | 0,003186 | 0,005598 | 0,005281 | 1,367657 |
| 1493 | -4,246258 | -3,279688 | 5,231546 | 0,003236 | 0,005548 | 0,005159 | 1,279674 |
| 1494 | -4,812505 | -3,226634 | 5,223473 | 0,002038 | 0,00289 | 0,003358 | 1,731259 |
| 1495 | -4,247411 | -3,297557 | 5,048852 | 0,004552 | 0,007147 | 0,006793 | 1,536453 |
| 1496 | -4,265292 | -3,283746 | 4,67227 | 0,004641 | 0,007088 | 0,006611 | 1,192424 |
| 1497 | -4,702433 | -3,276887 | 4,660806 | 0,003208 | 0,005405 | 0,004905 | 1,04569 |
| 1498 | -4,808071 | -3,22345 | 5,807775 | 0,002148 | 0,002959 | 0,00388 | 1,234337 |
| 1499 | -4,794854 | -2,120163 | 5,236399 | 0,003368 | 0,004053 | 0,005067 | 1,111976 |
| 1500 | -4,809813 | -3,241708 | 4,733228 | 0,002146 | 0,003112 | 0,003547 | 1,617443 |
| 1501 | -4,808478 | -2,133762 | 4,66883 | 0,003413 | 0,004019 | 0,004935 | 0,890409 |
| 1502 | -4,808128 | -2,087537 | 5,233033 | 0,003424 | 0,004364 | 0,005199 | 1,174552 |
| 1503 | -4,811997 | -3,210945 | 4,678027 | 0,002146 | 0,002923 | 0,003466 | 3,012459 |
| 1504 | -4,234101 | -3,256743 | 4,655913 | 0,003313 | 0,005496 | 0,005013 | 1,083147 |
| 1505 | -4,230685 | -3,263578 | 4,059606 | 0,004811 | 0,007009 | 0,006356 | 0,836474 |
| 1506 | -4,76142 | -3,244718 | 4,06111 | 0,0022 | 0,002914 | 0,003401 | 1,680822 |
| 1507 | -4,805974 | -3,230923 | 4,105302 | 0,002191 | 0,002991 | 0,003424 | 2,237028 |
| 1508 | -4,77954 | -2,129301 | 4,062484 | 0,003472 | 0,003991 | 0,004817 | 0,912311 |
| 1509 | -4,718882 | -2,932478 | 4,083835 | 0,002792 | 0,003122 | 0,004477 | 3,636591 |
| 1510 | -4,236759 | -3,240442 | 3,441553 | 0,003453 | 0,005365 | 0,004727 | 0,642134 |
| 1511 | -4,710755 | -3,253312 | 3,441714 | 0,003346 | 0,005279 | 0,004622 | 0,612554 |
| 1512 | -4,78437 | -3,228004 | 3,469559 | 0,002195 | 0,00287 | 0,003251 | 1,088626 |
| 1513 | -4,779515 | -3,219894 | 4,023126 | 0,002169 | 0,003057 | 0,003374 | 1,777617 |
| 1514 | -4,234472 | -3,247043 | 4,008226 | 0,004826 | 0,007013 | 0,006336 | 1,702565 |
| 1515 | -4,775403 | -3,132879 | 3,443508 | 0,00224 | 0,002887 | 0,003336 | 1,577917 |
| 1516 | -4,777244 | -2,128063 | 3,433174 | 0,003523 | 0,003957 | 0,004695 | 2,626738 |
| 1517 | -4,790855 | -2,145722 | 2,86631 | 0,003764 | 0,004493 | 0,004805 | 2,501964 |
| 1518 | -4,774485 | -3,094339 | 2,849515 | 0,002398 | 0,002859 | 0,003442 | 1,893878 |
| 1519 | -4,775586 | -3,148383 | 2,876172 | 0,002393 | 0,002865 | 0,003442 | 1,120972 |
| 1520 | -4,77713 | -2,576304 | 2,85951 | 0,002427 | 0,002803 | 0,003473 | 1,539402 |
| 1521 | -4,7678 | -2,578596 | 2,266865 | 0,002414 | 0,002751 | 0,003311 | 2,209413 |
| 1522 | -4,783103 | -3,101575 | 2,25942 | 0,002372 | 0,002806 | 0,003281 | 1,60841 |
| 1523 | -4,729361 | -3,168555 | 2,84333 | 0,004853 | 0,006731 | 0,005662 | 2,129735 |
| 1524 | -4,2899 | -3,17074 | 2,848516 | 0,005076 | 0,006856 | 0,005856 | 1,089354 |
| 1525 | -4,253333 | -3,204156 | 3,425538 | 0,003457 | 0,00538 | 0,004728 | 1,271288 |
| 1526 | -4,297354 | -3,136124 | 2,833332 | 0,005084 | 0,006879 | 0,005855 | 0,781074 |
| 1527 | -4,306279 | -3,14425 | 2,250741 | 0,005194 | 0,006766 | 0,00564 | 1,54715 |
| 1528 | -4,926945 | -0,962374 | 11,848621 | 0,001782 | 0,002948 | 0,004617 | 1,842573 |
| 1529 | -4,903812 | -0,967599 | 11,762418 | 0,001777 | 0,003017 | 0,004748 | 2,136974 |
| 1531 | -5,309407 | -0,509451 | 12,936677 | 0,001578 | 0,002847 | 0,004198 | 1,41039 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1532 | -4,674121 | -0,567201 | 12,932592 | 0,002527 | 0,010906 | 0,012147 | 0,606138 |
| 1533 | -5,16231 | -0,532687 | 12,594603 | 0,0016 | 0,002848 | 0,004158 | 1,530284 |
| 1534 | -4,844066 | -0,544117 | 12,575553 | 0,001949 | 0,003032 | 0,00517 | 1,462164 |
| 1535 | -5,291828 | 1,066733 | 12,884135 | 0,001297 | 0,002373 | 0,004952 | 1,407507 |
| 1536 | -5,269643 | 1,253976 | 12,891063 | 0,001304 | 0,002341 | 0,004523 | 1,019266 |
| 1537 | -5,136865 | 1,263134 | 12,694638 | 0,001311 | 0,002382 | 0,004953 | 1,073657 |
| 1538 | -4,925713 | -0,957842 | 11,806645 | 0,001871 | 0,002972 | 0,00515 | 1,140792 |
| 1539 | -4,664112 | -0,997442 | 11,829559 | 0,003047 | 0,010429 | 0,012493 | 1,195602 |
| 1540 | -4,690128 | -0,715468 | 12,427502 | 0,001977 | 0,003034 | 0,005163 | 1,249005 |
| 1541 | -4,69354 | -2,761151 | 8,811448 | 0,0038 | 0,013592 | 0,01121 | 1,031092 |
| 1542 | -4,321119 | -3,278467 | 1,700259 | 0,005249 | 0,006558 | 0,005427 | 1,224797 |
| 1543 | -4,685875 | -3,264886 | 1,710402 | 0,004179 | 0,004948 | 0,004769 | 1,03646 |
| 1544 | -4,764364 | -3,262311 | 1,758704 | 0,002388 | 0,002864 | 0,00325 | 2,911048 |
| 1546 | -4,302882 | -3,272336 | 2,23971 | 0,005163 | 0,006663 | 0,005608 | 1,430301 |
| 1547 | -4,77867 | -3,234389 | 2,245669 | 0,00231 | 0,002806 | 0,003205 | 1,733026 |
| 1549 | -4,658347 | 0,942121 | 10,937068 | 0,001181 | 0,002111 | 0,003995 | 1,526827 |
| 1550 | -4,682722 | 0,714146 | 11,198945 | 0,001733 | 0,002912 | 0,004644 | 1,627119 |
| 1552 | -4,633433 | 1,054546 | 10,922605 | 0,001164 | 0,002168 | 0,004541 | 1,04265 |
| 1553 | -4,63794 | 1,526926 | 10,115637 | 0,002603 | 0,002966 | 0,006908 | 0,781427 |
| 1554 | -4,569457 | 1,041211 | 10,884766 | 0,001099 | 0,002365 | 0,005888 | 2,598043 |
| 1555 | -4,633438 | 0,832254 | 9,971242 | 0,001113 | 0,002127 | 0,005099 | 1,02736 |
| 1556 | -4,854236 | -0,072327 | 11,732646 | 0,001705 | 0,002975 | 0,004578 | 1,872451 |
| 1557 | -4,872324 | -0,07133 | 11,767381 | 0,00176 | 0,002914 | 0,004632 | 2,044876 |
| 1558 | -4,878278 | -0,068282 | 11,817053 | 0,001806 | 0,002986 | 0,005044 | 2,06198 |
| 1559 | -5,160213 | -0,381411 | 12,728699 | 0,001767 | 0,003024 | 0,005436 | 1,144159 |
| 1560 | -5,151413 | -0,424435 | 12,687888 | 0,002093 | 0,003103 | 0,006188 | 0,831533 |
| 1561 | -5,146286 | -0,430253 | 12,601354 | 0,002099 | 0,003097 | 0,006166 | 1,172487 |
| 1562 | -4,697998 | -0,569239 | 12,436029 | 0,002074 | 0,00308 | 0,005564 | 1,323612 |
| 1564 | -4,626458 | 5,34618 | 12,361877 | 0,001914 | 0,002784 | 0,006174 | 1,181168 |
| 1565 | -4,62212 | 8,040505 | 12,391436 | 0,00196 | 0,003022 | 0,005928 | 0,985745 |
| 1566 | -4,611415 | 5,665873 | 12,376912 | 0,001922 | 0,002815 | 0,006159 | 1,27791 |
| 1567 | -4,613668 | 9,095688 | 12,405945 | 0,001933 | 0,003111 | 0,005537 | 1,128547 |
| 1568 | -5,252843 | 1,57989 | 12,893133 | 0,001319 | 0,00236 | 0,004522 | 1,042666 |
| 1569 | -5,213868 | 5,343342 | 12,850233 | 0,001319 | 0,002341 | 0,004363 | 1,37322 |
| 1570 | -5,101313 | 5,348767 | 12,631935 | 0,001333 | 0,002312 | 0,004254 | 1,5068 |
| 1571 | -4,762589 | 8,030253 | 12,465566 | 0,001409 | 0,002452 | 0,004143 | 1,080722 |
| 1572 | -4,732041 | 5,646556 | 12,430333 | 0,001373 | 0,002382 | 0,004502 | 2,157179 |
| 1573 | -4,741138 | 5,339222 | 12,429419 | 0,001362 | 0,002361 | 0,004512 | 1,008612 |
| 1574 | -4,817048 | -0,549744 | 12,524345 | 0,001755 | 0,002974 | 0,004794 | 2,553828 |
| 1575 | -4,847568 | 8,03523 | 12,649192 | 0,001401 | 0,002455 | 0,004174 | 2,248346 |
| 1576 | -4,815191 | 5,671488 | 12,623206 | 0,001449 | 0,002627 | 0,005207 | 2,786264 |
| 1577 | -4,983162 | -0,520767 | 12,60274 | 0,00197 | 0,003062 | 0,005233 | 1,223228 |
| 1578 | -4,83829 | 5,358179 | 12,588327 | 0,00135 | 0,002334 | 0,004303 | 3,437678 |
| 1579 | -5,098357 | 5,566557 | 12,623701 | 0,001413 | 0,002581 | 0,005118 | 0,782243 |
| 1580 | -5,132087 | 8,023747 | 12,643148 | 0,001387 | 0,002429 | 0,004108 | 1,348845 |
| 1581 | -5,203514 | 8,018748 | 12,83769 | 0,001381 | 0,002433 | 0,004145 | 0,894241 |
| 1582 | -5,242538 | 6,283705 | 12,821457 | 0,001434 | 0,002574 | 0,004562 | 1,216289 |
| 1583 | -5,230241 | 5,670169 | 12,807854 | 0,001333 | 0,002329 | 0,004256 | 0,778607 |
| 1584 | -5,112791 | 6,289052 | 12,630637 | 0,001459 | 0,002578 | 0,004702 | 0,897244 |
| 1585 | -4,761513 | 4,322693 | 14,081586 | 0,00173 | 0,002809 | 0,00662 | 1,369699 |
| 1586 | -4,679011 | 4,077815 | 13,507165 | 0,002282 | 0,003128 | 0,006744 | 1,150995 |
| 1587 | -4,687844 | 2,681637 | 13,547827 | 0,002228 | 0,003008 | 0,006787 | 1,173705 |
| 1588 | -4,678531 | 5,586308 | 13,494327 | 0,001818 | 0,002877 | 0,006422 | 0,735695 |
| 1589 | -4,700496 | 5,410322 | 13,725211 | 0,001751 | 0,00288 | 0,006051 | 0,667243 |
| 1590 | -4,820039 | 5,432918 | 13,787666 | 0,001725 | 0,002873 | 0,006025 | 0,833527 |
| 1591 | -4,856468 | 4,327423 | 14,165913 | 0,001669 | 0,002804 | 0,006124 | 1,590753 |
| 1592 | -4,786982 | 6,597385 | 13,39843 | 0,002334 | 0,003302 | 0,006572 | 0,988217 |
| 1593 | -4,662326 | 6,583578 | 13,331413 | 0,002367 | 0,003312 | 0,0066 | 1,122691 |
| 1594 | -5,33482 | 4,460305 | 14,555452 | 0,001411 | 0,002591 | 0,004502 | 1,375056 |
| 1595 | -4,809035 | 2,850207 | 13,684989 | 0,001678 | 0,002665 | 0,006025 | 5,210897 |
| 1596 | -5,340633 | 4,197407 | 14,523137 | 0,001405 | 0,002579 | 0,004497 | 1,426756 |
| 1597 | -4,711874 | 6,203041 | 11,454016 | 0,001403 | 0,002427 | 0,003998 | 0,894151 |
| 1598 | -4,699889 | 6,129373 | 11,224348 | 0,001389 | 0,002307 | 0,003819 | 1,149096 |
| 1599 | -4,680464 | 9,518083 | 11,255189 | 0,001524 | 0,00251 | 0,004128 | 1,082667 |
| 1600 | -4,729911 | 6,272264 | 11,670751 | 0,001585 | 0,00252 | 0,004334 | 0,684575 |
| 1601 | -4,727887 | 9,513512 | 11,695771 | 0,001413 | 0,00244 | 0,003698 | 1,044473 |
| 1602 | -4,634728 | 7,242592 | 11,21106 | 0,001446 | 0,002403 | 0,004083 | 0,57434 |
| 1603 | -4,640284 | 6,859288 | 11,213129 | 0,001437 | 0,002384 | 0,0041 | 1,228381 |
| 1604 | -4,635412 | 6,749856 | 10,977649 | 0,00141 | 0,002331 | 0,003741 | 0,624001 |
| 1605 | -4,628135 | 7,15435 | 10,787178 | 0,001439 | 0,002374 | 0,003861 | 0,7463 |
| 1606 | -4,60587 | 6,118088 | 11,212711 | 0,001402 | 0,002356 | 0,003982 | 1,982731 |
| 1607 | -4,768583 | 6,284022 | 11,716409 | 0,001856 | 0,002736 | 0,005254 | 0,586274 |
| 1608 | -4,759291 | 9,480906 | 11,745882 | 0,001705 | 0,003211 | 0,004637 | 1,510757 |
| 1609 | -4,779674 | 6,29784 | 11,756536 | 0,001851 | 0,002739 | 0,005259 | 0,40793 |
| 1610 | -4,778719 | 9,462148 | 11,783523 | 0,001659 | 0,002889 | 0,004397 | 1,664266 |
| 1611 | -4,794131 | 6,308212 | 11,798822 | 0,001847 | 0,00274 | 0,005263 | 0,97967 |
| 1612 | -4,77511 | 9,45989 | 11,831658 | 0,001866 | 0,002988 | 0,004951 | 1,738854 |
| 1613 | -4,690766 | 6,15725 | 11,432258 | 0,001413 | 0,00259 | 0,004446 | 0,753107 |
| 1614 | -4,713936 | 3,942914 | 11,405878 | 0,001143 | 0,002202 | 0,004837 | 1,295653 |
| 1615 | -4,746621 | 3,933566 | 11,6198 | 0,001222 | 0,002786 | 0,006283 | 0,607102 |
| 1616 | -4,701636 | 6,225095 | 11,656991 | 0,001678 | 0,002641 | 0,005057 | 0,95612 |
| 1617 | -4,704671 | 3,95402 | 11,203067 | 0,001327 | 0,002205 | 0,00435 | 0,953084 |
| 1618 | -4,68513 | 6,086061 | 11,215129 | 0,001403 | 0,002336 | 0,00401 | 0,830797 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1619 | -4,736994 | 6,236611 | 11,709368 | 0,001953 | 0,00281 | 0,005899 | 0,92832 |
| 1620 | -4,780613 | 3,952947 | 11,656744 | 0,001968 | 0,002712 | 0,006648 | 0,619166 |
| 1621 | -4,757915 | 6,238016 | 11,733489 | 0,002016 | 0,002942 | 0,006466 | 0,650925 |
| 1622 | -4,769412 | 3,972337 | 11,70592 | 0,001259 | 0,002472 | 0,004933 | 1,324393 |
| 1623 | -4,761565 | 6,24539 | 11,779443 | 0,001639 | 0,00255 | 0,004822 | 0,786938 |
| 1624 | -4,776576 | 3,981327 | 11,743895 | 0,001924 | 0,00274 | 0,006364 | 0,953277 |
| 1625 | -4,630175 | 3,970651 | 11,184351 | 0,001308 | 0,00232 | 0,004655 | 1,516581 |
| 1626 | -4,653454 | 0,53435 | 9,316144 | 0,00267 | 0,002841 | 0,006461 | 0,779864 |
| 1627 | -4,649197 | 1,271248 | 9,434172 | 0,00114 | 0,002016 | 0,004108 | 0,899988 |
| 1628 | -4,652561 | 1,021001 | 9,757384 | 0,00263 | 0,002902 | 0,006699 | 0,581327 |
| 1629 | -4,585607 | 8,222718 | 10,519377 | 0,001472 | 0,002403 | 0,003837 | 0,721067 |
| 1630 | -4,596635 | 8,676921 | 10,139434 | 0,001477 | 0,00239 | 0,003697 | 2,224206 |
| 1631 | -4,581129 | 8,807939 | 10,006776 | 0,00148 | 0,002386 | 0,003654 | 1,028813 |
| 1632 | -4,582333 | 9,165585 | 9,59451 | 0,001404 | 0,002143 | 0,003381 | 1,197551 |
| 1633 | -4,578763 | 9,29636 | 9,43961 | 0,001406 | 0,002139 | 0,003333 | 1,20203 |
| 1634 | -4,556748 | 9,710695 | 9,756758 | 0,001685 | 0,002524 | 0,003985 | 1,105264 |
| 1635 | -4,568568 | 9,819189 | 9,765439 | 0,00144 | 0,002345 | 0,003355 | 1,156038 |
| 1636 | -4,565668 | 9,863089 | 9,3177 | 0,001504 | 0,00219 | 0,003699 | 2,567323 |
| 1637 | -4,569739 | 9,986098 | 9,310302 | 0,00169 | 0,002534 | 0,003766 | 1,415516 |
| 1638 | -4,584832 | 9,579888 | 10,162195 | 0,001442 | 0,002366 | 0,003471 | 1,878277 |
| 1639 | -4,570958 | 9,01593 | 9,249213 | 0,001668 | 0,002433 | 0,003853 | 1,270172 |
| 1640 | -5,197793 | 4,337775 | 14,369403 | 0,001467 | 0,002593 | 0,004977 | 1,767706 |
| 1641 | -5,22529 | 1,062115 | 13,267336 | 0,001761 | 0,002958 | 0,004784 | 0,7874 |
| 1642 | -4,665579 | 0,103269 | 8,085903 | 0,002129 | 0,002807 | 0,004665 | 1,035701 |
| 1643 | -4,671459 | -0,098458 | 8,200634 | 0,002139 | 0,002747 | 0,004625 | 1,055415 |
| 1644 | -4,670536 | -0,245293 | 8,280177 | 0,002219 | 0,002988 | 0,005196 | 1,587755 |
| 1645 | -4,655256 | -0,330894 | 7,738038 | 0,002298 | 0,002752 | 0,004872 | 2,541843 |
| 1646 | -4,66864 | -0,081305 | 7,734518 | 0,002172 | 0,002721 | 0,004524 | 1,191663 |
| 1647 | -4,668652 | -0,533974 | 7,685921 | 0,002199 | 0,00273 | 0,00448 | 0,971763 |
| 1648 | -4,690234 | -0,731706 | 7,077935 | 0,001824 | 0,002695 | 0,004563 | 1,161986 |
| 1649 | -4,686898 | -0,827345 | 6,4543 | 0,001908 | 0,00284 | 0,004384 | 1,420045 |
| 1650 | -4,652269 | 1,13122 | 9,614033 | 0,001101 | 0,002068 | 0,00464 | 1,213198 |
| 1651 | -4,631448 | 3,98699 | 10,869537 | 0,002213 | 0,002771 | 0,007304 | 0,986667 |
| 1652 | -4,635862 | 4,004359 | 10,693184 | 0,001174 | 0,001976 | 0,003674 | 0,925966 |
| 1653 | -4,634883 | 4,029736 | 10,470395 | 0,00118 | 0,00197 | 0,003716 | 1,241724 |
| 1654 | -4,640145 | 4,645369 | 10,459691 | 0,001176 | 0,00196 | 0,003596 | 0,666865 |
| 1655 | -4,642882 | 4,662738 | 10,685535 | 0,001171 | 0,001971 | 0,00366 | 0,937905 |
| 1656 | -4,630384 | 2,540648 | 11,18257 | 0,001356 | 0,00244 | 0,004763 | 1,007754 |
| 1657 | -4,664629 | 2,690657 | 10,629147 | 0,002731 | 0,003409 | 0,00831 | 1,584219 |
| 1658 | -5,351305 | 1,061337 | 13,492383 | 0,001204 | 0,002252 | 0,004015 | 1,358742 |
| 1660 | -5,319758 | -0,075153 | 13,168218 | 0,001621 | 0,002874 | 0,004548 | 1,211923 |
| 1661 | -5,337013 | 0,928215 | 13,463072 | 0,001192 | 0,002307 | 0,004621 | 1,177825 |
| 1662 | -5,301567 | 0,621955 | 13,384925 | 0,001205 | 0,002295 | 0,004423 | 1,938556 |
| 1663 | -5,297345 | 0,383846 | 13,313408 | 0,001675 | 0,003001 | 0,005533 | 1,636461 |
| 1664 | -5,315371 | 5,555935 | 14,153588 | 0,001309 | 0,002388 | 0,004446 | 1,440359 |
| 1665 | -5,188723 | 5,496601 | 13,967006 | 0,001303 | 0,002428 | 0,004847 | 1,32232 |
| 1666 | -5,263887 | 6,723193 | 13,77947 | 0,00134 | 0,002423 | 0,004202 | 0,902899 |
| 1667 | -5,310169 | 5,647858 | 14,120276 | 0,0013 | 0,00243 | 0,004682 | 1,20714 |
| 1668 | -5,157164 | 6,658973 | 13,565988 | 0,001695 | 0,002828 | 0,005524 | 0,509671 |
| 1669 | -4,655145 | 2,267891 | 10,035243 | 0,001185 | 0,002235 | 0,0046 | 0,960844 |
| 1670 | -4,659147 | 2,165606 | 10,25358 | 0,001179 | 0,002245 | 0,00468 | 1,322603 |
| 1671 | -4,694968 | 2,090901 | 10,390256 | 0,002728 | 0,003252 | 0,00802 | 1,453649 |
| 1672 | -4,647047 | 2,811045 | 10,254262 | 0,001219 | 0,002302 | 0,004648 | 1,090378 |
| 1673 | -4,65185 | 2,724908 | 10,475144 | 0,001235 | 0,002245 | 0,004512 | 2,32328 |
| 1674 | -4,644698 | 0,642581 | 9,203136 | 0,001035 | 0,00196 | 0,004374 | 2,351608 |
| 1675 | -4,648861 | 0,814909 | 9,044682 | 0,001088 | 0,001927 | 0,00401 | 2,525947 |
| 1676 | -4,66945 | 0,235779 | 8,715877 | 0,001004 | 0,001831 | 0,004042 | 1,663073 |
| 1677 | -4,651017 | 0,413203 | 8,586707 | 0,000997 | 0,001856 | 0,004073 | 1,890773 |
| 1678 | -4,64444 | 1,618043 | 9,974934 | 0,001138 | 0,002163 | 0,004612 | 0,779677 |
| 1679 | -4,641673 | 1,738304 | 9,772708 | 0,00119 | 0,00208 | 0,004155 | 0,594417 |
| 1680 | -5,136579 | 8,127467 | 13,077021 | 0,001487 | 0,00259 | 0,004614 | 1,636093 |
| 1681 | -5,209911 | 8,176622 | 13,279571 | 0,001377 | 0,002457 | 0,004138 | 1,485852 |
| 1682 | -4,626006 | 1,750886 | 11,185173 | 0,001222 | 0,002203 | 0,00443 | 1,470753 |
| 1683 | -4,76997 | -0,859714 | 5,228571 | 0,00205 | 0,002662 | 0,003747 | 0,755849 |
| 1684 | -4,760402 | -0,873131 | 4,66681 | 0,002147 | 0,002653 | 0,003646 | 1,251544 |
| 1685 | -4,773546 | -1,14519 | 4,668185 | 0,002456 | 0,003068 | 0,004098 | 0,945741 |
| 1686 | -4,780522 | -1,136315 | 4,068374 | 0,002716 | 0,003074 | 0,004153 | 1,542378 |
| 1687 | -4,761881 | -0,713847 | 4,065121 | 0,002909 | 0,002527 | 0,004676 | 0,535427 |
| 1688 | -4,763948 | -0,70362 | 3,470305 | 0,003068 | 0,002493 | 0,004503 | 0,75108 |
| 1689 | -4,780761 | -1,137089 | 3,462893 | 0,002866 | 0,003053 | 0,004007 | 1,751617 |
| 1690 | -4,769229 | -2,727273 | 7,013479 | 0,002258 | 0,003313 | 0,005428 | 1,90033 |
| 1691 | -4,645051 | 0,399612 | 10,528734 | 0,001091 | 0,002076 | 0,004609 | 1,030364 |
| 1692 | -4,638649 | 0,681853 | 10,731629 | 0,001154 | 0,002095 | 0,004337 | 0,977279 |
| 1697 | -4,635615 | 3,394675 | 10,396693 | 0,001305 | 0,002149 | 0,004313 | 1,338309 |
| 1699 | -0,531144 | -0,852057 | 5,760434 | 0,002502 | 0,002108 | 0,002844 | 1,087086 |
| 1700 | -0,531768 | -0,834915 | 5,715066 | 0,002534 | 0,001982 | 0,002848 | 1,173771 |
| 1701 | -0,568827 | 0,033722 | 5,725064 | 0,002559 | 0,00214 | 0,002959 | 1,485951 |
| 1702 | 0 | 0 | 0 | 0,000908 | 0,000977 | 0,001629 | 3,166553 |
| 1703 | -5,576566 | 0,000173 | 0,063082 | 0,000855 | 0,001449 | 0,001818 | 3,353096 |
| 1706 | 0,016573 | -1,054884 | 0,041023 | 0,001161 | 0,001496 | 0,001939 | 2,854693 |
| 1707 | -4,632511 | 3,239503 | 11,183957 | 0,001121 | 0,002135 | 0,004356 | 2,267869 |
| 1708 | -4,742038 | 3,169336 | 11,631031 | 0,001088 | 0,002148 | 0,004698 | 1,320243 |
| 1709 | -4,700251 | 3,238758 | 11,212464 | 0,001154 | 0,001994 | 0,00396 | 1,591772 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1710 | -4,717044 | 3,208755 | 11,425125 | 0,001143 | 0,002041 | 0,004136 | 0,689047 |
| 1711 | -4,71888 | 2,451751 | 11,444519 | 0,001333 | 0,002468 | 0,004864 | 1,029694 |
| 1712 | -4,74245 | 2,376793 | 11,656026 | 0,001358 | 0,002363 | 0,004632 | 0,978891 |
| 1713 | -4,705766 | 2,524398 | 11,222094 | 0,001365 | 0,002337 | 0,004503 | 1,437446 |
| 1715 | -4,619898 | 6,326202 | 10,024568 | 0,001423 | 0,002257 | 0,003594 | 0,838326 |
| 1716 | -4,62413 | 6,425203 | 10,240499 | 0,001443 | 0,002302 | 0,003828 | 0,840775 |
| 1718 | -4,608294 | 6,971136 | 9,959177 | 0,001488 | 0,002555 | 0,004044 | 0,881386 |
| 1719 | -4,600627 | 6,848549 | 9,766424 | 0,001473 | 0,002386 | 0,003818 | 0,935577 |
| 1720 | -4,610127 | 7,607946 | 10,968485 | 0,001457 | 0,002406 | 0,003997 | 0,468085 |
| 1721 | -4,630358 | 11,905115 | 8,680691 | 0,001363 | 0,002304 | 0,003263 | 1,703048 |
| 1722 | -4,545535 | 9,995476 | 8,770129 | 0,00174 | 0,002514 | 0,003708 | 5,351341 |
| 1725 | -4,567526 | 9,724535 | 9,952383 | 0,001474 | 0,002396 | 0,0036 | 1,192641 |
| 1726 | -4,566981 | 9,543328 | 10,129811 | 0,001443 | 0,002366 | 0,003468 | 1,030686 |
| 1727 | -4,613551 | 9,581653 | 11,232214 | 0,001528 | 0,002513 | 0,004134 | 1,446521 |
| 1728 | -4,63058 | 6,492384 | 10,396408 | 0,001442 | 0,002315 | 0,003871 | 1,306936 |
| 1729 | -4,616284 | 7,061531 | 10,098146 | 0,001693 | 0,002461 | 0,004294 | 1,072439 |
| 1730 | -4,618516 | 5,794018 | 10,236233 | 0,001427 | 0,002438 | 0,004235 | 0,424085 |
| 1731 | -4,616261 | 4,719999 | 11,180555 | 0,001358 | 0,002584 | 0,005236 | 1,040569 |
| 1732 | -4,644355 | 4,681912 | 10,856259 | 0,001338 | 0,002982 | 0,006632 | 1,17102 |
| 1733 | -4,629699 | 5,862191 | 10,461451 | 0,00142 | 0,002404 | 0,004141 | 1,00985 |
| 1735 | -4,646975 | 3,3548 | 10,614747 | 0,00116 | 0,002121 | 0,004609 | 0,973998 |
| 1736 | -4,644677 | 3,304521 | 10,803461 | 0,001161 | 0,002559 | 0,005799 | 4,058866 |
| 1738 | -4,630641 | 5,910353 | 10,62789 | 0,001395 | 0,003438 | 0,005999 | 0,654355 |
| 1739 | -4,604025 | 5,208716 | 10,387215 | 0,001403 | 0,00253 | 0,004623 | 0,696759 |
| 1740 | -4,618327 | 5,267609 | 10,612433 | 0,00141 | 0,002372 | 0,004418 | 1,733362 |
| 1745 | -4,605349 | 5,389276 | 11,197376 | 0,001816 | 0,002733 | 0,00566 | 1,466987 |
| 1746 | -4,614651 | 5,296853 | 10,777863 | 0,001837 | 0,002915 | 0,006108 | 1,04342 |
| 1747 | -4,594632 | 7,344236 | 9,431027 | 0,001474 | 0,002303 | 0,003544 | 0,680711 |
| 1748 | -4,600432 | 6,861062 | 9,779277 | 0,001777 | 0,002708 | 0,00476 | 0,83498 |
| 1749 | -4,588762 | 7,496578 | 9,620631 | 0,001475 | 0,002321 | 0,003596 | 0,522933 |
| 1750 | -4,599489 | 6,989321 | 9,976904 | 0,001764 | 0,00273 | 0,004819 | 0,94086 |
| 1751 | -4,593692 | 7,597112 | 9,742499 | 0,001686 | 0,002444 | 0,004145 | 1,448436 |
| 1752 | -4,5943 | 7,782993 | 9,031137 | 0,00148 | 0,002332 | 0,003432 | 0,934977 |
| 1753 | -4,590817 | 7,954495 | 9,194805 | 0,001483 | 0,002312 | 0,003444 | 0,813066 |
| 1754 | -4,606281 | 8,066742 | 9,304203 | 0,002776 | 0,003342 | 0,005613 | 1,565686 |
| 1755 | -4,606176 | 8,474239 | 8,826847 | 0,001687 | 0,002352 | 0,003862 | 1,254957 |
| 1756 | -4,593933 | 8,343448 | 8,735482 | 0,00168 | 0,002373 | 0,003877 | 1,327647 |
| 1757 | -4,592056 | 8,151387 | 8,592888 | 0,001636 | 0,002353 | 0,003707 | 1,399661 |
| 1758 | -4,598076 | 9,784639 | 8,72368 | 0,002034 | 0,002498 | 0,004404 | 1,708652 |
| 1759 | -4,598208 | 9,801377 | 8,113777 | 0,001745 | 0,002462 | 0,003518 | 1,357129 |
| 1760 | -4,636925 | 10,912943 | 8,083012 | 0,001556 | 0,002347 | 0,003784 | 1,148459 |
| 1761 | -4,667114 | 11,821887 | 8,068016 | 0,001384 | 0,002287 | 0,003388 | 2,506064 |
| 1762 | -4,614456 | 9,648238 | 7,910689 | 0,002176 | 0,002627 | 0,004502 | 1,277296 |
| 1763 | -4,607764 | 9,651447 | 7,733011 | 0,001915 | 0,002612 | 0,003958 | 1,276858 |
| 1764 | -4,612577 | 9,550976 | 7,72123 | 0,001613 | 0,002573 | 0,00331 | 1,394645 |
| 1765 | -4,622062 | 9,480224 | 7,839593 | 0,001603 | 0,002567 | 0,003337 | 0,981397 |
| 1766 | -4,609384 | 9,658951 | 7,530573 | 0,001881 | 0,002902 | 0,003568 | 1,145184 |
| 1767 | -4,672188 | 9,906974 | 7,553116 | 0,002121 | 0,004953 | 0,004467 | 7,900175 |
| 1768 | -4,601485 | 9,781678 | 8,820731 | 0,002107 | 0,00249 | 0,004674 | 2,075542 |
| 1769 | -4,562594 | 9,876218 | 8,900357 | 0,002112 | 0,002508 | 0,004702 | 1,056109 |
| 1770 | -4,602835 | 8,476942 | 8,09204 | 0,001701 | 0,002439 | 0,003716 | 1,790891 |
| 1771 | -4,603746 | 8,735602 | 7,565001 | 0,001609 | 0,002564 | 0,003464 | 1,26934 |
| 1772 | -4,611756 | 8,6861 | 8,210138 | 0,001708 | 0,002468 | 0,003749 | 1,662 |
| 1773 | -4,628297 | 8,819728 | 8,280378 | 0,00224 | 0,002484 | 0,005033 | 2,12784 |
| 1774 | -4,625107 | 8,965438 | 7,646944 | 0,001621 | 0,002599 | 0,003489 | 1,160499 |
| 1775 | -4,64602 | 10,916903 | 7,498869 | 0,001565 | 0,002352 | 0,00379 | 1,669703 |
| 1776 | -4,634733 | 10,975914 | 7,515867 | 0,001559 | 0,002349 | 0,003799 | 2,912739 |
| 1777 | -4,664429 | 11,060231 | 6,942701 | 0,001474 | 0,002337 | 0,003404 | 1,175744 |
| 1778 | -4,622702 | 7,764605 | 11,220916 | 0,001454 | 0,002427 | 0,004064 | 0,748155 |
| 1779 | -4,888572 | 11,608381 | 3,422259 | 0,001318 | 0,002384 | 0,002277 | 2,595218 |
| 1780 | -4,620438 | 4,670634 | 10,684532 | 0,001156 | 0,002075 | 0,004016 | 0,820695 |
| 1781 | -4,616863 | 4,651402 | 10,454444 | 0,001157 | 0,002095 | 0,004077 | 0,957317 |
| 1782 | -4,675078 | -0,454487 | 6,402041 | 0,002325 | 0,004288 | 0,007525 | 0,502903 |
| 1783 | -4,661828 | -0,352381 | 6,998678 | 0,001972 | 0,004221 | 0,007804 | 0,749992 |
| 1784 | -4,673461 | -0,688468 | 6,445328 | 0,001973 | 0,003311 | 0,0052 | 0,98942 |
| 1785 | -4,670161 | -0,578766 | 7,051681 | 0,002023 | 0,004457 | 0,007955 | 0,85471 |
| 1786 | -4,784732 | -1,148425 | 2,864832 | 0,003004 | 0,003029 | 0,003862 | 1,839403 |
| 1787 | -4,776279 | -1,155191 | 2,269 | 0,001501 | 0,002639 | 0,002471 | 1,824299 |
| 1788 | -4,627007 | 8,93187 | 6,983332 | 0,001671 | 0,002981 | 0,003596 | 1,750328 |
| 1789 | -4,63582 | 9,163882 | 7,045824 | 0,001689 | 0,003038 | 0,00363 | 1,547573 |
| 1790 | -4,619229 | 9,273598 | 6,469256 | 0,001912 | 0,002655 | 0,003274 | 0,996846 |
| 1791 | -4,607116 | 9,048334 | 6,416659 | 0,001739 | 0,002727 | 0,003339 | 1,744408 |
| 1793 | -0,35184 | -1,403361 | 7,583983 | 0,002534 | 0,001998 | 0,003009 | 4,806287 |
| 1794 | -0,43626 | -1,319619 | 7,593208 | 0,003593 | 0,002717 | 0,00396 | 4,420469 |
| 1795 | -0,325809 | -1,518804 | 7,59373 | 0,002386 | 0,002003 | 0,002897 | 3,478501 |
| 1796 | -0,327082 | -1,64056 | 7,595386 | 0,00236 | 0,001962 | 0,002841 | 4,041046 |
| 1797 | -0,376769 | -1,749128 | 7,594832 | 0,003495 | 0,001954 | 0,003674 | 4,283652 |
| 1798 | -0,441444 | -1,864252 | 7,336778 | 0,004168 | 0,002065 | 0,004055 | 4,179192 |
| 1799 | -0,430552 | -1,341614 | 8,183908 | 0,003789 | 0,002811 | 0,004309 | 3,306845 |
| 1800 | -0,371256 | -1,421928 | 8,189622 | 0,002628 | 0,002088 | 0,003217 | 4,204138 |
| 1801 | -0,338423 | -1,525716 | 8,191124 | 0,002469 | 0,002035 | 0,00306 | 3,265801 |
| 1802 | -0,330062 | -1,630443 | 8,1372 | 0,002619 | 0,002085 | 0,003201 | 9,348569 |
| 1803 | -0,404943 | -1,745365 | 8,038832 | 0,003595 | 0,002031 | 0,003905 | 6,373673 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1804 | -0,353443 | -1,857198 | 7,564941 | 0,004241 | 0,002131 | 0,004206 | 3,703755 |
| 1805 | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a |
| 1807 | -0,527232 | -1,294669 | 2,228717 | 0,002873 | 0,002896 | 0,002277 | 3,501631 |
| 1808 | -0,454421 | -1,392063 | 2,224905 | 0,001523 | 0,002029 | 0,001835 | 3,506503 |
| 1809 | -0,432681 | -1,524932 | 2,22306 | 0,001714 | 0,00204 | 0,002014 | 5,088217 |
| 1810 | -0,423885 | -1,668479 | 2,224414 | 0,001485 | 0,001958 | 0,001707 | 6,251396 |
| 1811 | -0,452556 | -1,795063 | 2,232075 | 0,00176 | 0,002057 | 0,001898 | 6,192756 |
| 1812 | -0,523617 | -1,912077 | 2,239235 | 0,002117 | 0,001963 | 0,002501 | 2,814148 |
| 1813 | -0,492841 | 9,875423 | 11,215798 | 0,004317 | 0,003995 | 0,005655 | 0,4242 |
| 1814 | -0,4293 | 9,165177 | 12,417992 | 0,003025 | 0,003216 | 0,004488 | 2,433801 |
| 1815 | -0,43695 | 6,062218 | 12,39498 | 0,004121 | 0,003501 | 0,005411 | 1,229591 |
| 1816 | -0,452551 | 3,936727 | 12,379368 | 0,004941 | 0,003363 | 0,006136 | 0,93913 |
| 1817 | -0,470041 | 2,173878 | 12,422665 | 0,005276 | 0,003419 | 0,006677 | 1,844693 |
| 1818 | -0,459554 | -0,542869 | 12,432606 | 0,006205 | 0,003334 | 0,007922 | 1,161961 |
| 1819 | -0,583378 | -0,537419 | 12,373867 | 0,005673 | 0,003132 | 0,007043 | 1,436188 |
| 1820 | -0,37797 | -0,537865 | 12,560088 | 0,006139 | 0,003009 | 0,007466 | 5,292065 |
| 1821 | -4,713051 | -0,393905 | 2,178895 | 0,005472 | 0,002397 | 0,006554 | 5,194311 |
| 1822 | -4,838523 | -0,344085 | 3,873547 | 0,005538 | 0,002377 | 0,006524 | 6,171542 |
| 1823 | -4,59538 | 8,707986 | 3,203272 | 0,005426 | 0,002113 | 0,005398 | 8,232877 |
| 1824 | -4,820657 | 8,993877 | 2,358324 | 0,005557 | 0,002065 | 0,005505 | 7,821283 |
| 1825 | -2,64122 | 16,493722 | 1,643982 | 0,013493 | 0,003312 | 0,011677 | 16,087909 |
| 1826 | -2,705248 | 15,595315 | 3,545987 | 0,012946 | 0,003244 | 0,013837 | 12,046488 |
| 1827 | -0,747688 | -0,314868 | 2,12045 | 0,001491 | 0,000704 | 0,00162 | 1,808109 |
| 1828 | -0,73036 | -0,351073 | 3,83 | 0,001362 | 0,00066 | 0,001527 | 1,917775 |
| 1829 | -0,600567 | 8,86183 | 1,917985 | 0,002098 | 0,000587 | 0,002364 | 1,252368 |
| 1830 | 0,135309 | 8,569468 | 0,00116 | 0,00106 | 0,001138 | 0,0019 | 2,810588 |
| 1831 | -1,175768 | -9,40444 | 9,547561 | 0,002292 | 0,003298 | 0,003228 | 3,373451 |
| 1832 | -2,853964 | 13,670794 | 9,715274 | 0,00153 | 0,002382 | 0,004494 | 1,092383 |
| 1833 | -2,593382 | 8,255255 | 0,037555 | 0,001203 | 0,001269 | 0,002097 | 2,105128 |
| 1834 | -2,29831 | 8,230568 | 0,035839 | 0,001198 | 0,001313 | 0,002097 | 2,175282 |
| 1835 | -4,304156 | 8,608822 | 1,078283 | 0,001546 | 0,001476 | 0,002256 | 2,774998 |
| 1836 | -0,462526 | 8,481405 | 0,83255 | 0,001146 | 0,001065 | 0,001773 | 2,07879 |
| 1837 | -0,462572 | 8,4808 | 0,132539 | 0,001098 | 0,001057 | 0,001758 | 2,774121 |
| 1838 | 0,180321 | 19,714579 | 8,450752 | 0,00172 | 0,003073 | 0,002769 | 3,829608 |
| 1839 | -4,771505 | 9,19761 | 2,278676 | 0,00163 | 0,002158 | 0,002476 | 1,060566 |
| 1840 | -0,098987 | -0,12948 | 1,194343 | 0,000992 | 0,000953 | 0,001459 | 2,034316 |
| 1842 | -5,009261 | 0,059788 | 0,882101 | 0,001444 | 0,001664 | 0,001989 | 1,799141 |
| 1843 | -5,008959 | 0,061665 | 0,182094 | 0,001412 | 0,001652 | 0,001941 | 1,756678 |
| 1844 | -2,750303 | -0,110606 | 1,226536 | 0,001089 | 0,00126 | 0,001766 | 1,563764 |
| 1845 | -0,24946 | 0,097155 | 1,502856 | 0,001276 | 0,000955 | 0,00157 | 1,602271 |
| 1846 | -0,24912 | 0,098646 | 0,837849 | 0,001087 | 0,000872 | 0,001528 | 1,269868 |
| 1847 | -0,247827 | 0,099342 | 0,137842 | 0,001115 | 0,001003 | 0,001551 | 1,814833 |
| 1848 | -4,689357 | -0,102275 | 10,125682 | 0,002005 | 0,002924 | 0,005108 | 1,274149 |
| 1849 | -4,773224 | -0,097457 | 11,222661 | 0,001926 | 0,002991 | 0,005366 | 0,802015 |
| 1850 | -0,675978 | 8,970517 | 18,318907 | 0,004938 | 0,00367 | 0,007064 | 1,240819 |
| 1851 | -0,684766 | 8,777835 | 18,328846 | 0,00493 | 0,003649 | 0,007069 | 1,743024 |
| 1852 | -0,682518 | 6,582414 | 18,327161 | 0,00476 | 0,003403 | 0,007046 | 1,213668 |
| 1853 | -0,682912 | 6,353088 | 18,32268 | 0,00474 | 0,003377 | 0,007039 | 0,917157 |
| 1854 | -0,679424 | 4,220746 | 18,322198 | 0,004533 | 0,003155 | 0,006959 | 1,293819 |
| 1855 | -0,675154 | 4,026792 | 18,315609 | 0,00451 | 0,003135 | 0,006946 | 1,831278 |
| 1856 | -0,662577 | 1,859874 | 18,314835 | 0,004258 | 0,002941 | 0,0068 | 0,74273 |
| 1857 | -0,669777 | 1,634079 | 18,32155 | 0,004676 | 0,003091 | 0,007225 | 1,582119 |
| 1858 | -0,66881 | -0,537727 | 18,336041 | 0,004395 | 0,003068 | 0,006996 | 2,066955 |
| 1859 | -0,675472 | -0,740611 | 18,346496 | 0,004371 | 0,00307 | 0,006975 | 1,301639 |
| 1861 | -1,188503 | 11,847276 | 18,307105 | 0,001784 | 0,004483 | 0,00719 | 2,868875 |
| 1862 | -1,374242 | 11,829881 | 18,333361 | 0,001784 | 0,004486 | 0,0072 | 2,321414 |
| 1863 | -3,648428 | 11,781029 | 18,324122 | 0,0018 | 0,0044 | 0,00713 | 1,830004 |
| 1864 | -3,875063 | 11,768695 | 18,342712 | 0,001806 | 0,004394 | 0,007127 | 1,858313 |
| 1865 | -0,804845 | 11,899639 | 18,880345 | 0,001687 | 0,004724 | 0,008943 | 1,193585 |
| 1866 | -3,26209 | 11,806251 | 18,84616 | 0,001797 | 0,004467 | 0,007307 | 1,364969 |
| 1868 | -4,40419 | 10,596945 | 18,332901 | 0,001671 | 0,003567 | 0,007298 | 2,065697 |
| 1869 | -4,416702 | 10,593333 | 18,858506 | 0,001633 | 0,003588 | 0,007457 | 1,999865 |
| 1870 | -4,424136 | 10,738624 | 18,844046 | 0,001635 | 0,00359 | 0,007428 | 2,079843 |
| 1872 | -4,421209 | 11,784839 | 14,962143 | 0,001533 | 0,002745 | 0,004333 | 3,465194 |
| 1873 | -4,502292 | 11,818187 | 14,829163 | 0,001531 | 0,002732 | 0,004293 | 4,453475 |
| 1874 | -4,38746 | 10,603967 | 17,364545 | 0,001786 | 0,003952 | 0,008478 | 1,524653 |
| 1875 | -4,427206 | 9,457453 | 18,870709 | 0,001613 | 0,003558 | 0,007632 | 2,286741 |
| 1876 | -4,419737 | 9,44805 | 18,34493 | 0,001651 | 0,003534 | 0,007475 | 1,889614 |
| 1877 | -4,428686 | 8,318015 | 18,34337 | 0,001629 | 0,003491 | 0,007642 | 2,029398 |
| 1878 | -4,446254 | 8,320908 | 18,869457 | 0,001877 | 0,003872 | 0,008071 | 1,73374 |
| 1879 | -4,456395 | 8,449756 | 18,852958 | 0,001875 | 0,003868 | 0,008045 | 2,444741 |
| 1880 | -4,436845 | 9,242433 | 18,808364 | 0,001587 | 0,003903 | 0,009156 | 2,208326 |
| 1881 | -4,405641 | 9,436196 | 17,353315 | 0,001723 | 0,003489 | 0,007183 | 2,282375 |
| 1882 | -4,42319 | 8,306909 | 17,358453 | 0,0017 | 0,003442 | 0,007353 | 1,973801 |
| 1883 | -4,429655 | 7,140761 | 17,36608 | 0,001675 | 0,003385 | 0,007523 | 2,066919 |
| 1884 | -4,437366 | 7,177504 | 18,333291 | 0,001934 | 0,003858 | 0,008059 | 1,703766 |
| 1885 | -4,450976 | 7,189088 | 18,882273 | 0,001893 | 0,003891 | 0,008221 | 1,695305 |
| 1886 | -4,453622 | 7,048629 | 18,881267 | 0,001948 | 0,004102 | 0,009713 | 1,543846 |
| 1887 | -4,442294 | 6,002211 | 18,350137 | 0,001951 | 0,003875 | 0,008202 | 2,060314 |
| 1888 | -4,469975 | 6,00383 | 18,841972 | 0,001911 | 0,003904 | 0,008341 | 1,819098 |
| 1889 | -4,44013 | 6,009072 | 17,351633 | 0,002099 | 0,00395 | 0,009254 | 0,790238 |
| 1890 | -4,445747 | 4,822357 | 17,372805 | 0,002105 | 0,003923 | 0,009319 | 1,383893 |
| 1891 | -4,460289 | 4,852537 | 18,34801 | 0,001966 | 0,003889 | 0,008312 | 1,358214 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1892 | -4,465284 | 4,867629 | 18,882007 | 0,001927 | 0,003924 | 0,00847 | 1,611397 |
| 1893 | -4,480229 | 4,703044 | 18,859275 | 0,001962 | 0,00404 | 0,009822 | 2,119026 |
| 1894 | -4,466635 | 3,693975 | 18,368708 | 0,001982 | 0,003907 | 0,008413 | 1,915694 |
| 1895 | -4,474886 | 3,68536 | 18,884881 | 0,001943 | 0,003942 | 0,008565 | 1,373079 |
| 1896 | -4,478571 | 3,830013 | 18,875243 | 0,001941 | 0,003939 | 0,00855 | 2,184654 |
| 1897 | -4,451118 | 3,701011 | 17,38514 | 0,002114 | 0,003907 | 0,009348 | 1,253476 |
| 1898 | -4,471818 | 2,516774 | 17,372421 | 0,002124 | 0,003897 | 0,009327 | 1,339446 |
| 1899 | -4,482656 | 2,539628 | 18,351733 | 0,001999 | 0,003923 | 0,008472 | 1,169362 |
| 1900 | -4,497098 | 2,548911 | 18,889961 | 0,001957 | 0,003959 | 0,008628 | 1,800884 |
| 1901 | -4,49221 | 1,385297 | 18,376049 | 0,002014 | 0,003944 | 0,008519 | 1,900114 |
| 1902 | -4,503392 | 1,365509 | 18,919807 | 0,001973 | 0,003981 | 0,00868 | 1,670486 |
| 1903 | -4,501403 | 1,490069 | 18,920502 | 0,001971 | 0,003979 | 0,008677 | 1,805248 |
| 1904 | -4,469471 | 1,399676 | 17,423456 | 0,002082 | 0,003821 | 0,008479 | 2,085502 |
| 1905 | -4,502461 | 0,198061 | 17,415565 | 0,002095 | 0,003856 | 0,008424 | 1,859092 |
| 1906 | -4,524 | 0,220372 | 18,390014 | 0,002011 | 0,003925 | 0,008717 | 1,872792 |
| 1907 | -4,553663 | 0,235823 | 18,928725 | 0,001997 | 0,004026 | 0,009719 | 2,068564 |
| 1908 | -4,554053 | 0,098855 | 18,928906 | 0,001998 | 0,004027 | 0,009709 | 2,42731 |
| 1909 | -4,52359 | -0,910474 | 18,409982 | 0,002026 | 0,003958 | 0,008666 | 2,533981 |
| 1910 | -4,546177 | -0,915343 | 18,940166 | 0,002011 | 0,004036 | 0,009631 | 2,102482 |
| 1911 | -4,553924 | -0,750865 | 18,926957 | 0,002009 | 0,004033 | 0,009638 | 2,239223 |
| 1912 | -4,494765 | -0,893756 | 17,480887 | 0,002106 | 0,003894 | 0,008388 | 2,044289 |
| 1913 | -4,526278 | -2,065672 | 17,481302 | 0,002112 | 0,003918 | 0,008285 | 1,949019 |
| 1914 | -4,542216 | -2,046073 | 18,376997 | 0,002038 | 0,003978 | 0,008566 | 2,516035 |
| 1915 | -4,539218 | -2,053555 | 18,964038 | 0,002374 | 0,005628 | 0,012109 | 1,736072 |
| 1916 | -4,547835 | -2,196939 | 18,956779 | 0,002384 | 0,005669 | 0,012125 | 1,729029 |
| 1918 | -4,558615 | -3,060383 | 18,967325 | 0,002459 | 0,005944 | 0,012267 | 2,01153 |
| 1919 | -4,397435 | 11,275347 | 18,33365 | 0,001709 | 0,004062 | 0,00873 | 2,447402 |
| 1920 | -4,391174 | 11,086647 | 18,343521 | 0,001703 | 0,004048 | 0,008763 | 1,513004 |
| 1921 | -4,427032 | 9,003931 | 18,34052 | 0,001629 | 0,003854 | 0,009023 | 2,213877 |
| 1922 | -4,420703 | 8,760085 | 18,351262 | 0,001621 | 0,003831 | 0,00906 | 1,912222 |
| 1923 | -4,441642 | 6,722234 | 18,339431 | 0,002003 | 0,004051 | 0,009549 | 1,764423 |
| 1924 | -4,437254 | 6,459563 | 18,351661 | 0,002005 | 0,004045 | 0,009575 | 1,407976 |
| 1925 | -4,4588 | 4,387757 | 18,363283 | 0,002016 | 0,003997 | 0,009668 | 1,415676 |
| 1926 | -4,451387 | 4,139863 | 18,377456 | 0,002019 | 0,003996 | 0,009682 | 1,483362 |
| 1927 | -4,479904 | 2,0712 | 18,374256 | 0,002038 | 0,003981 | 0,009655 | 0,910359 |
| 1928 | -4,476265 | 1,831184 | 18,3889 | 0,002041 | 0,003983 | 0,009654 | 1,350055 |
| 1929 | -4,518495 | -0,220966 | 18,398777 | 0,002058 | 0,003992 | 0,009512 | 1,824664 |
| 1930 | -4,521968 | -0,464199 | 18,39883 | 0,002061 | 0,003994 | 0,009489 | 1,8945 |
| 1931 | -4,511228 | -2,516541 | 18,43482 | 0,002597 | 0,005741 | 0,013436 | 1,552573 |
| 1932 | -4,532143 | -2,727314 | 18,416118 | 0,002734 | 0,005971 | 0,015824 | 1,992077 |
| 1933 | -4,680498 | -3,304844 | 10,002214 | 0,002305 | 0,003491 | 0,004472 | 1,218536 |
| 1934 | -0,604864 | -3,024072 | 14,685376 | 0,002822 | 0,00442 | 0,005646 | 2,672383 |
| 1935 | -1,239525 | -3,230506 | 18,414945 | 0,003667 | 0,007022 | 0,008995 | 2,628239 |
| 1936 | -1,049482 | -3,227131 | 18,420633 | 0,003661 | 0,007037 | 0,008994 | 2,490114 |
| 1937 | -4,142416 | -3,144806 | 18,391315 | 0,004645 | 0,008599 | 0,009759 | 2,635071 |
| 1938 | -3,937405 | -3,13119 | 18,382734 | 0,002972 | 0,006507 | 0,008322 | 3,282889 |
| 1939 | -3,505944 | -3,12198 | 18,844679 | 0,002981 | 0,006559 | 0,008478 | 3,396722 |
| 1940 | -4,647646 | 9,312089 | 7,085514 | 0,002377 | 0,002849 | 0,004416 | 1,811846 |
| 1941 | -4,608601 | 9,799628 | 7,19557 | 0,002613 | 0,005127 | 0,005037 | 1,13229 |
| 1942 | -4,655955 | 9,757681 | 6,485793 | 0,002756 | 0,003303 | 0,004944 | 1,513844 |
| 1943 | -4,609884 | 9,420675 | 6,459162 | 0,002652 | 0,002645 | 0,004547 | 1,693783 |
| 1944 | -4,639746 | 9,412789 | 6,500797 | 0,002737 | 0,002926 | 0,004809 | 1,567118 |
| 1945 | -4,665235 | 9,709668 | 5,226247 | 0,002445 | 0,002802 | 0,003892 | 0,684546 |
| 1946 | -4,775754 | 9,833979 | 7,243845 | 0,002844 | 0,005319 | 0,005449 | 1,10717 |
| 1947 | -4,616238 | 9,806085 | 7,291538 | 0,002129 | 0,004931 | 0,004382 | 2,268712 |
| 1948 | -4,625111 | 9,561961 | 7,137946 | 0,00511 | 0,003902 | 0,0087 | 1,110193 |
| 1949 | -4,626446 | 9,396354 | 7,804587 | 0,003869 | 0,002749 | 0,007592 | 0,630461 |
| 1950 | -4,633623 | 9,035856 | 7,38784 | 0,002221 | 0,00244 | 0,004377 | 1,098977 |
| 1951 | -4,636285 | 9,042575 | 7,335324 | 0,002225 | 0,002438 | 0,00436 | 1,132704 |
| 1952 | -4,619321 | 9,508988 | 7,449889 | 0,002119 | 0,002405 | 0,004078 | 1,130277 |
| 1953 | -4,620503 | 9,503385 | 7,501578 | 0,002115 | 0,002407 | 0,004092 | 0,923221 |
| 1954 | -4,583237 | 9,64031 | 8,836463 | 0,001714 | 0,002477 | 0,003724 | 1,024174 |
| 1955 | -4,584372 | 9,688034 | 8,838512 | 0,001716 | 0,002481 | 0,003723 | 0,903426 |
| 1956 | -4,583089 | 9,690025 | 8,492261 | 0,001729 | 0,002468 | 0,003628 | 0,754281 |
| 1957 | -4,584365 | 9,645492 | 8,490507 | 0,001726 | 0,002463 | 0,003628 | 0,719039 |
| 1958 | -4,577328 | 8,979421 | 9,5406 | 0,001654 | 0,002441 | 0,003933 | 1,474127 |
| 1959 | -4,576791 | 9,078169 | 9,287583 | 0,001758 | 0,002439 | 0,004131 | 1,313654 |
| 1960 | -4,565244 | 9,249445 | 9,318311 | 0,001725 | 0,002464 | 0,003987 | 1,378698 |
| 1961 | -4,578924 | 8,5222 | 10,215129 | 0,001771 | 0,002861 | 0,004637 | 1,328126 |
| 1962 | -4,575293 | 8,521624 | 10,158508 | 0,001733 | 0,002866 | 0,004443 | 0,604621 |
| 1963 | -4,582914 | 7,933452 | 10,291706 | 0,001731 | 0,002801 | 0,0047 | 0,646425 |
| 1964 | -4,599138 | 7,947608 | 10,338015 | 0,001728 | 0,002803 | 0,004709 | 1,031009 |
| 1965 | -4,617742 | 9,801808 | 7,971354 | 0,004111 | 0,004098 | 0,007555 | 0,737097 |
| 1966 | -4,660989 | 9,313059 | 5,231274 | 0,002541 | 0,002605 | 0,003986 | 1,053295 |
| 1967 | -4,659568 | 9,291172 | 4,657906 | 0,002566 | 0,002582 | 0,003876 | 1,029364 |
| 1968 | -4,70069 | 9,708002 | 4,650621 | 0,00325 | 0,005179 | 0,004903 | 1,443095 |
| 1969 | -4,710923 | 9,679997 | 4,045652 | 0,002888 | 0,00385 | 0,004283 | 0,685077 |
| 1970 | -4,691239 | 9,698294 | 4,537257 | 0,002626 | 0,003175 | 0,004018 | 0,956475 |
| 1971 | -4,724881 | 9,663605 | 3,457593 | 0,001436 | 0,002526 | 0,002868 | 1,184014 |
| 1972 | -4,765046 | 9,658448 | 2,861717 | 0,001936 | 0,003389 | 0,003207 | 2,757127 |
| 1973 | -4,720669 | 9,076359 | 2,881623 | 0,001534 | 0,002176 | 0,002646 | 1,004863 |
| 1974 | -4,722403 | 9,051373 | 2,28241 | 0,001727 | 0,002184 | 0,002557 | 1,197469 |
| 1975 | -4,768215 | 9,634519 | 2,27045 | 0,00203 | 0,002959 | 0,002838 | 1,256902 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1976 | -4,748108 | 9,647944 | 2,702948 | 0,002681 | 0,004701 | 0,003963 | 2,599385 |
| 1977 | -4,735432 | 9,202825 | 2,881032 | 0,001544 | 0,00223 | 0,002661 | 1,414293 |
| 1978 | -4,692838 | 9,275779 | 4,055268 | 0,002757 | 0,002534 | 0,003974 | 1,661288 |
| 1979 | -4,689936 | 9,262464 | 3,472779 | 0,001382 | 0,002222 | 0,002815 | 1,612315 |
| 1980 | -4,723595 | 9,445125 | 2,881785 | 0,002638 | 0,002563 | 0,003616 | 1,486852 |
| 1981 | -4,647678 | 8,996233 | 4,076208 | 0,002567 | 0,002603 | 0,003779 | 1,416746 |
| 1982 | -4,64855 | 8,964988 | 4,658759 | 0,002531 | 0,002566 | 0,003845 | 0,701545 |
| 1983 | -4,682924 | 9,020178 | 3,480854 | 0,003189 | 0,003609 | 0,00454 | 0,473768 |
| 1984 | -4,677715 | 9,17377 | 3,479454 | 0,003091 | 0,003311 | 0,004543 | 0,852708 |
| 1985 | -4,667485 | 9,331469 | 2,88556 | 0,004751 | 0,002434 | 0,005645 | 0,789465 |
| 1986 | -4,656507 | 11,278951 | 8,071772 | 0,001509 | 0,002323 | 0,003772 | 2,083366 |
| 1987 | -4,793399 | 11,083532 | 3,442666 | 0,001503 | 0,002429 | 0,002455 | 1,349308 |
| 1988 | -4,772722 | 11,102047 | 4,009751 | 0,001479 | 0,00239 | 0,002664 | 1,31174 |
| 1989 | -4,856904 | 11,661957 | 3,984967 | 0,001317 | 0,002357 | 0,002531 | 2,467573 |
| 1990 | -4,569647 | 11,818359 | 9,300685 | 0,001385 | 0,002341 | 0,003387 | 1,843901 |
| 1991 | -4,447688 | 7,482902 | 16,404293 | 0,001455 | 0,002958 | 0,006036 | 1,811743 |
| 1992 | -4,441361 | 7,466586 | 16,102322 | 0,001469 | 0,002941 | 0,00595 | 1,812919 |
| 1993 | -4,434009 | 6,033654 | 16,114881 | 0,001665 | 0,003181 | 0,00689 | 1,747808 |
| 1994 | -4,453829 | 6,007103 | 16,392974 | 0,001638 | 0,003379 | 0,008059 | 1,57418 |
| 1995 | -4,485155 | 5,668986 | 15,247034 | 0,003037 | 0,004133 | 0,008728 | 0,85655 |
| 1997 | -4,517414 | 3,882252 | 15,26208 | 0,002946 | 0,004277 | 0,008353 | 0,551142 |
| 1998 | -4,557815 | 2,69848 | 15,24643 | 0,003177 | 0,004503 | 0,009653 | 0,910954 |
| 2000 | -4,476165 | 5,972603 | 15,313181 | 0,002367 | 0,00342 | 0,008172 | 2,275348 |
| 2001 | -4,465386 | 6,182143 | 15,326777 | 0,002369 | 0,003432 | 0,008158 | 1,389019 |
| 2002 | -4,535718 | 0,845509 | 15,317932 | 0,001948 | 0,003294 | 0,006526 | 1,198246 |
| 2005 | -4,514566 | 2,931092 | 15,278074 | 0,002871 | 0,004082 | 0,008239 | 2,584174 |
| 2006 | -4,504193 | 2,952172 | 15,589003 | 0,002682 | 0,003983 | 0,007614 | 1,838627 |
| 2007 | -4,504674 | 1,931388 | 15,663334 | 0,001935 | 0,003337 | 0,006661 | 1,533726 |
| 2009 | -0,601816 | -2,026244 | 2,247041 | 0,002141 | 0,002011 | 0,002554 | 2,969651 |
| 2010 | -0,34974 | -1,84769 | 7,981772 | 0,004691 | 0,00216 | 0,004898 | 0,662542 |
| 2011 | -0,423686 | -1,916431 | 8,050535 | 0,004939 | 0,00204 | 0,004882 | 3,170581 |
| 2012 | -0,415164 | -1,929627 | 7,577857 | 0,005001 | 0,002325 | 0,005036 | 1,604732 |
| 2013 | -0,510883 | -1,970986 | 8,100378 | 0,005148 | 0,002413 | 0,005349 | 3,122064 |
| 2014 | -0,50355 | -1,991802 | 7,574687 | 0,005029 | 0,002308 | 0,005032 | 2,304588 |
| 2015 | -0,610223 | -2,047949 | 10,113501 | 0,004441 | 0,002353 | 0,004987 | 0,908142 |
| 2016 | -0,621004 | -1,122579 | 10,114701 | 0,003955 | 0,002959 | 0,005099 | 1,257401 |
| 2017 | -0,177 | -1,490305 | 10,125933 | 0,002334 | 0,002057 | 0,003327 | 1,202028 |
| 2018 | -0,602835 | -2,029043 | 7,558119 | 0,00508 | 0,002298 | 0,005035 | 0,761406 |
| 2019 | -0,612619 | -2,012567 | 8,146694 | 0,004286 | 0,002144 | 0,004327 | 0,988669 |
| 2020 | -0,502919 | -1,973454 | 7,095044 | 0,006313 | 0,003578 | 0,00536 | 5,774901 |
| 2021 | -0,612269 | -2,0114 | 6,965656 | 0,006445 | 0,003989 | 0,006129 | 0,556659 |
| 2022 | -0,611992 | -2,035917 | 6,009557 | 0,006217 | 0,003569 | 0,00517 | 0,805423 |
| 2023 | -0,260546 | -1,723692 | 10,056935 | 0,003017 | 0,002031 | 0,003884 | 1,248334 |
| 2024 | -0,262827 | -1,726913 | 9,923773 | 0,002831 | 0,002006 | 0,003665 | 0,830755 |
| 2025 | -0,235632 | -1,619537 | 10,065179 | 0,00262 | 0,00201 | 0,00349 | 1,19846 |
| 2026 | -0,236841 | -1,516455 | 10,060241 | 0,002707 | 0,002037 | 0,00357 | 1,392132 |
| 2027 | -0,311732 | -1,826453 | 10,067948 | 0,003143 | 0,002065 | 0,004115 | 0,933617 |
| 2028 | -0,312854 | -1,821613 | 9,945525 | 0,003129 | 0,002055 | 0,004072 | 2,486337 |
| 2029 | -0,477304 | -1,956537 | 10,066085 | 0,004529 | 0,002425 | 0,005139 | 0,846051 |
| 2030 | -0,486485 | -1,947672 | 9,918895 | 0,004525 | 0,002411 | 0,005088 | 0,891325 |
| 2032 | -0,631255 | -1,246944 | 9,907185 | 0,003891 | 0,002943 | 0,004765 | 2,045097 |
| 2033 | -0,641215 | -1,235262 | 2,233206 | 0,003033 | 0,003028 | 0,002356 | 1,201234 |
| 2034 | -0,700067 | -1,23312 | 4,19335 | 0,002479 | 0,002996 | 0,002638 | 3,010942 |
| 2035 | -0,609678 | -1,253238 | 4,603786 | 0,002384 | 0,002895 | 0,002701 | 1,657465 |
| 2036 | -0,633231 | 9,278987 | 4,775329 | 0,004964 | 0,002563 | 0,004124 | 1,20304 |
| 2037 | -0,615603 | 9,298662 | 5,212897 | 0,004826 | 0,002503 | 0,004238 | 1,820055 |
| 2038 | -0,718817 | -0,915492 | 5,206357 | 0,002677 | 0,003584 | 0,003473 | 2,181427 |
| 2039 | -0,711199 | -0,866879 | 4,627855 | 0,002368 | 0,002487 | 0,002686 | 2,047632 |
| 2040 | -0,541453 | -0,904593 | 11,181851 | 0,009076 | 0,004655 | 0,008368 | 0,219887 |
| 2041 | -0,572943 | -1,191847 | 11,200438 | 0,007067 | 0,004824 | 0,007295 | 0,338889 |
| 2043 | -0,552147 | -1,263229 | 7,576867 | 0,005487 | 0,005552 | 0,0053 | 2,11032 |
| 2044 | -0,556323 | -1,28521 | 8,02924 | 0,005514 | 0,005523 | 0,005478 | 2,135994 |
| 2045 | -0,380856 | -1,905551 | 10,051611 | 0,005424 | 0,002783 | 0,006536 | 1,843433 |
| 2046 | -0,383831 | -1,901526 | 9,994102 | 0,00542 | 0,002775 | 0,006503 | 1,537237 |
| 2047 | -0,288184 | -1,439984 | 9,886188 | 0,002549 | 0,002066 | 0,003422 | 1,388441 |
| 2048 | -0,341367 | -1,474831 | 8,330378 | 0,003627 | 0,002756 | 0,004112 | 3,910919 |
| 2049 | -0,287858 | -1,724842 | 9,894631 | 0,003198 | 0,002051 | 0,004048 | 1,667917 |
| 2050 | -0,293529 | -1,73793 | 8,501958 | 0,003854 | 0,002185 | 0,004423 | 1,66098 |
| 2051 | -0,345046 | -1,802698 | 9,912472 | 0,003144 | 0,002055 | 0,004072 | 1,713518 |
| 2052 | -0,348567 | -1,824846 | 8,509173 | 0,004352 | 0,002337 | 0,004819 | 0,806806 |
| 2053 | -0,266393 | -1,646341 | 8,495775 | 0,003849 | 0,002192 | 0,004422 | 2,029114 |
| 2054 | -0,270615 | -1,619794 | 9,892785 | 0,003204 | 0,002044 | 0,004056 | 1,405563 |
| 2055 | -0,290815 | -1,594083 | 8,269135 | 0,003916 | 0,002207 | 0,004463 | 1,248678 |
| 2056 | -0,412897 | -1,877302 | 9,892899 | 0,005443 | 0,00277 | 0,006462 | 2,070208 |
| 2057 | -0,408237 | -1,906796 | 8,515559 | 0,00518 | 0,002508 | 0,005595 | 1,517649 |
| 2058 | -0,355517 | -1,375639 | 8,348164 | 0,00336 | 0,002694 | 0,003859 | 4,40687 |
| 2059 | -0,345833 | -1,355776 | 9,889143 | 0,003718 | 0,002915 | 0,004683 | 1,36735 |
| 2060 | -0,279055 | -1,530984 | 9,893122 | 0,002928 | 0,00206 | 0,003787 | 1,08404 |
| 2061 | -0,284554 | -1,556092 | 8,269458 | 0,003857 | 0,002178 | 0,004362 | 2,226362 |
| 2062 | -0,510384 | -1,931152 | 9,887642 | 0,004291 | 0,002839 | 0,005175 | 2,755108 |
| 2063 | -0,605932 | -2,001713 | 8,743588 | 0,004339 | 0,002215 | 0,004528 | 1,096169 |
| 2064 | -0,410169 | -1,276878 | 9,864713 | 0,00512 | 0,004618 | 0,005965 | 2,586973 |
| 2065 | -0,408565 | -1,283915 | 8,384862 | 0,004885 | 0,004682 | 0,005199 | 2,584067 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2066 | -0,515525 | -1,24833 | 8,314194 | 0,004787 | 0,004453 | 0,004971 | 0,952576 |
| 2067 | -0,488183 | -1,227513 | 9,850154 | 0,007203 | 0,007332 | 0,009111 | 2,280277 |
| 2068 | -0,617292 | -1,225115 | 8,18356 | 0,005 | 0,004659 | 0,005207 | 2,823829 |
| 2069 | -4,633335 | 11,258213 | 8,658438 | 0,001468 | 0,002353 | 0,003676 | 3,004279 |
| 2070 | -4,637462 | 10,735268 | 8,090438 | 0,00161 | 0,002694 | 0,004317 | 3,607851 |
| 2071 | -4,627917 | 10,703875 | 7,521553 | 0,001618 | 0,002693 | 0,004158 | 1,626767 |
| 2072 | -4,709695 | 11,89463 | 7,474829 | 0,001327 | 0,002253 | 0,003094 | 2,31243 |
| 2073 | -4,704232 | 11,892078 | 6,919072 | 0,001307 | 0,002234 | 0,002997 | 1,500742 |
| 2074 | -4,796071 | 10,607842 | 7,52546 | 0,001592 | 0,002965 | 0,004427 | 1,256714 |
| 2075 | -4,759346 | 10,641631 | 8,082664 | 0,001543 | 0,00262 | 0,004102 | 2,51994 |
| 2076 | -4,786754 | 10,665965 | 7,594393 | 0,001567 | 0,003322 | 0,004917 | 1,019721 |
| 2077 | -4,881503 | 10,611269 | 7,972589 | 0,001548 | 0,003321 | 0,005004 | 1,228776 |
| 2078 | -4,880935 | 10,589779 | 7,514267 | 0,001566 | 0,003327 | 0,004837 | 1,014233 |
| 2079 | -4,818933 | 10,620073 | 7,274202 | 0,001581 | 0,003334 | 0,004784 | 1,617696 |
| 2080 | -4,627938 | 10,609439 | 7,509918 | 0,001622 | 0,003382 | 0,005005 | 1,588519 |
| 2081 | -4,627665 | 10,594574 | 7,326646 | 0,001634 | 0,00339 | 0,00494 | 0,993042 |
| 2082 | -4,625186 | 10,628852 | 7,078793 | 0,001714 | 0,003457 | 0,005401 | 2,0466 |
| 2083 | -4,634518 | 10,62186 | 6,973143 | 0,001641 | 0,003384 | 0,004799 | 2,277683 |
| 2084 | -4,796634 | 10,643717 | 7,165688 | 0,001584 | 0,003332 | 0,004755 | 0,531331 |
| 2085 | -4,810745 | 10,648935 | 6,863715 | 0,001591 | 0,003333 | 0,004631 | 0,815564 |
| 2086 | -4,586139 | 8,198528 | 13,3069 | 0,00161 | 0,006625 | 0,00954 | 1,07328 |
| 2087 | -4,575346 | 8,067949 | 12,86027 | 0,003973 | 0,009754 | 0,013008 | 0,880539 |
| 2088 | -5,1932 | 8,139339 | 12,952757 | 0,007446 | 0,015304 | 0,025075 | 0,916001 |
| 2089 | -4,567667 | 8,080465 | 12,973792 | 0,003933 | 0,009766 | 0,013088 | 2,031747 |
| 2091 | -4,667489 | 11,329862 | 6,934829 | 0,001423 | 0,002292 | 0,003275 | 0,972909 |
| 2092 | -4,660047 | 11,299634 | 6,349508 | 0,001428 | 0,002309 | 0,003254 | 0,954762 |
| 2093 | -4,669684 | 10,690612 | 6,350695 | 0,001552 | 0,002436 | 0,003434 | 4,652232 |
| 2094 | -4,770347 | 10,627643 | 3,459835 | 0,003913 | 0,00303 | 0,004874 | 2,97518 |
| 2095 | -4,778945 | 10,606551 | 2,855383 | 0,003632 | 0,002683 | 0,004402 | 1,535224 |
| 2096 | -4,8306 | 11,265794 | 2,832505 | 0,002742 | 0,002489 | 0,003612 | 1,150808 |
| 2097 | -4,82381 | 11,278491 | 3,433468 | 0,001397 | 0,002387 | 0,002327 | 1,088678 |
| 2098 | -4,799408 | 10,586441 | 2,255322 | 0,004728 | 0,003538 | 0,005141 | 1,111477 |
| 2099 | -4,796627 | 10,760879 | 2,254634 | 0,003006 | 0,002428 | 0,003768 | 1,05307 |
| 2100 | -4,815686 | 10,741347 | 1,783264 | 0,003018 | 0,002402 | 0,003709 | 1,432926 |
| 2101 | -5,086925 | 10,551338 | 1,791778 | 0,003635 | 0,002591 | 0,004165 | 1,147543 |
| 2102 | -5,156912 | 10,44797 | 1,690178 | 0,002946 | 0,002355 | 0,003637 | 1,468511 |
| 2103 | -5,369216 | 10,20793 | 1,706341 | 0,003591 | 0,002229 | 0,004128 | 1,864203 |
| 2104 | -4,744998 | 10,65651 | 4,03133 | 0,001764 | 0,002847 | 0,003091 | 1,303134 |
| 2105 | -4,668275 | 10,68527 | 5,777227 | 0,001628 | 0,002597 | 0,003645 | 1,531238 |
| 2106 | -4,683077 | 10,662063 | 5,208076 | 0,001761 | 0,003057 | 0,003932 | 0,565382 |
| 2107 | -4,732696 | 10,658152 | 4,630537 | 0,001791 | 0,003103 | 0,003628 | 1,28614 |
| 2109 | -4,719683 | 11,373629 | 5,747786 | 0,003058 | 0,002571 | 0,004732 | 1,45142 |
| 2110 | -4,715865 | 11,277431 | 5,190693 | 0,003119 | 0,002538 | 0,00461 | 1,33971 |
| 2111 | -4,808595 | 11,475586 | 5,171047 | 0,002863 | 0,002569 | 0,004261 | 1,001873 |
| 2112 | -4,796292 | 11,367897 | 4,602256 | 0,002912 | 0,002538 | 0,004161 | 1,394478 |
| 2113 | -4,761965 | 11,075438 | 4,599517 | 0,001473 | 0,002358 | 0,002869 | 2,124282 |
| 2114 | -4,826004 | 11,321199 | 3,99971 | 0,001401 | 0,002343 | 0,002579 | 1,21974 |
| 2115 | -4,717809 | 11,055175 | 5,188753 | 0,001487 | 0,002337 | 0,003077 | 1,363968 |
| 2116 | -4,654048 | 1,211414 | 11,181972 | 0,00229 | 0,002996 | 0,006073 | 1,574521 |
| 2117 | -4,770271 | -0,975612 | 2,273395 | 0,002332 | 0,002953 | 0,003522 | 1,225397 |
| 2118 | -4,794731 | -0,954816 | 1,688953 | 0,002374 | 0,002856 | 0,00297 | 1,827123 |
| 2119 | -4,766221 | 10,964878 | 4,014841 | 0,001559 | 0,002487 | 0,002784 | 0,961662 |
| 2120 | -4,787794 | 11,13566 | 4,012777 | 0,001469 | 0,002387 | 0,00266 | 1,281198 |
| 2121 | -4,763893 | 11,126646 | 4,601199 | 0,001464 | 0,002354 | 0,00287 | 1,378354 |
| 2122 | -4,884667 | 11,654747 | 4,240118 | 0,001319 | 0,002355 | 0,00265 | 3,068468 |
| 2123 | -4,744778 | 11,033154 | 2,252186 | 0,002749 | 0,002438 | 0,003546 | 2,451465 |
| 2124 | -4,767068 | 11,038591 | 2,831289 | 0,002724 | 0,002462 | 0,003603 | 2,155 |
| 2125 | -4,853851 | 11,75466 | 5,737887 | 0,001259 | 0,002297 | 0,002839 | 2,148165 |
| 2126 | -4,85861 | 11,685158 | 5,156884 | 0,001254 | 0,002314 | 0,002719 | 4,146349 |
| 2127 | -4,659524 | 11,852502 | 6,353749 | 0,001293 | 0,002224 | 0,002908 | 1,86348 |
| 2128 | -4,764466 | 11,868856 | 6,329072 | 0,001284 | 0,002407 | 0,003008 | 1,451164 |
| 2129 | -4,766757 | 11,846772 | 5,741185 | 0,001258 | 0,002209 | 0,002771 | 4,869149 |
| 2130 | -4,880662 | 11,766943 | 5,138976 | 0,001263 | 0,002301 | 0,002821 | 2,704261 |
| 2131 | -4,879222 | 11,722966 | 4,587399 | 0,001239 | 0,002329 | 0,002586 | 2,212153 |
| 2132 | -4,552483 | 11,8801 | 8,662157 | 0,001388 | 0,002373 | 0,003596 | 1,521693 |
| 2133 | -4,636651 | 11,531615 | 8,667594 | 0,001462 | 0,002406 | 0,004033 | 0,802047 |
| 2134 | -4,692389 | 12,00495 | 7,542598 | 0,001331 | 0,0023 | 0,003327 | 1,066173 |
| 2135 | -4,353201 | 11,87988 | 5,720804 | 0,001364 | 0,002799 | 0,00374 | 0,994163 |
| 2136 | -4,208277 | 11,923549 | 6,302614 | 0,001371 | 0,002788 | 0,003924 | 1,198306 |
| 2137 | -4,206122 | 11,927217 | 5,715638 | 0,001392 | 0,002791 | 0,003791 | 1,792644 |
| 2138 | -4,2281 | 11,82648 | 4,53596 | 0,001551 | 0,002897 | 0,003496 | 0,90283 |
| 2139 | -4,178109 | 11,924249 | 8,667716 | 0,001376 | 0,002883 | 0,004474 | 1,059516 |
| 2140 | -4,171969 | 11,867533 | 8,656797 | 0,001385 | 0,002901 | 0,004487 | 1,741679 |
| 2141 | -4,081437 | 11,936209 | 8,801893 | 0,001388 | 0,0029 | 0,004537 | 1,588927 |
| 2142 | -4,448536 | 11,712987 | 3,409183 | 0,001589 | 0,002684 | 0,002667 | 1,322493 |
| 2143 | -4,478369 | 11,829343 | 4,568718 | 0,001448 | 0,002889 | 0,003395 | 1,012012 |
| 2144 | -4,360244 | 11,801325 | 4,538321 | 0,001505 | 0,002907 | 0,00344 | 0,980454 |
| 2145 | -4,658453 | 11,076597 | 6,351625 | 0,001516 | 0,002322 | 0,003452 | 1,562858 |
| 2146 | -4,696152 | 11,115655 | 5,747015 | 0,001489 | 0,00232 | 0,003258 | 2,947774 |
| 2147 | -4,584204 | 11,430314 | 6,311865 | 0,003038 | 0,002616 | 0,004911 | 1,079535 |
| 2148 | -4,719226 | 10,811941 | 4,625761 | 0,001582 | 0,002465 | 0,003033 | 0,872954 |
| 2149 | -4,70078 | 10,815751 | 5,194133 | 0,00158 | 0,00244 | 0,003246 | 1,396203 |
| 2150 | -4,588953 | 11,15515 | 6,314475 | 0,003435 | 0,002578 | 0,005518 | 0,942995 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2151 | -4,104793 | 11,958793 | 9,250339 | 0,001382 | 0,00292 | 0,004631 | 1,306568 |
| 2153 | -4,230346 | 12,070086 | 7,485897 | 0,001336 | 0,002768 | 0,004152 | 1,505307 |
| 2154 | -4,154434 | 12,07613 | 7,58812 | 0,001348 | 0,002779 | 0,004201 | 1,677036 |
| 2155 | -4,207077 | 11,952477 | 7,47211 | 0,00136 | 0,002809 | 0,004181 | 1,968704 |
| 2156 | -4,118301 | 11,948091 | 7,43511 | 0,001376 | 0,002818 | 0,004205 | 2,626899 |
| 2157 | -4,191399 | 11,921721 | 6,934239 | 0,001367 | 0,002802 | 0,004072 | 1,265402 |
| 2158 | -4,180598 | 11,996997 | 7,477407 | 0,001357 | 0,002797 | 0,004183 | 1,520556 |
| 2159 | -4,526331 | 11,793893 | 4,553965 | 0,001442 | 0,002904 | 0,003371 | 0,842117 |
| 2160 | -4,548912 | 11,793349 | 4,08746 | 0,001525 | 0,002964 | 0,003213 | 1,326104 |
| 2161 | -4,519509 | 11,729975 | 3,980334 | 0,00158 | 0,003006 | 0,00319 | 2,118216 |
| 2162 | -4,739578 | 11,726067 | 4,090364 | 0,001424 | 0,002798 | 0,002972 | 0,995227 |
| 2163 | -4,849117 | 11,732648 | 4,245192 | 0,001332 | 0,002512 | 0,002822 | 1,631373 |
| 2164 | -4,473156 | 11,806844 | 5,146597 | 0,001358 | 0,003426 | 0,004013 | 4,850494 |
| 2165 | -4,32194 | 11,851299 | 5,257706 | 0,00141 | 0,002831 | 0,003644 | 1,175748 |
| 2166 | -4,411161 | 11,722925 | 3,874922 | 0,001661 | 0,003022 | 0,003205 | 3,109458 |
| 2168 | -4,57213 | 11,697805 | 3,414627 | 0,001495 | 0,00257 | 0,002541 | 1,560086 |
| 2169 | -4,338662 | 11,830614 | 5,121843 | 0,001423 | 0,002846 | 0,003605 | 1,303637 |
| 2170 | -4,205165 | 11,842845 | 5,131783 | 0,001503 | 0,002919 | 0,003864 | 1,092638 |
| 2171 | -4,227599 | 11,718311 | 4,505292 | 0,001799 | 0,003234 | 0,004129 | 1,932442 |
| 2172 | -4,16592 | 12,101617 | 8,027506 | 0,001347 | 0,002793 | 0,00429 | 1,422089 |
| 2173 | -4,477466 | 12,064991 | 8,047685 | 0,001361 | 0,002333 | 0,003477 | 2,00271 |
| 2174 | -4,599589 | 11,904289 | 8,069036 | 0,001368 | 0,00234 | 0,003463 | 2,093628 |
| 2175 | -4,045766 | 12,003339 | 8,760621 | 0,001383 | 0,002882 | 0,004523 | 1,920995 |
| 2176 | -4,070173 | 11,889089 | 8,638142 | 0,001396 | 0,002906 | 0,004513 | 1,328507 |
| 2178 | -4,080142 | 11,916258 | 8,120112 | 0,002561 | 0,003638 | 0,004991 | 1,277573 |
| 2179 | -4,158004 | 12,003671 | 8,046123 | 0,003979 | 0,022903 | 0,011487 | 0,47823 |
| 2180 | -4,056991 | 12,111688 | 7,145982 | 0,001357 | 0,002757 | 0,00413 | 0,987261 |
| 2181 | -4,174431 | 12,109206 | 7,152791 | 0,001308 | 0,002973 | 0,004246 | 0,67833 |
| 2182 | -4,075016 | 11,910804 | 8,721692 | 0,001392 | 0,002904 | 0,004526 | 1,498535 |
| 2183 | -4,669264 | 12,023213 | 7,925054 | 0,001344 | 0,002316 | 0,003407 | 1,684588 |
| 2184 | -4,582562 | 11,913624 | 7,479686 | 0,001245 | 0,003286 | 0,004536 | 0,59128 |
| 2185 | -4,523415 | 11,920255 | 7,477788 | 0,001252 | 0,003287 | 0,004554 | 0,939188 |
| 2186 | -4,520494 | 11,902823 | 6,932349 | 0,001243 | 0,003281 | 0,004425 | 1,114756 |
| 2187 | -4,486496 | 11,910779 | 6,933444 | 0,001247 | 0,003279 | 0,004434 | 0,890956 |
| 2190 | -4,56575 | 11,269202 | 2,8197 | 0,004509 | 0,003445 | 0,005186 | 2,338619 |
| 2191 | -4,568315 | 11,011099 | 2,247017 | 0,00467 | 0,003458 | 0,005105 | 1,738395 |
| 2192 | -4,659946 | 10,770096 | 1,663432 | 0,004789 | 0,003452 | 0,004996 | 1,158695 |
| 2193 | -4,652504 | 10,78344 | 2,237239 | 0,004719 | 0,003506 | 0,005135 | 1,206502 |
| 2194 | -4,583155 | 11,040547 | 2,819061 | 0,004581 | 0,003503 | 0,005245 | 1,458399 |
| 2195 | -4,559699 | 11,285211 | 3,417409 | 0,002077 | 0,003562 | 0,003315 | 4,339161 |
| 2196 | -1,139343 | 11,952524 | 11,765067 | 0,002821 | 0,004461 | 0,005494 | 0,845774 |
| 2197 | -1,149443 | 11,961242 | 11,207409 | 0,002845 | 0,004427 | 0,00537 | 0,981135 |
| 2198 | -1,207214 | 11,949281 | 11,166392 | 0,002848 | 0,004423 | 0,005363 | 1,907026 |
| 2199 | -1,209365 | 11,958515 | 11,273041 | 0,002843 | 0,004426 | 0,005384 | 0,619702 |
| 2200 | -1,423362 | 11,943724 | 11,282516 | 0,002845 | 0,00441 | 0,005387 | 0,574025 |
| 2201 | -1,15968 | 11,879685 | 12,918268 | 0,00229 | 0,004481 | 0,005279 | 1,500868 |
| 2202 | -1,147252 | 11,882882 | 13,385422 | 0,002267 | 0,004506 | 0,005392 | 1,028294 |
| 2203 | -0,89385 | 11,888127 | 13,508942 | 0,002259 | 0,004528 | 0,005431 | 1,996398 |
| 2204 | -1,566394 | 11,824354 | 12,4257 | 0,002528 | 0,005483 | 0,00564 | 1,629531 |
| 2205 | -1,544988 | 11,841332 | 12,713567 | 0,002868 | 0,006867 | 0,006525 | 0,735902 |
| 2206 | -1,392831 | 11,855305 | 12,930064 | 0,002499 | 0,005501 | 0,005781 | 1,040028 |
| 2207 | -0,70993 | 11,894255 | 10,64835 | 0,00384 | 0,00748 | 0,006699 | 1,762425 |
| 2208 | -1,410665 | 11,96187 | 10,630487 | 0,003961 | 0,007436 | 0,006695 | 0,701451 |
| 2209 | -1,108414 | 11,931677 | 10,625404 | 0,00391 | 0,007457 | 0,006692 | 1,800919 |
| 2210 | -1,066192 | 11,87992 | 11,822333 | 0,002957 | 0,005711 | 0,005768 | 0,696667 |
| 2211 | -1,055915 | 11,881304 | 12,389842 | 0,002616 | 0,004546 | 0,005359 | 0,579444 |
| 2212 | -0,577938 | -2,115343 | 12,482391 | 0,004383 | 0,003289 | 0,006308 | 2,079475 |
| 2213 | -0,584501 | -2,44562 | 12,496338 | 0,00389 | 0,002719 | 0,005416 | 1,667407 |
| 2214 | -2,942089 | 11,96887 | 9,689212 | 0,001668 | 0,003217 | 0,006571 | 1,83881 |
| 2215 | -2,966661 | 12,077949 | 0,36305 | 0,003023 | 0,002978 | 0,00369 | 3,275667 |
| 2216 | -4,247639 | 12,127619 | 0,35812 | 0,002885 | 0,002865 | 0,003564 | 3,185836 |
| 2217 | -2,854122 | 13,639574 | 7,751456 | 0,001399 | 0,002414 | 0,004777 | 1,377613 |
| 2218 | -2,774448 | 14,880864 | 7,758573 | 0,002952 | 0,003542 | 0,005331 | 1,576727 |
| 2219 | -2,750122 | 14,919559 | 9,494031 | 0,002806 | 0,003499 | 0,005639 | 1,077378 |
| 2220 | -2,619429 | 17,410519 | 8,640603 | 0,001998 | 0,003516 | 0,003948 | 1,396764 |
| 2221 | -2,699204 | 16,510423 | 8,597745 | 0,002716 | 0,003576 | 0,005341 | 1,262738 |
| 2222 | -1,829792 | 17,394475 | 8,642984 | 0,002106 | 0,004822 | 0,005301 | 1,393449 |
| 2223 | -2,644908 | 17,408555 | 4,8411 | 0,002118 | 0,00354 | 0,003286 | 3,808543 |
| 2224 | -2,704219 | 16,436192 | 9,507962 | 0,002639 | 0,003597 | 0,005606 | 1,519258 |
| 2225 | -2,657093 | 17,283633 | 9,457881 | 0,001972 | 0,00351 | 0,004122 | 1,996298 |
| 2226 | -2,593068 | 17,262257 | 8,688251 | 0,002012 | 0,003523 | 0,00398 | 3,59092 |
| 2227 | -0,883256 | 19,708187 | 8,089918 | 0,001799 | 0,003222 | 0,003059 | 2,075062 |
| 2228 | -0,899584 | 19,336004 | 8,072936 | 0,002406 | 0,003638 | 0,004542 | 2,689146 |
| 2229 | -1,678112 | 19,306141 | 0,442646 | 0,003296 | 0,003443 | 0,003736 | 5,111029 |
| 2230 | -1,684004 | 19,704799 | 0,429068 | 0,002033 | 0,003513 | 0,002748 | 8,044888 |
| 2231 | -2,85001 | 13,836075 | 7,513339 | 0,001394 | 0,002358 | 0,005556 | 1,586541 |
| 2232 | -2,850053 | 13,878704 | 7,251885 | 0,001391 | 0,002319 | 0,005504 | 1,336182 |
| 2233 | -2,864713 | 13,583173 | 7,248312 | 0,001453 | 0,002359 | 0,005496 | 1,33673 |
| 2234 | -2,860021 | 13,576434 | 7,020662 | 0,001467 | 0,002333 | 0,005453 | 1,494685 |
| 2235 | -2,848966 | 13,696556 | 7,023165 | 0,001443 | 0,002314 | 0,005463 | 1,511264 |
| 2236 | -2,851694 | 13,693769 | 6,874338 | 0,001452 | 0,002295 | 0,005433 | 1,474318 |
| 2237 | -2,845314 | 13,75915 | 6,870466 | 0,001439 | 0,002285 | 0,005438 | 1,622532 |
| 2238 | -2,852557 | 13,784211 | 6,342145 | 0,001413 | 0,002222 | 0,004482 | 2,115921 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2239 | -2,841318 | 13,871566 | 6,34081 | 0,0014 | 0,002207 | 0,004475 | 1,626475 |
| 2240 | -2,845394 | 13,869712 | 6,271275 | 0,001404 | 0,002198 | 0,004461 | 2,200394 |
| 2241 | -2,837821 | 13,984275 | 6,266314 | 0,001386 | 0,002179 | 0,004447 | 1,287297 |
| 2242 | -2,836398 | 14,105011 | 6,198448 | 0,001438 | 0,002143 | 0,005349 | 2,146595 |
| 2243 | -2,827195 | 14,106365 | 6,095804 | 0,00146 | 0,002127 | 0,005343 | 1,895287 |
| 2244 | -2,822129 | 14,053847 | 6,100196 | 0,001394 | 0,002146 | 0,004414 | 2,282629 |
| 2245 | -2,813857 | 14,064048 | 5,963218 | 0,001411 | 0,002126 | 0,004393 | 1,552377 |
| 2246 | -2,831452 | 14,098006 | 5,935492 | 0,001492 | 0,002102 | 0,005323 | 2,071337 |
| 2247 | -2,805158 | 14,135279 | 5,561875 | 0,003204 | 0,003456 | 0,004892 | 0,90031 |
| 2248 | -2,792616 | 14,247377 | 5,562503 | 0,003195 | 0,003461 | 0,00488 | 1,285725 |
| 2249 | -2,795141 | 14,235516 | 5,369489 | 0,003209 | 0,003454 | 0,004838 | 1,324085 |
| 2250 | -2,790732 | 14,244787 | 5,34174 | 0,003211 | 0,003453 | 0,004832 | 0,842105 |
| 2251 | -2,784198 | 14,333984 | 5,20174 | 0,003212 | 0,003452 | 0,004791 | 1,260572 |
| 2252 | -2,778015 | 14,333611 | 5,050126 | 0,004674 | 0,003463 | 0,006458 | 1,159194 |
| 2253 | -2,788522 | 14,200812 | 5,056972 | 0,003236 | 0,003443 | 0,004777 | 1,276717 |
| 2254 | -2,779722 | 14,150181 | 3,842575 | 0,003314 | 0,003399 | 0,004542 | 0,819327 |
| 2255 | -2,797901 | 13,934532 | 3,843541 | 0,003335 | 0,00339 | 0,004566 | 0,661072 |
| 2256 | -2,798325 | 13,930586 | 3,768056 | 0,003339 | 0,003387 | 0,004552 | 0,716624 |
| 2257 | -2,823085 | 13,762426 | 3,764064 | 0,003352 | 0,003377 | 0,004566 | 1,194127 |
| 2258 | -2,786244 | 13,949568 | 2,671952 | 0,003386 | 0,003345 | 0,004363 | 1,054439 |
| 2259 | -2,755419 | 14,54504 | 2,666568 | 0,003321 | 0,003372 | 0,004293 | 0,90074 |
| 2260 | -2,755209 | 14,534632 | 2,405316 | 0,00333 | 0,003361 | 0,004255 | 1,072048 |
| 2261 | -2,77399 | 14,292619 | 2,408002 | 0,003355 | 0,00335 | 0,004282 | 0,799966 |
| 2262 | -2,784196 | 14,285121 | 1,675093 | 0,003371 | 0,003318 | 0,004178 | 1,257886 |
| 2263 | -2,787479 | 14,242888 | 1,675292 | 0,003375 | 0,003316 | 0,004183 | 1,208281 |
| 2264 | -2,7606 | 14,221078 | 0,933832 | 0,003394 | 0,003282 | 0,004105 | 6,137347 |
| 2265 | -2,795474 | 14,15029 | 0,953013 | 0,004016 | 0,003499 | 0,004592 | 0,733904 |
| 2266 | -2,793924 | 14,147353 | 0,784276 | 0,004023 | 0,003491 | 0,004571 | 2,770079 |
| 2267 | -2,810214 | 13,785345 | 0,370508 | 0,003536 | 0,004028 | 0,00435 | 2,160372 |
| 2268 | -0,2699 | 19,76944 | 8,456482 | 0,001776 | 0,003238 | 0,00317 | 1,925967 |
| 2270 | -4,64343 | 11,780964 | 0,602521 | 0,00251 | 0,002633 | 0,003285 | 7,961299 |
| 2271 | -2,623451 | 17,381816 | 2,174162 | 0,002141 | 0,003524 | 0,003009 | 2,163958 |
| 2272 | -4,282937 | 11,914395 | 0,612626 | 0,003055 | 0,003079 | 0,003703 | 3,676505 |
| 2273 | -4,284967 | 11,944982 | 0,355678 | 0,003354 | 0,003067 | 0,003863 | 3,168149 |
| 2274 | -2,606512 | 17,349547 | 1,62487 | 0,00214 | 0,003512 | 0,002985 | 2,784223 |
| 2275 | -2,638032 | 17,076644 | 1,621212 | 0,003038 | 0,003403 | 0,003826 | 2,156943 |
| 2276 | -2,631047 | 17,065811 | 1,491122 | 0,002313 | 0,003493 | 0,003153 | 2,154568 |
| 2277 | -2,718298 | 15,366725 | 1,488727 | 0,003248 | 0,003356 | 0,004031 | 0,977975 |
| 2278 | -2,766441 | 14,324478 | 1,479888 | 0,003373 | 0,003312 | 0,004153 | 0,834856 |
| 2279 | -0,304206 | 19,712959 | 8,087421 | 0,001842 | 0,004427 | 0,005299 | 2,689207 |
| 2281 | -0,968433 | 20,683986 | 0,438685 | 0,003546 | 0,007408 | 0,003613 | 10,235155 |
| 2282 | -0,712124 | 20,559175 | 0,893817 | 0,003767 | 0,007698 | 0,003745 | 4,387241 |
| 2283 | -0,339604 | 20,572244 | 0,882785 | 0,004194 | 0,00788 | 0,003928 | 4,049696 |
| 2284 | -0,313126 | 20,616832 | 0,416698 | 0,004347 | 0,007768 | 0,003889 | 6,776387 |
| 2285 | -0,785803 | 20,02342 | 0,917203 | 0,002894 | 0,004107 | 0,003217 | 2,910766 |
| 2286 | -0,780463 | 20,021062 | 1,446597 | 0,002852 | 0,004147 | 0,003297 | 6,526774 |
| 2287 | -0,767234 | 19,827772 | 1,568261 | 0,002537 | 0,003753 | 0,003154 | 5,20226 |
| 2288 | -0,769637 | 19,710349 | 1,567667 | 0,002929 | 0,00427 | 0,003409 | 3,402484 |
| 2289 | -0,713655 | 19,715223 | 2,391696 | 0,002524 | 0,004218 | 0,003302 | 1,806049 |
| 2290 | -0,668576 | 20,019977 | 2,295617 | 0,002795 | 0,004215 | 0,003536 | 2,761144 |
| 2291 | -0,683934 | 20,006133 | 2,118612 | 0,00249 | 0,003753 | 0,003227 | 2,318842 |
| 2292 | -0,561854 | 20,463366 | 2,158973 | 0,002443 | 0,003691 | 0,003168 | 2,785576 |
| 2293 | -0,580765 | 20,598269 | 1,987417 | 0,008309 | 0,003674 | 0,008307 | 1,203415 |
| 2294 | -0,487473 | 20,874372 | 1,963053 | 0,002001 | 0,004112 | 0,002782 | 3,103139 |
| 2295 | -1,788499 | 17,376703 | 6,9579 | 0,002288 | 0,00516 | 0,00503 | 1,206142 |
| 2296 | -0,383886 | 18,236422 | 8,502306 | 0,003748 | 0,004267 | 0,0073 | 1,267148 |
| 2297 | -0,461566 | 18,281823 | 7,674332 | 0,004403 | 0,005181 | 0,008892 | 1,587315 |
| 2298 | -0,578588 | 20,538098 | 1,578231 | 0,008405 | 0,003636 | 0,008155 | 1,994604 |
| 2299 | -0,589888 | 20,705229 | 1,802448 | 0,008299 | 0,003669 | 0,00819 | 2,196451 |
| 2300 | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a |
| 2301 | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a |
| 2302 | -0,839856 | 18,317981 | 8,446128 | 0,003481 | 0,004176 | 0,007527 | 4,148411 |
| 2303 | -0,819592 | 18,183279 | 8,767617 | 0,003465 | 0,004213 | 0,00772 | 1,241648 |
| 2304 | -0,794846 | 18,317662 | 3,618122 | 0,004305 | 0,004001 | 0,005577 | 1,346472 |
| 2305 | -0,825836 | 18,210065 | 3,525539 | 0,004325 | 0,00401 | 0,005552 | 0,775383 |
| 2306 | -0,70124 | 18,353534 | 3,622875 | 0,00638 | 0,005794 | 0,007627 | 0,786908 |
| 2307 | -0,78135 | 18,47005 | 3,538335 | 0,003751 | 0,003621 | 0,004924 | 1,479939 |
| 2308 | -0,892028 | 18,311574 | 1,180449 | 0,004574 | 0,003875 | 0,00481 | 1,899271 |
| 2309 | -2,06677 | 17,273842 | 9,456248 | 0,001775 | 0,007653 | 0,007624 | 2,678303 |
| 2310 | -4,76028 | 11,704962 | 0,292975 | 0,002414 | 0,002442 | 0,003174 | 4,518648 |
| 2311 | -4,549424 | 11,826003 | 0,346448 | 0,003038 | 0,003024 | 0,003668 | 2,67323 |
| 2312 | -0,8442 | 17,342678 | 8,813635 | 0,003654 | 0,00436 | 0,007934 | 1,019824 |
| 2313 | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a |
| 2314 | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a |
| 2315 | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a |
| 2316 | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a |
| 2317 | -0,559535 | 18,185491 | 8,765301 | 0,003579 | 0,004239 | 0,007899 | 1,564207 |
| 2318 | -1,385188 | 17,456056 | 5,993978 | 0,002755 | 0,005374 | 0,00549 | 1,751303 |
| 2319 | -1,381996 | 17,366634 | 4,7225 | 0,002981 | 0,005352 | 0,004964 | 1,034639 |
| 2320 | -1,305984 | 17,371775 | 4,53774 | 0,00303 | 0,005354 | 0,004915 | 1,387625 |
| 2321 | -2,595089 | 17,309119 | 1,171682 | 0,002138 | 0,003499 | 0,002976 | 6,066638 |
| 2322 | -1,842991 | 17,440557 | 1,148289 | 0,003223 | 0,00498 | 0,003718 | 2,495425 |
| 2323 | -1,473827 | 17,445195 | 1,131958 | 0,006674 | 0,005944 | 0,005975 | 1,837946 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2324 | -1,36532 | 17,387755 | 6,628282 | 0,002677 | 0,005439 | 0,005814 | 2,729386 |
| 2325 | -1,602317 | 17,388044 | 6,716915 | 0,002611 | 0,005395 | 0,005751 | 3,284721 |
| 2326 | -1,616945 | 17,358427 | 6,949635 | 0,00258 | 0,005416 | 0,005862 | 2,111212 |
| 2327 | -2,899884 | 14,604309 | 0,411767 | 0,003304 | 0,003262 | 0,003976 | 2,706726 |
| 2328 | -2,925189 | 15,852686 | 0,425934 | 0,003126 | 0,003309 | 0,003816 | 2,620822 |
| 2329 | -2,734054 | 16,720302 | 0,422481 | 0,003061 | 0,003341 | 0,003742 | 9,046275 |
| 2330 | -2,760641 | 16,710411 | 0,608769 | 0,003056 | 0,003348 | 0,003751 | 9,660579 |
| 2331 | -2,788654 | 16,484737 | 0,663461 | 0,003079 | 0,003345 | 0,003781 | 5,702191 |
| 2332 | -2,808064 | 16,322371 | 0,610797 | 0,003096 | 0,003338 | 0,003794 | 4,549848 |
| 2333 | -2,850458 | 15,916374 | 0,639088 | 0,00314 | 0,003326 | 0,003841 | 2,587586 |
| 2334 | -2,511184 | 17,126148 | 0,477701 | 0,003073 | 0,003359 | 0,00374 | 6,147889 |
| 2335 | -2,549821 | 16,69149 | 0,473217 | 0,003852 | 0,003693 | 0,004294 | 1,820335 |
| 2336 | -2,519391 | 16,661327 | 0,587572 | 0,003869 | 0,003704 | 0,004324 | 1,281632 |
| 2337 | -2,608422 | 15,429826 | 0,793167 | 0,003333 | 0,003413 | 0,004029 | 3,093573 |
| 2338 | -2,457086 | 16,935446 | 0,811596 | 0,003114 | 0,003375 | 0,003807 | 2,406142 |
| 2339 | -2,616958 | 15,415886 | 0,61393 | 0,003332 | 0,003403 | 0,004011 | 3,011496 |
| 2340 | -2,455163 | 17,108602 | 0,657824 | 0,003153 | 0,003436 | 0,003818 | 3,989546 |
| 2341 | -2,623581 | 15,402788 | 0,426587 | 0,003332 | 0,003392 | 0,003994 | 3,057289 |
| 2342 | -2,453492 | 16,934372 | 0,724781 | 0,003115 | 0,003371 | 0,0038 | 2,565447 |
| 2345 | -2,798192 | 14,077942 | 0,676107 | 0,004041 | 0,003486 | 0,00457 | 1,764448 |
| 2346 | -2,76868 | 14,511011 | 0,682639 | 0,003354 | 0,003282 | 0,004042 | 3,941253 |
| 2347 | -2,791417 | 14,658834 | 0,572339 | 0,003328 | 0,003281 | 0,004009 | 1,995897 |
| 2348 | -2,582419 | 15,423644 | 0,925875 | 0,003282 | 0,003342 | 0,003995 | 1,949561 |
| 2349 | -2,644355 | 15,562727 | 1,06343 | 0,003245 | 0,003348 | 0,003976 | 2,064777 |
| 2350 | -2,702508 | 16,238667 | 1,004451 | 0,003137 | 0,00336 | 0,003865 | 1,916522 |
| 2351 | -2,614755 | 17,146292 | 1,190329 | 0,004999 | 0,003502 | 0,005337 | 1,489641 |
| 2352 | -2,657529 | 16,700875 | 1,299361 | 0,003086 | 0,003384 | 0,00384 | 2,220865 |
| 2353 | -0,968005 | 19,735479 | 0,414649 | 0,002925 | 0,004149 | 0,003219 | 5,419028 |
| 2354 | -0,788241 | 19,714756 | 0,663892 | 0,002995 | 0,004198 | 0,003274 | 3,320866 |
| 2355 | 0,083457 | 20,899796 | 1,937338 | 0,00192 | 0,003641 | 0,002669 | 5,822711 |
| 2356 | -1,883268 | 14,904931 | 9,509796 | 0,004723 | 0,004119 | 0,005579 | 1,22995 |
| 2357 | -1,786586 | 14,911144 | 8,147495 | 0,168607 | 0,121054 | 0,213176 | 1,243993 |
| 2359 | -2,093232 | 13,662965 | 9,466837 | 0,00181 | 0,002714 | 0,004886 | 2,050442 |
| 2360 | -0,007237 | 17,61291 | 8,487306 | 0,002693 | 0,003407 | 0,00351 | 2,014586 |
| 2361 | -0,186616 | 17,584913 | 8,498216 | 0,003129 | 0,003964 | 0,004139 | 2,919955 |
| 2362 | -0,237175 | 17,580611 | 8,811672 | 0,003541 | 0,003608 | 0,004374 | 2,455081 |
| 2364 | 0,066068 | 17,596392 | 2,678854 | 0,002543 | 0,003694 | 0,003293 | 5,614717 |
| 2365 | 0,084679 | 17,656805 | 2,67132 | 0,00252 | 0,003777 | 0,003276 | 7,125429 |
| 2366 | 0,201204 | 17,609971 | 1,217981 | 0,00229 | 0,003656 | 0,003239 | 4,174757 |
| 2367 | -0,222933 | 17,446236 | 8,847877 | 0,002746 | 0,003404 | 0,003592 | 3,41715 |
| 2368 | -0,291067 | 16,836983 | 8,912314 | 0,002919 | 0,003563 | 0,003842 | 2,372845 |
| 2369 | -0,303089 | 16,042148 | 8,348925 | 0,002872 | 0,003527 | 0,003705 | 5,069002 |
| 2370 | -0,348587 | 13,721183 | 8,293988 | 0,003081 | 0,003575 | 0,003931 | 4,021108 |
| 2371 | -0,450841 | 13,410372 | 8,515984 | 0,002861 | 0,003267 | 0,003715 | 2,987502 |
| 2372 | -0,44998 | 13,37746 | 9,387636 | 0,002891 | 0,003256 | 0,003807 | 1,412684 |
| 2373 | -0,458013 | 13,225018 | 9,470904 | 0,003062 | 0,003458 | 0,003995 | 5,028722 |
| 2374 | -0,525692 | 12,348312 | 9,564586 | 0,003062 | 0,003099 | 0,003872 | 2,115965 |
| 2375 | -0,52442 | 11,88428 | 9,546834 | 0,002999 | 0,002899 | 0,00374 | 0,848824 |
| 2376 | -0,193996 | 17,601513 | 1,231825 | 0,002727 | 0,003768 | 0,003838 | 4,552682 |
| 2377 | -0,490848 | 12,416188 | 5,764116 | 0,00154 | 0,00297 | 0,002697 | 1,16921 |
| 2378 | -0,432947 | 13,508591 | 5,237404 | 0,001159 | 0,003468 | 0,002631 | 0,885366 |
| 2379 | -0,428109 | 13,602066 | 4,985569 | 0,001067 | 0,003502 | 0,00258 | 1,919245 |
| 2380 | -0,417033 | 13,80995 | 4,986649 | 0,001053 | 0,003531 | 0,00258 | 1,689542 |
| 2381 | -0,416118 | 13,83344 | 4,389954 | 0,001101 | 0,00391 | 0,003026 | 0,912072 |
| 2382 | -0,413002 | 13,8943 | 4,16483 | 0,001226 | 0,003895 | 0,003058 | 1,06016 |
| 2383 | -0,403015 | 14,081781 | 4,164217 | 0,001185 | 0,003901 | 0,003034 | 1,499176 |
| 2384 | -0,403204 | 14,079037 | 4,088128 | 0,001239 | 0,003894 | 0,003051 | 1,502368 |
| 2385 | -0,398249 | 14,172106 | 4,082816 | 0,001223 | 0,003896 | 0,003041 | 0,848072 |
| 2386 | -0,397239 | 14,191933 | 3,99916 | 0,001282 | 0,00389 | 0,003059 | 1,883644 |
| 2387 | -0,38986 | 14,33042 | 4,002075 | 0,001263 | 0,004024 | 0,003086 | 1,887087 |
| 2388 | -0,388134 | 14,363514 | 3,935687 | 0,001296 | 0,003887 | 0,003054 | 2,675048 |
| 2389 | -0,254862 | 16,865064 | 3,942227 | 0,001414 | 0,003788 | 0,00296 | 1,568137 |
| 2390 | -0,254537 | 16,870416 | 4,01406 | 0,001411 | 0,003789 | 0,002963 | 1,461306 |
| 2391 | -0,250083 | 16,954004 | 4,015668 | 0,001436 | 0,003782 | 0,002968 | 1,773704 |
| 2392 | -0,243288 | 17,078098 | 4,342275 | 0,001537 | 0,003772 | 0,003023 | 2,015164 |
| 2393 | -0,234233 | 17,248009 | 4,347458 | 0,001595 | 0,00393 | 0,003367 | 1,891513 |
| 2394 | -0,234212 | 17,24595 | 4,580162 | 0,001708 | 0,004354 | 0,004156 | 1,483855 |
| 2395 | -0,216281 | 17,58245 | 4,587514 | 0,001862 | 0,004349 | 0,004227 | 2,916218 |
| 2398 | -4,208827 | -3,349383 | 8,831567 | 0,002755 | 0,005926 | 0,0063 | 0,616892 |
| 2399 | -4,246394 | -3,368173 | 9,441309 | 0,002661 | 0,005977 | 0,006507 | 0,982601 |
| 2400 | -0,520773 | 11,866711 | 7,613246 | 0,00295 | 0,0029 | 0,003591 | 3,275316 |
| 2401 | -0,522313 | 11,853772 | 9,303292 | 0,003153 | 0,003005 | 0,003913 | 2,770097 |
| 2402 | -0,517241 | 11,963186 | 7,526864 | 0,003003 | 0,003099 | 0,003712 | 1,766257 |
| 2403 | -0,517502 | 12,013731 | 6,41104 | 0,002392 | 0,002738 | 0,002941 | 2,019558 |
| 2404 | -0,520976 | 11,889966 | 6,37107 | 0,002391 | 0,002719 | 0,002932 | 2,147887 |
| 2405 | -0,503993 | 11,877256 | 4,628015 | 0,002307 | 0,002793 | 0,002807 | 3,260326 |
| 2406 | -0,509249 | 11,777843 | 4,597044 | 0,002308 | 0,002778 | 0,002801 | 2,271284 |
| 2407 | -0,498607 | 11,766235 | 2,796256 | 0,002158 | 0,002826 | 0,002776 | 1,47034 |
| 2408 | -0,492681 | 11,679741 | 2,786489 | 0,002158 | 0,002813 | 0,002769 | 1,623355 |
| 2409 | -0,500385 | 11,686812 | 1,627895 | 0,001998 | 0,002812 | 0,002787 | 2,110816 |
| 2410 | -0,485642 | 11,805353 | 1,618709 | 0,002093 | 0,002841 | 0,002928 | 1,58204 |
| 2411 | -0,492809 | 11,81389 | 1,067235 | 0,002622 | 0,003126 | 0,003718 | 2,152161 |
| 2412 | -0,461887 | 12,696114 | 1,075349 | 0,002692 | 0,003625 | 0,003822 | 1,539283 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2413 | -0,448672 | 13,641875 | 1,014694 | 0,003189 | 0,003675 | 0,004404 | 3,72219 |
| 2414 | -0,272125 | 16,848661 | 1,040745 | 0,003067 | 0,003748 | 0,004253 | 1,708179 |
| 2415 | 0,203096 | 18,556325 | 1,225936 | 0,002501 | 0,003679 | 0,003414 | 4,496095 |
| 2416 | 0,174036 | 19,11233 | 1,588695 | 0,002277 | 0,003621 | 0,003085 | 3,66923 |
| 2417 | 0,172101 | 21,047488 | 1,573153 | 0,00262 | 0,004046 | 0,003608 | 1,898454 |
| 2418 | -0,696523 | -3,187148 | 9,556634 | 0,003186 | 0,002161 | 0,003796 | 1,221081 |
| 2419 | -0,681234 | -3,269218 | 8,210337 | 0,003302 | 0,002654 | 0,003757 | 1,514281 |
| 2420 | -0,680198 | -3,315696 | 8,120265 | 0,004339 | 0,002809 | 0,004365 | 1,520749 |
| 2421 | -0,676741 | -3,252776 | 6,978109 | 0,002455 | 0,00245 | 0,003048 | 1,17389 |
| 2422 | -0,685021 | -3,19505 | 6,895483 | 0,004738 | 0,002904 | 0,004405 | 0,989054 |
| 2423 | -0,684763 | -3,252357 | 6,455837 | 0,004226 | 0,002805 | 0,004106 | 0,990921 |
| 2425 | -0,678078 | -3,211015 | 6,346303 | 0,005633 | 0,003213 | 0,004752 | 0,959146 |
| 2426 | -0,783136 | -3,164135 | 1,658848 | 0,001696 | 0,002499 | 0,002402 | 1,688107 |
| 2428 | -0,695087 | -3,202126 | 4,726683 | 0,004483 | 0,002893 | 0,004159 | 1,141664 |
| 2429 | -0,70801 | -3,279542 | 4,619687 | 0,004661 | 0,002994 | 0,004248 | 1,908974 |
| 2430 | -0,73603 | -3,215877 | 3,376921 | 0,002062 | 0,002411 | 0,002636 | 3,578292 |
| 2431 | -0,734919 | -3,143717 | 3,336835 | 0,002194 | 0,002421 | 0,002782 | 0,970034 |
| 2432 | -0,761355 | -3,191627 | 2,209831 | 0,001812 | 0,002532 | 0,002482 | 1,519338 |
| 2433 | -0,707971 | -3,669549 | 9,529672 | 0,002371 | 0,002114 | 0,003058 | 2,07233 |
| 2434 | -0,749146 | -4,092508 | 9,531801 | 0,002561 | 0,002627 | 0,00333 | 1,293629 |
| 2435 | -0,772167 | -4,464125 | 9,526321 | 0,002574 | 0,002612 | 0,003331 | 1,340467 |
| 2436 | -0,802506 | -4,793309 | 9,374328 | 0,001881 | 0,002339 | 0,002664 | 2,268912 |
| 2437 | -0,807968 | -4,787736 | 8,541385 | 0,002209 | 0,002492 | 0,002906 | 1,869649 |
| 2438 | -0,844188 | -5,169911 | 8,342398 | 0,002355 | 0,002532 | 0,003021 | 5,227018 |
| 2439 | -0,842956 | -5,178571 | 8,289086 | 0,005427 | 0,003783 | 0,00544 | 0,605159 |
| 2440 | -1,008465 | -7,338616 | 8,277087 | 0,002646 | 0,003451 | 0,003467 | 1,88976 |
| 2441 | -1,013451 | -7,403888 | 9,349955 | 0,0026 | 0,003379 | 0,003587 | 3,937028 |
| 2442 | -1,032213 | -7,72279 | 9,536182 | 0,002725 | 0,003405 | 0,003619 | 1,24489 |
| 2443 | -1,181821 | -9,394403 | 6,221961 | 0,001556 | 0,003637 | 0,002734 | 2,79897 |
| 2444 | -1,183104 | -9,414671 | 5,702857 | 0,003222 | 0,003828 | 0,003943 | 4,329009 |
| 2445 | -1,14652 | -9,343839 | 5,692881 | 0,007705 | 0,003299 | 0,006576 | 4,284847 |
| 2446 | -1,143537 | -8,891907 | 6,219607 | 0,001507 | 0,003884 | 0,003428 | 1,285409 |
| 2447 | -1,140072 | -8,838379 | 6,049002 | 0,0014 | 0,004036 | 0,003785 | 2,782473 |
| 2448 | -1,12793 | -8,678486 | 6,037281 | 0,001404 | 0,003903 | 0,003377 | 3,096483 |
| 2449 | -1,125012 | -8,630589 | 5,83408 | 0,00131 | 0,003837 | 0,002998 | 1,977996 |
| 2450 | -1,098304 | -8,278184 | 5,793425 | 0,001301 | 0,00388 | 0,003117 | 1,506504 |
| 2451 | -1,083287 | -8,063196 | 5,414169 | 0,001139 | 0,003922 | 0,003168 | 0,834002 |
| 2452 | -1,077048 | -7,981262 | 5,412921 | 0,001148 | 0,003907 | 0,003024 | 1,462447 |
| 2453 | -1,073726 | -7,926991 | 5,186936 | 0,001106 | 0,003882 | 0,00298 | 1,228913 |
| 2454 | -1,051731 | -7,638268 | 5,185183 | 0,001102 | 0,00387 | 0,00285 | 1,213906 |
| 2455 | -1,040959 | -7,474799 | 4,717527 | 0,001121 | 0,003917 | 0,002955 | 2,093019 |
| 2456 | -1,030107 | -7,332401 | 4,717558 | 0,001096 | 0,003922 | 0,002942 | 2,440992 |
| 2457 | -1,017896 | -7,155144 | 4,357663 | 0,001222 | 0,003906 | 0,002965 | 1,282132 |
| 2458 | -1,01731 | -7,140936 | 4,219818 | 0,001315 | 0,003988 | 0,003083 | 1,780366 |
| 2459 | -1,001015 | -6,926635 | 4,210016 | 0,001259 | 0,003999 | 0,003055 | 1,25312 |
| 2460 | -1,001012 | -6,919154 | 4,052694 | 0,001361 | 0,004055 | 0,003276 | 1,107194 |
| 2461 | -0,997232 | -6,869588 | 4,053434 | 0,001335 | 0,003948 | 0,003215 | 1,0131 |
| 2462 | -0,992848 | -6,796217 | 3,718403 | 0,001622 | 0,003765 | 0,002921 | 1,328579 |
| 2463 | -0,721923 | -3,240284 | 3,703063 | 0,002177 | 0,003274 | 0,002921 | 0,889465 |
| 2465 | -0,780666 | -3,614226 | 1,651159 | 0,002399 | 0,002706 | 0,003112 | 1,447723 |
| 2466 | -0,84429 | -4,124598 | 1,477142 | 0,002579 | 0,002703 | 0,003267 | 2,161954 |
| 2467 | -0,835929 | -4,201377 | 1,344811 | 0,002395 | 0,002692 | 0,003103 | 2,465403 |
| 2468 | -1,100772 | -7,81295 | 1,202547 | 0,002683 | 0,003626 | 0,003743 | 1,657576 |
| 2469 | -1,08819 | -8,420769 | 1,100523 | 0,00247 | 0,003576 | 0,003481 | 7,471612 |
| 2470 | -1,138264 | -8,926958 | 1,111602 | 0,003665 | 0,004041 | 0,004861 | 1,792572 |
| 2471 | -1,138589 | -8,948533 | 1,43427 | 0,002905 | 0,004166 | 0,003973 | 1,770671 |
| 2472 | -0,529122 | -9,092622 | 2,357011 | 0,002343 | 0,003578 | 0,003073 | 2,329376 |
| 2473 | -1,18752 | -9,108711 | 2,351094 | 0,004976 | 0,014402 | 0,004327 | 2,683276 |
| 2474 | -1,170172 | -8,970092 | 3,405687 | 0,005087 | 0,014073 | 0,004572 | 1,547785 |
| 2475 | -1,173627 | -9,157732 | 4,829129 | 0,00781 | 0,023975 | 0,007217 | 3,396756 |
| 2476 | -1,156988 | -9,273963 | 4,871921 | 0,007802 | 0,024156 | 0,007278 | 2,956266 |
| 2477 | -0,582557 | -11,168713 | 2,310589 | 0,003065 | 0,003451 | 0,003676 | 2,258833 |
| 2478 | -0,60938 | -11,371236 | 2,20101 | 0,003014 | 0,003448 | 0,003639 | 3,288581 |
| 2479 | -0,606958 | -11,873287 | 2,186894 | 0,002771 | 0,00346 | 0,003401 | 3,19012 |
| 2480 | -0,594402 | -12,167443 | 2,438786 | 0,002798 | 0,003448 | 0,003381 | 2,003205 |
| 2481 | -0,587163 | -12,40333 | 2,437188 | 0,002275 | 0,003292 | 0,002817 | 3,536806 |
| 2482 | -0,610113 | -13,785333 | 0,656842 | 0,002698 | 0,003711 | 0,003444 | 6,057652 |
| 2483 | -0,596407 | -12,629929 | 0,892582 | 0,002701 | 0,003442 | 0,003488 | 2,748253 |
| 2484 | -0,593024 | -11,779515 | 0,891492 | 0,003753 | 0,003339 | 0,004702 | 1,21299 |
| 2485 | -0,594764 | -11,774923 | 0,844677 | 0,003743 | 0,003339 | 0,004707 | 1,199754 |
| 2486 | -0,586745 | -11,348277 | 0,833929 | 0,002706 | 0,003507 | 0,003572 | 3,257165 |
| 2487 | -0,582061 | -11,196342 | 0,703802 | 0,002706 | 0,00351 | 0,003603 | 2,492254 |
| 2488 | -0,565291 | -11,141629 | 0,464806 | 0,002971 | 0,003516 | 0,003938 | 3,330333 |
| 2489 | -0,51356 | -11,082827 | 0,330035 | 0,007368 | 0,003033 | 0,008921 | 4,295687 |
| 2494 | -1,397346 | -4,75437 | 9,381521 | 0,002868 | 0,002604 | 0,003729 | 1,630898 |
| 2495 | -1,419041 | -4,785508 | 8,547002 | 0,003066 | 0,003896 | 0,005206 | 0,673671 |
| 2496 | -1,483069 | -5,272181 | 8,27372 | 0,004808 | 0,004074 | 0,008504 | 1,580881 |
| 2497 | -1,314115 | -4,405342 | 9,580157 | 0,00416 | 0,006477 | 0,00927 | 1,392492 |
| 2498 | -1,313317 | -3,289027 | 9,580153 | 0,00472 | 0,008852 | 0,011024 | 1,767955 |
| 2499 | -1,336918 | -3,291608 | 0,586718 | 0,007121 | 0,007151 | 0,006365 | 2,198874 |
| 2500 | -4,007502 | -3,478271 | 6,418511 | 0,003516 | 0,007757 | 0,006414 | 1,93039 |
| 2501 | -3,903732 | -3,487925 | 6,497759 | 0,003278 | 0,005636 | 0,005894 | 1,570748 |
| 2502 | -4,291905 | -3,489634 | 1,764791 | 0,004659 | 0,005482 | 0,005103 | 1,425014 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2503 | -4,200722 | -3,492586 | 1,27622 | 0,004764 | 0,005438 | 0,005022 | 2,500126 |
| 2504 | -4,092561 | -3,471949 | 0,830595 | 0,00545 | 0,006313 | 0,005243 | 1,939198 |
| 2505 | -4,02088 | -3,515051 | 0,478883 | 0,005522 | 0,006236 | 0,005185 | 4,162874 |
| 2506 | -4,351787 | -3,130449 | 0,678783 | 0,005429 | 0,006482 | 0,005185 | 1,085523 |
| 2507 | -4,306043 | -3,446836 | 0,674317 | 0,005365 | 0,006249 | 0,005133 | 3,20501 |
| 2508 | -4,066596 | -3,508736 | 0,684892 | 0,007246 | 0,009926 | 0,006351 | 3,668892 |
| 2509 | -4,311296 | -3,534735 | 0,571828 | 0,005736 | 0,00616 | 0,005462 | 3,327135 |
| 2510 | -4,044405 | -3,517587 | 0,577802 | 0,007276 | 0,009881 | 0,00633 | 3,290725 |
| 2511 | -4,323841 | -3,198274 | 0,556208 | 0,005441 | 0,006414 | 0,005156 | 8,1293 |
| 2512 | -1,605817 | -7,266663 | 8,283577 | 0,00399 | 0,005008 | 0,007337 | 1,655796 |
| 2513 | -1,586448 | -7,399599 | 8,420524 | 0,002958 | 0,003954 | 0,005371 | 2,537205 |
| 2514 | -1,606491 | -7,37867 | 9,370623 | 0,002991 | 0,004348 | 0,00482 | 2,310633 |
| 2515 | -1,613802 | -7,749181 | 9,556335 | 0,002842 | 0,00398 | 0,005545 | 1,694649 |
| 2516 | -1,825444 | -9,469426 | 4,896613 | 0,003204 | 0,004828 | 0,00485 | 3,351314 |
| 2517 | -1,857738 | -9,451521 | 3,641134 | 0,003252 | 0,004821 | 0,004644 | 4,03353 |
| 2518 | -1,026525 | 13,419408 | 9,377358 | 0,003529 | 0,005756 | 0,005558 | 0,676677 |
| 2520 | -1,872174 | -9,375179 | 2,12133 | 0,003297 | 0,00478 | 0,004446 | 3,947021 |
| 2521 | -1,831433 | -9,19876 | 2,110716 | 0,003227 | 0,003795 | 0,004226 | 4,017078 |
| 2522 | -1,809357 | -9,084041 | 1,657867 | 0,003369 | 0,003823 | 0,004337 | 4,743086 |
| 2524 | -1,452058 | -12,397824 | 2,423061 | 0,002533 | 0,003908 | 0,003248 | 3,169986 |
| 2525 | -1,485199 | -13,776482 | 0,651373 | 0,002314 | 0,003614 | 0,003018 | 10,427511 |
| 2526 | -2,375185 | -10,181289 | 0,460531 | 0,005694 | 0,008974 | 0,005473 | 3,787073 |
| 2527 | -2,347633 | -12,790778 | 0,50498 | 0,010235 | 0,011744 | 0,006778 | 4,353132 |
| 2528 | -2,104289 | -12,366511 | 1,814095 | 0,00264 | 0,004733 | 0,003487 | 5,137296 |
| 2529 | -1,434662 | -12,387784 | 1,816533 | 0,011486 | 0,0137 | 0,009236 | 1,118703 |
| 2530 | -1,342692 | -12,848249 | 0,494118 | 0,01259 | 0,012743 | 0,008033 | 4,211196 |
| 2531 | -1,522847 | -13,805209 | 0,479186 | 0,002486 | 0,004311 | 0,00327 | 2,799954 |
| 2532 | -1,628406 | -5,882821 | 0,460712 | 0,018494 | 0,002915 | 0,015601 | 0,753046 |
| 2533 | -1,777683 | -9,631072 | 2,122667 | 0,012113 | 0,010881 | 0,01163 | 3,40261 |
| 2534 | -1,803532 | -10,268048 | 1,614889 | 0,012112 | 0,010918 | 0,011171 | 3,351525 |
| 2535 | -1,785635 | -10,316647 | 0,462226 | 0,012439 | 0,010626 | 0,010442 | 5,164097 |
| 2536 | -1,858922 | -9,135995 | 1,137011 | 0,004586 | 0,004713 | 0,00527 | 4,968117 |
| 2537 | -1,329849 | -3,283752 | 1,143661 | 0,007037 | 0,007269 | 0,00655 | 1,945019 |
| 2538 | -0,193688 | 10,120586 | 7,562547 | 0,002894 | 0,002325 | 0,00336 | 1,20127 |
| 2539 | -0,201911 | 10,095625 | 5,220441 | 0,001939 | 0,002102 | 0,002347 | 1,812631 |
| 2540 | -0,262718 | 10,01739 | 7,573751 | 0,002898 | 0,002324 | 0,003368 | 1,419276 |
| 2541 | -0,259351 | 9,986091 | 5,366234 | 0,002022 | 0,002139 | 0,002434 | 1,972112 |
| 2542 | -0,365125 | 9,95011 | 7,356158 | 0,003611 | 0,002956 | 0,003949 | 1,312625 |
| 2543 | -0,354141 | 9,915049 | 5,374375 | 0,003784 | 0,003447 | 0,003952 | 3,240586 |
| 2544 | -0,456037 | 9,847658 | 5,507776 | 0,003048 | 0,002593 | 0,003082 | 1,217106 |
| 2545 | -0,461716 | 9,886684 | 7,233189 | 0,003626 | 0,002963 | 0,003943 | 1,152333 |
| 2546 | -0,368709 | 9,961708 | 7,583183 | 0,003639 | 0,002957 | 0,003997 | 1,195388 |
| 2547 | -0,476576 | 9,907082 | 7,589916 | 0,003675 | 0,002967 | 0,00402 | 1,228658 |
| 2548 | -0,567824 | 9,817472 | 6,347351 | 0,005637 | 0,006539 | 0,005799 | 0,783258 |
| 2549 | -0,571194 | 9,855937 | 7,239299 | 0,003232 | 0,002576 | 0,003702 | 2,390581 |
| 2550 | -0,163974 | 10,232071 | 7,559559 | 0,002987 | 0,002319 | 0,003429 | 1,487594 |
| 2551 | -0,172261 | 10,202053 | 5,222123 | 0,001942 | 0,002123 | 0,00235 | 1,667684 |
| 2552 | -0,45381 | 9,918459 | 9,90265 | 0,004017 | 0,004074 | 0,004954 | 1,139193 |
| 2553 | -0,366576 | 9,968863 | 9,905864 | 0,003979 | 0,004078 | 0,004935 | 1,01024 |
| 2554 | -0,277141 | 10,031246 | 9,911421 | 0,003454 | 0,003584 | 0,004439 | 0,998703 |
| 2555 | -0,224338 | 10,115102 | 9,910271 | 0,00344 | 0,003597 | 0,004429 | 1,157427 |
| 2556 | -0,205331 | 10,113926 | 7,8874 | 0,00245 | 0,002287 | 0,00304 | 1,685943 |
| 2557 | -0,199006 | 10,215777 | 9,903259 | 0,003049 | 0,003239 | 0,004138 | 1,222766 |
| 2558 | -0,172429 | 10,220237 | 7,953699 | 0,002787 | 0,002292 | 0,003324 | 1,73973 |
| 2559 | -0,266606 | 10,015228 | 10,072747 | 0,003455 | 0,003574 | 0,004477 | 1,023818 |
| 2560 | -0,349124 | 9,948457 | 10,06937 | 0,003973 | 0,004063 | 0,00498 | 1,046871 |
| 2561 | -0,438257 | 9,893241 | 10,068865 | 0,004011 | 0,004058 | 0,005001 | 1,069725 |
| 2562 | -0,209251 | 10,102046 | 10,062479 | 0,00344 | 0,003588 | 0,004464 | 1,151052 |
| 2563 | -0,183867 | 10,212139 | 10,065308 | 0,003053 | 0,003231 | 0,00417 | 1,106693 |
| 2564 | -0,188571 | 10,083202 | 4,622016 | 0,001903 | 0,002121 | 0,002265 | 1,700523 |
| 2565 | -0,15806 | 10,19626 | 4,618638 | 0,002053 | 0,002134 | 0,002383 | 1,449677 |
| 2566 | -0,1961 | 10,31986 | 9,900314 | 0,003668 | 0,003335 | 0,004633 | 0,878344 |
| 2567 | -0,185466 | 10,321046 | 10,058146 | 0,003179 | 0,003189 | 0,00423 | 0,964772 |
| 2568 | -0,162856 | 10,348521 | 7,578918 | 0,003142 | 0,002271 | 0,003505 | 1,733799 |
| 2569 | -0,255589 | 9,977089 | 4,625445 | 0,001983 | 0,002165 | 0,00232 | 1,463653 |
| 2570 | -0,263428 | 9,995767 | 5,205761 | 0,002105 | 0,002297 | 0,002514 | 1,922925 |
| 2571 | -0,345219 | 9,880305 | 4,472228 | 0,002354 | 0,002548 | 0,002544 | 1,582987 |
| 2572 | -0,41252 | 9,89085 | 4,622876 | 0,002369 | 0,002545 | 0,002565 | 1,008779 |
| 2573 | -0,424193 | 9,855192 | 4,32844 | 0,002389 | 0,002605 | 0,002537 | 1,660868 |
| 2574 | -0,373666 | 9,836429 | 2,435427 | 0,002292 | 0,00288 | 0,00238 | 3,374922 |
| 2575 | -0,476046 | 9,841578 | 4,257008 | 0,002408 | 0,00261 | 0,002535 | 1,795566 |
| 2576 | -0,491688 | 9,795252 | 2,422797 | 0,002341 | 0,002882 | 0,002408 | 2,28032 |
| 2577 | -0,294959 | 9,929289 | 2,223925 | 0,001807 | 0,002325 | 0,002204 | 3,348981 |
| 2578 | -0,681975 | -0,132894 | 5,790479 | 0,001909 | 0,001775 | 0,002301 | 0,734284 |
| 2579 | -0,635147 | 8,800053 | 5,789328 | 0,002161 | 0,002079 | 0,002735 | 2,018157 |
| 2580 | -0,629947 | 9,475549 | 5,779275 | 0,003624 | 0,002216 | 0,003735 | 1,493533 |
| 2581 | -0,65631 | 9,308271 | 5,789444 | 0,003611 | 0,002207 | 0,003729 | 1,299355 |
| 2582 | -0,638836 | 9,045156 | 5,788196 | 0,003564 | 0,002187 | 0,003699 | 1,242205 |
| 2583 | -4,700717 | -0,167568 | 5,823113 | 0,004745 | 0,004083 | 0,006375 | 2,984271 |
| 2584 | -4,550312 | 8,761538 | 5,856984 | 0,002311 | 0,002121 | 0,003141 | 2,286516 |
| 2585 | -0,174954 | 10,329238 | 5,21459 | 0,002996 | 0,00226 | 0,003362 | 2,167665 |
| 2586 | -0,165756 | 10,320017 | 4,612791 | 0,002293 | 0,002081 | 0,002566 | 1,796339 |
| 2587 | -0,189499 | 10,466002 | 7,58343 | 0,003264 | 0,002295 | 0,003602 | 2,431431 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2588 | -0,20795 | 10,435584 | 5,20348 | 0,003003 | 0,002266 | 0,00337 | 1,267889 |
| 2589 | -0,203102 | 10,435892 | 4,602343 | 0,002924 | 0,002259 | 0,003334 | 1,908217 |
| 2590 | -0,181206 | 10,439627 | 4,332854 | 0,003618 | 0,002398 | 0,003927 | 2,275548 |
| 2591 | -0,245125 | 10,532645 | 4,601125 | 0,003666 | 0,002408 | 0,003939 | 2,269746 |
| 2592 | -0,250119 | 10,54038 | 5,200729 | 0,003758 | 0,002423 | 0,003954 | 0,637011 |
| 2593 | -0,332154 | 10,622651 | 4,601439 | 0,00369 | 0,002468 | 0,00399 | 3,201738 |
| 2594 | -0,333381 | 10,628099 | 5,199127 | 0,003783 | 0,002485 | 0,004007 | 1,157991 |
| 2595 | -0,440756 | 10,685542 | 5,201555 | 0,005188 | 0,004619 | 0,00514 | 0,659955 |
| 2596 | -0,44148 | 10,669248 | 4,609639 | 0,00506 | 0,004599 | 0,005117 | 1,018926 |
| 2597 | -0,232646 | 10,539548 | 4,342905 | 0,00363 | 0,002451 | 0,003966 | 1,587564 |
| 2598 | -0,321167 | 10,636368 | 4,333263 | 0,003909 | 0,002689 | 0,004217 | 2,22248 |
| 2599 | -0,417524 | 10,681659 | 4,27899 | 0,004969 | 0,004574 | 0,005099 | 1,343097 |
| 2600 | -0,245411 | 10,571233 | 7,573369 | 0,00405 | 0,00249 | 0,004143 | 2,110959 |
| 2601 | -0,335468 | 10,650656 | 7,550443 | 0,004404 | 0,002812 | 0,00448 | 2,923551 |
| 2603 | -0,213873 | 10,377396 | 2,862004 | 0,002169 | 0,002161 | 0,002566 | 2,464139 |
| 2604 | -0,294166 | 10,449001 | 2,22269 | 0,002603 | 0,002266 | 0,003325 | 3,457075 |
| 2605 | -0,342661 | 10,615482 | 4,111709 | 0,005218 | 0,005335 | 0,005308 | 1,732463 |
| 2607 | -0,367752 | 10,55104 | 2,812466 | 0,003869 | 0,004071 | 0,004717 | 2,192428 |
| 2608 | -0,451876 | 10,619335 | 2,669684 | 0,005259 | 0,005944 | 0,005576 | 0,609399 |
| 2609 | -0,462066 | 10,649901 | 3,899646 | 0,004906 | 0,004582 | 0,005119 | 3,843188 |
| 2610 | -0,161785 | 10,276716 | 3,203925 | 0,001773 | 0,002126 | 0,002202 | 1,345054 |
| 2611 | -0,198806 | 10,137585 | 2,224952 | 0,001669 | 0,002121 | 0,00219 | 2,168741 |
| 2612 | -0,227679 | 10,030141 | 2,227557 | 0,001852 | 0,002168 | 0,0023 | 2,089102 |
| 2613 | -0,463778 | 10,67792 | 7,348247 | 0,00563 | 0,004731 | 0,005404 | 2,022696 |
| 2614 | -0,535281 | 10,701351 | 3,727692 | 0,005592 | 0,006325 | 0,005783 | 1,030288 |
| 2615 | -0,577726 | 10,645825 | 2,668584 | 0,005318 | 0,005992 | 0,005624 | 1,467578 |
| 2616 | -0,435098 | 10,686193 | 7,609325 | 0,00566 | 0,004733 | 0,005442 | 2,914897 |
| 2617 | -0,433367 | 10,67145 | 8,205031 | 0,005763 | 0,004769 | 0,00557 | 4,708957 |
| 2618 | -0,456614 | 10,621297 | 9,901576 | 0,009747 | 0,01558 | 0,010719 | 0,560962 |
| 2619 | -0,449039 | 10,634291 | 10,066641 | 0,009758 | 0,015572 | 0,010864 | 1,168267 |
| 2620 | -0,365316 | 10,571192 | 9,903715 | 0,00606 | 0,006793 | 0,007008 | 0,66888 |
| 2621 | -0,364594 | 10,571995 | 10,06419 | 0,006085 | 0,006801 | 0,007062 | 0,558274 |
| 2622 | -0,276126 | 10,518891 | 9,894799 | 0,004791 | 0,004703 | 0,005895 | 1,795804 |
| 2623 | -0,272026 | 10,516165 | 10,05728 | 0,00481 | 0,004708 | 0,00593 | 0,713981 |
| 2624 | -0,223411 | 10,437542 | 9,903113 | 0,004725 | 0,004363 | 0,005703 | 1,271032 |
| 2625 | -0,224942 | 10,430147 | 10,059339 | 0,004746 | 0,004368 | 0,005735 | 0,51346 |
| 2626 | -0,564576 | 10,562055 | 4,225776 | 0,005794 | 0,00643 | 0,005848 | 0,490429 |
| 2627 | -0,478334 | 0,488744 | 14,088122 | 0,005383 | 0,003669 | 0,006558 | 0,832688 |
| 2629 | -0,468244 | 7,444668 | 13,973101 | 0,006405 | 0,004275 | 0,007291 | 0,429338 |
| 2630 | -0,471345 | 8,529108 | 14,032465 | 0,005263 | 0,003964 | 0,006337 | 1,129628 |
| 2631 | -0,635917 | 6,44201 | 15,186643 | 0,005418 | 0,004506 | 0,006869 | 0,797208 |
| 2632 | -0,446381 | -1,589867 | 14,635058 | 0,007372 | 0,005036 | 0,00808 | 0,556574 |
| 2633 | -0,46 | -1,200767 | 14,640347 | 0,005836 | 0,004358 | 0,006876 | 1,298872 |
| 2634 | -0,454018 | 7,413806 | 14,580928 | 0,009547 | 0,003977 | 0,00926 | 0,284148 |
| 2635 | -0,451162 | 8,895181 | 14,614658 | 0,00561 | 0,003962 | 0,006807 | 0,558186 |
| 2636 | -0,412832 | 10,077248 | 14,620705 | 0,007934 | 0,004091 | 0,008131 | 1,163359 |
| 2637 | -0,454689 | 2,831757 | 14,596178 | 0,006196 | 0,00418 | 0,007073 | 0,545153 |
| 2638 | -0,634917 | -1,550871 | 15,253947 | 0,005191 | 0,004455 | 0,0065 | 1,066774 |
| 2639 | -0,576256 | 10,252888 | 15,245673 | 0,004094 | 0,003729 | 0,005528 | 0,837265 |
| 2640 | -0,615548 | 3,611268 | 13,491981 | 0,013735 | 0,005315 | 0,011534 | 1,186898 |
| 2641 | -0,584307 | 5,093574 | 13,485713 | 0,009499 | 0,004088 | 0,009015 | 0,717505 |
| 2642 | -0,57374 | 5,093989 | 13,794083 | 0,009535 | 0,004099 | 0,009108 | 1,079729 |
| 2643 | -0,573903 | 3,63315 | 13,793677 | 0,009534 | 0,004222 | 0,009132 | 0,385208 |
| 2644 | -0,578927 | 5,852454 | 13,491312 | 0,009493 | 0,004036 | 0,008999 | 0,251231 |
| 2645 | -0,494919 | 2,559955 | 13,374845 | 0,013809 | 0,005699 | 0,011562 | 0,250248 |
| 2646 | -0,496199 | 0,492939 | 13,531132 | 0,007031 | 0,004198 | 0,007492 | 1,174842 |
| 2647 | -0,584821 | 10,259568 | 14,955948 | 0,005095 | 0,004068 | 0,006366 | 1,090653 |
| 2648 | -0,651927 | -1,548171 | 15,001241 | 0,007502 | 0,005089 | 0,008236 | 0,574796 |
| 2649 | -0,472461 | 9,05173 | 13,443519 | 0,009376 | 0,003891 | 0,008853 | 0,885328 |
| 2650 | -0,161837 | 10,324319 | 10,149992 | 0,0028 | 0,003405 | 0,004011 | 1,57136 |
| 2651 | -0,561199 | 10,699764 | 10,126964 | 0,005781 | 0,005892 | 0,006659 | 1,118528 |
| 2652 | -0,566961 | 9,813891 | 10,124275 | 0,004577 | 0,004812 | 0,0057 | 1,579586 |
| 2653 | -5,149414 | -1,331336 | 4,669338 | 0,002429 | 0,003139 | 0,004161 | 1,04079 |
| 2654 | -5,140265 | -1,323062 | 5,229348 | 0,002289 | 0,003142 | 0,004291 | 1,189079 |
| 2655 | -5,052801 | -1,243071 | 4,665793 | 0,002953 | 0,003907 | 0,005033 | 1,250368 |
| 2656 | -5,034919 | -1,244313 | 5,230081 | 0,002729 | 0,00389 | 0,00519 | 1,366626 |
| 2657 | -4,928361 | -1,180232 | 4,668004 | 0,003082 | 0,004117 | 0,005273 | 1,132457 |
| 2658 | -4,91273 | -1,186305 | 5,222089 | 0,002844 | 0,004106 | 0,005443 | 0,89505 |
| 2659 | -5,21684 | -1,432137 | 5,222486 | 0,001961 | 0,002773 | 0,003604 | 0,736095 |
| 2660 | -5,226324 | -1,428136 | 4,674837 | 0,00204 | 0,002765 | 0,003504 | 1,505076 |
| 2661 | -5,269805 | -1,547852 | 4,672507 | 0,002065 | 0,002784 | 0,003562 | 2,119647 |
| 2662 | -5,254365 | -1,551465 | 5,221876 | 0,001959 | 0,002795 | 0,00359 | 1,295645 |
| 2663 | -5,264032 | -1,684993 | 4,670207 | 0,001887 | 0,002724 | 0,003223 | 1,381591 |
| 2664 | -5,261143 | -1,685249 | 5,057076 | 0,00193 | 0,002782 | 0,003447 | 1,00698 |
| 2665 | -5,241498 | -1,671094 | 5,217936 | 0,001914 | 0,002781 | 0,00348 | 2,313076 |
| 2666 | -5,228437 | -1,805232 | 5,227575 | 0,00202 | 0,002728 | 0,003654 | 1,968063 |
| 2667 | -5,228288 | -1,814897 | 4,672645 | 0,002126 | 0,002744 | 0,003677 | 1,180402 |
| 2668 | -5,240926 | -1,684205 | 5,850124 | 0,001928 | 0,002714 | 0,003762 | 1,928799 |
| 2669 | -5,208097 | -1,683744 | 7,160946 | 0,001766 | 0,002729 | 0,00399 | 2,033969 |
| 2670 | -5,146474 | -1,445571 | 7,441652 | 0,001789 | 0,003175 | 0,004762 | 3,007094 |
| 2671 | -5,088118 | -1,357621 | 7,513231 | 0,001902 | 0,003843 | 0,005687 | 3,253007 |
| 2672 | -4,96725 | -1,302964 | 7,586255 | 0,001926 | 0,003825 | 0,005755 | 1,022074 |
| 2673 | -4,894833 | -1,208931 | 6,430768 | 0,002383 | 0,004703 | 0,006365 | 2,024962 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2674 | -4,850908 | -1,259327 | 7,541184 | 0,001988 | 0,003818 | 0,0058 | 1,048367 |
| 2675 | -4,930588 | -1,192662 | 6,712781 | 0,002218 | 0,004044 | 0,005814 | 4,143208 |
| 2676 | -5,201416 | -1,54838 | 7,397949 | 0,001659 | 0,002809 | 0,004002 | 1,577514 |
| 2677 | -5,230938 | -1,5507 | 6,008412 | 0,001874 | 0,00281 | 0,003844 | 1,510938 |
| 2678 | -5,241516 | -1,542884 | 5,723676 | 0,002021 | 0,003269 | 0,004097 | 1,420583 |
| 2679 | -5,164449 | -1,805667 | 7,534791 | 0,001744 | 0,002756 | 0,004057 | 2,303892 |
| 2680 | -5,181786 | -1,68112 | 7,430132 | 0,00174 | 0,002733 | 0,004046 | 2,58688 |
| 2681 | -5,046367 | -1,256157 | 2,252633 | 0,001549 | 0,003 | 0,002558 | 1,902501 |
| 2682 | -4,927815 | -1,216884 | 2,258856 | 0,001628 | 0,003074 | 0,002643 | 1,574935 |
| 2683 | -5,126422 | -1,341938 | 2,255366 | 0,001389 | 0,002717 | 0,002371 | 1,822355 |
| 2684 | -5,202621 | -1,453133 | 2,255817 | 0,001255 | 0,002535 | 0,002209 | 1,541544 |
| 2685 | -5,249477 | -1,566834 | 2,258129 | 0,001259 | 0,002574 | 0,002218 | 1,407216 |
| 2686 | -5,230682 | -1,69072 | 2,260714 | 0,001523 | 0,002615 | 0,002542 | 1,602056 |
| 2687 | -4,787573 | -1,151789 | 1,981378 | 0,001577 | 0,002643 | 0,002418 | 1,737529 |
| 2688 | -4,802679 | -1,086143 | 1,869611 | 0,001788 | 0,002843 | 0,002613 | 1,649464 |
| 2689 | -4,793147 | -1,063786 | 1,797639 | 0,001795 | 0,002834 | 0,002603 | 1,588132 |
| 2690 | -4,920689 | -1,190048 | 1,981837 | 0,001965 | 0,003334 | 0,002773 | 1,663711 |
| 2691 | -5,041946 | -1,244887 | 1,984898 | 0,001674 | 0,003095 | 0,002535 | 1,983298 |
| 2692 | -5,130416 | -1,326786 | 1,997116 | 0,001614 | 0,003051 | 0,002483 | 1,377224 |
| 2693 | -5,214132 | -1,446957 | 1,997134 | 0,001299 | 0,002538 | 0,002178 | 1,92278 |
| 2694 | -5,25841 | -1,572542 | 1,998018 | 0,001305 | 0,00258 | 0,002189 | 1,530159 |
| 2695 | -5,253933 | -1,703098 | 1,999446 | 0,002376 | 0,002614 | 0,003195 | 1,542833 |
| 2696 | -0,210926 | 9,895316 | 1,810931 | 0,00156 | 0,002124 | 0,002111 | 3,12555 |
| 2697 | -0,211745 | 9,913535 | 1,621642 | 0,002122 | 0,002099 | 0,002681 | 1,138474 |
| 2698 | -0,291583 | 9,841121 | 1,627104 | 0,003694 | 0,00314 | 0,003632 | 1,754643 |
| 2699 | -0,340157 | 9,726481 | 1,632793 | 0,002338 | 0,002161 | 0,002814 | 1,502628 |
| 2700 | -0,637573 | 9,628507 | 1,928575 | 0,002177 | 0,002613 | 0,002412 | 1,909876 |
| 2701 | -0,630272 | 9,621786 | 1,832655 | 0,002149 | 0,002607 | 0,002411 | 1,097142 |
| 2702 | -0,655844 | 9,636469 | 1,758645 | 0,004216 | 0,00315 | 0,003904 | 0,943739 |
| 2703 | -0,651968 | 9,661011 | 2,060901 | 0,003786 | 0,004601 | 0,003134 | 2,762886 |
| 2704 | -0,207161 | 9,899635 | 1,914725 | 0,001576 | 0,002133 | 0,002115 | 1,875862 |
| 2705 | -0,351788 | 9,738647 | 1,745279 | 0,002474 | 0,002157 | 0,00289 | 2,049854 |
| 2706 | -5,067104 | -1,220752 | 1,885897 | 0,001834 | 0,003514 | 0,00266 | 2,15158 |
| 2707 | -5,139301 | -1,274407 | 1,863464 | 0,001491 | 0,002755 | 0,002316 | 2,26769 |
| 2708 | -5,150717 | -1,275647 | 1,801175 | 0,002142 | 0,003109 | 0,002887 | 1,453626 |
| 2709 | -5,262868 | -1,532322 | 1,686279 | 0,002146 | 0,002665 | 0,002888 | 1,746605 |
| 2710 | -5,275012 | -1,893337 | 1,689146 | 0,002604 | 0,002623 | 0,003347 | 3,73856 |
| 2711 | -4,79164 | -1,163721 | 6,80079 | 0,00226 | 0,004652 | 0,006508 | 4,935008 |
| 2712 | -4,796216 | -1,172925 | 6,91481 | 0,00221 | 0,004655 | 0,006542 | 2,909054 |
| 2713 | -4,773191 | -1,201068 | 7,48283 | 0,001992 | 0,004657 | 0,006725 | 1,485277 |
| 2714 | -4,774319 | -1,194253 | 7,184956 | 0,002114 | 0,004665 | 0,00664 | 0,855301 |
| 2715 | -4,600368 | 7,441232 | 14,235716 | 0,003709 | 0,004441 | 0,010282 | 1,000043 |
| 2716 | -4,841747 | 1,948108 | 14,077587 | 0,003237 | 0,004346 | 0,00903 | 1,705164 |
| 2717 | -4,88608 | 1,958065 | 14,620379 | 0,002844 | 0,003995 | 0,007875 | 2,428179 |
| 2718 | -4,627998 | 2,632424 | 14,850052 | 0,003214 | 0,004468 | 0,009455 | 6,814817 |
| 2719 | -4,554256 | 0,804148 | 14,942193 | 0,002858 | 0,004006 | 0,008126 | 5,836957 |
| 2720 | -4,861539 | 0,439765 | 14,085225 | 0,002872 | 0,003931 | 0,007725 | 1,644283 |
| 2721 | -4,886835 | 0,459291 | 14,668248 | 0,001859 | 0,003183 | 0,005696 | 2,014844 |
| 2722 | -4,831121 | 0,162488 | 13,55515 | 0,003684 | 0,004947 | 0,011005 | 1,414718 |
| 2723 | -4,857825 | 0,185395 | 14,09012 | 0,002579 | 0,003916 | 0,006691 | 1,653816 |
| 2724 | -4,50688 | 1,846079 | 15,326477 | 0,001987 | 0,00338 | 0,007016 | 1,261387 |
| 2725 | -4,53746 | 3,855704 | 14,904562 | 0,003934 | 0,006118 | 0,012401 | 5,553743 |
| 2726 | -4,488456 | 5,660121 | 14,874945 | 0,00309 | 0,004115 | 0,008603 | 2,011152 |
| 2729 | -5,167781 | -1,930303 | 4,657564 | 0,003335 | 0,003994 | 0,004848 | 0,499549 |
| 2730 | -5,160754 | -1,91681 | 5,221083 | 0,00329 | 0,004026 | 0,004974 | 0,964178 |
| 2731 | -5,12695 | -1,899908 | 7,325943 | 0,003104 | 0,00414 | 0,005493 | 0,752053 |
| 2732 | -5,063501 | -1,856414 | 7,629996 | 0,003189 | 0,004803 | 0,005954 | 0,697182 |
| 2733 | -5,039614 | -1,989032 | 7,340412 | 0,003304 | 0,005195 | 0,006137 | 1,221042 |
| 2734 | -5,072482 | -2,011489 | 5,22695 | 0,003574 | 0,005042 | 0,005495 | 0,633278 |
| 2735 | -5,071341 | -2,017222 | 4,661993 | 0,003644 | 0,005001 | 0,005341 | 0,661026 |
| 2736 | -4,742934 | -1,877999 | 7,587813 | 0,003933 | 0,008654 | 0,008274 | 1,595945 |
| 2737 | -4,949657 | -2,07405 | 7,136626 | 0,003927 | 0,008326 | 0,007853 | 7,246918 |
| 2738 | -4,946711 | -2,075483 | 5,230608 | 0,004012 | 0,006446 | 0,00618 | 0,464366 |
| 2739 | -4,949136 | -2,081347 | 4,66635 | 0,004591 | 0,007883 | 0,006592 | 0,652973 |
| 2740 | -5,213791 | -1,816005 | 2,26317 | 0,002402 | 0,002663 | 0,003311 | 1,63352 |
| 2741 | -5,136006 | -1,917798 | 2,261046 | 0,003517 | 0,003869 | 0,00442 | 1,453184 |
| 2742 | -5,063234 | -1,995705 | 2,259277 | 0,003531 | 0,003868 | 0,00443 | 1,834123 |
| 2743 | -4,793738 | -2,126079 | 2,264191 | 0,003599 | 0,003888 | 0,004489 | 1,06658 |
| 2744 | -5,221104 | -1,827183 | 1,999217 | 0,002373 | 0,002635 | 0,003198 | 2,201014 |
| 2745 | -5,140629 | -1,922142 | 1,992621 | 0,003531 | 0,003852 | 0,004379 | 1,290336 |
| 2746 | -5,058146 | -2,001184 | 1,995 | 0,003631 | 0,004129 | 0,004475 | 1,905732 |
| 2747 | -4,949815 | -2,084871 | 4,329065 | 0,004674 | 0,007819 | 0,006436 | 0,666268 |
| 2748 | -4,962465 | -2,078128 | 2,262268 | 0,005129 | 0,007441 | 0,005607 | 0,821272 |
| 2749 | -4,748968 | -2,198047 | 1,906517 | 0,004269 | 0,00536 | 0,00495 | 1,657411 |
| 2750 | -4,735007 | -2,112727 | 1,789661 | 0,00533 | 0,007395 | 0,005544 | 3,446478 |
| 2751 | -4,755502 | -2,136566 | 1,864178 | 0,004633 | 0,005549 | 0,005758 | 1,037634 |
| 2752 | -4,737354 | -2,23787 | 1,781327 | 0,007209 | 0,005719 | 0,007954 | 1,593137 |
| 2753 | -4,79413 | -2,273661 | 1,69124 | 0,004032 | 0,004747 | 0,004725 | 2,438557 |
| 2754 | -5,03202 | -2,151779 | 1,882035 | 0,004537 | 0,006014 | 0,005095 | 1,232562 |
| 2755 | -4,947794 | -2,069821 | 1,993842 | 0,004571 | 0,006088 | 0,005166 | 1,913304 |
| 2756 | -4,627107 | 9,080012 | 11,883169 | 0,002012 | 0,003078 | 0,00567 | 1,998602 |
| 2757 | -4,692276 | -0,71783 | 11,928306 | 0,0021 | 0,003042 | 0,005432 | 1,584825 |
| 2758 | -4,982823 | 4,312465 | 14,335688 | 0,001665 | 0,002802 | 0,006601 | 2,160281 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2759 | -5,013554 | 6,633741 | 13,478333 | 0,001774 | 0,002927 | 0,006206 | 3,206893 |
| 2760 | -5,02761 | 2,77964 | 13,73521 | 0,002031 | 0,003186 | 0,006596 | 3,609195 |
| 2761 | -5,188658 | 2,747123 | 13,829222 | 0,001719 | 0,002995 | 0,005009 | 1,845882 |
| 2762 | -5,313826 | 2,673578 | 14,022576 | 0,001713 | 0,003005 | 0,004994 | 0,747007 |
| 2764 | -5,195057 | -0,103775 | 12,925348 | 0,001969 | 0,003069 | 0,005575 | 1,841549 |
| 2765 | -4,998452 | 5,485906 | 13,891749 | 0,001721 | 0,002861 | 0,00641 | 2,069911 |
| 2766 | -0,245494 | 10,262896 | 1,615119 | 0,001999 | 0,002144 | 0,002635 | 1,665656 |
| 2767 | -0,31451 | 10,644815 | 1,624154 | 0,004856 | 0,005808 | 0,00559 | 1,74003 |
| 2768 | -0,360423 | 10,629029 | 1,725756 | 0,004916 | 0,005842 | 0,005603 | 1,444456 |
| 2769 | -0,374673 | 10,615351 | 1,795549 | 0,004949 | 0,005858 | 0,005606 | 1,355541 |
| 2770 | -0,634406 | 10,70003 | 1,798934 | 0,005059 | 0,005946 | 0,005699 | 0,754528 |
| 2771 | -0,633452 | 10,707398 | 1,746666 | 0,00504 | 0,005939 | 0,005702 | 0,370541 |
| 2772 | -0,503794 | 10,351123 | 1,987882 | 0,003575 | 0,002946 | 0,004503 | 9,953808 |
| 2773 | -0,381412 | 10,597103 | 1,912648 | 0,004994 | 0,005875 | 0,005603 | 0,69129 |
| 2774 | -0,288737 | 10,541035 | 1,653614 | 0,004881 | 0,005841 | 0,005599 | 0,758852 |
| 2775 | -0,368997 | 10,747907 | 1,627865 | 0,004857 | 0,005792 | 0,00559 | 0,42827 |
| 2776 | -0,606648 | 10,8247 | 1,737766 | 0,004991 | 0,005879 | 0,005665 | 0,595078 |
| 2777 | -0,621393 | 10,768814 | 1,838335 | 0,005046 | 0,005914 | 0,005675 | 0,476439 |
| 2778 | -0,623043 | 10,726945 | 1,926611 | 0,005086 | 0,005937 | 0,005677 | 0,832857 |
| 2779 | -0,622606 | 10,659913 | 1,934121 | 0,005107 | 0,005964 | 0,005691 | 0,782103 |
| 2780 | -0,238933 | 10,078131 | 1,986689 | 0,004274 | 0,002863 | 0,005097 | 3,096032 |
| 2781 | -0,239 | 10,003093 | 1,99028 | 0,004294 | 0,002884 | 0,00511 | 1,872553 |
| 2782 | -0,745979 | -0,950598 | 1,653619 | 0,002195 | 0,003149 | 0,002891 | 1,682942 |
| 2783 | -0,445746 | -1,251151 | 1,804246 | 0,002125 | 0,001676 | 0,001989 | 2,379436 |
| 2784 | -0,443427 | -1,343095 | 1,641901 | 0,001939 | 0,002538 | 0,002715 | 2,14933 |
| 2785 | -0,448944 | -1,155871 | 1,910903 | 0,001724 | 0,00141 | 0,001813 | 3,013853 |
| 2786 | -0,738024 | -1,021099 | 1,912799 | 0,002407 | 0,001689 | 0,00213 | 3,62376 |
| 2787 | -0,320694 | -1,865274 | 1,647285 | 0,00233 | 0,002513 | 0,003141 | 1,321057 |
| 2788 | -0,830042 | -1,973232 | 1,970168 | 0,023015 | 0,01573 | 0,01832 | 1,039215 |
| 2789 | -0,611543 | -2,041768 | 1,978214 | 0,004961 | 0,003849 | 0,005043 | 1,139083 |
| 2790 | -0,552527 | -1,930288 | 1,965464 | 0,00493 | 0,003886 | 0,005028 | 2,24214 |
| 2791 | -0,475103 | -1,81286 | 1,968155 | 0,00336 | 0,002923 | 0,00415 | 2,167394 |
| 2792 | -0,523627 | -2,191044 | 1,759808 | 0,012374 | 0,009692 | 0,010549 | 1,215622 |
| 2793 | -0,567693 | -2,136035 | 1,86461 | 0,01161 | 0,009338 | 0,009729 | 1,526185 |
| 2794 | -0,721759 | -2,25739 | 1,873956 | 0,004968 | 0,00377 | 0,005092 | 2,582177 |
| 2795 | -0,736624 | -2,263835 | 1,768702 | 0,004933 | 0,003764 | 0,005116 | 3,64513 |
| 2796 | -0,478656 | -2,031723 | 1,754249 | 0,004942 | 0,003818 | 0,005171 | 1,017661 |
| 2797 | -4,840672 | 10,65972 | 6,330181 | 0,001671 | 0,003418 | 0,004844 | 1,07223 |
| 2798 | -4,869893 | 10,632108 | 5,20142 | 0,001761 | 0,003518 | 0,004254 | 1,489984 |
| 2799 | -4,912657 | 10,605134 | 7,194268 | 0,001626 | 0,00338 | 0,005193 | 1,230918 |
| 2800 | -4,927831 | 10,59573 | 6,738015 | 0,001643 | 0,003394 | 0,004966 | 0,780217 |
| 2801 | -4,940385 | 10,588036 | 6,367436 | 0,001658 | 0,003412 | 0,004779 | 0,671248 |
| 2802 | -4,973982 | 10,55278 | 5,197452 | 0,001741 | 0,003509 | 0,00416 | 0,860685 |
| 2803 | -4,978061 | 10,514868 | 7,500407 | 0,001654 | 0,002772 | 0,004454 | 1,8846 |
| 2804 | -5,069066 | 10,461177 | 5,194425 | 0,001562 | 0,002442 | 0,003089 | 2,012529 |
| 2805 | -5,03417 | 10,42097 | 7,481341 | 0,001607 | 0,002423 | 0,00387 | 1,205808 |
| 2806 | -5,116785 | 10,357238 | 5,203569 | 0,001571 | 0,002444 | 0,003075 | 1,459341 |
| 2807 | -5,144427 | 10,245065 | 5,209738 | 0,00154 | 0,002368 | 0,002928 | 1,164936 |
| 2808 | -5,074759 | 10,287877 | 6,548524 | 0,001544 | 0,002339 | 0,003252 | 1,86369 |
| 2809 | -4,891854 | 10,612329 | 4,63176 | 0,001831 | 0,003584 | 0,00392 | 0,744734 |
| 2810 | -4,998602 | 10,537403 | 4,635214 | 0,0018 | 0,003567 | 0,003827 | 1,798168 |
| 2811 | -5,090572 | 10,451094 | 4,642487 | 0,001554 | 0,002466 | 0,002885 | 1,382814 |
| 2812 | -5,150817 | 10,345292 | 4,649781 | 0,00156 | 0,002467 | 0,002866 | 1,397524 |
| 2813 | -5,170596 | 10,225917 | 4,658193 | 0,001529 | 0,002389 | 0,002746 | 0,982708 |
| 2814 | -5,168936 | 10,10583 | 4,660265 | 0,001454 | 0,002318 | 0,002528 | 1,279505 |
| 2815 | -5,137082 | 10,127903 | 5,213968 | 0,002374 | 0,002581 | 0,003736 | 1,080758 |
| 2816 | -5,128319 | 9,983067 | 4,659951 | 0,002312 | 0,00256 | 0,003526 | 1,138475 |
| 2817 | -5,102865 | 10,004853 | 5,214535 | 0,00237 | 0,002578 | 0,003735 | 1,29623 |
| 2818 | -5,055564 | 10,45046 | 2,261218 | 0,006742 | 0,003128 | 0,006684 | 1,028665 |
| 2819 | -4,952681 | 10,532509 | 2,255003 | 0,009194 | 0,004105 | 0,008524 | 0,949581 |
| 2820 | -5,140157 | 10,375233 | 2,264406 | 0,003655 | 0,002282 | 0,004309 | 0,839046 |
| 2821 | -5,20011 | 10,26713 | 2,268404 | 0,003628 | 0,002274 | 0,004288 | 1,401347 |
| 2822 | -5,224298 | 10,149426 | 2,278411 | 0,001455 | 0,002429 | 0,002416 | 2,062314 |
| 2823 | -5,236009 | 10,037059 | 2,277401 | 0,001433 | 0,002474 | 0,002368 | 1,655698 |
| 2824 | -5,190375 | 9,913627 | 2,27707 | 0,001427 | 0,002435 | 0,002337 | 1,370485 |
| 2825 | -5,109372 | 10,164258 | 6,103532 | 0,002637 | 0,002605 | 0,004393 | 4,167939 |
| 2826 | -5,064124 | 10,043593 | 6,188521 | 0,002326 | 0,002623 | 0,003923 | 3,92061 |
| 2827 | -5,053974 | 9,879743 | 4,661439 | 0,00241 | 0,002725 | 0,003712 | 1,093402 |
| 2828 | -5,030661 | 9,899188 | 5,213114 | 0,002389 | 0,002757 | 0,003817 | 1,15928 |
| 2829 | -5,030794 | 9,905805 | 5,323128 | 0,002384 | 0,002763 | 0,003837 | 0,746727 |
| 2830 | -5,13253 | 9,808231 | 2,274972 | 0,001551 | 0,00258 | 0,002443 | 1,329326 |
| 2831 | -4,959162 | 9,798572 | 4,665933 | 0,003181 | 0,005132 | 0,00483 | 0,881081 |
| 2832 | -4,946729 | 9,812068 | 5,216848 | 0,00313 | 0,005179 | 0,004997 | 0,608968 |
| 2833 | -4,849557 | 9,933959 | 7,499799 | 0,002204 | 0,002701 | 0,004072 | 1,391397 |
| 2834 | -5,036405 | 9,742907 | 2,276883 | 0,002641 | 0,004706 | 0,003402 | 1,195491 |
| 2835 | -4,925138 | 9,686431 | 2,277709 | 0,002742 | 0,004647 | 0,003482 | 1,464966 |
| 2836 | -4,859232 | 9,741067 | 4,665052 | 0,003235 | 0,005482 | 0,004969 | 1,079187 |
| 2837 | -4,828882 | 9,75818 | 5,221447 | 0,003157 | 0,005197 | 0,005033 | 0,643872 |
| 2838 | -4,955364 | 10,234362 | 7,473825 | 0,002278 | 0,002753 | 0,004268 | 1,556752 |
| 2839 | -4,606921 | 9,853405 | 7,520295 | 0,003193 | 0,00704 | 0,007044 | 1,481861 |
| 2840 | -4,733093 | 9,273704 | 1,092161 | 0,002021 | 0,002347 | 0,002492 | 1,610969 |
| 2841 | -4,954843 | 10,6248 | 1,108056 | 0,003796 | 0,002241 | 0,004171 | 2,882043 |
| 2842 | -4,831598 | 10,669651 | 1,43988 | 0,003834 | 0,00227 | 0,004266 | 2,849031 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2843 | -4,67206 | 9,394232 | 1,680774 | 0,00479 | 0,005551 | 0,004319 | 3,782476 |
| 2844 | -4,747427 | 10,521056 | 1,647572 | 0,00342 | 0,002338 | 0,004008 | 1,725001 |
| 2845 | -4,716285 | 9,142024 | 2,270464 | 0,007518 | 0,009476 | 0,008573 | 0,6272 |
| 2846 | -4,672646 | 9,194513 | 2,872092 | 0,006714 | 0,010849 | 0,011029 | 1,127828 |
| 2847 | -4,681554 | 9,41638 | 2,242476 | 0,005613 | 0,007644 | 0,0064 | 0,619427 |
| 2848 | -4,777631 | 9,386018 | 1,774129 | 0,005833 | 0,007024 | 0,00527 | 0,81828 |
| 2849 | -4,989491 | 9,626073 | 1,104668 | 0,003496 | 0,004612 | 0,003082 | 2,595853 |
| 2850 | -5,11071 | 9,79134 | 1,111136 | 0,001606 | 0,002276 | 0,002315 | 3,531714 |
| 2851 | -5,189221 | 10,388387 | 1,127933 | 0,003288 | 0,002266 | 0,003819 | 2,23047 |
| 2852 | -5,469587 | 10,179643 | 0,524366 | 0,003588 | 0,002157 | 0,003926 | 6,085467 |
| 2853 | -5,39591 | 10,70459 | 0,522418 | 0,002487 | 0,002335 | 0,003213 | 4,368872 |
| 2854 | -4,534946 | 9,05039 | 2,271301 | 0,010105 | 0,011354 | 0,011384 | 0,504597 |
| 2855 | -4,56736 | 9,278577 | 1,819892 | 0,005674 | 0,006075 | 0,005272 | 1,473441 |
| 2856 | -4,516909 | 9,300628 | 2,144353 | 0,005489 | 0,006406 | 0,005888 | 3,272716 |
| 2858 | -4,572427 | 9,000184 | 1,805854 | 0,009198 | 0,008708 | 0,008046 | 2,214188 |
| 2859 | -4,677288 | 8,847706 | 1,712536 | 0,009727 | 0,008726 | 0,008089 | 1,766556 |
| 2861 | -5,263679 | 10,732633 | 0,540576 | 0,009404 | 0,003697 | 0,007244 | 1,4146 |
| 2862 | -5,168829 | 10,58079 | 0,997096 | 0,003761 | 0,002261 | 0,004131 | 2,819656 |
| 2863 | -5,407469 | 9,733182 | 0,554473 | 0,00343 | 0,002567 | 0,004022 | 11,813011 |
| 2864 | -5,48698 | 9,740923 | 0,882271 | 0,004504 | 0,002579 | 0,004841 | 12,351856 |
| 2865 | -5,107415 | 9,770295 | 1,022303 | 0,003395 | 0,002375 | 0,00395 | 3,963151 |
| 2866 | -5,528019 | 9,242882 | 0,116613 | 0,001465 | 0,001991 | 0,002288 | 6,702423 |
| 2867 | -5,501619 | 8,520283 | 0,084999 | 0,00129 | 0,001548 | 0,00216 | 3,684953 |
| 2868 | -4,780302 | 10,913642 | 0,539009 | 0,005742 | 0,002418 | 0,005263 | 4,154482 |
| 2869 | -4,772325 | 10,777269 | 1,072501 | 0,005687 | 0,002473 | 0,005394 | 1,603748 |
| 2870 | -5,198846 | 10,999215 | 0,163106 | 0,005296 | 0,00227 | 0,004875 | 2,65559 |
| 2871 | -5,396649 | 10,927882 | 0,151055 | 0,009251 | 0,003502 | 0,006901 | 3,570096 |
| 2872 | -4,354779 | 8,525078 | 0,078779 | 0,001441 | 0,001415 | 0,002251 | 3,088263 |
| 2874 | -2,592743 | 8,54649 | 0,064874 | 0,002272 | 0,00223 | 0,002809 | 3,626186 |
| 2875 | -5,31877 | 9,26735 | 0,499438 | 0,001636 | 0,002115 | 0,002319 | 4,343017 |
| 2876 | -5,325386 | 8,673812 | 0,515319 | 0,001378 | 0,001652 | 0,002138 | 3,825788 |
| 2877 | -4,853312 | 11,017241 | 0,313983 | 0,005455 | 0,0023 | 0,005031 | 2,134921 |
| 2880 | -5,064581 | 8,828268 | 0,526211 | 0,001339 | 0,0016 | 0,002141 | 3,133518 |
| 2881 | -4,611631 | 8,783261 | 1,602873 | 0,001521 | 0,00165 | 0,002252 | 11,756269 |
| 2883 | -2,556444 | 8,404754 | 0,261583 | 0,00126 | 0,001383 | 0,002121 | 1,82894 |
| 2884 | -2,592579 | 8,550691 | 0,137625 | 0,00443 | 0,003169 | 0,003764 | 0,921671 |
| 2885 | -2,534934 | 8,589226 | 0,261142 | 0,004667 | 0,003262 | 0,003931 | 2,663084 |
| 2886 | -2,532149 | 8,421786 | 0,449675 | 0,001288 | 0,001407 | 0,002116 | 1,479958 |
| 2888 | -4,720722 | 8,62825 | 0,473804 | 0,002162 | 0,002234 | 0,002531 | 2,047546 |
| 2890 | -4,329764 | 8,522454 | 0,150933 | 0,001674 | 0,001671 | 0,002362 | 3,508906 |
| 2891 | -4,346003 | 8,559201 | 0,281259 | 0,00169 | 0,001726 | 0,002369 | 5,302168 |
| 2892 | -2,275756 | 8,553719 | 0,042139 | 0,00259 | 0,003258 | 0,003329 | 2,24387 |
| 2897 | -2,308567 | 8,268605 | 0,216481 | 0,00124 | 0,001371 | 0,002104 | 3,210525 |
| 2898 | -2,578055 | 8,291078 | 0,253874 | 0,001281 | 0,001358 | 0,002136 | 5,272185 |
| 2899 | -4,734206 | 8,558126 | 0,080909 | 0,001398 | 0,001466 | 0,002227 | 2,292922 |
| 2900 | -4,71893 | 8,624174 | 0,305486 | 0,001782 | 0,001827 | 0,002397 | 1,817897 |
| 2901 | -4,885072 | 8,659675 | 0,3843 | 0,001408 | 0,001499 | 0,002187 | 1,846052 |
| 2902 | -4,92499 | 8,516073 | 0,085004 | 0,001614 | 0,001694 | 0,002314 | 2,525269 |
| 2903 | -4,869213 | 8,6677 | 0,51467 | 0,00164 | 0,001766 | 0,002283 | 1,920289 |
| 2904 | -5,373121 | 8,675507 | 0,38718 | 0,001353 | 0,001641 | 0,002143 | 3,18307 |
| 2905 | -5,137405 | 9,534174 | 0,523175 | 0,002346 | 0,003037 | 0,002612 | 3,871972 |
| 2906 | -4,9957 | 9,404384 | 0,723494 | 0,00251 | 0,003054 | 0,002666 | 1,864555 |
| 2907 | -4,867646 | 9,472827 | 1,091774 | 0,002577 | 0,003199 | 0,002748 | 2,011628 |
| 2908 | -5,565635 | 10,783813 | 0,1266 | 0,00245 | 0,0023 | 0,003176 | 3,927931 |
| 2909 | 0,12919 | 11,207052 | 0,025932 | 0,003072 | 0,005167 | 0,004452 | 1,96336 |
| 2910 | 0,008884 | 11,814209 | 0,364656 | 0,004048 | 0,007988 | 0,004861 | 3,5252 |
| 2911 | -0,031801 | 11,660344 | 0,417577 | 0,002799 | 0,004849 | 0,003712 | 3,944839 |
| 2912 | 0,00875 | 9,517261 | 1,184545 | 0,0019 | 0,002058 | 0,002576 | 3,464368 |
| 2913 | 0,003765 | 9,528881 | 1,032715 | 0,001866 | 0,002055 | 0,002596 | 3,040264 |
| 2914 | 0,030697 | 9,306066 | 1,0242 | 0,001629 | 0,001976 | 0,002351 | 1,996988 |
| 2915 | 0,020234 | 9,3249 | 0,446008 | 0,00159 | 0,001989 | 0,002504 | 1,874005 |
| 2916 | -0,115042 | 10,104251 | 1,024041 | 0,002142 | 0,002176 | 0,00288 | 2,1331 |
| 2917 | -0,003988 | 10,118808 | 0,442049 | 0,001872 | 0,002155 | 0,002829 | 3,045465 |
| 2918 | -0,070843 | 8,701264 | 1,029696 | 0,001011 | 0,001167 | 0,001671 | 1,630496 |
| 2919 | -0,321449 | 8,679785 | 0,444394 | 0,000975 | 0,00115 | 0,001744 | 3,226747 |
| 2920 | -0,080827 | 9,28983 | 0,440664 | 0,001469 | 0,002301 | 0,002267 | 2,615418 |
| 2921 | -0,053181 | 9,278484 | 1,015628 | 0,002236 | 0,002553 | 0,002795 | 2,380871 |
| 2922 | -2,589604 | 8,483879 | 0,478254 | 0,001292 | 0,001417 | 0,002117 | 2,395421 |
| 2923 | -2,566022 | 8,49107 | 1,071889 | 0,001362 | 0,001418 | 0,002081 | 3,761808 |
| 2924 | -4,379983 | 8,583031 | 0,469231 | 0,001487 | 0,001462 | 0,002248 | 4,895606 |
| 2925 | -0,05731 | 11,051097 | 1,028177 | 0,001943 | 0,002877 | 0,00277 | 3,398434 |
| 2926 | -0,054361 | 10,801551 | 0,431127 | 0,00222 | 0,003042 | 0,003356 | 1,276555 |
| 2927 | -0,111923 | 11,036509 | 0,723214 | 0,002526 | 0,003555 | 0,003539 | 0,454642 |
| 2928 | -0,056116 | 11,061109 | 0,855899 | 0,002364 | 0,003117 | 0,003313 | 1,551832 |
| 2929 | -0,056449 | 11,06139 | 0,970406 | 0,002391 | 0,003109 | 0,003271 | 3,934091 |
| 2930 | -0,028802 | 11,784653 | 1,039064 | 0,002387 | 0,003403 | 0,003336 | 0,951451 |
| 2931 | -0,35385 | 11,774068 | 1,554579 | 0,002673 | 0,003396 | 0,003403 | 2,543079 |
| 2932 | -0,025034 | 10,76865 | 0,301106 | 0,002179 | 0,003105 | 0,003391 | 1,323802 |
| 2933 | -0,037848 | 8,730863 | 0,302385 | 0,000949 | 0,001147 | 0,00173 | 2,861383 |
| 2934 | -2,267963 | 8,692617 | 0,328954 | 0,00375 | 0,004961 | 0,004078 | 1,442572 |
| 2935 | 0,078094 | 8,674039 | 1,519117 | 0,001179 | 0,001167 | 0,001734 | 3,286265 |
| 2936 | -3,111648 | 8,451766 | 1,560226 | 0,001402 | 0,001359 | 0,00208 | 1,671113 |
| 2937 | -3,788644 | 8,347178 | 0,515953 | 0,001593 | 0,001388 | 0,002325 | 3,979302 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2938 | -3,845792 | 8,416577 | 1,090782 | 0,001634 | 0,001418 | 0,002321 | 1,804643 |
| 2939 | -3,926474 | 8,435889 | 0,492055 | 0,002101 | 0,001974 | 0,002589 | 2,304441 |
| 2940 | -3,909919 | 8,490417 | 1,084661 | 0,002128 | 0,002059 | 0,002628 | 1,004509 |
| 2941 | -2,299254 | 8,39246 | 0,255735 | 0,001281 | 0,001431 | 0,00214 | 2,504009 |
| 2942 | -2,292173 | 8,395737 | 0,437837 | 0,001309 | 0,001431 | 0,002128 | 2,648526 |
| 2943 | 0,110192 | 8,585969 | 0,10705 | 0,001084 | 0,001158 | 0,001908 | 3,375263 |
| 2944 | -0,183065 | 8,953955 | 0,442277 | 0,001033 | 0,001212 | 0,00183 | 2,890971 |
| 2945 | 0,011237 | 8,918816 | 1,015002 | 0,001777 | 0,002033 | 0,00249 | 3,1972 |
| 2946 | -0,147555 | 8,748258 | 0,426071 | 0,000989 | 0,001213 | 0,001775 | 4,592624 |
| 2947 | -0,022491 | 8,864984 | 0,414271 | 0,001155 | 0,001194 | 0,001956 | 4,447236 |
| 2948 | -2,256269 | 8,691142 | 0,443426 | 0,00382 | 0,004976 | 0,004022 | 1,902704 |
| 2949 | -2,26862 | 8,571124 | 0,12002 | 0,002624 | 0,003273 | 0,003309 | 1,922402 |
| 2950 | 0,136033 | 11,212178 | 0,088349 | 0,003109 | 0,005187 | 0,00443 | 3,556535 |
| 2951 | 0,058674 | 11,740775 | 0,314138 | 0,002704 | 0,004847 | 0,003689 | 5,281153 |
| 2952 | 0,125795 | 11,674723 | 0,073334 | 0,003096 | 0,00525 | 0,004385 | 7,175648 |
| 2953 | 0,099754 | 11,763863 | 0,203145 | 0,00611 | 0,011442 | 0,007467 | 5,888633 |
| 2954 | 0,113652 | 11,689824 | 0,010723 | 0,003068 | 0,005237 | 0,004409 | 6,980736 |
| 2955 | -0,04574 | 11,801308 | 1,290451 | 0,00271 | 0,003786 | 0,003508 | 1,571279 |
| 2956 | -0,061179 | 11,544174 | 1,019538 | 0,002432 | 0,003207 | 0,003324 | 2,907172 |
| 2957 | 0,016278 | 11,091246 | 0,962207 | 0,00206 | 0,00306 | 0,002908 | 3,145098 |
| 2958 | 0,019542 | 11,098335 | 0,664853 | 0,001951 | 0,003053 | 0,002881 | 3,535476 |
| 2959 | 0,011124 | 11,348368 | 0,423273 | n/a | n/a | n/a | 4,486621 |
| 2960 | -0,102146 | 10,909001 | 0,510971 | 0,002205 | 0,003064 | 0,003255 | 12,299086 |
| 2961 | -3,428146 | 8,416826 | 0,085044 | 0,001518 | 0,00142 | 0,00234 | 2,474144 |
| 2963 | -3,240631 | 8,549487 | 0,081234 | 0,001706 | 0,001963 | 0,002645 | 4,054607 |
| 2965 | -3,115511 | 8,705757 | 0,341858 | 0,002025 | 0,002289 | 0,002818 | 1,632274 |
| 2966 | -3,175982 | 8,60347 | 0,220538 | 0,003227 | 0,003146 | 0,003955 | 2,400569 |
| 2967 | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a |
| 2968 | -3,098517 | 8,698244 | 0,446141 | 0,003278 | 0,003095 | 0,003788 | 2,360063 |
| 2969 | -4,78537 | 11,71159 | 0,151292 | 0,006401 | 0,003323 | 0,005659 | 1,870137 |
| 2971 | -5,58533 | -3,217674 | 0,121948 | 0,00238 | 0,003482 | 0,002829 | 3,921363 |
| 2972 | -5,462584 | -0,975249 | 1,247297 | 0,001675 | 0,002587 | 0,002289 | 2,727968 |
| 2973 | -5,463611 | -3,255312 | 1,245671 | 0,001624 | 0,002887 | 0,002471 | 2,795815 |
| 2974 | -5,602246 | -1,120612 | 1,431883 | 0,001492 | 0,002585 | 0,002216 | 2,595624 |
| 2975 | -5,613042 | -2,430238 | 1,427393 | 0,001552 | 0,002842 | 0,002373 | 4,099018 |
| 2976 | -5,444912 | -1,057551 | 1,088546 | 0,001253 | 0,002385 | 0,001987 | 3,141197 |
| 2977 | -5,454555 | -3,098508 | 1,091004 | 0,002134 | 0,003403 | 0,002785 | 2,012627 |
| 2978 | -5,457688 | -3,264608 | 1,16659 | 0,001631 | 0,00288 | 0,002471 | 1,883687 |
| 2979 | -4,854985 | -0,149217 | 0,343815 | 0,001288 | 0,001722 | 0,002011 | 2,408422 |
| 2980 | -5,446016 | -0,137628 | 0,35201 | 0,00093 | 0,001496 | 0,00183 | 2,789387 |
| 2981 | -5,435596 | -0,513289 | 0,360275 | 0,002744 | 0,002837 | 0,002637 | 1,980509 |
| 2984 | -5,443622 | -0,855056 | 1,556953 | 0,001534 | 0,002479 | 0,002279 | 3,803927 |
| 2985 | -5,452251 | -3,272377 | 1,569341 | 0,001556 | 0,00291 | 0,002393 | 2,47313 |
| 2986 | -5,408784 | -0,864977 | 1,670984 | 0,001511 | 0,002472 | 0,002292 | 4,475172 |
| 2987 | -5,390775 | -3,282031 | 1,67961 | 0,001559 | 0,002909 | 0,002398 | 4,362319 |
| 2988 | -2,563808 | -0,112457 | 1,221047 | 0,001087 | 0,001259 | 0,001755 | 1,449456 |
| 2989 | -2,450302 | -0,126782 | 1,063806 | 0,001082 | 0,001263 | 0,001761 | 2,172103 |
| 2990 | -2,769573 | -0,135334 | 1,0613 | 0,001069 | 0,001252 | 0,001766 | 2,019527 |
| 2991 | -2,771463 | -0,156496 | 0,472549 | 0,001044 | 0,001258 | 0,001816 | 4,040965 |
| 2992 | -0,900689 | -0,143368 | 0,456411 | 0,001149 | 0,00123 | 0,001817 | 2,046118 |
| 2993 | -0,96851 | -0,136381 | 1,044035 | 0,001099 | 0,001276 | 0,001676 | 2,989217 |
| 2994 | -0,966285 | -0,122756 | 1,205225 | 0,001132 | 0,001285 | 0,001679 | 2,209323 |
| 2995 | -0,101012 | -0,144172 | 1,039666 | 0,00098 | 0,000959 | 0,001475 | 3,445349 |
| 2996 | -0,12775 | -0,148249 | 1,026478 | 0,00098 | 0,000963 | 0,00148 | 2,295973 |
| 2997 | -0,159315 | -0,186393 | 0,450909 | 0,001083 | 0,000995 | 0,001688 | 3,033292 |
| 2998 | -0,455623 | -0,140495 | 0,312039 | 0,001004 | 0,001156 | 0,001675 | 2,261445 |
| 2999 | -0,453634 | -0,142611 | 0,445556 | 0,00102 | 0,001166 | 0,001662 | 2,285685 |
| 3000 | -0,125197 | -0,153128 | 0,437599 | 0,000964 | 0,000999 | 0,00158 | 1,844124 |
| 3001 | 0,004538 | -0,011441 | 0,094137 | 0,000918 | 0,000977 | 0,001616 | 2,853653 |
| 3002 | -0,454357 | -0,007636 | 0,102506 | 0,000986 | 0,001133 | 0,001712 | 2,419021 |
| 3003 | -0,454471 | 0,008741 | 0,000376 | 0,000983 | 0,001134 | 0,001735 | 2,605107 |
| 3004 | -2,813622 | 0,023821 | 1,405837 | 0,001196 | 0,001176 | 0,001828 | 1,330598 |
| 3005 | -0,07108 | -0,023593 | 1,38244 | 0,001148 | 0,001043 | 0,001571 | 4,23743 |
| 3006 | -2,829719 | -0,118496 | 1,527604 | 0,00145 | 0,001597 | 0,002147 | 1,782074 |
| 3007 | -0,100612 | -0,120276 | 1,501706 | 0,001001 | 0,000948 | 0,001424 | 2,075609 |
| 3008 | -2,833616 | -0,107115 | 1,227508 | 0,0013 | 0,001419 | 0,001991 | 2,838721 |
| 3009 | -4,73518 | -0,131968 | 1,0842 | 0,001206 | 0,001731 | 0,001944 | 3,389856 |
| 3010 | -4,718807 | -0,132463 | 1,246776 | 0,00119 | 0,001733 | 0,001945 | 1,972859 |
| 3011 | -5,15152 | -0,136101 | 1,250765 | 0,000892 | 0,00144 | 0,001736 | 1,925676 |
| 3012 | -5,148035 | -0,146892 | 1,088922 | 0,000901 | 0,001441 | 0,001746 | 1,908716 |
| 3013 | -5,487007 | -0,973598 | 1,313352 | 0,001715 | 0,002633 | 0,002337 | 2,840186 |
| 3014 | -5,403567 | -0,767942 | 1,554096 | 0,001325 | 0,002476 | 0,002103 | 2,441393 |
| 3015 | -5,280161 | -0,742048 | 0,496401 | 0,003085 | 0,002379 | 0,00333 | 4,3203 |
| 3016 | -5,351689 | -0,744575 | 1,084661 | 0,002478 | 0,002495 | 0,002974 | 3,090529 |
| 3017 | -5,434607 | -0,153509 | 0,478007 | 0,000856 | 0,001483 | 0,001767 | 2,88317 |
| 3018 | -5,448234 | -0,962796 | 0,487332 | 0,001732 | 0,002453 | 0,002249 | 5,864036 |
| 3019 | -5,440954 | -0,158365 | 1,070889 | 0,000838 | 0,001463 | 0,001715 | 4,280369 |
| 3020 | -5,377316 | -3,118546 | 0,490707 | 0,001689 | 0,002794 | 0,002477 | 3,749756 |
| 3021 | -5,396705 | -3,100696 | 1,07676 | 0,001604 | 0,00286 | 0,002385 | 6,278299 |
| 3022 | -3,491795 | 0,007351 | 0,046555 | 0,001149 | 0,001213 | 0,001954 | 2,581163 |
| 3023 | -4,857234 | -0,081942 | 0,225364 | 0,001587 | 0,001903 | 0,002142 | 6,324639 |
| 3024 | -4,848952 | -0,185742 | 0,475045 | 0,001241 | 0,001749 | 0,001965 | 2,737885 |
| 3025 | -5,515038 | -0,044423 | 0,242938 | 0,000977 | 0,001606 | 0,001859 | 5,244518 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3026 | -5,573504 | -0,003916 | 0,132796 | 0,000883 | 0,001485 | 0,001825 | 4,30678 |
| 3027 | -4,850758 | 0,003281 | 0,131857 | 0,001365 | 0,001691 | 0,002059 | 4,402408 |
| 3028 | -4,854427 | 0,003421 | 0,058243 | 0,00124 | 0,001615 | 0,002003 | 2,664524 |
| 3029 | -3,49174 | -0,000022 | 0,112669 | 0,001679 | 0,001584 | 0,002252 | 3,554064 |
| 3030 | -3,480102 | -0,083629 | 0,221509 | 0,002581 | 0,002042 | 0,002664 | 3,664796 |
| 3031 | -0,710821 | -0,15294 | 0,452217 | 0,001298 | 0,001264 | 0,001967 | 2,246419 |
| 3032 | -0,717439 | -0,147279 | 0,311637 | 0,001269 | 0,001184 | 0,001943 | 1,494633 |
| 3033 | -0,913991 | -0,061854 | 0,184965 | 0,005616 | 0,002482 | 0,004439 | 0,294453 |
| 3034 | -0,930803 | 0,002898 | 0,0127 | 0,001051 | 0,001258 | 0,001832 | 1,651846 |
| 3035 | -4,721423 | 0,007682 | 1,432339 | 0,001145 | 0,001673 | 0,001932 | 1,514499 |
| 3036 | -4,302951 | -0,118308 | 1,542394 | 0,001117 | 0,001535 | 0,001906 | 3,774335 |
| 3037 | -4,721569 | -0,110255 | 1,544836 | 0,001228 | 0,001858 | 0,002028 | 1,949138 |
| 3038 | -5,189751 | -0,15149 | 1,552103 | 0,000975 | 0,00192 | 0,00188 | 3,035662 |
| 3039 | -5,18667 | -0,283357 | 1,669692 | 0,001165 | 0,002448 | 0,002105 | 1,993821 |
| 3040 | -4,727613 | -0,119213 | 1,655348 | 0,001374 | 0,00197 | 0,002207 | 3,476805 |
| 3041 | -4,327987 | 0,01905 | 1,424201 | 0,001175 | 0,00152 | 0,001934 | 1,907179 |
| 3042 | -0,907579 | -0,108281 | 1,508516 | 0,001542 | 0,001582 | 0,002216 | 1,836843 |
| 3043 | -5,440719 | -3,340109 | 0,30325 | 0,001685 | 0,002937 | 0,002505 | 4,374867 |
| 3044 | -5,553538 | -3,231326 | 0,173559 | 0,002537 | 0,00386 | 0,002938 | 1,857344 |
| 3045 | -5,484474 | -3,256346 | 1,413414 | 0,001606 | 0,0029 | 0,002471 | 2,452965 |
| 3046 | -5,29805 | -3,268693 | 1,084981 | 0,003999 | 0,004764 | 0,004465 | 2,260888 |
| 3047 | -4,736245 | -3,293326 | 1,081889 | 0,005126 | 0,006324 | 0,005094 | 2,873598 |
| 3048 | -4,726131 | -3,296579 | 1,677068 | 0,004162 | 0,004925 | 0,004745 | 2,643345 |
| 3049 | -5,185751 | -0,058007 | 1,442318 | 0,001012 | 0,001916 | 0,001895 | 4,256727 |
| 3050 | -4,845052 | -3,35738 | 0,467614 | 0,005131 | 0,006138 | 0,004914 | 3,7885 |
| 3051 | -4,879034 | -3,140902 | 0,487851 | 0,00517 | 0,006296 | 0,004951 | 6,140317 |
| 3052 | -4,325619 | -0,127141 | 1,085188 | 0,004443 | 0,004164 | 0,004411 | 1,821059 |
| 3053 | -4,308793 | -0,121318 | 1,246955 | 0,004511 | 0,004175 | 0,004373 | 1,283143 |
| 3054 | -4,526394 | -0,12306 | 1,074434 | 0,001244 | 0,001727 | 0,001971 | 2,916752 |
| 3055 | -4,496895 | -0,144507 | 0,484369 | 0,001299 | 0,001718 | 0,001999 | 1,683487 |
| 3056 | -4,768609 | -3,122726 | 1,702292 | 0,004165 | 0,004985 | 0,004763 | 1,13662 |
| 3057 | -4,158115 | -3,103933 | 1,070005 | 0,005486 | 0,006627 | 0,005358 | 6,146713 |
| 3058 | -4,121365 | -3,089003 | 0,790023 | 0,005551 | 0,006598 | 0,005308 | 7,580428 |
| 3059 | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a |
| 3060 | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a | n/a |
| 3061 | -0,091143 | -0,499971 | 1,499566 | 0,001748 | 0,002635 | 0,002499 | 1,673432 |
| 3062 | -0,09426 | -0,491252 | 1,191382 | 0,001673 | 0,002532 | 0,002451 | 1,249426 |
| 3063 | -0,104383 | -1,87233 | 1,190316 | 0,00172 | 0,002511 | 0,002526 | 2,947655 |
| 3064 | -0,116612 | -1,788123 | 1,503359 | 0,001734 | 0,002537 | 0,002508 | 4,292039 |
| 3065 | -0,11552 | -3,186795 | 1,067024 | 0,001899 | 0,002825 | 0,002737 | 1,93655 |
| 3066 | -0,10667 | -2,78301 | 1,191272 | 0,001708 | 0,002466 | 0,002504 | 2,179218 |
| 3067 | -0,129937 | -3,10495 | 1,025283 | 0,00189 | 0,002833 | 0,002735 | 2,598246 |
| 3068 | -0,11233 | -0,507151 | 1,03527 | 0,001702 | 0,002564 | 0,0025 | 1,856053 |
| 3069 | -0,102236 | -1,873469 | 1,037679 | 0,001723 | 0,002512 | 0,002551 | 1,865946 |
| 3071 | -0,14181 | -0,748322 | 0,444363 | 0,002783 | 0,004938 | 0,003466 | 2,262081 |
| 3072 | -0,12733 | -0,73997 | 1,030578 | 0,001866 | 0,002996 | 0,002632 | 1,614412 |
| 3073 | -0,126981 | -0,730961 | 0,567557 | 0,002814 | 0,004948 | 0,00344 | 2,107057 |
| 3074 | -0,118161 | -1,046511 | 0,30503 | 0,002731 | 0,004961 | 0,00349 | 2,096683 |
| 3075 | -0,125557 | -1,058979 | 0,446735 | 0,002781 | 0,004991 | 0,003474 | 1,74949 |
| 3076 | -0,166313 | -1,757281 | 0,442021 | 0,002822 | 0,005135 | 0,003538 | 3,719059 |
| 3077 | -0,293608 | -2,53549 | 0,450907 | 0,002922 | 0,005329 | 0,003653 | 1,888939 |
| 3078 | -0,148273 | -2,58709 | 0,448446 | 0,00275 | 0,005195 | 0,003501 | 1,553982 |
| 3079 | -0,160145 | -3,091554 | 0,434458 | 0,005747 | 0,018861 | 0,005616 | 1,744159 |
| 3080 | 0,014154 | -1,069943 | 0,123369 | 0,00265 | 0,005378 | 0,003558 | 3,866388 |
| 3081 | -0,029385 | -3,248245 | 0,069938 | 0,005246 | 0,018829 | 0,005775 | 2,50233 |
| 3082 | -0,133407 | -2,54156 | 0,930001 | 0,002966 | 0,005324 | 0,003541 | 4,313228 |
| 3083 | -0,143955 | -2,600758 | 0,581142 | 0,002881 | 0,005286 | 0,003581 | 1,582063 |
| 3084 | -0,135055 | -3,06572 | 0,640738 | 0,004296 | 0,012226 | 0,004524 | 1,561365 |
| 3085 | 0,011494 | -1,572004 | 0,059225 | 0,002608 | 0,00495 | 0,003495 | 2,806324 |
| 3087 | -0,124012 | -2,52577 | 1,029803 | 0,00184 | 0,002777 | 0,002671 | 1,999676 |
| 3088 | -0,184332 | -0,18345 | 1,622556 | 0,001433 | 0,001577 | 0,002069 | 3,183312 |
| 3089 | -0,584586 | -3,319846 | 1,634417 | 0,001921 | 0,003088 | 0,002749 | 5,205136 |
| 3090 | -0,204582 | -2,37653 | 1,477363 | 0,00188 | 0,003287 | 0,002688 | 2,879222 |
| 3091 | -0,030326 | 8,74143 | 1,598439 | 0,001604 | 0,001708 | 0,002186 | 6,338021 |
| 3093 | -0,686677 | 0,300476 | 7,885837 | 0,001846 | 0,001704 | 0,002385 | 3,592786 |
| 3094 | -0,68452 | 0,10172 | 7,44807 | 0,001842 | 0,0017 | 0,002325 | 2,02486 |

In questa pagina vengono riportati i principali e più significativi dati riguardanti le prese fatte, in particolare sono riferite la posizione ed assetto spaziale delle prese nel sistema di riferimento prescelto, inoltre vengono riportati anche altri dati riguardanti le prese stesse, quali ad esempio in numero di punti collimati su di ogni fotografia.

## *Posizione ed assetto delle prese*

| Photo # | Center X (m) | Center Y (m) | Center Z (m) | Omega (deg.) | Phi (deg.) | Kappa (deg.) | Target X (m) | Target Y (m) | Target Z (m) | Roll Angle (deg.) | Largest Residual (pixels) | RMS Residual (pixels) | # Marks |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4,79685 | 2,57769 | 1,031081 | 117,870459 | 33,958925 | -105,826159 | 2,784946 | 5,218562 | 2,427608 | 89,369335 | 14,047285 | 2,78252 | 548 |
| 2 | 10,999564 | 14,327177 | 2,012174 | 166,649227 | 79,310983 | -76,087847 | -11,245... | 15,296737 | 6,097528 | -0,334288 | 16,434825 | 2,773752 | 310 |
| 3 | 5,7452 | 24,767657 | 1,978874 | -111,416812 | 29,603176 | 103,660612 | -8,057657 | 2,150922 | 10,849932 | -272,694873 | 9,154801 | 1,697484 | 555 |
| 4 | 0,820219 | 31,67157 | 2,079903 | -99,681825 | 8,742757 | 93,066967 | -3,615432 | 3,23925 | 6,930646 | -271,581508 | 10,120181 | 1,649957 | 134 |
| 5 | -1,409362 | 26,258967 | 1,356348 | -111,002783 | -0,855689 | 91,28546 | -1,041788 | 3,283567 | 10,177058 | 88,38604 | 13,184374 | 2,707758 | 152 |
| 6 | -6,21385 | 26,031878 | 2,064774 | -111,129497 | -22,094522 | 84,486079 | 0,704645 | 10,134831 | 8,208338 | 87,243266 | 16,212491 | 2,359949 | 345 |
| 7 | 7,849408 | -19,874527 | 1,330822 | 110,581732 | 35,752515 | -100,792618 | -7,871408 | 0,567314 | 9,006967 | 88,417676 | 17,995307 | 1,66606 | 677 |
| 8 | -15,318923 | 27,932164 | 1,491132 | -115,738371 | -44,464632 | 162,634813 | -0,73259 | 14,545127 | 7,944923 | -1,294167 | 11,624464 | 2,205693 | 855 |
| 9 | -26,306123 | 4,652663 | 1,955256 | -175,86051 | -73,55421 | 94,359005 | -1,295211 | 4,119734 | 9,318833 | -0,043589 | 11,22192 | 1,844151 | 1022 |
| 10 | -15,228628 | 3,331546 | 1,202588 | 132,467155 | -52,065461 | -54,134309 | -7,606229 | 7,714202 | 5,213932 | 89,959509 | 16,783875 | 2,251941 | 645 |
| 11 | -7,711735 | -1,597888 | 1,136484 | 115,884405 | -23,698114 | -80,598094 | -6,142383 | 1,618819 | 2,697351 | 91,633713 | 17,833039 | 2,50072 | 349 |
| 12 | -6,455939 | -0,014492 | 2,060397 | 144,42157 | -23,324231 | 77,092057 | -3,528626 | 3,935602 | 7,58222 | -48,128639 | 16,845601 | 2,512437 | 314 |
| 13 | -7,348346 | 10,79704 | 1,845719 | -115,706189 | -27,275805 | 78,138049 | -0,381011 | -1,378547 | 7,707053 | 89,42101 | 13,035967 | 2,538407 | 442 |
| 14 | -13,908444 | -11,047302 | 2,018671 | 117,151534 | -36,228736 | -72,495642 | -1,879529 | 3,561607 | 9,511016 | 89,358032 | 13,889668 | 2,309733 | 994 |
| 15 | -7,972715 | -19,820968 | 2,030939 | 111,258603 | -24,919084 | -81,498405 | 4,774144 | 5,748876 | 11,978927 | 90,807663 | 15,635863 | 2,263523 | 375 |
| 16 | 0,49287 | -20,28476 | 2,0598 | 103,849497 | -1,738359 | -88,948267 | 1,278242 | 4,840597 | 8,2542 | 89,376768 | 7,389519 | 1,899262 | 204 |
| 17 | 10,851875 | -19,77525 | 2,168054 | 95,702536 | 38,641539 | 47,867843 | -3,619665 | -1,763576 | 3,966663 | -51,435954 | 14,204907 | 1,930783 | 756 |
| 18 | 4,046506 | 6,214601 | 1,655681 | -111,005061 | 32,269227 | 102,585912 | 0,716086 | 1,290623 | 3,546318 | -271,00087 | 11,541061 | 2,416782 | 390 |
| 19 | 5,548882 | -8,650372 | 2,06866 | 117,835649 | 33,733144 | -107,524611 | -3,071803 | 2,765808 | 8,09681 | 91,181802 | 16,800071 | 2,507841 | 964 |
| 20 | 5,940864 | 7,841622 | 1,004253 | -117,690316 | 32,696116 | 106,759397 | 2,279386 | 2,790722 | 3,654946 | -270,932101 | 80,638254 | 4,199936 | 481 |
| 21 | 5,944988 | 3,211312 | 1,961427 | 176,063852 | 41,362414 | -86,838078 | 3,910949 | 3,369896 | 4,266196 | 2,782508 | 8,674931 | 2,10249 | 599 |
| 22 | 0,375564 | -0,206207 | 0,972817 | 114,536484 | 17,205511 | -97,194408 | -0,867317 | 3,445074 | 2,63961 | 89,504197 | 13,373138 | 2,132704 | 358 |
| 23 | 6,072715 | 25,844497 | 1,975681 | -106,269397 | 27,688529 | 121,118271 | -7,387351 | 1,221532 | 9,161666 | -293,395606 | 7,25863 | 1,487264 | 568 |
| 24 | 15,139698 | 0,672775 | 1,109521 | 155,132462 | 66,735726 | -154,100192 | 3,949879 | 2,695833 | 5,474301 | 90,87191 | 9,640828 | 1,936541 | 1178 |
| 25 | 17,578504 | 20,974141 | 2,122723 | -118,421487 | 55,358839 | -154,827704 | 0,189789 | 10,408084 | 7,840891 | -1,171454 | 12,749692 | 1,618184 | 1094 |
| 26 | -18,444671 | -7,177888 | 1,443266 | 127,922882 | -60,801615 | 35,740665 | 5,221859 | 3,255215 | 9,571908 | -1,520181 | 9,86305 | 1,76945 | 946 |
| 27 | 5,594382 | -1,951424 | 1,941569 | 151,955814 | 39,00181 | -89,646957 | 1,986225 | 0,1433 | 5,873853 | 39,892674 | 10,397727 | 1,863436 | 705 |
| 28 | 30,365509 | 4,338951 | 2,040785 | -179,916263 | 83,487772 | -89,32415 | 6,466653 | 4,334963 | 4,76888 | -0,760131 | 8,488885 | 1,216225 | 1143 |
| 29 | -32,692372 | 3,660889 | 1,856834 | 167,741284 | -78,522377 | 78,498063 | 5,757547 | 5,318539 | 9,485911 | -0,999136 | 9,565043 | 1,299923 | 889 |
| 30 | -6,167223 | 14,89697 | 2,168569 | -140,5631 | -23,677793 | 84,280622 | 0,811129 | 4,788025 | 14,459254 | 69,694709 | 12,741495 | 2,430439 | 296 |
| 31 | -17,1902 | 16,738771 | 2,09741 | -121,708061 | -46,767403 | 65,994313 | 2,75959 | 0,782795 | 11,955123 | 89,772167 | 10,786426 | 1,890829 | 930 |
| 32 | -11,854002 | 4,077876 | 2,101979 | 178,102604 | -44,977321 | 90,090286 | 1,208979 | 4,510731 | 15,168138 | -2,77369 | 7,577484 | 1,792243 | 469 |
| 33 | -23,174135 | 4,529552 | 3,271365 | -178,923952 | -77,37753 | 3,281634 | 5,798319 | 4,40771 | 9,758263 | 87,821058 | 7,217716 | 1,671642 | 847 |
| 34 | -17,411495 | 21,366229 | 3,20276 | -107,410471 | -56,293809 | 166,665074 | 7,593541 | 5,450231 | 8,193726 | -1,2858 | 21,388032 | 2,433015 | 854 |
| 38 | 18,27194 | 10,007812 | 3,238627 | -131,901358 | 67,887256 | 133,330222 | 5,556935 | 6,162541 | 6,688956 | -273,593775 | 22,553584 | 1,851691 | 1050 |
| 39 | 9,977964 | -10,432652 | 2,006392 | 125,447795 | 70,168678 | -33,307745 | -3,364154 | -6,512829 | 4,79699 | -0,502442 | 18,161163 | 3,250194 | 300 |
| 42 | 2,529052 | 1,183467 | 0,96933 | -113,139709 | 61,856852 | 111,03054 | -2,382323 | -1,23236 | 2,001747 | -270,38262 | 7,639231 | 2,334525 | 115 |
| 43 | 2,724991 | -0,635672 | 0,929209 | 155,164176 | 77,215525 | -154,12793 | -3,464662 | -0,045758 | 2,203806 | 89,51644 | 7,175473 | 2,322094 | 36 |
| 44 | 1,181503 | 3,386336 | 0,99015 | -103,721073 | 24,408327 | 96,749091 | -1,400027 | -2,140072 | 2,339497 | -270,9876 | 18,414854 | 4,203756 | 104 |
| 45 | 3,0298 | 3,146941 | 0,937667 | -111,299395 | 40,368758 | 106,178082 | -0,13708 | -0,323796 | 2,290808 | -272,005943 | 14,060808 | 2,720195 | 240 |
| 46 | 3,428947 | 0,635246 | 0,929947 | -132,081555 | 71,559738 | 131,328957 | -1,530699 | -0,592136 | 2,038254 | -270,744934 | 19,852192 | 4,817216 | 105 |
| 47 | -6,971156 | 2,330629 | 0,973927 | -92,136635 | -43,297763 | 178,380276 | 2,552442 | -7,769331 | 1,350742 | 0,154082 | 8,606409 | 2,300076 | 127 |
| 48 | -5,16427 | 4,448378 | 0,97363 | -96,411542 | -20,400769 | 178,715929 | -0,911582 | -6,914767 | 2,250529 | -0,959124 | 8,743758 | 2,408873 | 117 |
| 50 | -9,700574 | 2,961166 | 1,722139 | -109,001221 | -52,320138 | 75,591075 | 3,278807 | -6,516945 | 4,98594 | 89,164169 | 12,751348 | 2,645093 | 317 |
| 53 | 2,70689 | 5,71845 | 1,594323 | 101,208806 | 45,769119 | -97,976314 | -1,134882 | 9,387102 | 2,321322 | 89,894786 | 14,666367 | 2,870924 | 261 |
| 54 | 3,450537 | 10,029243 | 0,993771 | -99,025896 | 45,883708 | 171,420219 | -2,495599 | 4,335147 | 1,898266 | -344,91424 | 12,45278 | 2,597716 | 253 |
| 55 | 0,258071 | 4,155607 | 0,831885 | 108,488775 | 17,218948 | -96,008109 | -1,882819 | 10,707065 | 3,022545 | 90,355172 | 8,975391 | 2,168099 | 171 |
| 56 | -7,5513 | 6,843144 | 1,643557 | 88,994001 | -58,8286 | -89,962422 | 5,075548 | 14,480446 | 1,509448 | 89,101643 | 17,292704 | 2,686713 | 143 |
| 58 | 10,841423 | 7,283669 | 1,752552 | -135,099967 | 70,583711 | -135,175978 | 4,61576 | 5,734709 | 3,306926 | -1,40068 | 13,550823 | 2,566746 | 706 |
| 59 | -15,465305 | 13,938326 | 2,048148 | 179,126581 | -79,361686 | 91,413193 | 8,658245 | 14,007398 | 6,57892 | -2,301884 | 17,196593 | 2,90303 | 372 |
| 60 | -14,928679 | -19,203261 | 2,117537 | 102,270339 | -41,969031 | -29,184189 | 5,810588 | 3,328328 | 7,018001 | 37,459483 | 12,989001 | 2,314929 | 480 |
| 61 | 16,764401 | -12,984305 | 2,157586 | 123,301476 | 59,348848 | -30,192136 | 0,192387 | -4,776279 | 7,549554 | 0,719833 | 8,462206 | 1,536515 | 1038 |

# APPENDICE B

Il tempo è un gran maestro,
ma sfortunatamente uccide tutti i suoi allievi.
Hector Berlioz ( musicista, 1803 – 1869 )

In questa appendice sono riportati tutti i principali dati riguardanti l'elaborazione del modello numerico monodimensionale dell'arco d'Augusto di Rimini esposto nel capitolo IX.

## *Coordinate dei nodi del modello*

| | X (m) | Y (m) |
|---|---|---|
| Node 1 | -0,985 | 0,000 |
| Node 2 | -0,985 | 5,769 |
| Node 3 | -0,952 | 6,435 |
| Node 4 | -0,838 | 7,070 |
| Node 5 | -0,654 | 7,696 |
| Node 6 | -0,342 | 8,334 |
| Node 7 | 0,028 | 8,886 |
| Node 8 | 0,454 | 9,389 |
| Node 9 | 0,939 | 9,829 |
| Node 10 | 1,488 | 10,206 |
| Node 11 | 2,066 | 10,504 |
| Node 12 | 2,653 | 10,735 |
| Node 13 | 3,237 | 10,903 |
| Node 14 | 3,935 | 11,009 |
| Node 15 | 4,726 | 10,991 |
| Node 16 | 5,343 | 10,891 |
| Node 17 | 5,955 | 10,739 |
| Node 18 | 6,530 | 10,514 |
| Node 19 | 7,134 | 10,223 |
| Node 20 | 7,680 | 9,855 |
| Node 21 | 8,173 | 9,396 |
| Node 22 | 8,581 | 8,920 |
| Node 23 | 8,980 | 8,365 |
| Node 24 | 9,261 | 7,744 |
| Node 25 | 9,439 | 7,232 |
| Node 26 | 9,575 | 6,610 |
| Node 27 | 9,655 | 5,782 |
| Node 28 | 9,542 | 0,001 |

## *Spostamento dei nodi a seguito del peso proprio della struttura*

| | DX (m) | DY (m) | RZ (deg) |
|---|---|---|---|
| Node 1 | 0,0000000 | 0,0000000 | 0,0000000 |
| Node 2 | -0,0002494 | -0,0001041 | 0,0006846 |
| Node 3 | -0,0002544 | -0,0001146 | -0,0005258 |
| Node 4 | -0,0002433 | -0,0001262 | -0,0017883 |
| Node 5 | -0,0002174 | -0,0001428 | -0,0030078 |
| Node 6 | -0,0001764 | -0,0001719 | -0,0041074 |
| Node 7 | -0,0001316 | -0,0002096 | -0,0048117 |
| Node 8 | -0,0000863 | -0,0002550 | -0,0051554 |
| Node 9 | -0,0000455 | -0,0003065 | -0,0051375 |
| Node 10 | -0,0000122 | -0,0003614 | -0,0047589 |
| Node 11 | 0,0000107 | -0,0004121 | -0,0040729 |
| Node 12 | 0,0000246 | -0,0004538 | -0,0031589 |
| Node 13 | 0,0000312 | -0,0004838 | -0,0021090 |
| Node 14 | 0,0000322 | -0,0005032 | -0,0007618 |
| Node 15 | 0,0000301 | -0,0005029 | 0,0008085 |
| Node 16 | 0,0000311 | -0,0004860 | 0,0020069 |
| Node 17 | 0,0000367 | -0,0004554 | 0,0030993 |
| Node 18 | 0,0000500 | -0,0004152 | 0,0039935 |
| Node 19 | 0,0000720 | -0,0003629 | 0,0046947 |
| Node 20 | 0,0001039 | -0,0003091 | 0,0050512 |
| Node 21 | 0,0001456 | -0,0002576 | 0,0050518 |
| Node 22 | 0,0001878 | -0,0002148 | 0,0047130 |
| Node 23 | 0,0002319 | -0,0001751 | 0,0039640 |
| Node 24 | 0,0002700 | -0,0001493 | 0,0028877 |
| Node 25 | 0,0002914 | -0,0001345 | 0,0018673 |
| Node 26 | 0,0003036 | -0,0001225 | 0,0005768 |
| Node 27 | 0,0002962 | -0,0001098 | -0,0010493 |
| Node 28 | 0,0000000 | 0,0000000 | 0,0000000 |

## *Reazioni vincolari*

| | FX (kgf) | FY (kgf) | MZ (kgfm) |
|---|---|---|---|
| Node 1 | 106471 | 788197 | -327485 |
| Node 28 | -106471 | 788275 | 381457 |

## *Sforzi interni negli elementi*

| | Shear Force 2 (kgf) | Bending Moment 2 (kgfm) | Axial Force (kgf) |
|---|---|---|---|
| Beam 1: End 1 | -106471 | 327485 | -788197 |
| Beam 1: End 2 | -106471 | -286786 | -684433 |
| Beam 2: End 1 | 119832 | -317246 | -682078 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Beam 2: End 2 | 121866 | 381457 | -786042 |
| Beam 3: End 1 | -72406 | -286786 | -688870 |
| Beam 3: End 2 | -75581 | -336131 | -624919 |
| Beam 4: End 1 | 4835 | -336131 | -629454 |
| Beam 4: End 2 | -6021 | -336520 | -568983 |
| Beam 5: End 1 | 55196 | -336520 | -566332 |
| Beam 5: End 2 | 37960 | -306135 | -507583 |
| Beam 6: End 1 | 123413 | -306135 | -493812 |
| Beam 6: End 2 | 94859 | -228740 | -435541 |
| Beam 7: End 1 | 152511 | -228740 | -418849 |
| Beam 7: End 2 | 119810 | -138305 | -370049 |
| Beam 8: End 1 | 160446 | -138305 | -354327 |
| Beam 8: End 2 | 124230 | -44630 | -311545 |
| Beam 9: End 1 | 163886 | -44630 | -292634 |
| Beam 9: End 2 | 124251 | 49669 | -256643 |
| Beam 10: End 1 | 157810 | 49669 | -237487 |
| Beam 10: End 2 | 114758 | 140391 | -207931 |
| Beam 11: End 1 | 139965 | 140391 | -191871 |
| Beam 11: End 2 | 96491 | 217103 | -169475 |
| Beam 12: End 1 | 113086 | 217103 | -158884 |
| Beam 12: End 2 | 70346 | 274942 | -142075 |
| Beam 13: End 1 | 83366 | 274942 | -134848 |
| Beam 13: End 2 | 41977 | 313007 | -122913 |
| Beam 14: End 1 | 57591 | 313007 | -116417 |
| Beam 14: End 2 | 9095 | 336482 | -109066 |
| Beam 15: End 1 | 27754 | 336482 | -105867 |
| Beam 15: End 2 | -26876 | 336829 | -107110 |
| Beam 16: End 1 | -11825 | 336829 | -109796 |
| Beam 16: End 2 | -54690 | 316060 | -116771 |
| Beam 17: End 1 | -45064 | 316060 | -120813 |
| Beam 17: End 2 | -88273 | 274107 | -131492 |
| Beam 18: End 1 | -70234 | 274107 | -141948 |
| Beam 18: End 2 | -111930 | 217882 | -158315 |
| Beam 19: End 1 | -99894 | 217882 | -166172 |
| Beam 19: End 2 | -145202 | 135827 | -187958 |
| Beam 20: End 1 | -116545 | 135827 | -206952 |
| Beam 20: End 2 | -159191 | 45101 | -235697 |
| Beam 21: End 1 | -120397 | 45101 | -257680 |
| Beam 21: End 2 | -160457 | -49268 | -295001 |
| Beam 22: End 1 | -126458 | -49268 | -311095 |
| Beam 22: End 2 | -161061 | -139449 | -351459 |
| Beam 23: End 1 | -130354 | -139449 | -363967 |
| Beam 23: End 2 | -165438 | -240447 | -412809 |
| Beam 24: End 1 | -81071 | -240447 | -437273 |
| Beam 24: End 2 | -106637 | -304344 | -493749 |
| Beam 25: End 1 | -61591 | -304344 | -501364 |
| Beam 25: End 2 | -78189 | -342248 | -549101 |
| Beam 26: End 1 | -12561 | -342248 | -554498 |
| Beam 26: End 2 | -25473 | -354346 | -613395 |
| Beam 27: End 1 | 48392 | -354346 | -612013 |
| Beam 27: End 2 | 40803 | -317246 | -691321 |

# *Stress massimo e minimo nelle fibre degli elementi*

| | Min Fibre Stress (kg/cm^2) | Max Fibre Stress (kg/cm^2) |
|---|---|---|
| Beam 1: End 1 | -28,59 | 5,41 |
| Beam 1: End 2 | -24,95 | 4,82 |
| Beam 2: End 1 | -26,50 | 6,44 |
| Beam 2: End 2 | -31,36 | 8,24 |
| Beam 3: End 1 | -25,02 | 4,75 |
| Beam 3: End 2 | -26,64 | 8,26 |
| Beam 4: End 1 | -26,70 | 8,19 |
| Beam 4: End 2 | -25,83 | 9,10 |
| Beam 5: End 1 | -25,79 | 9,14 |
| Beam 5: End 2 | -23,35 | 8,42 |
| Beam 6: End 1 | -23,15 | 8,63 |
| Beam 6: End 2 | -18,28 | 5,47 |
| Beam 7: End 1 | -18,03 | 5,71 |
| Beam 7: End 2 | -12,62 | 1,74 |
| Beam 8: End 1 | -12,39 | 1,97 |
| Beam 8: End 2 | -6,90 | -2,27 |
| Beam 9: End 1 | -6,62 | -1,99 |
| Beam 9: End 2 | -6,35 | -1,20 |
| Beam 10: End 1 | -6,07 | -0,91 |
| Beam 10: End 2 | -10,34 | 4,23 |
| Beam 11: End 1 | -10,11 | 4,47 |
| Beam 11: End 2 | -13,76 | 8,78 |
| Beam 12: End 1 | -13,60 | 8,93 |
| Beam 12: End 2 | -16,36 | 12,18 |
| Beam 13: End 1 | -16,25 | 12,29 |
| Beam 13: End 2 | -18,05 | 14,44 |
| Beam 14: End 1 | -17,96 | 14,53 |
| Beam 14: End 2 | -19,07 | 15,86 |
| Beam 15: End 1 | -19,02 | 15,91 |
| Beam 15: End 2 | -19,06 | 15,91 |
| Beam 16: End 1 | -19,10 | 15,87 |
| Beam 16: End 2 | -18,12 | 14,69 |
| Beam 17: End 1 | -18,18 | 14,63 |
| Beam 17: End 2 | -16,16 | 12,29 |
| Beam 18: End 1 | -16,31 | 12,14 |
| Beam 18: End 2 | -13,64 | 8,98 |
| Beam 19: End 1 | -13,75 | 8,87 |
| Beam 19: End 2 | -9,81 | 4,29 |
| Beam 20: End 1 | -10,09 | 4,01 |
| Beam 20: End 2 | -5,81 | -1,13 |
| Beam 21: End 1 | -6,13 | -1,45 |
| Beam 21: End 2 | -6,90 | -1,78 |
| Beam 22: End 1 | -7,13 | -2,02 |
| Beam 22: End 2 | -12,41 | 2,07 |
| Beam 23: End 1 | -12,59 | 1,89 |
| Beam 23: End 2 | -18,55 | 6,41 |
| Beam 24: End 1 | -18,91 | 6,05 |
| Beam 24: End 2 | -23,06 | 8,54 |
| Beam 25: End 1 | -23,17 | 8,42 |
| Beam 25: End 2 | -25,84 | 9,69 |

| | | |
|---|---|---|
| Beam 26: End 1 | -25,92 | 9,61 |
| Beam 26: End 2 | -27,41 | 9,37 |
| Beam 27: End 1 | -27,39 | 9,39 |
| Beam 27: End 2 | -26,63 | 6,30 |

## *Stress medio e massimo di taglio nelle sezioni degli elementi*

| | Mean Shearing Stress 2 (kg/cm^2) | Max Shearing Stress 2 (kg/cm^2) |
|---|---|---|
| Beam 1: End 1 | -1,57 | 2,35 |
| Beam 1: End 2 | -1,57 | 2,35 |
| Beam 2: End 1 | 1,76 | 2,64 |
| Beam 2: End 2 | 1,76 | 2,64 |
| Beam 3: End 1 | -1,11 | 1,60 |
| Beam 3: End 2 | -1,11 | 1,60 |
| Beam 4: End 1 | -0,09 | 0,00 |
| Beam 4: End 2 | -0,09 | 0,00 |
| Beam 5: End 1 | 0,56 | 0,84 |
| Beam 5: End 2 | 0,56 | 0,84 |
| Beam 6: End 1 | 1,39 | 2,09 |
| Beam 6: End 2 | 1,39 | 2,09 |
| Beam 7: End 1 | 1,76 | 2,64 |
| Beam 7: End 2 | 1,76 | 2,64 |
| Beam 8: End 1 | 1,83 | 2,74 |
| Beam 8: End 2 | 1,83 | 2,74 |
| Beam 9: End 1 | 1,83 | 2,74 |
| Beam 9: End 2 | 1,83 | 2,74 |
| Beam 10: End 1 | 1,69 | 2,53 |
| Beam 10: End 2 | 1,69 | 2,53 |
| Beam 11: End 1 | 1,42 | 2,13 |
| Beam 11: End 2 | 1,42 | 2,13 |
| Beam 12: End 1 | 1,03 | 1,55 |
| Beam 12: End 2 | 1,03 | 1,55 |
| Beam 13: End 1 | 0,62 | 0,93 |
| Beam 13: End 2 | 0,62 | 0,93 |
| Beam 14: End 1 | 0,13 | 0,20 |
| Beam 14: End 2 | 0,13 | 0,20 |
| Beam 15: End 1 | -0,40 | 0,00 |
| Beam 15: End 2 | -0,40 | 0,00 |
| Beam 16: End 1 | -0,80 | 0,26 |
| Beam 16: End 2 | -0,80 | 0,26 |
| Beam 17: End 1 | -1,30 | 0,99 |
| Beam 17: End 2 | -1,30 | 0,99 |
| Beam 18: End 1 | -1,65 | 1,55 |
| Beam 18: End 2 | -1,65 | 1,55 |
| Beam 19: End 1 | -2,14 | 2,20 |
| Beam 19: End 2 | -2,14 | 2,20 |
| Beam 20: End 1 | -2,34 | 2,57 |
| Beam 20: End 2 | -2,34 | 2,57 |
| Beam 21: End 1 | -2,36 | 2,66 |
| Beam 21: End 2 | -2,36 | 2,66 |
| Beam 22: End 1 | -2,37 | 2,79 |
| Beam 22: End 2 | -2,37 | 2,79 |
| Beam 23: End 1 | -2,43 | 2,88 |
| Beam 23: End 2 | -2,43 | 2,88 |
| Beam 24: End 1 | -1,57 | 1,79 |
| Beam 24: End 2 | -1,57 | 1,79 |
| Beam 25: End 1 | -1,15 | 1,36 |
| Beam 25: End 2 | -1,15 | 1,36 |
| Beam 26: End 1 | -0,37 | 0,28 |
| Beam 26: End 2 | -0,37 | 0,28 |
| Beam 27: End 1 | 0,60 | 0,90 |
| Beam 27: End 2 | 0,60 | 0,90 |

# *Deformazione assiale e curvatura negli elementi*

| | Axial Strain | Curvature 2 (/m) |
|---|---|---|
| Beam 1: End 1 | -1,805e-5 | 3,333e-5 |
| Beam 1: End 2 | -1,805e-5 | -2,919e-5 |
| Beam 2: End 1 | -1,799e-5 | -3,239e-5 |
| Beam 2: End 2 | -1,799e-5 | 3,872e-5 |
| Beam 3: End 1 | -1,610e-5 | -2,917e-5 |
| Beam 3: End 2 | -1,610e-5 | -3,419e-5 |
| Beam 4: End 1 | -1,469e-5 | -3,415e-5 |
| Beam 4: End 2 | -1,469e-5 | -3,419e-5 |
| Beam 5: End 1 | -1,316e-5 | -3,415e-5 |
| Beam 5: End 2 | -1,316e-5 | -3,106e-5 |
| Beam 6: End 1 | -1,139e-5 | -3,098e-5 |
| Beam 6: End 2 | -1,139e-5 | -2,311e-5 |
| Beam 7: End 1 | -9,664e-6 | -2,309e-5 |
| Beam 7: End 2 | -9,664e-6 | -1,389e-5 |
| Beam 8: End 1 | -8,157e-6 | -1,387e-5 |
| Beam 8: End 2 | -8,157e-6 | -4,340e-6 |
| Beam 9: End 1 | -6,728e-6 | -4,322e-6 |
| Beam 9: End 2 | -6,728e-6 | 5,275e-6 |
| Beam 10: End 1 | -5,456e-6 | 5,298e-6 |
| Beam 10: End 2 | -5,456e-6 | 1,453e-5 |
| Beam 11: End 1 | -4,427e-6 | 1,453e-5 |
| Beam 11: End 2 | -4,427e-6 | 2,233e-5 |
| Beam 12: End 1 | -3,687e-6 | 2,232e-5 |
| Beam 12: End 2 | -3,687e-6 | 2,821e-5 |
| Beam 13: End 1 | -3,158e-6 | 2,819e-5 |
| Beam 13: End 2 | -3,158e-6 | 3,207e-5 |
| Beam 14: End 1 | -2,763e-6 | 3,215e-5 |
| Beam 14: End 2 | -2,763e-6 | 3,453e-5 |
| Beam 15: End 1 | -2,610e-6 | 3,461e-5 |
| Beam 15: End 2 | -2,610e-6 | 3,465e-5 |
| Beam 16: End 1 | -2,776e-6 | 3,451e-5 |
| Beam 16: End 2 | -2,776e-6 | 3,239e-5 |
| Beam 17: End 1 | -3,091e-6 | 3,240e-5 |
| Beam 17: End 2 | -3,091e-6 | 2,813e-5 |
| Beam 18: End 1 | -3,679e-6 | 2,811e-5 |
| Beam 18: End 2 | -3,679e-6 | 2,239e-5 |
| Beam 19: End 1 | -4,338e-6 | 2,243e-5 |
| Beam 19: End 2 | -4,338e-6 | 1,408e-5 |
| Beam 20: End 1 | -5,422e-6 | 1,406e-5 |
| Beam 20: End 2 | -5,422e-6 | 4,828e-6 |
| Beam 21: End 1 | -6,770e-6 | 4,818e-6 |
| Beam 21: End 2 | -6,770e-6 | -4,785e-6 |
| Beam 22: End 1 | -8,116e-6 | -4,830e-6 |
| Beam 22: End 2 | -8,116e-6 | -1,401e-5 |
| Beam 23: End 1 | -9,515e-6 | -1,399e-5 |
| Beam 23: End 2 | -9,515e-6 | -2,427e-5 |
| Beam 24: End 1 | -1,141e-5 | -2,432e-5 |
| Beam 24: End 2 | -1,141e-5 | -3,083e-5 |
| Beam 25: End 1 | -1,287e-5 | -3,090e-5 |
| Beam 25: End 2 | -1,287e-5 | -3,475e-5 |

| | | |
|---|---|---|
| Beam 26: End 1 | -1,431e-5 | -3,476e-5 |
| Beam 26: End 2 | -1,431e-5 | -3,599e-5 |
| Beam 27: End 1 | -1,597e-5 | -3,601e-5 |
| Beam 27: End 2 | -1,597e-5 | -3,223e-5 |

## *Frequenze naturali dei modi di vibrare*

| Mode | Eigenvalue | Frequency (rad/s) | Frequency (Hertz) |
|---|---|---|---|
| 1 | 7.51258816E+03 | 8.66751877E+01 | 1.37947846E+01 |
| 2 | 1.02936691E+04 | 1.01457721E+02 | 1.61474977E+01 |
| 3 | 4.76575596E+04 | 2.18306115E+02 | 3.47444972E+01 |
| 4 | 6.22393690E+04 | 2.49478194E+02 | 3.97056877E+01 |
| 5 | 1.81976821E+05 | 4.26587414E+02 | 6.78934955E+01 |
| 6 | 2.17508793E+05 | 4.66378380E+02 | 7.42264245E+01 |
| 7 | 3.16018378E+05 | 5.62155119E+02 | 8.94697660E+01 |
| 8 | 4.22465375E+05 | 6.49973365E+02 | 1.03446474E+02 |
| 9 | 4.91030046E+05 | 7.00735361E+02 | 1.11525496E+02 |
| 10 | 5.08604697E+05 | 7.13165267E+02 | 1.13503777E+02 |
| 11 | 5.17744299E+05 | 7.19544508E+02 | 1.14519065E+02 |
| 12 | 5.85029810E+05 | 7.64872414E+02 | 1.21733226E+02 |
| 13 | 9.34456564E+05 | 9.66672936E+02 | 1.53850776E+02 |
| 14 | 9.44787094E+05 | 9.72001591E+02 | 1.54698858E+02 |
| 15 | 1.17122822E+06 | 1.08223298E+03 | 1.72242728E+02 |
| 16 | 1.45686766E+06 | 1.20700773E+03 | 1.92101247E+02 |
| 17 | 1.64295890E+06 | 1.28177958E+03 | 2.04001557E+02 |
| 18 | 1.66281023E+06 | 1.28949999E+03 | 2.05230298E+02 |
| 19 | 1.82957265E+06 | 1.35261696E+03 | 2.15275676E+02 |
| 20 | 2.09716968E+06 | 1.44816079E+03 | 2.30481949E+02 |
| 21 | 2.29346224E+06 | 1.51441812E+03 | 2.41027130E+02 |
| 22 | 2.82057250E+06 | 1.67945601E+03 | 2.67293726E+02 |
| 23 | 2.93303971E+06 | 1.71261196E+03 | 2.72570658E+02 |
| 24 | 3.12713262E+06 | 1.76837005E+03 | 2.81444834E+02 |
| 25 | 3.32552946E+06 | 1.82360343E+03 | 2.90235500E+02 |
| 26 | 3.76351272E+06 | 1.93997750E+03 | 3.08757009E+02 |
| 27 | 3.93061912E+06 | 1.98257891E+03 | 3.15537233E+02 |
| 28 | 4.60927491E+06 | 2.14692219E+03 | 3.41693280E+02 |
| 29 | 4.94882144E+06 | 2.22459467E+03 | 3.54055238E+02 |
| 30 | 5.00875688E+06 | 2.23802522E+03 | 3.56192776E+02 |
| 31 | 5.02109381E+06 | 2.24077973E+03 | 3.56631171E+02 |
| 32 | 6.17126703E+06 | 2.48420350E+03 | 3.95373267E+02 |
| 33 | 6.37608148E+06 | 2.52509039E+03 | 4.01880617E+02 |
| 34 | 6.47344862E+06 | 2.54429728E+03 | 4.04937488E+02 |
| 35 | 7.43229489E+06 | 2.72622356E+03 | 4.33891955E+02 |
| 36 | 7.68788578E+06 | 2.77270369E+03 | 4.41289499E+02 |
| 37 | 7.92378420E+06 | 2.81492170E+03 | 4.48008704E+02 |
| 38 | 8.01594738E+06 | 2.83124485E+03 | 4.50606612E+02 |
| 39 | 9.37775180E+06 | 3.06231151E+03 | 4.87382015E+02 |
| 40 | 9.83807718E+06 | 3.13657093E+03 | 4.99200767E+02 |
| 41 | 9.85284033E+06 | 3.13892344E+03 | 4.99575181E+02 |
| 42 | 1.06378732E+07 | 3.26157526E+03 | 5.19095826E+02 |
| 43 | 1.11963561E+07 | 3.34609565E+03 | 5.32547663E+02 |
| 44 | 1.16009399E+07 | 3.40601525E+03 | 5.42084164E+02 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 45 | 1.21306263E+07 | 3.48290486E+03 | 5.54321525E+02 |
| 46 | 1.32014081E+07 | 3.63337421E+03 | 5.78269465E+02 |
| 47 | 1.36843959E+07 | 3.69924261E+03 | 5.88752747E+02 |
| 48 | 1.42436895E+07 | 3.77408128E+03 | 6.00663691E+02 |
| 49 | 1.46187660E+07 | 3.82344949E+03 | 6.08520886E+02 |
| 50 | 1.55098252E+07 | 3.93825154E+03 | 6.26792199E+02 |
| 51 | 1.57283549E+07 | 3.96589901E+03 | 6.31192431E+02 |
| 52 | 1.73748646E+07 | 4.16831675E+03 | 6.63408216E+02 |
| 53 | 1.77709565E+07 | 4.21556123E+03 | 6.70927408E+02 |
| 54 | 1.80214785E+07 | 4.24517120E+03 | 6.75639981E+02 |
| 55 | 1.84799487E+07 | 4.29883109E+03 | 6.84180217E+02 |
| 56 | 2.02837466E+07 | 4.50374807E+03 | 7.16793767E+02 |
| 57 | 2.03497072E+07 | 4.51106497E+03 | 7.17958289E+02 |
| 58 | 2.08091941E+07 | 4.56170956E+03 | 7.26018625E+02 |
| 59 | 2.24300693E+07 | 4.73603941E+03 | 7.53764082E+02 |
| 60 | 2.29376369E+07 | 4.78932531E+03 | 7.62244798E+02 |
| 61 | 2.37580698E+07 | 4.87422505E+03 | 7.75757010E+02 |
| 62 | 2.38060778E+07 | 4.87914724E+03 | 7.76540401E+02 |
| 63 | 2.40380878E+07 | 4.90286526E+03 | 7.80315241E+02 |
| 64 | 2.63899308E+07 | 5.13711308E+03 | 8.17596941E+02 |
| 65 | 2.68205397E+07 | 5.17885506E+03 | 8.24240383E+02 |
| 66 | 2.70134704E+07 | 5.19744845E+03 | 8.27199613E+02 |
| 67 | 2.75841872E+07 | 5.25206504E+03 | 8.35892113E+02 |
| 68 | 2.79130450E+07 | 5.28327976E+03 | 8.40860089E+02 |
| 69 | 2.86498268E+07 | 5.35255329E+03 | 8.51885315E+02 |
| 70 | 3.03770453E+07 | 5.51153748E+03 | 8.77188433E+02 |
| 71 | 3.05861382E+07 | 5.53047360E+03 | 8.80202211E+02 |
| 72 | 3.11483025E+07 | 5.58106643E+03 | 8.88254310E+02 |
| 73 | 3.35896019E+07 | 5.79565371E+03 | 9.22406937E+02 |
| 74 | 3.43434414E+07 | 5.86032776E+03 | 9.32700131E+02 |
| 75 | 3.43655963E+07 | 5.86221769E+03 | 9.33000923E+02 |
| 76 | 3.45138803E+07 | 5.87485151E+03 | 9.35011658E+02 |
| 77 | 3.65283635E+07 | 6.04386991E+03 | 9.61911772E+02 |
| 78 | 3.80959389E+07 | 6.17219077E+03 | 9.82334671E+02 |
| 79 | 3.85736270E+07 | 6.21076702E+03 | 9.88474272E+02 |
| 80 | 3.99154475E+07 | 6.31786732E+03 | 1.00551981E+03 |
| 81 | 4.07657367E+07 | 6.38480514E+03 | 1.01617330E+03 |
| 82 | 4.21111942E+07 | 6.48931385E+03 | 1.03280638E+03 |
| 83 | 4.29558254E+07 | 6.55406938E+03 | 1.04311254E+03 |
| 84 | 4.30030945E+07 | 6.55767447E+03 | 1.04368631E+03 |
| 85 | 4.64148887E+07 | 6.81284733E+03 | 1.08429833E+03 |
| 86 | 4.65055604E+07 | 6.81949854E+03 | 1.08535690E+03 |
| 87 | 4.72894254E+07 | 6.87673072E+03 | 1.09446569E+03 |
| 88 | 4.79655551E+07 | 6.92571694E+03 | 1.10226209E+03 |
| 89 | 5.00652416E+07 | 7.07567958E+03 | 1.12612938E+03 |
| 90 | 5.08338539E+07 | 7.12978639E+03 | 1.13474075E+03 |
| 91 | 5.21966799E+07 | 7.22472698E+03 | 1.14985101E+03 |
| 92 | 5.37221902E+07 | 7.32954229E+03 | 1.16653289E+03 |
| 93 | 5.53158097E+07 | 7.43745990E+03 | 1.18370851E+03 |
| 94 | 5.55154900E+07 | 7.45087176E+03 | 1.18584307E+03 |
| 95 | 5.71837512E+07 | 7.56199386E+03 | 1.20352870E+03 |
| 96 | 5.75754871E+07 | 7.58785128E+03 | 1.20764404E+03 |
| 97 | 6.03038135E+07 | 7.76555301E+03 | 1.23592615E+03 |
| 98 | 6.16035271E+07 | 7.84879144E+03 | 1.24917396E+03 |
| 99 | 6.23032618E+07 | 7.89324152E+03 | 1.25624841E+03 |
| 100 | 6.34507397E+07 | 7.96559726E+03 | 1.26776418E+03 |

# Bibliografia

Il saggio sa di essere stupido,
è lo stupido invece che crede di essere saggio.
William Shakespeare ( 1564 – 1616 )


- Angelini R., *L'arco d'Augusto di Rimini: rilievo e studio del monumento con particolare riguardo all'assetto statico indagato con il metodo agli elementi finiti*, Forlì: a cura della Camera di commercio industria artigianato e agricoltura, 1986.

- Arias P, Rinaldi G., *Il consolidamento dell'arco di Augusto nella città di Rimini*, estratto da: Giornale del Genio Civile, n.1 ( gen. 1948 ); Istituto poligrafico dello Stato, Roma, 1948.

- Aurigemma S., *L'arco di Augusto in Rimini*, estratto da Studi Romagnoli, 3 (1952); Faenza Lega, 1953.

- Aurigemma S., *La porta augustea di Rimini*, in "Ariminum", numero speciale per il bimillenario augusteo, a cura del Comune di Rimini, Rimini 1938.

- Baratin L., Bitelli G., Bonnici H., Unguendoli M., Zanutta A., *Traditional and modern methods of surveying architectural Heritage: a few examples in the fortified island of Malta*, CIPA International Symposium, Potsdam ( Germany ), 2001.

- Baratin L., Bitelli G., Unguendoli M., Zanutta A., *Close range photogrammetry in support of architectural restoration and structural works: a case study*, CIPA, International Symposium, Potsdam ( Germany ), 2001.

- Baratin L., Bitelli G., Unguendoli M., Zanutta A., *Digital orthophoto as a tool for the restoration of monuments*, Int, Arch. Phot. Rem. & Sens., 33(5), pp 62-69, 2000.

- Benini G., *Metodi di rilievo fotogrammetrici e ipotesi di recupero funzionale della chiesa di S.Giuseppe in località Pian di Venola*, Tesi di Laurea, Università di Bologna, DISTART, 2004.

- Bitelli G., *Moderne tecniche e strumentazioni per il rilievo dei beni culturali*, Atti 6° conferenza ASITA, Volume 1 pp IX-XXIV, Perugina, 2002.

- Bitelli G., Girelli V.A., Tini M.A., Vittuari L., Zanutta A., *Laser a scansione terrestre e fotogrammetria digitale nel rilevamento dei Beni Culturali; esempi dalla piazza di S.Stefano in Bologna*, Atti 7° conferenza ASITA, Volume 1 pp 345-350, Verona 28-30 Ottobre 2003.

- Bitelli G., Vittuari L., *Un'esperienza di applicazione di tecniche di realtà virtuale: il tempio maggiore di Bakchias. Bakchias IV – rapporto preliminare della cmpagna di scavo del 1996*; Monografie di SEAP, Series Maior, Istituiti Editoriali e Poligrafici Internazionali, Pisa. 1997.

- Brighenti M., *Illustrazione dell'arco d'Augusto in Rimini con otto tavole in rame pubblicata da Maurizio Brighenti*, per Marsoner e Grandi, Rimini, 1825.

- Casadio M., Elmi C., *Il manuale del geologo*, Pitagora Editrice Bologna, Bologna, 1999.

- Cina A., Trattamento delle misure topografiche, Celid, Torino, 2003.

- Colombo P., Colleselli F., *Elementi di geotecnica*, Zanichelli, Bologna, 1996.

- EOS System Inc., *PhotoModeler Pro 5 User's Manual*, Canada.

- Fagnani C., *Guida di Rimini*, Rimini, 1813.

- Fangi G., *Photogrammetry Notes*, Ancona.

- Fontanesi E., *Il rilievo fotogrammetrico di un elemento di interesse storico-architettonico ( l'oratorio della Bellincina ) al fine di un suo restauro e messa a norma antisismica*, Tesi di Laurea, Università di Bologna, DISTART, 2004.

- Foschi P.L., Pasini P.G., *L'arco d'Augusto - Significati e vicende di un grande segno urbano*, Musei Comunali Rimini e Rolo Banca, 1998.

- Folloni G., *Principi di topografia*, Patron Editore, Bologna, 1978.

- G+D Computing, *Guida all'uso di Straus7*, Sydney.

- Gerola G., *Nella Sopraintendenza ai monumenti della Romagna. Rimini, l'arco d'Augusto*, in "felix Ravenna", n. 5, 1912.

- Girardi F., *Tecniche fotogrammetriche digitali per il rilievo dei beni culturali*, Tesi di Laurea, Università di Bologna, DISTART, 2003.

- Inghilleri G., *Topografia generale*, UTET, Torino, 1974.

- Kraus K., *Fotogrammetria* – Vol. 1, Ed. Libreria Universitaria Levrotto & Bella, Torino, 1994.

- Mansuelli G.A., *L'arco di Augusto in Rimini*, estratto da Emilia Romana v. 2; Firenze ,Marzocco, 1944.

- Mansuelli G.A., *Il monumento augusteo del 27 a.C. Nuove ricerche sull'arco di Rimini*, in "Arte antica e moderna", 1959.

- Pasini P.G., *L'arco di Augusto: Rimini 1974, bimillenario*, Tipolito Cosmi, Rimini, 1974.

- Pasini P.G., *Rimini: città come storia*, vol. I e II., Tipolito Giusti, Rimini,1982.

- Rinaldi G., *la tecnica dei consolidamenti per il ripristino dei monumenti danneggiati da eventi bellici ( Arco d'Augusto e Tempio Malatestiano in Rimini )*, conferenza tenuta alla scuola di specializzazione per le costruzioni in cemento armato, Fondazione F.lli Pesenti del Politecnico di Milano., Bologna Rocca S. Casciano, 1948.

- Rossini L., *Gli archi trionfali degli antichi romani*, Roma, 1836.

- Temanza T., *Delle antichità di Rimino: libri due*, Venezia 1741, ristampato a Rimini nel 1996 dalla CARIM ( fondazione cassa di risparmio di Rimini ) con ampia prefazione di Rimondini G.

- Tini M.A., *Fotogrammetria e realtà visuale per la documentazione metrica, la rappresentazione e la gestione dei dati in archeologia*, Tesi di Dottorato, Università di Bologna, DISTART.

- Tonini L., *Storia di Rimini*, vol. I e II, Rimini 1848.

- Tonini L., *Rimini avanti il principio dell'era volgare*, Rimini, 1848.

- Tonini L. *Atti e memorie*, Rimini, 1867.

- Vincenzi A., *Utilizzo di camere amatoriali per il rilievo nel settore dei beni culturali*, Tesi di Laurea, Università di Bologna, DISTART, 2000.

- Viola E., *Fondamenti di analisi matriciale delle strutture*, Pitagora Editrice Bologna, Bologna, 1996.

- Viola E., *Fondamenti di dinamica e vibrazione delle strutture* ( Volume primo: Sistemi discreti ), Pitagora Editrice Bologna, Bologna, 2001.

- Viola E., *Lezioni di scienza delle costruzioni*, Pitagora Editrice Bologna, Bologna.

# Ringraziamenti

Lo splendore dell'amicizia
non è la mano tesa né il sorriso gentile
né la gioia della compagnia:
è l'ispirazione spirituale quando
scopriamo che qualcuno crede in noi
ed è disposto a fidarsi di noi.
Ralph Waldo Emerson ( 1803 – 1882 )

*Ringrazio il Dott. Antonio Zanutta per aver sempre sostenuto la mia idea originaria, permettendomi di lavorare ad una tesi che era per me molto interessante. Grazie a lui il mio pensiero e desiderio si è trasformato in realtà. Lo ringrazio soprattutto per avermi dato la sua disponibilità e professionalità in ogni momento e fase del lavoro, fornendomi sempre efficaci consigli. Ancora mille grazie!*

*Ringrazio la Dott. Ing. Simonetta Montaguti per avermi aiutato nelle due giornate di rilievo fotogrammetrico, un pesante sacrificio, perché è dovuta venir giù a Rimini (di sabato) appositamente da Bologna per seguirmi ed aiutarmi in diverse fasi del lavoro; nonostante ciò lei si è mostrata sempre molto gentile e disponibile nei miei confronti. Un grazie anche per la risposta a tutti gli innumerevoli dubbi che nel corso del lavoro sono emersi; la ringrazio moltissimo anche per il sostegno morale che mi ha dato nei numerosi momenti difficili.*

*Ringrazio i Prof. Ing. Francesco Ubertini e Stefano De Miranda per essermi stati di aiuto nella definizione dell'analisi strutturale dell'arco d'Augusto, ma soprattutto li ringrazio per avermi fornito a suo tempo le basilari nozioni di scienza della costruzioni, le quali sono ritornate ampiamente utili per questa tesi ed altro. Un grazie anche per il modo in cui trasmettete agli studenti la vostra passione per la scienza: migliaia di studenti ve ne sono ora grati, io compreso.*

*Ringrazio il Prof. Ing. Erasmo Viola perché durante le sue lezioni mi ha fatto comprendere fino a che modo viscerale si possa amare il proprio lavoro e la vita, questo fatto rende migliore ogni rapporto umano fra studente e professore, e migliora la comprensione della materia da parte di tutti. Lo ringrazio perché egli funge da modello di saggezza ed umanità, congiunta alla professionalità che si dovrebbe perseguire.*

*Ringrazio il geologo Prof. Alberto Landuzzi per avermi fornito utilissime informazioni ed indicato validi siti internet al riguardo della geomorfologia*

*della zona di Rimini. Lo ringrazio anche per la sua prontezza di risposta e risoluzione dei problemi per via telematica. Senza il suo aiuto non sarei riuscito a trovare informazioni geologiche dell'area prossima all'arco e della pietra che lo riveste.*

*Ringrazio il geologo Carlo Copioli del Comune di Rimini, egli è riuscito a procurarmi gli indispensabili risultati di una prova penetrometrica C.P.T. eseguita nel terreno limitrofo all'arco.*

*Ringrazio Jacopo Del Prete e suo padre per avermi fornito alcune relazioni geologiche del terreno vicino all'arco.*

*Ringrazio la Dott. Ing. Laura Tonni per le sue delucidazioni al riguardo dell'analisi geotecnica del terreno ai piedi dell'arco, in particolare per tutti i consigli circa l'estrazione dei parametri geotecnici da una prova C.P.T. Tutte le formule impiegate nell'analisi del terreno derivano infatti da un libro a me sconosciuto e da lei ritenuto come il meglio esistente.*

*Ringrazio l'Arch. Pier Luigi Foschi (direttore dei Musei comunali di Rimini) perché mi è stato di indispensabile aiuto per la stesura di tutta la parte storica di questa tesi. Egli mi ha fornito la giusta bibliografia per cominciare e poi approfondire su tutto quel che riguarda la storia dell'arco riminese: vicissitudini varie, restauri, rilievi eseguiti, peculiarità, come è stato progettato, costruito e perché, ecc…*

*Ringrazio Stefano Neri, che, oltre ad essermi grande amico pronto a tutto, mi ha aiutato in modo particolare in questa tesi: è venuto a darmi una mano per il rilievo dell'arco, ha sempre seguito con interesse le difficoltà e lo svolgersi di questo lavoro, mi ha prestato il suo PC e mi ha fatto parecchi piaceri. Anche a te dedico quindi questo mio piccolo lavoro.*

*Ringrazio Ivan Grassi per essermi molto amico, ma in questo particolare caso per avermi prestato il suo PC portatile tutte le volte che ne ho avuto bisogno, dando precedenza alla mia tesi piuttosto che ai suoi impegni! Senza di lui ora non sarei qui a scrivere. Per questo la mia dedica va pure a te.*

*Ringrazio il dipartimento di Archeologia di Bologna e la Soprintendenza dei Beni Archeologici dell'Emilia Romagna per avermi prestato i delicatissimi ed antichi libri necessari per descrivere i più piccoli particolari storici dell'arco. Nelle due ricchissime biblioteche ho trovato praticamente ogni dettaglio ed informazione. Grazie mille, con voi mi sono avventurato nell'appassionante storia ed archeologia dell'arco augusteo.*

*Ringrazio la Biblioteca comunale di Rimini (Biblioteca Gambalunghiana) che assieme a quella del dipartimento d'Archeologia mi hanno permesso la scansione d'antiche tavole di rilievo dell'arco realizzate fra 1700 ed oggi.*

*Ringrazio la società "Cava Romana s.p.a." per essere stata l'unica ditta che mi ha fornito esaurienti spiegazioni e dati tecnici al riguardo della pietra di Nabresina Roman Stone che compone il rivestimento dell'arco.*

*Un ringraziamento particolare va al dipartimento ed alle persone del DISTART di topografia, qui ho trovato sia professionalità che umanità.*

*Un ringraziamento speciale è dedicato alla mia famiglia, senza la quale non sarei arrivato dove sono ora. Ringrazio i miei genitori per essersi sempre interessati del mio operato, per aver sostenuto i miei studi sia economicamente che moralmente, per aver creduto nelle mie capacità anche quando non le avevo, per avermi insegnato i più importanti valori umani, per avermi spronato alla determinazione e resistenza, per avermi esortato al miglioramento continuo. Ringrazio mia madre per essersi sempre presa cura di me, non facendomi mancare nulla; ringrazio mio padre per avermi sempre detto che quello che faccio non vale nulla e sono cose che anche i bambini riescono a fare; grazie a lui ho capito che la perfezione non la raggiungerò mai. Forse avrebbe preferito che io diventassi un architetto…ma credo che non gli dispiacerà se sarò comunque laureato. A loro dedico questo mio primo insignificante traguardo.*

*Ringrazio mio fratello Massimo, con il quale ultimamente ho ripreso i contatti da qualche tempo un po' perduti.*

*Ringrazio il mio nonno Ettore, che da piccolo mi ha fatto sognare ingegnere con i suoi regali tipo il trenino, i lego, le costruzioni, gli aeroplani, le macchine, le ruspe e mi ha infuso la sua passione per il disegno e la pittura. Credo che sarebbe felice di vedermi arrivato alla quasi realtà.*

*Ringrazio i miei parenti di Savignano sul Rubicone: mio zio Alfiero e mio nonno Giulio, mia cugina Ramona, i miei zii Carlo e Silvia e mio cugino Marco. Grazie per avermi accudito quando ero bambino! Ora che sono cresciuto dedico a tutti voi questo mio piccolo lavoro.*

*Un ringraziamento va anche a tutti i coetanei che ho conosciuto in questa Facoltà. Essi hanno condiviso con me sofferenze, delusioni e frustrazioni ma anche grandi vittorie, rivincite, momenti di felicità ed amicizia. Grazie a tutti voi!*

*Un ringraziamento speciale va al mio compagno di stanza e di corso Alessandro Vagnetti; la sua presenza ha reso più facile quest'ultimo intenso anno universitario. Lo ringrazio perché è stato un valido compagno di progetti, di stanza e di vita; in lui ho trovato una persona con forte passione per l'ingegneria. Grazie a questo abbiamo spesso discusso di problemi ingegneristici con naturalezza, permettendo la crescita professionale di entrambi.*

*Ringrazio il mio grande amico Amedeo Fabbri: ha reso indimenticabile il primo anno di università; ha sempre creduto nelle mie capacità, fino all'esasperazione, creando anche delle leggende sui miei limiti nella capacità di apprendimento, dicendomi che se voglio posso arrivare a far qualunque cosa. Grazie per questa tua fiducia! Anche a te dedico quindi questo mio misero lavoro. Spero di non averti deluso…*

*Ringrazio l'Ing. Elisa S., oltre che essermi amica, è stata un'efficiente compagna di progetti con cui è stato facile e divertente lavorare; spero di poter tenere il tuo passo e fare nuovamente gruppo con te!*

*Gli stessi ringraziamenti vanno anche a Maurizio B. e Simone P.*

*Ringrazio Gianluca F., Giovanni M., Patrik F., Nausicaa G., Barbara M., la Mary, la Nini, la Dany, Marry, la Cristina P., Giulia C., Enrico C., Laura S. e Eleonora T. Ognuno di loro mi ha insegnato qualcosa, e li ringrazio per la considerazione che hanno di me.*

*Visto che tutte le persone che conosco si aspettano sempre il meglio da me, con questa tesi ho cercato di non deludere nessuna aspettativa. Spero di esserci riuscito, altrimenti quello che mi dicono sono solamente delle belle ed illusorie parole di incoraggiamento.*

*Dicono che gli amici si vedono nel momento del bisogno, è proprio vero! Di solito agisco da solo, ma questa volta non ho potuto fare a meno di chiedere aiuto. Molte più persone di quanto immaginassi si sono offerte di darmi una mano, vi ringrazio di cuore!*

**Università degli Studi di Bologna**

**FACOLTÀ DI INGEGNERIA**

**Corso di Laurea in Ingegneria Civile**

**Tesi di Laurea in**
**FOTOGRAMMETRIA L**

# RILEVAMENTO FOTOGRAMMETRICO DIGITALE NON CONVENZIONALE ED ANALISI STRUTTURALE AGLI ELEMENTI FINITI DELL'ARCO D'AUGUSTO DI RIMINI

Tesi di Laurea di:
**MAURIZIO SERPIERI**

Relatore:
**Prof. ANTONIO ZANUTTA**

Co-relatori:
**Prof. Ing. FRANCESCO UBERTINI**
**Ing. SIMONETTA MONTAGUTI**
**Prof. Ing. STEFANO DE MIRANDA**

Tavola n. 1

ARCO D'AUGUSTO DI RIMINI

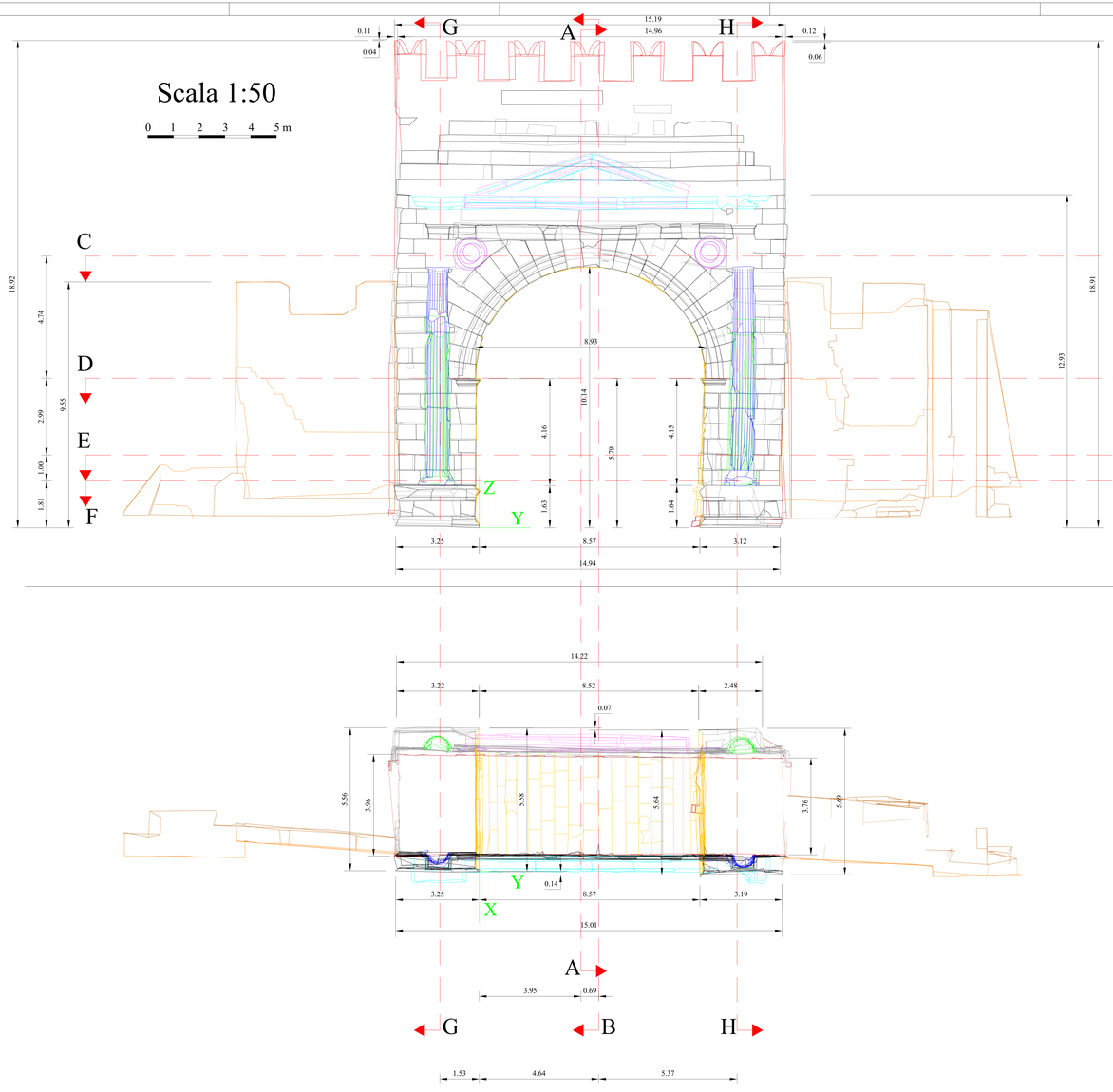
**PROIEZIONI ORTOGONALI DELL'INTERO ARCO**

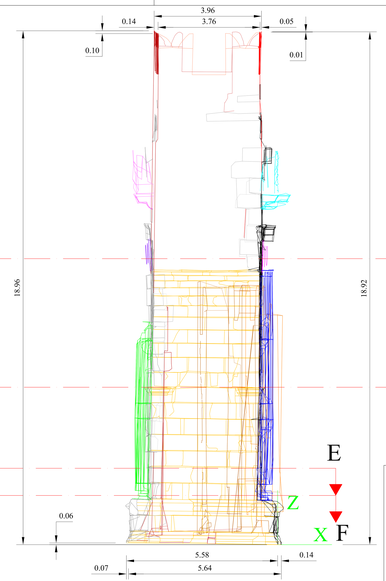
Scala 1:50

**Anno Accademico 2004 / 2005**

Scala 1:50

0 1 2 3 4 5 m




# LEGENDA

Pietra di Nabresina ROMAN STONE di provenienza iulio-istriana ( brecciola calcarea fossilifera )

Muratura ai lati dell'arco così com'è da dopo lo sventramento della zona intorno al monumento avvenuta nel 1937

Muratura e merlatura ghibellina datata a prima del XIII secolo D.C.

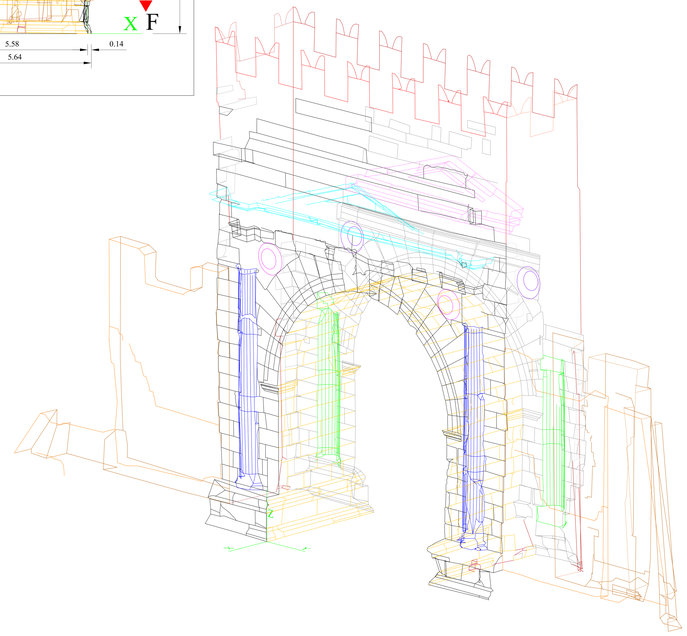
Colonne

Timpano

Clipei

Scala 1:50

0 1 2 3 4 5 m



# LEGENDA

Pietra di Nabresina ROMAN STONE di provenienza iulio-istriana
( brecciola calcarea fossilifera )

Muratura ai lati dell'arco così com'è da dopo lo sventramento
della zona intorno al monumento avvenuta nel 1937

Muratura e merlatura ghibellina datata a prima del XIII secolo D.C.

Colonne

Timpano

Clipei


**Università degli Studi di Bologna**

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di Laurea in Ingegneria Civile

Tesi di Laurea in
FOTOGRAMMETRIA I

**RILEVAMENTO FOTOGRAMMETRICO DIGITALE NON CONVENZIONALE ED ANALISI STRUTTURALE AGLI ELEMENTI FINITI DELL'ARCO D'AUGUSTO DI RIMINI**

Tesi di Laurea di:
MAURIZIO SERPIERI

Relatore:
Prof. ANTONIO ZANUTTA

Correlatori:
Prof. Ing. FRANCESCO GUERRA
Ing. SIMONETTA MONTAGUTI
Prof. Ing. STEFANO DE MIRANDA


Tavola n. 2

ARCO D'AUGUSTO DI RIMINI

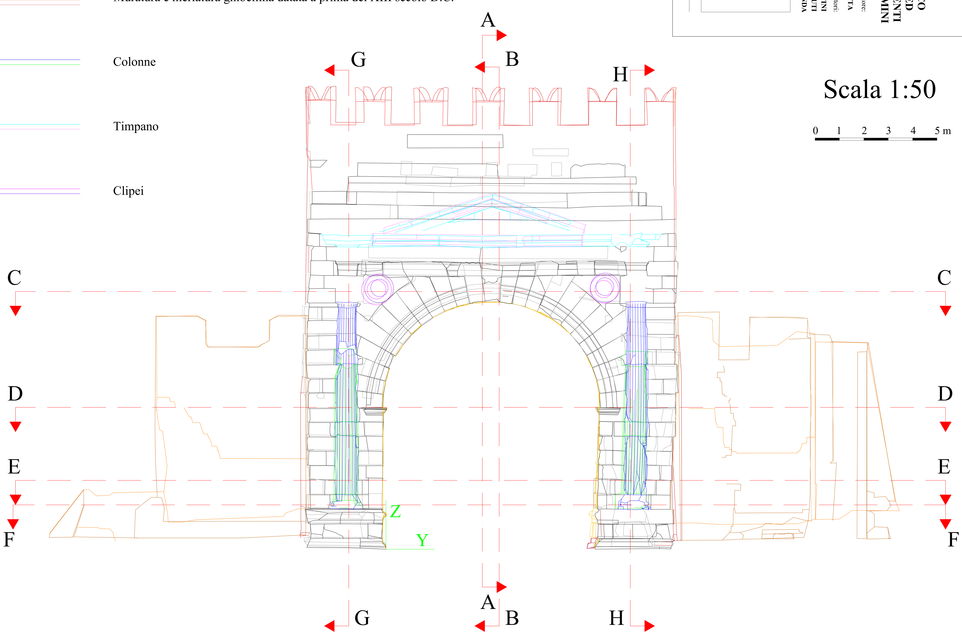
**SEZIONI VERTICALI ED ORIZZONTALI**

Scala 1:50

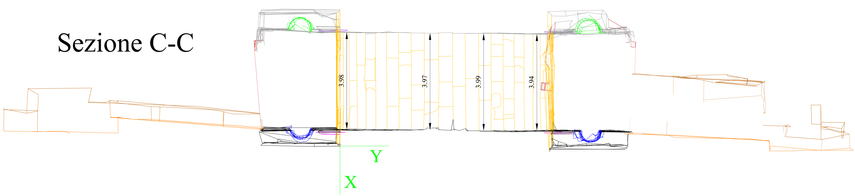
Anno Accademico 2004 / 2005

Scala 1:50

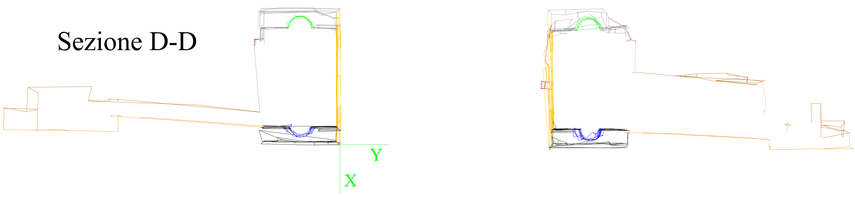
0 1 2 3 4 5 m



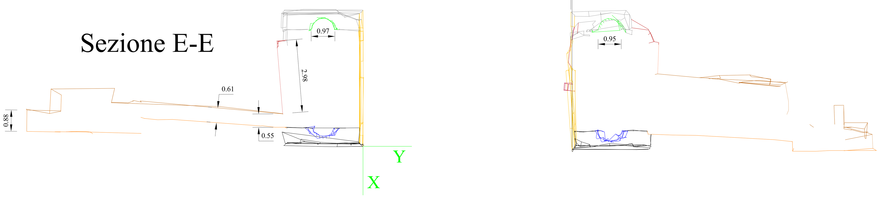

## Sezione C-C



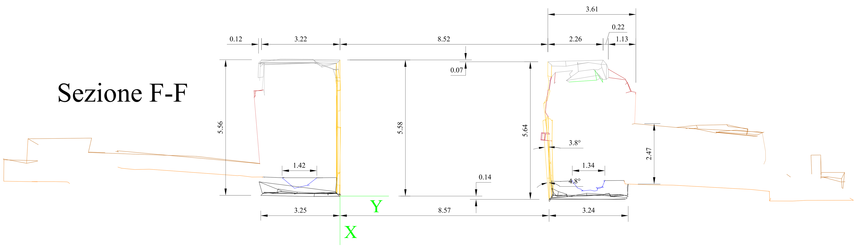

## Sezione D-D

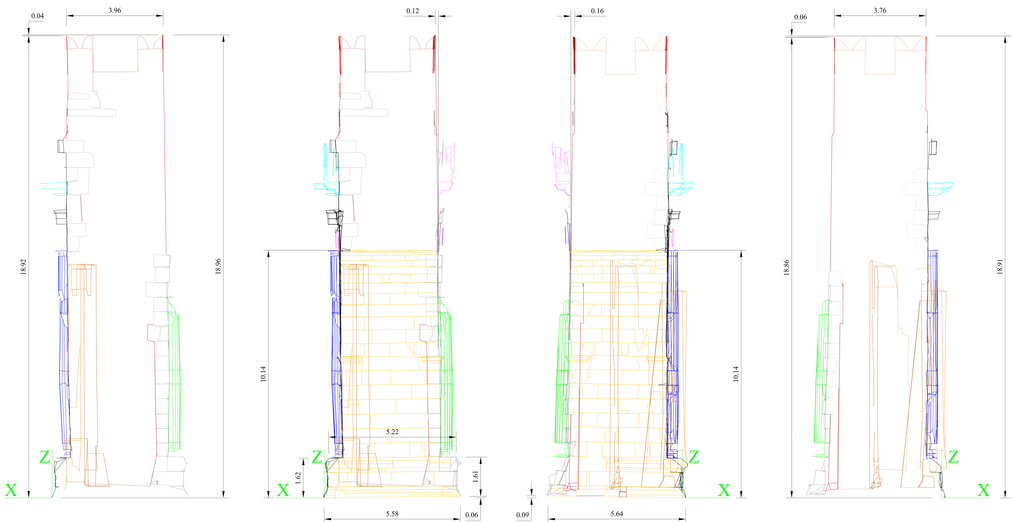



## Sezione E-E




## Sezione F-F




Sezione G-G

Sezione B-B

Sezione A-A

Sezione H-H

**Università degli Studi di Bologna**

**FACOLTÀ DI INGEGNERIA**

**Corso di Laurea in Ingegneria Civile**

**Tesi di Laurea in**
**FOTOGRAMMETRIA L**

# RILEVAMENTO FOTOGRAMMETRICO DIGITALE NON CONVENZIONALE ED ANALISI STRUTTURALE AGLI ELEMENTI FINITI DELL'ARCO D'AUGUSTO DI RIMINI


Tesi di Laurea di:

**MAURIZIO SERPIERI**

Relatore:

**Prof. ANTONIO ZANUTTA**

Co-relatori:

**Prof. Ing. FRANCESCO UBERTINI**
**Ing. SIMONETTA MONTAGUTI**
**Prof. Ing. STEFANO DE MIRANDA**


Tavola n. 3

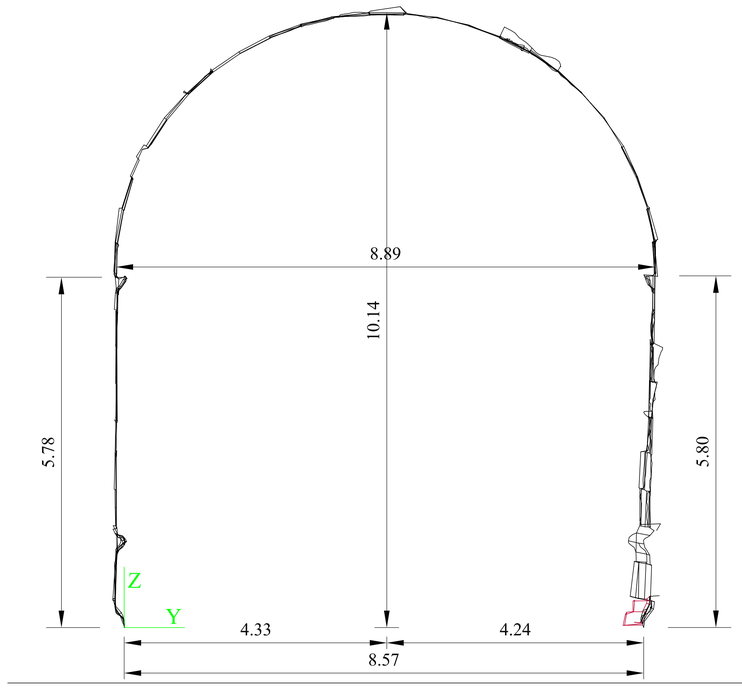
ARCO D'AUGUSTO DI RIMINI

**PROIEZIONI ORTOGONALI DELL'INTRADOSSO DELL'ARCATA**

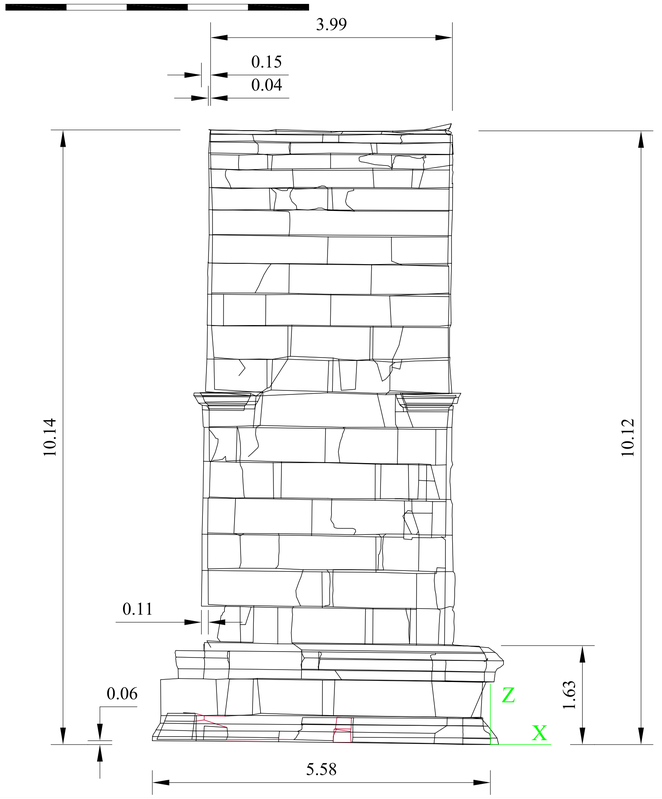
Scala 1:50

**Anno Accademico 2004 / 2005**

Scala 1:50

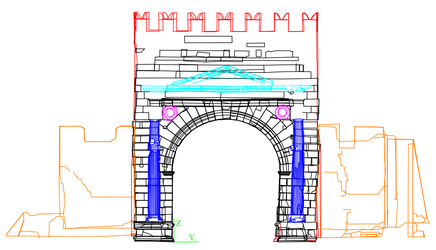


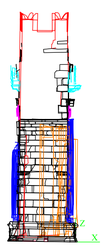

0 1 2 3 4 5 m

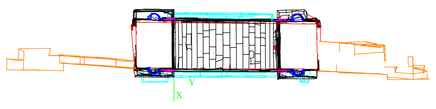


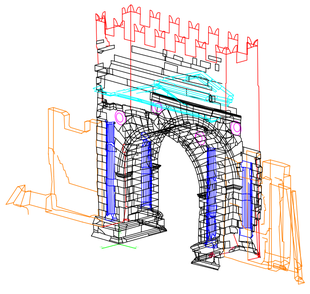

Scala 1:250

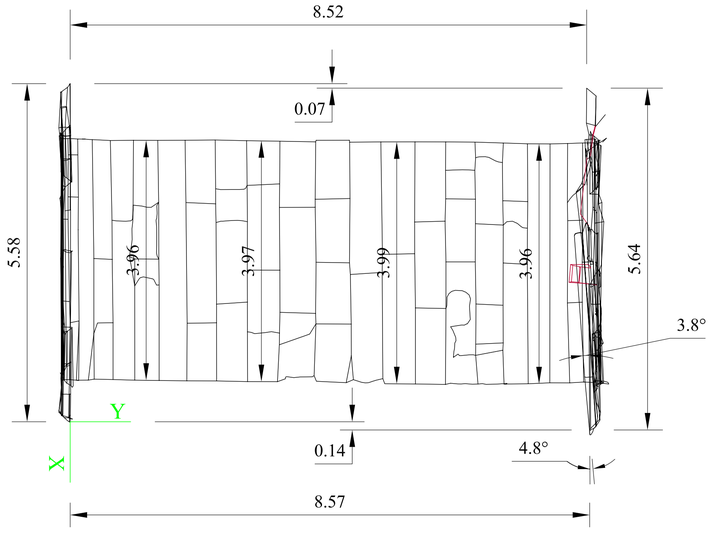
0 5 10 m

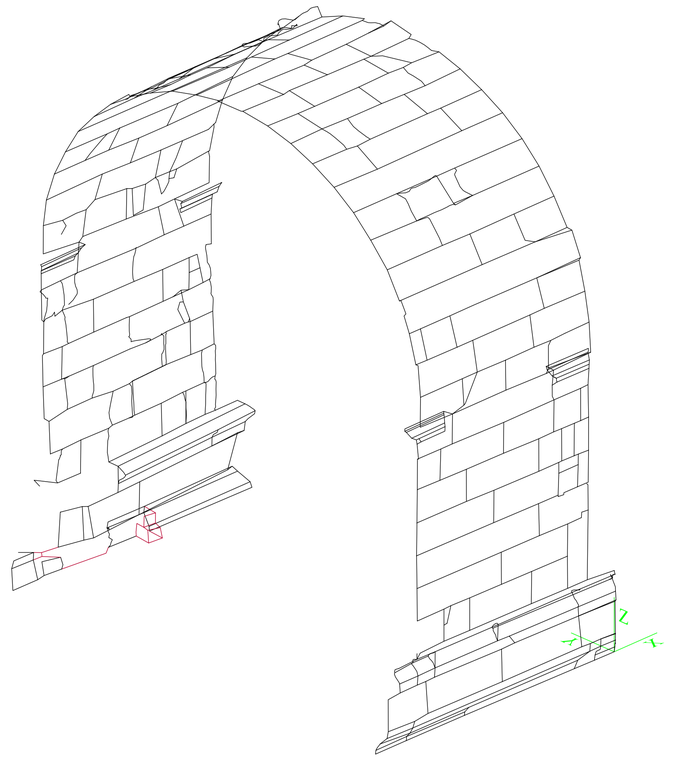










**Università degli Studi di Bologna**

**FACOLTÀ DI INGEGNERIA**

**Corso di Laurea in Ingegneria Civile**

**Tesi di Laurea in**
**FOTOGRAMMETRIA L**

# RILEVAMENTO FOTOGRAMMETRICO DIGITALE NON CONVENZIONALE ED ANALISI STRUTTURALE AGLI ELEMENTI FINITI DELL'ARCO D'AUGUSTO DI RIMINI


Tesi di Laurea di:

**MAURIZIO SERPIERI**

Relatore:

**Prof. ANTONIO ZANUTTA**

Co-relatori:

**Prof. Ing. FRANCESCO UBERTINI**
**Ing. SIMONETTA MONTAGUTI**
**Prof. Ing. STEFANO DE MIRANDA**


Tavola n. 4

ARCO D'AUGUSTO DI RIMINI

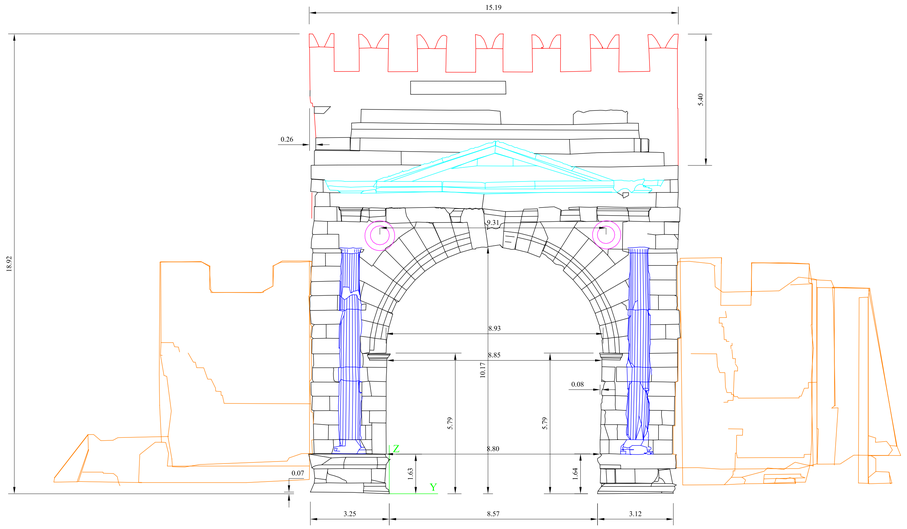
**PROIEZIONI ORTOGONALI DELLA FACCIATA VERSO ROMA**

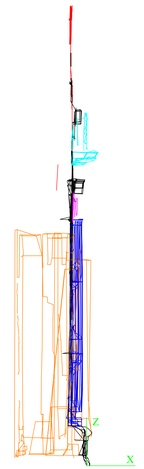
Scala 1:100

**Anno Accademico 2004 / 2005**

Scala 1:100

0 1 2 3 4 5 m 6 7 8 9 10 m



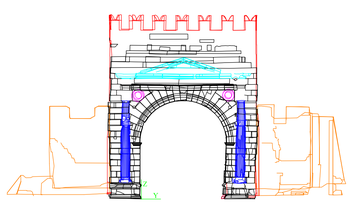



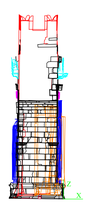

## LEGENDA

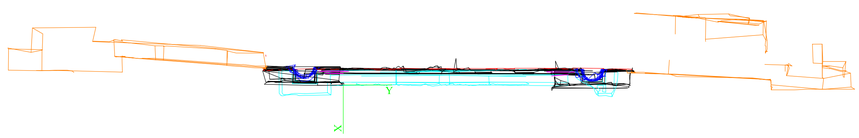
- Pietra di Nabresina ROMAN STONE di provenienza iulio-istriana ( brecciola calcarea fossilifera )
- Muratura ai lati dell'arco cosi com'è da dopo lo sventramento della zona intorno al monumento avvenuta nel 1937
- Muratura e merlatura ghibellina datata a prima del XIII secolo D.C.
- Colonne
- Timpano
- Clipei

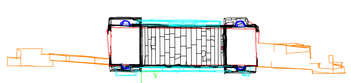
Scala 1:250

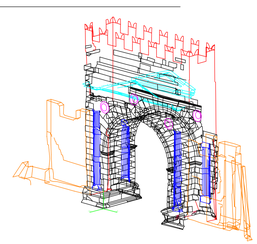
0 5 10 m

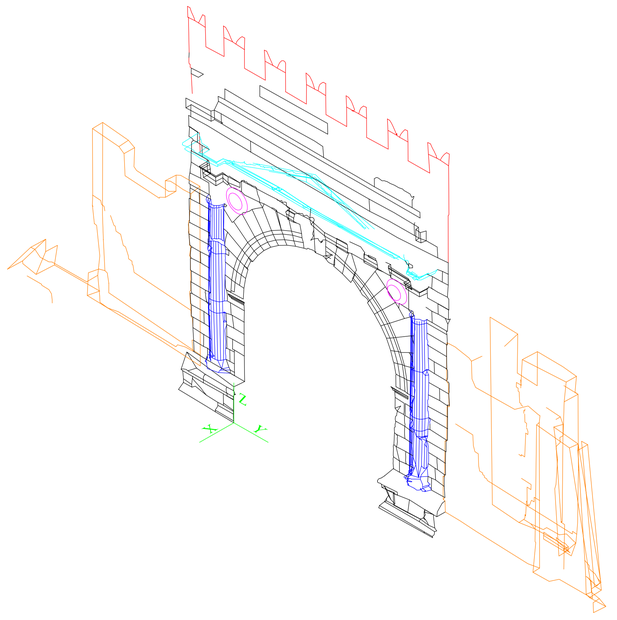












**Università degli Studi di Bologna**

**FACOLTÀ DI INGEGNERIA**

**Corso di Laurea in Ingegneria Civile**

**Tesi di Laurea in**
**FOTOGRAMMETRIA L**

# RILEVAMENTO FOTOGRAMMETRICO DIGITALE NON CONVENZIONALE ED ANALISI STRUTTURALE AGLI ELEMENTI FINITI DELL'ARCO D'AUGUSTO DI RIMINI


Tesi di Laurea di:

**MAURIZIO SERPIERI**

Relatore:

**Prof. ANTONIO ZANUTTA**

Co-relatori:

**Prof. Ing. FRANCESCO UBERTINI**
**Ing. SIMONETTA MONTAGUTI**
**Prof. Ing. STEFANO DE MIRANDA**


Tavola n. 5

ARCO D'AUGUSTO DI RIMINI

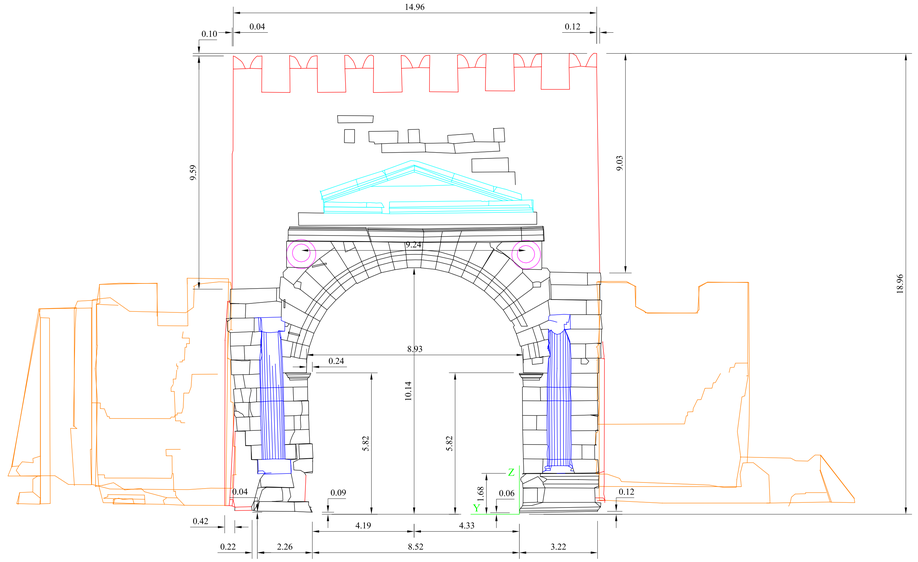
**PROIEZIONI ORTOGONALI DELLA FACCIATA VERSO RIMINI**

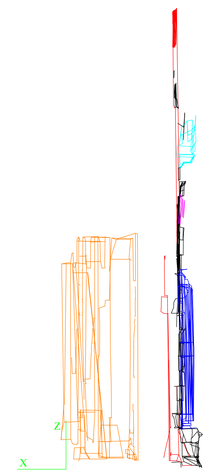
Scala 1:100

**Anno Accademico 2004 / 2005**

Scala 1:100

0 1 2 3 4 5 m 6 7 8 9 10 m



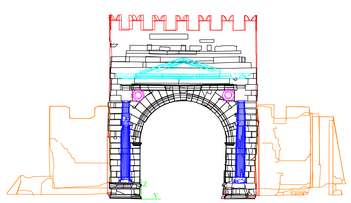



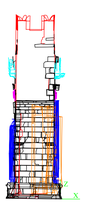

## LEGENDA

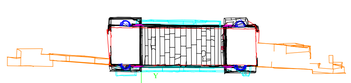
- Pietra di Nabresina ROMAN STONE di provenienza iulio-istriana ( brecciola calcarea fossilifera )
- Muratura ai lati dell'arco così com'è da dopo lo sventramento della zona intorno al monumento avvenuta nel 1937
- Muratura e merlatura ghibellina datata a prima del XIII secolo D.C.
- Colonne
- Timpano
- Clipei

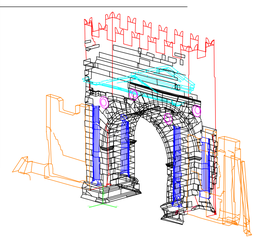
Scala 1:250

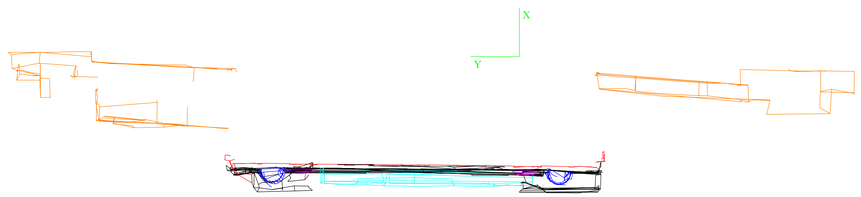
0 5 10 m

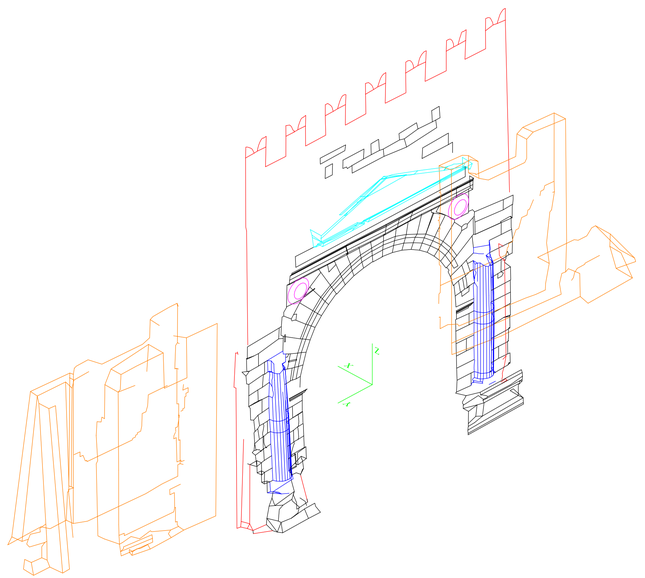




**Università degli Studi di Bologna**

**FACOLTÀ DI INGEGNERIA**

**Corso di Laurea in Ingegneria Civile**

**Tesi di Laurea in**
**FOTOGRAMMETRIA L**

# RILEVAMENTO FOTOGRAMMETRICO DIGITALE NON CONVENZIONALE ED ANALISI STRUTTURALE AGLI ELEMENTI FINITI DELL'ARCO D'AUGUSTO DI RIMINI

Tesi di Laurea di:
**MAURIZIO SERPIERI**

Relatore:
**Prof. ANTONIO ZANUTTA**

Co-relatori:
**Prof. Ing. FRANCESCO UBERTINI**
**Ing. SIMONETTA MONTAGUTI**
**Prof. Ing. STEFANO DE MIRANDA**

Tavola n. 6

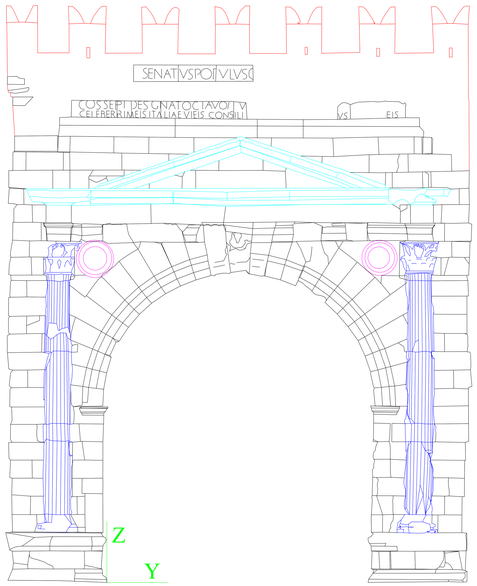
ARCO D'AUGUSTO DI RIMINI

**PROSPETTI DELL'ARCO**

Scala 1:50

**Anno Accademico 2004 / 2005**

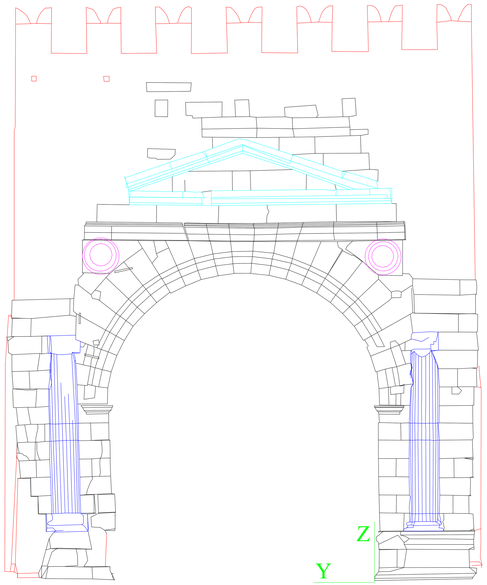
## Prospetto verso Roma




Scala 1:50

0 1 2 3 4 5 m

## Prospetto verso Rimini




## LEGENDA

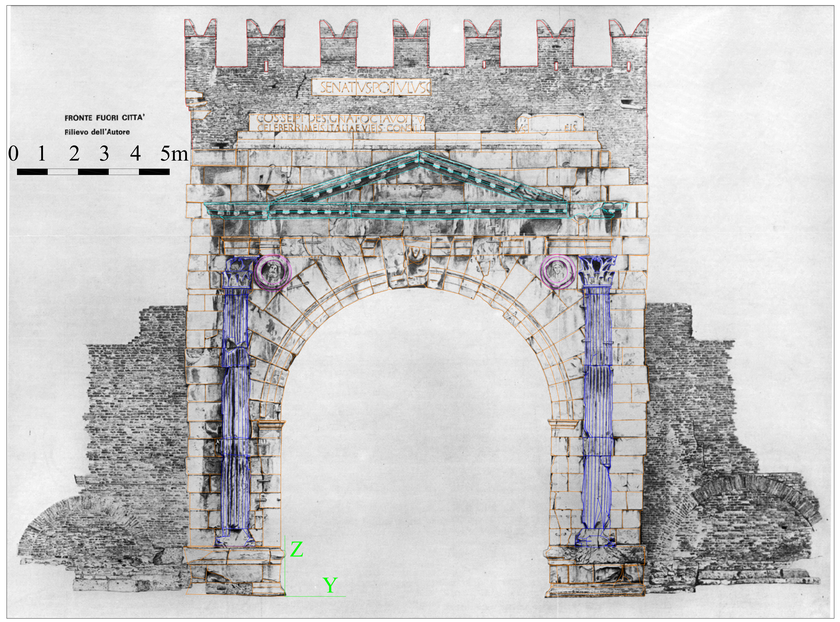
Pietra di Nabresina ROMAN STONE
di provenienza iulio-istriana
( brecciola calcarea fossilifera )

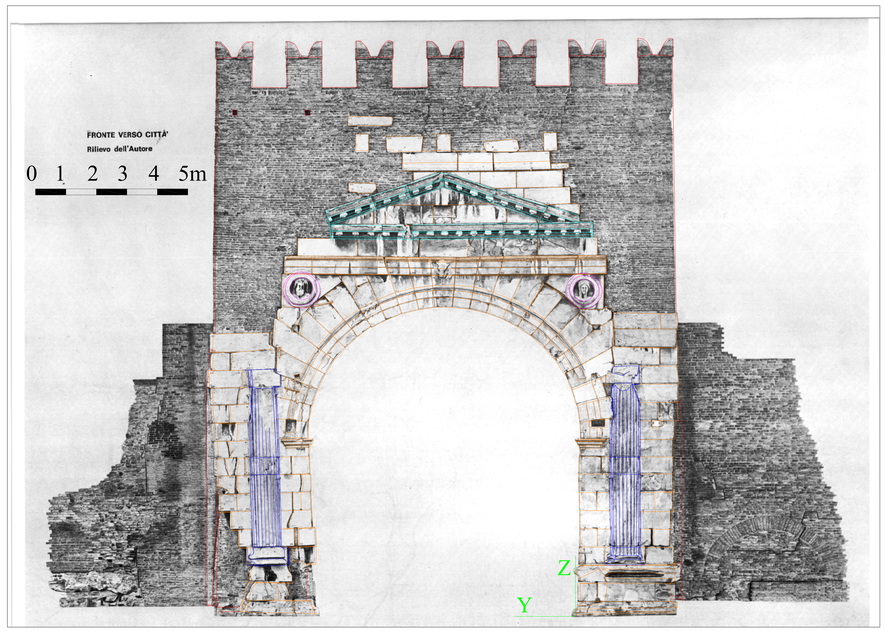
Muratura e merlatura ghibellina
datata a prima del XIII secolo D.C.

Colonne

Timpano

Clipei



**Università degli Studi di Bologna**

**FACOLTÀ DI INGEGNERIA**

**Corso di Laurea in Ingegneria Civile**

**Tesi di Laurea in**
**FOTOGRAMMETRIA L**

# RILEVAMENTO FOTOGRAMMETRICO DIGITALE NON CONVENZIONALE ED ANALISI STRUTTURALE AGLI ELEMENTI FINITI DELL'ARCO D'AUGUSTO DI RIMINI

Tesi di Laurea di:
**MAURIZIO SERPIERI**

Relatore:
**Prof. ANTONIO ZANUTTA**

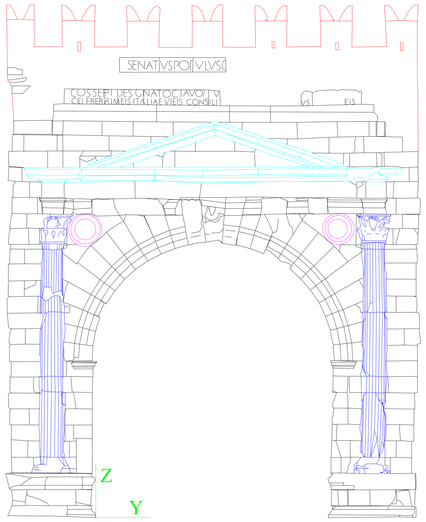
Co-relatori:
**Prof. Ing. FRANCESCO UBERTINI**
**Ing. SIMONETTA MONTAGUTI**
**Prof. Ing. STEFANO DE MIRANDA**

Tavola n. 7

ARCO D'AUGUSTO DI RIMINI
**ORTOFOTO**
**E**
**MODELLO VETTORIALE**
Scala 1:50

**Anno Accademico 2004 / 2005**

## Prospetto verso Roma




## Scala 1:50

0 1 2 3 4 5 m

## LEGENDA

Pietra di Nabresina ROMAN STONE di provenienza iulio-istriana
( brecciola calcarea fossilifera )

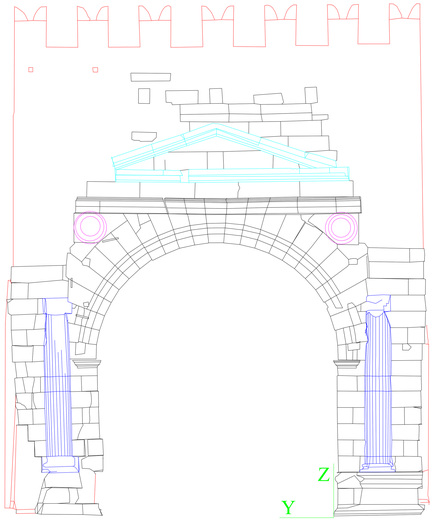
Muratura e merlatura ghibellina datata a prima del XIII secolo D.C.

Colonne

Timpano

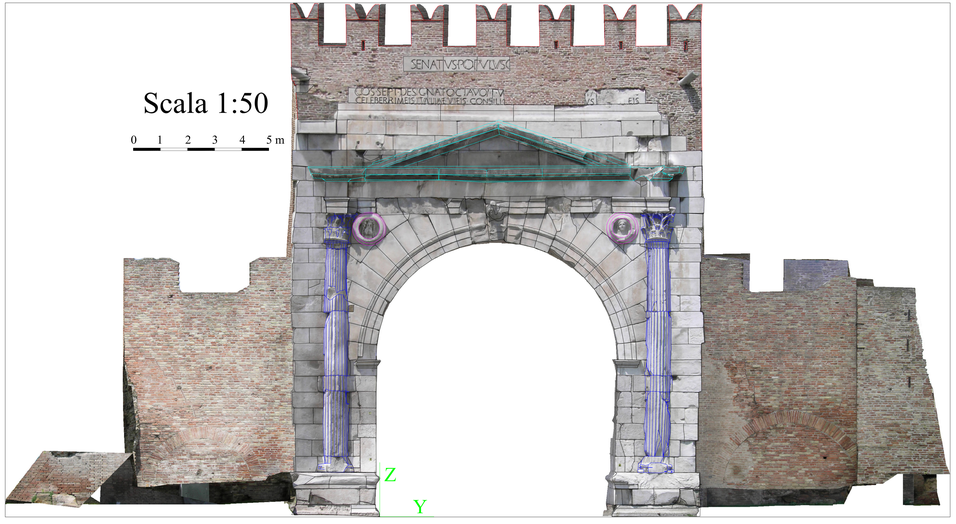
Clipei

## Prospetto verso Rimini




## Ortofoto ovest

## Ortofoto del DSM dell'arco sul piano YZ con sovrapposto il modello vettoriale




## Ortofoto est

## Ortofoto del DSM dell'arco sul piano YZ con sovrapposto il modello vettoriale

**Università degli Studi di Bologna**

**FACOLTÀ DI INGEGNERIA**

**Corso di Laurea in Ingegneria Civile**

**Tesi di Laurea in**
**FOTOGRAMMETRIA L**

# RILEVAMENTO FOTOGRAMMETRICO DIGITALE NON CONVENZIONALE ED ANALISI STRUTTURALE AGLI ELEMENTI FINITI DELL'ARCO D'AUGUSTO DI RIMINI

Tesi di Laurea di:
**MAURIZIO SERPIERI**

Relatore:
**Prof. ANTONIO ZANUTTA**

Co-relatori:
**Prof. Ing. FRANCESCO UBERTINI**
**Ing. SIMONETTA MONTAGUTI**
**Prof. Ing. STEFANO DE MIRANDA**

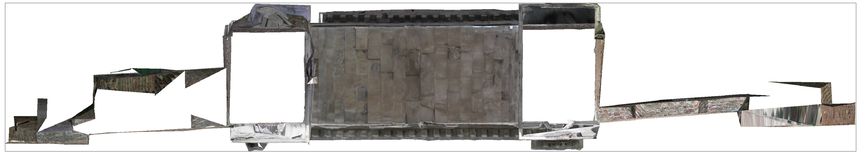
Tavola n. 8

ARCO D'AUGUSTO DI RIMINI

**ORTOFOTO**

Scala 1:50

**Anno Accademico 2004 / 2005**



Ortofoto del DSM dell'arco sul piano XY

Scala 1:50

0 1 2 3 4 5 m

Ortofoto del DSM dell'arco sul piano XY

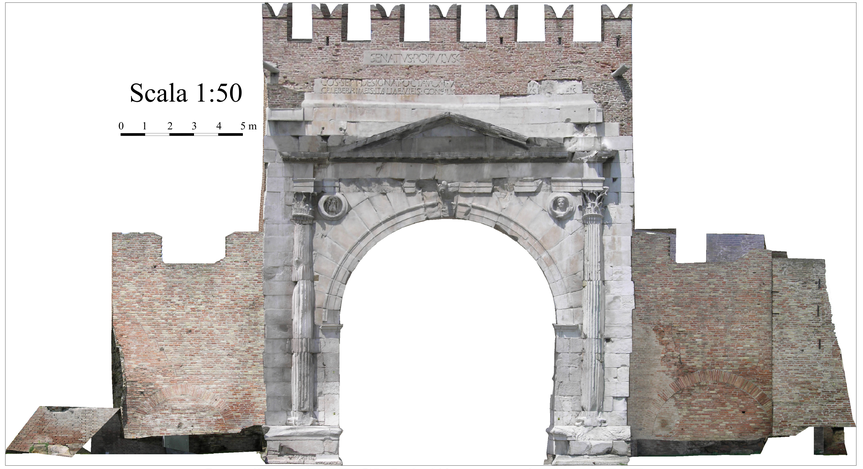
Ortofoto est

Scala 1:50

0 1 2 3 4 5 m

Ortofoto del DSM dell'arco sul piano YZ

Ortofoto ovest



Scala 1:50

0 1 2 3 4 5 m

Ortofoto del DSM dell'arco sul piano YZ