

Alma Mater Studiorum
Università degli Studi di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea in Astronomia

Dipartimento di Fisica e Astronomia

Emissione di Corpo Nero
e applicazioni astrofisiche

Elaborato Finale

Relatore:

Prof. Daniele Dallacasa



Candidato:

Carlo Cannarozzo

Matricola: 627108

Sessione - I Autunnale
Anno Accademico 2013/2014

“Nature and Nature’s laws lay hid in night:
God said *Let Newton be!* and all was light.”
Alexander Pope (1688-1744)

“It did not last: the Devil howling *Ho!*
Let Einstein be! restored the status quo.”
Sir John Collings Squire (1884-1958)

Abstract

“Per me la Fisica costituisce un sistema perfettamente armonioso ed essenzialmente completo. All’orizzonte scorgo solamente due piccole nubi oscure: il risultato negativo dell’esperienza di Michelson e Morley e l’insufficienza della legge di Rayleigh e Jeans se applicata alle frequenze dell’ultravioletto”

Con questa frase William Thomson Kelvin delineava, sul finire dell’800, i tratti di una Fisica fondata su solide basi che consentisse di spiegare i fenomeni di natura meccanica per mezzo delle Leggi della Dinamica di Newton e descrivesse le proprietà del campo elettromagnetico grazie alle Equazioni di Maxwell. Tuttavia, come riferisce lo stesso Lord Kelvin, rimaneva qualcosa di inspiegato: i due risultati mancanti sino ad allora diedero origine ad una vera e propria rivoluzione nel campo della Fisica. Grazie all’esperienza di Michelson e Morley, in disaccordo con quanto previsto dalla Meccanica Classica, Albert Einstein nel 1905 fu in grado di estendere i risultati della Relatività Galileiana ad eventi che coinvolgono velocità prossime a quella della luce; dall’altro lato, Max Planck nel 1900 pose le basi della Meccanica Quantistica, ipotizzando la quantizzazione dell’Energia, studiando la radiazione di Corpo Nero.

Definendo il *Corpo Nero* come un oggetto ideale la cui superficie è in grado di assorbire qualsiasi radiazione elettromagnetica incidente su di esso, in questo compendio saranno esposti il processo che ha indotto lo scienziato tedesco Gustav Robert Kirchhoff all’idealizzazione di tale concetto, la soluzione della quantizzazione di Planck per ovviare al fenomeno della Catastrofe Ultravioletta derivante dall’approccio di Rayleigh e Jeans e la determinazione dello Spettro di Corpo Nero con le relative proprietà e Leggi empiriche che ne regolano l’andamento.

Verranno inoltre presentati alcuni esempi astrofisici reali le cui emissioni rispecchiano l’andamento del Corpo Nero e se ne discuteranno le relative caratteristiche che li discostano dall’oggetto teorico.

Indice

1	Il Corpo Nero	1
1.1	Introduzione	1
1.1.1	Teorema di Kirchhoff	1
1.2	Due leggi empiriche	3
1.2.1	Legge di Stefan-Boltzmann	3
1.2.2	Legge dello spostamento di Wien	3
1.3	L'idea di Planck	5
1.3.1	Determinazione dello spettro di Corpo Nero	5
1.4	Dalla <i>catastrofe ultravioletta</i> ai <i>quanti</i>	8
1.4.1	L'approccio classico di Rayleigh e Jeans	8
1.4.2	La quantizzazione dell'Energia e la costante h	9
2	Applicazioni astrofisiche	10
2.1	Le stelle	10
2.2	I pianeti	12
2.3	La radiazione cosmica di fondo <i>CMBR</i>	13
2.4	I Nuclei Galattici Attivi <i>AGN</i>	15
	Bibliografia	i

Capitolo 1

Il Corpo Nero

1.1 Introduzione

Si definisce **Corpo Nero** un oggetto la cui superficie è in grado di assorbire qualunque radiazione elettromagnetica incidente: questa eccita le pareti del sistema che, pensate come oscillatori armonici, a loro volta emettono radiazione.

Comprendere come l'Energia trasportata dalla radiazione elettromagnetica fosse in grado di trasformarsi in calore e viceversa, rappresentò un punto cardine della Fisica sul finire del XIX secolo.

Innanzitutto è importante definire due grandezze fondamentali per la trattazione del problema: *il potere assorbente* P_{ass} ed *il potere emissivo* P_{em} di un corpo. Assegnate una frequenza ν ed una temperatura T , si definisce potere assorbente P_{ass} il rapporto tra la potenza elettromagnetica assorbita¹ dal corpo e quella incidente su di esso: se ne deduce che tale rapporto è minore o al più pari ad uno, quando tutta la radiazione viene assorbita:

$$P_{ass}(\nu, T) = \frac{\text{potenza e.m. assorbita}}{\text{potenza e.m. incidente}} \leq 1 \quad (1.1)$$

Il potere emissivo P_{em} , invece, rappresenta la potenza emessa per unità di superficie dal corpo, a data frequenza ν e temperatura T .

1.1.1 Teorema di Kirchhoff

Nel 1860 Gustav Kirchhoff, osservando le “righe” nere presenti negli spettri solari raccolti da Fraunhofer, ipotizzò che un corpo è in grado di assorbire la radiazione che emette. Egli dimostrò che ad una data temperatura e ad una data frequenza (o lunghezza d'onda, data la relazione $\lambda = c/\nu$) il rapporto tra P_{em} e P_{ass} è lo stesso per tutti i corpi, ossia il raggiungimento dell'equilibrio termico di due corpi posti a contatto tra loro è possibile se e solo se da tale rapporto ne risulti una funzione universale $f(\nu, T)$, indipendente dalla natura stessa dei corpi:

$$\frac{P_{em}}{P_{ass}} = f(\nu, T) \quad (1.2)$$

¹ La radiazione elettromagnetica è assorbita quando rientra a far parte dell'Energia termica di un corpo.

Kirchhoff definì Corpo Nero un corpo il cui potere assorbente P_{ass} è pari a 1, per ogni temperatura e frequenza: da ciò ne deriva che la funzione $f(\nu, T)$ eguaglia il potere emissivo P_{em} .

Il fisico tedesco dimostrò inoltre che, in condizioni di equilibrio termico, la radiazione presente in una cavità avente pareti opache è della stessa entità di quella di un Corpo Nero alla medesima temperatura: ciò consentiva la realizzazione in laboratorio di un apparato assimilabile ad un Corpo Nero, costituito da una cavità isoterma avente un foro (di dimensione trascurabile rispetto all'intero sistema) tale che non perturbi sensibilmente l'oggetto.

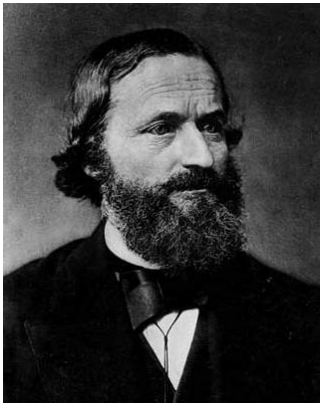


Figura 1.1: Gustav Robert Georg Kirchhoff (1824 – 1887).

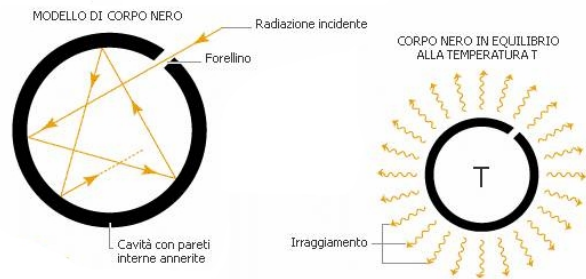


Figura 1.2: Cavità isoterma.

La radiazione in ingresso viene (quasi del tutto) assorbita, ossia il $P_{ass} \approx 1$; la radiazione uscente data la piccola ampiezza del foro, che non altera in modo apprezzabile l'equilibrio interno, rappresenta un campione di quella prodotta dal raggiungimento dell'equilibrio termico con le pareti interne. L'idea che delle cavità isoterme potessero essere impiegate per lo studio della radiazione di Corpo Nero fu confermata da alcuni studi accurati condotti da Christiansen nel 1884 e ciò consentì la realizzazione nel 1895, ad opera di Wien, Lummer e Kurlbaum, del primo apparato da laboratorio.

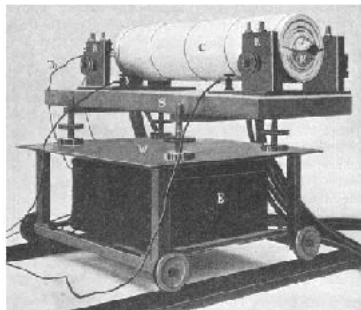


Figura 1.3: Esperimento sul Corpo Nero di Lummer e Kurlbaum (1898): cilindro di platino con tubo in ceramica.

1.2 Due leggi empiriche

Prima della determinazione dello spettro di Corpo Nero, vengono qui di seguito riportate due leggi empiriche ricavate dalle osservazioni sperimentali. Dal tentativo di giustificare tali leggi, quella di Stefan-Boltzmann e quella di Wien, si passò dalla Fisica Classica, basata sulla meccanica newtoniana e sull'elettromagnetismo, con la quale Rayleigh e Jeans provarono a descrivere l'andamento dello spettro ricadendo però in un fenomeno denominato **catastrofe ultravioletta**, alla Meccanica Quantistica quando, nel 1900, Max Planck ipotizzò che la radiazione elettromagnetica potesse essere emessa da oscillatori armonici presenti sulle pareti della cavità per mezzo di pacchetti di Energia, in quantità discrete, detti **quanti**.

1.2.1 Legge di Stefan-Boltzmann

Nel 1879, il fisico sloveno Josef Stefan scoprì che la **radianza spettrale** $R_T(\nu)$, integrata su tutto lo spettro di frequenze, ossia l'Energia erogata per unità di superficie ed unità di tempo, è proporzionale alla quarta potenza della temperatura T :

$$R(T) = \int_0^{+\infty} R_T(\nu) d\nu = \sigma T^4 \quad (1.3)$$

Ad una data temperatura T , dalla Legge di Planck si può ricavare la legge di *S-B*, integrando sull'intero spettro di frequenze.

I primi risultati circa la legge empirica da parte di Stefan furono approssimativi, in quanto i dati a sua disposizione non consentivano di trarre conclusioni certe: egli infatti fece affidamento su alcuni valori sperimentali ottenuti da Tyndall con l'utilizzo di fili di platino incandescente² (lontanamente comparabili ad un Corpo Nero ideale).

Questa legge venne dimostrata teoricamente da Ludwig Boltzmann nel 1884³, da cui il nome *Legge di Stefan-Boltzmann*⁴.

1.2.2 Legge dello spostamento di Wien

La legge di Wien mette in evidenza come la densità di Energia emessa in funzione della lunghezza d'onda λ di un Corpo Nero ad una data temperatura, presenti un massimo caratteristico che si sposta, al variare di T .

Wilhelm Wien, nel 1893, dimostrò che la densità di Energia della radiazione elettromagnetica contenuta in una cavità isoterma è data dalla relazione:

$$u(\nu, T) = \nu^3 f(\nu/T) \quad (1.4)$$

² Risultati ben più consistenti si ottennero a partire dal 1897 ad opera di Lummer, Mendenhall, Paschen, Pringsheim e Saunders.

³ Nello stesso anno, Boltzmann generalizzò la legge di Stefan, esclusivamente rigorosa per i Corpi Neri, a qualsiasi sorgente di radiazione, detta **Corpo Grigio**, la cui radianza è $R = \varepsilon\sigma T^4$, con ε *emissività* del corpo, tale che $0 < \varepsilon < 1$. È possibile inoltre, considerando l'intera superficie S , determinarne la *potenza irradiata* $P = S\varepsilon\sigma T^4$.

⁴ Costante di S-B: $\sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^2} = 5.67 \times 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-4}$.

Da questa relazione, Wien ne trasse la legge di spostamento del picco di distribuzione che è data dall'espressione:

$$\lambda_{max}T = 2897 \times 10^{-1} cm K \quad (1.5)$$

Come verrà mostrato in seguito, la legge di Wien rappresentò un'evidenza sperimentale della validità del modello di Planck, in contrasto al modello di Rayleigh-Jeans che non prevede alcuna presenza di massimi nello spettro.

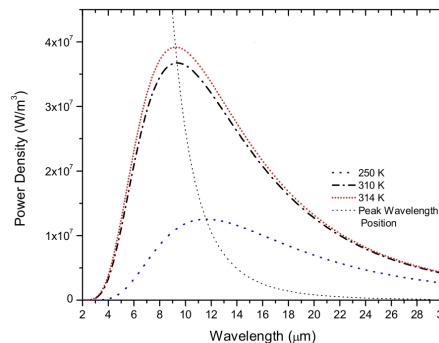


Figura 1.4: Legge dello spostamento di Wien.

La legge di spostamento, può essere anche riscritta in funzione della frequenza ν , nel seguente modo:

$$\nu_{max}/T = 5.878 \times 10^{10} s^{-1} K^{-1} \quad (1.6)$$

Calcolo dello spettro dalla legge di Wien

Nel 1896, il fisico tedesco pubblicò un articolo nel quale mostrava come ottenne il risultato (1.4). Partendo dal presupposto che per gli atomi e le molecole presenti in un solido che emette radiazione di Corpo Nero⁵ vale la **legge di distribuzione di Maxwell-Boltzmann**⁶:

$$f(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\beta m v^2/2} \quad \text{con} \quad \beta := \frac{1}{kT} \quad (1.7)$$

Egli suppose che la frequenza e l'intensità della radiazione dipendessero esclusivamente dalla velocità. Imponendo quindi la condizione stabilita dalla (1.4), ottenne la seguente distribuzione rispettivamente per le frequenze e le lunghezze d'onda:

$$u(\nu, T) = f(\nu)e^{g(\nu)/T} \Rightarrow u(\nu, T) = a\nu^3 e^{-b\nu/T} \quad ; \quad u(\lambda, T) = \frac{a'}{\lambda^5} e^{b'\nu/T} \quad (1.8)$$

L'andamento di tale distribuzione risultò essere in buon accordo con i dati sperimentali di Paschen. Da questi risultati, Planck volle ricavarne una più rigorosa deduzione: si può notare infatti che per lunghezze d'onda grandi (o frequenze piccole) vi è un discostamento dall'andamento reale della curva.

Approssimazione di Wien

$$\text{Fotoni con alta Energia: } h\nu \gg kT \implies I(\nu, T) \approx \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

⁵ Si ricordi che un qualunque corpo, ad una temperatura $T \neq 0$ K, emette radiazione elettromagnetica, per via dell'agitazione termica degli atomi che costituiscono il corpo stesso.

⁶ Il presupporre la *M-B* come legge che descriva il comportamento di atomi e molecole all'interno di un corpo solido, rappresenta, secondo la Teoria cinetica dei gas, la condizione di equilibrio di un processo originatosi da condizioni del tutto arbitrarie ed irreversibile.

Costante di Boltzmann: $k = 1,3806488(13) \times 10^{-23} erg K^{-1}$.

1.3 L'idea di Planck

L'idea alla base del modello sviluppato dal tedesco Karl Ernst Ludwig Marx Planck, detto Max, all'inizio del '900, fu l'introduzione di oscillatori armonici che costituissero le pareti di una cavità isoterma in grado di scambiare Energia con l'ambiente per mezzo della radiazione elettromagnetica: ciò era consentito dal fatto che la radiazione di Corpo Nero è indipendente dal materiale di cui è costituita la cavità.

Come già detto in precedenza, attraverso un processo di irreversibilità, qualora gli oscillatori avessero raggiunto l'equilibrio con la radiazione, quella sarebbe stata la radiazione di Corpo Nero.



Figura 1.5: Max Planck (1858-1947),
 ● Nobel per la Fisica 1918.

1.3.1 Determinazione dello spettro di Corpo Nero

L'Energia elettromagnetica nel vuoto è trasportata da *onde piane* monocromatiche di vettore d'onda \mathbf{k} , alla velocità della luce c ; la frequenza angolare associata alle onde è $\omega(k) = c|\mathbf{k}|$. Definiti \mathbf{E} *campo elettrico* e \mathbf{B} *campo magnetico*, nel piano di propagazione dell'onda, essi rappresentano la posizione e l'impulso di un oscillatore armonico lineare. Conseguentemente, dalla relazione:

$$E_{e.m.} = \frac{1}{8\pi} \int_{\Omega} [|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2] d\mathbf{r} \quad (1.9)$$

si nota che tale Energia corrisponde alla somma delle Energie di N oscillatori armonici lineari⁷, espressa dall'Hamiltoniana:

$$\mathcal{H}_{tot} = \sum_i h_i^{osc} = \sum_i \left(\frac{p_i^2}{2} + \omega^2 \frac{q_i^2}{2} \right) \quad (1.10)$$

Gli oscillatori presenti sono sistemi canonici che scambiano solo ed esclusivamente calore con la cavità: dalla Termodinamica Statistica, essi possono essere ricondotti ad un gas di Bosoni senza massa⁸, per i quali l'Energia Libera di Helmholtz degli oscillatori, a meno di un fattore E_0 dovuto all'*Energia di punto zero*, coincide⁹ con quella determinata dalla statistica di Bose-Einstein:

$$\Phi_{BE} = kT g_{int} \int_0^{\infty} g(\epsilon) d\epsilon \ln(1 - e^{-\beta\epsilon}) \quad (1.11)$$

⁷ Gli oscillatori sono due per ogni singola onda.

⁸ Rimuovere il vincolo di conservazione del numero di Bosoni equivale ad assumere il potenziale chimico $\mu = 0$.

⁹ La due espressioni coincidono assumendo: $\epsilon = \hbar\omega$; $g_{int}g(\epsilon) = \frac{g_{osc}(\omega)}{\hbar}$.

$$\Phi_{osc} = kT \int_0^\infty g_{osc}(\omega) d\omega \ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega}) + \underbrace{\frac{\hbar}{2} \int_0^\infty \omega g_{osc}(\omega) d\omega}_{E_0} \quad (1.12)$$

Le considerazioni svolte avvengono in un regime di stazionarietà, nel quale si assume la condizione di *risonanza*, imponendo che le onde elettromagnetiche si annullino in corrispondenza della superficie della regione Ω in analisi: tale condizione dipenderebbe dalla forma e dal volume V della cavità, ma grazie all'assunzione del *Limite Termodinamico LT*, per il quale $V \rightarrow \infty$ (ed anche $N \rightarrow \infty$), si può utilizzare una cavità di forma cubica di lato L , come mostrato in Figura (1.6), per la quale, data una lunghezza d'onda λ , le condizioni di risonanza per un vettore d'onda \mathbf{k} sono:

$$\frac{k_a}{k} L = n_a \frac{\lambda}{2}; \quad n_a = 0, 1, \dots; \quad a = x, y, z. \quad (1.13)$$

La condizione di risonanza rispetto alle frequenze ν , secondo la relazione $\nu = c/\lambda$, si ottiene dall'equazione precedente elevando ambo i membri al quadrato e sommando sulle tre componenti cartesiane:

$$\nu^2(\mathbf{n}) = \frac{c^2}{4L^2} \|\mathbf{n}\|^2 = \frac{c^2}{4L^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (1.14)$$

Nel *LT* in cui il volume V diverge, la differenza che intercorre tra una frequenza risonante e quelle contigue tende a zero: si può quindi introdurre il *Limite del Continuo LC*¹⁰ e calcolare il numero di onde $N_{onde}(\nu)$ risonanti con frequenza minore di ν , come il volume dell'ottante sferico positivo di raggio $2L\nu/c$:

$$N_{onde}(\nu) = \frac{1}{8} \int_{n < 2L\nu/c} d\mathbf{n} = \frac{4\pi V}{3c^3} \nu^3 \quad (1.15)$$

La condizione di risonanza (1.14) determina difatti una superficie sferica, della quale bisogna considerare solo la parte con $n_i \geq 0$, con $i = x, y, z$.

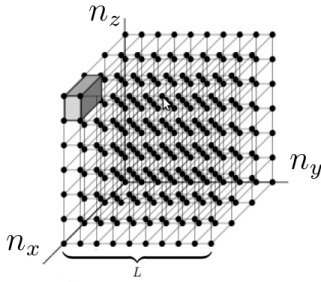


Figura 1.6: Cavità cubica di lato L .

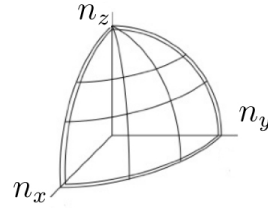


Figura 1.7: Ottante sferico positivo.

La densità di oscillatori corrispondenti alle onde risonanti con la superficie è:

$$g_{osc}(\nu) = 2 g_{onde}(\nu) = 2 \frac{dN_{onde}}{d\nu} = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 \quad (1.16)$$

¹⁰ L'infittirsi delle grandezze consente l'introduzione del *LC*, nel quale le somme vengono sostituite da integrali.

Inserendo quest'ultima equazione all'interno della relazione (1.12), è possibile determinare l'Energia Libera di Helmholtz del Corpo Nero in unità di volume:

$$\Phi_{CN} = \frac{\Phi_{CN}}{V} = kT \frac{8\pi}{c^3} \int_0^\infty \nu^2 \ln(1 - e^{-\beta h\nu}) d\nu =$$

imponendo la sostituzione: $\beta h\nu = x \implies \beta h d\nu = dx$ (1.17)

$$= (kT)^4 \frac{8\pi}{c^3 h^3} \int_0^\infty x^2 \ln(1 - e^{-x}) dx = -\frac{8\pi^5 (kT)^4}{45 c^3 h^3}$$

Si può, dunque, calcolare l'Energia per unità di volume per mezzo della relazione generale¹¹ $E = \partial(\beta\Phi)/\partial\beta$:

$$\varepsilon_{CN} = \frac{E_{CN}}{V} = \int_0^\infty \underbrace{\frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\beta h\nu} - 1}}_{u(\nu, T)} d\nu = \frac{8\pi^5 (kT)^4}{15 c^3 h^3} \quad (1.18)$$

Infine, dalla *densità di Energia specifica per la radiazione* $u(\nu, T)$, si può determinare la **Funzione di Planck** o **Planckiana** che identifica lo *Spettro di Corpo Nero*:

$$\boxed{I(\nu, T) \equiv P_{em}^{CN} = \frac{c}{4\pi} u(\nu, T) = \frac{2h}{c^2} \nu^3 \frac{1}{e^{\beta h\nu} - 1}} \quad (1.19)$$

$I(\nu, T) d\nu$ esprime la quantità di Energia emessa, avente frequenza compresa tra ν e $\nu + d\nu$, nell'unità di superficie ed angolo solido e nell'unità di tempo.

Analogamente, è possibile esprimere la (1.19) in funzione della lunghezza d'onda λ , ponendo attenzione al fatto che la quantità da considerare, nel cambiamento di variabili, è la $I(\nu, T) d\nu$ e non la $I(\nu, T)$. Infatti:

$$\rightarrow I(\nu, T) d\nu = I(\lambda, T) d\lambda \leftarrow \quad (1.20)$$

$$I(\nu, T) \neq I(\lambda, T)$$

Ricordando dunque la relazione $\nu = c/\lambda$, che lega la frequenza e la lunghezza d'onda, si ottiene:

$$\boxed{I(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{\beta hc}{\lambda}} - 1}} \quad (1.21)$$

La *Formula di Planck* (1.19), così come la sua espressione dipendente dalla lunghezza d'onda (1.21), è ottenuta dall'ipotesi che un oscillatore lineare scambi solo ed esclusivamente Energia in quantità discrete $h\nu$.

¹¹ Dalla definizione di *Energia Libera di Helmholtz*, $\Phi = E - TS$, con E Energia, T Temperatura, S Entropia del sistema considerato.

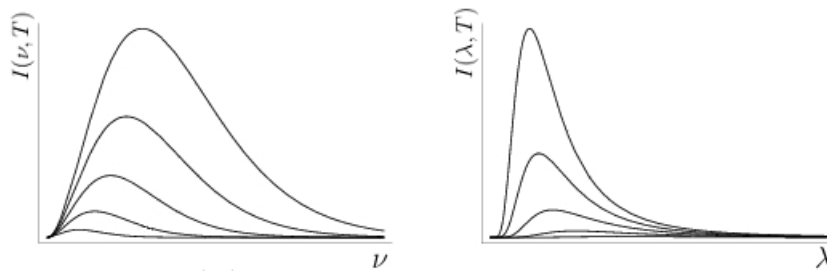


Figura 1.8: Funzione di Planck rappresentata in funzione di ν e di λ .

1.4 Dalla *catastrofe ultravioletta* ai *quanti*

Come detto in precedenza, vi furono numerosi tentativi per giustificare teoricamente le leggi sperimentali di Wien e di Stefan-Boltzmann: i primi a cercare di determinare una corretta dimostrazione che desse valore ai due risultati furono John William Strutt Rayleigh e James Hopwood Jeans.

1.4.1 L'approccio classico di Rayleigh e Jeans

Facendo uso dei principi della Fisica Classica, la meccanica newtoniana e l'elettromagnetismo, Rayleigh e Jeans proposero una legge per l'intensità in funzione della lunghezza d'onda del tipo:

$$I(\lambda) \propto \frac{T}{\lambda^4} \quad (1.22)$$

Il problema fondamentale di tale relazione è che, sebbene presenti un perfetto accordo con i dati sperimentali a grandi lunghezze d'onda, diverge per piccoli valori di questa, prevedendo quindi un'enorme emissione in corrispondenza della regione ultravioletta e dei raggi X. Per ottenere la densità di Energia $u(\nu)$ cercata dai due fisici, bisogna moltiplicare la densità di modi di vibrazione permessi $2N_{onde}(\nu)$ ¹² (dalla (1.15)) per il valor medio dell'Energia di un oscillatore armonico. Per determinare $\bar{\varepsilon}$ si può far uso della procedura di media statistica con la distribuzione di Boltzmann:

$$f(\varepsilon) = Ce^{-\beta\varepsilon} \quad (1.23)$$

Da tale funzione si può stimare la probabilità che un oscillatore abbia Energia compresa tra ε e $\varepsilon + d\varepsilon$:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon f(\varepsilon) d\varepsilon}{\int_0^\infty f(\varepsilon) d\varepsilon} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon}{\int_0^\infty e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon} = -\frac{d}{d\beta} \log \int_0^\infty e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon = \frac{d}{d\beta} \log \beta = \frac{1}{\beta} = kT \quad (1.24)$$

¹² Come già specificato all'inizio del paragrafo precedente, il fattore 2 è previsto dalle due direzioni di polarizzazione per le onde e.m..

Il risultato ottenuto è quanto previsto dal *Teorema di Equipartizione dell'Energia*, che afferma che ogni addendo dell'Hamiltoniana¹³ che contiene un parametro Lagrangiano o un momento coniugato al quadrato contribuisce all'Energia totale con un termine $kT/2$ ¹⁴. Da questo risultato si può ricavare la densità di Energia $u(\nu) d\nu$ compresa tra ν e $\nu + d\nu$:

$$u(\nu) d\nu = 8\pi kT \frac{\nu^2}{c^3} d\nu \quad (1.25)$$

ed esprimendo quest'ultima relazione in funzione della lunghezza d'onda λ , si ottiene la **Legge di Rayleigh-Jeans**:

$$u(\lambda) = 8\pi \frac{kT}{\lambda^4} \quad (1.26)$$

Si nota subito che la formula diverge quando $\lambda \rightarrow 0$, ricadendo nella già menzionata **catastrofe ultravioletta**.

Approssimazione di Rayleigh-Jeans

$$\text{Fotoni con bassa Energia: } h\nu \ll kT \implies I(\nu, T) \approx 2kT \frac{\nu^2}{c^2}$$

1.4.2 La quantizzazione dell'Energia e la costante h

Planck all'inizio del '900 comprese che se lo spettro di Energia delle onde elettromagnetiche non fosse stato continuo, ma discreto, il "problema" concernente il Corpo Nero avrebbe avuto accordo con i dati sperimentali: egli ipotizzò che la radiazione potesse essere emessa dagli oscillatori delle pareti solo in pacchetti discreti, denominati **quanti**, e che, per ogni frequenza ν , potessero trasportare una precisa Energia $\varepsilon = h\nu$, con h costante universale. L'emissione quindi ad una frequenza assegnata può essere solo:

$$\varepsilon_n = n\varepsilon = nh\nu \quad (1.27)$$

Ciò comporta una rimodulazione del calcolo del valor medio dell'Energia degli oscillatori:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n e^{-\beta\varepsilon_n}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\varepsilon_n}} = -\frac{d}{d\beta} \log \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\varepsilon_n} = -\frac{d}{d\beta} \log \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\beta h\nu})^n = -\frac{d}{d\beta} \log \frac{1}{1 - e^{-\beta h\nu}} \\ \bar{\varepsilon} &= \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} \implies u(\nu) d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} d\nu \end{aligned} \quad (1.28)$$

Passando all'espressione in funzione di λ , si ottiene la **Legge di Planck** per l'intensità dello spettro di Corpo Nero:

$$u(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{\beta hc}{\lambda}} - 1} \quad (1.29)$$

A garantire l'accordo con i dati provenienti dagli esperimenti è il valore della **Costante di Planck** $h = 6.62618(4) \times 10^{-27} \text{ erg s}$.

¹³ La Hamiltoniana considerata è quella di un oscillatore armonico lineare, espressa dalla relazione (1.10), ponendo $i=1$.

¹⁴ Il *TdE* è definito a partire dall'assunzione del *Limite Semiclassico*, ossia il *LC* in cui valga la *Condizione di Non Degenerazione* ($e^{-\beta\varepsilon_0} / \sum_{\alpha} e^{-\beta\varepsilon_{\alpha}} \ll 1$).

Capitolo 2

Applicazioni astrofisiche

2.1 Le stelle

Le stelle possono essere approssimate a Corpi Neri, in quanto le uniche onde e.m. che non vengono assorbite dalla loro superficie sono quelle aventi una lunghezza d'onda di dimensione pari o maggiore del diametro della stella stessa.

Osservando la costellazione di Orione, è possibile notare la netta differenza di colore tra Betelgeuse e Rigel: le due stelle infatti hanno una *Temperatura superficiale* molto diversa: la prima $\sim 3600K$, la seconda $\sim 13000K$.

La radiazione e.m. che viene studiata e che determina lo spettro osservato proviene dagli strati più esterni dell'atmosfera stellare: al variare della temperatura dei suddetti strati, cambiano le caratteristiche degli spettri stessi.

Inoltre dalla loro analisi, è possibile ottenere un notevole numero di ulteriori informazioni, come il colore e gli elementi che compongono l'atmosfera stellare.

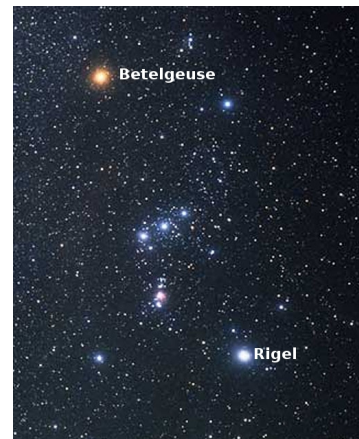


Figura 2.1: Orione, Akira Fuji, 30/04/2002.

Classificazione spettrale

Per una stella, che può essere approssimata ad una sfera di raggio R e superficie $S = 4\pi R^2$, la *legge di Stefan-Boltzmann* è:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_e^4 \quad (2.1)$$

Poichè le stelle non sono dei Corpi Neri perfetti, la temperatura che compare nella (2.1) è detta **temperatura effettiva**, ossia la temperatura che avrebbe la superficie della stella se realmente emettesse come un Corpo Nero. Da essa può essere determinato il *flusso superficiale*¹

$$F_{sup} = \sigma T_e^4 \quad (2.2)$$

¹ Combinando la (2.1) con la legge $F = \frac{L}{4\pi r^2}$, in corrispondenza della superficie ($r = R$), si ottiene il *flusso*.

Dalla relazione (2.1) si comprende inoltre che due stelle aventi medesima temperatura, possano avere luminosità del tutto differenti, variandone il raggio.

Nell'analisi spettrale, lo stato di ionizzazione della fotosfera è determinante: oltre allo spostamento del picco descritto dalla legge di Wien, la temperatura determina la comparsa di righe di assorbimento dovute agli ioni degli elementi costituenti la stella.

La presenza di tali righe, che identificano la composizione chimica della stella, rappresenta la più evidente differenza dello spettro da quello ideale di Corpo Nero: esse infatti sottraggono radiazione al continuo.

In alcuni casi si verifica che le righe di assorbimento dei metalli sono talmente fitte da generare una considerevole diminuzione dell'intensità nel continuo, effetto denominato **line blanketing**.

La classificazione spettrale alla quale oggi si fa riferimento è quella di Yerkes: in essa, in relazione alla temperatura superficiale T_e , compaiono le classi spettrali di Harvard **O, B, A, F, G, K, M** (con temperature comprese tra $T_M < 3500 K$ e $T_O > 28.000 K$ e colorazioni apparenti dall'arancione-rosso [**M**] al blu [**O**]). Di seguito è riportato un esempio di applicazione delle suddette formule al Sole.

La luminosità del Sole è $L_\odot = 3.839 \times 10^{33} \text{ erg s}^{-1}$ ed il suo raggio è $R_\odot = 6.955 \times 10^{10} \text{ cm}$. La temperatura della superficie solare è:

$$T_\odot = \left(\frac{L_\odot}{4\pi R_\odot^2 \sigma} \right)^{1/4} \simeq 5777 K$$

Il flusso alla superficie è:

$$F_{sup} = \sigma T^4 \simeq 6.316 \times 10^{10} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2}$$

È possibile inoltre determinare la lunghezza d'onda λ_{max} alla quale corrisponde il picco nel spettro continuo solare, utilizzando la legge di Wien:

$$\lambda_{max} = \frac{2897 \times 10^{-1} \text{ cm K}}{5778 K} \simeq 5.014 \times 10^{-5} \text{ cm} = 5014 \text{ \AA}$$

La λ_{max} trovata appartiene allo spettro del *visibile*, precisamente alla regione del verde; il Sole emette maggiormente un continuo attorno a tale lunghezza d'onda (sebbene noi ne osserviamo una colorazione gialla a causa dello scattering dovuto all'atmosfera): tale caratteristica colloca il Sole nella classe spettrale G2 V.

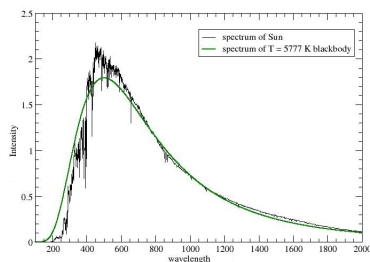


Figura 2.2: Spettro solare confrontato con lo spettro di un Corpo Nero a 5777K.

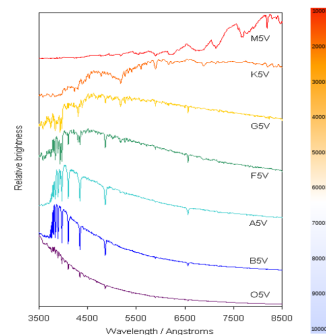


Figura 2.3: Spettri di stelle appartenenti a classi spettrali diverse.

2.2 I pianeti

La luce proveniente dalle stelle viene irradiata nello spazio in maniera isotropa e, come precedentemente espresso nel paragrafo 2.1, il flusso e lo spettro corrispondono a quelli di un Corpo Nero: nel suo avanzare, però, la luce non interagisce in maniera evidente con la materia se non quando intercetta un corpo, ad esempio un pianeta. Quindi la radiazione reale, pur mantenendo lo spettro di partenza, non è effettivamente quella di un Corpo Nero. Date le dimensioni dei corpi in esame e le scale di distanze che li coinvolgono, i raggi giungenti dalla stella che intercettano il pianeta possono essere considerati paralleli.

Dati un pianeta e la relativa atmosfera, tale sistema è approssimativamente in equilibrio termico: la radiazione assorbita proveniente, ad esempio dal Sole, è controbilanciata dalla riemissione nello spazio, ad opera della superficie e dell'atmosfera, di radiazione infrarossa. Un pianeta, ad una distanza media d dal Sole, riceve la radiazione avente flusso \mathcal{F}_d su un'area pari a πr_p^2 . Una parte di radiazione, equivalente all'*albedo sferico*² $\bar{\alpha}$, è riflessa dalla superficie e da parte dell'atmosfera: vi è quindi un flusso netto assorbito dal sistema pari a:

$$L_{in} = (1 - \bar{\alpha}) \pi r_p^2 \mathcal{F}_d \quad (2.3)$$

La riemissione ad opera del pianeta è descritta dalla legge di *S-B*: approssimando quest'ultimo ad un Corpo Nero con temperatura T_e che emette nella regione dell'infrarosso, il flusso uscente sarà:

$$L_{out} = 4\pi r_p^2 \sigma T_e^4 \quad (2.4)$$

Assumendo una condizione di equilibrio radiativo del sistema, uguagliando le due relazioni precedenti, si ottiene la temperatura equivalente di un Corpo Nero:

$$T_e = \left(\frac{(1 - \bar{\alpha}) \mathcal{F}_d}{4\sigma} \right)^{1/4} \quad (2.5)$$

Ad esempio, la Terra ha un $\bar{\alpha} \simeq 0.3$, con un $\mathcal{F}_d \simeq 1.37 \times 10^6 \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ si ottiene una $T_e \simeq 255K$: il valore reale della temperatura superficiale T_s si aggira intorno a $288K$, con uno scarto pari a $33K$. Tale discrepanza è determinata dal fatto che l'atmosfera terrestre è *otticamente spessa* alla radiazione emessa dalla superficie (infrarossa) e ne riflette una parte contribuendo ulteriormente all'incremento di temperatura superficiale del pianeta, innescando un processo che si reitera tra riflessione ed assorbimento della radiazione: questo fenomeno è conosciuto come **EFFETTO SERRA**. È possibile stimare un parametro \mathcal{G} che quantifichi tale effetto:

$$\mathcal{G} = \sigma(T_s^4 - T_e^4) \quad (2.6)$$

Con l'introduzione dell'Effetto Serra, a partire dal flusso uscente, si ottiene un valore della temperatura superficiale pari a $T_s = 289.6K$ ³.

² L'*albedo* rappresenta il rapporto tra l'intensità di radiazione riflessa da un dato corpo e quella irraggiata. Se un corpo è perfettamente bianco, $\bar{\alpha} = 1$, se è perfettamente nero, $\bar{\alpha} = 0$. Solitamente le misure di albedo sono determinate a partire da una specifica distribuzione spettrale della radiazione incidente, in quanto una stima di albedo bolometrica su un più vasto range di lunghezze d'onda è molto complessa.

³ Per questa stima si utilizza il parametro normalizzato $g = \mathcal{G}/(\sigma T_s^4)$.

2.3 La radiazione cosmica di fondo *CMBR*

La teoria del *Big Bang* predice che l'Universo primordiale fu caratterizzato dalla presenza di gas ad altissima temperatura che, con la conseguente espansione, andò incontro ad un raffreddamento: ciò generò una radiazione dovuta al rilascio di calore residuo, denominata **Radiazione Cosmica di Fondo** (Cosmic Microwave Background Radiation, **CMBR** o **CMB**).

L'esistenza della CMB venne ipotizzata da Ralph Alpher nel 1948 durante i suoi studi sulla nucleosintesi del Big Bang, insieme a Gamow ed Herman. Nel 1965, presso i Bell Telephone Laboratories di Murray Hill nel New Jersey, Arno Penzias e Robert Wilson rilevarono la presenza di un rumore anomalo nel ricevitore radio in costruzione; nello stesso periodo, all'Università di Princeton, Robert Dicke ed il suo team di ricercatori, del quale faceva parte anche Dave Wilkinson, venendo a conoscenza dei segnali captati dai due fortunati fisici, compresero subito che la CMB era stata trovata⁴.

L'espansione cosmologica

La CMB rappresenta una delle principali prove della teoria del Big Bang e della successiva espansione dell'Universo. Inizialmente l'Universo, avente una dimensione notevolmente più ridotta di quella odierna ed una temperatura dell'ordine di $10^7 - 10^{13} K$, presentava un plasma costituito da protoni ed elettroni liberi ed una radiazione che, tramite processi di scattering, veniva assorbita e riemessa di continuo. L'espansione adiabatica dell'Universo implicò una notevole diminuzione della temperatura ($\simeq 10^3 K$) con la conseguente ricombinazione degli atomi⁵: questo fenomeno, avvenuto all'incirca 400.000 anni dopo il Big Bang, consentì ai fotoni di poter viaggiare senza interagire con la materia e permeare così l'intero Universo.

L'osservazione del Cosmo quindi è limitata sino all'epoca della *Ricombinazione*, dal momento che i fenomeni precedenti avvenivano in un regime otticamente spesso: questo ostacolo al passaggio della radiazione è detto *superficie di ultimo scattering* (*LSS*). A seguito del disaccoppiamento tra la radiazione e la materia, i fotoni della CMB, termalizzati dai continui processi di scattering Thomson, diminuirono la loro temperatura raggiungendo l'odierno valore di $T_{CMB} = 2.725 \pm 0.002 K$.

Grazie ai continui processi di scattering, in un'epoca precedente a $z = 10^7$, la radiazione entrò in equilibrio termico, generando la tipica distribuzione di Corpo Nero. Successivamente, l'espansione universale rese inefficaci le reazioni di produzione dei fotoni, mantenendo quindi inalterato lo spettro: da quel momento, l'Energia termica eventualmente prodotta non avrebbe potuto più raggiungere l'equilibrio, rimanendo come una distorsione non troppo evidente dello spettro stesso.

Raggiungendo poi la materia e la radiazione un rapporto di 1 : 1, nell'epoca della *Ricombinazione* ($z = 10^3$) i fotoni non interagirono più con gli elettroni, formando così la *LSS*. Tutto ciò che viene osservato oggi nella regione delle microonde sono le fluttuazioni invariante presenti sulla *LSS*.

⁴ Nel 1978, Penzias e Wilson ricevettero il Premio Nobel per la Fisica per la scoperta della CMB.

⁵ Questa epoca venne chiamata di *Ricombinazione*.

La Figura 2.4 mostra come i dati raccolti dallo spettrofotometro FIRAS⁶, posto sul satellite COBE⁷, si adattino con altissima precisione alla distribuzione planckiana: di-fatti la CMB presenta lo spettro di Corpo Nero reale più vicino alla curva teorica. FIRAS opera in uno spettro di frequenze comprese tra $\sim 30 - \sim 3.000 \text{ GHz}$ ed ha collezionato 43 misurazioni equidistanti tra loro che hanno permesso al team del progetto di affermare che “*le deviazioni [dallo spettro ideale] sono minori di 50 parti per milione del picco della radiazione cosmica di fondo [...]*”.

Se il progetto COBE aveva come obiettivo la misura dello spettro della CMB, un'altra importante missione è stata la WMAP⁸, poi seguita dalla Planck Surveyor (misurazioni in Figura (2.5)), che prevedeva la stima delle anisotropie della radiazione. Esistono due categorie di anisotropie: le primarie, dovute a fenomeni avvenuti sulla *LSS*; le secondarie, determinate dagli effetti di interazione con la materia dalla *LSS* all'osservatore. Tra le varie cause di queste anisotropie, che quindi generano una variazione dallo spettro, sono qui di seguito riportate:

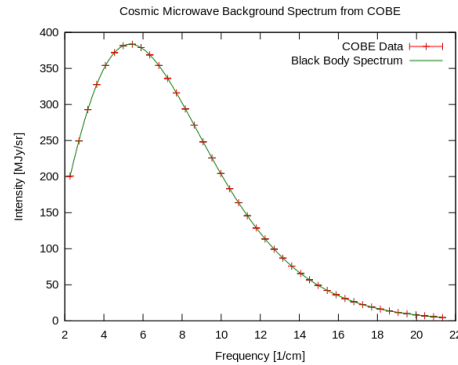


Figura 2.4: Dati COBE sovrapposti allo spettro di Corpo Nero - COBE Mission Data, 1992.

- **Effetto Sunyaev-Zel'dovich Termico** - i fotoni della CMB hanno una probabilità di $\sim 1\%$ di interagire con la nube intergalattica di elettroni per Inverse Compton, causando lo spostamento del picco dello spettro, come rappresentato in Figura (2.6);
- **Effetto Sunyaev-Zel'dovich Cinematico** - il fenomeno è determinato dal moto reale degli ammassi di galassie nella direzione radiale rispetto alla CMB;
- **Effetto Sachs-Wolfe** - la radiazione si sposta verso la parte blu dello spettro quando attraversa aggregati di materia, a causa del redshift gravitazionale.

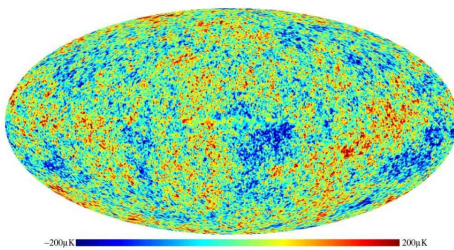


Figura 2.5: Anisotropie della CMB misurate con la missione Planck Surveyor.

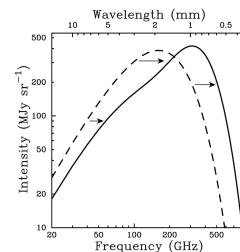


Figura 2.6: Alterazione dello spettro determinata dall'effetto S-Z.

⁶ *Far-Infrared Absolute Spectrophotometer.*

⁷ *COsmic Background Explorer.*

⁸ *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe.*

2.4 I Nuclei Galattici Attivi AGN

Gli **AGN** (**A**ctive **G**alactic **N**uclei) rappresentano un insieme di oggetti all'interno dei quali avvengono fenomeni altamente energetici. Il loro spettro continuo si estende dal *Radio* ($\nu \leq 3 \times 10^{11} \text{ Hz}$) al *Gamma* ($\nu \geq 10^{20} \text{ Hz}$).

Tra i differenti processi di radiazione coinvolti negli AGN, è possibile individuare, in corrispondenza della banda *ottico-UV*, il tipico andamento da Corpo Nero, a temperature dell'ordine di 10^4 - 10^6 K . Tale emissione si manifesta con un appiattimento dello spettro o, talora, come un massimo allargato, solitamente denominato *UV-Bump* (o *Big Blue Bump*). Lo spettro reale è caratterizzato non da un singolo Corpo Nero, bensì da una sovrapposizione multipla di questi, tutti nel range di temperature sopracitate. In Figura 2.7 è riportata una semplificazione a tre spettri di Corpo Nero relativi a regioni diverse del disco di accrescimento attorno al Buco Nero centrale.

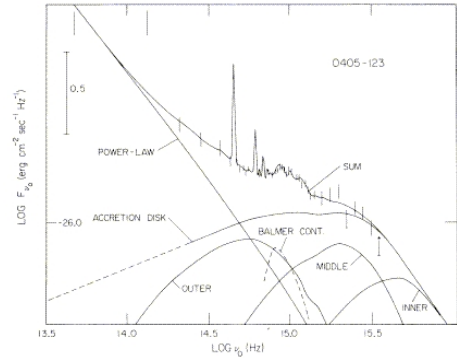


Figura 2.7: Spettro di PKS 0405-123 annesso al modello di un disco di accrescimento attorno ad un Buco Nero rotante rapidamente. Inner p. r_S : 1.23-20; Middle p. r_S : 20-100; Outer p. r_S : 100-1000.

Cenni sul modello $\alpha - disk$

Il *modello $\alpha - disk$* è stato sviluppato da Shakura e Sunyaev per descrivere il processo di conversione dell'Energia gravitazionale in radiazione elettromagnetica e trovare riscontro negli spettri di emissione di oggetti che accrescono materia come, ad esempio, i Buchi Neri. Alla base di tale modello vi è la suddivisione del disco in anelli concentrici di spessore dR e velocità angolare $\omega(R)$: i vari anelli, avendo $\omega(R)$ differenti, genereranno attrito tra loro che ne modificherà i relativi momenti.

Premettendo che i fenomeni di natura meccanica e fluidodinamica del modello esulino dalla trattazione⁹, ciò che è di interesse relativo all'emissione è l'ipotesi che il disco abbia una profondità ottica elevata tale da associare un Corpo Nero in equilibrio termico ad ogni anello. Tale ipotesi consente di collegare la luminosità e la temperatura attraverso la legge di *S-B* stimando, come per le stelle, la temperatura superficiale a partire dall'osservazione diretta della radiazione proveniente dal disco. Per calcolarne lo spettro, a partire dalla distribuzione di Planck, si considera il disco come un perfetto emettitore di radiazione, tralasciando la possibile presenza di gas freddi e poco densi negli strati più esterni. Misurando il flusso di $I(\nu; T)$ ed integrando su R , si ottiene uno spettro composto dai singoli spettri degli anelli: eccetto nel range di frequenze intermedie, la cui valutazione dipende da un'approssimazione condotta sul raggio del disco, si nota che l'andamento della curva a basse frequenze equivale alla legge di Rayleigh-Jeans ($h\nu \ll kT$) [§1.4.1], ad alte frequenze coincide con la legge di Wien ($h\nu \gg kT$) [§1.2.2], come mostrato in Figura (2.7) - ACCRETION DISK -.

⁹ Il modello si fonda su diverse assunzioni: una viscosità $\nu = \alpha H c_s$ (con $\alpha \leq 1$ parametro di viscosità, H spessore del disco e c_s velocità del suono nel mezzo); regime otticamente spesso del disco, $\tau \gg 1$; spessore $H(R)$ molto minore del raggio R del disco (disco sottile); velocità Kepleriana $\Omega = \sqrt{GM/R^3}$ indipendente dalle coordinate cilindriche ($z; \theta$); e^- e p scambiano tra loro radiazione ed Energia.

Bibliografia

Libri:

- [L1] B. W. Carroll and D. A. Ostlie, *An Introduction to Modern Astrophysics*, Pearson International Edition, Pearson Addison-Wesley, 2007
- [L2] M. S. Longair, *High Energy Astrophysics*, vol.2 *Stars, the Galaxy and the interstellar medium* 2nd ed., Cambridge University Press, 1994
- [L3] H. A. Enge, M. R. Wehr, J. A. Richards, *Introduction to atomic physics*, Addison-Wesley Pub. Co., 1972
- [L4] H. Bradt, *Astrophysics Processes - The Physics of Astronomical Phenomena*, Cambridge University Press, 2008
- [L5] F. Melia, *High-Energy Astrophysics*, Princeton Series in Astrophysics, Princeton University Press, 2009
- [L6] J. Binney and M. Merrifield, *Galactic Astronomy*, Princeton Series in Astrophysics, Princeton University Press, 1998
- [L7] A. E. Roy and D. Clarke, *Astronomy Principles and Practice* 4th ed., IoP - Institute of Physics Publishing, 2003

Articoli:

- [A1] Pierre-Robitaille, *COBE: A Radiological Analysis*, *Progress in physics* vol.4, Ohio State University, October 2009

Dispense:

- [D1] D. Dallacasa, *Processi di Radiazione & MHD*, Università degli Studi di Bologna
- [D2] L. Ferrari, *Elementi di Termodinamica Statistica*, Università degli Studi di Bologna
- [D3] F. R. Ferraro, *Astrofisica Stellare*, Università degli Studi di Bologna
- [D4] F. Ravanini, *Istituzioni di Fisica Teorica*, Università degli Studi di Bologna
- [D5] T. Maestri, *Physics of Planetary Atmospheres*, Università degli Studi di Bologna
- [D6] C. Fanti, R. Fanti, *Una finestra sull'Universo "Invisibile" - Lezioni di Radioastronomia*, Università degli Studi di Bologna