Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica Didattica

ALCUNE CARATTERIZZAZIONI DELLE FUNZIONI CONVESSE NEI GRUPPI DI CARNOT

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.
Annamaria Montanari
Correlatore:
Chiar.mo Prof.
Vittorio Martino

Presentata da:
Sara Gruppioni

I **Sessione**
Anno Accademico 2013-2014

Introduzione

In questa trattazione ci proponiamo di analizzare e approfondire alcune delle definizioni fondamentali di funzione convessa; l'ambiente nel quale lavoreremo non si limiterà a quello euclideo, ma spazierà anche tra gruppo di Heisenberg e gruppo di Carnot. Il nostro scopo non è quello di fornire una descrizione il più completa possibile delle funzioni convesse, bensì di soffermarci solo su alcune definizioni, e derivare così nuove caratterizzazioni per questa particolare classe di funzioni.
Per fare questo cominceremo con definizioni e teoremi riguardanti le funzioni convesse in senso classico; se a prima vista possono apparire come informazioni banali, queste sono tuttavia essenziali ai fini della nostra trattazione. Per esempio, sarà uno strumento fondamentale nelle dimostrazioni il teorema che caratterizza le funzioni convesse di classe C^2 su un aperto convesso di $\mathbb{R}^N$ come tutte (e sole) quelle funzioni che hanno la matrice hessiana semidefinita positiva in ogni punto di questo aperto.
In un secondo momento vogliamo ricavare due nuovi teoremi che caratterizzano le funzioni convesse ancora su un aperto convesso di $\mathbb{R}^N$. Il primo teorema dimostrato è il seguente (con $\mathscr{H}_f$ intendiamo la matrice hessiana di f e con Tr l'operatore "traccia" di una matrice):

Teorema 0.0.1. *Siano Ω un aperto convesso di $\mathbb{R}^N$ e $f \in C^2(\Omega)$. Allora:*

$$f \text{ convessa} \iff Tr\,(A\mathscr{H}_f) \geq 0 \quad \forall A = A^T \geq 0.$$

Cioè le funzioni convesse sono sottosoluzioni di una particolare classe di equazioni alle derivate parziali del second'ordine. Per la dimostrazione di questo teorema non utilizzeremo altro che il lemma di Féjer, che studia il segno dell'operatore traccia calcolato nel prodotto di due matrici $N \times N$ (sapendo in anticipo se le matrici sono semidefinite

positive o negative), e la semplice caratterizzazione delle matrici semidefinite positive come tutte e sole quelle matrici che hanno tutti gli autovalori ≥ 0.
Detto questo, ci siamo soffermati sul concetto di matrice simmetrica semidefinita positiva, derivando così una nuova caratterizzazione:

Teorema 0.0.2. *Sia $A = A^T$ una matrice reale simmetrica $p \times p$; indichiamo con λ_j il j-esimo autovalore di A, e con $\sigma_j(A)$ la j-esima funzione elementare simmetrica negli autovalori di A. Vale che:*

$$\lambda_j \geq 0 \quad \forall j \Longleftrightarrow \sigma_j(A) \geq 0 \quad \forall j.$$

Ovvero una matrice simmetrica è semidefinita positiva se e solo se le funzioni simmetriche elementari nei suoi autovalori sono tutte maggiori o uguali a 0. Per ricavare questo teorema ci siamo soffermati sui polinomi iperbolici, che sono essenzialmente polinomi reali omogenei di grado m con m radici. Studiando allora le k-esime funzioni simmetriche elementari negli n autovalori di una matrice, definite come

$$\sigma_k(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} \prod_{j=1}^{k} \lambda_{i_j},$$

è facile trovare che la prima funzione elementare simmetrica non è altro che la traccia della matrice, mentre l'ultima è il determinante. Inoltre, si riconosce che ognuna di queste funzioni è un polinomio iperbolico; perciò, i risultati sui polinomi iperbolici possono essere applicati alle funzioni σ_k. Ricordandoci inoltre che tali funzioni simmetriche elementari sono anche i coefficienti a segni alternati del polinomio caratteristico della matrice, si dimostra il teorema sopra citato. Gli strumenti utilizzati in questa dimostrazione non sono altro che la regola dei segni di Cartesio ed lo studio del segno del coefficiente $(-1)^s$, al variare di s.
A conclusione del secondo capitolo deriviamo una seconda caratterizzazione delle funzioni convesse in $\mathbb{R}^N$, in termini di formule di sottomedia:

Teorema 0.0.3. *Siano Ω un aperto convesso di $\mathbb{R}^N$ e $f \in C^2(\Omega)$. Sia $B(x,r)$ il disco euclideo di centro x e raggio r tale che $B(x,r) \subset \Omega$. Allora f è convessa su Ω se e solo* *se valgono le seguenti formule di sottomedia:*

$$\begin{aligned} f(Hx) &\leq \fint_{\partial B(x,r)} f(H\xi)d\sigma(\xi) \\ &\leq \fint_{B(x,r)} f(H\xi)d\xi \qquad \forall H \textit{ matrice } N\times N \textit{ con det } H \neq 0. \end{aligned}$$

Queste formule di sottomedia sono derivabili ricordando il teorema precedente, scomponendo A matrice simmetrica e semidefinita positiva come $A = HH^T$ e utilizzando un semplice cambio di variabile.
Nel capitolo successivo trattiamo alcune nozioni di convessità che non si limitano allo spazio euclideo, ma più in generale possono essere date anche in un gruppo di Carnot. A questo proposito, l'ultima nozione di convessità che diamo in $\mathbb{R}^N$ è la convessità di tipo viscoso. Infatti, data una funzione $F(x,z,p,M)$ omogenea, propria ed ellittica degenere[1] , diciamo che una funzione continua $u : \Omega \to \mathbb{R}$ è sottosoluzione viscosa dell'equazione $F(x,u(x),Du(x),\mathscr{H}_u(x)) = 0$ se ogni volta che abbiamo una funzione ϕ di classe C^2 ed un punto $x_0 \in \Omega$ tale che ϕ tocca il grafico di u da sopra [2], vale la disuguaglianza

$$F(x_0,\phi(x_0),D\phi(x_0),\mathscr{H}_\phi(x_0)) \geq 0.$$

Ecco allora che nel sottocapitolo 3.1 verrà dimostrato il seguente teorema, risultato principale di questa sezione:

Teorema 0.0.4. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

i) ogni volta che $x, y \in \Omega$ ed il segmento che congiunge x ed y è anch'esso in Ω, abbiamo

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \tag{1}$$

per ogni $0 \leq \lambda \leq 1$.

ii) f è sottosoluzione viscosa di tutte le equazioni

$$F(x,f(x),Df(x),\mathscr{H}_f(x)) = 0,$$

[1] Vedi 3.1 a pag. 17.
[2] Ovvero $u(x_0) = \phi(x_0)$ e $u(x) \leq \phi(x)$ per $x \neq x_0$.

dove $F(x,z,p,M)$ *è una funzione continua in* $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathcal{S}^N$[3] *omogenea, propria ed ellittica degenere.*

iii) f *è sottosoluzione viscosa di tutte le equazioni lineari a coefficienti costanti*

$$F(x,f,Df,\mathscr{H}_f) = \ Tr\ (A\mathscr{H}_f) = 0$$

dove $A \in \mathcal{S}^N$ *è definita positiva.*

iv) f *soddisfa la disuguaglianza*

$$\mathscr{H}_f \geq 0$$

in senso viscoso.

Quando vale una delle affermazioni sopra, diciamo che la funzione è convessa.

Abbiamo perciò dimostrato che la nozione "classica" di convessità (condizione i)) è equivalente a tre condizioni sulla viscosità: la prima (condizione ii)) è l'essere -in generale- sottosoluzione viscosa; la seconda (condizione iii)) è l'essere sottosoluzione viscosa solo delle equazioni $\mathrm{Tr}(A\mathscr{H}_f) = 0$, con A matrice simmetrica semidefinita positiva; infine, la terza (condizione iv)) è l'essere sottosoluzione viscosa dell'equazione $\mathscr{H}_f = 0$. Osserviamo subito che l'ultima condizione ricorda fortemente la caratterizzazione delle funzioni convesse classiche come tutte e sole le funzioni con matrice hessiana semidefinita positiva (questo è stato dimostrato nel capitolo 1). Per dimostrare il teorema 0.0.4 utilizzeremo alcuni risultati di algebra lineare.
Il teorema precedente porterà a due importanti conseguenze sulla regolarità delle funzioni convesse in $\mathbb{R}^N$. La prima è che ogni funzione convessa su un aperto Ω di $\mathbb{R}^N$ è localmente limitata; infatti, la sua norma L^∞ su un disco di raggio $r/2$ può essere maggiorata dall'integrale medio del modulo di f sul disco più grande, di raggio r. Inoltre, sotto le stesse ipotesi si ha che f è -addirittura- localmente lipschitziana, esiste il gradiente di f quasi ovunque e la sua norma L^∞ su un disco di raggio $r/2$ può essere maggiorata con la norma L^∞ di f lungo il disco di raggio r. Possiamo perciò concludere che la convessità è una proprietà "regolarizzante".

[3] Con $\mathcal{S}^N$ indichiamo la classe delle matrici $N \times N$ reali simmetriche.

Proseguendo nella nostra trattazione, estendiamo i risultati appena descritti su un particolare gruppo di Carnot, il gruppo di Heisenberg; questo non è altro che $\mathbb{R}^3$ dotato di una particolare legge di gruppo,

$$p \cdot q = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + 2(y_1 x_2 - x_1 y_2)),$$

$\forall p = (x_1, y_1, z_1)$ e $\forall q = (x_2, y_2, z_2)$. In questo ambiente, che denoteremo sempre con $\mathcal{H}$, non ci sarà più la matrice hessiana standard, ma subentrerà l'hessiana simmetrizzata orizzontale, definita come

$$(D_h^2 u)^*_{ij} = \frac{1}{2}(X_i X_j u + X_j X_i u)$$

per $i, j = 1, 2$; qui X_1 e X_2 sono i primi due campi vettoriali che generano l'algebra di Lie $\mathfrak{h}$. Dopo aver ricordato qualche proprietà fondamentale di $\mathcal{H}$ riusciamo subito a dimostrare l'equivalenza tra 3 nozioni di convessità:

- una nozione di v-convessità, data dall'essere $(D_h^2 u)^* \geq 0$ in senso viscoso;
- una nozione di convessità data dall'essere sottosoluzione viscosa di tutte le quazioni lineari a coefficienti costanti Tr $(A(D_h^2 u)^*) = 0$, con A definita positiva;
- una condizione di convessità data dall'essere sottosoluzione viscosa di *tutte* le equazioni $F(p, u(p), Du(p), (D_h^2 u)^*(p)) = 0$, con F omogenea, propria ed ellittica degenere.

Notiamo subito che queste tre condizioni non sono altro che la trasposizione in Heisenberg delle condizioni sulla convessità viscosa viste in $\mathbb{R}^N$ nel sottocapitolo (3.1). E' possibile addirittura dimostrare che anche in $\mathcal{H}$ valgono i risultati di regolarità visti in $\mathbb{R}^N$; ovvero, si può dimostrare che una funzione v-convessa su un aperto di $\mathcal{H}$ è localmente limitata e localmente lipschitziana.

Un ulteriore risultato di importanza fondamentale per questa trattazione è che anche nel gruppo di Heisenberg $\mathcal{H}$ vale una sorta di caratterizzazione delle funzioni convesse tramite formule di sottomedia. E' stato possibile ricavare questo risultato con un semplice cambio di variabile $u(x) = \tilde{u}(\xi)$, in modo tale che la "nuova" funzione $\tilde{u}$ fosse sottosoluzione viscosa del Laplaciano di Kohn sul gruppo di Heisenberg. Detto questo, è stato possibile applicare la formula di sottomedia nei gruppi di Carnot omogenei [4] per ottenere il teorema 3.2.2.

L'unico tipo di convessità che non è possibile dare in $\mathcal{H}$ è la convessità in senso classico (1), ma nel sottocapitolo 3.3 vediamo che anche questa nozione può essere adattata in maniera opportuna, ottenendo la nozione di convessità orizzontale debole:

Definizione 0.1. (Vedi [16], pag. 289.) Sia $\mathcal{H}$ il gruppo di Heisenberg. Una funzione $f : \mathcal{H} \to (-\infty, \infty]$ è chiamata **debolmente h-convessa** se è propria, ovvero $\{g \in \mathcal{H} | f(g) = +\infty\} \neq \mathcal{H}$, e se per ogni $g \in \mathcal{H}$ si ha che, per ogni $0 \leq \lambda \leq 1$

$$f(g_\lambda) \leq f(g) + \lambda(f(g') - f(g)),$$

per ogni $g' \in \mathcal{H}_g$[5]. Qui g_λ è la combinazione convessa definita come

$$g_\lambda = g_\lambda(g, g') := g \cdot \delta_\lambda(g^{-1} \cdot g')$$

per ogni $g, g' \in \mathcal{H}$ e per $\lambda \in [0, 1]$.

Nel sottocapitolo 3.3 ci occuperemo di dimostrare che tale nozione è equivalente (sotto opportune ipotesi di regolarità) alla v-convessità.
Passiamo quindi a parlare dell'ultimo sottocapitolo di questa trattazione. Qui generalizzeremo quanto detto per $\mathcal{H}$ (definizioni di convessità e proprietà di regolarità per funzioni convesse) in un generico gruppo di Carnot $\mathcal{G}$ che, ricordiamo, non è altro che un gruppo di Lie nilpotente e semplicemente connesso. Qui, infatti, è possibile riscrivere parola per parola le definizioni di v-convessità e convessità orizzontale debole date in $\mathcal{H}$, modificando solo il fatto che l'aperto Ω deve essere nel gruppo di Carnot $\mathcal{G}$, e non più in $\mathcal{H}$. Detto questo, è possibile dimostrare l'equivalenza tra queste 5 condizioni:

- la convessità orizzontale debole;

- l'essere sottosoluzione viscosa di tutte le equazioni

  $$F(p, u(p), D_h u(p), (D_h^2 u(p))^*) = 0$$

  con F omogenea, propria ed ellittica degenere;

[4] Vedi Appendice B.

[5] $\mathcal{H}_g$ denota il sottospazio orizzontale passante per g.

- l'essere sottosoluzione viscosa di tutte le quazioni lineari a coefficienti costanti

$$\text{Tr}\ (A(D_h^2 u)^*) = 0$$

con A definita positiva;

- l'essere sottosoluzione viscosa di $\Delta_{\mathfrak{D}} u = 0$ per tutti i sistemi di riferimento orizzontali e linearmente indipendenti $\mathfrak{D}$;

- la v-convessità.

Analogamente a quanto accadeva in $\mathcal{H}$, l'equivalenza tra le ultime 4 condizioni deriva da fatti di base di algebra lineare; per dimostrare che la convessità orizzontale debole è equivalente alle altre abbiamo utilizzato il fatto che le funzioni convesse possono essere approssimate tramite funzioni convesse lisce via mollificatori di Friedrichs. L'ultimi teorema di questo sottocapitolo (teorema 3.4.4) presenta ancora una volta le proprietà di limitatezza e continuità lipschitziana delle funzioni convesse in un gruppo di Carnot.
Riassumendo, nel capitolo 1 abbiamo trattato le funzioni convesse in senso classico nello spazio euclideo. Nel capitolo seguente abbiamo messo in relazione convessità e formule di sottomedia, dopo un excursus sui polinomi iperbolici. Nel capitolo 3 abbiamo collegato quanto trovato precedentemente con la convessità in senso viscoso; questo è stato fatto in 3 ambienti diversi seguendo un percorso induttivo (dal particolare al generale): prima in $\mathbb{R}^N$, poi nel gruppo di Heisenberg, e infine nei gruppi di Carnot. Nel fare questo abbiamo dimostrato una nuova caratterizzazione della convessità con formule di sottomedia nel gruppo di Heisenberg. Terminano questo scritto due appendici; la prima riprende le formule di sottomedia in $\mathbb{R}^N$ e parte della teoria sulle funzioni subarmoniche che le coinvolgono; la seconda appendice enuncia alcuni teoremi fondamentali sui gruppi di Carnot e riprende le formule di sottomedia nei gruppi di Carnot omogenei.

Indice

Capitolo 1

Funzioni convesse in senso classico

In questo capitolo facciamo riferimento a [1] e riportiamo alcuni dei risultati più importanti riguardo alle funzioni convesse in senso classico.

Definizione 1.1. (Vedi [1], pag. 75) Sia Ω un aperto convesso di $\mathbb{R}^N$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Si dice che f è **convessa** se

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y) \quad \forall t \in [0,1], \forall x, y \in \Omega.$$

Osserviamo che f è convessa se, e solo se, per ogni $x, y \in \Omega$, la funzione

$$[0,1] \ni t \mapsto f((1-t)x + ty) \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

è convessa.
Infatti, se indichiamo con $F_{x,y}$ la funzione 1.1, si ha:

$$\begin{aligned} F_{x,y} \text{ convessa } &\Rightarrow F_{x,y}(t) \leq tF_{x,y}(1) + (1-t)F_{x,y}(0) \\ &\Rightarrow f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y). \end{aligned}$$

Viceversa, se f è convessa, per ogni $t_1, t_2 \in [0,1]$ e per ogni $\lambda \in [0,1]$ si ha:

$$\begin{aligned}
F_{x,y}((1-\lambda)t_1+\lambda t_2) &= f((1-t_1+\lambda t_1-\lambda t_2)x+((1-\lambda)t_1+\lambda t_2)y) \\
&= f(x-t_1x+\lambda t_1 x-\lambda t_2 x+(t_1-\lambda t_1+\lambda t_2)y) \\
&= f(x-t_1x+\lambda t_1 x-\lambda t_2 x+t_1 y-\lambda t_1 y+\lambda t_2 y) \\
&= f((1-\lambda)((1-t_1)x+t_1 y)+\lambda((1-t_2)x+t_2 y)) \\
&\le (\text{ per la convessità di } f) \\
&(1-\lambda)f((1-t_1)x+t_1y)+\lambda f((1-t_2)x+t_2y) \\
&= (1-\lambda)F_{x,y}(t_1)+\lambda F_{x,y}(t_2).
\end{aligned}$$

Questa osservazione consente una facile prova del seguente

Teorema 1.0.5. *Siano Ω un aperto convesso di $\mathbb{R}^N$ e sia $f \in C^2(\Omega,\mathbb{R})$. Indichiamo con $\mathscr{H}_f(x)$ la matrice hessiana della funzione f calcolata nel punto x. Allora*

$$f \text{ è convessa} \Longleftrightarrow \mathscr{H}_f(x) \ge 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Dimostrazione. Supponiamo f convessa e fissiamo $x \in \Omega$. Sia poi $h \in \mathbb{R}^N$, $h \neq 0$. Poichè Ω è aperto esiste $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, tale che $x+\lambda h \in \Omega$. Poniamo $y = x+\lambda h$. Per l'osservazione precedente la funzione $F_{x,y}$ è convessa, e quindi $F''_{x,y} \ge 0$ [1] . In particolare $F''_{x,y}(0) \ge 0$.
D'altra parte

$$\begin{aligned}
F''_{x,y}(t) = \frac{d^2}{dt^2}f(x+t\lambda h) &= \langle \mathscr{H}_f(x+t\lambda h)\lambda h, \lambda h\rangle = \\
&= \lambda^2\langle \mathscr{H}_f(x+t\lambda h)h, h\rangle.
\end{aligned}$$

Allora

$$\lambda^2\langle \mathscr{H}_f(x)h,h\rangle = F''_{x,y}(0) \ge 0.$$

[1] Vale infatti questo corollario (vedi [13], pag. 161):

Corollario 1.0.6. *Se $f : I \to \mathbb{R}$ è due volte derivabile in ogni punto di I, allora f è convessa se e solo se $f''(x) \ge 0$ per ogni $x \in I$.*

Poichè $\lambda \neq 0$, ciò implica

$$\langle \mathscr{H}_f(x)h, h\rangle \quad \geq 0,$$

e quindi, per l'arbitrarietà di h in $\mathbb{R}^N \backslash \{0\}$,

$$\mathscr{H}_f(x) \geq 0.$$

Viceversa, supponiamo $\mathscr{H}_f(z) \geq 0$ per ogni $z \in \Omega$. Allora, per ogni $x, y \in \Omega$, risulta

$$F''_{x,y}(t) = \quad \langle \mathscr{H}_f(x + t(y - x))(y - x), (y - x)\rangle \quad \geq 0$$

per ogni $t \in [0, 1]$. Ciò prova che $F_{x,y}$ è convessa; quindi, per l'arbitrarietà di x, y in Ω, f è convessa.

□

Corollario 1.0.7. *Siano Ω un aperto convesso di $\mathbb{R}^N$ e sia $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$, f convessa. Allora*

$$f(x) \geq f(a) + \langle \nabla f(a), (x - a)\rangle, \quad \forall x, a \in \Omega.$$

Dimostrazione. Basta applicare la formula di Taylor per funzioni di classe C^2 [2] ed utilizzare il fatto che, grazie al teorema precedente, $\mathscr{H}_f(a) \geq 0$ per ogni $a \in \Omega$.

□

[2] vedi [1], pag. 70

Capitolo 2

Due nuove caratterizzazioni delle funzioni convesse

Enunciamo in questo capitolo due nuovi teoremi; il primo contraddistingue le funzioni convesse quali sottosoluzioni di una particolare equazione alle derivate parziali, mentre il secondo le caratterizza come le funzioni che realizzano una particolare formula di sottomedia.
Analizziamo ora alcuni strumenti utili ai fini della dimostrazione del primo teorema.

2.1 Lemma di Féjer

Lemma 2.1.1. *(Lemma di Féjer; vedi [4], pag. 459) Siano A, B matrici $N \times N$ simmetriche reali con $A \geq 0$, $B \leq 0$. Allora $Tr(AB) \leq 0$.*

Dimostrazione. Per il teorema di Sylvester [1], A è simile alla matrice diagonale P che ha sulla diagonale tanti 1 quanto è il rango di A, ed è 0 altrove. Perciò, esiste una matrice reale M tale che $A = MPM^T$. Notiamo che $P = P^2 = PP^T$, da cui abbiamo che

$$A = MPM^T = MPP^TM^T = (MP)(MP)^T.$$

[1] Vedi [4], pag. 282.

Abbiamo quindi dimostrato che $A = RR^T$, con $R = MP$. Di conseguenza (ricordando che $Tr(HK) = Tr(KH)$ per ogni coppia di matrici quadrate H, K)

$$Tr(AB) = Tr(RR^TB) = Tr(R^TBR) = \sum_{i=1}^{N}(R^TBR)_{ii} = \sum_{i=1}^{N}(R^T)^iBR_i,$$

dove $(R^T)^i$ denota la i-esima riga di R^T ed R_i denota la i-esima colonna di R. Poichè $(R^T)^i = (R_i)^T$, abbiamo

$$(R^T)^iBR_i = (R_i)^TBR_i = \langle R_i, BR_i\rangle \quad \leq 0,$$

dove la disuguaglianza sopra segue dall'ipotesi che B è semidefinita negativa; qui $\langle , \rangle$ indica il prodotto scalare in $\mathbb{R}^N$. Quindi $Tr(AB) \leq 0$, e la dimostrazione è terminata.

□

2.2 Polinomi iperbolici e funzioni simmetriche elementari

Scopo di questo paragrafo è dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinchè tutti gli autovalori di una matrice simmetrica siano maggiori o uguali a 0 è che ogni funzione simmetrica elementare negli autovalori è maggiore o uguale a 0. Per fare questo introduciamo brevemente la nozione di polinomio iperbolico che abbiamo ripreso dall'articolo [2].

Definizione 2.1. Sia $P = P(x)$ un polinomio omogeneo di grado $m > 0$ in n variabili $x = \{x_k\}_1^n$, e sia $a = \{a_k\}_1^n$ reale. Diciamo che P è **iperbolico rispetto ad** a o, più brevemente, P è iperbolico a, se l'equazione $P(sa + x) = 0$ ha m zeri reali per ogni x reale.

Geometricamente, questo significa che qualsiasi retta in $\mathbb{R}^n$ con direzione a incontra l'ipersuperficie reale $P = 0$ in m punti reali. Una definizione equivalente è questa:

$$P(a) \neq 0, \quad P(sa + x) \neq 0 \text{ per } \mathrm{Im} s \neq 0, \quad x \text{ reale}.$$

Se fattorizziamo, otteniamo

$$P(sa + x) = P(a) \prod_{k=1}^{m} (s + \lambda_k(a, x)), \tag{2.1}$$

dunque un'altra definizione equivalente è che $P(a) \neq 0$ e che tutti i numeri $\{\lambda_k\}_1^m$ sono reali per qualunque x. Da questa forma della definizione vediamo che il polinomio $P(x)/P(a)$ è reale quando x è reale, perciò ha coefficienti reali. Quindi un polinomio iperbolico è essenzialmente reale, e senza perdere in generalità possiamo limitarci a studiare i polinomi reali.

Esempio 2.1. Sia $n = \frac{1}{2}p(p+1)$ un numero triangolare. Sia x una matrice simmetrica $p \times p$ con entrate (x_{jk}), [2] e definiamo il vettore $\tilde{x} = (x_{ij})_{i \leq j} \in \mathbb{R}^N$. Allora il polinomio

$$P(\tilde{x}) = \det x,$$

omogeneo di grado p, è iperbolico per qualsiasi matrice a definita (positiva o negativa), poichè in questo caso l'equazione $P(sa + \tilde{x}) = 0$ ha solo zeri reali. In questo caso, i numeri λ definiti tramite 2.1 sono proprio gli autovalori di x rispetto ad a.

Detto questo, segue direttamente dalla definizione che se P è iperbolico a, allora è iperbolico per qualsiasi multiplo di a diverso da zero.
Definiamo ora il cono C:

Definizione 2.2. Sia ***C=C(P,a)*** l'insieme di tutte le x tali che $P(ta + x) \neq 0$ quando $t \geq 0$.

E' chiaro che C contiene tutti i multipli positivi di a; se inoltre poniamo

$$h(a, x) = \min_k \lambda_k(a, x),$$

una definizione equivalente è

$$h(a, x) > 0.$$

[2]Esplicitamente: se p è l'ordine della matrice, n è il numero di elementi "principali" della matrice.

Giunti a questo punto, è fondamentale ai fini della trattazione considerare il caso particolare in cui P è il polinomio reale ottenuto calcolando il determinante di una matrice reale simmetrica, proprio come nell'esempio 2.1; assumiamo inoltre che a sia la matrice identità. Studiando questa particolare situazione si riesce a dare un'ulteriore definizione del cono C. Tuttavia, prima di fare questo ricordiamo il concetto di k-esima funzione elementare simmetrica:

Definizione 2.3. [3] La **k-esima funzione elementare simmetrica** nei p autovalori $\lambda_1, ..., \lambda_p$, $k \leq p$, è

$$\sigma_k(\lambda_1, ..., \lambda_p) = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq p} \prod_{j=1}^{k} \lambda_{i_j},$$

cioè la somma di tutti i $\binom{p}{k}$ prodotti di k elementi distinti in $\lambda_1, ..., \lambda_p$.

Si nota facilmente che $\sigma_1(\lambda_1, ..., \lambda_p) = \lambda_1 + ... + \lambda_p = \text{ Tr } x$ e che $\sigma_p(\lambda_1, ..., \lambda_p) = \lambda_1 ... \lambda_p = \det x$. Inoltre, è abbastanza facile dimostrare che queste funzioni simmetriche elementari sono proprio i coefficienti (a segni alternati) del polinomio caratteristico [4]; ovvero

$$\begin{aligned} p_x(t) &= (t - \lambda_1)...(t - \lambda_p) && (2.2) \\ &= t^p - \sigma_1(\lambda_1, ..., \lambda_p)t^{p-1} + \sigma_2(\lambda_1, ..., \lambda_p)t^{p-2} - ... \pm \sigma_p(\lambda_1, ..., \lambda_p), && (2.3) \end{aligned}$$

dove con $p_x(t)$ abbiamo indicato il polinomio caratteristico della matrice x nell'incognita t.

Per brevità, d'ora in poi denoteremo con $\sigma_k(x)$ la k-esima funzione simmetrica elementare calcolata negli autovalori della matrice x. Dimostriamo ora il seguente teorema:

Teorema 2.2.1. *Nelle notazioni precedenti*

$$C = \{x \text{ matrici simmetriche } | \sigma_k(x) > 0 \quad \forall k = 1, ..., p\}. \tag{2.4}$$

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto che il cono C è contenuto nell'insieme sopra indicato. A partire dalla definizione equivalente data sopra, supponiamo che

[3] Vedi [4], pag. 41

[4] Vedi [4], pag. 42

$\min_k \lambda_k > 0$; allora, per definizione di k-esima funzione simmetrica elementare, è certamente $\sigma_k(x) > 0\ \forall k$.
Viceversa, dimostriamo l'inclusione opposta. Supponiamo che sia $\sigma_k(x) > 0\ \forall k$ e dimostriamo che $\min_k \lambda_k > 0$; sappiamo di certo che tali σ_k sono i coefficienti a segni alternati del polinomio caratteristico. Si ha quindi che il segno dell'ultimo coefficiente è certamente pari a $(-1)^p$, altrimenti si giungerebbe ad un assurdo. Perciò:

- se p è pari $\Rightarrow$ in $p_x(t)$ l'ultimo coefficiente ha segno +;
- se p è dispari $\Rightarrow$ in $p_x(t)$ l'ultimo coefficiente ha segno -.

Per assurdo supponiamo che esista un $k \in \{1, ..., p\}$ tale che $\lambda_k < 0$. Ricordiamo dunque che l'ultimo coefficiente è proprio $\sigma_p(x)$, il determinante della matrice, il cui segno dipende dal segno degli autovalori. Allora:

- se p è pari $\Rightarrow$ in $p_x(t)$ l'ultimo coefficiente avrebbe segno $(-1)^{p-1} = -1$, assurdo;
- se p è dispari $\Rightarrow$ in $p_x(t)$ l'ultimo coefficiente ha segno $(-1)^{p-1} = +1$, assurdo.

Ancora, supponiamo per assurdo che esista un $k \in \{1, ..., p\}$ tale che $\lambda_k = 0$. Dunque, dovrebbe essere $\sigma_p(x) = \lambda_1 .... \lambda_p = 0$, assurdo per ipotesi. Il teorema è dimostrato.

□

Procediamo nella nostra trattazione lavorando ancora sul cono C, precisamente su un nuovo insieme C' che lo contiene:

Corollario 2.2.2. *Sia dato l'insieme* $C' = \{x \text{ matrici simmetriche} \mid \min_k \lambda_k \geq 0\}$. *Allora:*

$$C' = \{x \text{ matrici simmetriche } | P(ta + \tilde{x}) \neq 0 \text{ quando } t > 0\}. \tag{2.5}$$

Dimostrazione. Come prima, dimostriamo la doppia inclusione. Se $\min_k \lambda_k \geq 0$, allora, da 2.1

$$P(ta + \tilde{x}) = 0 \quad \text{solo se} \quad t = 0 \quad \vee \quad t = -\lambda_k, \quad \forall k;$$

perciò $P(ta + \tilde{x}) \neq 0$ quando $t > 0$.
Viceversa, se $P(ta + \tilde{x}) \neq 0$ quando $t > 0$, da 2.1 segue che $t + \lambda_k \neq 0\ \forall k$, con $t > 0$; dunque $\lambda_k \neq -t < 0 \quad \forall k$; e quindi $\min_k \lambda_k \geq 0$.

□

Siamo finalmente giunti al risultato chiave di questo paragrafo:

Corollario 2.2.3. *Nelle notazioni precedenti vale anche che:*

$$C' = \{x \ matrici \ simmetriche \ | \sigma_k(x) \geq 0 \quad \forall k\}. \tag{2.6}$$

Dimostrazione. Dimostriamo ancora una volta che vale la doppia inclusione. Innanzitutto, se $min_k \lambda_k \geq 0$, allora (per definizione di funzione simmetrica elementare) $\sigma_k(x) \geq 0$ $\forall k$.
Viceversa, supponiamo che valga $\sigma_k(x) \geq 0 \quad \forall k$, e dimostriamo che $\min_k \lambda_k \geq 0$. E' allora conveniente distinguere vari casi:

1. supponiamo che sia

$$\sigma_k(x) > 0 \quad \forall k = 1, ..., p - m - 1,$$
$$\sigma_k(x) = 0 \quad \forall k = p - m, ..., p,$$

   ovvero supponiamo che solo le prime $p-m-1$ funzioni simmetriche elementari siano > 0, mentre le altre siano nulle. Allora il polinomio caratteristico si fattorizza in questo modo:

$$p_x(t) = t^p - \sigma_1(x)t^{p-1} - ... \pm \sigma_{p-m-1}(x)t^{m+1} =$$
$$= t^{m+1}(t - \lambda_1)...(t - \lambda_{p-m-1}).$$

   Analogamente a prima, studiamo ora il segno con cui compare l'ultimo coefficiente $\sigma_{p-m-1}(x)$ nel polinomio caratteristico:

   - se p è pari, m è pari $\Rightarrow p - m - 1$ è dispari $\Rightarrow$ l'ultimo coefficiente ha segno -;
   - se p è pari, m è dispari $\Rightarrow p - m - 1$ è pari $\Rightarrow$ l'ultimo coefficiente ha segno +;
   - se p è dispari, m è dispari $\Rightarrow p - m - 1$ è dispari $\Rightarrow$ l'ultimo coefficiente ha segno -;
   - se p è dispari, m è pari $\Rightarrow p - m - 1$ è pari $\Rightarrow$ l'ultimo coefficiente ha segno +.

Supponiamo per assurdo che $\exists k \in \{1,...,p\}$ tale che $\lambda_k < 0$. Allora:

- se p è pari, m è pari $\Rightarrow$ l'ultimo coefficiente avrebbe segno $(-1)^{p-m} = +1$, assurdo;
- se p è pari, m è dispari $\Rightarrow$ l'ultimo coefficiente avrebbe segno $(-1)^{p-m} = -1$, assurdo;
- se p è dispari, m è dispari $\Rightarrow$ l'ultimo coefficiente avrebbe segno $(-1)^{p-m} = +1$, assurdo;
- se p è dispari, m è pari $\Rightarrow$ l'ultimo coefficiente avrebbe segno $(-1)^{p-m} = -1$, assurdo.

2. supponiamo ora che sia

$$\sigma_k(x) = 0 \quad \forall k = 1,...,p-m-1,$$
$$\sigma_k(x) > 0 \quad \forall k = p-m,...,p,$$

cioè supponiamo, al contrario di prima, che solo le ultime m funzioni caratteristiche elementari siano > 0, e le altre tutte nulle. (Come viene intuitivo pensare questo non può mai accadere, e infatti giungeremo ad un assurdo.) Da 2.1 abbiamo questa fattorizzazione del polinomio $P(ta + \tilde{x})$:

$$P(ta + \tilde{x}) = \prod_{k=1}^{p}(t + \lambda_k) = t^p + \sigma_{p-m}(x)t^m + ... + \sigma_p(x).$$

Perciò il polinomio $P(ta + \tilde{x})$ svolto ha tutti i coefficienti con i segni positivi (al contrario del polinomio caratteristico). Quindi, in questo caso il numero di cambiamento di segno dei coefficienti del polinomio sopra è 0; per la regola dei segni di Cartesio [5] il numero delle radici positive di $P(ta+\tilde{x})$ è 0; perciò $\nexists k$ tale che $\lambda_k > 0$, ovvero $\lambda_k \leq 0 \ \forall k$. Tuttavia, per ipotesi $\sigma_p(x) = \lambda_1....\lambda_p > 0$; quindi $\lambda_k < 0 \ \forall k$; ma questo è assurdo poichè $\sigma_1(x) = \lambda_1 + ... + \lambda_p = 0$ per ipotesi.

3. ancora, supponiamo che tutte le funzioni simmetriche elementari siano nulle, ovvero:

$$\sigma_j(x) = 0 \quad \forall j = 1,...,p.$$

[5] **Regola dei segni di Cartesio**: il numero di radici positive di un polinomio reale non è maggiore del numero di cambiamenti di segno nella successione dei suoi coefficienti. Vedi [15], pag. 938.

In questo caso il polinomio caratteristico si riduce a $p_x(t) = t^p$, perciò concludiamo che $\lambda_j = 0 \ \forall j = 1, ..., p$.

4. supponiamo infine che tutte le funzioni simmetriche elementari siano strettamente positive, cioè che

$$\sigma_j(x) > 0 \quad \forall j = 1, ..., p.$$

Il polinomio caratteristico avrà allora questa forma:

$$p_x(t) = t^p - \sigma_1(x)t^{p-1} + \sigma_2(x)t^{p-2} - .... \pm \sigma_p(x).$$

Dal fatto che $\sigma_p(x) \neq 0$ possiamo concludere che $\lambda_j \neq 0 \ \forall j = 1, ..., p$. Ancora una volta supponiamo per assurdo che esista un $j \in \{1, ..., p\}$ tale che $\lambda_j < 0$; a questo punto si procede come nella dimostrazione del teorema 2.2.1 studiando il segno dell'ultimo coefficiente che compare nel polinomio caratteristico.

□

Abbiamo dunque dimostrato il seguente teorema, che è il risultato principale di questo sottocapitolo; esso non è altro che una condizione necessaria e sufficiente affinchè una matrice reale simmetrica sia semidefinita positiva.

Teorema 2.2.4. *Sia $A = A^T$ una matrice reale simmetrica $p \times p$; indichiamo con λ_j il j-esimo autovalore di A, e con $\sigma_j(A)$ la j-esima funzione elementare simmetrica negli autovalori di A. Vale che:*

$$\lambda_j \geq 0 \quad \forall j \Longleftrightarrow \sigma_j(A) \geq 0 \quad \forall j. \tag{2.7}$$

2.3 Una nuova caratterizzazione delle funzioni convesse

Dimostriamo finalmente il seguente teorema:

Teorema 2.3.1. *Siano* Ω *un aperto convesso di* $\mathbb{R}^N$ *e* $f \in C^2(\Omega)$. *Indichiamo con* $\mathscr{H}_f$ *la matrice hessiana di* f. *Allora:*

$$f \text{ convessa}^{6} \Longleftrightarrow Tr(A\mathscr{H}_f) \geq 0 \quad \forall A = A^T \geq 0. \tag{2.8}$$

Ovvero: f *è sottosoluzione dell'equazione alle derivate parziali* $\sum_{i=j} a_{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j} f = 0$.

Dimostrazione. Dimostriamo che, se f è convessa, allora è sottosoluzione dell'equazione sopra. Sappiamo che, dal capitolo 1, sotto questa ipotesi $\mathscr{H}_f(x) \geq 0$ $\forall x \in \Omega$. Sia dunque A una matrice simmetrica reale $N \times N$ semidefinita positiva, e pongo $B = -\mathscr{H}_f \leq 0$ su Ω, anch'essa simmetrica e reale. Per il lemma di Féjer vale che

$$\text{Tr }(AB) \leq 0,$$

e sostituendo opportunamente otteniamo

$$\text{Tr }(A(-\mathscr{H}_f)) = \sum_{i=j} a_{ij}(-\partial_{x_i}\partial_{x_j} f) \leq 0,$$

ovvero

$$-\sum_{i=j} a_{ij}(\partial_{x_i}\partial_{x_j} f) \leq 0,$$

e perciò

$$\text{Tr }(A\mathscr{H}_f) = +\sum_{i=j} a_{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j} f \geq 0.$$

Viceversa, supponiamo che valga $\text{Tr }(A\mathscr{H}_f) \geq 0 \quad \forall A = A^T \geq 0$. Diagonalizzando $\mathscr{H}_f$ come $\mathscr{H}_f = M\Lambda M^T$, con Λ matrice diagonale[7], ricordiamo che $\mathscr{H}_f$ e Λ avranno gli stessi autovalori perchè matrici simili. Inoltre, per le proprietà della traccia osserviamo subito che

$$\text{Tr }(AM\Lambda M^T) = \text{ Tr }(M^T AM\Lambda) \geq 0 \quad \forall A = A^T \geq 0;$$

perciò, chiamando $M^T AM = \tilde{A}$, si ha che

$$\text{Tr }(\tilde{A}\Lambda) \geq 0 \quad \forall \tilde{A} = \tilde{A}^T \geq 0. \tag{2.9}$$

[6] Secondo la definizione 1.1.

[7] Questo è ancora possibile per il teorema di Sylvester.

Notiamo ora che basta scegliere come $\tilde{A}$ delle matrici molto particolari (fatte solo di 0 e di 1) per dimostrare facilmente che tutti gli autovalori della matrice Λ (e perciò, anche quelli di $\mathscr{H}_f$) sono positivi, o al più uguali a 0. Infatti, scegliamo inizialmente

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ovvero, scegliamo come $\tilde{A}$ la matrice fatta di 0 tranne nel primo elemento sulla diagonale, che è 1; in questo caso, la condizione 2.9 implica che (pensando gli autovalori di $\mathscr{H}_f$ ordinati in ordine decrescente)

$$\lambda_1 \geq 0.$$

Procedendo in questo modo, e utilizzando di volta in volta delle matrici $\tilde{A}$ che hanno un solo 1 sulla diagonale, e nulle altrove, si dimostrerà che

$$\lambda_j \geq 0 \quad \forall j = 1, ..., N.$$

Il teorema è quindi dimostrato.

□

2.4 Convessità e formule di sottomedia

Un'ulteriore caratterizzazione delle funzioni convesse è che, con un'opportuna ipotesi di continuità, esse soddisfano una particolare formula di sottomedia; questo è abbastanza sorprendente se si pensa che le sole funzioni che hanno la formula di sottomedia sono le funzioni subarmoniche. Ancora più sorprendente è il fatto che questa caratterizzazione deriva in modo abbastanza semplice dalla precedente caratterizzazione delle funzioni convesse (teorema 2.3.1) con un semplice cambio di variabile.

Teorema 2.4.1. *Siano Ω un aperto convesso di $\mathbb{R}^N$ e $f \in C^2(\Omega)$. Sia $B(x,r)$ il disco euclideo di centro x e raggio r tale che $B(x,r) \subset \Omega$. Allora f è convessa su Ω se e solo* *se valgono le seguenti formule di sottomedia:*

$$f(Hx) \leq \fint_{\partial B(x,r)} f(H\xi) d\sigma(\xi) \tag{2.10}$$
$$\leq \fint_{B(x,r)} f(H\xi) d\xi \qquad \forall H \text{ matrice } N \times N \text{ con det } H \neq 0. \tag{2.11}$$

(In questo enunciato abbiamo indicato con $\fint_{\partial B(x,r)}$ *e* $\fint_{B(x,r)}$ *gli integrali medi, rispettivamente, sul bordo del disco e su tutto il disco; ovvero, si ha che*

$$\fint_{\partial B(x,r)} u d\sigma = \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x,r)} u d\sigma,$$
$$\fint_{B(x,r)} u dx = \frac{1}{\omega_N r^N} \int_{B(x,r)} u dx,$$

dove $\omega_N = \int_{B(0,1)} dy$ *è il volume del disco unitario.)*

Dimostrazione. Supponiamo innanzitutto che f sia convessa su Ω. Allora, per il teorema (2.3.1)

$$\text{Tr } (A\mathscr{H}_f) \geq 0 \quad \forall A = A^T \geq 0.$$

Scelgo allora una matrice A siffatta. Poichè A è simmetrica e semidefinita positiva, per il teorema di Sylvester è possibile fattorizzare A come $A = M\Lambda M^T$, con Λ matrice diagonale ed M matrice ortogonale. Chiamando allora $H = M\Lambda^{1/2}$, si ha che

$$A = HH^T.$$

Osserviamo anche che, se H è una matrice $N \times N$ (qualunque), la matrice $A = HH^T$ è semidefinita positiva:

$$\langle A\xi, \xi \rangle = \langle HH^T\xi, \xi \rangle = \langle H^T\xi, H^T\xi \rangle = ||H^T\xi||^2 \geq 0.$$

Con questa fattorizzazione, si ha subito che

$$\text{Tr } (A\mathscr{H}_f)(x) = \sum_{i,j} a_{ij} \partial^2_{x_i x_j} f = \sum_{i,j,l} h_{il} h_{jl} \partial^2_{x_i x_j} f. \tag{2.12}$$

Facciamo ora questo importante cambio di variabile:

$$v(x) = f(Hx) = [\text{ponendo } y = Hx] f(y).$$

Si ha dunque che:

$$y_j = h_{jk} x_k \quad ;$$
$$v_{x_l}(x) = \sum_j \frac{\partial f}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_l} = \sum_j \frac{\partial f}{\partial y_j} h_{jl} \quad .$$

A questo punto possiamo calcolare il Laplaciano di v:

$$\begin{aligned} \Delta v(x) &= \sum_{l=1}^{N} v_{x_l x_l}(x) = \sum_{i,j,l} \frac{\partial}{\partial y_i}\Big(\frac{\partial f}{\partial y_j}\Big) h_{jl} h_{il} \\ &= (\text{ da } 3.17 \text{ }) \text{ Tr } (A\mathscr{H}_f)(y) \geq 0 \end{aligned}$$

per ipotesi.

Pertanto, poichè v è una funzione subarmonica, essa verifica le formule di sottomedia che seguono[8]:

$$\begin{aligned} v(x) = f(Hx) &\leq \fint_{\partial B(x,r)} v(\xi) d\sigma(\xi) = \fint_{\partial B(x,r)} f(H\xi) d\sigma(\xi) \\ &\leq \fint_{B(x,r)} v(\xi) d\xi = \fint_{B(x,r)} f(H\xi) d\xi \qquad \forall H \text{ matrice } N \times N. \end{aligned}$$

Abbiamo perciò dimostrato che valgono (2.10) e (2.11).

Viceversa, supponiamo che f sia di classe C^2 su un aperto convesso Ω di $\mathbb{R}^N$ e che valgano (2.10) e (2.11). Come prima operiamo questo cambio di variabile:

$$v(x) = f(Hx);$$

perciò, riscrivendo (2.10) e (2.11) con v al posto di f, otteniamo

$$\begin{aligned} v(x) &\leq \fint_{\partial B(x,r)} v(\xi) d\sigma(\xi) \\ &\leq \fint_{B(x,r)} v(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Ovvero v verifica la formula di sottomedia. Possiamo quindi concludere[9] che v è subarmonica, cioè che il suo Laplaciano è ≥ 0. Tuttavia, ripetendo i calcoli della prima parte della dimostrazione, si ha che

$$\Delta v(x) = \text{ Tr } (A\mathscr{H}_f)(y) \geq 0 \quad \forall A = A^T \geq 0.$$

Per il teorema (2.3.1) possiamo concludere che f è convessa.

[8] Vedi Appendice A.

[9] Vedi Appendice A.

$\square$

Capitolo 3

Convessità in senso viscoso

3.1 Convessità in senso viscoso in $\mathbb{R}^N$

Presentiamo ora alcuni fatti sulle funzioni convesse nello spazio euclideo che abbiamo ripreso da [3], capitolo 2. In questo sottocapitolo presenteremo finalemente una nuova e più ampia nozione di convessità, la convessità in senso viscoso. Ricordiamo inoltre che d'ora in avanti $\mathcal{S}^N$ indicherà la classe delle matrici $N \times N$ reali simmetriche.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto. Consideriamo una funzione continua $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathcal{S}^N \to \mathbb{R}$ che soddisfa

$$\begin{cases} F(x, z, p, 0) = 0, \\ F(x, z, p, M) \leq F(x, z', p, M) \text{ se } z \leq z', \\ F(x, z, p, M) \leq F(x, z, p, M') \text{ se } M \leq M'. \end{cases} \tag{3.1}$$

Le ultime due condizioni indicano rispettivamente che F è propria ed ellittica degenere.

Definizione 3.1. Una funzione continua $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è una **sottosoluzione viscosa** dell'equazione

$$F(x, f(x), Df(x), \mathscr{H}_f(x)) = 0$$

se ogni volta che abbiamo una funzione ϕ di classe C^2 ed un punto $x_0 \in \Omega$ tale che ϕ tocca il grafico di f da sopra in x_0 (ovvero: $f(x_0) = \phi(x_0)$ e $f(x) \leq \phi(x)$ per $x \neq x_0$), vale la disuguaglianza

$$F(x_0, \phi(x_0), D\phi(x_0), \mathscr{H}_\phi(x_0)) \geq 0$$[1].

Questa definizione ha senso anche per alcuni operatori funzionali $F(x, z, p, M)$. Per esempio, diciamo che

$$\mathscr{H}_f \geq 0$$

in senso viscoso, se ogni volta che abbiamo una funzione ϕ di classe C^2 e un punto $x_0 \in \Omega$ tale che ϕ tocca f da sopra in x_0, vale la disuguaglianza

$$\mathscr{H}_\phi(x_0) \geq 0.$$

Presentiamo ora il risultato più importante di questo sottocapitolo; tale teorema caratterizza le funzioni convesse come sottosoluzioni viscose di varie equazioni.

Teorema 3.1.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

i) ogni volta che $x, y \in \Omega$ ed il segmento che congiunge x ed y è anch'esso in Ω, abbiamo

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \tag{3.2}$$

per ogni $0 \leq \lambda \leq 1$[2].

ii) f è sottosoluzione viscosa di tutte le equazioni

$$F(x, f(x), Df(x), \mathscr{H}_f(x)) = 0,$$

dove $F(x, z, p, M)$ è una funzione continua in $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathcal{S}^N$ che soddisfa 3.1.

iii) f è sottosoluzione viscosa di tutte le equazioni lineari a coefficienti costanti

$$F(x, f, Df, \mathscr{H}_f) = \ Tr\ (A\mathscr{H}_f) = 0$$

dove $A \in \mathcal{S}^N$[3] *è definita positiva.*

[1] Chiaramente, in questa scrittura $D\phi(x_0)$ e $\mathscr{H}_\phi(x_0)$ denotano, rispettivamente, il vettore gradiente e la matrice hessiana della funzione ϕ calcolate nel punto x_0.

[2] Si tratta della definizione "classica" di funzione convessa; vedi capitolo 1, pag. 1.

[3] Qui $\mathcal{S}^N$ è ancora la classe delle matrici $N \times N$ reali simmetriche.

iv) f soddisfa la disuguaglianza

$$\mathscr{H}_f \geq 0$$

in senso viscoso.

Quando vale una delle affermazioni sopra, diciamo che la funzione è convessa.

Dimostrazione.

$ii) \Rightarrow iii)$ E' ovvio perchè il caso $iii)$ è un caso particolare di $ii)$.

$ii) \Rightarrow iv)$ E' ovvia per quanto detto sopra; infatti, l'equazione differenziale $\mathscr{H}_f \geq 0$ può essere scritta come $F(x, f(x), Df(x), \mathscr{H}_f(x)) \geq 0$.

$iii) \Leftrightarrow iv)$ Segue facilmente da questa osservazione di algebra lineare (nota con il nome di teorema di Féjer):
una matrice simmetrica M è semidefinita positiva ($M \geq 0$) $\Leftrightarrow$ per ogni matrice simmetrica A semidefinita positiva vale la disuguaglianza Tr $(AM) \geq 0$[4].

$iv) \Rightarrow ii)$ E' ovvio, poichè presa una ϕ che tocca il grafico di f da sopra in x_0, per la condizione $iv)$ si avrà che $\mathscr{H}_\phi(x_0) \geq 0$, e per 3.1

$$F(x_0, \phi(x_0), D\phi(x_0), \mathscr{H}_\phi(x_0)) \geq F(x_0, \phi(x_0), D\phi(x_0), 0) = 0.$$

$i) \Leftrightarrow iv)$ Dimostriamo questa equivalenza sotto questa forma (vedi capitolo 4 di [7]):
sia $f \in C(\Omega)$, dove Ω è un dominio convesso. Allora la funzione f è concava [5] *in Ω se e solo se*

$$\langle \xi, \mathscr{H}_f(\xi) \rangle = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \xi_i \xi_j \quad \leq 0 \tag{3.3}$$

in senso viscoso $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$. Cioè, ogni volta che $x \in \Omega$ e $\varphi \in C^2(\Omega)$ sono tali che

[4] Vedi [4], pag. 459.

[5] Sia Ω un aperto convesso di $\mathbb{R}^N$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Si dice che f è **concava** se

$$f((1-t)x + ty) \geq (1-t)f(x) + tf(y) \quad \forall t \in [0,1], \forall x, y \in \Omega.$$

(1) $\varphi(x) = f(x)$,

(2) *e* $\varphi(y) < f(y)$ *quando* $y \neq x$, *allora*

$$\langle \xi, \mathscr{H}_\varphi(x)\xi \rangle \quad \leq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{3.4}$$

Dimostriamo quanto abbiamo appena affermato. Supponiamo che f sia concava; fissiamo un vettore $\xi \neq 0$ e sia x un punto in Ω. Sia φ una qualunque funzione test che tocca f da sotto in x. Allora φ deve essere "concava in x", cioè

$$\frac{d^2\varphi(x + t\xi)}{dt^2} \leq 0 \quad \text{in } t = 0,$$

poichè altrimenti (1) e (2) contraddirebbero la concavità di f. Dopo aver derivato opportunamente troviamo che questa disuguaglianza è esattamente 3.4, e abbiamo quindi dimostrato la prima parte dell'enunciato.
Per dimostrare il viceversa, supponiamo per assurdo che f non sia concava. Possiamo anche supporre che il disco $\{x \in \Omega : |x| \leq 2\}$ sia contenuto in Ω e che, aggiungendo ad f una funzione lineare e scalando,

$$f(\pm 1, 0, ..., 0) \geq 2, \quad f(0, 0, ..., 0) = 0.$$

Esiste allora un $\sigma > 0$ piccolo tale che $f(x) > 1$ quando $|x| = 1$ e $x_2^2 + ... + x_n^2 < \sigma^2$. Costruiamo allora una funzione test della forma

$$\varphi(x) = a + \epsilon x_1^2 - \frac{x_2^2 + ... + x_n^2}{\epsilon} \tag{3.5}$$

che tocca f da sotto in un qualche punto x con $|x| < 1$; questo punto di tangenza sarà determinato più avanti. Supponiamo ancora che $a \leq 0$ e $0 < \epsilon < 1$. Allora

$$\varphi(0) = a \leq 0 = f(0).$$

Sia

$$m = \min_{|x| \leq 1} f(x)$$

e fissiamo ϵ in modo tale che

$$0 < \epsilon < \frac{\sigma^2}{1 - m};$$

osserviamo che $m \leq 0$. Affermiamo che

$$\varphi(x) < f(x) \text{ quando } |x| = 1. \tag{3.6}$$

Questo vale indipendentemente da $a \leq 0$. Per verificare questo, consideriamo innanzitutto i punti in cui $f(x) > 1$. Vale sempre che

$$\varphi(x) \leq a + \epsilon \leq 1$$

e quindi dobbiamo solo controllare i punti in cui $|x| = 1$ e $x_2^2 + \ldots + x_n^2 > \sigma^2$. In questo caso

$$\varphi(x) \leq a + \epsilon - \frac{\sigma^2}{\epsilon} < 1 - \frac{\sigma^2}{\epsilon} \leq m \leq f(x).$$

Perciò 3.6 è verificata.

Se a è sufficientemente negativo, $\varphi(x) < f(x)$ quando $|x| \leq 1$. Scegliamo il più grande a tale che $\varphi(x) \leq f(x)$, quando $|x| \leq 1$. La funzione test φ corrispondente deve toccare f in un qualche punto x con $|x| < 1$, poichè $\varphi(x) < f(x)$ quando $|x| = 1$ per ogni $a \leq 0$. In questo punto φ si comporterà come una funzione test. Tuttavia, dopo aver calcolato che

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = 2\epsilon, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2} = -\frac{2}{\epsilon} \text{ se } x_j \neq x_1, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \text{ se } i \neq j,$$

la forma quadratica indefinita

$$\langle \xi, \mathscr{H}_\varphi(x)\xi \rangle = 2\epsilon\xi_1^2 - \frac{2}{\epsilon}(\xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2)$$

è in contraddizione con 3.4. Questo conclude la dimostrazione.

□

Notiamo che, in particolare, le funzioni convesse sono sottosoluzioni viscose delle seguenti equazioni:

i) il Laplaciano

$$\Delta f = 0,$$

ii) il Q-Laplaciano per $Q > 2$,

$$\operatorname{div}\left(|Df|^{Q-2}Df\right) = 0,$$

iii) il Laplaciano di ordine ∞,

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = 0.$$

Infatti, tutte queste equazioni possono essere scritte nella forma

$$F(x, f(x), Df(x), \mathscr{H}_f(x)) = 0$$

per una funzione continua F che soddisfi 3.1.
Analizziamo ora alcune conseguenze della convessità in $\mathbb{R}^N$.

Corollario 3.1.2. *Sia f una funzione convessa su un insieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e sia B_r un disco (euclideo) di raggio r tale che $B_r \subset \Omega$. Allora f è localmente limitata, e abbiamo la stima*

$$\|f\|_{L^\infty(B_{r/2})} \leq C \fint_{B_r} |f| dy.$$

Dimostrazione. (Vedi capitolo 6 di [5].) Supponiamo innanzitutto che $f \in C^2(\mathbb{R}^N)$ e che f sia convessa. Fissiamo $x \in \mathbb{R}^N$. Allora, per ogni $y \in \mathbb{R}^N$ e $\lambda \in (0,1)$,

$$f(x + \lambda(y - x)) \leq f(x) + \lambda(f(y) - f(x)).$$

Perciò

$$\frac{f(x + \lambda(y - x)) - f(x)}{\lambda} \leq f(y) - f(x).$$

Per $\lambda \to 0$ otteniamo

$$f(y) \geq f(x) + \langle Df(x), (y - x)\rangle \tag{3.7}$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}^N$.
Dato ora il disco $B(x,r) \subset \mathbb{R}^N$, fissiamo un punto $z \in B(x, r/2)$. Allora 3.7 implica che

$$f(y) \geq f(z) + \langle Df(z), (y - z)\rangle.$$

Integrando questa disuguaglianza rispetto ad y su $B(z, r/2)$ troviamo

$$f(z) \leq \fint_{B(z,r/2)} f(y)dy \leq C \fint_{B(x,r)} |f|dy. \tag{3.8}$$

Scegliamo quindi una funzione test a supporto compatto $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ che soddisfa

$$\begin{cases} 0 \leq \zeta \leq 1, & |D\zeta| \leq \frac{C}{r}, \\ \zeta \equiv 1 \text{ su } B(x, \frac{r}{2}), & \zeta \equiv 0 \text{ su } \mathbb{R}^N \setminus B(x,r). \end{cases}$$

Ora 3.7 implica che

$$f(z) \geq f(y) + \langle Df(y), (z-y) \rangle.$$

Moltiplicando questa disuguaglianza per $\zeta(y)$ ed integrando rispetto ad y su $B(x,r)$ si ha:

$$\begin{aligned} f(z) \int_{B(x,r)} \zeta(y)dy &\geq \int_{B(x,r)} f(y)\zeta(y)dy + \int_{B(x,r)} \zeta(y)\langle Df(y), (z-y)\rangle dy \\ &= \int_{B(x,r)} f(y)[\zeta(y) - \text{ div } (\zeta(y)(z-y))]dy \\ &\geq -C \int_{B(x,r)} |f|dy. \end{aligned}$$

Questa disuguaglianza implica che

$$f(z) \geq -C \fint_{B(x,r)} |f|dy,$$

e questa stima, insieme a 3.8 prova che

$$|f(z)| \leq C \fint_{B(x,r)} |f|dy. \tag{3.9}$$

□

Corollario 3.1.3. *Sia f una funzione convessa su un insieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e sia B_r un disco (euclideo) di raggio r tale che $B_r \subset \Omega$. Allora f è localmente lipschitziana e vale*

$$\|Df\|_{L^\infty(B_{r/2})} \leq \frac{C}{r} \|f\|_{L^\infty(B_r)}.$$

Dimostrazione. (Vedi capitolo 3 di [6].) Dimostriamo innanzitutto la continuità di tipo Lipschitz locale. Sappiamo che, poichè f è convessa, essa è anche sottosoluzione in senso viscoso (e limitata) del Laplaciano di ordine ∞

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Sia ora $M = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|$ e poniamo $\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \epsilon\}$. Diciamo che, per $\epsilon < 1$,

$$\sup_{\xi,\eta\in\Omega_\epsilon} \frac{|f(\xi) - f(\eta)|}{|\xi - \eta|} \le \frac{2M}{\epsilon}. \tag{3.10}$$

Infatti, detta $c^+_{x_0,\lambda}(x) = \lambda \cdot |x - x_0|$ (per $\lambda > 0$) la funzione "cono superiore", e scelto $\lambda = 2M/\epsilon$, si dimostra che (vedi [6], pag. 21)

$$c^+_{\xi,\lambda}(x) \ge f(x) - f(\xi) \quad \text{per } x \in \partial B(\xi, \epsilon),$$

$$c^+_{\eta,\lambda}(y) \ge f(y) - f(\eta) \quad \text{per } y \in \partial B(\eta, \epsilon).$$

Di conseguenza

$$c^+_{\xi,\lambda}(\eta) \ge f(\eta) - f(\xi) \ge -c^+_{\eta,\lambda}(\eta),$$

e perciò

$$\lambda|\eta - \xi| \ge f(\eta) - f(\xi) \ge -\lambda|\xi - \eta|.$$

La continuità di tipo Lipschitz locale è quindi dimostrata.
Sia ora $r > 0$ tale che $B_r \subset \Omega$ ed $r/2 < 1$ (ciò non è restrittivo). Sotto queste ipotesi sarà certamente $B_{r/2} \subset \Omega_\epsilon$ con $\epsilon = r/2$. Applicando la disuguaglianza 3.10 con $M = \sup_{B_r} |f(x)|$, otteniamo che

$$\sup_{\xi,\eta\in B_{r/2}} \frac{|f(\xi) - f(\eta)|}{|\xi - \eta|} \le \frac{2M}{\epsilon} \le \frac{C}{r} ||f||_{L^\infty(B_r)}.$$

Se ora scegliamo $\eta = \xi + te_j$, dalla disuguaglianza precedente

$$\sup_{\xi\in B_{r/2}} \frac{|f(\xi) - f(\xi + te_j)|}{|t|} \le \frac{C}{r} ||f||_{L^\infty(B_r)}.$$

Passando al limite per $t \to 0$ su $B_{r/2}$, tutte le derivate parziali sono limitate da $\frac{C}{r}||f||_{L^\infty(B_r)}$, quindi in particolare

$$||Df||_{L^\infty(B_{r/2})} \le \frac{C}{r} ||f||_{L^\infty(B_r)}.$$

□

3.2 Convessità in senso viscoso nel gruppo di Heisenberg

Ora studieremo la nozione di convessità in un gruppo di Carnot particolare, il gruppo di Heisenberg; quello che osserveremo è che le nozioni di convessità date nel sottocapitolo precedente si estendono in modo naturale su questo gruppo, con opportune modifiche (la matrice hessiana simmetrizzata orizzontale invece della matrice hessiana standard, per esempio). In questo sottocapitolo faremo ancora riferimento all'articolo [3], capitolo 3.

3.2.1 Alcune generalità sul gruppo di Heisenberg

Riprendiamo brevemente alcuni fatti fondamentali sul gruppo di Heisenberg $\mathcal{H}$. L'operazione di gruppo in $\mathcal{H} = (\mathbb{R}^3, \cdot)$ è data da

$$p \cdot q = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + 2(y_1 x_2 - x_1 y_2)),$$

dove $p = (x_1, y_1, z_1)$ e $q = (x_2, y_2, z_2)$. L'algebra di Lie $\mathfrak{h}$ è generata dai campi vettoriali invarianti a sinistra X_1, X_2 e X_3 dati da

$$X_1(p) = \frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial z},$$

$$X_2(p) = \frac{\partial}{\partial y} - 2x\frac{\partial}{\partial z},$$

e

$$X_3(p) = -4\frac{\partial}{\partial z} = [X_1, X_2],$$

con $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. L'algebra di Lie $\mathfrak{h}$ ammette una stratificazione; infatti, si decompone come somma diretta di spazi vettoriali

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \bigoplus \mathfrak{h}_2,$$

dove $\mathfrak{h}_1$ è il sottospazio generato da X_1 e X_2 e $\mathfrak{h}_2 = [\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_1]$ è lo spazio 1-dimensionale generato da X_3. Per questo motivo $\mathcal{H}$ è un gruppo di Carnot di passo 2.
Il gruppo $\mathcal{H}$ possiede una famiglia di dilatazioni che sono omomorfismi di gruppo, parametrizzate tramite $r > 0$ e date da

$$\delta_r(x, y, z) = (rx, ry, r^2 z).$$

La mappa esponenziale associa al vettore $xX_1 + yX_2 + zX_3$ nell'algebra di Lie $\mathfrak{h}$ il punto (x, y, z) nel gruppo di Lie $\mathcal{H}$ (per una definizione più precisa della mappa esponenziale vedi il sottocapitolo 3.4.1 di questo scritto). Quest'ultime sono chiamate coordinate esponenziali di primo genere e ci permettono di identificare vettori in $\mathfrak{h}$ con punti in $\mathcal{H}$. Denotiamo con $\mathcal{H}_0$ l'insieme dei vettori orizzontali della forma $h = (x, y, 0)$; tali vettori potrebbero essere pensati anche nella forma $xX_1 + yX_2$. Il sottospazio orizzontale in $p \in \mathcal{H}$ è il sottospazio bidimensionale che è generato linearmente da $X_1(p)$ e $X_2(p)$. Con le notazioni sopra il sottospazio orizzontale può essere identificato con la traslazione sinistra tramite p di $\mathcal{H}_0$, cioè abbiamo

$$p \cdot \mathcal{H}_0 = \text{ span lineare di } \{X_1(p), X_2(p)\}.$$

Una curva orizzontale $\gamma(t)$ è una curva a tratti liscia il cui vettore tangente $\gamma'(t)$ (quando esiste) è nello spazio orizzontale tangente $(\gamma(t)) \cdot \mathcal{H}_0$. Dati due punti p e q consideriamo l'insieme di tutte le possibili curve orizzontali che congiungono questi punti:

$$\Gamma(p, q) = \{\gamma \text{ curva orizzontale } : \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}.$$

Questo insieme non è mai vuoto per il teorema di Chow [6]. La distanza di Carnot-Carathéodory è quindi definita come l'estremo inferiore delle lunghezze delle curve orizzontali dell'insieme Γ:

$$d_{CC}(p, q) = \inf_{\gamma \in \Gamma(p,q)} \int_0^1 |\gamma'(t)| dt.$$

Calcoliamo la lunghezza di un vettore tangente considerando i vettori $\{X_1, X_2\}$ come base ortonormale della metrica sub-riemanniana definita sui sottospazi orizzontali $p \cdot \mathcal{H}_0$. Il disco di Carnot-Carathéodory di raggio R con centro nel punto p è dato da

$$B_d(p, R) = \{q \in \mathcal{H} : d_{CC}(p, q) < r\}.$$

La funzione distanza di Carnot-Carathéodory è data da

$$|p|_{CC} = d_{CC}(0, p).$$

La distanza di Carnot-Carathéodory, essendo costruita in termini di campi vettoriali invarianti a sinistra, è invariante a sinistra e positivamente omogenea di grado 1 su $\mathcal{H}$.

[6] vedi Appendice B.

Per una funzione liscia $u : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ il gradiente orizzontale di u nel punto p è la proiezione del gradiente di u in p sul sottospazio orizzontale $p \cdot \mathcal{H}_0$, ed è dato da

$$D_h u = (X_1 u, X_2 u) \in \mathbb{R}^2.$$

La matrice delle derivate seconde simmetrizzata orizzontale (o hessiana simmetrizzata orizzontale), denotata con $(D_h^2 u)^*$ ha come entrate

$$(D_h^2 u)^*_{ij} = \frac{1}{2}(X_i X_j u + X_j X_i u)$$

per $i, j = 1, 2$.

Scegliamo l'analogo della definizione *iv*) del sottocapitolo precedente come punto di partenza di questo nuovo sottocapitolo.

Definizione 3.2. Sia $\Omega \subset \mathcal{H}$ un insieme aperto e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Diciamo che f è **convessa in senso viscoso**, o semplicemente **v-convessa**, in Ω se

$$(D_h^2 f)^* \geq 0$$

nel senso viscoso. Cioè, se $p \in \Omega$ e $\phi \in C^2$ tocca il grafico di f da sopra in p (ovvero $\phi(p) = f(p)$ e $\phi(q) \geq f(q)$ per q vicino a p), allora $(D_h^2 \phi)^*(p) \geq 0$.

Questa definizione è compatibile con la struttura del gruppo di Heisenberg poichè la v-convessità è preservata da traslazioni a sinistra e dilatazioni. Limiti uniformi di funzioni v-convesse sono v-convessi e l'estremo superiore di una famiglia di funzioni v-convesse è v-convesso, poichè tali risultati valgono per sottosoluzioni viscose.
Allo stesso modo, potremmo considerare l'analogo della definizione *iii*):

Definizione 3.3. Sia $\Omega \subset \mathcal{H}$ un insieme aperto e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua. La funzione f è **v-convessa** se è una sottosoluzione viscosa di tutte le equazioni lineari a coefficienti costanti

$$\mathrm{Tr}\ (A(D_h^2 f)^*) = 0,$$

dove $A \in \mathcal{S}^2$ è definita positiva.

Come nel caso euclideo, le definizioni 3.2 e 3.3 sono equivalenti; ciò è molto facile da dimostrare se si applica il teorema di Féjer (visto nel sottocapitolo precedente) alla funzione ϕ che tocca il grafico di f da sopra in p.
C'è anche un analogo della definizione ii) che coinvolge equazioni totalmente non lineari. Le equazioni in questione sono della forma

$$F(p, f(p), Df(p), (D_h^2 f)^*(p)) = 0,$$

dove Df è il gradiente euclideo di f.
Consideriamo quindi delle funzioni continue

$$F : \mathcal{H} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}^2 \to \mathbb{R}$$

che siano omogenee, proprie e degeneri ellittiche:

$$\begin{cases} F(x, z, p, 0) = 0, \\ F(x, z, p, M) \leq F(x, z', p, M) \text{ se } z \leq z', \\ F(x, z, p, M) \leq F(x, z, p, M') \text{ se } M \leq M'. \end{cases} \tag{3.11}$$

Definizione 3.4. Sia $\Omega \subset \mathcal{H}$ un insieme aperto e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua. La funzione f è **v-convessa** se è una sottosoluzione viscosa di tutte le equazioni

$$F(p, f(p), Df(p), (D_h^2 f)^*(p)) = 0,$$

dove $F(x, z, p, M)$ è una funzione continua che soddisfa 3.11.

Questa definizione è equivalente alle definizioni 3.2 e 3.3. Essa implica la 3.3 perchè possiamo sempre prendere $F(x, z, p, M) = \text{ Tr } (AM)$ con $A \in \mathcal{S}^2$ definita positiva. E' implicata dalla definizione 3.2 poichè

$$F(p, \phi(p), D\phi(p), (D_h^2 \phi)^*(p_0)) \geq F(p, \phi(p), D\phi(p), 0) = 0$$

ogni volta che $\phi \in C^2$ tocca il grafico di f da sopra in p_0.
Cosa dire riguardo all'analogo della definizione i)? Si tratta della nozione di h-convessità

trattata nel prossimo sottocapitolo.
Notiamo che, in particolare, le funzioni convesse sono sottosoluzioni delle seguenti equazioni:

i) il Laplaciano di Hörmander o Laplaciano di Kohn

$$\Delta_h f = (X_1^2 + X_2^2) f = 0,$$

ii) il Q- Laplaciano subellittico per $Q > 2$,

$$\Delta_{Q,h} f = \text{ div }_h (|D_h f|^{Q-2} D_h f) = 0,$$

e

iii) il Laplaciano subellittico di ordine ∞,

$$\Delta_{\infty,h} f = \sum_{i,j=1}^{2} (X_i f)(X_j f)(X_i X_j f) = 0.$$

Qui div_h è la divergenza naturale associata alla famiglia $\{X_1, X_2\}$ e data da

$$\text{div }_h(a,b) = X_1 a + X_2 b.$$

Tutte le equazioni sopra possono essere espresse come

$$F(p, f(p), Df(p), (D_h^2 f)^*(p)) = 0$$

per una funzione continua F che soddisfa 3.11.
Enunciamo ora uno dei teoremi principali di questo sottocapitolo:

Teorema 3.2.1. *Sia $\Omega \subset \mathcal{H}$ un insieme aperto e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione* v-*convessa. Sia B_R un disco tale che $B_{4R} \subset \Omega$. Allora f è localmente limitata e si ha che*

$$\|f\|_{L^\infty(B_R)} \leq C \fint_{B_{4R}} |f| dx. \tag{3.12}$$

Inoltre, f è localmente lipschitziana e abbiamo la stima

$$\|D_h f\|_{L^\infty(B_R)} \leq \frac{C}{R} \|f\|_{L^\infty(B_{2R})}. \tag{3.13}$$

Qui C è una costante indipendente da f e da R. Il disco B_R è inteso come il disco di Carnot-Carathéodory di raggio R, ed f si intende localmente lipschitziana rispetto alla distanza di Carnot-Carathéodory. In più, se f è C^2, allora le derivate seconde simmetrizzate orizzontali sono non negative:

$$(D_h^2 f)^* \geq 0. \tag{3.14}$$

La dimostrazione di questo teorema esula dagli scopi di queste pagine e può essere trovata in [3], capitolo 3.

Osservazione 1. (Un cambio di variabile molto utile.) Il nostro scopo è ora quello di riscrivere nel gruppo di Heisenberg il teorema 2.4.1, che caratterizzava le funzioni convesse su un aperto convesso di $\mathbb{R}^N$ come le funzioni per cui vale una particolare formula di sottomedia. Tra poco dimostreremo che vale una versione analoga in $\mathcal{H}$.
Per fare questo, abbiamo bisogno di un cambio di variabile che ci permetta di scrivere $\text{Tr}\ (A(D_h^2 f)^*)$ come una somma di quadrati di campi vettoriali. Ricordiamo che i campi di Heisenberg sono

$$X_1 = \partial_{x_1} + 2x_2\partial_{x_3}, \quad X_2 = \partial_{x_2} - 2x_1\partial_{x_3}.$$

Poniamo allora

$$\begin{aligned} x_1 &= (a_{11}\xi_1 + a_{21}\xi_2)\frac{c}{detA}, \\ x_2 &= (a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2)\frac{c}{detA}, \\ x_3 &= \xi_3 c, \end{aligned}$$

dove c è una costante diversa da zero. Risolvendo un semplice sistema lineare, e quindi invertendo, troviamo che

$$\begin{aligned} \xi_1 &= (a_{22}x_1 - a_{21}x_2)c^{-1}, \\ \xi_2 &= (-a_{12}x_1 + a_{11}x_2)c^{-1}, \\ \xi_3 &= x_3 c^{-1}. \end{aligned}$$

Chiamo ora $\tilde{u}(\xi) = u(x)$. Con questo cambio di variabile e con un semplice calcolo si ottiene che i "nuovi" campi saranno:

$$\begin{aligned}
\tilde{X_1}\tilde{u} &= (\partial_{\xi_1} + 2\xi_2\partial_{\xi_3})\tilde{u} \\
&= (\partial_{x_1}u\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \partial_{x_2}u\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}) + 2\xi_2\partial_{x_3}u\frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \\
&= \frac{a_{11}c}{detA}\partial_{x_1}u + \frac{a_{12}c}{detA}\partial_{x_2}u + 2c\partial_{x_3}u(-a_{12}x_1 + a_{11}x_2)c^{-1} \\
&= \frac{a_{11}c}{detA}\partial_{x_1}u + \frac{a_{12}c}{detA}\partial_{x_2}u - 2a_{12}x_1\partial_{x_3}u + 2a_{11}x_2\partial_{x_3}u.
\end{aligned}$$

A questo punto, scegliendo $c = detA$, si ha proprio che

$$\tilde{X_1}\tilde{u} = a_{11}X_1u + a_{12}X_2u.$$

Calcolando anche $\tilde{X_2}\tilde{u}$, troviamo che

$$\begin{aligned}
\tilde{X_2}\tilde{u} &= (\partial_{\xi_2} - 2\xi_1\partial_{\xi_3})\tilde{u} \\
&= (\partial_{x_1}u\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + \partial_{x_2}u\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}) - 2\xi_1\partial_{x_3}u\frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \\
&= \frac{a_{21}c}{detA}\partial_{x_1}u + \frac{a_{22}c}{detA}\partial_{x_2}u - 2c\partial_{x_3}u(a_{22}x_1 - a_{21}x_2)c^{-1} \\
&= \frac{a_{21}c}{detA}\partial_{x_1}u + \frac{a_{22}c}{detA}\partial_{x_2}u - 2a_{22}x_1\partial_{x_3}u + 2a_{21}x_2\partial_{x_3}u.
\end{aligned}$$

Ponendo ancora $c = detA$, si ha che

$$\tilde{X_2}\tilde{u} = a_{21}X_1u + a_{22}X_2u.$$

Abbiamo perciò ricavato che i nuovi campi $\tilde{X_1}$ e $\tilde{X_2}$ si possono esprimere come

$$\tilde{X}\tilde{u} = A^TXu,$$

dove A è una matrice 2×2 con determinante diverso da zero (non si richiede, infatti, che A sia simmetrica). Possiamo quindi scrivere che

$$\text{Tr }(A^TA(D_h^2u)^*)(x) = \text{ Tr }((\tilde{D_h^2}\tilde{u})^*)(\xi). \tag{3.15}$$

Si tratta di un risultato decisivo per il nostro percorso; abbiamo infatti scritto una combinazione lineare di quadrati dei campi di Heisenberg (originali) X_1 e X_2 come una somma di quadrati dei "nuovi" campi $\tilde{X_1}$ e $\tilde{X_2}$. Questa uguaglianza ci permette ora di caratterizzare le funzioni v-convesse come funzioni per cui vale una particolare formula di sottomedia.

Ora enunciamo e dimostriamo il seguente teorema, analogo al teorema 2.4.1, che caratterizza le funzioni v-convesse nel gruppo di Heisenberg come funzioni che realizzano una particolare formula di sottomedia. Quello che otterremo è una disuguaglianza puntuale che non fa intervenire le derivate parziali della funzione v-convessa.

Teorema 3.2.2. *Sia $u \in C^2(\mathcal{H}, \mathbb{R})$. Indichiamo con $B_d(x, r)$ il disco di Carnot-Carathéodory* [7] *di centro x e raggio r. Allora u è* v*-convessa se e solo se vale la formula di sottomedia*

$$u_A(x) = \tilde{u}((A^T)^{-1}x) \leq \mathcal{M}_r(\tilde{u})((A^T)^{-1}x) \quad \forall A \text{ matrice } 2 \times 2 \text{ con } detA \neq 0. \tag{3.16}$$

(Ricordiamo che nella disequazione sopra $\mathcal{M}_r$ è l'operatore di media che compare nella definizione B.6 in Appendice B.)

Dimostrazione. Supponiamo che u sia v-convessa. Per quanto visto precedentemente sulla convessità nel gruppo di Heisenberg, sappiamo che ciò è equivalente a dire che

$$\text{Tr } (B(D_h^2 u)^*) \geq 0 \text{ in senso viscoso}, \quad \forall B \in \mathcal{S}^2, B \geq 0.$$

Ora, fattorizzando la matrice B come $B = A^T A$ otteniamo che

$$\text{Tr } (A^T A(D_h^2 u)^*) \geq 0 \text{ in senso viscoso}, , \quad \forall A \quad 2 \times 2 \text{ con } detA \neq 0. \tag{3.17}$$

Alla stregua dell'osservazione precedente, operiamo il cambio di variabile $u(x) = \tilde{u}(\xi)$. Grazie a quanto già visto, si ha che

$$\text{Tr } ((\tilde{D_h^2}\tilde{u})^*)(\xi) = \text{ Tr } ((A^T A)(D_h^2 u)^*)(x).$$

Tuttavia, essendo il membro di destra dell'equazione sopra un operatore riconducibile a quello che compare in 3.17, variando leggermente notazione possiamo scrivere che

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}}\tilde{u}(\xi) = \tilde{X_1}^2\tilde{u}(\xi) + \tilde{X_2}^2\tilde{u}(\xi) \geq 0 \quad \text{ in senso viscoso.}$$

In particolare, ciò significa che se $\xi \in \mathcal{H}$ e $\phi \in C^2(\mathcal{H})$ tocca il grafico di $\tilde{u}$ da sopra in ξ (ovvero $\phi(\xi) = \tilde{u}(\xi)$ e $\phi(q) \geq \tilde{u}(q)$ per q vicino a ξ), allora

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}}\phi(\xi) \geq 0.$$

[7] vedi Appendice B.

Tale ϕ è perciò una funzione $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}$-subarmonica; vale infatti il teorema B.0.10 in appendice. Poichè quindi $\phi \in \underline{\mathcal{S}}(\mathcal{H})$, applicando il teorema B.0.11 si ha subito che ϕ è sottomedia, cioè vale che

$$\mathcal{M}_r(\phi)(\xi) = \frac{\beta_d(Q-2)}{r^{Q-1}} \int_{\partial B_d(\xi,r)} \phi(y) K_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}(\xi, y) d\sigma(y) \geq \phi(\xi), \tag{3.18}$$

dove β_d è una costante > 0 e $K_{\mathcal{L}_{\mathcal{H}}}$ è un nucleo [8].
A questo punto sappiamo che $\phi(\xi) = \tilde{u}(\xi)$, e inoltre, scegliendo y sul bordo di $B_d(\xi, r)$, con r piccolo, si ha che $\phi(y) \geq \tilde{u}(y)$. Riscrivendo adeguatamente la disuguaglianza 3.18, otteniamo che

$$\mathcal{M}_r(\tilde{u})(\xi) \geq \tilde{u}(\xi). \tag{3.19}$$

Tuttavia, ricordandoci che grazie al cambio di variabile era $\tilde{u}(\xi) = \tilde{u}((A^T)^{-1}x)$, e riscrivendo la disuguaglianza precedente, si ha che

$$u_A(x) = \tilde{u}((A^T)^{-1}x) \leq \mathcal{M}_r(\tilde{u})((A^T)^{-1}x) \quad \forall A \text{ con } detA \neq 0. \tag{3.20}$$

Abbiamo così ottenuto la 3.16.
Per il viceversa basta ripercorrere i passaggi appena fatti parola per parola in senso contrario, a partire dalla 3.20.

□

Osserviamo infine che tutte le funzioni di classe C^2 v-convesse, poichè hanno la proprietà di sottomedia, soddisfano anche opportuni principi del massimo ed un particolare criterio di sommabilità (vedi Appendice B, teoremi B.0.12 e B.0.13).

3.3 Convessità orizzontale debole

Per completare il quadro delle equivalenze fra le varie definizioni di convessità nel gruppo di Heisenberg, è opportuno introdurre una delle ultime nozioni, la convessità orizzontale debole. Per fare questo ci riferiamo all'articolo [16] di Danielli, Garofalo e Nhieu.

[8] Vedi Appendice B.

Cominciamo subito con una notazione. Per un dato insieme aperto $\Omega \subset \mathcal{H}$, la classe $\Gamma^1(\Omega)$ (rispettivamente: $\Gamma^2(\Omega)$) rappresenta la famiglia di tutte le funzioni $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tali che le derivate $X_\alpha u$ (rispettivamente: $X_\alpha X_{\alpha'} u$), $\alpha, \alpha' = 1, 2$ esistono e sono funzioni continue su Ω.
Enunciamo ora la seguente proposizione:

Proposizione 3.3.1. *Consideriamo un punto $g_0 \in \mathcal{H}$. Il piano orizzontale $\mathcal{H}_{g_0}$ passante per g_0 è l'iperpiano in $\mathcal{H}$ generato da $\{X_1(g_0), X_2(g_0)\}$. Si verifica facilmente che*

$$\mathcal{H}_{g_0} = \{g = (x, y, t) \in \mathcal{H} | t = t_0 + 2xy_0 - 2x_0 y\}.$$

Diamo ora una definizione di fondamentale importanza per questo sottocapitolo.

Definizione 3.5. Dati due punti $g, g' \in \mathcal{H}$, per $\lambda \in [0, 1]$ chiameremo

$$g_\lambda = g_\lambda(g, g') := g \cdot \delta_\lambda(g^{-1} \cdot g') \tag{3.21}$$

la **"combinazione convessa"** di g e g' basata su g.

Osserviamo subito che, se $g = (x, y, t)$ e $g' = (x', y', t')$ sono due punti di $\mathcal{H}$, è possibile verificare che

$$g_\lambda = (x + \lambda(x' - x), y + \lambda(y' - y), \tag{3.22}$$
$$t + 2\lambda(x'y - xy') + \lambda^2(t' - t + 2xy' - 2x'y)). \tag{3.23}$$

Prima di presentare la definizione di funzione h-convessa in senso debole, descriviamo il comportamento di una funzione calcolata nella combinazione convessa g_λ. Data $u \in C^2(\mathcal{H})$ e dati due punti arbitrari (ma fissati) $g = (x, y, t), g' = (x', y', t')$ in $\mathcal{H}$, introduciamo la funzione $\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definita come

$$\phi(\lambda) = u(g_\lambda) \tag{3.24}$$

dove g_λ è come in (3.22) e (3.23). Chiaramente è $\phi \in C^2(0, 1)$, e inoltre

$$\phi(0) = u(g), \quad \phi(1) = u(g'), \quad \phi'(0) = \quad \langle Xu(g), x(g') - x(g) \rangle^9. \tag{3.25}$$

[9]Con X intendiamo il sistema di riferimento $X = \{X_1, X_2\}$.

Ricordandoci che vale 3.25, e applicando la formula di Taylor standard a $\phi(y)$ abbiamo

$$u(g') - u(g) - \langle Xu(g), x(g') - x(g) \rangle = \int_0^1 (1-\lambda)\phi''(\lambda) d\lambda. \tag{3.26}$$

Siamo interessati ad ottenere un'espressione esplicita di $\phi''(\lambda)$. Abbiamo che

$$\phi'(\lambda) = X_1 u(g_\lambda)(x'-x) + X_2 u(g_\lambda)(y'-y) + 2\lambda u_t(g_\lambda)\{t' - t + 2xy' - 2x'y\}. \tag{3.27}$$

Ora, un calcolo basato sull'uguaglianza precedente ci dà

$$\begin{aligned}\phi''(\lambda) = {} & X_1^2 u(g_\lambda)(x'-x)^2 + X_1 X_2 u(g_\lambda)(x'-x)(y'-y) \\ & + X_2 X_1 u(g_\lambda)(x'-x)(y'-y) + X_2^2 u(g_\lambda)(y'-y)^2 \\ & + 2(t' - t + 2(xy' - x'y))\{u_t(g_\lambda) \\ & + 2\lambda[X_1(u_t)(g_\lambda)(x'-x) + X_2(u_t)(g_\lambda)(y'-y)] \\ & + 2\lambda^2(t' - t + 2(xy' - x'y))u_{tt}(g_\lambda)\}.\end{aligned}$$

Questa formula rivela una proprietà notevole. Se prendiamo il punto g' appartenente al piano orizzontale $\mathcal{H}_g$ passante per g, allora in vista della proposizione 3.3.1 abbiamo che $t' - t + 2(xy' - x'y) = 0$, e l'equazione precedente si riduce a

$$\phi''(\lambda) = X_1^2 u(g_\lambda)(x'-x)^2 + X_1 X_2 u(g_\lambda)(x'-x)(y'-y) \tag{3.28}$$
$$+ X_2 X_1 u(g_\lambda)(x'-x)(y'-y) + X_2^2 u(g_\lambda)(y'-y)^2 \tag{3.29}$$
$$= \langle (D_h^2 u)^*(g_\lambda)\zeta, \zeta \rangle, \tag{3.30}$$

dove abbiamo posto $\zeta^T = (x'-x, y'-y)$. Abbiamo così dimostrato che vale il seguente risultato:

Proposizione 3.3.2. *Sia $u \in \Gamma^2(\mathcal{H})$. Per ogni $g = (x,y,t) \in \mathcal{H}$ fissato e per ogni $g' = (x', y', t') \in \mathcal{H}_g$, si ha che*

$$\phi''(\lambda) = \langle (D_h^2 u)^*(g_\lambda)\zeta, \zeta \rangle,$$

dove $\zeta^T = (x'-x, y'-y) \in \mathbb{R}^2$.

Siamo ora pronti per dare la definizione più importante di questo sottocapitolo.

Definizione 3.6. Sia $\mathcal{H}$ il gruppo di Heisenberg. Una funzione $u : \mathcal{H} \to (-\infty, \infty]$ è chiamata **debolmente h-convessa** se è propria, cioè se $\{g \in \mathcal{H} | u(g) \neq +\infty\} \neq \mathcal{H}$, e se per ogni $g \in \mathcal{H}$ si ha che, per ogni $0 \leq \lambda \leq 1$

$$u(g_\lambda) \leq u(g) + \lambda(u(g') - u(g)),$$

per ogni $g' \in \mathcal{H}_g$. Quando vale la disuguaglianza stretta diciamo che u è **strettamente h-convessa**. Il **dominio effettivo** di u è l'insieme

$$dom_H u = \{g \in \mathcal{H} | u(g) < \infty\}.$$

Denotiamo con $C_h^w(\mathcal{H})$ la classe di tutte le funzioni debolmente h-convesse su $\mathcal{H}$.

Quando u è sufficientemente regolare otteniamo la seguente conseguenza.

Proposizione 3.3.3. *Supponiamo che $u : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ sia debolmente* h-*convessa. Se $u \in \Gamma^1(\mathcal{H})$, per ogni fissato $g \in \mathcal{H}$ si ha che*

$$\langle Xu(g), \xi_1(g') - \xi_1(g) \rangle + u(g) \leq u(g') \qquad \textit{per ogni } g' \in \mathcal{H}_g.$$

Dimostrazione. Dalla definizione (3.6) abbiamo che

$$\frac{u(g_\lambda) - u(g)}{\lambda} \leq u(g') - u(g).$$

Se ora passiamo al limite per $\lambda \to 0$ otteniamo la conclusione[10].

□

Finalmente, osserviamo che la convessità orizzontale debole di una funzione nella classe Γ^2 è caratterizzata dalla positività della sua matrice hessiana simmetrizzata orizzontale.

Teorema 3.3.4. *Una funzione $u \in \Gamma^2(\mathcal{H})$ è debolmente* h-*convessa se e solo se la matrice hessiana simmetrizzata orizzontale $(D_h^2 u)^*$ è semidefinita positiva in ogni $g \in \mathcal{H}$.*

[10] Per una dimostrazione più rigorosa, vedi [17].

Dimostrazione. Proviamo innanzitutto la necessità. Supponiamo che $u \in \Gamma^2(\mathcal{H})$ sia debolmente h-convessa. Se fissiamo $g \in \mathcal{H}$, dalla proposizione 3.3.3 otteniamo

$$u(g') \geq u(g) + \langle Xu(g), \xi_1(g') - \xi_1(g) \rangle, \qquad \text{per ogni } g' \in \mathcal{H}_g. \tag{3.31}$$

Dalla disuguaglianza precedente, da (3.26) e dalla proposizione 3.3.2 concludiamo che

$$0 \leq \int_0^1 (1-\lambda) \langle (D_h^2 u)^*(g_\lambda)\zeta, \zeta \rangle d\lambda, \tag{3.32}$$

dove $\zeta^T = (x' - x, y' - y) \in \mathbb{R}^2$.
A questo punto, dato un qualsiasi vettore $\zeta = (\xi, \eta)^T \in \mathbb{R}^2$, ed un qualsiasi $0 < \tau < 1$, scegliamo $g' = (x', y', t') \in \mathcal{H}_g$ tale che $g^{-1} \cdot g' = \delta_\tau(\xi, \eta, 0) =: \delta_\tau \tilde{\zeta}$. In altre parole vogliamo prendere

$$x' - x = \tau\xi, \quad y' - y = \tau\eta, \quad t' - t + 2(xy' - x'y) = 0.$$

Certamente questo può essere fatto scegliendo

$$x' = x + \tau\xi, \quad y' = y + \tau\eta, \quad t' = t + 2\tau(\xi y - x\eta).$$

Inserendo questa scelta in 3.32, troviamo

$$0 \leq \int_0^1 (1-\lambda) \langle (D_h^2 u)^*(g \cdot \delta_\lambda(\delta_\tau \tilde{\zeta}))\zeta, \zeta \rangle d\lambda. \tag{3.33}$$

Osservando che $g \cdot \delta_\lambda(\delta_\tau \tilde{\zeta}) \to g$ per $\tau \to 0$, e utilizzando la continuità delle derivate seconde orizzontali di u, concludiamo da 3.33 che

$$0 \leq \langle (D_h^2 u)^*(g)\zeta, \zeta \rangle, \tag{3.34}$$

e questo dimostra la prima parte del teorema.
Supponiamo ora che valga 3.34 per ogni $g \in \mathcal{H}$ e per ogni $\zeta = (\xi, \eta)^T \in \mathbb{R}^2$. Proveremo che u è debolmente h-convessa. Fissiamo $g \in \mathcal{H}$ e consideriamo un arbitrario $g' \in \mathcal{H}_g$. La proposizione 3.3.2 implica che

$$\phi''(\lambda) = \langle (D_h^2 u)^*(g_\lambda)\zeta, \zeta \rangle,$$

dove ora $\zeta^T = (x' - x, y' - y)$. In base alle ipotesi abbiamo $\phi''(\lambda) \geq 0$. Poichè $\phi \in C^2(0,1)$, affermiamo che $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ è convessa. Ciò in particolare ci dà che

$$\phi(\lambda) \leq (1-\lambda)\phi(0) + \lambda\phi(1), \qquad \text{per ogni } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

La disuguaglianza sopra può essere riscritta in termini di u come

$$u(g_\lambda) \leq (1-\lambda)u(g) + \lambda u(g'),$$

e ciò prova che u è debolmente h-convessa.

□

Come vedremo tra poco, il teorema precedente continua ad essere valido in qualunque gruppo di Carnot $\mathcal{G}$.

3.4 Convessità nei gruppi di Carnot

Passiamo ora ad un ambiente ancora più generale, i gruppi di Carnot. Vedremo che anche qui, così come nel gruppo di Heisenberg, le nozioni di convessità viste in $\mathbb{R}^N$ si estendono in maniera abbastanza naturale; vedi [8], capitoli 3 e 4.

3.4.1 Alcune generalità sui gruppi di Carnot

Ricordiamo brevemente alcuni fatti di base sui gruppi di Carnot. Un gruppo di Carnot $\mathcal{G}$ di passo $r \geq 1$ è un gruppo di Lie nilpotente e semplicemente connesso la cui algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è stratificata. Ciò significa che $\mathfrak{g}$ ammette una decomposizione come somma di spazi vettoriali

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \bigoplus \mathfrak{g}_2 \bigoplus \cdots \bigoplus \mathfrak{g}_r$$

tale che

$$[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_j] = \mathfrak{g}_{j+1}$$

per $j = 1, ..., r$ con $\mathfrak{g}_k = \{0\}$ per $k > r$. Notiamo che $\mathfrak{g}$ è generata come algebra di Lie da $\mathfrak{g}_1$.

Sia $m_j = \dim(\mathfrak{g}_j)$ e scegliamo una base di $\mathfrak{g}_j$ formata da campi vettoriali invarianti a sinistra:

$$\mathfrak{X} = \{X_{i,j} : i = 1, ..., m_j, j = 1, ..., r\}.$$

La dimensione di $\mathcal{G}$ come varietà è $n = m_1 + ... + m_r$. Lo spazio tangente orizzontale nel punto $p \in \mathcal{G}$ è il sottospazio m_1-dimensionale di $\mathfrak{g}$ spannato da $\{X_{1,1}(p), ..., X_{1,m_1}(p)\}$.

D'ora in poi ometteremo il primo indice e indicheremo con $\{X_1, ..., X_{m_1}\}$ un sistema di riferimento di campi vettoriali che spanna il primo strato $\mathfrak{g}_1$.
(Giunti a questo punto è bene ricordare che, dato $\mathcal{G}$ gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$ e $\mathfrak{g}$ la sua algebra di Lie, la mappa esponenziale del gruppo di Lie $\mathcal{G}$ è definita come

$$\text{Exp} : \mathfrak{g} \to \mathcal{G}, \quad \text{Exp}(X) = \gamma(1, X, 0).$$

Esplicitamente, $\text{Exp}(X)$ è il valore al tempo $t = 1$ del cammino $\gamma(t)$ soluzione di $\dot{\gamma}(t) = XI(\gamma(t))$, con $\gamma(0) = 0$. Si dimostra inoltre che Exp è un diffeomorfismo di classe C^∞ locale di un intorno di $0 \in \mathfrak{g}$ in un intorno di $0 \in \mathcal{G}$.)
Con le notazioni sopra il sottospazio orizzontale può essere identificato con la traslazione sinistra verso p di $\mathcal{G}_1 = \text{Exp}(\mathfrak{g}_1)$, il sottospazio orizzontale nell'origine, attraverso la mappa esponenziale; cioè, abbiamo

$$p \cdot \mathcal{G}_1 = \text{ span lineare di } \{X_1(p), ..., X_{m_1}(p)\}.$$

Una curva orizzontale $\gamma(t)$ è una curva liscia a tratti il cui vettore tangente $\gamma'(t)$ (se esiste) è nello spazio tangente orizzontale $\gamma(t) \cdot \mathcal{G}_1$. Dati due punti p e q consideriamo l'insieme di tutte le possibili curve orizzontali che congiungono tali punti:

$$\Gamma(p,q) = \{\gamma \text{ curve orizzontali } : \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}.$$

Questo insieme non è mai vuoto per il teorema di Chow [11].
La distanza di Carnot-Carathéodory (come nel gruppo di Heisenberg) è definita come l'estremo inferiore delle lunghezze delle curve orizzontali dell'insieme Γ:

$$d_{CC}(p,q) = \inf_{\Gamma(p,q)} \int_0^1 |\gamma'(t)| dt.$$

Il disco di Carnot-Carathéodory di raggio R centrato nel punto p è dato da

$$B_d(p,R) = \{q \in \mathcal{G} : d_{CC}(p,q) < R\}.$$

Si può dimostrare che il volume di tale disco può essere stimato con

$$\text{vol } (B_d(0,R)) \sim r^Q$$

[11] Vedi Appendice B.

per un opportuno r; qui Q è la dimensione omogenea di $\mathcal{G}$ definita come $Q = \sum_{j=1}^{r} j m_j$.
Le dilatazioni naturali (non isotropiche) δ_t in $\mathcal{G}$ sono date in coordinate esponenziali da

$$\delta_t\left(\operatorname{Exp}\left(\sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{m_j} p_{i,j} X_{i,j} \right)\right) = \operatorname{Exp}\left(\sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{m_j} t^j p_{i,j} X_{i,j} \right),$$

per $t > 0$. Queste dilatazioni sono omomorfismi di gruppo. Per t negativi definiamo $\delta_t = (\delta_{-t})^{-1}$.
Per una funzione liscia $u : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ il gradiente relativo ad $\mathfrak{X}$ può essere scritto come il vettore

$$D_{\mathfrak{X}} u = (X_{i,j} u)_{j=1,\dots,r, i=1,\dots,m_j}.$$

Il gradiente orizzontale di u nel punto p è allora la proiezione del gradiente di u in p sul sottospazio orizzontale $p \cdot \mathcal{G}_1$, ed è dato da

$$D_h u = (X_1 u, ..., X_{m_1} u).$$

La matrice delle derivate seconde simmetrizzata orizzontale, come per il gruppo di Heisenberg, e denotata con $(D_h^2 u)^*$, è la matrice $m_1 \times m_1$ con entrate

$$(D_h^2 u)^*_{ij} = \frac{1}{2}(X_i X_j u + X_j X_i u)$$

per $i, j = 1, 2, ..., m_1$.

Riportiamo ora la definizione di convessità in senso viscoso in un gruppo di Carnot; questa discende in modo naturale da quella data nel gruppo di Heisenberg:

Definizione 3.7. Sia $\Omega \subset \mathcal{G}$ un insieme aperto e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Diciamo che f è **convessa** in Ω (in senso viscoso) se

$$(D_h^2 f)^* \geq 0$$

in senso viscoso. Ovvero: se $p \in \Omega$ e $\phi \in C^2$ tocca il grafico di f da sopra in p ($\phi(p) = f(p)$ e $\phi(q) \geq f(q)$ per q vicino a p) abbiamo $(D_h^2 \phi)^*(p) \geq 0$.

Questa definizione è compatibile con la struttura di gruppo stratificato poichè la convessità è preservata dalle traslazioni sinistre e dalle dilatazioni. Come nel caso del gruppo di Heisenberg, limiti uniformi di funzioni convesse sono convessi e l'estremo superiore di una famiglia di funzioni convesse è convesso, poichè questi risultati valgono in generale per sottosoluzioni viscose.

Definizione 3.8. (Vedi [16], pag. 289.) Sia $\mathcal{G}$ un gruppo di Carnot. Una funzione $f : \mathcal{G} \to (-\infty, \infty]$ è chiamata **debolmente h-convessa** se è propria, ovvero $\{g \in \mathcal{G} | f(g) = +\infty\} \neq \mathcal{G}$, e se per ogni $g \in \mathcal{G}$ si ha che, per ogni $0 \leq \lambda \leq 1$

$$f(g_\lambda) \leq f(g) + \lambda(f(g') - f(g)),$$

per ogni $g' \in g \cdot \mathcal{G}_1$. Qui, come accadeva nel gruppo di Heisenberg, g_λ è la combinazione convessa definita come

$$g_\lambda = g_\lambda(g, g') := g \cdot \delta_\lambda(g^{-1} \cdot g')$$

per ogni $g, g' \in \mathcal{G}$ e per $\lambda \in [0, 1]$. Il **dominio effettivo** di f è l'insieme

$$dom_h f = \{g \in \mathcal{G} | f(g) < \infty\}.$$

Nel sottocapitolo precedente abbiamo dimostrato che, sotto opportune ipotesi di regolarità, nel gruppo di Heisenberg una funzione debolmente h-convessa è anche v-convessa. Vale lo stesso teorema anche in un gruppo di Carnot, e la dimostrazione è analoga[12].
Dimostreremo tra poco un teorema che caratterizza in maniera ancora più ampia le funzioni convesse (nel senso della definizione (3.7)) e orizzontalmente convesse.
Un'osservazione chiave è che il concetto di convessità in $\mathcal{H}$ dipende solo dalla distribuzione orizzontale e non dalla particolare scelta di una base di $\mathfrak{g}_1$. Più precisamente, consideriamo due sistemi di riferimento orizzontali linearmente indipendenti

$$\mathfrak{X}_h = \{X_1, ..., X_{m_1}\}, \quad \mathfrak{Y}_h = \{Y_1, ..., Y_{m_1}\}$$

e scriviamo $X_i = \sum_{j=1}^{m_1} a_{ij} Y_j$, per alcune costanti a_{ij}. Sia A la matrice con entrate a_{ij}. La matrice A è non singolare e vale la seguente formula per ogni funzione liscia ϕ:

$$(D^2_{h,\mathfrak{X}} \phi(p))^* = A(D^2_{h,\mathfrak{Y}} \phi(p))^* A^t.$$

[12] Vedi [16], pag. 293.

Perciò la matrice $(D^2_{h,\mathfrak{X}}\phi(p))^*$ è definita positiva se e solo se $(D^2_{h,\mathfrak{D}}\phi(p))^*$ lo è.

Dato un sistema di riferimento $\mathfrak{X}$, denotiamo con

$$\Delta_{\mathfrak{X}} f = \sum_{i=1}^{m_1} X_i^2 f$$

il corrispondente Laplaciano di Hörmander-Kohn.
Il principale risultato di questo sottocapitolo è l'analogo nei gruppi di Carnot del teorema (3.1.1). Consideriamo delle funzioni continue

$$F : \mathcal{G} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m_1} \times \mathcal{S}^{m_1} \to \mathbb{R}$$

che siano omogenee, proprie ed ellittiche degeneri:

$$\begin{cases} F(p,z,h,0) = 0, \\ F(p,z,h,M) \le F(p,z',h,M) \text{ se } z \le z', \\ F(p,z,h,M) \le F(p,z,h,M') \text{ se } M' \le M. \end{cases} \tag{3.35}$$

Teorema 3.4.1. *Sia $f : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo anche che $f \in L^1_{loc}(\mathcal{G})$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

i) f è propria, e per ogni $g \in \Omega$ si ha che, per ogni $0 \le \lambda \le 1$

$$f(g_\lambda) \le f(g) + \lambda(f(g') - f(g)), \tag{3.36}$$

per ogni $g' \in g \cdot \mathcal{G}_1$.

ii) f è sottosoluzione viscosa di tutte le equazioni

$$F(p, f(p), D_h f(p), (D_h^2 f(p))^*) = 0,$$

dove $F(x,z,p,M)$ soddisfa 3.35.

iii) f è sottosoluzione viscosa di tutte le equazioni lineari a coefficienti costanti

$$F(p, f, D_h f, (D_h^2 f)^*) = \ Tr\ (A(D_h^2 f)^*) = 0,$$

dove $A \in \mathcal{S}^{m_1}$ è definita positiva.

iv) f soddisfa la disuguaglianza $\Delta_{\mathfrak{D}} f \geq 0$ in senso viscoso per tutti i sistemi di riferimento $\mathfrak{D}$ tali che $\mathfrak{D}_h = A\mathfrak{X}_h$, dove $A \in \mathcal{S}^{m_1}$ è definita positiva.

v) f soddisfa la disuguaglianza

$$(D_h^2 f)^* \geq 0$$

in senso viscoso.

La condizione $i)$ è generalmente chiamata convessità orizzontale debole, mentre la condizione $v)$ è chiamata v-convessità.

Dimostrazione. L'equivalenza tra le condizioni $ii), iii), iv)$ e $v)$ segue facilmente da fatti di algebra lineare come nel teorema (3.1.1). Se vale inoltre una di queste condizioni, allora f è localmente limitata (vedi Teorema 3.4.4); infatti, in tal caso, f è sempre sottosoluzione del corrispondente Laplaciano di ordine ∞.

Per provare l'equivalenza di $i)$ con le altre condizioni dobbiamo dimostrare che le funzioni convesse possono essere approssimate tramite funzioni convesse lisce; ciò risulta molto conveniente nel nostro caso, poichè la disuguaglianza 3.36 si mantiene per convoluzione con un mollificatore liscio. A questo proposito risulta molto utile un articolo di Bonfiglioli e Lanconelli [13] nel quale le funzioni $\Delta_{\mathcal{G}}$-subarmoniche [14] sono caratterizzate tramite una proprietà di sottomedia [15] ed è dimostrato che le funzioni $\Delta_{\mathcal{G}}$-subarmoniche possono essere approssimate tramite funzioni $\Delta_{\mathcal{G}}$-subarmoniche lisce [16].
Sia quindi $J \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $J \geq 0$ tale che supp $J \subseteq B(0,1)$ e $\int_{\mathbb{R}^N} J = 1$. Per $\epsilon > 0$, poniamo

$$J_\epsilon(x) := J(\delta_{\epsilon^{-1}}(x)\epsilon^{-Q}. \tag{3.37}$$

[13] Vedi [9].
[14] Vedi definizione B.5 e teorema B.0.10 in Appendice B. Per la condizione (iv) del teorema che stiamo dimostrando, possiamo affermare che le nostre funzioni convesse sono $\Delta_{\mathcal{G}}$-subarmoniche "in senso viscoso".
[15] Vedi teorema 4.1 in [9], oppure teorema B.0.11 in Appendice B.
[16] Vedi lemma 4.2 in [9].

Sia $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto. Definiamo quindi il **mollificatore di Friedrichs di** f (relativo a $\mathcal{G}$) come segue: se $x \in \Omega$ e $\hat{\mathrm{B}}(x,\epsilon) := \{y \in \mathbb{R}^N : |x \cdot y^{-1}| < \epsilon\} \subset\subset \Omega$, allora

$$f_\epsilon(x) := (f *_{\mathcal{G}} J_\epsilon)(x) = \int_\Omega f(y) J_\epsilon(x \cdot y^{-1}) dy. \tag{3.38}$$

In questa scrittura $*_{\mathcal{G}}$ indica la **convoluzione** nel gruppo di Carnot $\mathcal{G}$; notiamo inoltre che questo mollificatore dipende solo da $\mathcal{G} = (\mathbb{R}^N, \cdot, \delta_\lambda)$ e da J, ma non dal sistema di riferimento $\mathfrak{X}$. Si può quindi facilmente dimostrare che $f_\epsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$, dove $\Omega_\epsilon := \{x \in \Omega : \hat{\mathrm{B}}(x,\epsilon) \subset\subset \Omega\}$, e che $f_\epsilon \to f$ in $L^1_{loc}(\Omega)$ per $\epsilon \to 0^+$.

Lemma 3.4.2. *Nelle notazioni precedenti, sia J_ϵ come in 3.37. Supponiamo che $\Omega \subset \mathcal{G}$ sia un dominio e che $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ sia una funzione continua. Per $p \in \Omega_\epsilon$ definiamo f_ϵ come in 3.38. Allora se f è $\Delta_{\mathcal{G}}$-subarmonica in Ω, allora f_ϵ è $\Delta_{\mathcal{G}}$-subarmonica in Ω_ϵ.*

Lemma 3.4.3. *Le funzioni convesse sono localmente limiti uniformi di funzioni convesse lisce.*

Dimostrazione. Sia f convessa. Allora f è $\Delta_{\mathfrak{D}}$-subarmonica relativamente a tutti i sistemi di riferimento $\mathfrak{D}$ tali che $\mathfrak{D}_h = A\mathfrak{X}_h$, con $A \in \mathcal{S}^{m_1}$ definita positiva. Dal lemma precedente la funzione liscia f_ϵ è anch'essa $\Delta_{\mathfrak{D}}$-subarmonica relativamente a tutti i sistemi di riferimento $\mathfrak{D}$. Perciò f_ϵ è convessa.

□

Possiamo ora concludere la dimostrazione del teorema (3.4.1) citando parola per parola la dimostrazione del teorema (3.3.4) del sottocapitolo precedente.

□

Parliamo ora di regolarità delle funzioni convesse nei gruppi di Carnot; in questo sottocapitolo proponiamo un teorema analogo al teorema (3.2.1) per gruppi di Carnot generali. Per fare questo utilizziamo il fatto che le funzioni convesse sono sottosoluzioni (viscose) di tutte le equazioni omogenee ellittiche (vedi condizione (ii) del teorema precedente). In particolare, consideriamo l'equazione di Hörmander-Kohn-Laplace

$$\Delta_h f = (X_1^2 f + ... + X_m^2 f) = 0,$$

e l'equazione relativa al Laplaciano subellittico di ordine ∞

$$\Delta_{\infty,h} f = \sum_{i,j=1}^{m} (X_i f)(X_j f)(X_i X_j f) = 0.$$

Certamente queste equazioni possono essere scritte nella forma

$$F(p, f(p), D_h f(p), (D_h^2 f)^*(p)) = 0$$

per una funzione continua F che soddisfa 3.35.
Facendo riferimento alla dimostrazione del teorema (3.2.1) (che in questo scritto non è stata riportata), è possibile dimostrare che

Teorema 3.4.4. *Sia $\Omega \subset \mathcal{G}$ un insieme aperto e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Sia B_R un disco tale che $B_{4R} \subset \Omega$. Allora f è localmente limitata e abbiamo*

$$\|f\|_{L^\infty(B_R)} \leq C \fint_{B_{4R}} |f| dx. \tag{3.39}$$

Inoltre, f è localmente lipschitziana e abbiamo il limite

$$\|D_h f\|_{L^\infty(B_R)} \leq \frac{C}{R} \|f\|_{L^\infty(B_{2R})}. \tag{3.40}$$

Qui C è una costante indipendente da f e da R e il disco B_R è inteso come disco di Carnot-Carathéodory. Se, in più, f è C^2, allora le derivate seconde simmetrizzate orizzontali sono non negative:

$$(D_h^2 f)^* \geq 0. \tag{3.41}$$

Terminiamo questo sottocapitolo dicendo che sarebbe possibile dimostrare delle formule di sottomedia per funzioni convesse nei gruppi di Carnot omogenei utilizzando particolari proprietà di "sollevamento" [17].

[17]Vedi [12], cap. 17.

Appendice A

Formule di sottomedia in $\mathbb{R}^N$

Enunciamo ora alcuni teoremi importanti che abbiamo utilizzato nel dimostrare la seconda nuova caratterizzazione delle funzione convesse; essi caratterizzano le funzioni subarmoniche come tutte e sole le funzioni che realizzano la formula di sottomedia.
In questa Appendice A il simbolo Ω denoterà sempre un sottoinsieme aperto e non vuoto di $\mathbb{R}^N$, mentre il simbolo $\mathcal{M}(f;x,r)$ denoterà la media di superficie di una funzione σ-integrabile f lungo $\partial B(x,r)$ [1],

$$\mathcal{M}(f;x,r) = \frac{1}{\sigma_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x,r)} f d\sigma.$$

Un altro simbolo che incontreremo è $\mathcal{A}(f;x,r)$ che indicherà la media di volume di una funzione λ-integrabile f su $B(x,r)$ [2],

$$\mathcal{A}(f;x,r) = \frac{1}{\lambda_N r^N} \int_{B(x,r)} f d\lambda.$$

Indichiamo ancora con $\mathcal{H}(\Omega)$ l'insieme delle funzioni armoniche su Ω [3].

Definizione A.1. (Vedi [14], pag. 6) Il **nucleo di Poisson** di $B(x_0,r)$ è la funzione

$$K_{x_0,r}(x,y) = \frac{1}{\sigma_N r} \frac{r^2 - ||x-x_0||^2}{||x-y||^N} \quad (y \in \partial B(x_0,r); x \in \mathbb{R}^N \setminus \{y\}.) \tag{A.1}$$

[1] Vedi [14], pag. xvi.
[2] Vedi [14], pag. xvi.
[3] Vedi [14], pag. 1.

Da A.1 è chiaro che, se $y \in \partial B(x_0, r)$, allora $K_{x_0,r}(\cdot, y)$ è positiva, nulla e negativa, rispettivamente, sugli insiemi $B(x_0, r)$, $\partial B(x_0, r) \backslash \{y\}$ e $\mathbb{R}^N \backslash \overline{B(x_0, r)}$. E' inoltre possibile dimostrare con qualche calcolo che [4] $K_{x_0,r}(\cdot, y) \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^N \backslash \{y\})$.

Definizione A.2. (Vedi [14], pag. 6) Se μ è una misura con segno su $\partial B(x_0, r)$ [5] allora l'**integrale di Poisson di** μ è definito come

$$I_{\mu,x_0,r}(x) = \int_{\partial B(x_0,r)} K_{x_0,r}(x, y) d\mu(y) \quad (x \in B(x_0, r)).$$

Nel caso speciale in cui $d\mu = f d\sigma$ per una qualche funzione f σ-integrabile su $\partial B(x_0, r)$, scriveremo $I_{f,x_0,r}$ invece di $I_{\mu,x_0,r}$.

Definizione A.3. (Vedi [14], pag. 60) Una funzione $f : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ è chiamata **subarmonica** su Ω se:

(i) f è superiormente semicontinua su Ω;

(ii) $f(x) \leq \mathcal{M}(f; x, r)$ ogni volta che $\overline{B(x, r)} \subset \Omega$, e

(iii) $f \not\equiv -\infty$ su ogni componente di Ω.

Ancora, una funzione $u : \Omega \to (-\infty, +\infty]$ è chiamata **superarmonica** su Ω se $-u$ è subarmonica su Ω. Ci riferiremo a (ii) sopra come alla proprietà di media subarmonica; invece, chiameremo la disuguaglianza opposta proprietà di media superarmonica.

L'insieme di tutte le funzioni subarmoniche (rispettivamente: superarmoniche) su Ω sarà denotato con $\mathcal{S}(\Omega)$ (rispettivamente: $\mathcal{U}(\Omega)$). Se denotiamo con $\mathcal{H}(\Omega)$ l'insieme di tutte le funzioni armoniche su Ω, è facile vedere che $\mathcal{H}(\Omega) = \mathcal{S}(\Omega) \cap \mathcal{U}(\Omega)$, e che $\mathcal{S}(\Omega)$ e $\mathcal{U}(\Omega)$ sono coni; cioè, $af + bu \in \mathcal{S}(\Omega)$ (rispettivamente: $\mathcal{U}(\Omega)$) ogni volta che $a, b \in [0, +\infty)$ e $f, u \in \mathcal{S}(\Omega)$ (rispettivamente: $\mathcal{U}(\Omega)$). Inoltre, segue facilmente dalla definizione che, se $f, u \in \mathcal{S}(\Omega)$, allora $\max\{f, u\} \in \mathcal{S}(\Omega)$. In particolare, $f^+ = \max\{f, 0\} \in \mathcal{S}(\Omega)$, e se $h \in \mathcal{H}(\Omega)$, allora $|h| = \max\{h, -h\} \in \mathcal{S}(\Omega)$.

[4] Vedi [14], pag. 6.

[5] Con **misura con segno** su uno spazio di Hausdorff localmente compatto X intendiamo una funzione numerabilmente additiva $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$, con $\mathcal{B}$ la classe dei boreliani, tale che $\mu(\varnothing) = 0$; vedi [14], pag. xv-xvi.

Teorema A.0.5. *(Vedi [14], pag. 60) Se* $f \in \mathcal{S}(\Omega)$*, allora:*

(i) $\limsup_{x \to y} f(x) = f(y)$ *per ogni* $y \in \Omega$*;*

(ii) $f(x) \leq \mathcal{A}(f; x, r)$ *ogni volta che* $\overline{B(x,r)} \subset \Omega$*;*

(iii) f *è localmente integrabile (e quindi finita quasi dappertutto) su* Ω*.*

Dimostrazione.(i) La superiore semicontinuità di f implica che $\limsup f(x) \leq f(y)$ per $x \to y \in \Omega$. Se per assurdo questa disuguaglianza fosse stretta avremmo che $f < f(y)$ su $B(y,r) \backslash \{y\}$ per un qualche r, ma ciò contraddirebbe la proprietà di media subarmonica di f.
(ii) Segue dalla proprietà di media subarmonica e dalla relazione [6]

$$r^N \mathcal{A}(f; x, r) = N \int_{(0,r]} t^{N-1} \mathcal{M}(f; x, r) dt, \tag{A.2}$$

i valori medi sopra sono definiti poichè f è superiormente limitata sul compatto $\overline{B(x,r)}$.
(iii) E' sufficiente considerare il caso in cui Ω sia connesso. Poniamo

$$\Omega_0 = \{y \in \Omega : f \text{ è integrabile in un qualche intorno di } y\}.$$

Supponiamo che $y \in \Omega \backslash \Omega_0$ e scegliamo ρ tale che $B(y, 2\rho) \subseteq \Omega$. Se $z \in B(y,\rho)$, allora $B(z,\rho)$ è un intorno di y e $\overline{B(z,\rho)} \subset \Omega$. Quindi f è superiormente limitata e non integrabile su $B(z,\rho)$, e perciò $f(z) \leq \mathcal{A}(f; z, \rho) = -\infty$. Così $f = -\infty$ su $B(y,\rho)$, dunque $B(y,\rho) \subseteq \Omega \backslash \Omega_0$. Segue che $\Omega \backslash \Omega_0$ è aperto e chiaramente Ω_0 è aperto. Poichè $f \not\equiv -\infty$, abbiamo che $\Omega_0 \neq \emptyset$. Quindi $\Omega_0 = \Omega$ dalla connessione di Ω.

□

Il seguente lemma, che non dimostreremo, ci permetterà una più agevole dimostrazione del prossimo teorema.

Lemma A.0.6. *(Vedi [14], pag. 64) Se* E *è un sottoinsieme non vuoto di* $\mathbb{R}^N$ *e* $f : E \to [-\infty, +\infty)$ *è superiormente semicontinua e limitata superiormente, allora esiste una successione decrescente* (f_n) *in* $C(\mathbb{R}^N)$ *tale che* $f_n \to f$ *puntualmente su* E[7]*.*

[6] Vedi [14], pag. 3-4.
[7] Per la dimostrazione, vedi [14], pag. 64-65.

Teorema A.0.7. *(Vedi [14], pag. 65) Sia $f : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ una funzione superiormente semicontinua e supponiamo che $f \not\equiv -\infty$ su ogni componente di Ω. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) $f \in \mathcal{S}(\Omega)$;

(b) $f \le I_{f,x,r}$ *su* $B(x,r)$ *ogni volta che* $\overline{B(x,r)} \subset \Omega$;

(c) per ogni $x \in \Omega$ *tale che* $f(x) > -\infty$, *si ha che*

$$\limsup_{t\to 0^+} \frac{\mathcal{M}(f;x,t) - f(x)}{t^2} \ge 0;$$

(d) per ogni $x \in \Omega$ *esiste* $r_x > 0$ *tale che* $f(x) \le \mathcal{M}(f;x,r)$ *ogni volta che* $0 < r < r_x$;

(e) per ogni $x \in \Omega$ *esiste* $r_x > 0$ *tale che* $f(x) \le \mathcal{A}(f;x,r)$ *ogni volta che* $0 < r < r_x$;

(f) se ω *è un insieme aperto e limitato tale che* $\overline{\omega} \subset \Omega$ *e se* $h \in C(\overline{\omega}) \cap \mathcal{H}(\omega)$ *è tale che* $f \le h$ *su* $\partial\omega$, *allora* $f \le h$ *su* ω.

Dimostrazione. Le implicazioni $(a) \Rightarrow (d) \Rightarrow (c)$ sono ovvie, e l'affermazione (ii) del teorema A.0.5 mostra che $(a) \Rightarrow (e)$. Rimane da dimostrare che $(e) \Rightarrow (c) \Rightarrow (f) \Rightarrow (b) \Rightarrow (a)$.
$(e) \Rightarrow (c)$ Se vale (e), allora esistono dei valori di t arbitrariamente piccoli per i quali $f(x) \le \mathcal{M}(f;x,t)$, in vista di A.2, e perciò vale (c).
$(c) \Rightarrow (f)$ Sia ω un insieme aperto e limitato tale che $\overline{\omega} \subset \Omega$; poniamo $w(y) = \|y\|^2$ e sia $a = \sup_\omega w$. Inoltre, sia $h \in C(\overline{\omega}) \cap \mathcal{H}(\omega)$ con $f \le h$ su $\partial\omega$, e sia $\epsilon > 0$. Se definiamo $u = h - f - \epsilon(w - a)$ su $\overline{\omega}$, allora u è inferiormente semicontinua su $\overline{\omega}$ e $u \ge 0$ su $\partial\omega$. Sia $\alpha = \inf_{\overline{\omega}} u$. Si ha che

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\mathcal{M}(w;y,t) - w(y)}{t^2} = (2N)^{-1}\Delta w(y) = 1 \quad (y \in \mathbb{R}^N)^8. \tag{A.3}$$

Utilizzando questo risultato, l'armonicità di h e l'ipotesi (c), troviamo che per ogni $y \in \omega$ ci sono dei valori di t arbitrariamente piccoli per i quali $\mathcal{M}(u;y,t) < u(y)$, e perciò $u > \alpha$ su ω. Dunque u raggiunge il valore α in un qualche punto di $\partial\omega$, e quindi $u \ge 0$.

[8] Tale relazione è dimostrata in [14], pag. 4

Mandando $\epsilon \to 0$ otteniamo che $f \leq h$ su ω.
$(f) \Rightarrow (b)$ Supponiamo che $\overline{B(x,r)} \subset \Omega$. Dal lemma precedente esiste una successione decrescente (f_n) in $C(\partial B(x,r))$ tale che $f_n \to f$ su $\partial B(x,r)$. La funzione h_n definita come uguale a f_n su $\partial B(x,r)$ e $I_{f_n,x,r}$ su $B(x,r)$ appartiene a $C(\overline{B(x,r)}) \cap \mathcal{H}(B(x,r))$. Le nostre ipotesi implicano che $f \leq h_n$ su $B(x,r)$ per ogni n. Dalla convergenza monotona $h_n \to I_{f,x,r}$ su $B(x,r)$, perciò vale (b).
$(b) \Rightarrow (a)$ Se $\overline{B(x,r)} \subset \Omega$ e vale (b), allora $f(x) \leq I_{f,x,r}(x) = \mathcal{M}(f;x,r)$.

□

Osserviamo quindi che il criterio (f) sopra giustifica il nome *sub*armonica.
In conclusione di questa appendice enunciamo e dimostriamo il risultato chiave:

Corollario A.0.8. *(Vedi [14], pag. 67) Supponiamo che $f \in C^2(\Omega)$. Allora $f \in \mathcal{S}(\Omega)$ se e solo se $\Delta f \geq 0$ su Ω.*

Dimostrazione. Segue facilmente dal criterio (c) del teorema precedente, poichè

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{\mathcal{M}(f;x,r) - f(x)}{r^2} = (2N)^{-1} \Delta f(x) \quad (x \in \Omega)$$

da A.3.

□

Appendice B

Formule di sottomedia nei gruppi di Carnot omogenei

Cominciamo questa appendice enunciando (ma non dimostrando) un teorema citato nei sottocapitoli 3.2.1 e 3.4.1 che ci ricordavano alcune generalità sul gruppo di Heisenberg e i gruppi di Carnot.

Teorema B.0.9. *(Teorema di Chow o teorema di connettività; vedi [10], pag. 95) Siano $X_1, ..., X_m$ campi vettoriali di classe C^∞ su una varietà connessa V, tali che i commutatori successivi di questi campi generano ogni spazio tangente $T_v(V)$, $v \in V$. Allora due punti qualsiasi in V possono essere collegati tramite una curva C^∞ a tratti in V, dove ogni tratto è un segmento di una curva integrale di uno dei campi X_i.*

Enunciamo ora alcuni teoremi che ci sono stati utili nel sottocapitolo sulla convessità in senso viscoso nel gruppo di Heisenberg. Tali teoremi sono reperibili in [12] e trattano alcune caratterizzazioni delle funzioni $\mathcal{L}$- subarmoniche tramite formule di sottomedia. Prima di enunciare tali teoremi abbiamo però bisogno di qualche definizione preliminare.

Definizione B.1. (Vedi [12], pag. 56) Diciamo che un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$ $\mathcal{G} = (\mathbb{R}^N, \cdot, \delta_\lambda)$ è un **gruppo di Carnot omogeneo** se valgono le seguenti proprietà:

(C.1) $\mathbb{R}^N$ può essere scritto come $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N_1} \times ... \times \mathbb{R}^{N_r}$, e la dilatazione $\delta_\lambda : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$

$$\delta_\lambda(x) = \delta_\lambda(x^{(1)}, ..., x^{(r)}) = (\lambda x^{(1)}, \lambda^2 x^{(2)}, ..., \lambda^r x^{(r)}), \quad x^{(i)} \in \mathbb{R}^{N_i},$$

è un automorfismo del gruppo $\mathcal{G}$ per ogni $\lambda > 0$;

(C.2) se N_1 è come sopra, siano $Z_1, ..., Z_{N_1}$ i campi vettoriali invarianti a sinistra su $\mathcal{G}$ tali che $Z_j(0) = \partial/\partial x_j|_0$ per $j = 1, ..., N_1$ [1]. Allora

$$\text{rango } (Lie\{Z_1, ..., Z_{N_1}\}(x)) = N \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^N.$$

Diciamo anche che $\mathcal{G}$ ha passo r ed N_1 generatori. I campi vettoriali $Z_1, ..., Z_{N_1}$ saranno chiamati i **generatori (Jacobiani)** di $\mathcal{G}$, mentre ogni base per $span\{Z_1, ..., Z_{N_1}\}$ è chiamata un **sistema di generatori di** $\mathcal{G}$.
Ricordiamo inoltre che

$$Q = N_1 + 2N_2 + ... + rN_r = \sum_{j=1}^{r} jN_j$$

è la **dimensione omogenea** del gruppo $\mathcal{G}$.

Esempio B.1. Un esempio di gruppo di Carnot omogeneo è il gruppo di Heisenberg. Questo è infatti un gruppo di Carnot di passo 2 con 2 generatori; inoltre, la sua dilatazione è definita come $\delta_\lambda(x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda^2 x_3)$ ed è un automorfismo di gruppo per ogni $\lambda > 0$. In più, poichè i primi due campi vettoriali della base jacobiana sono $Z_1 = \partial_{x_1} + 2x_2\partial_{x_3}$ e $Z_2 = \partial_{x_2} - 2x_1\partial_{x_3}$, abbiamo

$$\text{rango } (Lie\{Z_1, Z_2\}(x)) = 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Quindi le proprietà (C.1) e (C.2) sono soddisfatte.

[1] Questo è sempre possibile, basta scegliere $Z_1, ..., Z_{N_1}$ come la base jacobiana di $\mathcal{G}$.

Definizione B.2. (Vedi [12], pag. 62) Se $Z_1, ..., Z_{N_1}$ sono i generatori Jacobiani del gruppo di Carnot omogeneo $\mathcal{G} = (\mathbb{R}^N, \cdot, \delta_\lambda)$, l'operatore differenziale del second'ordine

$$\Delta_{\mathcal{G}} = \sum_{j=1}^{N_1} Z_j^2$$

è chiamato il **sub- Laplaciano canonico** su $\mathcal{G}$. Ogni operatore

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{N_1} Y_j^2 \tag{B.1}$$

dove $Y_1, ..., Y_{N_1}$ è una base per $span\{Z_1, ..., Z_{N_1}\}$, è chiamato semplicemente un **sub-Laplaciano** su $\mathcal{G}$. L'operatore a valori vettoriali

$$\nabla_{\mathcal{G}} = (Z_1, ..., Z_{N_1})$$

è chiamato il $\mathcal{G}$ **-gradiente canonico**.
Infine, se $\mathcal{L}$ è come in B.1, la notazione $\nabla_{\mathcal{L}} = (Y_1, ..., Y_{N_1})$ verrà usata per denotare l'$\mathcal{L}$ **-gradiente** (o $\mathcal{L}$-gradiente orizzontale).

Esempio B.2. Il sub-Laplaciano canonico del gruppo di Heisenberg $\mathcal{H}$ è

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathcal{H}} &= \{\partial_{x_1} + 2x_2\partial_{x_3}\}^2 + \{\partial_{x_2} - 2x_1\partial_{x_3}\}^2 \\ &= (\partial_{x_1})^2 + (\partial_{x_2})^2 + 4(x_1^2 + x_2^2)(\partial_{x_3})^2 + 4x_2\partial_{x_1,x_3} - 4x_1\partial_{x_2,x_3}.\end{aligned}$$

Un sub-Laplaciano (non canonico) in $\mathcal{H}$ è, per esempio,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =&\{(\partial_{x_1} + 2x_2\partial_{x_3}) - (\partial_{x_2} - 2x_1\partial_{x_3})\}^2 + \{\partial_{x_2} - 2x_1\partial_{x_3}\}^2 \\ =&(\partial_{x_1})^2 + 2(\partial_{x_2})^2 + 4(x_1^2 + (x_1 + x_2)^2)(\partial_{x_3})^2 \\ &- 2\partial_{x_1,x_2} + 4(x_1 + x_2)\partial_{x_1,x_3} - 4(x_1 + (x_1 + x_2))\partial_{x_2,x_3}.\end{aligned}$$

Definizione B.3. (Vedi [12], pag. 247) Sia $\mathcal{L}$ un sub-Laplaciano su un un gruppo di Carnot omogeneo $\mathcal{G}$. Chiamiamo $\mathcal{L}$**-gauge su** $\mathcal{G}$ una norma d omogenea simmetrica liscia fuori dall'origine e che soddisfa

$$\mathcal{L}(d^{2-Q}) = 0 \quad \text{in } \mathcal{G}\setminus\{0\},$$

dove ricordiamo che Q è la dimensione omogenea di $\mathcal{G}$.
Per ogni $x \in \mathcal{G}$ e $r > 0$, definiamo il **d-disco** di centro x e raggio r come segue:

$$B_d(x,r) := \{y \in \mathcal{G} : d(x^{-1} \cdot y) < r\}.$$

Definizione B.4. (Vedi [12], pag. 388) Nelle notazioni precedenti diciamo che un sottoinsieme aperto e limitato $V \subset \mathcal{G}$ è chiamato **$\mathcal{L}$ -regolare** se il problema al contorno

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = 0 & \text{in } V, \\ u|_{\partial V} = \varphi \end{cases} \tag{B.2}$$

ha un'(unica) soluzione $u := H_\varphi^V$ per ogni funzione continua $\varphi : \partial V \to \mathbb{R}$ [2]. Diciamo che u risolve B.2 se u è $\mathcal{L}$-armonica in V (ovvero $\mathcal{L}u = 0$ in V) e

$$\lim_{x \to y} u(x) = \varphi(y) \quad \forall y \in \partial V.$$

Il principio del massimo debole (vedi [12], pag. 295) implica l'unicità della soluzione del problema al contorno B.2. Inoltre

$$H_\varphi^V \geq 0 \text{ in } V \text{ ogni volta che } \varphi \geq 0 \text{ su } \partial V.$$

Quindi, se V è $\mathcal{L}$- regolare, per ogni $x \in V$ fissato, la mappa

$$C(\partial V, \mathbb{R}) \ni \varphi \mapsto H_\varphi^V(x) \in \mathbb{R}$$

definisce un funzionale lineare positivo su $C(\partial V, \mathbb{R})$. Di conseguenza (dal teorema classico di rappresentazione di Riesz per funzionali lineari positivi), esiste una misura di Radon μ_x^V supportata in ∂V tale che

$$H_\varphi^V(x) = \int_{\partial V} \varphi(y) d\mu_x^V(y) \quad \forall \varphi \in C(\partial V, \mathbb{R}).$$

Chiameremo μ_x^V la **misura $\mathcal{L}$-armonica** relativa a V e x.

[2] La famiglia degli aperti $\mathcal{L}$-regolari è non vuota, vedi [12], pag. 388.

Definizione B.5. (Vedi [12], pag. 389) Sia $\mathcal{G}$ un gruppo di Carnot omogeneo e sia Ω un sottoinsieme aperto di $\mathcal{G}$. Una funzione $u : \Omega \to [-\infty, \infty[$ è chiamata **$\mathcal{L}$-subarmonica in Ω** se:

(i) u è superiormente semicontinua e $u > -\infty$ in un sottoinsieme denso di Ω;

(ii) per ogni aperto V $\mathcal{L}$- regolare con chiusura $\overline{V} \subset \Omega$ e per ogni $x \in V$,

$$u(x) \le \int_{\partial V} u(y) d\mu_x^V(y).$$

La famiglia delle funzioni $\mathcal{L}$-subarmoniche in Ω è denotata con $\underline{\mathcal{S}}(\Omega)$.

Teorema B.0.10. *(Criterio di $\mathcal{L}$-subarmonicità per funzioni di classe C^2; vedi [12], pag. 389) Sia $\mathcal{G} = (\mathbb{R}^N, \cdot, \delta_\lambda)$ un gruppo di Carnot omogeneo in $\mathbb{R}^N$ e sia $\mathcal{L}$ un suo sub-Laplaciano. Sia Ω un sottoinsieme aperto di $\mathcal{G}$ e sia $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$. Allora u è $\mathcal{L}$-subarmonica se e solo se*

$$\mathcal{L}u \ge 0 \quad \textit{in } \Omega.$$

D'ora in poi, $\mathcal{G} = (\mathbb{R}^N, \cdot, \delta_\lambda)$, $\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{N_1} X_j^2$ e d denoteranno, rispettivamente, un gruppo di Carnot omogeneo, un sub-Laplaciano su $\mathcal{G}$ e una funzione $\mathcal{L}$-gauge su $\mathcal{G}$.

Definizione B.6. (Vedi [12], pag. 256) Nelle notazioni precedenti, sia O un sottoinsieme aperto di $\mathcal{G}$, e sia $u \in C^2(O, \mathbb{R})$. Definiamo l'**operatore di media**

$$\mathcal{M}_r(u)(x) = \frac{(Q-2)\beta_d}{r^{Q-1}} \int_{\partial B_d(x,r)} \mathcal{K}_{\mathcal{L}}(x,z) u(z) dH^{N-1}(z),$$

dove Q è la dimensione omogenea del gruppo $\mathcal{G}$, β_d [3] è definito come

$$(\beta_d)^{-1} := (Q-2) \int_{\partial B_d(0,1)} \mathcal{K}_{\mathcal{L}}(0, \cdot) dH^{N-1},$$

$\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ [4] è un nucleo definito come

$$\mathcal{K}_{\mathcal{L}}(x,y) := \frac{|\nabla_{\mathcal{L}} d|^2 (x^{-1} \cdot y)}{|\nabla(d(x^{-1} \cdot \cdot))|(y)} \quad \forall x, y \in \mathcal{G}, \text{ con } x \ne y,$$

e infine H^{N-1} è la misura di Hausdorff $N-1$- dimensionale.

[3] vedi [12], pag. 255
[4] vedi [12], pag. 252

Definizione B.7. (Vedi [12], pag. 397) Se $\Omega \subseteq \mathcal{G}$ è un insieme aperto, diciamo che una funzione superiormente semicontinua $u : \Omega \to [-\infty, \infty[$ soddisfa la **proprietà di sottomedia locale di superficie** se, per ogni $x \in \Omega$ esiste $r_x > 0$ tale che

$$u(x) \leq \mathcal{M}_r(u)(x) \quad \text{per } 0 < r < r_x. \tag{B.3}$$

Se B.3 vale per ogni $r > 0$ tale che $\overline{B_d(x,r)} \subset \Omega$, diciamo che u soddisfa la **proprietà di sottomedia globale di superficie**.
Equivalentemente, diciamo che u è **sottomedia**.

Teorema B.0.11. *($\mathcal{L}$-subarmonicità e proprietà di sottomedia; vedi [12], pag. 402) Sia Ω un sottoinsieme aperto di $\mathcal{G}$, e sia $u : \Omega \to [-\infty, \infty[$ una funzione superiormente semicontinua, finita in un sottoinsieme denso di Ω. Allora $u \in \underline{\mathcal{S}}(\Omega)$ se e solo se u è sottomedia, cioè per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $r > 0$ tale che $\overline{B_d(x,r)} \subset \Omega$, si ha che*

$$u(x) \leq \mathcal{M}_r(u)(x).$$

Osserviamo che, scegliendo come gruppo di Carnot omogeneo $(\mathbb{R}^N, \cdot)$, dove $\cdot$ indica la somma in $\mathbb{R}^N$, riusciamo a ricavare dal teorema precedente il corollario A.0.8, ovvero la caratterizzazione delle funzioni subarmoniche in $\mathbb{R}^N$ tramite le formule di sottomedia.
In conclusione di questa appendice enunciamo due conseguenze importanti del teorema precedente.

Teorema B.0.12. *(Principi del massimo per funzioni sottomedia; vedi [12], pag. 398) Sia $\Omega \subseteq \mathcal{G}$ un insieme aperto. Sia $u : \Omega \to [-\infty, \infty[$ una funzione superiormente semicontinua che sia anche sottomedia. Valgono le seguenti affermazioni:*

(i) se Ω è connesso ed esiste $x_0 \in \Omega$ tale che $u(x_0) = \max_\Omega u$, allora $u \equiv u(x_0)$ in Ω;

(ii) se Ω è limitato e $\limsup_{\Omega \ni y \to x} u(y) \leq 0$ per ogni $x \in \partial\Omega$, allora $u(y) \leq 0$ in Ω.

Teorema B.0.13. *(Sommabilità delle funzioni sottomedia; vedi [12], pag. 399) Sia Ω un sottoinsieme aperto e connesso di $\mathcal{G}$, e sia $u : \Omega \to [-\infty, \infty[$ una funzione superiormente continua che sia anche sottomedia. Supponiamo che $u(x_0) > -\infty$ per qualche $x_0 \in \Omega$. Allora $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.*

Bibliografia

[1] E. Lanconelli, *Lezioni di Analisi Matematica 2, Prima parte*, Pitagora Editrice Bologna, 2000

[2] L. Gårding, *An Inequality for Hyperbolic Polynomials*, J. Math. Mech. (6) 8 (1959), 957–965

[3] G. Lu, J. J. Manfredi, B. Stroffolini, *Convex functions on the Heisenberg group*, Calc. Var. Partial Differential Equations 19 (2004), no. 1, 1-22

[4] R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1990

[5] C. Evans, R. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions. Studies in Advanced Mathematics,* CRC Press LLC, 1992

[6] R. Jensen, *Uniqueness of Lipschitz extensions: minimizing the sup norm of the gradient*, Arch. Rational Mech. Anal. 123, 51-74 (1993)

[7] P. Lindqvist, J. Manfredi, E. Saksman, *Superharmonicity of nonlinear ground states*, Rev. Mat. Iberoamericana 16, 17-28 (2000)

[8] P. Juutinen, G. Lu, J. J. Manfredi, B. Stroffolini, *Convex functions on Carnot groups*, Rev. Mat. Iberoamericana 23, no. 1, 191-200 (2007)

[9] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli, *Subharmonic functions on Carnot groups*, Math. Ann. 325 (2003), 97-122

[10] A. Bellaïche, J.-J. Risler, *Sub-Riemannian Geometry*, Progress in Mathematics 144, Birkhäuser, 1996

[11] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, 1977

[12] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli, F. Uguzzoni, *Stratified Lie Groups and Potential Theory for Their Sub- Laplacians*, Springer, 2007

[13] E. Lanconelli, *Lezioni di Analisi Matematica 1*, Pitagora Editrice Bologna, 1998

[14] D. H. Armitage, S. J. Gardiner, *Classical Potential Theory*, Springer, 2001

[15] D. Cohen, L. Theodore, D. Sklar, *Precalculus. A problems-Oriented Approach*, Cengage Learning, 2009

[16] D. Danielli, N. Garofalo, D.-M. Nhieu, *Notions of Convexity in Carnot Groups*, Communications in Analysis and Geometry, 2003

[17] D. Danielli, N. Garofalo, S. Salsa, *Variational inequalities with lack of ellipticity. Part I: optimal interior regularity and non-degenrancy of the free boundary*, Indiana Univ. Math. J., to appear