

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea in Matematica

# SPETTRI DI OPERATORI COMPATTI E APPLICAZIONI

Tesi di Laurea in Analisi

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
Giovanna Citti

Presentata da:  
Gianmarco Giovannardi

I Sessione  
Anno Accademico 2013-2014

# Introduzione

Lo scopo di questa tesi è presentare alcuni aspetti della teoria spettrale per operatori compatti definiti su spazi di Hilbert separabili. Il primo capitolo è dedicato ad alcune proprietà dei sistemi ortonormali, degli operatori compatti autoaggiunti e del Teorema di esistenza di una base numerabile di autovettori, per questo tipo di operatori. La dimostrazione del Teorema Spettrale si basa sull'espressione degli autovettori come minimi vincolati alla sfera unitaria, della forma quadratica associata all'operatore assegnato. Dall'ipotesi di compattezza e autoaggiunzione segue la possibilità di estrarre da una successione minimizzante una sottosuccessione convergente. Questa costruzione permette di determinare il primo autovettore, l'ipotesi di numerabilità permette l'utilizzo dell'induzione sullo spazio vettoriale ortogonale agli autovettori precedentemente determinati.

Nel secondo capitolo sono presentate alcune applicazioni dirette alla base di Fourier e al laplaciano in dimensione più alta. Si dimostra dapprima che l'inverso del laplaciano, ottenuto grazie al Teorema di rappresentazione di Riesz, è un operatore compatto da  $L^2([a, b])$  ad  $L^2([a, b])$ . La sua base di autovettori è la classica base di Fourier. La compattezza dell'operatore viene provata utilizzando la compattezza dell'immersione di Sobolev. In dimensione uno questa era nota. In dimensione più alta, proviamo invece preliminarmente la compattezza dell'immersione, utilizzando le proprietà degli operatori di convoluzione con nuclei  $C^\infty$  prima e poi con nuclei singolari. Come conseguenza della diseguaglianza di Young si ottiene allora l'immersione su aperti limitati.

Nel terzo capitolo vengono determinate le espressioni analitiche delle basi di autovettori su insiemi noti del piano. In particolare questi insiemi sono il quadrato con

## II

lato di lunghezza  $2\pi$  e il cerchio unitario. Per determinare le espressioni analitiche delle autofunzioni sul cerchio sono risultate utili le funzioni di Bessel, di cui vengono riportate le proprietà principali, tra cui l'ortogonalità. La base risultante è fornita dai prodotti delle funzioni di Bessel per il raggio e la base di Fourier per l'angolo.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>I</b>
<b>1 Teorema spettrale</b>	<b>1</b>
1.1 Proiezione in uno spazio di Hilbert . . . . .	1
1.2 Sistemi Ortonormali . . . . .	3
1.3 Operatori Compatti Autoaggiunti . . . . .	5
1.4 Il Teorema Spettrale . . . . .	7
<b>2 Applicazioni</b>	<b>11</b>
2.1 Base di Fourier e Convergenza in norma $L^2$ . . . . .	11
2.1.1 Gli Autovettori dell'Operatore di Derivazione Seconda . . . . .	11
2.1.2 L'Operatore di Risoluzione, Compatto e Autoaggiunto . . . . .	14
2.1.3 L'Analisi di Fourier . . . . .	18
2.2 Generalizzazione in più dimensioni . . . . .	20
2.2.1 L'Operatore di Risoluzione del laplaciano . . . . .	20
2.2.2 Il Teorema di Immersione di Sobolev in $\mathbb{R}^N$ . . . . .	25
<b>3 Autofunzioni su Insiemi del Piano</b>	<b>31</b>
3.1 Base di Autovettori sul Quadrato . . . . .	31
3.2 Autofunzioni del laplaciano sul cerchio unitario . . . . .	34
3.2.1 Le funzioni di Bessel . . . . .	36
3.2.2 Risoluzione del Problema . . . . .	39
<b>Bibliografia</b>	<b>43</b>



# Capitolo 1

## Teorema spettrale

In questo capitolo viene sviluppata la teoria delle basi ortonormali negli spazi di Hilbert per giungere al Teorema Spettrale per operatori compatti autoaggiunti. I risultati ottenuti in questo capitolo ricordano quelle in dimensione finita, ovviamente le tecniche per dimostrarli usano l'analisi funzionale.

### 1.1 Proiezione in uno spazio di Hilbert

**Teorema 1.** Sia  $E$  uno spazio di Banach riflessivo  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  limitata in  $E$ . Allora esiste  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  sottosuccessione convergente per la topologia debole  $\sigma(E, E')$

**Teorema 2.** Sia  $H$  uno spazio di Hilbert e  $M \subset H$  un suo sottospazio chiuso e  $f \in H$ . Definiamo

$$T : M \rightarrow \mathbb{R} \quad T(u) = \|u - f\|.$$

Allora  $\exists \min_{v \in M} T$  e verifica le seguenti ipotesi:

$$\begin{cases} u \in M \\ \langle f - u, h \rangle = 0, \quad \forall h \in M \end{cases}$$

*Dimostrazione. Esistenza:* Siccome  $M \subset H$  è chiuso allora  $M$  è uno spazio di Hilbert, perchè un sottoinsieme chiuso è completo. Verifichiamo che l'operatore  $T$  ha minimo. Sia  $u_n$  una successione tale che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T(u_n) = \inf_{u \in M} T(u).$$

Siccome la successione tende all'estremo inferiore  $\exists c \in \mathbb{R}$  t.c.

$$c \geq T(u_n) = \|u_n\|^2 - 2\langle u_n, f \rangle + \|f\|^2 \geq \|u_n\|^2 - 2\|u_n\|\|f\| + \|f\|^2.$$

Ora se per assurdo fosse

$$\|u_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

allora  $\nexists c$  definito in precedenza (assurdo). Quindi la successione  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è limitata in norma e, siccome ogni spazio di Hilbert è riflessivo, possiamo applicare il Corollario III.26 del [3] sopra enunciato come Teorema 1. Esiste dunque  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  sottosuccessione che converge debolmente ad  $u \in M$ , scriveremo  $u_{n_k} \xrightarrow{deb} u$ . Inoltre

$$\|u\|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_{n_k}\|,$$

allora

$$T(u) = \|u\|^2 - 2\langle u, f \rangle + \|f\|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} T(u_{n_k}) = \inf_{v \in M} T(v) \Rightarrow T(u) = \min_{v \in M} T(v).$$

Ora siccome  $u$  è un punto di minimo allora  $\partial_h T = 0$ . Quindi:

$$\frac{T(u + th) - T(u)}{t} = 2\langle u, h \rangle + t\|h\|^2 - 2\langle h, f \rangle \xrightarrow{t \rightarrow 0} \langle u - f, h \rangle = 0 \quad \forall h \in M.$$

*Unicità:* Supponiamo

$$\exists v \in M \quad \text{t.c.} \quad \langle v - f, h \rangle = 0 \quad \forall h \in M$$

$$\Rightarrow \langle u - f, h \rangle - \langle v - f, h \rangle = 0 \quad \forall h \in M$$

Pongo  $h = u - v \Rightarrow \langle u - v, u - v \rangle = 0 \Rightarrow u = v$ . □

**Definizione 1.** Si pone  $P_M : H \rightarrow M$   $P_M(f) = u$ , dove  $u$  è il vettore di  $M$  che realizza il minimo determinato nella Proposizione precedente. Si osservi che  $P_M$  è un operatore lineare.

**Definizione 2.**  $M \subset H$  è sottospazio chiuso. Si definisce

$$M^\perp = \{v \in H \mid \langle v, h \rangle = 0, \forall h \in M\}.$$

**Osservazione 1.** Si osserva che  $H$  è somma diretta dei due spazi,  $H = M \oplus M^\perp$ .

*Infatti:*

$$\text{se } u \in M^\perp \cap M \Rightarrow \langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$\text{se } u \in H \Rightarrow u = P_M(u) + u - P_M(u)$$

così l'abbiamo scritto con due elementi, uno in  $M$  e l'altro nell'ortogonale.

## 1.2 Sistemi Ortonormali

**Definizione 3.** Sia  $I$  un insieme di indici. Un insieme  $S = \{(e_i)\}_{i \in I}$  t.c.  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in I$  è un sistema ortonormale in uno spazio di Hilbert.

**Osservazione 2.** Se  $M \subseteq H$  di dimensione finita, ovvero esiste una base ortonormale  $(e_1, \dots, e_n)$ , allora

$$P_M(u) = \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle e_i$$

*Infatti*

$$\begin{aligned} P_M(u) &= \sum_{i=1}^n \langle P_M(u), e_i \rangle e_i \\ &= \sum_{i=1}^n \langle P_M(u) - u + u, e_i \rangle e_i \\ &= \sum_{i=1}^n \langle P_M(u) - u, e_i \rangle e_i + \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle e_i \\ &= \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle e_i. \end{aligned}$$

L'ultimo passaggio nell'uguaglianza è dovuto alla caratterizzazione data nel Teorema della proiezione  $\langle P_M(u) - u, e_i \rangle = 0, \forall i$

Ricordiamo che uno spazio  $H$  si dice **separabile** se esiste un sottoinsieme  $D$  **numerabile** denso in  $H$ . Segue la seguente proposizione.

**Proposizione 1.** Se  $H$  è un spazio di Hilbert **separabile** allora un sistema ortonormale  $S = \{(e_i)\}_{i \in I}$  è al più numerabile.



*Infatti:* Sia  $D = (u_h)_{h \in \mathbb{N}}$  il sottoinsieme denso in  $H$ . Per la densità di  $D$  per ogni  $i \in I$  esiste  $u_{h_i}$  tale che  $\|e_i - u_{h_i}\| < \varepsilon$ , inoltre

$$\|e_i - e_j\|^2 = \|e_i\|^2 + \|e_j\|^2 = 2.$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} = \|e_i - e_j\| &\leq \|e_i - u_{h_i}\| + \|u_{h_i} - u_{h_j}\| + \|u_{h_j} - e_j\| \leq 2\varepsilon + \|u_{h_i} - u_{h_j}\| \\ \implies \|u_{h_i} - u_{h_j}\| &\geq \sqrt{2} - 2\varepsilon \neq 0. \end{aligned}$$

Si può scegliere  $\varepsilon$  in modo tale che l'ultimo termine sia sempre diverso da zero. Quindi se

$$i \neq j \implies u_{h_i} \neq u_{h_j}.$$

Si sta dunque affermando che se  $(e_i)_{i \in I}$  non fossero numerabili  $\implies D$  non sarebbe numerabile, questo è contro le ipotesi. Allora si deduce che  $S = \{(e_i)\}_{i \in I}$  è numerabile.

### Metodo di Ortogonalizzazione di Gram-Schmidt

In dimensione finita è cruciale il metodo di ortogonalizzazione di *Gram-Schmidt* e anche negli spazi separabili si utilizza lo stesso metodo. Data una successione  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  si costruisce il sistema ortogonale nel modo seguente:

$$\begin{aligned} v_1 = u_1 \quad e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, \quad v_k = u_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle u_k, e_j \rangle e_j \\ \implies \begin{cases} \text{se } v_k \neq 0 \implies e_k = \frac{v_k}{\|v_k\|} \\ \text{se } v_k = 0 \implies \text{si elimina } u_k \text{ perchè è linearmente dipendente.} \end{cases} \end{aligned}$$

Si dimostra per induzione che  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$  con  $i, j \leq n$ .

**Definizione 4.**  $S = \{(e_i)\}_{i \in I}$  è **Completo**, oppure è **Base Hilbertiana**, se

$$(\langle u, e_i \rangle = 0 \quad \forall i \in I \implies u = 0).$$

**Proposizione 2.** Sia  $S$  un sistema ortonormale di  $H$ , allora:

$$\overline{\text{span}(S)} = H \Leftrightarrow S \text{ è completo}$$

*Infatti:*

Supponiamo che S sia completo. Sicuramente  $\overline{\text{span}(S)}$  è un insieme chiuso

$$\Rightarrow H = \overline{\text{span}(S)} \bigoplus \overline{\text{span}(S)}^\perp \quad \text{se } u \in \overline{\text{span}(S)}^\perp \Rightarrow \langle u, e_i \rangle = 0 \quad \forall i$$

allora, poiché S è completo per ipotesi  $u = 0$ , ne viene:

$$\overline{\text{span}(S)}^\perp = 0 \Rightarrow H = \overline{\text{span}(S)}$$

Viceversa

$$\begin{aligned} & \text{se } u \in H \quad \text{t.c.} \quad \langle u, e_i \rangle = 0 \\ & \forall \varepsilon \quad \exists u_\varepsilon \in \overline{\text{span}(S)} : \quad \|u - u_\varepsilon\| \leq \varepsilon^2 \\ & \|u - u_\varepsilon\|^2 = \|u\|^2 + \|u_\varepsilon\|^2 \geq \|u\|^2 \\ & \Rightarrow \|u\|^2 \leq \varepsilon^2 \quad \text{per ogni } \varepsilon \quad \Rightarrow \quad u = 0 \end{aligned}$$

Usando le proprietà della base ortonormale si deduce il seguente teorema:

**Teorema 3** (Fisher-Riesz).

$$\sum_{i=1}^{+\infty} c_n e_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} |c_n|^2 \text{ converge}$$

## 1.3 Operatori Compatti Autoaggiunti

**Definizione 5.** Siano E,F spazi di Banach  $T : E \rightarrow F$  lineare e limitato si dice **compatto** se per ogni  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  successione limitata in E esiste una sottosuccessione di  $(T(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$  convergente in F.

Ora viene definito l'aggiunto in uno spazio di Banach, successivamente questa definizione verrà riformulata negli spazi di Hilbert.

**Definizione 6.** Siano E, F spazi di Banach e  $T : E \rightarrow F$  lineare e limitato. Si definisce **aggiunto** di T l'operatore lineare e limitato  $T' : F^* \rightarrow E^*$  con la seguente relazione:

$$(T'\phi)(x) = \phi(Tx) \quad \forall x \in E \quad \forall \phi \in F^*.$$

**Definizione 7.** Sia  $H$  uno spazio di Hilbert  $A : H \rightarrow H$  lineare limitato.

$$\forall w \in H \text{ si pone } L_w : H \rightarrow \mathbb{R} \quad L_w(h) = \langle A(h), w \rangle$$

Per il Teorema di rappresentazione di Riesz, siccome  $L_w$  è lineare e limitato, esiste  $w' \in H$  tale che  $L_w(h) = \langle A(h), w \rangle = \langle h, w' \rangle \quad \forall h \in H$ . Si definisce **aggiunto** di  $A$  l'operatore

$$A^* : H \rightarrow H \quad A^*(w) = w' \text{ t.c. } \langle h, A^*(w) \rangle = \langle h, w' \rangle$$

$$\text{quindi } \langle A(h), w \rangle = \langle h, A^*(w) \rangle.$$

Questa definizione rispetta la definizione più astratta data negli spazi di Banach.

**Definizione 8.** Un operatore lineare e limitato in uno spazio di Hilbert è **autoaggiunto** quando  $A = A^*$ . Ne viene:  $\langle A(h), w \rangle = \langle h, A(w) \rangle$ .

**Teorema 4.**  $A : H \rightarrow H$  è compatto e autoaggiunto. Sia  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  successione in  $H$  che tende debolmente a  $u$ , allora  $(A(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  tende fortemente ad  $A(u)$ , in simboli:

$$u_n \xrightarrow{deb} u \quad \Rightarrow \quad \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} A(u_n) = A(u).$$

*Dimostrazione.* Siccome  $A$  è autoaggiunto  $\langle A(u_n), v \rangle = \langle u_n, A^*(v) \rangle \quad \forall v \in H$ . Per la definizione di convergenza debole si ha:

$$\langle A(u_n), v \rangle = \langle u_n, A^*(v) \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \langle u, A^*(v) \rangle. \quad (1.1)$$

Sia  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  una sottosuccessione generica di  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Siccome  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  converge debolmente allora è limitata, usando l'ipotesi di compattezza, si deduce che  $(A(u_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$  ammette una sottosuccessione  $(A(u_{n_{k_j}}))_{j \in \mathbb{N}}$  convergente. Ovvero  $\exists z \in H$  t.c.  $A(u_{n_{k_j}}) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} z$ . La convergenza forte implica quella debole, quindi:

$$\langle A(u_{n_{k_j}}), v \rangle \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \langle z, v \rangle. \quad (1.2)$$

Da (1.1) e (1.2) si deduce

$$\begin{aligned} \langle z, v \rangle &= \langle u, A^*(v) \rangle = \langle A(u), v \rangle \quad \forall v \in H \\ \Rightarrow \quad z &= A(u) \quad \Rightarrow \quad A(u_{n_{k_j}}) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} A(u). \end{aligned}$$

Infine per ogni sottosuccessione di  $(A(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  esiste una sottosottosuccessione convergente ad  $A(u)$  ne viene che

$$(A(u_n))_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A(u).$$

□

**Teorema 5.** Sia  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  successioni in  $H$  spazio di Hilbert:

$$\text{se } u_n \xrightarrow{\text{deb}} u \quad \text{e } v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} v \in H \quad \text{allora } \langle u_n, v_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \langle u, v \rangle$$

*Dimostrazione.*  $\langle u_n, v_n \rangle = \langle u_n, v_n - v \rangle + \langle u_n, v \rangle$ . Ora  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge debolmente allora è limitata e la seguente disuguaglianza è vera:

$$\langle u_n, v_n - v \rangle \leq \|u_n\| \cdot \|v_n - v\| \leq c \|v_n - v\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ora per la convergenza debole  $\langle u_n, v \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \langle u, v \rangle$ , questo conclude la dimostrazione. □

## 1.4 Il Teorema Spettrale

Viene rammentata la definizione di autovalore:

**Definizione 9.**  $A : H \rightarrow H$  lineare e limitato,  $u \in H$  si dice autovettore con autovalore  $\lambda$  se :

$$A(u) = \lambda u \quad u \neq 0.$$

**Osservazione 3.** Se  $A$  è compatto e autoaggiunto in uno spazio di Hilbert riflessivo allora:

1.

$$\exists e_1 \in H \quad \sup_{\|u\| \leq 1} \langle A(u), u \rangle = \langle A(e_1), e_1 \rangle$$

2.

$$e_1 \text{ è autovettore di } A \text{ con autovalore } \langle A(e_1), e_1 \rangle$$

3.

$$\|e_1\| = 1$$

*Infatti:*1. Sia  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  successione,  $\|u_k\| \leq 1$  t.c.

$$\langle A(u_k), u_k \rangle \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \sup_{\|u\| \leq 1} \langle A(u), u \rangle.$$

Quindi  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  è limitata ed, essendo  $H$  uno spazio di Hilbert riflessivo, si può applicare il Corollario III.26 del [3], enunciato nel Teorema 1. Ne viene che esiste  $(u_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$  sottosuccessione e

$$\exists e_1 \in H \text{ t.c. } u_{k_n} \xrightarrow{deb} e_1 \quad (1.3)$$

per il Teorema 4 del paragrafo sugli operatori compatti autoaggiunti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A(u_{k_n}) = A(e_1) \quad (1.4)$$

per il Teorema 5 del paragrafo sugli operatori compatti autoaggiunti:

$$\begin{cases} (1.3) \\ (1.4) \end{cases} \implies \langle A(u_k), u_k \rangle \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \langle A(e_1), e_1 \rangle.$$

2. Così  $e_1$  è punto di massimo. Si ponga:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \left\langle A\left(\frac{e_1 + tu}{\|e_1 + tu\|}, \frac{e_1 + tu}{\|e_1 + tu\|}\right) \right\rangle = \frac{\langle A(e_1 + tu), e_1 + tu \rangle}{\|e_1 + tu\|^2} \quad \forall u \in H \\ \varphi'(t) &= -\frac{2\langle e_1 + tu, u \rangle}{\|e_1 + tu\|^3} \cdot \langle A(e_1 + tu), e_1 + tu \rangle + \frac{2\langle A(e_1 + tu), u \rangle}{\|e_1 + tu\|^2}. \end{aligned}$$

Nel secondo termine dello sviluppo della derivata si è utilizzata la proprietà che l'operatore è autoaggiunto .

$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t_0 = 0$  è interno ed un punto di massimo relativo quindi per il Teorema piccolo di Fermat  $\varphi'(0) = 0$ , quindi:

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi'(0) = -2\langle e_1, u \rangle \cdot \langle A(e_1), e_1 \rangle + 2\langle A(e_1), u \rangle \quad \forall u \in H \\ &\implies 0 = \langle -\langle A(e_1), e_1 \rangle e_1 + A(e_1), u \rangle \quad \forall u \in H \\ &\implies A(e_1) = \langle A(e_1), e_1 \rangle e_1 = \lambda_1 e_1 \quad \lambda_1 := \langle A(e_1), e_1 \rangle. \end{aligned}$$

3. Dimostriamo che

$$\max_{u \leq 1} \langle A(u), u \rangle = \max_{u=1} \langle A(u), u \rangle.$$

Sicuramente

$$\max_{u \leq 1} \langle A(u), u \rangle \geq \max_{u=1} \langle A(u), u \rangle$$

quindi, per ottenere l'uguaglianza dimostriamo la disuguaglianza inversa:

$$\begin{aligned} \|u\| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{u}{\|u\|} = 1 \quad \Rightarrow \quad \left\langle A\left(\frac{u}{\|u\|}\right), \frac{u}{\|u\|} \right\rangle &= \frac{\langle A(u), u \rangle}{\|u\|^2} \geq \langle A(u), u \rangle \\ \Rightarrow \quad \max_{u=1} \langle A(u), u \rangle &\geq \max_{u \leq 1} \langle A(u), u \rangle. \end{aligned}$$

**Teorema 6** (Teorema spettrale). Se  $A : H \rightarrow H$  compatto e autoaggiunto, con  $H$  spazio di Hilbert separabile, allora  $A$  ammette una base hilbertiana di autovettori.

*Dimostrazione.* Per l'osservazione precedente:

$$\exists e_1 \in H \quad \max_{\|u\| \leq 1} \langle A(u), u \rangle = \langle A(e_1), e_1 \rangle = \lambda_1, \quad A(e_1) = \lambda_1 e_1, \quad \|e_1\| = 1.$$

Sia  $H_1 := \{u \in H \mid \langle u, e_1 \rangle = 0\}$ ,

se  $\langle u, e_1 \rangle = 0 \Rightarrow \langle A(u), e_1 \rangle = \langle e_1, A(u) \rangle = \lambda_1 \langle u, e_1 \rangle \Rightarrow A(u) \in H_1$

$H_1$  è un sottospazio e per quanto sopra dimostrato l'immagine è contenuta in  $H_1$ , quindi

$$A : H_1 \rightarrow H_1$$

Questo è ancora un operatore compatto e autoaggiunto quindi si può applicare nuovamente l'osservazione precedente:

$$\exists e_2 \in H_1 \quad \max_{\|u\| \leq 1} \max_{u \in H_1} \langle A(u), u \rangle = \langle A(e_2), e_2 \rangle = \lambda_2, \quad A(e_2) = \lambda_2 e_2, \quad \|e_2\| = 1.$$

Siccome il massimo considera un sottoinsieme di  $H$  si ha  $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$ .

Per induzione  $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$\exists e_n \in H_{n-1} \quad \max_{\|u\| \leq 1} \max_{u \in H_{n-1}} \langle A(u), u \rangle = \langle A(e_n), e_n \rangle = \lambda_n, \quad A(e_n) = \lambda_n e_n$$

$$\|e_n\| = 1, \quad \text{si definisce } H_n := \{u \in H_{n-1} \mid \langle u, e_n \rangle = 0\}.$$

Inoltre per la definizione di  $H_{n-1}$ :

$$\langle e_n, e_j \rangle = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n-1.$$

Siccome il massimo è fatto su insiemi appartenenti ad una successione decrescente di insiemi si ha:

$$|\lambda_n| \leq \dots \leq |\lambda_1|$$

Sia  $\bar{H} = \{u \in H \mid \langle u, e_n \rangle = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$ . Poichè  $A$  è autoaggiunto:

$$\forall u \in \bar{H} \quad \langle A(u), e_n \rangle = \langle u, A(e_n) \rangle = \lambda_n \langle u, e_n \rangle = 0.$$

Supponiamo per assurdo che  $\bar{H} \neq \{0\}$ :

$$\Rightarrow \exists e \text{ t.c.} \quad \max_{\|u\| \leq 1, u \in \bar{H}} \langle A(e), e \rangle = \langle A(e), e \rangle \quad A(e) = \lambda e$$

$e$  sarebbe un autovettore, quindi  $\bar{H} \cap H_{n^*} \neq 0$  ma questo è assurdo  $\Rightarrow \bar{H} = \{0\}$

Questo implica che  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è una base Hilbertiana di autovettori.  $\square$

**Corollario 1.** Sia  $H$  uno spazio di Hilbert separabile e  $A : H \rightarrow H$  compatto e autoaggiunto. Ogni  $u \in H$  si scrive nel modo seguente:

$$u = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle u, e_n \rangle e_n$$

dove  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è base ortonormale di autovettori.

# Capitolo 2

## Applicazioni

In questo capitolo vengono applicati i risultati del Capitolo 1 per determinare la base di Fourier e risolvere la convergenza della serie di Fourier in  $L^2$  nel caso unidimensionale. Successivamente viene applicato questo metodo al caso multidimensionale con i dovuti accorgimenti.

### 2.1 Base di Fourier e Convergenza in norma $L^2$

Il percorso seguito in questa sezione ha come obiettivo dimostrare che esiste una base ortonormale di autovettori del laplaciano in dimensione uno, ovvero la derivata seconda, e che questa base è la base di Fourier. Da questo risultato si deduce la convergenza dei polinomi di Fourier in  $\mathbf{L}^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ .

#### 2.1.1 Gli Autovettori dell'Operatore di Derivazione Seconda

Si consideri il seguente problema, ove  $u \in C^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ :

$$\begin{cases} u'' = \lambda u \\ u(-\pi) = u(\pi) & (i) \\ u'(-\pi) = u'(\pi) & (ii) \end{cases} \quad (2.1)$$

Per risolvere l'equazione differenziale omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti



$u'' - \lambda u = 0$  si utilizza il polinomio caratteristico associato all'equazione differenziale:

$$P(x) = x^2 - \lambda.$$

Gli zeri del polinomio variano in funzione di  $\lambda$ , quindi si consideri la seguente casistica:

$$\begin{cases} \lambda > 0 & (a) \\ \lambda = 0 & (b) \\ \lambda < 0 & (c) \end{cases}$$

- Caso (a):

$$x = \sqrt{\lambda} \vee x = -\sqrt{\lambda} \quad \Rightarrow \quad u(t) = \alpha e^{-\sqrt{\lambda}t} + \beta e^{\sqrt{\lambda}t}.$$

Imponendo la condizione (i) si ottiene:

$$\begin{aligned} u(-\pi) &= \alpha e^{\sqrt{\lambda}\pi} + \beta e^{-\sqrt{\lambda}\pi} = \alpha e^{-\sqrt{\lambda}\pi} + \beta e^{\sqrt{\lambda}\pi} = u(\pi) \\ \Rightarrow \quad (\alpha - \beta) \cdot (e^{\sqrt{\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{\lambda}\pi}) &= 0. \end{aligned}$$

Siccome la funzione esponenziale è crescente e sempre positiva si ha

$$e^{\sqrt{\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{\lambda}\pi} > 0 \quad \Rightarrow \quad (\alpha - \beta) = 0 \Rightarrow \quad \alpha = \beta.$$

Imponendo la condizione (ii) alla derivata e utilizzando il risultato precedente

$$u'(t) = -\alpha\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}t} + \beta\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}t}.$$

Si ottiene:

$$2(e^{\sqrt{\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{\lambda}\pi})\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0$$

quindi  $u(t) = 0$ .

- Caso (b):

$$u(t) = \alpha t e^0 + \beta e^0 = \alpha t + \beta.$$

Imponendo le condizioni (i), (ii) otteniamo:

$$\alpha\pi + \beta = -\alpha\pi + \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0, \quad u(t) = \beta.$$

- Caso (c)

$$x = i\sqrt{\lambda} \vee x = -i\sqrt{\lambda} \quad \Rightarrow \quad u(t) = \alpha e^{-i\sqrt{\lambda}t} + \beta e^{i\sqrt{\lambda}t}.$$

Cambiando basi dell'insieme delle soluzioni di dimensione due si ottiene:

$$u(t) = \alpha \cos(\sqrt{|\lambda|}t) + \beta \sin(\sqrt{|\lambda|}t).$$

Imponendo la condizione (i) si ottiene:

$$\begin{aligned} u(-\pi) &= \alpha \cos(-\sqrt{|\lambda|}\pi) + \beta \sin(-\sqrt{|\lambda|}\pi) = \\ &= \alpha \cos(\sqrt{|\lambda|}\pi) + \beta \sin(\sqrt{|\lambda|}\pi) = u(\pi). \end{aligned}$$

Sfruttando il fatto che il coseno è una funzione pari e il seno è dispari:

$$\begin{aligned} \alpha \cos(-\sqrt{|\lambda|}\pi) - \beta \sin(\sqrt{|\lambda|}\pi) &= \alpha \cos(\sqrt{|\lambda|}\pi) + \beta \sin(\sqrt{|\lambda|}\pi) \\ \Rightarrow 2\beta \sin(\sqrt{|\lambda|}\pi) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = 0 \text{ oppure } \sqrt{|\lambda|} = k \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Imponendo la condizione (ii) alla derivata:

$$\begin{aligned} u'(t) &= -\alpha \sqrt{|\lambda|} \sin(\sqrt{|\lambda|}t) + \beta \sqrt{|\lambda|} \cos(\sqrt{|\lambda|}t) \\ u(-\pi) &= -\alpha \sqrt{|\lambda|} \sin(-\sqrt{|\lambda|}\pi) + \beta \sqrt{|\lambda|} \cos(-\sqrt{|\lambda|}\pi) = \\ &= -\alpha \sqrt{|\lambda|} \sin(\sqrt{|\lambda|}\pi) + \beta \sqrt{|\lambda|} \cos(\sqrt{|\lambda|}\pi) = u(\pi). \end{aligned}$$

Come nel caso precedente si ottiene:

$$\Rightarrow 2\alpha \sin(\sqrt{|\lambda|}\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0 \text{ oppure } \sqrt{|\lambda|} = k \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Unificando tutti i casi si ottengono le seguenti soluzioni:

$$u_k(t) = \alpha_k \cos(kt) + \beta_k \sin(kt) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Si può notare che essendo l'equazione differenziale (2.1) omogenea allora ogni funzione della forma:

$$p_n(t) = c + \sum_{k=1}^n \alpha_k \cos(kt) + \beta_k \sin(kt)$$

è soluzione di (2.1). Queste funzioni  $p(t)$  vengono chiamate polinomi di Fourier.

Si pone

$$Q = \{p_n \mid \alpha_k, \beta_k, c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}. \quad (2.2)$$

### 2.1.2 L'Operatore di Risoluzione, Compatto e Autoaggiunto

Consideriamo il seguente problema:

$$\begin{cases} A(u) = u'' = f \\ u(-\pi) = u(\pi) = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

**Osservazione 4.** Una soluzione classica dell'equazione (2.3) è:

$$u \in C^2([-\pi, \pi], \mathbb{R}) \text{ e } f \in C([-\pi, \pi], \mathbb{R}).$$

Si osservi che  $u$  è soluzione classica del problema se e solo se  $u$  è soluzione di:

$$\forall \varphi \in C_0^\infty \quad - \int_{-\pi}^{\pi} u' \varphi' = \int_{-\pi}^{\pi} f \varphi.$$

Tuttavia in questa trattazione non siamo interessati alla soluzione classica ma a quella debole.

A verrà definito in seguito dopo alcune definizioni:

Sia  $E = C_0^1([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ , funzioni derivabili a supporto compatto.  $E$  è normato con il prodotto scalare:

$$\langle u, v \rangle_E = \int_{-\pi}^{\pi} u' v' \quad \|u\|_E = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (u')^2}$$

Questo prodotto scalare induce una norma su  $E$  che non lo rende completo.

**Definizione 10.**  $W_0^{1,2}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ , spazio di **Sobolev** è il completamento di  $E$  in norma  $\|u'\|_{L^2}$ .

**Definizione 11.**  $u \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$  è **derivata debole** con derivata  $v \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$  se

$$\forall \varphi \in C_0^\infty \quad \int_{-\pi}^{\pi} v \varphi = - \int_{-\pi}^{\pi} u \varphi.$$

**Definizione 12.**  $W^{l,2} = \{u \in L^2 \mid u', \dots, u^{(l)} \in L^2\}$  dove  $u^{(k)}$  indica la derivata debole.

**Definizione 13.** Si dice **soluzione debole** del problema (2.3) se, data  $f \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ ,  $u \in W_0^{1,2}$  soddisfa:

$$\forall \varphi \in C_0^\infty \quad - \int_{-\pi}^{\pi} u' \varphi' = \int_{-\pi}^{\pi} f \varphi.$$

Ogni funzione in uno spazio di Sobolev ha derivata debole in  $L^2$ . Nota questa proprietà è sensata la seguente definizione:

$$A : W_0^{1,2}([-\pi, \pi], \mathbb{R}) \cap W^{2,2} \rightarrow L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R}) \quad A(u) = u''.$$

Si ponga  $\mathbf{H} = \mathbf{W}_0^{1,2}([-\pi, \pi], \mathbb{R}) \cap \mathbf{W}^{2,2}$  questo è un spazio di Hilbert.

Per risolvere l'esistenza e l'unicità di una soluzione debole bisogna riconoscere che il problema posto è un problema di rappresentazione.

Fissata  $f \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$  si consideri il termine

$$\phi(\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} f \varphi$$

$\phi : H \rightarrow \mathbb{R}$  è un operatore lineare limitato, infatti:

$$\begin{aligned} \phi(\varphi + \psi) &= \int_{-\pi}^{\pi} f \varphi + \int_{-\pi}^{\pi} f \psi \\ \phi(\varphi) &= \int_{-\pi}^{\pi} f \varphi \leq \|f\|_2 \|\varphi\|_2. \end{aligned}$$

Quindi  $\phi \in H^*$ , ovvero appartiene al duale di  $H$ . Le  $\varphi$  sono state considerate in  $H$  e non in  $C_0^\infty$ , questo non preoccupa perchè  $\overline{C_0^\infty} = W_0^1$ .

Ovviamente  $W_0^1$  possiede la norma indotta da  $E$  che lo rende completo e anche il prodotto scalare indotto da quello definito in  $E$  che verrà indicato con:

$$\langle u, v \rangle_{W_0^1} = \int_{-\pi}^{\pi} u' v' \quad u', v' \text{ indicano la derivata in senso debole}$$

Ricordiamo il Teorema di Rappresentazione di Riesz-Frechet, si rimanda al [3] per la dimostrazione:

**Teorema 7 ( Rappresentazione di Riesz-Frechet ).** Sia  $H$  uno spazio di Hilbert

$$\forall \phi \in H^* \quad \exists! u \in H : \quad \phi(\varphi) = \langle u, \varphi \rangle_H \quad \forall \varphi \in H.$$

Quindi fissata  $f \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$  si determina una  $\phi$ , funzione nel duale. Ne viene che  $-\phi(\varphi)$  è ancora funzione del duale, allora per il Teorema di Rappresentazione di Riesz-Frechet esiste un'unica  $u \in H$  t.c.:

$$\begin{aligned}\phi(\varphi) &= -\langle u, \varphi \rangle_{W_0^1} \\ \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f \varphi &= - \int_{-\pi}^{\pi} u' \varphi'.\end{aligned}$$

Si evince che la soluzione debole all'equazione (2.3) esiste sempre ed è unica in  $W_0^{1,2}([-\pi, \pi], \mathbb{R}) \cap W^{2,2}$ , quindi l'operatore lineare

$$A : W_0^{1,2}([-\pi, \pi], \mathbb{R}) \cap W^{2,2} \rightarrow L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$$

è iniettivo e suriettivo, in particolare invertibile.

L'operatore lineare inverso di A, chiamato anche operatore lineare di risoluzione è

$$\begin{aligned}A^{-1} : L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R}) &\rightarrow W_0^{1,2}([-\pi, \pi], \mathbb{R}) \cap W^{2,2} \\ f &\mapsto u\end{aligned}$$

**Definizione 14.** Sia  $A^{-1}$  sopra definito e l'inclusione

$$i : W_0^{1,2}([-\pi, \pi], \mathbb{R}) \cap W^{2,2} \hookrightarrow L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$$

si definisca  $T : L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R}) \rightarrow L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$  nel modo seguente:

$$T = i \circ A^{-1}$$

L'operatore lineare T è compatto; per dimostrare questo risultato bisogna usare il Teorema di Immersione di Sobolev.

**Teorema 8** (di Immersione di Sobolev). Sia  $W_0^1([a, b], \mathbb{R})$  uno spazio di Sobolev,  $L^p([a, b], \mathbb{R}), p > 1$  lo spazio delle funzioni p-sommabili,  $C([a, b], \mathbb{R})$  delle funzioni continue. Allora:

$$W_0^1([a, b], \mathbb{R}) \subset L^p([a, b], \mathbb{R}) \quad W_0^1([a, b], \mathbb{R}) \subset C([a, b], \mathbb{R})$$

$$i : W_0^1([a, b], \mathbb{R}) \hookrightarrow L^p([a, b], \mathbb{R}) \quad i(u) = u \quad \text{è un'immersione compatta}$$

Si premetta la seguente proposizione per la dimostrazione del Teorema:

**Lemma 1.** Per ogni  $u \in W_0^1([a, b])$  vale:

- $|u(x)| \leq c \|u'\|_2$
- $\|u\|_p \leq c \|u'\|_2$
- $|u(x) - u(y)| \leq c \sqrt{x - y} \|u'\|_2$

*Dimostrazione.* (del teorema di Immersione di Sobolev)

Sia  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  limitata in  $W_0^1$ . Allora:

$$\exists \tilde{c} \quad \|u_n'\|_2 \leq \tilde{c} \quad \Rightarrow \quad |u(x)| \leq \tilde{c}c$$

$$\Rightarrow \quad \|u\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |u(x)| \leq \tilde{c}c \quad \Rightarrow \quad \text{è equilimitata.}$$

$$\begin{aligned} \forall x, y \in [a, b] \quad |u_n(x) - u_n(y)| &\leq c \sqrt{x - y} \|u_n'\|_2 \\ &\leq \tilde{c}c \sqrt{x - y} \quad \Rightarrow \quad \text{è equicontinua.} \end{aligned}$$

Allora per il Teorema di Ascoli-Arzelà:

$$\exists \text{ una sottosuccessione limitata } (u_{n_j})_{j \in \mathbb{N}} \text{ convergente in norma } \|\cdot\|_\infty$$

$$\Rightarrow u_{n_j} \rightarrow u \text{ in } L^\infty$$

$$|u_{n_j}(x)| \leq \tilde{c}c \quad \Rightarrow \quad u \in L^p \text{ e per la convergenza dominata di Lebesgue}$$

$$\int |u_{n_j}(x) - u(x)|^p \rightarrow 0.$$

Quindi è stata trovata una sottosuccessione convergente nell'immagine allora l'operatore è compatto.  $\square$

**Proposizione 3.** Siano  $E, F, G$  tre spazi di Banach  $p : E \rightarrow F$  lineare,  $s : F \rightarrow G$  lineare e compatto. Allora  $s \circ p$  è compatto.

Usando il Teorema di Sobolev e la Proposizione 3 otteniamo che  $T = i \circ A^{-1}$  è compatto.

$L^2$  è uno spazio di Hilbert quindi ha senso chiedersi se l'operatore  $T$  sia autoaggiunto: la risposta è affermativa.

Per dimostrare questo risultato si inizia dimostrando delle proprietà su  $A$ :

$$\langle A(u), v \rangle_2 = \int_{-\pi}^{\pi} u''v = - \int_{-\pi}^{\pi} u'v' = \int_{-\pi}^{\pi} uv'' = \langle u, A(v) \rangle_2.$$

In questo passaggio è stata sfruttata la densità di  $C_0^\infty$  in  $L^2$  anche se i conti espliciti non sono riportati. Adesso usando il fatto che  $A$  è invertibile:

$$\langle u, A^{-1}(v) \rangle_2 = \langle A \circ A^{-1}(u), A^{-1}(v) \rangle_2 = \langle A^{-1}(u), v \rangle_2$$

Siccome  $T = i \circ A^{-1}$  allora la proprietà vale per  $T$  e questo significa che  $T$  è autoaggiunto.

### 2.1.3 L'Analisi di Fourier

$T : L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R}) \rightarrow L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$  è autoaggiunto e compatto,  $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$  è uno spazio di Hilbert separabile allora ammette una base ortonormale di autovettori. Gli autovettori di  $T$  sono gli stessi autovettori di  $A^{-1}$  che sono gli stessi di  $A$ , infatti:

$$Av = \lambda v \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1}Av = \lambda A^{-1}v \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^{-1}v = A^{-1}v.$$

Trovare gli autovettori di  $A$  con  $u''$  derivata debole equivale a trovare gli autovettori delle funzioni  $C_0^\infty$ , infatti  $u''_{deb} = \lambda u$  quindi la derivata seconda debole è continua allora la funzione è  $C^2$  allora la derivata è  $C^2$  e la funzione è  $C^4$ . Iterando questo procedimento si deduce che la funzione è  $C^\infty$ . Quindi una base ortonormale di autovettori va cercata nell'insieme  $Q$  di tutti gli autovettori (2.2). Una base ortonormale di questo sottospazio di  $L^2$  è :

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin(kt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(kt)}{\sqrt{\pi}} \mid k \in \mathbb{N} \right\}$$

che denoteremo per brevità con  $S = \{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ .

Quindi:

$$\overline{\text{span}(S)} = \overline{Q} = L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R}).$$

L'ultima uguaglianza è verificata perché sicuramente in  $Q$  c'è una base ortonormale per il Teorema Spettrale; così  $S$ , che era già un sistema ortonormale di autovettori, è anche completo e quindi è una base. Quindi una base ortonormale di autovettori è proprio

$$S = \{e_k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{1, \sin(kt), \cos(kt) \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

Per il Corollario 1 del Teorema Spettrale del Capitolo 1, dato  $f \in L^2$  si ha:

$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle f, e_n \rangle e_n.$$

Analogamente sia:

$$S_n(f) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \quad \text{dove } a_0 := \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt,$$

$$a_k := \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad b_k := \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt \quad \Rightarrow \|f - S_n(f)\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Se  $f$  è  $2\pi$ -periodica allora  $f$  converge in norma  $L^2$  al suo polinomio di Fourier  $S_n(f)$ .

I criteri per la convergenza puntuale della serie di Fourier si ottengono utilizzando il Teorema di Localizzazione di Riemann e il Lemma di Riemann-Lebesgue e le proprietà del nucleo di Dirichlet. Condizione sufficiente per la convergenza puntuale è la Hölderianità.

La convergenza uniforme del polinomio di Fourier ad  $f$

$$S_n(f) \rightrightarrows f$$

deriva dalla assoluta continuità e dall'esistenza della derivata debole in  $L^2$ .

Dalla convergenza assoluta, sfruttando la densità di  $C_0^\infty$  in  $L^2$  si può dedurre la convergenza in  $L^2$ . Tuttavia dalla convergenza in  $L^2$  non si possono ricavare gli altri risultati.



## 2.2 Generalizzazione in più dimensioni

In questa nuova sezione consideriamo lo stesso problema del laplaciano non più su un intervallo, come nel caso unidimensionale, ma su un insieme generico  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  aperto, limitato e misurabile secondo Lebesgue. L'esistenza di una base ortonormale di autovettori sarà dimostrata, mentre la forma analitica di questa base Hilbertiana in  $L^2(\Omega, \mathbb{R})$  dipenderà dall'insieme e verrà affrontata in casi relativamente semplici nel capitolo successivo.

Come nella dimostrazione del caso unidimensionale per l'esistenza della base ortonormale sarà necessario il Teorema di Immersione di Sobolev in più dimensioni. La dimostrazione di questo teorema verrà affrontata in una sottosezione del Capitolo.

### 2.2.1 L'Operatore di Risoluzione del laplaciano

Ricordiamo la definizione dell'operatore laplaciano:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Consideriamo il seguente problema, ove  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  aperto, limitato e misurabile,  $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$ :

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

**Definizione 15.** Se  $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$  e  $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$  e verifica la (2.4) si dice soluzione classica del problema.

**Osservazione 5.** Si osservi che  $u$  è soluzione classica se e solo se

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \quad \int_{\Omega} \Delta u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi.$$

Siccome  $\Omega$  è limitato  $\exists a, b \in \mathbb{R}$  t.c.  $[a, b]^N \subseteq \Omega$ , quindi:

$$\int_{\Omega} \Delta u \varphi = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \partial_i^2 u(x) \varphi(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{[a,b]^N} \partial_i^2 u(x) \varphi(x) dx.$$

Ora siccome siamo in un compatto possiamo applicare il teorema di Riduzione ottenendo

$$\int_{\Omega} \Delta u \varphi = \sum_{i=1}^N \int_a^b \cdots \int_a^b \left( \int_a^b \partial_i^2 u(x) \varphi(x) dx_i \right) dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_N.$$

Si osservi che

$$\int_a^b \partial_i^2 u(x) \varphi(x) dx_i = \overline{[\partial_i u(x) \varphi(x)]_a^b} - \int_a^b \partial_i u(x) \partial_i \varphi(x) dx_i.$$

Il primo termine è stato cancellato perchè la  $\varphi$  è a supporto compatto quindi negli estremi di integrazione è nulla. Fissati  $dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_N$  si ottiene

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \int_{\Omega} \Delta u \varphi &= - \sum_{i=1}^N \int_a^b \cdots \int_a^b \left( \int_a^b \partial_i u(x) \partial_i \varphi(x) dx_i \right) dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_N \\ &\Leftrightarrow \int_{\Omega} \Delta u \varphi = - \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi. \end{aligned}$$

Quindi  $u$  è soluzione classica se e solo se

$$\forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}) \quad - \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi = \int_{\Omega} f \varphi.$$

Come nel caso unidimensionale si vuole utilizzare il Teorema di rappresentazione di Riesz, quindi in seguito vengono fornite le definizioni adeguate per ottenere una soluzione debole.

Sia  $E = C_0^1(\Omega, \mathbb{R})$ .  $E$  è normato con il prodotto scalare

$$\langle u, v \rangle_E = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v, \quad \|u\|_E = \sqrt{\int_{\Omega} (\nabla u)^2}$$

Questa norma indotta dal prodotto scalare rende lo spazio non completo. Chiamamo  $W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R})$ , il completamento di  $E$  in norma  $\|\cdot\|$ ; questo spazio di Sobolev ha un prodotto scalare che lo rende completo quindi è di Hilbert.

**Definizione 16.** Sia  $u \in L_{loc}^1(\Omega, \mathbb{R})$ ,  $v \in L_{loc}^1(\Omega, \mathbb{R})$  si dice derivabile in senso debole in  $u$  rispetto a  $x_i$ , si scriverà  $v \stackrel{deb}{=} \partial_i u$  se

$$\forall \varphi \in C_0^{\infty} \int_{\Omega} v \varphi = - \int_{\Omega} u \partial_i \varphi.$$

Se esiste  $\partial_i u \quad \forall i = 1, \dots, N$  in senso debole si pone  $\nabla u \stackrel{deb}{=} (\partial_1 u, \dots, \partial_N u)$

**Osservazione 6.** 1. Se  $u \in W_0^1(\Omega, \mathbb{R})$  allora  $u \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$  e  $\exists \nabla u \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$ , ovviamente in senso debole.

2.  $\exists c > 0$  t.c.  $\forall u \in W_0^{1,2} \quad \|u\|_2 \leq c \|u\|_{W_0^1}$ .

**Definizione 17.** Inspirandosi all'osservazione 5 si dice che  $u \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R})$  è soluzione debole di (2.4), fissata  $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$ , se

$$-\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty.$$

Si definisce  $\phi : W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\phi(\varphi) = \int_{\Omega} f \varphi$$

Questo operatore è lineare e limitato; la linearità dipende dalla linearità dell'integrale, dimostriamo la limitatezza

$$|\phi(\varphi)| = \left| \int_{\Omega} f \varphi \right| \leq \|f\|_2 \|\varphi\|_2 \leq c \|f\|_2 \|\varphi\|_{W_0^1}.$$

Quindi  $\phi \in (W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}))^*$  allora anche  $-\phi$  appartiene al duale di  $W_0^1(\Omega, \mathbb{R})$  che è uno spazio di Hilbert, allora per il **Teorema di Riesz**:

$$\exists! u \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}) \text{ t.c. } \langle u, \varphi \rangle_{W_0^1} = -\phi(\varphi) \quad \forall \varphi \in W_0^1(\Omega, \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow -\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty.$$

Quindi il laplaciano  $\Delta : W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow L^2(\Omega, \mathbb{R})$  è invertibile e sia

$$\Delta^{-1} : L^2(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R})$$

l'operatore di risoluzione che ad ogni  $f$  associa la soluzione debole del problema (2.4).

**Definizione 18.** Sia  $\Delta^{-1}$  sopra definito e  $i : W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}) \hookrightarrow L^2(\Omega, \mathbb{R})$  l'inclusione si definisca  $T : L^2(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow L^2(\Omega, \mathbb{R})$  nel modo seguente

$$T = i \circ \Delta^{-1}$$

Enunciamo il Teorema di Sobolev in più dimensioni, la dimostrazione è parte centrale della sezione successiva.

**Teorema 9** (Teorema di Sobolev). Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  aperto, limitato e misurabile secondo Lebesgue allora:

1. se  $n < p$  allora  $W_0^1(\Omega, \mathbb{R}) \hookrightarrow L^r(\Omega, \mathbb{R})$ ,  
 $1 < r < \frac{N \cdot p}{N-p}$  è un'immersione compatta
2. se  $n = p$  allora  $W_0^1(\Omega, \mathbb{R}) \hookrightarrow L^r(\Omega, \mathbb{R})$ ,  
 $r > 1$  è un'immersione compatta.

$T = i \circ \Delta^{-1}$  è **compatto**. Infatti  $i$  è compatta perchè se consideriamo il Teorema di Sobolev con  $p = 2$  si ha:

1.  $N > 2 \quad 2 < \frac{2N}{N-2} \Leftrightarrow 2N - 4 < 2N \Leftrightarrow -4 < 0$   
 $\Rightarrow$  l'immersione è compatta
2.  $N = 2 \quad 1 < 2 < +\infty \Rightarrow$  l'immersione è compatta.

Inoltre siccome  $T$  è composizione di due operatori, di cui uno è compatto, per la Proposizione 3,  $T$  è compatto.

$T = i \circ \Delta^{-1}$  è **autoaggiunto**; infatti:

$$\langle \Delta u, v \rangle = \int_{\Omega} \Delta u v = - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v = \int_{\Omega} \Delta u v = \langle u, \Delta v \rangle$$

ora, come nel caso unidimensionale, usando il fatto che  $\Delta$  è invertibile

$$\langle u, \Delta^{-1}(v) \rangle_2 = \langle \Delta \circ \Delta^{-1}(u), \Delta^{-1}(v) \rangle_2 = \langle \Delta^{-1}(u), v \rangle_2.$$

Siccome  $T = i \circ \Delta^{-1}$  allora la proprietà vale per  $T$  e questo significa che  $T$  è autoaggiunto.

Infine essendo  $L^2(\Omega, \mathbb{R})$  un spazio di Hilbert separabile e  $T$  compatto e autoaggiunto per il Teorema Spettrale sappiamo che esiste una base ortonormale di autovettori che sicuramente dipende dall'insieme  $\Omega$ . Si chiami questa base  $S = \{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ; posto  $u \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$  si ha

$$u = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle u, e_n \rangle e_n.$$

Tuttavia la base esiste ma non è sempre possibile determinarla analiticamente, nell'ultimo Capitolo affronteremo questo problema dove l'insieme  $\Omega$  è un palla o un plurirettangolo.

### 2.2.2 Il Teorema di Immersione di Sobolev in $\mathbb{R}^N$

L'obiettivo di questa sezione è dimostrare il Teorema di Immersione di Sobolev per un insieme aperto limitato di  $R^N$  con  $N \geq 2$ . La dimostrazione utilizza diverse risultati che verranno enunciati e dimostrati.

**Proposizione 4.** Sia  $k \in C^\infty(R^N \times R^N)$ ,  $p > 1$  allora:

$$T : L_{loc}^p \rightarrow L_{loc}^\infty \quad T(f(x)) = \int k(x, y)f(y)dy$$

è compatto.

*Dimostrazione.* Sia  $A \subseteq R^N$  compatto e sia  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  limitata in  $L^p(A)$  allora:

$$|T(f_n(x))| = \left| \int_A k(x, y)f_n(y)dy \right| \leq \int_A |k(x, y)||f_n(y)|dy.$$

È noto che prodotto cartesiano di compatti è compatto. La funzione  $|k(x, y)|$  è continua su un compatto, allora per il Teorema di Weierstrass:

$$\exists m \text{ t.c. } \forall x, y \in A \quad |k(x, y)| \leq m.$$

Da questo fatto e dalla disuguaglianza di Hölder, ove  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ , si può dedurre:

$$\int_A |k(x, y)||f_n(y)|dy \leq m \left( \int_A |f_n(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} |A|^{\frac{1}{p'}} \leq c \|f_n\|_p \leq \tilde{c}.$$

Nell'ultimo passaggio è stata utilizzata la limitatezza di  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Ne viene che  $(T(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$  è equilimitata. Inoltre:

$$\forall x, x' \in A \quad |T(f_n(x)) - T(f_n(x'))| \leq \int_A |k(x, y) - k(x', y)||f_n(y)|dy. \quad (2.5)$$

Per il Teorema del Valor Medio si ha:

$$|k(x, y) - k(x', y)| \leq |\nabla k(z, y)||x - x'|.$$

Poiché  $\nabla k$  è continua per il Teorema di Weierstrass esiste  $M$  t.c.:

$$|k(x, y) - k(x', y)| \leq |\nabla k(z, y)||x - x'| \leq M|x - x'|.$$

Tornando all'equazione (2.5) si ottiene:

$$|T(f_n(x)) - T(f_n(x'))| \leq \int_A |k(x, y) - k(x', y)| |f_n(y)| dy \leq M|x - x'| \int_A |f_n(y)| dy.$$

Sfuttando la disuguaglianza di Hölder e la limitatezza di  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si ottiene:

$$|T(f_n(x)) - T(f_n(x'))| \leq M|x - x'| |A|^{p'} \|f_n\|_p \leq \tilde{M}|x - x'|$$

Allora  $(T(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$  è equicontinua. Essendo  $(T(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$  equicontinua ed equilimitata da un insieme compatto ad  $\mathbb{R}$  si deduce per il Teorema di Ascoli-Arzelà che esiste un sottosuccessione  $(T(f_{n_j}))_{j \in \mathbb{N}}$  convergente uniformemente. Quindi  $T$  è compatto.  $\square$

**Teorema 10.** Sia  $T_n : H \rightarrow H$  una successione di operatori compatti,  $T : H \rightarrow H$  lineare e limitato:

$$T_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} T \quad \text{in norma } \mathcal{L}(H, H) \quad \Rightarrow \quad T \text{ è compatto.}$$

*Dimostrazione.* Sia  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  successione limitata

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \quad \|T_{\bar{n}} - T\| \leq \varepsilon$$

Siccome  $T_{\bar{n}}$  è compatto esiste una  $(u_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$  sottosuccessione di  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tale che  $(T_{\bar{n}}(u_{n_j}))_{j \in \mathbb{N}}$  converge. Allora  $(T_{\bar{n}}(u_{n_j}))_{j \in \mathbb{N}}$  è successione di Cauchy, ovvero:

$$\exists m : \quad |T_{\bar{n}}(u_{n_j}) - T_{\bar{n}}(u_{n_i})| \leq \varepsilon \quad \forall i, j \geq m$$

Quindi:

$$\begin{aligned} |T(u_{n_j}) - T(u_{n_i})| &\leq |(T - T_{\bar{n}})(u_{n_j})| + |(T - T_{\bar{n}})(u_{n_i})| + \\ &\quad + |T_{\bar{n}}(u_{n_j}) - T_{\bar{n}}(u_{n_i})| \leq 2\varepsilon \|u_{n_i}\| + \varepsilon \leq 2c\varepsilon + \varepsilon \end{aligned}$$

Ne viene che  $(T(u_{n_j}))_{j \in \mathbb{N}}$  è successione di Cauchy e ovvero è convergente, quindi  $T$  è compatto.  $\square$

**Proposizione 5.** Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  aperto e limitato:

$$T : L^p(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow L^r(\Omega, \mathbb{R}) \quad T(f)(x) = \int_{\Omega} \frac{x_i - y_i}{|x - y|^N} f(y) dy$$

1. se  $p < N$ ,  $1 < r < \frac{N \cdot p}{N-p}$  allora  $T$  è compatto e lineare
2. se  $p = N$ ,  $1 < r < +\infty$  allora  $T$  è compatto e lineare

*Dimostrazione.* Per dimostrazione della limitatezza dell'operatore si rimanda al corso di istituzioni di analisi. La dimostrazione della compattezza è qui riportata.

$$\text{Sia } \eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad \eta(t) := \begin{cases} 0 & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 1 & |t| \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{e sia } T_n(f)(x) = \int_{\Omega} \frac{x_i - y_i}{|x - y|^N} \eta(n|x - y|) f(y) dy.$$

Verifichiamo che  $T_n$  è compatto da  $L^p$  a  $L^r$ , con  $1 < r < +\infty$ :

se  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  è successione limitata in  $L^p$  allora  $(T_n(f_k))_{k \in \mathbb{N}} \in L^r$ .

Infatti si ponga:

$$\Gamma(x, y) := \frac{x_i - y_i}{|x - y|^N} \eta(n|x - y|)$$

per la Disuguaglianza di Young di ha:

$$\|T_n(f)\|_r \leq \|\Gamma(x, y) \eta(n|x - y|)\|_q \cdot \|f\|_p \quad \text{con} \quad \frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

La funzione  $\Gamma(x, y) \eta(n|x - y|)$  è  $C_0^\infty$  poiché il mollificatore  $\eta$  elimina la singolarità per  $x$  e  $y$  "vicini". Inoltre essa è  $r$ -sommabile sul dominio  $\Omega$  limitato per ogni  $1 < r < +\infty$ .

Essendo  $\Gamma(x, y) \eta(n|x - y|) \in C_0^\infty$  per la Proposizione 4 si ha che  $(T_n(f_k))_{k \in \mathbb{N}}$  ammette una sottosuccessione  $(T_n(f_{k_j}))_{j \in \mathbb{N}}$  convergente uniformemente, ovvero in norma  $\|\cdot\|_\infty$ . Indichiamo con  $u$  il limite, si ottiene pertanto:

$$\left( \int_{\Omega} (T_n(f_{k_j}) - u)^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq \varepsilon |\Omega|^{\frac{1}{r}} \Rightarrow (T_n(f_{k_j}))_{j \in \mathbb{N}} \text{ converge in } L^r$$

$$\|T_n - T\|_r = \|\Gamma(x, y)(\eta - 1)f\|_r \tag{2.6}$$

$$\leq \|f\|_p \|\Gamma(x, y)\|_q \cdot \chi_{[|x-y| \leq \frac{1}{n}]}(t) \tag{2.7}$$

$$\leq c \|\Gamma(x, y)\|_q \cdot \chi_{[|x-y| \leq \frac{1}{n}]}(t) \tag{2.8}$$

Ora la dimostrazione si divide nei due casi dell'enunciato:



1.  $p < N$ ,  $1 < r < \frac{N \cdot p}{N-p}$  Si nota che:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 &= \frac{1}{r} > \frac{N-p}{Np} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N} \\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 &> \frac{1}{p} - \frac{1}{N} \\ \frac{1}{q} &> 1 - \frac{1}{N} = \frac{N-1}{N} \\ q &< \frac{N}{N-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Gamma(x, y) := \frac{x_i - y_i}{|x - y|^N} \in L^q$$

Dal'equazione (2.8) si deduce

$$\Gamma \in L^q \quad \text{e} \quad \chi_{[|x-y| \leq \frac{1}{n}]}(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \Rightarrow \quad T_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} T \quad \text{in norma} \quad \mathcal{L}(H, H). \quad (2.9)$$

2. Nel caso in cui  $N = p$ , verifichiamo che ogni valore di  $q$  che verifica l'uguaglianza di Young soddisfa  $q < N/(N-1)$ , pertanto la funzione  $\Gamma(x, y)$  appartiene  $L^q$  e si può ripetere il ragionamento precedente.

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} + \frac{1}{q} &= \frac{1}{r} + 1 & \Leftrightarrow & \frac{1}{q} = \frac{N-r+Nr}{Nr} \\ q = \frac{Nr}{N-r+Nr} &< \frac{N}{N-1} & \Leftrightarrow & r(N-1) < N-r-Nr \\ \Leftrightarrow \cancel{Nr} - r &< N - r + \cancel{Nr} & \Leftrightarrow & N > 0 \quad \text{S.V.} \end{aligned}$$

Ne viene dunque che

$$\text{per ogni } q > 1 \quad q < \frac{N}{N-1} \quad \Rightarrow \quad \Gamma(x, y) \in L^q.$$

□

**Lemma 2.** Sia  $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ .  $\Omega$  aperto limitato. Allora

$$u(x) = \frac{1}{\omega_N} \int_{\Omega} \frac{(x_i - y_i) \partial_i u(y)}{|x - y|^N} dy$$

*Dimostrazione.* Si supponga che  $u \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R})$  e estendiamo  $u$  uguale a zero fuori da  $\Omega$ . Utilizzando il teorema fondamentale del calcolo integrale e il fatto che  $u(|y|)$  è zero per  $|y| \rightarrow +\infty$ , perchè  $\Omega$  è limitato, si ottiene

$$\forall w, \quad |w| = 1 \quad u(x) = - \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial r} u(x + rw) dr$$

Integrando ambedue i membri rispetto a  $w$ , quindi integrando sulla ipersuperficie della palla unitaria si ottiene:

$$\int_{|w|=1} u(x) dw = - \int_{|w|=1} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial r} u(x + rw) dr dw \quad (2.10)$$

Si definisce

$$\omega_N := \int_{|w|=1} dw$$

e applicando il Teorema di Fubini-Tonelli al secondo membro di (2.10) si ottiene

$$u(x) = \frac{1}{\omega_N} \int_0^\infty \int_{|w|=1} \frac{\partial}{\partial r} u(x + rw) dw dr.$$

Ponendo  $y = x + rw$ , con  $r = |x - y|$ , si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial r} u(x + rw) = w_i \frac{\partial}{\partial y_i} u(y) = \frac{y_i - x_i}{|x - y|}.$$

Siccome lo Jacobiano per passare alle dalle coordinate polari a quelle cartesiane è

$$\mathcal{J} = \frac{1}{|x - y|^{N-1}}$$

si ottiene

$$u(x) = \frac{1}{\omega_N} \int_\Omega \frac{(x_i - y_i) \partial_i u(y)}{|x - y|^N} dy.$$

La proprietà è stata dimostrata per le funzioni  $C_0^1(\Omega)$  che sono dense in  $W_0^{1,1}(\Omega)$ , da questo fatto si può dedurre il risultato.

**Teorema 11** (Teorema di Sobolev). Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  aperto, limitato e misurabile secondo Lebesgue allora:

1. se  $n < p$  allora  $i : W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}) \hookrightarrow L^r(\Omega, \mathbb{R})$ ,  
 $1 < r < \frac{N \cdot p}{N-p}$  è un immersione compatta

2. se  $n = p$  allora  $i : W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}) \hookrightarrow L^r(\Omega, \mathbb{R})$ ,  
 $r > 1$  è un'immersione compatta

*Dimostrazione.* 1. Se  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  successione  $\in W_0^{1,p}$  allora la derivata in senso debole  $\partial_i u_n \in L^p$ . Si consideri l'operatore  $T$  definito nella Proposizione 5.

$T$  è compatto da  $L^p$  a  $L^r$  con  $1 < r < \frac{N \cdot p}{N - p}$

$$T(\partial_i u_n(x)) = \int_{\Omega} \frac{x_i - y_i}{|x - y|^N} \partial_i u_n(y) dy \stackrel{(1)}{=} u_n(x).$$

L'uguaglianza (1) deriva dal Lemma 2 appena dimostrato, infatti  $W_0^{1,p} \subseteq W_0^{1,1}$ .

Da questa uguaglianza ne viene che  $u \in W_0^{1,p}$  allora  $u \in L^r$ , quindi l'immersione  $i$  è ben definita. Inoltre essendo  $T$  compatto esiste una sottosuccessione  $(T(\partial_i u_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$  di  $(T(\partial_i u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  che converge a  $f \in L^r$ . Allora per l'uguaglianza (1) si ha che  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  tende a  $f$  in norma  $L^r$ . In conclusione la successione  $(i(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  ammette una sottosuccessione  $(i(u_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$  convergente, quindi l'immersione è compatta.

2. Nel caso in cui  $n = p$  la Proposizione 5 fornisce

$T$  è compatto da  $L^p$  a  $L^r$  con  $1 < r < \infty$ .

La dimostrazione si conclude in modo analogo al caso  $p < n$ .

□

# Capitolo 3

## Autofunzioni su Insiemi del Piano

L'obiettivo di questo capitolo è determinare l'espressione analitica di una base ortonormale di autovettori del laplaciano nello spazio funzionale  $L^2([-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi])$  e nello spazio funzionale  $L^2(B(0, 1))$ , dove  $B(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$  è il cerchio unitario contenuto nel piano. L'esistenza di tale base è garantita dal lavoro svolto nel capitolo precedente. Il primo problema si risolve facilmente utilizzando i risultati già ottenuti sui reali per l'analisi di Fourier. Per ottenere l'espressione analitica sul cerchio unitario si utilizzerà la teoria delle funzioni di Bessel delle quali enunceremo le proprietà essenziali propedeutiche al problema posto.

### 3.1 Base di Autovettori sul Quadrato

Per determinare gli autovettori del laplaciano su  $Q := [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$  si devono trovare le soluzioni non nulle della seguente equazione

$$\begin{cases} \Delta u - \lambda u = 0 \\ u|_{\partial Q} = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

**Osservazione 7.** Sia  $q \in C(\Omega, \mathbb{R})$ ,  $q \geq 0$ , utilizzando la definizione di soluzione debole e scegliendo  $u$  come funzione test si verifica subito che il problema

$$\begin{cases} -\Delta u + qu = 0 \\ u_\Omega = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

ha come unica soluzione la funzione nulla. Quindi gli autovettori vanno cercati per  $\lambda$  negativi, ovvero l'equazione (3.1) si trasforma in

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 \\ u|_{\partial Q} = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Ovviamente questo discorso vale per qualsiasi  $\Omega$ , in particolare per  $Q$ .

Supponiamo che la soluzione del problema (3.1) sia della forma:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= r(x)s(y) \\ \Rightarrow \Delta(r(x)s(y)) &= r''(x)s(y) + r(x)s''(y) = \frac{\lambda}{2}r(x)s(y) + \frac{\lambda}{2}r(x)s(y) \\ s(y)(r''(x) - \frac{\lambda}{2}r(x)) &+ r(x)(s''(y) - \frac{\lambda}{2}s(y)) = 0 \end{aligned}$$

Quindi dobbiamo risolvere i seguenti problemi

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r''(x) = -\frac{\lambda}{2}r(x) \\ r(-\pi) = r(\pi) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} s''(y) = -\frac{\lambda}{2}s(y) \\ s(-\pi) = s(\pi) \end{cases}$$

Il risultato a questo problema è stato esaminato nel Capitolo 2 e le soluzioni sono:

$$r(x) = c + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \quad s(y) = d + \sum_{k=1}^m \alpha_k \cos(ky) + \beta_k \sin(ky)$$

Una base per gli autovettori può essere:

$$D = \left\{ \frac{1}{2\pi}, \frac{\sin(kx) \cos(ny)}{\pi}, \frac{\cos(kx) \cos(ny)}{\pi}, \frac{\sin(kx) \sin(ny)}{\pi} \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Utilizzando le formule di prostaferesi si ottiene

$$D = \left\{ \frac{1}{2\pi}, \frac{\sin(kx + ny)}{2\pi}, \frac{\cos(kx + ny)}{2\pi} \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Usando il teorema di riduzione e il fatto che sono ortogonali in una variabile si ottiene che  $D$  è una base ortogonale. Viene ora riportato un esempio di questa verifica:

$$\int_{[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]} \sin(ky) \cos(kx) \sin(n'y) \cos(k'x) dy dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \sin(ky) \sin(n'y) dy \right) \cos(kx) \cos(k'x) dx = 0$$

Resta quindi da dimostrare che il sistema ortonormale  $S$  è un base di  $L^2(Q)$ . Per dimostrare questo risultato si utilizzerà il Teorema di Stone-Weierstrass e la definizione di algebra che separa i punti.

**Definizione 19.** Sia  $K$  uno spazio metrico compatto. Si consideri l'algebra di Banach

$$C(K, \mathbb{R}) = \{f : K \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ è continua} \}$$

munita della norma  $\|\cdot\|_{\infty}$ . Si danno le seguenti definizioni:

- $A \subset C(K, \mathbb{R})$  è **una sub-algebra unitaria** se  $1 \in A$  e se  $f, g \in A$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  implica  $\alpha f + \beta g \in A$  e  $fg \in A$ .
- $A \subset C(K, \mathbb{R})$  **separa i punti** di  $K$  se per ogni  $s, t \in K$ ,  $s \neq t$  esiste  $f \in A$  tale che  $f(s) \neq f(t)$ .

**Teorema 12** (Stone-Weierstrass). Sia  $K$  uno spazio metrico compatto,  $A \subset C(K, \mathbb{R})$  un sub-algebra unitaria che separa i punti di  $K$ . Allora

$$A \text{ è denso in } C(K, \mathbb{R}).$$

Per i risultati unidimensionali è noto che

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin(kt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(kt)}{\sqrt{\pi}} \mid k \in \mathbb{N} \right\} = \{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

è una base di  $L^2([-\pi, \pi])$  e  $X := [-\pi, \pi]$  è un insieme compatto. Analogamente  $\{e_h \mid h \in \mathbb{N}\}$  è base di  $L^2([-\pi, \pi])$  e  $Y := [-\pi, \pi]$  è compatto. Quindi  $Q = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] = X \times Y$  è compatto. Si definisca

$$A = \text{Span}\{e_k e_h \mid e_k \text{ è base di } L^2(X) \text{ e } e_h \text{ è base di } L^2(Y)\}$$

$A \subset C(K, \mathbb{R})$  è un sub-algebra unitaria chiusa rispetto alla somma e al prodotto. Infatti la funzione  $1 \in A$ , e lo Span di un insieme è un spazio vettoriale. Inoltre

utilizzando le formule si prostaferesi si verifica la chiusura rispetto al prodotto, viene riportato un esempio di calcolo

$$\begin{aligned} \text{siano } & \sin(kx) \cos(ny), \cos(k'x) \cos(n'y) \in A \\ \Rightarrow & \sin(kx) \cos(k'x) \cos(ny) \cos(n'y) = \\ & = \frac{1}{2}(\sin(k+k')x + \sin((k-k')x)) \frac{1}{2}(\cos(n+n')y + \cos((n-n')y)) \in A \end{aligned}$$

Inoltre  $A$  separa i punti di  $\mathbb{Q}$ .

Infatti siano  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{Q}$  con  $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ , supponiamo che sia  $x_1 < x_2$  allora in  $[-\pi, \pi]$  si consideri la funzione caratteristica  $\chi_{[x_1-\delta, x_1+\delta]}$ , dove  $\delta < \min\{|x_1 - x_2|, |-\pi - x_1|\}$ . Questa funzione può essere mollificata con  $\varphi \in C_0^\infty$  che assume in  $x_1$  il valore uno e in  $x_2$  zero. Quindi esiste  $S_n(\varphi)$  polinomio di che converge puntualmente a  $\varphi$ , ovvero per  $n$  grande  $S_n(\varphi)$  assumerà il valore zero in  $x_2$  e il valore uno in  $x_1$ . Si ponga  $e_h = 1$  allora  $S_n(\varphi)e_h \in A$  e

$$S_n(\varphi)(x_1)e_h(y_1) \neq S_n(\varphi)(x_2)e_h(y_2).$$

Si può dunque applicare il Teorema 12 di Stone-Weierstrass ad  $A$  e si deduce che  $A$  è denso in  $C(K, \mathbb{R})$ . Siccome  $C(K, \mathbb{R})$  è denso in  $L^2$  ne viene che  $A$  è denso in  $L^2$ . Quindi

$$\overline{\text{span}(D)} = \bar{A} = L^2.$$

Applicando la Proposizione 2 del primo capitolo si evince che  $D$  è una base Hilbertiana.

## 3.2 Autofunzioni del laplaciano sul cerchio unitario

Per l'osservazione (3.1), esibita nella sezione precedente, studiare gli autovettori sul cerchio unitario del piano equivale a trovare le soluzioni a

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 \\ u|_{\partial B(0,1)} = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

scrivendo le equazioni del laplaciano in coordiante polari  $(r, \theta)$  si ottiene

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 u &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + k^2 u = 0 \\ r \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + r^2 k^2 u &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Si utilizza il metodo per separazioni di variabili

$$u(r, \theta) = R(r)\Phi(\theta)$$

e sostituendo nella (3.5) si ottiene

$$\begin{aligned} r(rR'(r))'\Phi(\theta) + R(r)\Phi''(\theta) + k^2 r^2 R(r)\Phi(\theta) &= 0 \\ \frac{r(rR'(r))' + k^2 r^2 R(r)}{R(r)} &= -\frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)}. \end{aligned}$$

I due membri possono essere uguali per ogni  $\theta, r$  solo se sono uguali ad una costante  $\mu$ , quindi

$$\Phi'' = \mu\Phi.$$

Siccome la funzione  $\Phi$  rappresenta l'angolo deve essere  $2\pi$ -periodica, quindi per la trattazione del Capitolo 2 sull'analisi di Fourier  $\mu = n^2$  con  $n \in \mathbb{N}$  e siccome la funzione è almeno  $C^2$  il polinomio di Fourier converge alla funzione stessa

$$\Phi(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e_k(\theta).$$

La condizione  $\mu = n^2$  applicata al primo termine dell'equazione implica

$$\frac{1}{r}(rR')' + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)R = 0. \quad (3.6)$$

Ponendo  $x := kr$  e  $y(x) := R(r) = R(x/k)$  si ottiene l'equazione di Bessel di ordine  $n$

$$\frac{1}{x}(xy')' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0.$$

In generale **l'equazione di Bessel** di ordine  $\nu \in R_+$  è

$$\frac{1}{x}(xy')' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0. \quad (3.7)$$



### 3.2.1 Le funzioni di Bessel

L'equazione (3.7) è un'equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine omogenea, pertanto lo spazio delle soluzioni è un spazio vettoriale di dimensione due. Si cercano le soluzioni della forma

$$y(x) = x^\sigma (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) \quad a_0 \neq 0.$$

Sostituendo questa equazione nella (3.7) si ottengono

$$\begin{cases} a_0(\sigma^2 - \nu^2) = 0 \\ a_1((\sigma + 1)^2 - \nu^2) = 0 \\ a_k = ((\sigma + k)^2 - \nu^2) + a_{k-2} = 0 \quad k = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Da queste relazioni si riescono a determinare  $\sigma = \pm\nu$  e i coefficienti in maniera ricorsiva. Si supponga  $\nu$  non intero.

$$a_k = \frac{a_{k-2}}{(\sigma + k + \nu)(\sigma + k - \nu)}$$

Si noti  $a_1 = 0$  perchè  $(\sigma + 1)^2 - \nu^2 \neq 0$ , quindi i coefficienti dispari sono tutti nulli. Sfruttando le proprietà della funzione  $\Gamma$  di Eulero si ottiene<sup>1</sup>

$$J_{\pm\nu} := \left(\frac{x}{2}\right)^{\pm\nu} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k \pm \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \quad (3.8)$$

$J_\nu$  e  $J_{-\nu}$  sono soluzioni dell'equazione di Bessel (di prima specie) con  $\nu$  non intero e sono indipendenti, infatti la prima si annulla in zero e la seconda tende a più infinito. Quindi essendo lo spazio vettoriale delle soluzioni di ordine 2 si ha che una soluzione generica che soddisfa le equazioni di Bessel è della forma

$$c_1 J_\nu + c_2 J_{-\nu}.$$

Per  $\nu = n$  intero positivo l'espressione (3.8) non crea alcun problema e sapendo  $\Gamma(k+1) = k!$  si ottiene

$$J_n := \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}. \quad (3.9)$$

---

<sup>1</sup>si consulti [1] o [2] per una trattazione più accurata dei passaggi e per le proprietà della gamma di Eulero

Tuttavia per  $\nu = -m$ ,  $m \in \mathbb{N}$  la funzione Gamma di Eulero presenta dei poli negativi, quindi possono essere interpretati come nulli i termini dove compare a denominatore la Gamma calcolata in punti interi negativi. Sfruttando questa proprietà si ottiene

$$J_{-n} = (-1)^n J_n,$$

quindi le soluzioni non sono linearmente indipendenti e non descrivono tutto lo spazio delle soluzioni. Per ovviare a questo problema si definiscono le funzioni di Bessel di seconda specie  $Y_n$ . La trattazione di questo argomento non viene qui affrontata. Le funzioni di Bessel di prima specie hanno un carattere armonico e ogni  $J_\nu$  ammette una successione di zeri positivi che per  $\nu \neq \pm 1/2$  non sono equispaziati. Questa successione verrà denotata con  $(\xi_{\nu,k})_{k \in \mathbb{N}}$ .

**Definizione 20.** Per ogni  $\nu$  e  $k$  fissato, si definisce la funzione  $f_\nu : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  che ad  $x \mapsto J_\nu(\xi_{\nu,k}x)$ . Essa possiede  $k$  zeri nell'intervallo  $(0, 1]$ .

Queste funzioni sono candidate ad essere le autofunzioni che risolvono il problema posto all'inizio del capitolo, in quanto possiedono proprietà di ortogonalità e sono definite nell'intervallo  $[0, 1]$  in cui varia il raggio in coordinate polari.

**Osservazione 8.** Se  $\xi_\nu$  è uno zero della funzione  $J_\nu$ , la funzione  $y(x) := J_\nu(\xi_\nu x)$  verifica l'equazione di Bessel

$$\frac{1}{x}(xy')' + \left(\xi_\nu^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0.$$

*Infatti* È noto che  $J_\nu(x)$  risolve l'equazione di Bessel (3.7). Ponendo  $x' = \xi x$  si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{J_\nu(\xi_\nu x)''}{\xi_\nu^2} + \frac{1}{\xi_\nu x} \frac{J_\nu(\xi_\nu x)'}{\xi_\nu} + \left(1 - \frac{\nu^2}{(\xi_\nu x)^2}\right) J_\nu(\xi_\nu x) &= 0 \\ J_\nu(\xi_\nu x)'' + \frac{1}{x} J_\nu(\xi_\nu x)' + \left(\xi_\nu^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) J_\nu(\xi_\nu x) &= 0, \end{aligned}$$

quindi

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(\xi_\nu^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0.$$

**Proposizione 6.** Sia  $(\xi_{\nu,k})_{k \in \mathbb{N}}$  la successione di zeri  $J_\nu(x)$  ordinati per valori crescenti, allora

$$\int_0^1 x J_\nu(\xi_{\nu,h}x) J_\nu(\xi_{\nu,k}x) = \begin{cases} 0 & \text{se } h \neq k \\ \frac{1}{2}[J'_\nu(\xi_{\nu,h})] & \text{se } h = k \end{cases}$$

*Dimostrazione.* Per l'osservazione precedente siano  $y(x) := J_\nu(\xi_\nu x)$  risolve l'equazione di Bessel

$$y'' + \frac{1}{x}y' + (\xi_\nu^2 - \frac{\nu^2}{x^2})y = 0.$$

Siano due  $\xi_1, \xi_2$  valori positivi allora  $y_1(x) := J_\nu(\xi_1 x)$ ,  $y_2(x) := J_\nu(\xi_2 x)$  soddisfanno le equazioni di Bessel:

$$y_1'' + \frac{1}{x}y_1' + (\xi_1^2 - \frac{\nu^2}{x^2})y_1 = 0$$

$$y_2'' + \frac{1}{x}y_2' + (\xi_2^2 - \frac{\nu^2}{x^2})y_2 = 0$$

moltiplicando la prima per  $xy_2$ , la seconda per  $xy_1$  e sottraendo membro a membro si ottiene

$$xy_2y_1'' - xy_1y_2'' + y_2y_1' - y_1y_2' = \frac{d}{dx}[x(y_2y_1' - y_1y_2')] = (\xi_2^2 - \xi_1^2)xy_1y_2.$$

Integrando tra 0 e 1 si ottiene:

$$y_2(1)y_1(1)' - y_1(1)y_2(1)' = (\xi_2^2 - \xi_1^2) \int_0^1 xy_1(x)y_2(x)dx$$

ovvero riscrivendo

$$(\xi_2^2 - \xi_1^2) \int_0^1 x J_\nu(\xi_\nu x) J_\nu(\xi_2 x) dx = J_\nu(\xi_2 x) J_\nu(\xi_1)' - J_\nu(\xi_1) J_\nu(\xi_2 x)' = 0.$$

Scegliendo  $\xi_1 = \xi_{\nu,h}$  e  $\xi_2 = \xi_{\nu,k}$  con  $h \neq k$ , poiché  $(\xi_2^2 - \xi_1^2) \neq 0$  si ottiene

$$\int_0^1 x J_\nu(\xi_{\nu,h}x) J_\nu(\xi_{\nu,k}x) = 0.$$

Se  $\xi_1 = \xi_{\nu,h}$  e  $\xi_2 = \xi \neq \xi_{\nu,h}$ , che non è uno zero, si ottiene:

$$\int_0^1 x J_\nu(\xi_{\nu,h}x) J_\nu(\xi x) = \frac{J_\nu(\xi) J_\nu(\xi_{\nu,h})'}{\xi^2 - \xi_{\nu,h}^2}.$$

Ora mandando  $\xi \rightarrow \xi_{\nu,h}$  e usando la regola dell'Hôpital si ottiene:

$$\int_0^1 x [J_\nu(\xi_{\nu,h}x)]^2 dx = \frac{1}{2} [J'_\nu(\xi_{\nu,h})]^2.$$

□

Ad ogni funzione  $f$  in  $L^2$  viene associato il polinomio di Fourier-Bessel

$$Bess(f)(x) = \sum_{k \geq 1} c_k J_\nu(\xi_{\nu,k}x) \quad c_k = \frac{2}{[J_\nu(\xi_{\nu,k})]^2} \int_0^1 x f(x) J_\nu(\xi_{\nu,k}x).$$

I teoremi di convergenza puntuale di tale serie sono analoghi ai teoremi sulle serie di Fourier.

### 3.2.2 Risoluzione del Problema

Si torni a considerare l'equazione (3.6). Si è appena dimostrato che una volta fissato  $n^2$ , determinato dagli autovalori della funzione  $\Phi$ , le funzioni  $J_n(\xi_{n,k}x)e_n(\theta)$  sono autovettori del laplaciano con autovalore  $\xi_{n,k}$  per ogni  $n, k \in \mathbb{N}$ . Inoltre

$$S = \left\{ \frac{J_n(\xi_{n,k}x)}{\sqrt{\frac{1}{2}[J_n(\xi_{n,k})]^2}} e_n(\theta) \mid n, k \in \mathbb{N} \right\} = \{B_{n,k} \mid k, n \in \mathbb{N}\}$$

è un sistema ortogonale in  $L^2(B(0,1))$ . Infatti

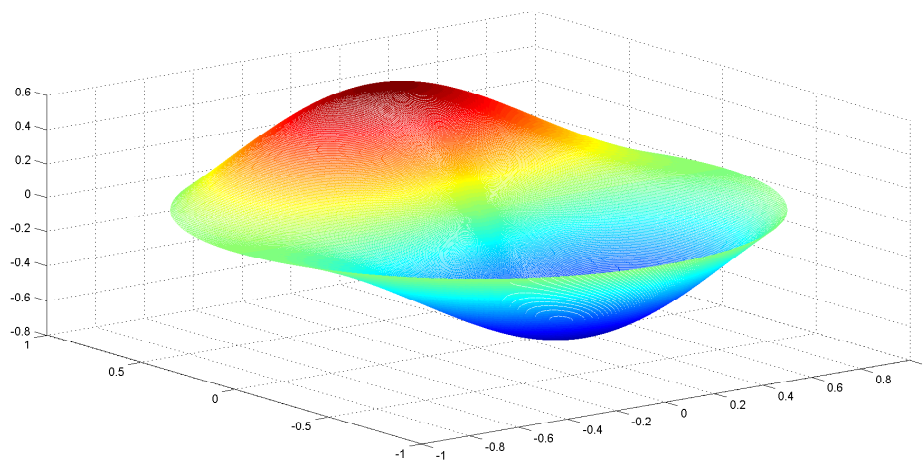
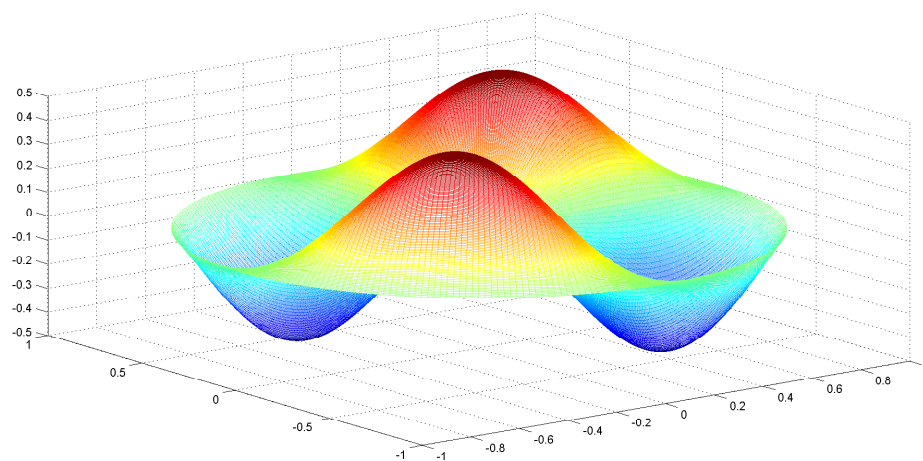
$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{J_n(\xi_{n,k}x)}{\sqrt{\frac{1}{2}[J_n(\xi_{n,k})]^2}} e_n(\theta) \cdot \frac{J_n(\xi_{n,h}x)}{\sqrt{\frac{1}{2}[J_n(\xi_{n,h})]^2}} e_n(\theta) d\theta dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e_n(\theta) e_n(\theta) d\theta \int_0^1 \frac{J_n(\xi_{n,k}x)}{\sqrt{\frac{1}{2}[J_n(\xi_{n,k})]^2}} \cdot \frac{J_n(\xi_{n,h}x)}{\sqrt{\frac{1}{2}[J_n(\xi_{n,h})]^2}} dx = \delta_{h,k}. \end{aligned}$$

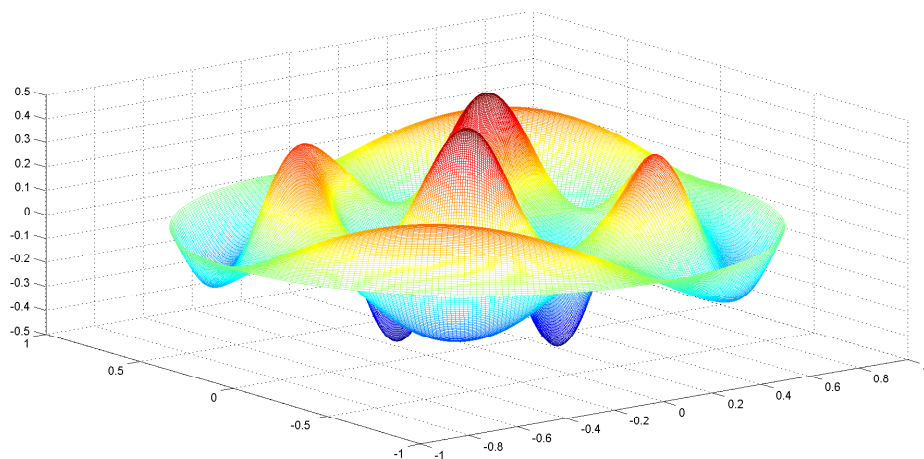
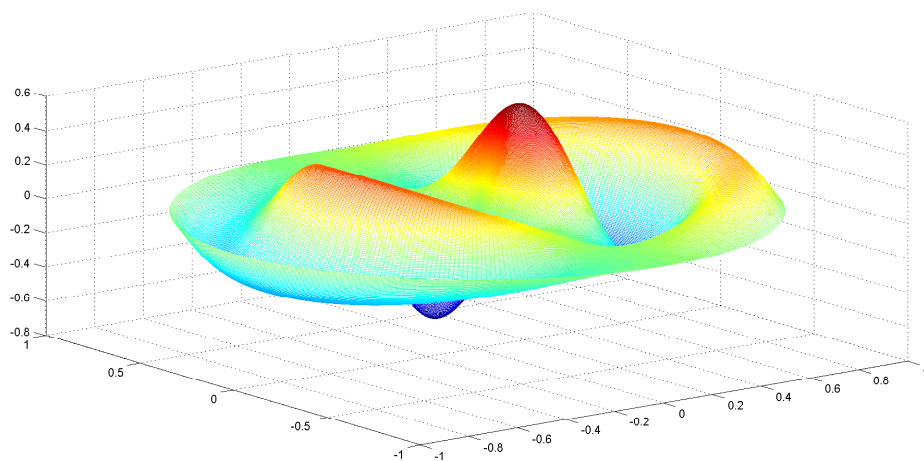
Nel caso in cui  $e_n \neq e_m$  per le proprietà della base di Fourier il loro prodotto scalare da zero. Dimostriamo che il sistema ortogonale  $S$  è completo.

Si dimostra che  $S$  è una base Hilbertiana riconoscendo, grazie al Teorema Di Stone-Weierstrass, che lo  $Span(S)$  è denso in  $L^2$ . Quindi  $S$  è un base Hilbertiana di autovalori, per i risultati precedenti

$$\text{se } f \in L^2(B(0,1)) \text{ allora } f \text{ converge a } \sum_{k,n \geq 1} \langle f, B_{n,k} \rangle_{L^2} B_{n,k} \quad \text{in } L^2$$

Nelle pagine successive vengo riportati i grafici di alcuni elementi della base  $S$ . I grafici sono stati implementati nel linguaggio di programmazione *Matlab*. La determinazione delle basi di Fourier e di Fourier-Bessel permettono di risolvere i problemi fisici. L'equazione del calore viene risolta applicando la rappresentazione attraverso la base di Fourier, il risultato è stato in primo luogo ottenuto dallo stesso Joseph Fourier. L'equazione di una membrana vibrante su un cerchio applica la rappresentazione delle funzioni attraverso la base di Fourier-Bessel, appena determinata.

Figura 3.1: Grafico di  $J_1(\xi_{1,1}x) \cdot \sin(\theta)$ Figura 3.2: Grafico di  $J_2(\xi_{2,1}x) \cdot \sin(2\theta)$

Figura 3.3: Grafico di  $J_2(\xi_{2,3}x) \cdot \sin(2\theta)$ Figura 3.4: Grafico di  $J_1(\xi_{1,3}x) \cdot \cos(\theta)$

# Bibliografia

- [1] G. C. Barozzi, *Matematica per l'Ingegneria dell'Informazione*, 2001, *Zanichelli, Bologna*.
- [2] R. Beals R. Wong, *Special Functions, A Graduate Text*, 2010, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*
- [3] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, 1983 , *Universitext*.
- [4] D. Gilbarg N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, 1977 , *Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York*.





# Elenco delle figure

3.1	Grafico di $J_1(\xi_{1,1}x) \cdot \sin(\theta)$ . . . . .	41
3.2	Grafico di $J_2(\xi_{2,1}x) \cdot \sin(2\theta)$ . . . . .	41
3.3	Grafico di $J_2(\xi_{2,3}x) \cdot \sin(2\theta)$ . . . . .	42
3.4	Grafico di $J_1(\xi_{1,3}x) \cdot \cos(\theta)$ . . . . .	42