Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Algebre di Lie Eccezionali realizzate come Algebre di Matrici

Tesi di Laurea in Algebra

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Nicoletta Cantarini

Presentata da:
Flavio Giannone

I Sessione
Anno accademico 2013/2014

Introduzione

Le algebre di Lie semplici finito dimensionali su un campo $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso di caratteristica zero si dividono in due famiglie: una costituita da quattro serie infinite, le cosiddette algebre di Lie classiche di tipo A_n, B_n, C_n, D_n, l' altra costituita da cinque algebre di Lie dette eccezionali, di tipo E_6, E_7, E_8, F_4, G_2. Le algebre di Lie classiche vengono introdotte naturalmente come algebre di Lie lineari: l' algebra di tipo A_n è $sl(n+1, \mathbb{K})$ cioè l' algebra di Lie delle matrici quadrate di ordine $n+1$ di traccia nulla; le algebre di tipo B_n, D_n sono algebre ortogonali cioè algebre di Lie costituite da matrici antisimmetriche, rispettivamente, di ordine dispari e di ordine pari; l' algebra di tipo C_n è l' algebra simplettica di dimensione pari cioè costituita da matrici simplettiche di ordine pari. Il modo più elementare di descrivere invece le algebre di Lie di tipo eccezionale è attraverso il loro diagramma di Dynkin o, equivalentemente, attraverso il loro sistema di radici. Ogni algebra di Lie semplice, infatti, si decompone nella somma diretta di una sottoalgebra commutativa massimale H e degli autospazi comuni ad H. Tale decomposizione, nota come decomposizione di Cartan, è completamente caratterizzata da un grafo finito orientato connesso, detto diagramma di Dynkin dell' algebra di Lie. Lo scopo di questa tesi è presentare un modo per realizzare l' algebra di Lie eccezionale di tipo G_2 come algebra di matrici. Per raggiungere tale obiettivo è necessario introdurre le cosiddette algebre di composizione, e in particolare una di queste: l' algebra degli ottonioni. Infatti realizzeremo l' algebra di Lie eccezionale di tipo G_2 come algebra delle derivazioni dell' algebra degli ottonioni. In questa tesi ci occupiamo solo di realizzare G_2 come algebra di Lie lineare ma lo stesso discorso può essere fatto per le altre algebre di Lie eccezionali di tipo E_6, E_7, E_8, F_4. L' idea che si utilizza è analoga a quella usata nel caso di

G_2, tuttavia in questi altri casi è necessario introdurre strutture algebriche diverse dalle algebre di composizione. In particolare è possibile realizzare F_4 come l' algebra delle derivazioni dell' algebra di Jordan eccezionale: la cosiddetta algebra di Albert. I dettagli di questa costruzione si trovano ad esempio in [2], [4], [5].
La tesi è strutturata come segue: nel capitolo 1 vengono richiamati alcuni risultati di base nella teoria delle algebre di Lie; il capitolo 2 è dedicato allo studio dell' algebra degli ottonioni e più in generale alle algebre di composizione; nel paragrafo 1 vengono introdotte le algebre di composizione e descritte le loro proprietà principali. Mostriamo che le $\mathbb{R}$ - algebre $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ (l' algebra dei quaternioni) sono $\mathbb{R}$ - algebre di composizione. Il paragrafo 2 è dedicato alla costruzione e allo studio dell' algebra degli ottonioni $\mathbb{O}$ che viene presentata in due modi diversi: il primo dei due consiste nel definire $\mathbb{O}$ come $\mathbb{R}$ - spazio vettoriale di dimensione 8 con un prodotto bilineare. Il secondo modo che presentiamo per introdurre l' algebra $\mathbb{O}$ è il cosiddetto processo di Cayley - Dickson che evidenzia la relazione tra le quattro $\mathbb{R}$ - algebre di composizione $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$; prima descriviamo questa costruzione per un' algebra astratta A su un campo $\mathbb{K}$ di caratteristica diversa da 2, elencando le principali conseguenze che da essa derivano; poi, nell' ipotesi in cui A sia un' algebra di composizione reale e usando il Teorema di Zorn, realizziamo $\mathbb{O}$ come insieme di coppie ordinate di quaternioni. Infine, nel paragrafo 3, introduciamo l' algebra delle derivazioni $Der(\mathbb{O})$. Dimostriamo che $\mathbb{O}$ possiede un numero finito di sottoalgebre isomorfe all' algebra $\mathbb{H}$ e che ogni derivazione di $\mathbb{O}$ si ottiene estendendo una derivazione di $\mathbb{H}$. Dimostriamo inoltre che $Der(\mathbb{O})$ è un' algebra di Lie su $\mathbb{R}$ di dimensione 14.
Il Capitolo 3 è dedicato allo studio della semisemplicità e della semplicità di $Der(\mathbb{O})$. Dimostriamo la semisemplicità di $Der(\mathbb{O})$ mostrando che essa non contiene ideali di Lie abeliani non nulli. Infine, usiamo la semisemplicità di $Der(\mathbb{O})$ per dimostrare che anche la sua complessificazione è semisemplice. A questo punto dimostriamo che scritta $Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$ come somma diretta di ideali di Lie semplici, per motivi dimensionali, tale somma è costituita da un solo addendo.

Indice

Elenco delle tabelle

Capitolo 1

Preliminari

1.1 Richiami sulle algebre di Lie

Definizione 1.1 (**Algebra**). Un' algebra è un $\mathbb{K}$ - spazio vettoriale dotato di un prodotto cioè di una applicazione bilineare:

$$\cdot : A \times A \longrightarrow A$$
$$(a, b) \mapsto a \cdot b$$

Osservazione 1. Le algebre che considereremo sono dotate di una **unità** cioè di un elemento $1 \in A$ tale che $a \cdot 1 = 1 = 1 \cdot a$.

Definizione 1.2 (**Algebra associativa**). Un'algebra A su un campo $\mathbb{K}$ si dice associativa se il prodotto di A soddisfa la seguente proprietà:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \text{ per ogni } a, b, c \in A$$

Di rilevante importanza per i nostri scopi è la seguente:

Definizione 1.3 (**Algebra con involuzione**). Un'algebra con involuzione è un'algebra dotata di una applicazione lineare

$$* : A \longrightarrow A$$

soddisfacente le seguenti proprietà:

(i) $(a \cdot b)^* = b^* \cdot a^*$ per ogni $a, b \in A$

(ii) $(a^*)^* = a$ per ogni $a \in A$

L'applicazione $*$ si chiama involuzione di A.

Definizione 1.4 (Algebra di Lie). Si chiama algebra di Lie un' algebra L il cui prodotto, denotato con

$$\begin{aligned} [\,\cdot\,,\ \cdot\,] : L \times L &\longrightarrow L \\ (a, b) &\mapsto [a, b]\,, \end{aligned}$$

soddisfa le seguenti proprietà:

1) $[a, a] = 0$ per ogni $a \in L$

2) $[a, [b, c]] = [[a, b]\,, c] + [b, [a, c]]$ per ogni $a,\ b,\ c \in L$.

La proprietà 2) si chiama **identità di Jacobi** e il prodotto $[\,\cdot\,, \cdot\,]$ si chiama **prodotto di Lie** oppure **commutatore**.

Osservazione 2. Sia L un' algebra di Lie e siano $a,\ b \in L$; dalla bilinearità e dalla proprietà 1) del prodotto di Lie si ha:
$0 = [a + b, a + b] = [a, a] + [a, b] + [b, a] + [b, b] = [a, b] + [b, a]$.
Dunque vale la seguente proprietà:

$1)'$ $[a, b] = -\,[b, a]$ per ogni $a, b \in L$.

D' altra parte, se il campo $\mathbb{K}$ ha caratteristica diversa da 2, ossia $char(\mathbb{K}) \neq 2$, ponendo $a = b$ nella $1)'$, si ottiene la proprietà 1) del prodotto di Lie, quindi si ha che $1) \Longleftrightarrow 1)'$. In particolare segue che il prodotto di Lie è anticommutativo.

La proprietà 2) della Definizione 1.4 afferma che il prodotto di Lie non è associativo, quindi le algebre di Lie non sono algebre associative, però su un' algebra associativa si può definire un prodotto di Lie nel modo seguente:

Definizione 1.5. Sia $\mathbb{K}$ un campo con $char(\mathbb{K}) \neq 2$ e sia A una $\mathbb{K}$ - algebra associativa con un prodotto

$$\begin{aligned} \cdot : A \times A &\longrightarrow A \\ (a, b) &\mapsto a \cdot b. \end{aligned}$$

Si definisce un prodotto di Lie sull' algebra A ponendo

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a \text{ per ogni } a, b \in A.$$

L' algebra di Lie così ottenuta si chiama algebra di Lie associata all' algebra associativa $(A, \cdot)$.

D' ora in poi indicheremo con $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso di caratteristica zero e considereremo solo algebre finito dimensionali.

Definizione 1.6. Un' algebra di Lie L si dice **commutativa** o **abeliana** se $[a, b] = 0$ per ogni $a, b \in L$.

Definizione 1.7 (Sottoalgebra di Lie). Sia L una $\mathbb{K}$ - algebra di Lie. Si chiama sottoalgebra di Lie un sottospazio S di L chiuso rispetto al prodotto di Lie, ossia tale che $[a, b] \in S$ per ogni $a, b \in S$.

Definizione 1.8 (Omomorfismo di algebre di Lie). Siano L, M due $\mathbb{K}$ - algebre di Lie. Si chiama omomorfismo di algebre di Lie una applicazione lineare $\varphi : L \longrightarrow M$ tale che

$$\varphi\left([a, b]_L\right) = [\varphi(a), \varphi(b)]_M \text{ per ogni } a, b \in L.$$

Un omomorfismo di algebre di Lie che sia anche biiettivo si dice un isomorfismo di algebre di Lie.

Vediamo qualche esempio di algebre di Lie costruite a partire da algebre associative.

Esempio 1. Sia V un $\mathbb{K}$ - spazio vettoriale con $dim(V) = n$ e consideriamo l' algebra degli endomorfismi su V con l' usuale composizione di applicazioni, che denotiamo con $(End(V), \circ)$; questa è un' algebra associativa, dunque, usando la Definizione 1.5, si può costruire l' algebra di Lie ad essa associata, che indicheremo con $gl(V)$, con prodotto di Lie definito da $[f, g] = f \circ g - g \circ f$. Analogamente, se denotiamo con $(M_n(\mathbb{K}), \cdot)$ l' algebra associativa delle matrici quadrate di ordine n sul campo $\mathbb{K}$ con l' usuale prodotto righe per colonne, possiamo definire su $M_n(\mathbb{K})$ una struttura di algebra di Lie, che indicheremo con $gl(n, \mathbb{K})$, con prodotto di Lie definito da $[X, Y] = = X \cdot Y - Y \cdot X$. Fissata una base di V, si ha che $(End(V), \circ) \cong (M_n(\mathbb{K}), \cdot)$ e, poiché il prodotto di Lie sulle due algebre è stato definito nello stesso modo, si ha che $gl(V) \cong gl(n, \mathbb{K})$. L' algebra $gl(V)$ si chiama **algebra generale lineare** e ogni sua sottoalgebra si chiama **algebra di Lie lineare**.

L' algebra generale lineare contiene una sottoalgebra particolarmente interessante:

Definizione 1.9 (Derivazione). Sia A una $\mathbb{K}$ - algebra. Si chiama derivazione di A una applicazione lineare $D : A \longrightarrow A$ che soddisfa la seguente proprietà:

$$D(ab) = D(a)b + aD(b) \tag{1.1}$$

per ogni $a, b \in A$. La (1.1) si chiama **regola di Leibniz**.

Osservazione 3. Si vede facilmente che la somma di due derivazioni è una derivazione e il prodotto di uno scalare per una derivazione è una derivazione, quindi le derivazioni di A costituiscono un sottospazio vettoriale di $End(A)$, che, d'ora in poi, denoteremo con $Der(A)$. Osserviamo che $Der(A)$ non è una sottoalgebra di $End(A)$ perché la composizione di due derivazioni non soddisfa la regola di Leibniz. Infatti, se $D, D' \in \in Der(A)$, si ha:
$(D \circ D')(ab) = D(D'(ab)) = D(D'(a)b + aD'(b)) = (D(D'(a)))b + D'(a)D(b) + + D(a)D'(b) + aD(D'(b)) = (D \circ D')(a)b + a(D \circ D')(b) + D'(a)D(b) + D(a)D'(b)$.
Invece, $Der(A)$ è una sottoalgebra di Lie di $gl(A)$, infatti si ha:

$$\begin{aligned}
[D_1, D_2](ab) &= D_1(D_2(ab)) - D_2(D_1(ab)) \\
&= D_1(D_2(a)b + aD_2(b)) - D_2(D_1(a)b + aD_1(b)) \\
&= D_1(D_2(a))b + D_2(a)D_1(b) + D_1(a)D_2(b) + aD_1(D_2(b)) - \\
&\quad - D_2(D_1(a))b - D_1(a)D_2(b) - D_2(a)D_1(b) - aD_2(D_1(b))
\end{aligned}$$

$$= ([D_1, D_2](a))\, b + a\, ([D_1, D_2](b)).$$

Tra le derivazioni che prenderemo in considerazione ci sono le cosiddette derivazioni interne. Per introdurle occorre dare la seguente:

Definizione 1.10 (Rappresentazione di un' algebra di Lie). Sia L un' algebra di Lie di dimensione finita e sia V uno spazio vettoriale. Si chiama rappresentazione di L su V un omomorfismo di algebre di Lie $\sigma : L \longrightarrow gl(V)$.

Esempio 2. Si chiama **rappresentazione aggiunta** di L e si indica con

$$ad : L \longrightarrow gl(L)$$
$$a \mapsto ad_a,$$

la rappresentazione di L su se stessa definita da $ad_a(b) = [a, b]$. Notiamo che l' identità di Jacobi equivale ad affermare che ad_a è una derivazione di L, infatti:
$ad_a([b, c]) = [a, [b, c]] = [[a, b], c] + [b, [a, c]] = [ad_a(b), c] + [b, ad_a(c)]$.
Da questo segue che $Im(ad) = ad(L) \subseteq Der(L)$. Le derivazioni della forma ad_a si chiamano **derivazioni interne**.

1.2 Algebre di Lie semplici e semisemplici

Per definire le algebre di Lie semplici e semisemplici occorre introdurre la nozione di ideale di un' algebra di Lie.

Definizione 1.11 (Ideale di Lie). Sia L un' algebra di Lie. Un sottospazio I di L si dice un ideale di Lie di L se, per ogni $a \in I$, per ogni $b \in L$, si ha che $[a, b] \in I$.

Esempio 3. Siano L, M due algebre di Lie e sia $\varphi : L \longrightarrow M$ un omomorfismo di algebre di Lie. Allora:

(1) $Ker(\varphi)$ è un ideale di L.

(2) $Im(\varphi)$ è un ideale di M.

Dimostriamo la (1): siano $a \in Ker(\varphi)$, $x \in L$; allora si ha che:
$\varphi([a, x]) = [\varphi(a), \varphi(x)] = [0, \varphi(x)] = 0$, ossia $[a, x] \in Ker(\varphi)$.

I seguenti ideali rivestono un ruolo importante nella teoria delle algebre di Lie:

Definizione 1.12 (**Centro - Sottoalgebra derivata**). Sia L un' algebra di Lie. Si chiama centro di L l' insieme

$$Z(L) = \{a \in L \mid [a,b] = 0 \; \forall \; b \in L\}.$$

Si chiama sottoalgebra derivata di L l' insieme

$$[L,L] = \langle [a,b] \mid a,b \in L \rangle.$$

Osservazione 4. Sia L un' algebra di Lie e siano I, J ideali di Lie di L. Allora è facile verificare che $I + J$, $I \cap J$, $[I,J] = \{\sum_i [a_i, b_i] \mid a_i \in I, b_i \in J\}$ sono ancora ideali di Lie di L. In particolare $[L,L]$ è un caso speciale di $[I,J]$.

Ora siamo in grado di dare la seguente:

Definizione 1.13 (**Algebra di Lie semplice**). Un' algebra di Lie L si dice semplice se non è commutativa, ossia $[L,L] \neq 0$, e se non contiene ideali propri.

Osservazione 5. Osserviamo che se L è un' algebra di Lie semplice allora $Z(L) =$ $= \{0\}$ e $[L,L] = L$. Inoltre se consideriamo la rappresentazione aggiunta

$$ad : L \longrightarrow gl(L)$$

si ha che

$$Ker(ad) = \{a \in L \mid ad_a = 0\} = Z(L).$$

Perciò, se L è semplice, allora $Z(L) = \{0\}$ e quindi ad è un omomorfismo iniettivo. Questo vuol dire che ogni algebra di Lie semplice è isomorfa ad una sottoalgebra di Lie di $gl(L)$, ossia ad un' algebra di Lie lineare.

Esempio 4. Sia $\mathbb{K}$ un campo di caratteristica diversa da 2 e definiamo la cosiddetta **algebra speciale lineare**

$$sl(2,\mathbb{K}) = \{A \in gl(2,\mathbb{K}) \mid T(A) = 0\},$$

dove T denota la traccia della matrice A. Osserviamo che $sl(2,\mathbb{K})$ è una sottoalgebra di Lie di $gl(2,\mathbb{K})$, infatti, se A, $B \in sl(2,\mathbb{K})$, si ha:
$T([A,B]) = T(AB - BA) = T(AB) - T(BA) = 0$.
In particolare $dim(sl(2,\mathbb{K})) = 3$ e una base di $sl(2,\mathbb{K})$ è data dalle matrici

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Risulta che $[h,e] = 2e$, $[h,f] = -2f$, $[e,f] = h$, di conseguenza $[sl(2,\mathbb{K}), sl(2,\mathbb{K})] =$ $= sl(2,\mathbb{K})$. Per dimostrare che $sl(2,\mathbb{K})$ è semplice rimane da mostrare che essa non contiene ideali propri. Sia $I \neq \{0\}$ un ideale di Lie di $sl(2,\mathbb{K})$ e sia $x \in I$, con $x \neq 0$; in particolare $x = \alpha h + \beta e + \gamma f \in I$ con α, β, $\gamma \in \mathbb{K}$. Poiché I è un ideale risulta che $[[x,e],e] = -2\gamma e \in I$. Analogamente vale che $[[x,f],f] = -2\beta f \in I$. Ora, se $\gamma \neq 0$, allora $e \in I$, dunque si ha che $[e,f] = h \in I$ e $[h,f] = -2f \in I$, ossia $I = sl(2,\mathbb{K})$. Analogamente, se $\beta \neq 0$, allora $f \in I$, dunque segue che $[e,f] = h \in I$ e $[h,e] = 2e \in I$, ossia $I = sl(2,\mathbb{K})$. Invece, se $\beta = \gamma = 0$, allora $x = \alpha h$, con $\alpha \neq 0$, e quindi $h \in I$. Perciò si ha $[h,e] = 2e$, $[h,f] = -2f \in I$, ossia $I = sl(2,\mathbb{K})$. Abbiamo dunque mostrato che $sl(2,\mathbb{K})$ è un' algebra di Lie semplice.

Un' altra nozione che ci interessa è la seguente:

Definizione 1.14. Siano L, M due $\mathbb{K}$ - algebre di Lie. Definiamo sullo spazio vettoriale $L \oplus M$ una struttura di algebra di Lie ponendo

$$\left[a+b, a^{'}+b^{'}\right] = \left[a, a^{'}\right] + \left[b, b^{'}\right]$$

e questa si chiama **somma diretta di algebre di Lie**.

Osservazione 6. La Definizione 1.14 implica che, se L, M sono due algebre di Lie, facendo la somma diretta, esse sono ideali di $L \oplus M$ che commutano tra di loro, ossia $[a,b] = 0$ per ogni $a \in L$, per ogni $b \in M$.

Al fine di introdurre le algebre di Lie semisemplici, abbiamo bisogno di definire le algebre di Lie risolubili.

Definizione 1.15 (Serie derivata). Sia L un' algebra di Lie. Si chiama serie derivata di L la seguente successione di ideali di Lie di L:

$$L^{(0)} = L,\ L^{(1)} = [L, L],\ L^{(2)} = \left[L^{(1)}, L^{(1)}\right],\ \dots,\ L^{(k)} = \left[L^{(k-1)}, L^{(k-1)}\right].$$

Dalla definizione di serie derivata si ha subito la seguente:

Definizione 1.16 (Algebra di Lie risolubile). Un' algebra di Lie L si dice risolubile se $\exists\ k \in \mathbb{N}$, con $k \geq 1$, tale che $L^{(k)} = \{0\}$.

Osservazione 7. Se L è un' algebra di Lie semplice allora L non è risolubile, infatti, se L è semplice, per l' Osservazione 5, si ha $L = [L, L]$, quindi nella serie derivata, ad ogni passo, si ritrova sempre L.

Una delle proprietà più importanti delle algebre di Lie risolubili è la seguente:

Proposizione 1.2.1 ([7, pag.11]). *Sia L un' algebra di Lie risolubile. Se I, J sono ideali risolubili di L allora $I + J$ è un ideale risolubile di L.*

Osservazione 8. La Proposizione 1.2.1 implica che ogni algebra di Lie risolubile L possiede un unico ideale risolubile massimale che si chiama **radicale di** L e si indica con $Rad(L)$.

Definizione 1.17 (Algebra di Lie semisemplice). Un' algebra di Lie L si dice semisemplice se $Rad(L) = \{0\}$.

Osservazione 9. Se L è semplice allora L è semisemplice; infatti, se L è semplice allora L ha soltanto ideali banali, quindi $Rad(L) = L$ oppure $Rad(L) = \{0\}$. D' altra parte, per l' Osservazione 7, L non è risolubile e dunque necessariamente $Rad(L) =$ $= \{0\}$.

Lemma 1.2.2. *Sia L un' algebra di Lie e sia I un ideale di Lie di L. Allora $I^{(k)}$ è un ideale di Lie di L, per ogni $k \in \mathbb{N}$, con $k \geq 0$.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione su k: se $k = 0$ allora $I^{(0)} = I$ è un ideale di Lie di L. Supponiamo, per ipotesi induttiva, che $I^{(k)}$ sia un ideale di Lie di L; si ha che:

$$I^{(k+1)} = \left[I^{(k)}, I^{(k)}\right] = \left\langle\ [a, b]\ \mid a, b \in I^{(k)}\ \right\rangle.$$

Siano $a, b \in I^k$, $c \in L$; usando l' identità di Jacobi si ha che: $[[a,b],c] = [a,[b,c]] -$ $- [b,[a,c]]$. Dall' ipotesi induttiva segue che $[[a,b],c] \in I^{k+1}$, per ogni $c \in L$, dunque $I^{(k+1)}$ è un ideale di Lie di L. $\square$

Un modo per verificare la semisemplicità di un' algebra di Lie è il seguente criterio:

Proposizione 1.2.3. *Sia L un' algebra di Lie. L è semisemplice se e solo se L non contiene ideali di Lie abeliani non nulli.*

Dimostrazione. Sia L un' algebra di Lie semisemplice e supponiamo per assurdo che L contenga almeno un ideale di Lie abeliano non nullo, che indichiamo con I. Allora si ha che $[I, I] = 0 = I^{(1)}$, ossia, per la Definizione 1.16, I è risolubile. Segue che $I \subseteq Rad(L)$, con $I \neq \{0\}$, dunque $Rad(L) \neq \{0\}$, ossia, per la Definizione 1.17, L non è semisemplice e questo contraddice la nostra ipotesi.
Viceversa, sia L un' algebra di Lie che non contiene ideali di Lie abeliani non nulli e supponiamo per assurdo che $M = Rad(L) \neq \{0\}$, ossia che L non sia semisemplice. Poiché M è risolubile, $\exists\ k \geq 1$ tale che $M^{(k)} = \{0\}$. Se definiamo $\overline{k} = max \left\{q \geq 1 \mid M^{(q)} \neq \{0\}\right\}$, si ha che $M^{(\overline{k})} \neq \{0\}$ mentre

$$M^{(\overline{k}+1)} = \{0\} = \left[M^{(k)}, M^{(k)}\right],$$

ossia, per il Lemma 1.2.2, L contiene un ideale di Lie abeliano non nullo e questo contraddice la nostra ipotesi. $\square$

Per avere un secondo criterio di semisemplicità, ricordiamo che, se L è una qualsiasi algebra di Lie e se $a, b \in L$, si può introdurre su L una forma bilineare simmetrica, detta **forma di Killing di** L e denotata con $K : L \times L \longrightarrow \mathbb{K}$, definita da $K(a,b) =$ $= T(ad_a ad_b)$, dove T denota la traccia della matrice associata all' applicazione $ad_a \circ$ $\circ\ ad_b$. In particolare K è invariante rispetto al prodotto di Lie, ossia $K([a,b],c) =$ $= K(a,[b,c])$, e K è non degenere se il suo radicale $S = \{a \in L \mid K(a,b) = 0\ \forall b \in L\}$ è banale. Allora vale il seguente:

Teorema 1.2.4 ([7], pag.22). *Sia L un' algebra di Lie. L è semisemplice se e solo se la sua forma di Killing è non degenere.*

Elenchiamo qui alcune proprietà delle algebre di Lie semisemplici che verranno usate nei prossimi capitoli.

Teorema 1.2.5 ([**7, pag.23**]). *Sia L un' algebra di Lie semisemplice. Allora si ha che*

$$L = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_t,$$

dove L_i*, per ogni* $i = 1, \ldots, t$*, è un ideale semplice di* L*. Inoltre, se* $J \subseteq L$ *è un ideale semplice di* L*, allora* $J = L_i$ *per qualche* i*.*

Corollario 1.2.6 ([**7, pag.23**]). *Se* L *è un' algebra di Lie semisemplice allora ogni immagine omomorfa di* L *è semisemplice e* $L = [L, L]$*.*

Osservazione 10. Il Teorema 1.2.5 può essere enunciato anche in termini della rappresentazione aggiunta ad; per fare questo ricordiamo che una rappresentazione $\sigma : L \longrightarrow gl(V)$ di un' algebra di Lie L su un $\mathbb{K}$ - spazio vettoriale V si dice **irriducibile** se non esistono sottospazi propri non banali W di V invarianti sotto l' azione di σ, ossia tali che $\sigma(L)(W) \subseteq W$; d' altra parte σ si dice **completamente riducibile** se

$$L = \bigoplus_i V_i$$

con V_i rappresentazioni irriducibili di L. In maniera equivalente, V si dice completamente riducibile se, per ogni sottorappresentazione W di V esiste una sottorappresentazione W' di V tale che $V = W \oplus W'$. Consideriamo ora la rappresentazione aggiunta $ad : L \longrightarrow gl(L)$; una sottorappresentazione di L è un sottospazio S di L tale che $ad(L)(S) \subseteq S$, ossia $[L, S] \subseteq S$. Questo vuol dire che, nel caso di ad, le sottorappresentazioni sono ideali di Lie. Allora ad è irriducibile se e solo se L è semplice, mentre se L è semisemplice allora $L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_t$, con L_i semplici, per ogni $i = 1, \ldots, t$, se e solo se ad è completamente riducibile.

Ricordiamo che (Esempio 2) se L è un' algebra di Lie qualsiasi e consideriamo la rappresentazione aggiunta $ad : L \longrightarrow gl(L)$, allora $ad(L) \subseteq Der(L)$. Per le algebre di Lie semisemplici vale il seguente:

Teorema 1.2.7 ([**7, pag.23**]). *Sia L un' algebra di Lie semisemplice. Allora ogni derivazione di* L *è una derivazione interna, ossia* $ad(L) = Der(L)$*.*

1.3 Decomposizione di Cartan e sistema di radici

In questo paragrafo vogliamo ricordare cosa si intende per decomposizione di Cartan di un' algebra di Lie semisemplice e per sistema di radici ad essa associato. Per fare questo occorre richiamare il seguente:

Teorema 1.3.1 (**Decomposizione di Jordan - Chevalley, [7, pag.17]**). *Sia V un $\mathbb{K}$ - spazio vettoriale finito dimensionale, dove $\mathbb{K}$ denota un campo arbitrario. Se $x \in End(V)$, vale che:*

(1) *Esistono unici x_s, $x_n \in End(V)$ tali che $x = x_s + x_n$ e $x_s x_n = x_n x_s$.*

(2) *Esistono polinomi $p(T)$, $q(T)$ in una indeterminata, con termine noto nullo, tali che $x_s = p(x)$, $x_n = q(x)$.*

(3) *Se $A \subset B \subset V$ sono sottospazi di V tali che $x(B) \subset A$ allora $x_s(B) \subset A$ e $x_n(B) \subset A$.*

La decomposizione $x = x_s + x_n$ è detta decomposizione di Jordan - Chevalley e gli endomorfismi x_s, x_n sono detti, rispettivamente, la ***parte semisemplice*** *e la* ***parte nilpotente*** *di x.*

Corollario 1.3.2 (**[7, pag.18]**). *Sia $x \in gl(V)$ con $x = x_s + x_n$. Allora*

$$ad_x = ad_{x_s} + ad_{x_n}.$$

Corollario 1.3.3 (**[7, pag.18]**). *Sia A un' algebra finito dimensionale su un campo $\mathbb{K}$. Sia $\delta \in Der(A)$ e sia $\delta = \delta_s + \delta_n$ la sua decomposizione di Jordan. Allora si ha che δ_s, $\delta_n \in Der(A)$.*

Osservazione 11. Notiamo che se L è un' algebra di Lie semisemplice arbitraria e consideriamo la rappresentazione aggiunta $ad : L \longrightarrow gl(L)$, allora ad è iniettiva; infatti, per l' Osservazione 5, $Ker(ad) = Z(L)$ e, siccome $Z(L)$ è risolubile e L è semisemplice, necessariamente $Z(L) = \{0\}$. In particolare $ad(L) \cong L$. D' altra parte, per il Teorema 1.2.7, $ad(L) = Der(L)$, quindi possiamo introdurre una decomposizione di Jordan astratta nell' algebra di Lie L nel modo seguente: sia $x \in L$ fissato e consideriamo $ad_x \in gl(L)$; per il Corollario 1.3.2, $ad_x = (ad_x)_s + (ad_x)_n$, d' altra parte $ad_x \in Der(L)$, quindi, per il Corollario 1.3.3, $(ad_x)_s$, $(ad_x)_n \in Der(L) = ad(L)$. Poiché $ad(L) \cong L$, esistono unici x_s, $x_n \in L$ tali che $(ad_x)_s = ad_{x_s}$, $(ad_x)_n = ad_{x_n}$, ossia $ad_x = ad_{x_s} + ad_{x_n}$; d' altra parte ad è lineare e iniettiva, quindi $x = x_s + x_n$ con x_s, $x_n \in L$; questa si chiama la **decomposizione di Jordan astratta** di x e gli elementi x_s, x_n sono detti, rispettivamente, ad **- semisemplice** e ad **- nilpotente**.

Teorema 1.3.4 ([7, pag.29]). *Sia L una sottoalgebra di Lie semisemplice di $gl(V)$ con V $\mathbb{K}$ - spazio vettoriale finito dimensionale. Allora la decomposizione di Jordan astratta di ogni elemento $x \in L$ coincide con la sua decomposizione di Jordan usuale.*

Corollario 1.3.5 ([7, pag.30]). *Sia L un' algebra di Lie semisemplice e sia $\Psi : L \longrightarrow gl(V)$ una rappresentazione di L. Se $x = x_s + x_n$ è la decomposizione di Jordan astratta di $x \in L$, allora $\Psi(x) = \Psi(x_s) + \Psi(x_n)$ è la decomposizione di Jordan usuale di $\Psi(x)$.*

Questi risultati ci permettono di approfondire lo studio delle algebre di Lie semisemplici.

Esempio 5. Consideriamo $sl(2, \mathbb{K})$ con base h, e, f. Abbiamo visto (Esempio 4) che $[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$, $[e, f] = h$, ossia $sl(2, \mathbb{K})$ contiene un elemento h che è ad - semisemplice e $ad_h : sl(2, \mathbb{K}) \longrightarrow sl(2, \mathbb{K})$ ha tre autovalori distinti ± 2, 0. Allora si ha che:

$$sl(2, \mathbb{K}) = \langle h \rangle \oplus \langle e \rangle \oplus \langle f \rangle = V_0 \oplus V_2 \oplus V_{-2}$$

dove h genera l' autospazio V_0 di ad_h relativo all' autovalore nullo, e genera l' autospazio V_2 relativo all' autovalore $\lambda = 2$ e f genera l' autospazio V_{-2} relativo all' autovalore $\lambda = -2$.

Esempio 6. Consideriamo $sl(n, \mathbb{K}) = \{A \in gl(n, \mathbb{K}) \mid T(A) = 0\}$; un conto analogo a quello fatto per $sl(2, \mathbb{K})$, mostra che questa è una sottoalgebra di Lie di $gl(n, \mathbb{K})$. In particolare $dim(sl(n, \mathbb{K})) = n^2 - 1$. Indichiamo con e_{ij} la matrice di ordine n con tutte le entrate nulle tranne quella di posto (i, j) che è uguale a 1. Allora risulta che $sl(n, \mathbb{K}) = \langle h_i \rangle \oplus \bigoplus_{i \neq j} \langle e_{ij} \rangle$, dove $h_i = e_{ii} - e_{i+1,i+1}$, con $i = 1, \ldots, n-1$, sono matrici diagonali. Poniamo $H = \langle h_i \rangle$ e sia $h \in H$; si ha che $h = \sum_{i=1}^{n} a_i e_{ii}$ e $[h, e_{ij}] = (a_i - a_j)e_{ij}$. In questo modo $sl(n, \mathbb{K})$ risulta decomposto nella somma diretta di una sottoalgebra commutativa costituita da matrici diagonali e di autospazi $\langle e_{ij} \rangle$ dove e_{ij} sono autovettori comuni a tutti gli elementi di H. In particolare H è l' autospazio comune a tutti gli endomorfismi ad_h relativo all' autovalore nullo.

Definizione 1.18 (Sottoalgebra torale). Sia L un' algebra di Lie semisemplice arbitraria, con $L \neq \{0\}$. Si chiama sottoalgebra torale di L una sottoalgebra costituita da elementi semisemplici.

Osservazione 12. Se L è semisemplice e non nulla, per l' Osservazione 11, L ammette sempre una sottoalgebra torale non banale generata dagli elementi $\langle x_s \rangle$, con $x =$ $= x_s + x_n \in L$. In particolare una sottoalgebra torale di L è abeliana. [7, pag.35]

Ora, supponiamo che H sia una sottoalgebra torale massimale di un' algebra di Lie L semisemplice; sia ad_h, con $h \in H$, un endomorfismo diagonalizzabile di L. Poiché H è abeliana, ad_h sono endomorfismi diagonalizzabili che commutano tra loro e quindi sono simultaneamente diagonalizzabili. Perciò possiamo decomporre L nella somma diretta di autospazi

$$L_\alpha = \{x \in L \mid ad_h(x) = \alpha(h)x \ \forall \ h \in H\}$$

dove $\alpha \in H^*$. In particolare $\Phi = \{\alpha \in H^* \mid \alpha \neq 0, L_\alpha \neq \{0\}\}$ è detto **sistema di radici** di L.

Definizione 1.19 (Decomposizione di Cartan). Sia L un' algebra di Lie semisemplice non nulla e sia H una sottoalgebra torale massimale di L. Si chiama decomposizione di Cartan di L la seguente decomposizione:

$$L = C_L(H) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha$$

dove $C_L(H) = \{x \in L \mid ad_h(x) = 0 \ \forall h \in H\}$ è detto il **centralizzatore** di H.

Proposizione 1.3.6 ([7, pag.36]). *Sia H una sottoalgebra torale massimale di un' algebra di Lie semisemplice L. Allora $H = C_L(H)$.*

Introduciamo ora le cosiddette **algebre di Lie classiche**. Tali algebre sono sottoalgebre dell' algebra di Lie generale lineare.

Esempio 7.

1) $sl(n+1, \mathbb{K})$ è l' algebra di Lie costruita nell' Esempio 6.

2) Si chiama **algebra simplettica** l' algebra

$$sp(2n, \mathbb{K}) = \{X \in gl(2n, \mathbb{K}) \mid SX = -X^t S\}$$

dove $S = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ e I_n è la matrice unità di ordine n. In particolare le matrici $X \in sp(2n, \mathbb{K})$ sono della forma $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, dove A, B, C, $D \in gl(n, \mathbb{K})$ soddisfano le condizioni $B = B^t$, $C = C^t$, $A^t = -D$. Una base dell' algebra simplettica è data dalle matrici diagonali $e_{ii} - e_{n+i,n+i}(1 \leq i \leq n)$ e dalle matrici $e_{1j} - e_{n+j,n+i}$, $e_{i,n+1}(1 \leq i \leq n)$ e $e_{i,n+j} + e_{j,n+i}(1 \leq i < j \leq n)$. Segue che $dim(sp(2n, \mathbb{K})) = 2n^2 + n$.

3) Si chiama **algebra ortogonale** l' algebra

$$o(m, \mathbb{K}) = \{X \in gl(m, \mathbb{K}) \mid SX = -X^t S\}.$$

Se $m = 2n + 1$,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}$$

e le matrici $X \in o(2n+1, \mathbb{K})$ sono della forma

$$X = \begin{pmatrix} 0 & Q_1 & Q_2 \\ M_1 & A & B \\ M_2 & C & D \end{pmatrix}$$

dove la condizione $SX = -X^tS$ equivale a dire che $M_1 = -Q_2^t$, $M_2 = -Q_1^t$, $D = -A^t$, $B = -B^t$, $C = -C^t$. In questo caso una base dell' algebra ortogonale è data dalle matrici diagonali $e_{ii} - e_{n+i,n+i}(2 \leq i \leq n+1)$ e dalle matrici $e_{1,n+i+1} - e_{i+1,1}$, $e_{1,i+1} - e_{n+i+1,1}(1 \leq i \leq n)$, $e_{i+1,j+1} - e_{n+j+1,n+i+1}(1 \leq i \neq j \leq \leq n)$, $e_{i+1,n+j+1} - e_{j+1,n+i+1}(1 \leq i < j \leq n)$ e $e_{i+n+1,j+1} - e_{j+n+1,i+1}(1 \leq j < < i \leq n)$. Segue che $dim(o(2n+1,\mathbb{K})) = 2n^2 + n$.
Se $m = 2n$,

$$S = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Analogamente al caso di dimesione dispari si può costruire una base di $o(2n,\mathbb{K})$, in particolare $dim(o(2n,\mathbb{K})) = 2n^2 - n$.

A questo punto vogliamo ricordare cosa si intende per sistema di radici da un punto di vista assiomatico; d' ora in poi indicheremo con E uno spazio euclideo, ossia un $\mathbb{R}$ - spazio vettoriale finito dimensionale dotato di una forma bilineare simmetrica definita positiva, denotata con $(\cdot,\cdot)$. Ricordiamo che, se $\alpha \in E$, con $\alpha \neq 0$, è un vettore e $P_\alpha = \{\beta \in E \mid (\beta,\alpha) = 0\}$ è l'iperpiano, di codimensione 1, ortogonale ad α, allora la riflessione $\sigma_\alpha : E \longrightarrow E$ è un endomorfismo ortogonale di E che fissa ogni vettore di P_α e manda α, vettore ortogonale a P_α, in $-\alpha$. Dunque una forma esplicita per questa riflessione è data da

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\,\alpha,$$

infatti, per ogni $\beta \in P_\alpha$, $\sigma_\alpha(\beta) = \beta$ e $\sigma_\alpha(\alpha) = -\,\alpha$. D' ora in poi denotiamo con $<\beta,\alpha> = \dfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$.

Definizione 1.20 (Sistema di radici). Si chiama sistema di radici un sottoinsieme Φ di E soddisfacente i seguenti assiomi:

(i) Φ è finito, genera E e $0 \notin \Phi$.

(ii) Se $\alpha \in \Phi$, gli unici multipli di α in Φ sono $\pm\,\alpha$ ossia $c\alpha \in \Phi \Longleftrightarrow c = \pm\,1$.

(iii) Se $\alpha \in \Phi$ allora $\sigma_\alpha(\Phi) = \Phi$ ossia Φ è σ_α - invariante.

(iv) Se $\alpha, \beta \in \Phi$ allora $< \beta, \alpha > \in \mathbb{Z}$.

Si chiama rango del sistema di radici la $dim_{\mathbb{R}}(E) = n$.

Osservazione 13. Il sistema di radici di un' algebra di Lie soddisfa la Definizione 1.20. In particolare ogni spazio radice L_α ha dimensione 1 [7, pag.39]

Esempio 8. Supponiamo che sia $n = 1$. Dalla Definizione 1.20 segue subito che $\Phi = \{\pm\ \alpha\}$ e questo è il sistema di radici dell' algebra di Lie semplice $sl(2, \mathbb{K})$. In questo caso il sistema di radici si dice sistema di tipo A_1.
Ora supponiamo che sia $n = 2$. Per la Definizione 1.20 si ha $\Phi = \{\alpha, \beta\}$ con α, β linearmente indipendenti. In tal caso, ricordando che $(\alpha, \beta) = \|\alpha\| \, \|\beta\| \cos\theta$ e supponendo che $\|\beta\| \geq \|\alpha\|$, nella Tabella 1.1 vengono elencate tutte le possibilità nel caso di rango 2. In particolare il sistema di radici associato all' algebra di Lie

$< \alpha, \beta >$	$< \beta, \alpha >$	θ	L
0	0	$\pi/2$	$sl(2, \mathbb{K}) \oplus sl(2, \mathbb{K})$
1	1	$\pi/3$	$sl(3, \mathbb{K})$
-1	-1	$2\pi/3$	$sl(3, \mathbb{K})$
1	2	$\pi/4$	$sp(4, \mathbb{K})$
-1	-2	$3\pi/4$	$sp(4, \mathbb{K})$
1	3	$\pi/6$	G_2
-1	-3	$5\pi/6$	G_2

Tabella 1.1: Sistemi di radici di rango 2

$sl(2, \mathbb{K}) \oplus sl(2, \mathbb{K})$ è $\Phi = \{\pm\ \alpha, \pm\ \beta\}$ e si chiama sistema di tipo D_2; quello associato a $sl(3, \mathbb{K})$ è $\Phi = \{\pm\ \alpha, \pm\ \beta, \pm\ (\alpha + \beta)\}$ ed è detto sistema di tipo A_2; il sistema associato a $sp(4, \mathbb{K})$ è $\Phi = \{\pm\ \alpha, \pm\ \beta, \pm\ (\alpha + \beta), \pm\ (\beta + 2\alpha)\}$ ed è un sistema di tipo C_2; infine si ha il sistema $\Phi = \{\pm\ \alpha, \pm\ \beta, \pm\ (\alpha + \beta), \pm\ (\beta + 2\alpha), \pm\ (\beta + 3\alpha), \pm\ (2\beta + 3\alpha)\}$ detto sistema di tipo G_2. Anche in questo caso si tratta di un sistema di radici associato ad un' algebra di Lie semisemplice.

Se Φ è un sistema di radici, denotiamo con $\mathcal{W}$ il sottogruppo di $gl(E)$ generato dalle riflessioni σ_α con $\alpha \in \Phi$. Per l' assioma (iii) della Definizione 1.20, $\mathcal{W}$ permuta gli elementi di Φ, inoltre $\mathcal{W}$ è finito perché Φ è finito, quindi l' applicazione

$$\Pi : \mathcal{W} \longrightarrow S_\Phi$$
$$w \mapsto w_{|\Phi}$$

è un omomorfismo di gruppi iniettivo, con S_Φ gruppo delle permutazioni di Φ e dunque $\mathcal{W}$ si identifica con un sottogruppo di S_Φ. In particolare $\mathcal{W}$ è detto **gruppo di Weyl di** Φ.

Definizione 1.21. Sia Φ un sistema di radici. Φ si dice **irriducibile** se non può essere scritto come unione disgiunta di due sistemi di radici ortogonali tra loro.

Proposizione 1.3.7 ([7, pag.52]). *Ogni sistema di radici Φ è unione disgiunta di sistemi di radici irriducibili Φ_i a due a due ortogonali ossia $\Phi = \sqcup_i \Phi_i$ in $E_i =$
$= \mathbb{R} \setminus span\,\{\Phi_i\}$.*

Nei casi visti i sistemi di tipo A_1, A_2, B_2, G_2 sono tutti irriducibili, solo D_2 non è irriducibile. Ci interessano i sistemi di radici irriducibili perché sono quelli associati alle algebre di Lie semplici, infatti vale:

Teorema 1.3.8 ([7, pag.73]). *Un' algebra di Lie semisemplice è completamente caratterizzata dal suo sistema di radici Φ. Essa è semplice se e solo se Φ è irriducibile.*

Introduciamo la nozione di base di un sistema di radici.

Definizione 1.22. Un sottoinsieme Δ di un sistema di radici Φ si dice base di Φ se:

(1) Δ è una base di E,

(2) Per ogni $\beta \in \Phi$ si ha $\beta = \sum\limits_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$ con $k_\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ oppure $k_\alpha \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$.

Gli elementi di Δ si chiamano **radici semplici**. In particolare, se Δ è una base, allora $\Phi = \Phi^+ \sqcup \Phi^-$, dove gli elementi di $\Phi^+ = \left\{\beta \in \Phi \mid \beta = \sum\limits_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha, k_\alpha \geq 0\right\}$ e di $\Phi^- = \left\{\beta \in \Phi \mid \beta = \sum\limits_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha, k_\alpha \leq 0\right\}$ sono detti rispettivamente radici positive e radici negative.

Teorema 1.3.9 (**[7, pag.48]**). *Se Φ è un sistema di radici allora esiste una base Δ di Φ.*

Osservazione 14. Osserviamo che se Δ, $\Delta^{'}$ sono due basi dello stesso sistema di radici Φ allora il gruppo di Weyl $\mathcal{W}$ di Φ agisce transitivamente sulle basi, ossia, se $\sigma \in \mathcal{W}$, si ha $\sigma\left(\Delta^{'}\right) = \Delta$.

Questa osservazione è di fondamentale importanza per definire la matrice di Cartan.

Definizione 1.23. Siano Φ un sistema di radici di rango n, $\mathcal{W}$ il suo gruppo di Weyl, $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ una base ordinata di Φ. La matrice $C = (c_{ij})$ le cui entrate sono $c_{ij} = (< \alpha_i, \alpha_j >)$ si chiama **matrice di Cartan di** Φ e le sue entrate si chiamano **interi di Cartan**, con $< \alpha_i, \alpha_j > = \dfrac{2\,(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}$.

Osservazione 15. Se $\Delta^{'}$ è un' altra base di Φ, per l' Osservazione 14, questa è della forma $\sigma(\Delta)$ per qualche $\sigma \in \mathcal{W}$, dunque si ha $< \sigma(\alpha_i), \sigma(\alpha_j) > = < \alpha_i, \alpha_j >$ ossia la matrice di Cartan non dipende dalla base.

Esempio 9. Le matrici di Cartan associate ai sistemi di radici di rango $n = 2$ sono le seguenti:

$$D_2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};\ A_2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};\ B_2 \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};\ G_2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Teorema 1.3.10. *Siano E, $E^{'}$ due spazi euclidei di dimensione n, con Φ sistema di radici in E e $\Phi^{'}$ sistema di radici in $E^{'}$. Supponiamo di avere fissato le basi $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, $\Delta^{'} = \left\{\alpha_1^{'}, \dots, \alpha_n^{'}\right\}$ rispettivamente di Φ, $\Phi^{'}$. Se $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \left\langle \alpha_i^{'}, \alpha_j^{'} \right\rangle$, per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$, allora la bigezione $\alpha_i \mapsto \alpha_i^{'}$ estesa ad E ed $E^{'}$ determina un isomorfismo $\phi : E \longrightarrow E^{'}$ tale che $\phi(\Phi) = \Phi^{'}$ e $\langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$ per ogni coppia di radici α, β di Φ. Quindi la matrice di Cartan di Φ determina Φ a meno di isomorfismi.*

Ora ricordiamo cosa si intende per Diagramma di Dynkin associato ad un sistema di radici. Ricordiamo che, se α, β sono radici positive distinte, risulta che $< \alpha, \beta >$

$< \beta, \alpha > = \; 0, 1, 2, 3$. Si chiama **grafo di Coxeter** del sistema di radici Φ, con base $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$, un grafo costituito da l vertici, dove il vertice i - esimo è unito al vertice j - esimo da $< \alpha_i, \alpha_j > < \alpha_j, \alpha_i >$ lati. Dunque, ad ogni vertice del grafo di Coxeter corrisponde univocamente un elemento di Δ. In particolare il grafo di Coxeter permette di determinare gli interi $< \alpha_i, \alpha_j >$ nel caso in cui tutte le radici hanno uguale lunghezza, infatti, in questo caso, $< \alpha_i, \alpha_j > = < \alpha_j, \alpha_i >$. Nel caso in cui ci siano delle radici le cui lunghezze sono distinte, allora il grafo di Coxeter non ci informa su quale sia la coppia di vertici (α_i, α_j) che dovrebbe corrispondere ad una radice semplice più corta e a una più lunga. Questo problema viene risolto aggiungendo una freccia nel grafo di Coxeter che punta verso la radice semplice più corta, ossia si inserisce una freccia da α_i ad α_j se risulta che $< \alpha_i, \alpha_j > < \alpha_j, \alpha_i > > 1$. Il grafo che si ottiene si chiama **Diagramma di Dynkin** del sistema di radici Φ con base Δ. La classificazione dei diagrammi di Dynkin si basa sul fatto che i grafi di Coxeter connessi corrispondono ai sistemi di radici irriducibili.

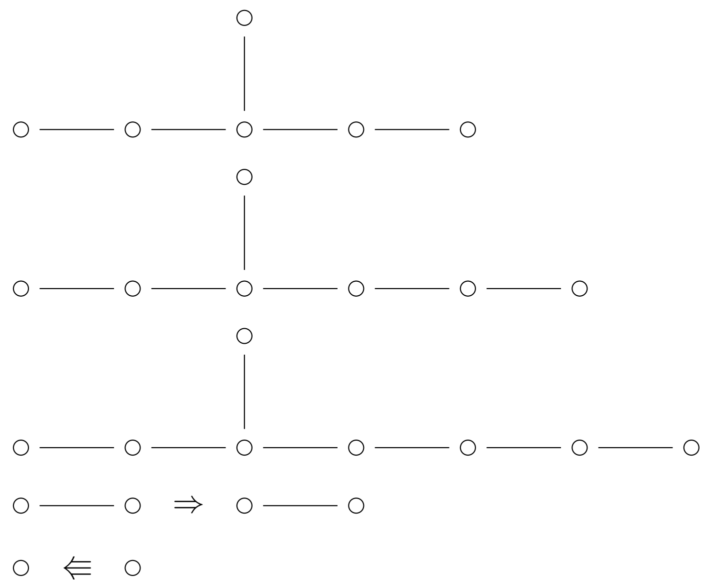
Teorema 1.3.11 (Teorema di classificazione, [7, pag.57]). *Se Φ è un sistema di radici irriducibile di rango n, allora il suo diagramma di Dynkin (connesso) è uno dei seguenti:*

$$A_n \qquad \circ - \circ - \cdots - \circ - \circ \qquad (n \geq 1)$$

$$B_n \qquad \circ - \circ - \cdots - \circ \;\Rightarrow\; \circ \qquad (n \geq 2)$$

$$C_n \qquad \circ - \circ - \cdots - \circ \;\Leftarrow\; \circ \qquad (n \geq 3)$$

$$D_n \qquad \circ - \circ - \cdots - \circ \begin{array}{l} \diagup \circ \\ \diagdown \circ \end{array} \qquad (n \geq 4)$$



E_6

E_7

E_8

F_4

G_2

In realtà vale anche il viceversa, ossia:

Teorema 1.3.12 ([7, pag.65]). *Per ogni diagramma di Dynkin di tipo $A-G$ esiste un' algebra di Lie semplice che ha quello come diagramma di Dynkin.*

I diagrammi di Dynkin di tipo A_n, B_n, C_n, D_n sono i diagrammi di Dynkin delle algebre di Lie classiche, rispettivamente $sl(n+1,\mathbb{K})$, $o(2n+1,\mathbb{K})$, $sp(2n,\mathbb{K})$, $o(2n,\mathbb{K})$. I diagrammi di Dynkin di tipo E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 corrispondono alle cosiddette **algebre di Lie di tipo eccezionale**. Nei prossimi capitoli la nostra attenzione sarà rivolta principalmente all' algebra di Lie eccezionale di tipo G_2. Pertanto descriviamo, in maniera astratta, il sistema di radici dell' algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di tipo G_2: supponiamo che lo spazio euclideo E sia il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ ortogonale a $\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3$, ossia $E = = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid (v, \epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3) = 0\}$, dove $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ denota la base canonica ortonormale di $\mathbb{R}^3$ e $(\cdot\ ,\cdot)$ denota l' usuale prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$. Se denotiamo con J il reticolo costituito dalle combinazioni lineari dei versori ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3, a coefficienti interi, allora Φ è ben definito come l'insieme degli elementi di J, o di un suo sottoreticolo, che hanno norme ben definite. Nel nostro caso, se consideriamo il sottoreticolo $J' = J \cap E$, risulta che $\Phi = \big\{\alpha \in J' \mid (\alpha,\alpha) = 2, 6\big\}$. Dunque, usando i versori della base canonica $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$, si ha

$$\Phi = \{\pm(\epsilon_1 - \epsilon_2), \pm(\epsilon_2 - \epsilon_3), \pm(\epsilon_1 - \epsilon_3)\} \cup$$
$$\cup \{\pm(2\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3), \pm(2\epsilon_2 - \epsilon_1 - \epsilon_3), \pm(2\epsilon_3 - \epsilon_1 - \epsilon_2)\}$$

Come base di Φ scegliamo $\Delta = \{\alpha, \beta\}$ con $\alpha = \epsilon_1 - \epsilon_2$, $\beta = -2\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$. In questo modo la decomposizione di Cartan di G_2 è data da:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \bigoplus \mathfrak{h} \bigoplus \mathfrak{g}_+$$

dove

$$\mathfrak{h} = \langle h_1, h_2 \rangle,$$

è una sottoalgebra torale massimale di $\mathfrak{g}$,

$$\mathfrak{g}_- = \bigoplus\nolimits_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_{-\alpha},\ \mathfrak{g}_+ = \bigoplus\nolimits_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_{\alpha}$$

con $\Phi^+ = \{\alpha, \beta, \alpha + \beta, 2\alpha + \beta, 3\alpha + \beta, 3\alpha + 2\beta\}$. Segue che

$$dim(G_2) = dim\,(\mathfrak{h}) + dim\,(\mathfrak{g}_-) + dim\,(\mathfrak{g}_+) = 14.$$

D' ora in poi il nostro scopo sarà di realizzare G_2 come l' algebra degli endomorfismi di una particolare algebra di composizione, la cosiddetta **algebra degli ottonioni**.

Capitolo 2

L' Algebra degli ottonioni

2.1 Algebre di composizione

L'algebra degli ottonioni appartiene ad una classe di algebre dette algebre di composizione o algebre di divisione normate.

Definizione 2.1 (Algebra di composizione). Un'algebra $(A, \cdot)$ finito dimensionale con unità su un campo $\mathbb{K}$ di caratteristica diversa da 2 è detta algebra di composizione se essa è un'algebra di divisione (i.e. $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ o $b = 0$, $a, b \in A$) ed è dotata di una forma quadratica non degenere:

$$N : A \longrightarrow \mathbb{K}$$

detta **norma**, soddisfacente le seguenti proprietà:

(i) $N(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$

(ii) $N(xy) = N(x)N(y) \quad \forall\, x, y \in A$

Osservazione 16. La forma quadratica N è non degenere se la forma bilineare simmetrica associata

$$B : A \times A \longrightarrow \mathbb{K},$$

definita da $B(x, y) = N(x + y) - N(x) - N(y)$, è non degenere.

Mediante la forma quadratica N si può definire la seguente applicazione:

Definizione 2.2 (Traccia). Sia A un'algebra di composizione con norma N. Si definisce traccia l'applicazione

$$T : A \longrightarrow \mathbb{K}$$

definita da:

$$T(x) := N(x + \mathbf{1}) - N(x) - N(\mathbf{1}) = B(x, \mathbf{1}) \text{ per ogni } x \in A$$

Ora vogliamo dedurre alcune identità che valgono in qualsiasi algebra di composizione:

Lemma 2.1.1. *Sia A un' algebra di composizione con forma quadratica N e forma bilineare associata B. Se $T : A \longrightarrow \mathbb{K}$ denota la traccia, allora valgono le seguenti identità:*

(*a*) *Per ogni $x_1, x_2, y \in A$, $B(x_1y, x_2y) = B(x_1, x_2)N(y)$. Analogamente, per ogni $x, y_1, y_2 \in A$, $B(xy_1, xy_2) = N(x)B(y_1, y_2)$.*

(*b*) *Per ogni $x_1, x_2, y_1, y_2 \in A$, $B(x_1y_1, x_2y_2) + B(x_1y_2, x_2y_1) = B(x_1, x_2)B(y_1, y_2)$.*

(*c*) *Per ogni $x, y, z \in A$, $B(xy, z) + B(x, zy) = T(y)B(x, z)$.*

(*d*) *Per ogni $x, y \in A$, $B(x, yx) + B(x^2, y) = T(x)B(x, y)$.*

(*e*) *Per ogni $x, y \in A$, $B(xy, 1) + B(x, y) = T(x)T(y)$.*

Dimostrazione.

(*a*) Per l'Osservazione 16 e per la proprietà (*ii*) della Definizione 2.1, si ha:
$B(x_1y, x_2y) = N(x_1y + x_2y) - N(x_1y) - N(x_2y)$

$$= N(x_1y + x_2y) - N(x_1)N(y) - N(x_2)N(y).$$

D'altra parte:
$B(x_1, x_2)N(y) = (N(x_1 + x_2) - N(x_1) - N(x_2))N(y)$

$$= N(x_1y + x_2y) - N(x_1y) - N(x_2y)$$
$$= B(x_1y, x_2y).$$

Un conto analogo mostra che $B(xy_1, xy_2) = N(x)B(y_1, y_2)$.

(b) Notiamo che per la proprietà (a) si ha:

$$B(x_1(y_1 + y_2), x_2(y_1 + y_2)) = B(x_1, x_2)N(y_1 + y_2).$$

D' altra parte, al primo membro si ha:

$$\begin{aligned}
B(x_1(y_1 + y_2), x_2(y_1 + y_2)) &= B(x_1y_1 + x_1y_2, x_2y_1 + x_2y_2) \\
&= B(x_1y_1, x_2y_1 + x_2y_2) + B(x_1y_2, x_2y_1 + x_2y_2) \\
&= B(x_1y_1, x_2y_1) + B(x_1y_1, x_2y_2) + \\
&\quad + B(x_1y_2, x_2y_1) + B(x_1y_2, x_2y_2) \\
&= B(x_1y_1, x_2y_2) + B(x_1y_2, x_2y_1) + \\
&\quad + B(x_1, x_2)N(y_1) + B(x_1, x_2)N(y_2).
\end{aligned}$$

Al secondo membro si ha:

$$\begin{aligned}
B(x_1, x_2)N(y_1 + y_2) &= B(x_1, x_2)(B(y_1, y_2) + N(y_1) + N(y_2)) \\
&= B(x_1, x_2)B(y_1, y_2) + B(x_1, x_2)(N(y_1) + N(y_2)).
\end{aligned}$$

Uguagliando le espressioni ottenute, segue che:

$$B(x_1y_1, x_2y_2) + B(x_1y_2, x_2y_1) = B(x_1, x_2)B(y_1, y_2).$$

(c) Segue dalla proprietà (b) ponendo $x_1 = x, y_1 = y, x_2 = z, y_2 = 1$.

(d) Segue dalla proprietà (b) ponendo $x_1 = y_2 = x, x_2 = y, y_1 = 1$.

(e) Segue da (c) ponendo $z = 1$.

□

Il Lemma 2.1.1 è utile per dimostrare il seguente:

Teorema 2.1.2. *Sia A un'algebra di composizione con forma quadratica N e traccia T. Fissato un elemento $x \in A$, vale la seguente equazione quadratica:*

$$x^2 - T(x)x + N(x)\mathbf{1} = 0. \tag{2.1}$$

Dimostrazione. Sia $y \in A$ un elemento arbitrario dell'algebra A e sia B la forma bilineare, simmetrica e non degenere, associata alla forma quadratica N. Per la proprietà (a) del Lemma 2.1.1,

$$B(x^2, y) - B(x, 1)B(x, y) + B(1, y)N(x)\mathbf{1} = B(x^2, y) - B(x, 1)B(x, y) + B(x, yx);$$

d'altra parte, per la proprietà (d) del Lemma 2.1.1 e per la Definizione 2.2,

$$B(x^2, y) - B(x, 1)B(x, y) + B(x, yx) = 0,$$

da cui, poiché B è non degenere e $y \in A$ è arbitrario, segue la (2.1). □

Osservazione 17. Una $\mathbb{K}$- algebra A in cui ogni elemento è radice di un polinomio quadratico a coefficienti in $\mathbb{K}$ è detta **algebra quadratica**. Per il Teorema 2.1.2, ogni algebra di composizione è un'algebra quadratica.

Ricordiamo, dalla Definizione 1.3, che un' involuzione è una applicazione lineare di un' algebra A in sé che soddisfa le proprietà (i), (ii) della Definizione 1.3. D' ora in poi denotiamo qualsiasi involuzione con il simbolo $^{-}$. Il prossimo passo è mostrare che ogni algebra di composizione possiede un' involuzione.

Lemma 2.1.3. *Sia A un'algebra di composizione con forma quadratica N e traccia T. L' applicazione*

$$\begin{aligned} ^{-} \colon A &\longrightarrow A \\ a &\mapsto \overline{a}, \end{aligned}$$

definita da $\overline{a} := T(a)\mathbf{1} - a$, è un' involuzione dell'algebra A che fissa gli elementi del campo $\mathbb{K}$. Inoltre valgono le seguenti:

$$N(a) = a\overline{a} \tag{2.2}$$

$$T(a) = a + \overline{a} \tag{2.3}$$

per ogni $a \in A$.

Dimostrazione. Per dimostrare che l' applicazione $a \mapsto \overline{a}$ è un' involuzione bisogna verificare che essa è lineare e che soddisfa le proprietà (i), (ii) della Definizione 1.3. Dunque, siano $a, b \in A$, $\lambda \in \mathbb{K}$, si ha:

$\overline{a+b} = T(a+b)\mathbf{1} - (a+b) = T(a)\mathbf{1} + T(b)\mathbf{1} - a - b = T(a)\mathbf{1} - a + T(b)\mathbf{1} - b = \overline{a} + \overline{b}.$

$\overline{\lambda a} = T(\lambda a)\mathbf{1} - \lambda a = \lambda(T(\lambda a) - a) = \lambda\overline{a}.$

Ora verifichiamo la proprietà (ii) della Definizione 1.3, ricordando che, se B denota la forma bilineare simmetrica non degenere associata a N, allora $B(1,1) = 2$; dunque si ha:

$\overline{\overline{a}} = T(\overline{a}) - \overline{a} = B(1, \overline{a}) - \overline{a} = B(1, B(1,a) - a) - B(1,a) + a = B(1,a)B(1,1) -$
$- B(1,a) - B(1,a) + a = a.$

Per verificare la proprietà (i) della Definizione 1.3, usiamo l'equazione (2.1) e la proprietà (b) del Lemma 2.1.1; l'equazione (2.1), per $x = a+b$, $x = a$, $x = b$, fornisce, rispettivamente, tre equazioni date da:

$$(a+b)^2 - T(a+b)(a+b) + N(a+b) = 0 \tag{2.4}$$

$$a^2 - T(a)a + N(a) = 0 \tag{2.5}$$

$$b^2 - T(b)b + N(b) = 0 \tag{2.6}$$

Sottraendo all' equazione (2.4) entrambe le equazioni (2.5), (2.6), si ottiene:

$0 = (a+b)^2 - T(a+b)(a+b) + N(a+b) - (a^2 - T(a)a + N(a)) - (b^2 - T(b)b + N(b))$

$= ab + ba - T(a)b - T(b)a + N(a+b) - N(a) - N(b)$

$= ab + ba + B(a,b) - B(a,1)b - B(b,1)a.$

Ora osserviamo che, per la proprietà (b) del Lemma 2.1.1, ponendo $x_1 = y_1 = 1$, $x_2 = a$, $y_2 = b$, si ha:

$B(1,a)B(1,b) = B(1,ab) + B(b,a) = B(1,ba) + B(b,a).$

Allora:

$0 = ab + ba + B(a,b) - B(a,1)b - B(b,1)a = ab + ba - B(a,1)b - B(b,1)a +$
$+ B(a,1)B(b,1) - B(1,ab).$

Da questo segue che:

$\overline{a}\overline{b} = (T(a)\mathbf{1} - a)(T(b)\mathbf{1} - b) = (B(1,a) - a)(B(1,b) - b)$

$$= B(1,a)B(1,b) - B(1,a)b - B(1,b)a + ab$$

$$= B(1,ab) - ab$$

$$= B(1,ba) - ba = \overline{ba}.$$

Inoltre l'involuzione $a \mapsto \overline{a}$ fissa gli elementi del campo $\mathbb{K}$, infatti se $\lambda \in \mathbb{K}$, siccome $N(1) = 1$ e $B(1,1) = 2$, si ha:
$\overline{\lambda} = T(\lambda) - \lambda = B(1,\lambda) - \lambda = \lambda B(1,1) - \lambda = \lambda$
Infine, per definizione di $\overline{a}$, risulta $T(a) = a + \overline{a}$, mentre per l'equazione (2.1) e per definizione di $\overline{a}$, si ha:
$a\overline{a} = a(T(a)\mathbf{1} - a) = aB(a,1) - a^2 = N(a).$ $\square$

Osservazione 18. Il lemma precedente afferma che ogni algebra di composizione è un'algebra con involuzione. In particolare, grazie alle relazioni (2.2), (2.3), la forma quadratica N e la traccia T risultano essere univocamente determinate dalla involuzione $^{-}$, quindi una qualsiasi algebra di composizione può essere descritta soltanto in termini dell'involuzione. Osserviamo inoltre che, se A è un' algebra e $^{-}\colon A \longrightarrow A$ è un' involuzione di A, allora $N(a) = a\bar{a}$ è una forma quadratica moltiplicativa, infatti si ha che:
$N(ab) = (ab)(\overline{ab}) = (ab)(\bar{b}\bar{a}) = aN(b)\bar{a} = N(a)N(b).$

Ora descriviamo esplicitamente le principali algebre di composizione.

Esempio 10. $\mathbb{R}$ come $\mathbb{R}$ - algebra su se stessa è un' algebra di composizione con involuzione $id_{\mathbb{R}}$, forma quadratica $N(x) = x^2 (x \in \mathbb{R})$ e forma bilineare associata $B(x,y) = 2xy$. In particolare $T(x) = B(x,\mathbf{1}) = 2x$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Banalmente la forma quadratica N è moltiplicativa e non degenere.

Esempio 11. $\mathbb{C}$ come $\mathbb{R}$ - algebra è un'algebra di composizione. $\mathbb{C}$ è un $\mathbb{R}$ - spazio vettoriale di dimensione 2 con base $\{1, i\}$ e prodotto definito da $(a+ib)(c+id) =$
$= (ac - db) + (ad + cb)i$, per a, b, c, $d \in \mathbb{R}$. Come involuzione su $\mathbb{C}$ fissiamo l'applicazione di coniugio, che denotiamo ancora con

$$^{-}\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \overline{z},$$

$\overline{z} = \overline{a + ib} = a - ib$. Notiamo che l' applicazione di coniugio è $\mathbb{R}$ - lineare: per $\alpha \in \mathbb{R}$, $z = a + ib \in \mathbb{C}$,

$$\overline{\alpha z} = \overline{\alpha a + i\alpha b} = \alpha a - i\alpha b = \alpha(a - ib) = \alpha\overline{z},$$

e che soddisfa la proprietà (i) della Definizione 1.3 : per $w = c + id \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\overline{zw} &= \overline{(a + ib)(c + id)} \\
&= \overline{(ac - db) + (ad + cb)i} \\
&= (ac - db) - (ad + cb)i \\
&= (ac - (-d)(-b)) + (a(-d) + c(-b))i \\
&= (c - di)(a - bi) \\
&= (\overline{w})(\overline{z}).
\end{aligned}$$

Per il Lemma 2.1.3 segue che la forma quadratica su $\mathbb{C}$ è definita da $N(z) = z\bar{z}$ per ogni $z \in \mathbb{C}$, quindi, se $z = a+ib$, si ha $N(a+ib) = (a+ib)\overline{(a + ib)} = (a+ib)(a-ib) = = a^2 + b^2$. Invece la traccia, sempre per il Lemma 2.1.3, è data da $T(z) = z + \bar{z} = = a + ib + a - ib = 2a$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. In particolare, per l' Osservazione 18, si ha che N è moltiplicativa, inoltre, certamente N è non degenere, infatti, se $z \in \mathbb{C}$, allora $N(z) = z\bar{z} = a^2 + b^2 = 0$ se e solo se $a = b = 0$. Poiché N è non degenere e moltiplicativa, segue che $\mathbb{C}$ è un' algebra di divisione. Infatti, siano z, $w \in \mathbb{C}$ tali che $zw = 0$. Allora si ha che: $N(zw) = N(z)N(w) = 0$ e, siccome $\mathbb{R}$ è un dominio di integrità , segue che $N(z) = 0$ oppure $N(w) = 0$; d' altra parte N è non degenere, quindi $z = 0$ oppure $w = 0$.

Esempio 12. L' algebra dei quaternioni $\mathbb{H}$, come $\mathbb{R}$ - algebra, è un'algebra di composizione. $\mathbb{H}$ è un $\mathbb{R}$ - spazio vettoriale di dimensione 4 con base $\{1, i, j, k\}$, quindi un quaternione q è un' espressione della forma $q = a + bi + cj + dk$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Definiamo su $\mathbb{H}$ un prodotto estendendo per bilinearità le seguenti definizioni:

$$ij = k = -ji, \qquad jk = i = -kj, \qquad ki = j = -ik,$$

e

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

Notiamo che tale prodotto non è commutativo e mostriamo che è associativo :
$(ij)k - i(jk) = kk - ii = -1 + 1 = 0;$
$(ii)j - i(ij) = -1 \cdot j - ik = -j + j = 0.$
Un conto analogo vale in tutti gli altri casi rimanenti. Estendendo su $\mathbb{H}$ le relazioni scritte sopra si ottiene il cosiddetto prodotto di Hamilton definito nel modo seguente: se $q, q^{'} \in \mathbb{H}$, con $q = a + bi + cj + dk$, $q^{'} = a^{'} + b^{'}i + c^{'}j + d^{'}k$, allora definiamo
$qq^{'} = (a + bi + cj + dk)(a^{'} + b^{'}i + c^{'}j + d^{'}k)$

$$\begin{aligned} &= aa^{'} - bb^{'} - cc^{'} - dd^{'} + (ab^{'} + ba^{'} + cd^{'} - dc^{'})i + \\ &\quad + (ac^{'} - bd^{'} + ca^{'} + db^{'})j + (ad^{'} + bc^{'} - cb^{'} + da^{'})k \end{aligned}$$

Da questo segue che $\mathbb{H}$ è una $\mathbb{R}$ - algebra. Ora definiamo un' involuzione di $\mathbb{H}$, che denotiamo ancora con

$$\begin{aligned} \bar{\ }: \mathbb{H} &\to \mathbb{H} \\ q &\mapsto \bar{q}, \end{aligned}$$

ponendo, per $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$, $\bar{q} = a - bi - cj - dk$; l'elemento $\bar{q}$ si chiama il **coniugato** di q. L' applicazione $\bar{\ }$ è certamente lineare. Ora dimostriamo che essa soddisfa le proprietà (i), (ii) della Definizione 1.3. Si ha subito $\bar{\bar{q}} = \overline{a - bi - cj - dk} = a + bi + cj + dk = q$, quindi vale (ii). Per verificare la (i), siano $q, q^{'} \in \mathbb{H}$, con $q = a + bi + cj + dk$, $q^{'} = a^{'} + b^{'}i + c^{'}j + d^{'}k$; allora si ha:
$\overline{qq^{'}} = \overline{(a + bi + cj + dk)(a^{'} + b^{'}i + c^{'}j + d^{'}k)}$

$$\begin{aligned} &= \overline{aa^{'} - bb^{'} - cc^{'} - dd^{'}} \ + \ \overline{(ab^{'} + ba^{'} + cd^{'} - dc^{'})i} + \\ &\quad + \overline{(ac^{'} - bd^{'} + ca^{'} + db^{'})j} \ + \ \overline{(ad^{'} + bc^{'} - cb^{'} + da^{'})k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \overline{aa^{'} + ab^{'}i + ac^{'}j + ad^{'}k} - \overline{bb^{'} + ba^{'}i - bd^{'}j + bc^{'}k} - \\ &\quad - \overline{cc^{'} + cd^{'}i + ca^{'}j - cb^{'}k} \ - \ \overline{dd^{'} - dc^{'}i + db^{'}j + da^{'}k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= aa^{'} - bb^{'} - cc^{'} - dd^{'} + (-ab^{'} - ba^{'} - cd^{'} + dc^{'})i + \\ &\quad + (-ac^{'} + bd^{'} - ca^{'} - db^{'})j + (-ad^{'} - bc^{'} + cb^{'} - da^{'})k \end{aligned}$$

$$= \overline{(a^{'} + b^{'}i + c^{'}j + d^{'}k)} \ \overline{(a + bi + cj + dk)}.$$

Per il Lemma 2.1.3 risultano ben definite la forma quadratica

$$N(q) = q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

e la traccia

$$T(q) = q + \bar{q} = 2a.$$

Affinché $\mathbb{H}$ sia un' algebra di composizione rimane da provare che la forma quadratica N è non degenere, moltiplicativa e che $\mathbb{H}$ sia un' algebra di divisione. N è certamente non degenere, infatti, se $q \in \mathbb{H}$, allora $N(q) = q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$ se e solo se $a = b = c = d = 0$ cioè se e solo se $q = 0$; inoltre, per l' Osservazione 18, si ha che $N(qq^{'}) = N(q)N(q^{'})$, per q, $q^{'} \in \mathbb{H}$, ossia N è moltiplicativa. Poiché N è non degenere e moltiplicativa, segue che $\mathbb{H}$ è un' algebra di divisione. Infatti siano $q, q^{'} \in \mathbb{H}$ tali che $qq^{'} = 0$. Allora si ha che: $N(qq^{'}) = N(q)N(q^{'}) = 0$ e, siccome $\mathbb{R}$ è un dominio di integrità, segue che $N(q) = 0$ oppure $N(q^{'}) = 0$; d'altra parte N è non degenere, quindi $q = 0$ oppure $q^{'} = 0$.

Oltre a queste tre algebre di composizione, ne esiste un' altra: la cosiddetta algebra degli ottonioni $\mathbb{O}$. Vedremo nel prossimo paragrafo come definire una struttura di $\mathbb{R}$ - algebra su $\mathbb{O}$, dimostreremo che l'algebra così ottenuta si può dotare di una involuzione che, grazie al Lemma 2.1.3, permetterà di definire una norma che rende $\mathbb{O}$ un' algebra di composizione.

2.2 Costruzione dell'algebra degli ottonioni

L'algebra degli Ottonioni $\mathbb{O}$ può essere costruita in diversi modi. In questo paragrafo ne presenteremo due di cui ci serviremo per costruire, successivamente, l'algebra delle derivazioni degli ottonioni. La prima delle due costruzioni che presentiamo è la seguente.

Definizione 2.3 (Algebra degli ottonioni). Si definisce algebra degli ottonioni $\mathbb{O}$, l' $\mathbb{R}$ - spazio vettoriale di dimensione 8 con base $\mathcal{B} = \{1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ e

	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	e_7	$-e_6$
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1	$-e_6$	e_7	e_4	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	e_6	$-e_5$	$-e_4$
e_4	e_4	$-e_5$	e_6	$-e_7$	-1	e_1	$-e_2$	e_3
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	$-e_6$	$-e_1$	-1	e_3	e_2
e_6	e_6	$-e_7$	$-e_4$	e_5	e_2	$-e_3$	-1	e_1
e_7	e_7	e_6	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	$-e_1$	-1

Tabella 2.1: Regola di moltiplicazione degli ottonioni

prodotto descritto dalla Tabella 2.1.
Il prodotto di due elementi di $\mathcal{B}$ è definito moltiplicando il primo elemento della riga i-esima per il primo elemento della j-esima colonna. In particolare, dalla Tabella 2.1, si ricava che il prodotto di elementi della base soddisfa le seguenti proprietà:

(i) $1 \cdot e_i = e_i$ per ogni $i = 1, \ldots, 7$

(ii) $e_i^2 = -1$ per ogni $i = 1, \ldots, 7$

(iii) $e_i \cdot e_j = -e_j \cdot e_i$ per ogni $i \neq j$, ossia e_i ed e_j anticommutano.

Osservazione 19. Estendendo su $\mathbb{O}$ per bilinearità il prodotto definito dalla Tabella 2.1 definiamo su $\mathbb{O}$ una struttura di $\mathbb{R}$ - algebra. Osserviamo che tale prodotto non è associativo, infatti se consideriamo gli elementi e_1, e_2, e_4 di $\mathcal{B}$ si ha che:
$e_1(e_2e_4) = e_1(-e_6) = -(e_1e_6) = -e_7$, mentre $(e_1e_2)e_4 = e_3e_4 = e_7$.

Osservazione 20. In modo analogo a quanto fatto negli Esempi 10, 11, 12, anche sull' algebra $\mathbb{O}$ è possibile definire un' involuzione, che denotiamo sempre con

$$\bar{\ }: \mathbb{O} \longrightarrow \mathbb{O}$$
$$x \mapsto \bar{x},$$

dove, se $x = a_0 + \sum_{i=1}^{7} a_i e_i$,

$$\bar{x} = \overline{a_0 + \sum_{i=1}^{7} a_i e_i} = a_0 - \sum_{i=1}^{7} a_i e_i.$$

L' elemento $\bar{x}$ si chiama anche in questo caso il **coniugato** di x. L' applicazione è certamente lineare e si vede facilmente, in modo analogo al caso dell' algebra dei quaternioni $\mathbb{H}$, che essa soddisfa le proprietà (i), (ii) della Definizione 1.3 ossia $\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$ e $\overline{\overline{x}} = x$ per ogni $x, y \in \mathbb{O}$.

Osservazione 21. Dall' Osservazione 20 e dal Lemma 2.1.3 segue che possiamo introdurre una norma sull'algebra $\mathbb{O}$ definita da

$$N(x) = x\bar{x},$$

$x \in \mathbb{O}$. In particolare, se $x = a_0 + \sum\limits_{i=1}^{7} a_i e_i$, si ha che

$$N(x) = a_0^2 + \sum_{i=1}^{7} a_i^2;$$

infatti risulta che:

$$\begin{aligned}
N(x) &= x\bar{x} \\
&= \left(a_0 + \sum_{i=1}^{7} a_i e_i\right)\left(a_0 - \sum_{i=1}^{7} a_i e_i\right) \\
&= a_0^2 - \sum_{i=1}^{7} a_i^2 e_i^2 \\
&= a_0^2 + \sum_{i=1}^{7} a_i^2.
\end{aligned}$$

Inoltre (Lemma 2.1.3) possiamo introdurre anche una traccia su $\mathbb{O}$ definita da

$$T(x) = x + \bar{x} = 2a_0,$$

per $x \in \mathbb{O}$.

A questo punto possiamo dimostrare la seguente:

Proposizione 2.2.1. $\mathbb{O}$ *è un' algebra di composizione.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che la norma N è non degenere, soddisfa la proprietà (ii) della Definizione 2.1 e che $\mathbb{O}$ è un' algebra di divisione. N è non degenere, infatti, se $y = \sum_{i=1}^{7} a_i e_i \in \mathbb{O}$, per l' Osservazione 21, $N(y) = a_0^2 + \sum_{i=1}^{7} a_i^2$, dunque $N(y) = 0$ se e solo se $a_0 = 0$, $a_i = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, 7$ cioè se e solo se $y = 0$. N soddisfa la proprietà (ii) della Definizione 2.1, infatti, siano $x, y \in \mathbb{O}$, con $x = a_0 + \sum_{i=1}^{7} a_i e_i$, $y = b_0 + \sum_{i=1}^{7} b_i e_i$, allora si ha che:

$$\begin{aligned}
N(xy) &= (xy)(\overline{xy}) \\
&= (a_0 + \sum_{i=1}^{7} a_i e_i)(b_0 + \sum_{i=1}^{7} b_i e_i)\overline{(a_0 + \sum_{i=1}^{7} a_i e_i)(b_0 + \sum_{i=1}^{7} b_i e_i)} \\
&= (a_0 + \sum_{i=1}^{7} a_i e_i)(b_0 + \sum_{i=1}^{7} b_i e_i)\overline{(b_0 + \sum_{i=1}^{7} b_i e_i)}\ \overline{(a_0 + \sum_{i=1}^{7} a_i e_i)}) \\
&= (a_0 + \sum_{i=1}^{7} a_i e_i) N(y) \overline{(a_0 + \sum_{i=1}^{7} a_i e_i)} \\
&= N(x)N(y).
\end{aligned}$$

Poiché N è non degenere e moltiplicativa si ha che $\mathbb{O}$ è un' algebra di divisione; infatti, siano $x, y \in \mathbb{O}$ tali che $x \cdot y = 0$. Allora si ha che:

$$N(x \cdot y) = N(x) \cdot N(y) = 0;$$

d'altra parte $\mathbb{R}$ è un dominio di integrità, quindi segue che $N(x) = 0$ oppure $N(y) = 0$ e, siccome N è non degenere, necessariamente $x = 0$ oppure $y = 0$.

Le algebre di composizione risultano essere completamente descritte dal seguente:

Teorema 2.2.2 (Teorema di Zorn, [10, pag.4]). *Una $\mathbb{R}$ - algebra di composizione A ha dimensione finita 2^n, per $n = 0, 1, 2, 3$, ed è isomorfa ad una delle seguenti: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ oppure $\mathbb{O}$.*

Abbiamo visto, nell' Osservazione 19, che $\mathbb{O}$ non è un' algebra associativa; essa soddisfa una proprietà più debole della associatività detta associatività alternante. Per poter definire questa proprietà occorre introdurre due concetti: quello di algebra alternante e quello di associatore.

Definizione 2.4 (**Algebra alternante**)**.** Un'algebra A si dice alternante se il prodotto $\cdot : A \times A \longrightarrow A$ è anticommutativo:

$$a \cdot b = -b \cdot a$$

Definizione 2.5 (**Associatore**)**.** Data un'algebra A su un campo $\mathbb{K}$ di caratteristica diversa da 2, si definisce associatore l'applicazione trilineare:

$$[\cdot, \cdot, \cdot] : A \times A \times A \longrightarrow A$$

definita da:

$$[a, b, c] := (ab)c - a(bc) \text{ per } a, b, c \in A$$

Osservazione 22. Così come il commutatore $[a, b] = ab - ba$ misura quanto due elementi $a, b \in A$ distano dal commutare, l'associatore è un 3 - prodotto che misura quanto tre elementi $a, b, c \in A$ distano dall'associare. In altre parole un'algebra A è associativa se e solo se tutti gli associatori dei suoi elementi sono nulli, ossia:

$$[a, b, c] = 0 \text{ per ogni } a, b, c \in A$$

Conseguenza immediata delle ultime due definizioni è la seguente:

Definizione 2.6 (**Algebra associativa alternante**)**.** Un'algebra A su un campo $\mathbb{K}$ di caratteristica diversa da 2, si dice algebra associativa alternante se soddisfa le seguenti proprietà:

$$a(ab) = (aa)b \tag{2.7}$$

$$a(bb) = (ab)b \tag{2.8}$$

$$a(ba) = (ab)a \tag{2.9}$$

per ogni $a, b \in A$.

Osservazione 23. Le proprietà (2.7), (2.8), (2.9) della definizione data sono dette rispettivamente **legge alternante sinistra**, **legge alternante destra** e **legge flessibile**. In termini di associatore queste possono essere riscritte come segue:

$$[a, a, b] = [b, a, a] = [a, b, a] = 0 \text{ per ogni } a, b \in A.$$

Di conseguenza un' algebra è associativa alternante se e solo se il suo associatore è una funzione 3 - lineare completamente antisimmetrica.

Vale il seguente:

Teorema 2.2.3 (Teorema di Zorn, [11]). *$\mathbb{O}$ è un' algebra associativa alternante.*

La seconda costruzione dell'algebra $\mathbb{O}$ che presentiamo è la cosiddetta **costruzione di Cayley - Dickson**; quest' ultima è basata su un processo iterativo che mette in risalto la relazione tra le quattro algebre di composizione $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$. Sia $\mathbb{K}$ un campo di caratteristica diversa da 2 e sia A una $\mathbb{K}$ - algebra con unità $\mathbf{1}$ e con involuzione, che continuiamo a denotare con

$$\begin{aligned} \bar{\ }: A &\longrightarrow A \\ a &\mapsto \bar{a}, \end{aligned}$$

dove $a + \bar{a}, a\bar{a} \in \mathbb{K}$ per ogni $a \in A$. Lo scopo del processo di Cayley - Dickson è di costruire una nuova algebra che contenga A come sottoalgebra; in particolare, se la dimensione di A è n, allora la dimensione della nuova algebra sarà $2n$. Per ottenere questa nuova algebra si procede nel seguente modo:
sia $\alpha \in \mathbb{K}$, con $\alpha \neq 0$, e denotiamo con (A, α) la collezione delle coppie ordinate $(a_1, a_2) \in A \oplus A$ con operazioni di somma e moltiplicazione per uno scalare definite nel modo usuale, e prodotto definito da

$$(a_1, a_2) \cdot (a_3, a_4) = (a_1 a_3 + \alpha a_4 \overline{a_2}, \overline{a_1} a_4 + a_3 a_2). \tag{2.10}$$

Il prodotto (2.10) è bilineare quindi la struttura $((A, \alpha), \cdot)$ è una $\mathbb{K}$ - algebra con unità l'elemento $(1, 0)$. Denotiamo con $A' = \{(a, 0) \mid a \in A\}$ e osserviamo che A' è una sottoalgebra di (A, α), infatti $(a_1, 0) \cdot (a_3, 0) = (a_1 a_3, 0)$. Inoltre l' applicazione

$$\phi : A^{'} \to A$$
$$(a, 0) \mapsto a$$

è un isomorfismo. Ora, se $v = (0, 1)$, si ha che $v^2 = \alpha(1, 0)$, quindi $(A, \alpha) = A^{'} \oplus vA^{'}$ come spazi vettoriali. D'altra parte, se identifichiamo $A^{'}$ con A mediante ϕ, gli elementi dell'algebra (A, α) sono rappresentati nella forma $x = a_1 + va_2$, dove $a_1, a_2 \in A$ sono univocamente determinati. In questo modo il prodotto (2.10) diventa:

$$(a_1 + va_2) \cdot (a_3 + va_4) = (a_1 a_3 + \alpha a_4 \overline{a_2}) + v(\overline{a_1} a_4 + a_3 a_2). \tag{2.11}$$

Vale il seguente:

Lemma 2.2.4. *L' applicazione $\mathcal{C} : (A, \alpha) \longrightarrow (A, \alpha)$ definita da $\mathcal{C}(x) = \overline{a_1} - va_2$, per $x = a_1 + va_2 \in (A, \alpha)$ è un' involuzione dell'algebra (A, α). Inoltre $x + \mathcal{C}(x), x\mathcal{C}(x) \in \mathbb{K}$ per ogni $x \in (A, \alpha)$. Infine se la norma $N(a) = a\overline{a}$ è non degenere su A, allora la norma $\tilde{N}(x) = x\mathcal{C}(x)$ è non degenere su (A, α).*

Dimostrazione. L' applicazione $\mathcal{C}$ è certamente lineare e soddisfa la proprietà (ii) della Definizione 1.3, infatti

$$\mathcal{C}(\mathcal{C}(x)) = \mathcal{C}(\overline{a_1} - va_2) = a_1 + va_2 = x$$

per ogni $x \in (A, \alpha)$. Dimostriamo che $\mathcal{C}$ soddisfa la proprietà (i) della Definizione 1.3: siano $x = a_1 + va_2, y = a_3 + va_4 \in (A, \alpha)$ con $a_i \in A$ per ogni $i = 1, \ldots, 4$; allora si ha:

$$\mathcal{C}(y)\mathcal{C}(x) = (\overline{a_3} - va_4)(\overline{a_1} - va_2) = (\overline{a_3}\ \overline{a_1} + \alpha a_2 \overline{a_4}) - v(a_3 a_2 + \overline{a_1} a_4)$$

D' altra parte

$$\mathcal{C}(xy) = \mathcal{C}((a_1 + va_2)(a_3 + va_4)),$$

per definizione del prodotto (2.11) e dell' applicazione $\mathcal{C}$

$$\mathcal{C}(xy) = \mathcal{C}((a_1 a_3 + \alpha a_4 \overline{a_2}) + v(\overline{a_1} a_4 + a_3 a_2)) = \overline{(a_1 a_3 + \alpha a_4 \overline{a_2})} - v(\overline{a_1} a_4 + a_3 a_2),$$

d' altra parte l' applicazione $^{-}: A \longrightarrow A$ è lineare, quindi

$$\mathcal{C}(xy) = (\overline{\overline{a_1}a_3} + \overline{\alpha a_4\overline{a_2}}) - v(\overline{a_1}a_4 + a_3a_2),$$

poiché $^{-}: A \longrightarrow A$ è un' involuzione

$$\mathcal{C}(xy) = (\overline{a_3}\ \overline{\overline{a_1}} + \alpha a_2\overline{a_4}) - v(a_3a_2 + \overline{a_1}a_4).$$

In particolare
$x + \mathcal{C}(x) = a_1 + \overline{a_1} \in \mathbb{K}$
$x\mathcal{C}(x) = (a_1 + va_2)(\overline{a_1} - va_2) = (a_1\overline{a_1} - \alpha a_2\overline{a_2}) + v(-\overline{a_1}a_2 + \overline{a_1}a_2) = a_1\overline{a_1} - \alpha a_2\overline{a_2} =$
$= N(a_1) - \alpha N(a_2) \in \mathbb{K}$.
Ora, sia $N(a) = a\bar{a}$ una norma non degenere su A e sia $B(a,b) = N(a+b) - N(a) -$ $- N(b)$ la forma bilineare simmetrica associata a N sull' algebra A. Vogliamo mostrare che la norma $\tilde{N}(x) = x\mathcal{C}(x)$ è non degenere sull' algebra (A,α); osserviamo che la forma bilineare simmetrica associata a $\tilde{N}$ è data da:

$$\begin{aligned}
\tilde{B}(x,y) &= \tilde{N}(x+y) - \tilde{N}(x) - \tilde{N}(y) \\
&= (x+y)\mathcal{C}(x+y) - x\mathcal{C}(x) - y\mathcal{C}(y) \\
&= ((a_1+va_2) + (a_3+va_4))\mathcal{C}((a_1+va_2) + (a_3+va_4)) - \\
&\quad - (a_1+va_2)(\overline{a_1} - va_2) - (a_3+va_4)(\overline{a_3} - va_4) \\
&= ((a_1+a_3)\overline{(a_1+a_3)} - \alpha(a_2+a_4)\overline{(a_2+a_4)}) - \\
&\quad - (a_1\overline{a_1} - \alpha a_2\overline{a_2}) - (a_3\overline{a_3} - \alpha a_4\overline{a_4}) \\
&= N(a_1+a_3) - N(a_1) - N(a_3) - \alpha(N(a_2+a_4) - N(a_2) - N(a_4)) \\
&= B(a_1,a_3) - \alpha B(a_2,a_4).
\end{aligned}$$

Supponiamo che $\tilde{N}(x) = 0$; poiché N è non degenere su A allora $B(a,b)$ è non degenere, ossia, $B(a,b) = 0$ per ogni $b \in A$, implica $a = 0$. Fissati a_3, $a_4 \in A$, segue che $\tilde{N}(x) = x\mathcal{C}(x)$ è non degenere su (A,α) se e solo se $\tilde{B}(x,y)$ è non degenere su (A,α), ossia $B(a_1,a_3) = 0$ se e solo se $a_1 = 0$ e $\alpha B(a_2,a_4) = 0$ se e solo se $a_2 = 0$. Allora $x = a_1 + va_2 = 0$ e quindi $\tilde{N}(x)$ è non degenere. $\square$

Ora, sia A un' algebra di composizione con norma N e sia B la forma bilineare simmetrica ad essa associata. Per il Lemma 2.1.3 esiste una involuzione, che continuiamo a denotare con

$$\begin{aligned} ^{-}\colon A &\to A \\ a &\mapsto \bar{a}, \end{aligned}$$

dove $\bar{a} := B(a,1)\mathbf{1} - a$ e tale che $N(a) = a\bar{a}$ e $T(a) = a + \bar{a}$ sono elementi di $\mathbb{K}$ per ogni $a \in A$. Questo vuol dire che possiamo applicare il processo di Cayley - Dickson all' algebra di composizione A. Il prossimo Lemma ci darà una condizione necessaria e sufficiente affinché l'algebra (A, α) che si ottiene, con norma $\tilde{N}(x) = x\bar{x}$ con $x \in (A, \alpha)$, sia ancora un' algebra di composizione.

Lemma 2.2.5. *Sia A un' algebra di composizione. L' algebra (A, α) è di composizione se e solo se l'algebra A è associativa.*

Dimostrazione. Abbiamo visto che (A, α) è una $\mathbb{K}$ - algebra con unità l' elemento $(1, 0)$ e, per il Lemma 2.2.4, la norma $\tilde{N}(x) = x\bar{x}$ è non degenere su (A, α). Allora per dimostrare che (A, α) è un' algebra di composizione basta dimostrare che la norma $\tilde{N}$ soddisfa la proprietà (ii) della Definizione 2.1 e che (A, α) è un' algebra di divisione. Dalla Dimostrazione del Lemma 2.2.4 si è visto che, se $x = a_1 + va_2 \in (A, \alpha)$, con $a_1, a_2 \in A$, allora

$$\tilde{N}(x) = x\bar{x} = N(a_1) - \alpha N(a_2). \tag{2.12}$$

Dunque, sia $y = a_3 + va_4 \in (A, \alpha)$ con $a_3, a_4 \in A$. Allora, per definizione del prodotto (2.11) e per la (2.12), si ha:

$$\begin{aligned} \tilde{N}(xy) - \tilde{N}(x)\tilde{N}(y) &= N(a_1a_3 + \alpha a_4\overline{a_2}) - \alpha N(\overline{a_1}a_4 + a_3a_2) - \\ &- (N(a_1) - \alpha N(a_2))(N(a_3) - \alpha N(a_4)) \\ &= N(a_1a_3) + \alpha^2 N(a_4\overline{a_2}) + \alpha B(a_1a_3, a_4\overline{a_2}) - \\ &- \alpha N(\overline{a_1}a_4) - \alpha N(a_3a_2) - \alpha B(\overline{a_1}a_4, a_3a_2) - \\ &- N(a_1)N(a_3) + \alpha N(a_1)N(a_4) + \alpha N(a_2)N(a_3) - \alpha^2 N(a_2)N(a_4). \end{aligned}$$

Ora osserviamo che $N(\bar{a}) = N(a)$ per ogni $a \in A$, infatti

$$N(\bar{a}) = N(B(a,1)\mathbf{1} - a) = N(T(a)\mathbf{1} - a) = T(a)^2 + N(a) - T(a)B(a,\mathbf{1}) = N(a),$$

inoltre, poiché A è un' algebra di composizione, $N(ab) = N(a)N(b)$ per ogni $a, b \in A$; da questo segue:

$$\tilde{N}(xy) - \tilde{N}(x)\tilde{N}(y) = \alpha B(a_1a_3, a_4\overline{a_2}) - \alpha B(\overline{a_1}a_4, a_3a_2).$$

Per la proprietà (b) del Lemma 2.1.1, ponendo $x_1 = a_1a_3, x_2 = a_4, y_1 = 1, y_2 = \overline{a_2}$, si ha:

$$\begin{aligned}
B(a_1a_3, a_4\overline{a_2}) &= B(a_1a_3 \cdot \mathbf{1}, a_4\overline{a_2}) \\
&= -B(a_1a_3 \cdot \overline{a_2}, a_4) + B(a_1a_3, a_4)B(\mathbf{1}, \overline{a_2}) \\
&= B(a_1a_3 \cdot (B(\mathbf{1}, \overline{a_2}) - \overline{a_2}), a_4) \\
&= B(a_1a_3 \cdot \overline{\overline{a_2}}, a_4) \\
&= B(a_1a_3 \cdot a_2, a_4).
\end{aligned}$$

Un conto analogo mostra che $B(\overline{a_1}a_4, a_3a_2) = B(a_4, a_1 \cdot a_3a_2)$, dunque

$$\tilde{N}(xy) - \tilde{N}(x)\tilde{N}(y) = \alpha B(a_1a_3 \cdot a_2, a_4) - \alpha B(a_4, a_1 \cdot a_3a_2);$$

poiché $\alpha \neq 0$ e B è non degenere, segue che la norma $\tilde{N}$ soddisfa la proprietà (ii) della Definizione 2.1 se e solo se A è associativa. Inoltre (A, α) è un' algebra di divisione, infatti siano x, $y \in (A, \alpha)$ tali che $xy = 0$. Allora si ha che: $\tilde{N}(xy) = \tilde{N}(x)\tilde{N}(y) = 0$; segue che $\tilde{N}(x) = 0$ oppure $\tilde{N}(y) = 0$; d' altra parte $\tilde{N}$ è non degenere, quindi $x = 0$ oppure $y = 0$. $\square$

Prima di realizzare concretamente le algebre di composizione con il processo di Cayley - Dickson, occorre dimostrare la seguente

Proposizione 2.2.6. *Sia $\mathbb{K}$ un campo di caratteristica diversa da 2 e sia A una $\mathbb{K}$ - algebra con unità $\mathbf{1}$ e con involuzione $^-$ definita da $\bar{a} := B(\mathbf{1}, a)\mathbf{1} - a$. Sia (A, α) l' algebra ottenuta mediante il processo di Cayley - Dickson, allora valgono le seguenti:*

1. *Se A è commutativa e $^- = id_A$ allora (A, α) è commutativa.*

2. *Se A è associativa e commutativa allora (A, α) è associativa.*

3. (A, α) *è associativa alternante se e solo se* A *è associativa.*

Dimostrazione. Siano $x, y, z \in (A, \alpha)$ con $x = a_1 + va_2, y = a_3 + va_4, z = a_5 + va_6$ dove $a_i \in A$ per ogni $i = 1, \ldots, 6$.

1. Sia A commutativa con involuzione banale id_A. Per la Definizione (2.11) si ha:
   $xy = (a_1 + va_2)(a_3 + va_4) = (a_1a_3 + \alpha a_4a_2) + v(a_1a_4 + a_3a_2)$,
   mentre
   $yx = (a_3 + va_4)(a_1 + va_2) = (a_3a_1 + \alpha a_2a_4) + v(a_3a_2 + a_1a_4)$.
   Poiché A è commutativa, segue che $xy = yx$.

2. Sia A associativa e commutativa. Per dimostrare che (A, α) è associativa bisogna mostrare che l'associatore di tutti i suoi elementi è nullo. Ricordiamo che $[x, y, z] = (xy)z - x(yz)$; allora per definizione del prodotto (2.11) si ha:
   $(xy)z = ((a_1a_3 + \alpha a_4\overline{a_1}) + v(\overline{a_1}a_4 + a_3a_2))(a_5 + va_6)$

   $$\begin{aligned} &= (a_1a_3)a_5 + \alpha(a_4\overline{a_2})a_5 + \alpha a_6(\overline{a_2}\ \overline{a_3}) + \alpha a_6(\overline{a_4}a_1) + \\ &\quad + v((\overline{a_3}(\overline{a_1}a_6) + \alpha(a_2\overline{a_4})a_6 + a_5(\overline{a_1}a_4) + a_5(a_3a_2)), \end{aligned}$$

   mentre
   $x(yz) = (a_1 + va_2)((a_3a_5 + \alpha a_6\overline{a_4}) + v(\overline{a_3}a_6 + a_5a_4))$

   $$\begin{aligned} &= a_1(a_3a_5) + \alpha a_1(a_6\overline{a_4}) + \alpha(\overline{a_3}a_6)\overline{a_2} + \alpha(a_5a_4)\overline{a_2} + \\ &\quad + v((\overline{a_1}(\overline{a_3}a_6) + \overline{a_1}(a_5a_4) + (a_3a_5)a_2 + \alpha(a_6\overline{a_4})a_2). \end{aligned}$$

   Poiché A è associativa e commutativa segue che $(xy)z = x(yz)$.

3. Supponiamo che (A, α) sia un' algebra associativa alternante e dimostriamo che A è associativa ossia $(ab)c = a(bc)$ per ogni $a, b, c \in A$. Osserviamo che valgono le seguenti relazioni:

   $$\begin{gathered} (va)b = v(ba) \\ b(va) = v(\bar{b}a). \end{gathered}$$

   Infatti, per definizione del prodotto (2.10) e poiché $A' \cong A$, si ha:
   $(va)b = ((0, 1)(a, 0))(b, 0) = (0, a)(b, 0) = (0, ba) = v(ba)$

$b(va) = (b,0)((0,1)(a,0)) = (b,0)(0,a) = v(\bar{b}a)$.
Allora, per le Definizioni 2.5, 2.6 si ha che:

$$\begin{aligned}
0 &= [va,b,c] + [b,va,c] \\
&= ((va)b)c - (va)(bc) + (b(va))c - b((va)c) \\
&= (v(ba))c - (va)(bc) + (v(\bar{b}a))c - b(v(ca)) \\
&= v(c(ba)) - v((bc)a) + v(c(\bar{b}a)) - v(\bar{b}(ca)) \\
&= v(c(ba) - (bc)a + c(\bar{b}a) - \bar{b}(ca)) \\
&= v(c((b+\bar{b})a) - (b+\bar{b})(ca) - ((bc)a + b(ca)) \\
&= v(T(b)(ca) - T(b)(ca) - [b,c,a]) \\
&= -v[b,c,a].
\end{aligned}$$

Dall' Osservazione 22 segue che A è un' algebra associativa.
Viceversa, supponiamo che A sia associativa; per l' Osservazione 23 occorre dimostrare $[x,x,y] = [x,y,y] = [x,y,x] = 0$. Per la Definizione 2.5 si ha:

$$\begin{aligned}
[x,x,y] &= (xx)y - x(xy) \\
&= ((a_1+va_2)(a_1+va_2))(a_3+va_4) - (a_1+va_2)((a_1+va_2)(a_3+va_4)) \\
&= ((a_1a_1 + \alpha a_2\overline{a_2}) + v(\overline{a_1}a_2 + a_1a_2))(a_3+va_4) - \\
&\quad - (a_1+va_2)((a_1a_3 + \alpha a_4\overline{a_2})(\overline{a_1}a_4 + a_3a_2)) \\
&= (a_1a_1)a_3 + \alpha(a_2\overline{a_2})a_3 + \alpha a_4(\overline{a_2}a_1) + \alpha a_4(\overline{a_2}\ \overline{a_1}) + \\
&\quad + v((\overline{a_1}\ \overline{a_1})a_4 + \alpha(a_2\overline{a_2})a_4 + (a_3\overline{a_1})a_2 + (a_3a_1)a_2) - \\
&\quad - a_1(a_1a_3) - \alpha a_1(a_4\overline{a_2}) - \alpha\overline{a_1}(a_4\overline{a_2}) - \alpha(a_2\overline{a_2}) - \\
&\quad - v(\overline{a_1}(\overline{a_1}a_4) + \overline{a_1}(a_3a_2) + a_1(a_3a_2) + \alpha(a_2\overline{a_2})a_4) \\
&= (a_1a_1)a_3 + \alpha N(a_2)a_3 + \alpha a_4\overline{a_2}(a_1 + \overline{a_1}) + \\
&\quad + v((\overline{a_1}\ \overline{a_1})a_4 + \alpha N(a_2)a_4 + a_3(a_1+\overline{a_1})a_2) - \\
&\quad - a_1(a_1a_3) - \alpha(a_1+\overline{a_1})(a_4\overline{a_2}) - \alpha N(a_2)a_3 - \\
&\quad - v(\overline{a_1}(\overline{a_1}a_4) + (\overline{a_1}+a_1)(a_3a_2) + \alpha N(a_2)a_4).
\end{aligned}$$

Poiché A è associativa e $a_1 + \overline{a_1} = T(a_1)$ segue che $[x, x, y] = 0$. Un conto analogo mostra che $[x, y, y] = [x, y, x] = 0$, quindi (A, α) è un' algebra associativa alternante.

$\square$

Ora siamo in grado di costruire, mediante la procedura di Cayley - Dickson, le nostre algebre di composizione. Dunque, sia A un' algebra di composizione su $\mathbb{R}$; per il Teorema 2.2.2, si ha che l'algebra A è isomorfa ad una delle seguenti quattro: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$. Supponiamo $A = \mathbb{R}$ e siano $\alpha = i^2 = -1 \in \mathbb{R}$, $^- = id_{\mathbb{R}}$. Consideriamo l' insieme

$$(\mathbb{R}, i^2) = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$$

con l' usuale struttura di $\mathbb{R}$ - spazio vettoriale. Se definiamo

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - d\bar{b}, \bar{a}d + bc), \tag{2.13}$$

otteniamo un prodotto bilineare, quindi $((\mathbb{R}, i^2), \cdot)$ è una $\mathbb{R}$ - algebra con unità $(1, 0)$. Sia $v = (0, 1)$. Si ha che $v^2 = i^2(1, 0)$, dunque, per quanto visto nella costruzione dell' algebra generale (A, α), $((\mathbb{R}, i^2), \cdot) = \mathbb{R} \oplus v\mathbb{R}$. Di conseguenza un elemento $x \in ((\mathbb{R}, i^2), \cdot)$ è della forma $x = a + vb = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$, e il prodotto (2.13) assume la forma:

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - d\bar{b}) + (\bar{a}d + cb)i. \tag{2.14}$$

Si ha $((\mathbb{R}, i^2), \cdot) = \mathbb{C}$.
Ora, fissato $z = a + ib \in \mathbb{C}$, con $a, b \in \mathbb{R}$, denotiamo con

$$\begin{aligned} ^-\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \bar{z} \end{aligned}$$

il coniugio definito da $\bar{z} = a - ib$. Poiché $\mathbb{R}$ è un' algebra di composizione associativa, commutativa e con involuzione banale, per il Lemma 2.2.5 e per la Proposizione 2.2.6, segue che $\mathbb{C}$ è un' algebra di composizione associativa e commutativa. Si noti che nel passare da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ si perde la proprietà che l'involuzione sia quella banale. In particolare, se consideriamo l' applicazione $\Phi : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ definita $\Phi((a,b)) = a+ib$, allora $\mathbb{C} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ come $\mathbb{R}$ - spazi vettoriali. In realtà Φ è un isomorfismo di algebre e per mostrarlo basta mostrare che Φ preserva il prodotto (2.13). Per definizione di tale prodotto,

$$\Phi((a,b)(c,d)) = \Phi(ac - d\bar{b}, \bar{a}d + bc),$$

siccome $a, b \in \mathbb{R}$, $\bar{a} = a$, $\bar{b} = b$,

$$\Phi((a,b)(c,d)) = \Phi(ac - db, ad + bc),$$

per definizione di Φ e del prodotto (2.14),

$$\Phi((a,b)(c,d)) = (ac - db) + (ad + bc)i = (a + ib)(c + id).$$

Dunque,

$$\Phi((a,b)(c,d)) = \Phi(a,b)\Phi(c,d).$$

In maniera del tutto analoga, prendiamo $A = \mathbb{C}$ e siano $\alpha = j^2 = i^2 = -1 \in \mathbb{R}$, $\bar{}: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ l'involuzione definita da $\bar{z} = \overline{a + ib} = a - ib$ con $z \in \mathbb{C}$. Consideriamo l' insieme

$$(\mathbb{C}, j^2) = \{(z,w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}\}$$

con l' usuale struttura di $\mathbb{R}$ - spazio vettoriale. Se definiamo il prodotto

$$(z,w) \cdot (s,t) = (zs - t\overline{w}, \overline{z}t + ws), \tag{2.15}$$

questo è bilineare, quindi $((\mathbb{C}, j^2), \cdot)$ è una $\mathbb{R}$ - algebra con unità l'elemento $(1,0)$. Denotiamo con $v = (0,1)$. Si ha che $v^2 = j^2(1,0)$, quindi $(\mathbb{C}, j^2) = \mathbb{C} \oplus v\mathbb{C}$ e di conseguenza un elemento $x \in (\mathbb{C}, j^2)$ è della forma $x = z + wj = a + bi + (c + di)j =$ $= a + bi + cj + dk$, con $k = ij$. In questo modo il prodotto (2.15) diventa:

$$(z + jw) \cdot (s + jt) = (zs - t\overline{w}) + (\overline{z}t + sw)j. \tag{2.16}$$

Dunque $((\mathbb{C}, j^2), \cdot) := \mathbb{H}$.
Ora, fissato $q \in \mathbb{H}$ denotiamo con

$$\begin{aligned} \bar{}: \mathbb{H} &\to \mathbb{H} \\ q &\mapsto \bar{q}, \end{aligned}$$

l' applicazione definita da $\bar{q} = \overline{z + jw} = z - jw$ e quest' ultima, per il Lemma 2.2.4, è un' involuzione. Inoltre, poiché $\mathbb{C}$ è un' algebra di composizione associativa e commutativa, per il Lemma 2.2.5 e per la Proposizione 2.2.6, si ha che $\mathbb{H}$ è un' algebra di composizione associativa. Dunque nel passare dall' algebra $\mathbb{C}$ all' algebra $\mathbb{H}$ il prodotto non soddisfa più la proprietà commutativa. In particolare, un conto analogo a quanto fatto per $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, mostra che l' applicazione, che denotiamo sempre con $\Phi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{H}$ e definita da $\Phi((z, w)) = z + jw$, con $z, w \in \mathbb{C}$, è un isomorfismo di algebre.
Ora prendiamo $A = \mathbb{H}$ e siano $\alpha = k^2 = -1 \in \mathbb{R}$, $^- : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ l'involuzione definita da $\bar{q} = \overline{z + jw} = z - jw$. Consideriamo l' insieme

$$(\mathbb{H}, k^2) = \{(q, p) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}\}$$

con l' usuale struttura di $\mathbb{R}$ - spazio vettoriale. Se definiamo il prodotto

$$(q, p) \cdot (m, n) = (qm - n\bar{p}, \bar{q}n + pm), \tag{2.17}$$

questo è bilineare e quindi $((\mathbb{H}, k^2), \cdot)$ è una $\mathbb{R}$ - algebra con unità l'elemento $(1, 0)$. Sia $v = (0, 1)$. Si ha che $v^2 = k^2(1, 0)$, dunque $(\mathbb{H}, k^2) = \mathbb{H} \oplus v\mathbb{H}$ e di conseguenza un elemento $x \in (\mathbb{H}, k^2)$ ha la forma $x = q + kp = a + bi + cj + dk + k(a^{'} + b^{'}e + c^{'}f + d^{'}g)$. In questo modo il prodotto nell' algebra $(\mathbb{H}, k^2)$ diventa:

$$(q + kp) \cdot (n + km) = (qn - m\bar{p}) + (\bar{q}m + np)k. \tag{2.18}$$

Quindi $((\mathbb{H}, k^2), \cdot) := \mathbb{O}$.
Ora, fissato $o \in \mathbb{O}$, denotiamo con

$$\begin{gathered} ^- : \mathbb{O} \to \mathbb{O} \\ o \mapsto \bar{o} \end{gathered}$$

l' applicazione definita da $\bar{o} = \overline{q + kp} = q - kp$ e questa, per il Lemma 2.2.4, è ancora un' involuzione. Inoltre, poiché $\mathbb{H}$ è un' algebra di composizione associativa, per il Lemma 2.2.5 e per la Proposizione 2.2.6 segue che $\mathbb{O}$ è un' algebra di composizione associativa alternante. Quindi, nel passare dall' algebra $\mathbb{H}$ all' algebra $\mathbb{O}$, il prodotto non soddisfa più la proprietà associativa. In particolare, un conto analogo a quanto

fatto per $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, mostra che l' applicazione, che denotiamo ancora con $\Phi : \mathbb{H}\times\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{O}$ e definita da $\Phi((q,p)) = q + kp$, è un isomorfismo di algebre.
Infine, supponiamo che $A = \mathbb{O}$ e siano $\alpha = l^2 = -1 \in \mathbb{R}$, $^{-} : \mathbb{O} \longrightarrow \mathbb{O}$ l'involuzione definita da $\bar{o} = \overline{q + kp} = q - kp$. Consideriamo l' insieme

$$(\mathbb{O}, l^2) = \{(o, v) \in \mathbb{O} \times \mathbb{O}\}$$

con l' usuale struttura di $\mathbb{R}$ - spazio vettoriale. Se definiamo il prodotto

$$(o, v) \cdot (u, r) = (ou - r\overline{v}, \bar{o}r + vu), \tag{2.19}$$

tale prodotto è bilineare, quindi $((\mathbb{O}, l^2), \cdot)$ è una $\mathbb{R}$ - algebra con unità l'elemento $(1, 0)$. Denotiamo con $v = (0, 1)$. Si ha che $v^2 = l^2(1, 0)$, quindi $(\mathbb{O}, l^2) = \mathbb{O} \oplus l\mathbb{O}$ e di conseguenza un elemento $s \in (\mathbb{O}, l^2)$ è della forma $s = o + lv$, con $o, v \in \mathbb{O}$. Allora il prodotto (2.19) assume la forma

$$(o, v) \cdot (u, r) = (ou - r\overline{v}) + (\bar{o}r + uv)l, \tag{2.20}$$

questo è bilineare e quindi si ottiene una nuova algebra $((\mathbb{O}, l^2), \cdot) := \mathbb{S}$ detta **algebra dei sedenioni**. A differenza dei casi finora descritti, per il Lemma 2.2.5, $\mathbb{S}$ non è un' algebra di composizione perché $\mathbb{O}$ non è un' algebra associativa. Notiamo che questo non è in contraddizione con quanto affermato dal Teorema 2.2.2.

2.3 L' algebra delle Derivazioni di $\mathbb{O}$

Ora che si hanno a disposizione sia l'algebra degli ottonioni, sia le sue proprietà principali, siamo pronti per introdurre l'algebra delle derivazioni di $\mathbb{O}$ e lo scopo sarà mostrare che quest'algebra è isomorfa all'algebra di Lie di tipo eccezionale G_2. Abbiamo ricordato nel Capitolo 1 che, assegnata un'algebra A non necessariamente associativa, una derivazione dell'algebra A è un' applicazione lineare $D : A \longrightarrow A$ che verifica la regola di Leibniz (1.1). Abbiamo indicato con $Der(A)$ il sottospazio vettoriale di $End(A)$ costituito dalle derivazioni dell'algebra A; in particolare $Der(A)$ è una sottoalgebra di Lie di $gl(A)$ poiché il commutatore di due derivazioni è una derivazione. Prima di esaminare $Der(A)$ nel caso in cui l'algebra A è l'algebra degli ottonioni $\mathbb{O}$, facciamo la seguente:

Osservazione 24. Se $D \in Der(A)$, per la regola di Leibniz (1.1), si ha:
$D(1) = D(1 \cdot 1) = D(1) \cdot 1 + 1 \cdot D(1)$, ossia $D(1) = 0$. Poiché D è lineare segue che $D(\alpha) = \alpha D(1) = 0$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ora supponiamo $A = \mathbb{O}$ e consideriamo l'insieme $Der(\mathbb{O})$; dimostriamo innanzitutto due risultati che riguardano la traccia di una derivazione $D \in Der(\mathbb{O})$ e la sua immagine mediante l' involuzione $\bar{}$ definita nell' Osservazione 20. Sia T la traccia su $\mathbb{O}$ definita nell' Osservazione 21; vale la seguente:

Proposizione 2.3.1. *Sia $D \in Der(\mathbb{O})$. Allora $T(D(x)) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{O}$.*

Dimostrazione. Siano $x \in \mathbb{O}$, $D \in Der(\mathbb{O})$; consideriamo la base dell' algebra $\mathbb{O}$ introdotta nella Definizione 2.3, ossia $\mathcal{B} = \{1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$. Quindi, se $x = a_0 + \sum_{i=1}^{7} a_i e_i$, allora $D(x) = D\left(a_0 + \sum_{i=1}^{7} a_i e_i\right) = D(a_0) + \sum\limits_{i=1}^{7} D(a_i e_i)$.
Per l' Osservazione 24

$$D(x) = \sum_{i=1}^{7} a_i D(e_i),$$

quindi

$$T(D(x)) = T\left(\sum_{i=1}^{7} a_i D(e_i)\right) = \sum_{i=1}^{7} a_i T(D(e_i)).$$

Mostreremo che $T(D(e_i)) = 0$ per ogni $i \in I$, con $I = \{1, \dots, 7\}$. Fissato $i \in I$, definiamo $D(e_i) = a_{i_0} + \sum_{j=1}^{7} a_{i_j} e_j$, con $a_{i_j} \in \mathbb{R}$. Per la regola di Leibniz (1.1)

$$D(e_i^2) = D(e_i e_i) = e_i D(e_i) + D(e_i) e_i,$$

da cui segue che,

$$\begin{aligned} D(e_i^2) &= e_i \left(a_{i_0} + \sum_{j=1}^{7} a_{i_j} e_j\right) + \left(a_{i_0} + \sum_{j=1}^{7} a_{i_j} e_j\right) e_i \\ &= 2a_{i_0} e_i + \sum_{j=1}^{7} a_{i_j} e_i e_j + \sum_{j=1}^{7} a_{i_j} e_j e_i \end{aligned}$$

$$= 2a_{i_0}e_i + a_{i_i}e_i^2 + \sum_{j=1, j\neq i}^{7} a_{i_j}e_ie_j + a_{i_i}e_i^2 + \sum_{j=1, j\neq i}^{7} a_{i_j}e_je_i,$$

poiché $e_i^2 = -1$ per ogni $i \in I$, ed $e_ie_j = -e_je_i$ per ogni $i \neq j$, si ha:

$$D(e_i^2) = 2a_{i_0}e_i - 2a_{i_i}.$$

D'altra parte, essendo $e_i^2 = -1$ per ogni $i \in I$,

$$D(e_i^2) = D(-1) = 0,$$

quindi

$$2a_{i_0}e_i - 2a_{i_i} = 0$$

Siccome questa è una combinazione lineare di elementi di $\mathcal{B}$, questo implica $a_{i_0} =$ $= a_{i_i} = 0$. Quindi $T(D(e_i)) = 2a_{i_0} = 0$. □

Osservazione 25. Denotiamo con $\mathbb{O}' = \{x \in \mathbb{O} \mid T(x) = 0\}$; in particolare $\mathbb{O}'$ è una sottoalgebra di $\mathbb{O}$.

Proposizione 2.3.2. *Sia $D \in Der(\mathbb{O})$. Se $^{-}: \mathbb{O} \longrightarrow \mathbb{O}$ denota l' involuzione su $\mathbb{O}$ definita nell' Osservazione 20, allora $D(\overline{x}) = \overline{D(x)}$ per ogni $x \in \mathbb{O}$.*

Dimostrazione. Sia $x \in \mathbb{O}$; per la Proposizione 2.3.1, $D(x) \in \mathbb{O}'$, dunque $\overline{D(x)} =$ $= -D(x)$. Poiché $x \in \mathbb{O}$, $x = a_0 + \sum_{i=1}^{7} a_ie_i$, quindi

$$D(\overline{x}) = D\left(\overline{a_0 + \sum_{i=1}^{7} a_ie_i}\right) = D\left(a_0 - \sum_{i=1}^{7} a_ie_i\right) = D(a_0) - \sum_{i=1}^{7} a_iD(e_i).$$

Per l' Osservazione 24,

$$D(\overline{x}) = -\sum_{i=1}^{7} a_iD(e_i) = -D(x).$$

□

Il passo successivo è vedere che ogni derivazione di $Der(\mathbb{O})$ è ottenuta come estensione di una derivazione dell'algebra dei quaternioni $\mathbb{H}$; per fare questo si rende necessaria la seguente:

Osservazione 26. Sia $\mathcal{B} = \{1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ la base dell'algebra $\mathbb{O}$ introdotta nella Definizione 2.3; dalle regole del prodotto su $\mathbb{O}$ descritte nella Tabella 2.1, è facile verificare che il sottospazio vettoriale $\mathcal{S} = span\,\{1, e_1, e_2, e_3\}$ è una sottoalgebra di $\mathbb{O}$ (di dimensione 4), infatti $1 \cdot e_i = e_i$ per ogni $i = 1, 2, 3$, $e_1 \cdot e_2 = e_3$, $e_3 \cdot e_1 = e_2$, $e_2 \cdot e_3 = e_1$. D'altra parte, per il Teorema 2.2.2 , l'unica algebra di composizione di dimensione 4 è l'algebra dei quaternioni $\mathbb{H}$, dunque, se denotiamo con $\Psi : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{H}$ l' applicazione lineare definita da $\Psi(1) = 1$, $\Psi(e_1) = i$, $\Psi(e_2) = j$, $\Psi(e_3) = k$, poiché Ψ manda una base in una base, si ha che essa è un isomorfismo di spazi vettoriali; inoltre Ψ conserva il prodotto di Hamilton definito nell' Esempio 12, quindi Ψ è un isomorfismo di algebre. Analogamente, il sottospazio vettoriale $\mathcal{S}' = span\,\{1, e_1, e_4, e_5\}$ è una sottoalgebra di $\mathbb{O}$ (di dimensione 4), infatti $e_1 \cdot e_4 = e_5$, $e_5 \cdot e_1 = e_4$, $e_4 \cdot e_5 = e_1$. Allora, per il Teorema 2.2.2, l' applicazione $\Psi' : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathbb{H}$ definita da $\Psi'(1) = 1$, $\Psi'(e_1) = i$, $\Psi'(e_4) = j$, $\Psi'(e_5) = k$, è un isomorfismo di algebre. Un ragionamento analogo mostra che $\mathbb{O}$ contiene altre 5 sottoalgebre della forma

$$span\,\{1, e_i, e_j, e_k\} \text{ per } ijk = 426, 347, 167, 257, 356;$$

in particolare ognuna di queste sottoalgebre risulta essere isomorfa all' algebra dei quaternioni $\mathbb{H}$.

Osservazione 27. Osserviamo che la sottoalgebra $\mathcal{S} = span\,\{1, e_1, e_2, e_3\}$ e il vettore $e_4 \in \mathcal{B}$ generano $\mathbb{O}$ come algebra, infatti $e_1 \cdot e_4 = e_5$, $e_2 \cdot e_4 = -e_6$, $e_3 \cdot e_4 = e_7$. Se indichiamo con $Der(\mathcal{S})$ l' algebra delle derivazioni di $\mathcal{S}$, presa $D \in Der(\mathcal{S})$ e fissato $D(e_4) \in \mathbb{O}$, dal momento che $\mathcal{S}$ ed e_4 generano $\mathbb{O}$ come algebra, c' è un unico modo di estendere D ad una derivazione di $\mathbb{O}$ usando la regola di Leibniz e la linearità.

Il prossimo passo sarà mostrare che $Der(\mathbb{O})$ è un'algebra di Lie di dimensione 14 e successivamente, nel capitolo 3, dimostreremo che è semplice.

Osservazione 28. Notiamo che, per l' Osservazione 3, certamente $Der(\mathbb{O})$ è un' algebra di Lie.

Ora mostriamo che $Der(\mathbb{O})$ ha dimensione 14; per raggiungere tale scopo andremo ad esaminare la forma generale di una derivazione $D \in Der(\mathbb{O})$ e mostreremo che questa dipende esattamente da 14 variabili indipendenti.

Osservazione 29. Sia $D \in Der(\mathbb{O})$; per la Proposizione 2.3.1 si ha $T(D(x)) = 0$, ossia, per l' Osservazione 25, $D(x) \in \mathbb{O}'$ per ogni $x \in \mathbb{O}$. Siccome $x \in \mathbb{O}$ è arbitrario, segue che l' immagine di x mediante D è della forma $D(x) = \sum_{i=1}^{7} a_i e_i$; d' altra parte, poiché D è lineare, essa è univocamente determinata dalle sue immagini sugli elementi della base $\mathcal{B} = \{1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ dell' algebra $\mathbb{O}$ introdotta nella Definizione 2.3. Notiamo inoltre che, dalla Tabella 2.1, si hanno le relazioni $e_3 = e_1e_2$, $e_5 = e_1e_4$, $e_6 = e_4e_2$, $e_7 = e_3e_4$. Dunque, se definiamo D sui vettori e_1, e_2, e_4, usando la regola di Leibniz (1.1), possiamo estendere D ai vettori rimanenti. Quindi definiamo:

$$D(e_1) = \sum_{i=1}^{7} \alpha_i e_i, \tag{2.21}$$

$$D(e_2) = \sum_{j=1}^{7} \beta_j e_j, \tag{2.22}$$

$$D(e_4) = \sum_{k=1}^{7} \gamma_k e_k. \tag{2.23}$$

Usando la regola di Leibniz (1.1) si ha:

$$D(e_3) = D(e_1e_2) = D(e_1)e_2 + e_1D(e_2) \tag{2.24}$$

$$D(e_5) = D(e_1e_4) = D(e_1)e_4 + e_1D(e_4) \tag{2.25}$$

$$D(e_6) = D(e_4e_2) = D(e_4)e_2 + e_4D(e_2) \tag{2.26}$$

$$D(e_7) = D(e_3e_4) = D(e_3)e_4 + e_3D(e_4) = (D(e_1)e_2 + e_1D(e_2))e_4 + e_1e_2D(e_4) \tag{2.27}$$

	$D(e_1)$	$D(e_2)$	$D(e_3)$	$D(e_4)$	$D(e_5)$	$D(e_6)$	$D(e_7)$
1	0	0	$-\alpha_2-\beta_1$	0	$-\alpha_4-\gamma_1$	$-\beta_4-\gamma_2$	$\alpha_6+\beta_5-\gamma_3$
e_1	α_1	β_1	$-\alpha_3$	γ_1	$-\alpha_5$	$\beta_5-\gamma_3$	$-\alpha_7-\beta_4-\gamma_2$
e_2	α_2	β_2	$-\beta_3$	γ_2	$\alpha_6-\gamma_3$	$-\beta_6$	$\alpha_4-\beta_7+\gamma_1$
e_3	α_3	β_3	$\alpha_1+\beta_2$	γ_3	$\alpha_7+\gamma_2$	$-\beta_7+\gamma_1$	$\alpha_5-\beta_6$
e_4	α_4	β_4	$-\alpha_6-\gamma_5$	γ_4	$-\gamma_5$	$-\gamma_6$	$-\alpha_2-\beta_1-\gamma_7$
e_5	α_5	β_5	$\alpha_7+\beta_4$	γ_5	$\alpha_1+\gamma_4$	$-\beta_1+\gamma_7$	$-\alpha_3-\gamma_6$
e_6	α_6	β_6	$\alpha_4-\beta_7$	γ_6	$-\alpha_2-\gamma_7$	$\beta_2+\gamma_4$	$\beta_3+\gamma_5$
e_7	α_7	β_7	$-\alpha_5+\beta_6$	γ_7	$\alpha_3+\gamma_6$	$-\beta_3-\gamma_5$	$\alpha_1+\beta_2+\gamma_4$

Tabella 2.2: Forma generale di una derivazione sugli ottonioni

Usando le relazioni (2.21), (2.22), (2.23), si ottengono i valori assunti da una derivazione $D \in Der(\mathbb{O})$ sui vettori di $\mathcal{B}$ (Tabella 2.2); le colonne della Tabella 2.2 contengono le coordinate dei vettori $D(e_i)$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$, per $i = 1, \ldots, 7$. In essa compaiono 21 variabili α_i, β_j, γ_k, per i, j, $k = 1, \ldots, 7$; dunque, per mostrare che $Der(\mathbb{O})$ ha dimensione 14 bisogna provare che solo 14 di queste variabili sono indipendenti.

Proposizione 2.3.3. *Sia $D \in Der(\mathbb{O})$ e consideriamo le relazioni (2.21), (2.22), (2.23), che definiscono D in maniera completa. Risulta che:*

$$\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_4 = \beta_1 + \alpha_2 = \gamma_1 + \alpha_4 = \gamma_2 + \beta_4 = \alpha_6 + \beta_5 - \gamma_3 = 0.$$

Dimostrazione. Dividiamo la dimostrazione in 3 passi, mostrando che:

1) $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_4 = 0$;

2) $\beta_1 + \alpha_2 = \gamma_1 + \alpha_4 = \gamma_2 + \beta_4 = 0$;

3) $\alpha_6 + \beta_5 - \gamma_3 = 0$.

1) Consideriamo $D(e_1e_1)$; poiché $e_1^2 = -1$, per l' Osservazione 24, si ha $D(e_1^2) =$
$= D(-1) = 0$; quindi, per la (1.1) e per la (2.21)
$0 = D(e_1^2) = D(e_1e_1) = e_1D(e_1) + D(e_1)e_1 = e_1 \left(\sum\limits_{i=1}^{7} \alpha_i e_i \right) + \left(\sum\limits_{i=1}^{7} \alpha_i e_i \right) e_1 =$

$$= \ -\alpha_1 + \sum_{i=2}^{7} \alpha_i e_1 e_i - \alpha_1 + \sum_{i=2}^{7} \alpha_i e_i e_1,$$

poiché $e_i e_j = -e_j e_i$ per ogni $i \neq j$,

$$0 = -\alpha_1 + \sum_{i=2}^{7} \alpha_i e_1 e_i - \alpha_1 - \sum_{i=2}^{7} \alpha_i e_1 e_i = -2\alpha_1 \Longrightarrow \alpha_1 = 0.$$

Per mostrare che $\beta_2 = \gamma_4 = 0$ si procede in maniera del tutto analoga considerando, rispettivamente, $D(e_2 e_2)$, $D(e_4 e_4)$.

2) Sia $x = e_1 e_2 \in \mathbb{O}$ e consideriamo $D(T(e_1 e_2))$; per l' Osservazione 24 si ha $D(T(e_1 e_2)) = 0$ cioè, per definizione di traccia, $D(e_1 e_2 + \overline{e_1 e_2}) = 0$. Quindi, usando la linearità di D e la proprietà (i) della Definizione 1.3,
$0 = D(e_1 e_2 + \overline{e_1 e_2})$

$$= D(e_1 e_2) + D((\overline{e_2})(\overline{e_1}))$$
$$= D(e_1)e_2 + e_1 D(e_2) + D(\overline{e_2})\overline{e_1} + \overline{e_2} D(\overline{e_1}).$$

Per la proposizione 2.3.2

$$0 = D(e_1)e_2 + e_1 D(e_2) + \overline{D(e_2)}\overline{e_1} + \overline{e_2}\overline{D(e_1)}.$$

Ora ricordiamo che, per la definizione di involuzione sull'algebra $\mathbb{O}$, $\overline{e_i} = -e_i$, per ogni $i \neq 0$, e che $\overline{D(x)} = -D(x)$, quindi
$0 = D(e_1)e_2 + e_1 D(e_2) + \overline{D(e_2)}\overline{e_1} + \overline{e_2}\overline{D(e_1)}$

$$= D(e_1)e_2 + e_1 D(e_2) + D(e_2)e_1 + e_2 D(e_1).$$

Sostituendo le relazioni (2.21) e (2.22) si ottiene

$$\left(\sum_{i=1}^{7} \alpha_i e_i\right) e_2 + e_1 \left(\sum_{j=1}^{7} \beta_j e_j\right) + \left(\sum_{j=1}^{7} \beta_j e_j\right) e_1 + e_2 \left(\sum_{i=1}^{7} \alpha_i e_i\right) = 0,$$

poiché $e_i^2 = -1$

$$-\alpha_2 + \sum_{i=1, i\neq 2}^{7} \alpha_i e_i e_2 - \beta_1 + \sum_{j=1, j\neq 1}^{7} \beta_j e_1 e_j - \beta_1 + \sum_{j=1, j\neq 1}^{7} \beta_j e_j e_1 - \alpha_2 + \sum_{i=1, i\neq 2}^{7} \alpha_i e_2 e_i = 0,$$

cioè, poiché $e_i e_j = -e_j e_i$, per ogni $i \neq j$,

$$-2\beta_1 - 2\alpha_2 = 0 \Longrightarrow \alpha_2 + \beta_1 = 0.$$

Procedendo in modo analogo si dimostra che $\gamma_1+\alpha_4 = \gamma_2+\beta_4 = 0$, considerando, rispettivamente, $D(T(e_1e_4))$ e $D(T(e_2e_4))$.

3) Consideriamo $D(T(e_3e_4)) = 0$, quindi

$$\begin{aligned}
0 &= D(e_3e_4 + \overline{e_3e_4}) \\
&= D(e_3e_4) + D((\overline{e_4})(\overline{e_3})) \\
&= D(e_3)e_4 + e_3D(e_4) + D(\overline{e_4})\overline{e_3} + \overline{e_4}D(\overline{e_3}) \\
&= D(e_3)e_4 + e_3D(e_4) + \overline{D(e_4)}\overline{e_3} + \overline{e_4}\overline{D(e_3)}.
\end{aligned}$$

Usando la definizione di involuzione $\bar{\ }$, si ha

$$D(e_3)e_4 + e_3D(e_4) + D(e_4)e_3 + e_4D(e_3) = 0.$$

Dal momento che $e_3 = e_1e_2$

$$\begin{aligned}
0 &= D(e_1e_2)e_4 + e_3D(e_4) + D(e_4)e_3 + e_4D(e_1e_2) \\
&= (D(e_1)e_2 + e_1D(e_2))e_4 + e_1e_2D(e_4) + D(e_4)e_1e_2 + e_4(D(e_1)e_2 + e_1D(e_2)).
\end{aligned}$$

Sostituendo le relazioni (2.21), (2.22), (2.23), e usando l'anticommutatività del prodotto sull'algebra $\mathbb{O}$, un conto analogo a quello fatto per $\beta_1+\alpha_2$, mostra che $\alpha_6 + \beta_5 - \gamma_3 = 0$.

$\square$

Sostituendo nella Tabella 2.2 i valori dei coefficienti ottenuti dalla Proposizione 2.3.3, possiamo realizzare una nuova tabella in cui il comportamento di una derivazione $D \in Der(\mathbb{O})$ sugli elementi di $\mathcal{B}$ risulta descritto soltanto mediante 14 variabili. Questo vuol dire che $dim(Der(\mathbb{O})) \leq 14$. Per dimostrare che tale dimensione è esattamente 14 basta mostrare che le relazioni raccolte nella Tabella 2.3 sono sufficienti per definire una derivazione di $\mathbb{O}$.

	$D(e_1)$	$D(e_2)$	$D(e_3)$	$D(e_4)$	$D(e_5)$	$D(e_6)$	$D(e_7)$
1	0	0	0	0	0	0	0
e_1	0	$-\alpha_2$	$-\alpha_3$	$-\alpha_4$	$-\alpha_5$	$-\alpha_6$	$-\alpha_7$
e_2	α_2	0	$-\beta_3$	$-\beta_4$	$-\beta_5$	$-\beta_6$	$-\beta_7$
e_3	α_3	β_3	0	$\alpha_6+\beta_5$	$-\alpha_7-\beta_4$	$-\alpha_4+\beta_7$	$\alpha_5-\beta_6$
e_4	α_4	β_4	$-\alpha_6-\beta_5$	0	$-\gamma_5$	$-\gamma_6$	$-\gamma_7$
e_5	α_5	β_5	$\alpha_7+\beta_4$	γ_5	0	$\gamma_7+\alpha_2$	$-\alpha_3-\gamma_6$
e_6	α_6	β_6	$\alpha_4-\beta_7$	γ_6	$-\alpha_2-\gamma_7$	0	$\beta_3+\gamma_5$
e_7	α_7	β_7	$-\alpha_5+\beta_6$	γ_7	$\alpha_3+\gamma_6$	$-\beta_3-\gamma_5$	0

Tabella 2.3: Forma di derivazioni su $\mathbb{O}$ linearmente indipendenti

Teorema 2.3.4. *Ogni applicazione $D : \mathbb{O} \longrightarrow \mathbb{O}$ ottenuta estendendo per linearità la definizione data dalla Tabella 2.3 sugli elementi di $\mathcal{B}$ soddisfa la regola di Leibniz (1.1).*

Dimostrazione. Osserviamo che ci sono almeno due modi per dimostrare il teorema: il primo modo consiste nel verificare direttamente che $D(e_ie_j) = D(e_i)e_j+e_iD(e_j)$, per $i \neq j$. Preferiamo usare una strada alternativa: scegliamo un' applicazione arbitraria $D : \mathbb{O} \longrightarrow \mathbb{O}$ ottenuta estendendo per linearità la definizione data dalla Tabella 2.3 sugli elementi di $\mathcal{B}$; per mostrare che $D \in Der(\mathbb{O})$ costruiremo tre derivazioni E, F, G, sull' algebra dei quaternioni $\mathbb{H}$ e, usando l' Osservazione 27, le estenderemo per linearità sull' algebra $\mathbb{O}$. Infine mostreremo che la somma di queste tre derivazioni su $\mathbb{O}$ è esattamente l' applicazione D e quindi, poiché $Der(\mathbb{O})$ è un' algebra, segue che $D \in Der(\mathbb{O})$. Iniziamo a definire la prima applicazione lineare E nel modo seguente:

$$E(e_1) = \alpha_2e_2 + \alpha_3e_3$$
$$E(e_2) = -\alpha_2e_1$$
$$E(e_3) = e_1E(e_2) + E(e_1)e_2 = -\alpha_3e_1$$
$$E(e_4) = \gamma_5e_5 + \gamma_6e_6 + \gamma_7e_7$$
$$E(a) = 0 \text{ per ogni } a \in \mathbb{R};$$

per l' Osservazione 26 sappiamo che $\mathcal{S} = \{1, e_1, e_2, e_3\}$ è una sottoalgebra di $\mathbb{O}$ isomorfa all' algebra $\mathbb{H}$, mediante l'isomorfismo $\Psi : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{H}$ definito da $\Phi(1) = 1$, $\Phi(e_1) = i$,

$\Phi(e_2) = j$, $\Phi(e_3) = k$; dunque sarà sufficiente mostrare che $E \in Der(\mathcal{S})$ e poi, definendo $E(e_4) = qe_4$, con $q = \gamma_5 e_1 - \gamma_6 e_2 + \gamma_7 e_3 \in \mathcal{S}$, e usando l' Osservazione 27, E si estende ad una derivazione su $\mathbb{O}$. Poiché per costruzione E è lineare, occorre soltanto dimostrare che E soddisfa la regola di Leibniz (1.1) ossia $E(nm) = E(n)m + nE(m)$ per ogni $n, m \in \mathbb{H}$; d'altra parte, poiché E è lineare e n, m si possono scrivere come combinazione lineari degli elementi di $\mathcal{S}$, basta mostrare che E soddisfa la (1.1) sugli elementi di $\mathcal{S}$ e poi estendiamo per linearità ad un arbitrario elemento $m \in \mathbb{H}$ della forma $m = m_0 + m_1 e_1 + m_2 e_2 + m_3 e_3$, con $m_0, m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{R}$. Si ha:

$$E(e_1 e_2) = E(e_3) = e_1 E(e_2) + E(e_1) e_2 = -\alpha_3 e_1,$$

$$E(e_1 e_3) = E(-e_2) = -E(e_2) = \alpha_2 e_1,$$

d' altra parte
$e_1 E(e_3) + E(e_1) e_3 = e_1(e_1 E(e_2) + E(e_1) e_2) + E(e_1) e_3 = \alpha_3 + \alpha_2 e_1 - \alpha_3 = \alpha_2 e_1$
Infine

$$E(e_2 e_3) = E(e_1) = \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3,$$

mentre
$e_2 E(e_3) + E(e_2) e_3 = e_2(e_1 E(e_2) + E(e_1) e_2) + E(e_2) e_3 = \alpha_3 e_3 + \alpha_2 e_2.$
In particolare per linearità di E si può estendere a tutta $\mathcal{S}$, dunque:

$$E(e_1 m) = E(m_0 e_1 + m_1 e_1 e_1 + m_2 e_1 e_2 + m_3 e_1 e_3)$$

per linearità di E

$$E(e_1 m) = E(m_0 e_1) + E(m_1 e_1 e_1) + E(m_2 e_1 e_2) + E(m_3 e_1 e_3),$$

per come è definito il prodotto nella Tabella 2.1

$$E(e_1 m) = E(m_0 e_1) + E(-m_1) + E(m_2 e_3) + E(-m_3 e_2),$$

poiché $E(a) = 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ e per linearità di E

$$E(e_1 m) = m_0 E(e_1) + m_2 E(e_3) - m_3 E(e_2),$$

per definizione di $E(e_1), E(e_2), E(e_3)$

$$E(e_1m) = m_0(\alpha_2e_2 + \alpha_3e_3) + m_2(-\alpha_3e_1) - m_3(-\alpha_2e_1),$$

per come è definito il prodotto nella Tabella 2.1

$$E(e_1m) = m_0\alpha_2e_2 + m_0\alpha_3e_3 - m_2\alpha_3e_1 + m_3\alpha_2e_1$$

D' altra parte per definizione di $E(e_1)$, si ha:

$$\begin{aligned}
E(e_1)m + e_1E(m) &= (\alpha_2e_2 + \alpha_3e_3)(m_0 + m_1e_1 + m_2e_2 + m_3e_3) + \\
&\quad + e_1E(m_0 + m_1e_1 + m_2e_2 + m_3e_3) \\
&= (\alpha_2e_2 + \alpha_3e_3)(m_0 + m_1e_1 + m_2e_2 + m_3e_3) + \\
&\quad + e_1(m_1E(e_1) + m_2E(e_2) + m_3E(e_3)) \\
&= m_0\alpha_2e_2 + m_0\alpha_3e_3 - m_1\alpha_2e_3 + m_1\alpha_3e_2 - \\
&\quad - m_2\alpha_2 - m_2\alpha_3e_1 + m_3\alpha_2e_1 - m_3\alpha_3 + \\
&\quad + m_1\alpha_2e_3 - m_1\alpha_3e_2 + m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3 \\
&= m_0\alpha_2e_2 + m_0\alpha_3e_3 - m_2\alpha_3e_1 + m_3\alpha_2e_1 \\
&= E(e_1m).
\end{aligned}$$

In particolare, se $\varphi : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ è un automorfismo tale che $\varphi(e_1) = e_2$, $\varphi(e_2) = e_3$ e $\varphi(e_3) = e_1$, allora, applicando tale automorfismo al conto appena eseguito, si ha che $E(e_2m) = e_2E(m)+E(e_2)m$ e, riapplicando l'automorfismo φ all' ultima uguaglianza, si ha che $E(e_3m) = e_3E(m) + E(e_3)m$. Questo vuol dire che $E \in Der(\mathcal{S})$, dunque, per l' Osservazione 27, definendo $E(e_4) = qe_4 = (\gamma_5e_1 - \gamma_6e_2 + \gamma_7e_3)e_4$, si ha che $E \in Der(\mathbb{O})$. Ora consideriamo $\mathcal{S}' = \{1, e_1, e_4, e_5\}$ come sottoalgebra di $\mathbb{O}$ isomorfa ad $\mathbb{H}$ e definiamo una seconda applicazione lineare nel seguente modo:

$$\begin{gathered}
F(e_1) = \alpha_4e_4 + \alpha_5e_5 \\
F(e_4) = -\alpha_4e_1 \\
F(e_5) = e_1F(e_4) + F(e_1)e_4 = -\alpha_5e_1 \\
F(e_2) = \beta_3e_3 + \beta_6e_6 + \beta_7e_7 \\
F(a) = 0 \text{ per ogni } a \in \mathbb{R}.
\end{gathered}$$

Per dimostrare che $F \in Der(\mathbb{O})$ si procede in modo analogo all' applicazione E,infatti si ha:

$$F(e_1e_4) = F(e_5) = e_1F(e_4) + F(e_1)e_4 = -\alpha_5e_1,$$

$$F(e_1e_5) = -F(e_4) = \alpha_4e_1,$$

e d'altra parte

$$e_1F(e_5) + F(e_1)e_5 = \alpha_5 + \alpha_4e_1 - \alpha_5 = \alpha_4e_1.$$

Infine

$$F(e_4e_5) = F(e_1) = \alpha_4e_4 + \alpha_5e_5,$$

mentre

$$e_4F(e_5) + F(e_4)e_5 = \alpha_5e_5 + \alpha_4e_4.$$

Un conto analogo a quanto visto per l' applicazione E mostra che

$$F(e_im) = e_iF(m) + F(e_i)m, \text{ per } i = 1, 4, 5, \text{ per ogni } m \in \mathbb{H}.$$

In tal caso l'estensione di F all' algebra $\mathbb{O}$ è definita da

$$F(e_2) = (\beta_3e_1 + \beta_6e_4 - \beta_7e_5)e_2 = \beta_3e_3 + \beta_6e_6 + \beta_7e_7.$$

Infine consideriamo $\mathcal{S}'' = \{1, e_1, e_6, e_7\}$ come sottoalgebra di $\mathbb{O}$ isomorfa all' algebra $\mathbb{H}$ e definiamo una terza applicazione lineare nel modo seguente:

$$\begin{gathered}
G(e_1) = \alpha_6e_6 + \alpha_7e_7 \\
G(e_2) = \beta_4e_4 + \beta_5e_5 \\
G(e_4) = -\beta_4e_2 + (\alpha_6 + \beta_5)e_3 \\
G(e_6) = e_4G(e_2) + G(e_4)e_2 \\
G(e_7) = e_3G(e_4) + G(e_3)e_4 = e_3G(e_4) + (e_1G(e_2) + G(e_1)e_2)e_4 \\
G(a) = 0 \text{ per ogni } a \in \mathbb{R}.
\end{gathered}$$

Analogamente alle applicazioni E, F, si mostra che G è una derivazione della sottoalgebra $\mathcal{S}''$ e la estendiamo all' algebra $\mathbb{O}$ mediante

$$G(e_2) + G(e_4) = (-\beta_4 e_6 + \beta_5 e_7)e_2 + (-\beta_4 e_6 - (\alpha_6 + \beta_5)e_3)e_4,$$

dunque $G \in Der(\mathbb{O})$. Da questo segue che $E, F, G \in Der(\mathbb{O})$ e, poiché $Der(\mathbb{O})$ è un sottospazio di $gl(\mathbb{O})$, si ha che $E + F + G \in Der(\mathbb{O})$. D'altra parte, dalla Tabella 2.3 si ha

$$\begin{aligned} D(e_1) &= \sum_{i=2}^{7} \alpha_i e_i \\ D(e_2) &= -\alpha_2 e_1 + \sum_{j=3}^{7} \beta_j e_j \\ D(e_4) &= -\alpha_4 e_1 - \beta_4 e_2 + (\alpha_6 + \beta_5)e_3 + \sum_{k=5}^{7} \gamma_k e_k, \end{aligned}$$

quindi le applicazioni lineari D e $E + F + G$ assumono gli stessi valori sui vettori e_1, e_2, e_4; poiché $e_3 = e_1e_2$, $e_5 = e_1e_4$, $e_6 = e_4e_2$, $e_7 = e_3e_4 = e_1e_2e_4$, per la regola di Leibniz (1.1) riusciamo ad estendere a tutti gli altri vettori, ad esempio per e_3 si ha:
$D(e_3) = D(e_1e_2) = e_1D(e_2) + D(e_1)e_2$

$$\begin{aligned} &= e_1(E(e_2) + F(e_2) + G(e_2)) + (E(e_1) + F(e_1) + G(e_1))e_2 \\ &= e_1 \left(-\alpha_2 e_1 + \sum_{j=3}^{7} \beta_j e_j \right) + \left(\sum_{i=2}^{7} \alpha_i e_i \right) e_2 \\ &= -\alpha_3 e_1 - \beta_3 e_2 - (\alpha_6 + \beta_5)e_4 + (\alpha_7 + \beta_4)e_5 + (\alpha_4 - \beta_7)e_6 - (\alpha_5 - \beta_6)e_7 \\ &= (E + F + G)(e_3). \end{aligned}$$

Una dimostrazione analoga vale per e_5, e_6, e_7 e quindi le due applicazioni coincidono su tutti gli elementi di $\mathcal{B}$ ossia $D = E+F+G \in Der(\mathbb{O})$. $\square$

Dalla Proposizione 2.3.3 e dal Teorema 2.3.4 si ha il seguente:

Teorema 2.3.5. *Un' applicazione lineare $D : \mathbb{O} \longrightarrow \mathbb{O}$ assume sugli elementi di $\mathcal{B}$ i valori descritti nella Tabella 2.3 se e solo se $D \in Der(\mathbb{O})$.*

Grazie al Teorema 2.3.5 possiamo affermare che una derivazione $D \in Der(\mathbb{O})$ è caratterizzata esattamente da 14 variabili indipendenti che sono α_i, β_j, γ_k, per $i = 2, \ldots, 7$, $j = 3, \ldots 7$, $k = 5, 6, 7$. Di conseguenza vale il seguente:

Teorema 2.3.6. *$dim(Der(\mathbb{O})) = 14 = dim(G_2)$.*

Nel prossimo capitolo dimostreremo che $Der(\mathbb{O})$ è un' algebra di Lie semisemplice mostrando che non possiede ideali abeliani non banali. Dopodiché mostreremo che $Der(\mathbb{O})$ è semplice.

Capitolo 3

Isomorfismo tra $Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$ e G_2

3.1 Semisemplicità dell' algebra di Lie $Der(\mathbb{O})$

Lo scopo di questo capitolo è costruire un isomorfismo tra la complessificazione $Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$ dell' algebra di Lie $Der(\mathbb{O})$ delle derivazioni degli ottonioni e l'algebra di Lie di tipo eccezionale G_2. Il passo fondamentale per raggiungere tale obiettivo è mostrare che $Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$ è semplice. Mostriamo innanzitutto che $Der(\mathbb{O})$ è semisemplice; per fare questo usiamo la Proposizione 1.2.3 che caratterizza la semisemplicità di un' algebra di Lie in termini dei suoi ideali abeliani. Procederemo nel modo seguente: per il Teorema 2.3.6 sappiamo che $dim(Der(\mathbb{O})) = 14$ e, utilizzando la Tabella 2.3, possiamo costruire esplicitamente una base di $Der(\mathbb{O})$. Fissato un ideale abeliano I di $Der(\mathbb{O})$ e presa $D \in I$ definita sui vettori e_1, e_2, e_4, rispettivamente dalle relazioni (2.21), (2.22), (2.23), dimostreremo che tale derivazione è necessariamente la derivazione nulla.

Nella Tabella 2.3 compaiono 14 coefficienti tra di loro indipendenti; per avere una base di $Der(\mathbb{O})$ definiamo una prima derivazione $D_1 : \mathbb{O} \longrightarrow \mathbb{O}$ sugli elementi di $\mathcal{B}$, ponendo il coefficiente $\alpha_2 = 1$ e tutti gli altri coefficienti nulli ossia $\alpha_i = \beta_j = \gamma_k = 0$, per ogni $i, j = 3, \ldots, 7$, per ogni $k = 5, 6, 7$. In questo modo D_1 assume i seguenti valori:

$$D_1(e_1) = e_2$$
$$D_1(e_2) = -e_1$$

$$D_1(e_3) = D_1(e_4) = D_1(e_7) = 0$$
$$D_1(e_5) = -e_6$$
$$D_1(e_6) = e_5.$$

In modo analogo definiamo una seconda derivazione $D_2 : \mathbb{O} \longrightarrow \mathbb{O}$ ponendo il coefficiente $\alpha_3 = 1$ e tutti gli altri coefficienti nulli ossia $\alpha_2 = 0$, $\alpha_i = 0$, $\beta_j = 0$, $\gamma_k = 0$ per ogni $i = 4, \dots, 7$, $j = 3, \dots, 7$, $k = 5, 6, 7$. Definita in questo modo si ha che D_2 è la derivazione dell' algebra $\mathbb{O}$ che assume i seguenti valori:

$$D_2(e_1) = e_3$$
$$D_2(e_2) = D_2(e_4) = D_2(e_6) = 0$$
$$D_2(e_3) = -e_1$$
$$D_2(e_5) = e_7$$
$$D_2(e_7) = -e_5.$$

Iterando il procedimento definiamo la l - esima derivazione $D_l : \mathbb{O} \longrightarrow \mathbb{O}$ ponendo uguale a 1 l' elemento l - esimo del vettore $v = (\alpha_2, \dots, \alpha_7, \beta_3, \dots, \beta_7, \gamma_5, \gamma_6, \gamma_7)$ e uguali a zero le componenti rimanenti. In questo modo, siccome le componenti di v sono indipendenti fra di loro, le derivazioni D_l, per $l = 1, \dots, 14$, sono linearmente indipendenti e quindi l' insieme $\mathcal{B}' = \{D_1, \dots, D_{14}\}$ è una base di $Der(\mathbb{O})$.
Ora sia I un ideale di Lie abeliano non nullo di $Der(\mathbb{O})$ e fissiamo una derivazione $D \in I$ definita dalle relazioni (2.21), (2.22), (2.23); in particolare $D \in Der(\mathbb{O})$, dunque $D = \sum_{l=1}^{14} \lambda_l D_l$. Per dimostrare che $D = 0$ occorre mostrare che, per ogni $l = 1, \dots, 14$, $\lambda_l = 0$. Dimostriamo innanzitutto che $D(e_1) = 0$; per fare questo procediamo nel modo seguente: consideriamo il sottospazio vettoriale $\mathcal{T} = span\,\{1, e_1\}$. Ovviamente $\mathcal{T}$ è una sottoalgebra di $\mathbb{O}$. Presa $f \in Der(\mathbb{O})$ indichiamo con f' la sua restrizione a $\mathcal{T}$, ossia $f' = f_{|\mathcal{T}}$, ed indichiamo con

$$\mathcal{D} = \left\{ f' \mid f \in span\,\{D_l \mid l = 1, \dots, 6\} \right\}.$$

Osserviamo che, siccome per costruzione di $\mathcal{B}'$ si ha $D_l(e_1) = 0$ per $l \geq 7$, allora

$$\mathcal{D} = \left\{ f' \mid f \in Der(\mathbb{O}) \right\}.$$

Definiamo su $\mathcal{D}$ una struttura di algebra di Lie ponendo, per $f^{'}$, $g^{'} \in \mathcal{D}$,

$$\left[f^{'}, g^{'}\right] = [f, g]^{'} = [f, g]_{|\mathcal{I}}\,. \tag{3.1}$$

dove f, $g \in span\,\{D_l \mid l = 1, \ldots, 6\}$. Notiamo che tale prodotto di Lie è ben definito poiché presa $h^{'} \in \mathcal{D}$ esiste una sola $h \in span\,\{D_l \mid l = 1, \ldots, 6\}$ tale che $h_{|\mathcal{I}} = h^{'}$. Infatti, se $h^{'} \in \mathcal{D}$, $h^{'} = \sum_{l=1}^{6} \lambda_l D_l^{'}$; in particolare, per costruzione di $B^{'}$, si ha $D_l(e_1) = $ $= e_{l+1}$, per $l = 1, \ldots, 6$, quindi $h^{'}(e_1) = \sum_{l=1}^{6} \lambda_l e_{l+1}$. Sia $h \in span\,\{D_l \mid l = 1, \ldots, 6\}$, ossia $h = \sum_{l=1}^{6} \alpha_l D_l$. Allora si ha $h(1) = 0$, mentre

$$h(e_1) = \sum_{l=1}^{6} \alpha_l D_l(e_1) = \sum_{l=1}^{6} \alpha_l e_{l+1}.$$

Segue che $h_{|\mathcal{I}} = h^{'}$ se e solo se $\alpha_l = \lambda_l$ per ogni $l = 1, \ldots, 6$.
Ora facciamo la seguente:

Osservazione 30. Notiamo che, per la Proposizione 2.3.3, le relazioni (2.21), (2.22), (2.23) diventano

$$D(e_1) = \sum_{i=2}^{7} \alpha_i e_i;$$

$$D(e_2) = -\ \alpha_2 e_1 + \sum_{j=3}^{7} \beta_j e_j;$$

$$D(e_4) = -\ \alpha_4 e_1 -\ \beta_4 e_2 + (\alpha_6 + \beta_5) e_3 + \sum_{k=5}^{7} \gamma_k e_k.$$

D' altra parte, per costruzione di $\mathcal{B}^{'}$, $D_l(e_1) = 0$, per ogni $l \geq 7$,dunque si ha:

$$D(e_1) = \sum_{l=1}^{6} \lambda_l D_l(e_1) = \sum_{i=2}^{7} \alpha_i e_i$$

quindi necessariamente $\alpha_{i-1} = \lambda_l$, per ogni $i = 2, \ldots, 7$, $l = 1, \ldots, 6$. Analogamente si ha

$$D(e_2) = \lambda_1 D_1(e_2) + \sum_{l=7}^{11} \lambda_l D_l(e_2) = -\alpha_2 e_1 + \sum_{j=3}^{7} \beta_j e_j$$

quindi $\beta_{j+4} = \lambda_l$, per ogni $j = 3, \ldots, 7$, $l = 7, \ldots, 11$. Infine

$$D(e_4) = \lambda_3 D_3(e_4) + \lambda_8 D_8(e_4) + (\lambda_5 + \lambda_9) D_9(e_4) + \sum_{l=12}^{14} \lambda_l D_l(e_4)$$

$$= -\alpha_4 e_1 - \beta_4 e_2 + (\alpha_6 + \beta_5) e_3 + \sum_{k=5}^{7} \gamma_k e_k,$$

dunque si ha $\gamma_{k+7} = \lambda_l$, per ogni $k = 5, 6, 7$, $l = 12, 13, 14$. Allora dimostrare che i $\lambda_l = 0$, per ogni $l = 1, \ldots, 14$, equivale a dimostrare che $\alpha_i = \beta_j = \gamma_k = 0$, per ogni $i = 2, \ldots, 7$, $j = 3, \ldots, 7$, $k = 5, 6, 7$.

Poiché il prodotto di Lie (3.1) è ben definito, fissato $l = 1, \ldots, 6$, possiamo ricavare i prodotti di Lie $\left[D_l', D_h'\right]$, per $h = 1, \ldots, 6$, che sono raccolti nella Tabella 3.1.

	D_1'	D_2'	D_3'	D_4'	D_5'	D_6'
D_1'	0	0	0	$-D_5'$	D_4'	0
D_2'	0	0	$-D_5'$	$2D_6'$	D_3'	$-2D_4'$
D_3'	0	D_5'	0	0	$-2D_2'$	0
D_4'	D_5'	$-2D_6'$	0	0	0	$2D_2'$
D_5'	$-D_4'$	$-D_3'$	$2D_2'$	0	0	0
D_6'	0	$2D_4'$	0	$-2D_2'$	0	0

Tabella 3.1: Prodotto di Lie degli elementi di una base di $\mathcal{D}$

I prodotti di Lie sono stati calcolati commutando l' elemento i - esimo di riga della prima colonna con tutti gli elementi della prima riga. A titolo di esempio ne calcoliamo alcuni: consideriamo, fissato $l = 1$, l' elemento D_1' e calcoliamo il suo prodotto di Lie con D_h', per $h = 2, \ldots, 6$. Banalmente si ha che $\left[D_1', D_h'\right](1) = \left[D_1, D_h\right]'(1) = 0$. Per e_1 si ha:

$$\begin{aligned} \left[D_1', D_2'\right](e_1) &= \left[D_1, D_2\right]'(e_1) \\ &= D_1(D_2(e_1)) - D_2(D_1(e_1)) \\ &= D_1(e_3) - D_2(e_2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Un conto analogo a questo mostra che:

$$\left[D_1^{'}, D_3^{'}\right](e_1) = \left[D_1^{'}, D_6^{'}\right](e_1) = 0;$$

$$\left[D_1^{'}, D_4^{'}\right](e_1) = -D_5^{'}(e_1);$$

$$\left[D_1^{'}, D_5^{'}\right](e_1) = D_4^{'}(e_1).$$

Dalla Tabella 3.1 si vede che $\mathcal{D}$ è chiusa rispetto a tale prodotto di Lie e quindi è un' algebra di Lie. Questo ci consente di considerare ideali di Lie di $\mathcal{D}$. Vogliamo costruire un tale ideale e per farlo notiamo che se $D \in I$, con I ideale di Lie di $Der(\mathbb{O})$, si ha $D = \sum_{l=1}^{14} \lambda_l D_l$; dunque, in particolare, $D(e_1) = \sum_{l=1}^{6} D_l(e_1)$ e quindi possiamo supporre $D = \sum_{l=1}^{6} \lambda_l D_l \in I$, da cui segue che $D^{'} \in \mathcal{D}$. Allora definiamo l' insieme $I^{'} = \left\{D^{'} \in \mathcal{D} \mid D \in I\right\}$; risulta che $I^{'}$ è un ideale di Lie di $\mathcal{D}$, infatti, se $f^{'} \in I^{'}$, $g^{'} \in \mathcal{D}$ allora questo equivale a dire che $f \in I$, $g \in Der(\mathbb{O})$ e dunque, per come è definito il prodotto di Lie su $\mathcal{D}$, si ha che $\left[f^{'}, g^{'}\right] = [f, g]^{'} \in I$, ossia $\left[f^{'}, g^{'}\right] \in I^{'}$ e quindi $I^{'}$ è un ideale di Lie di $\mathcal{D}$. Supponiamo che $I^{'}$ sia abeliano e iniziamo a mostrare che se esiste una derivazione di $I^{'}$, avente una determinata forma, allora necessariamente questa è la derivazione nulla.

Lemma 3.1.1. *Se $D^{'} \in I^{'}$ è tale che $D^{'} = aD_4^{'} + bD_5^{'}$, con a, $b \in \mathbb{R}$, allora $D^{'} = 0$.*

Dimostrazione. Per dimostrare che $D^{'} = 0$ occorre mostrare che $a = b = 0$. Poiché $D^{'} \in I^{'}$, $D_3^{'} \in \mathcal{D}$, per la Definizione 1.11, $\left[D_3^{'}, D^{'}\right] \in I^{'}$.
D' altra parte si ha:

$$\begin{aligned}\left[D_3^{'}, D^{'}\right](e_1) &= a\left[D_3^{'}, D_4^{'}\right](e_1) + b\left[D_3^{'}, D_5^{'}\right](e_1)\\ &= a\left[D_3, D_4\right]^{'}(e_1) + b\left[D_3, D_5\right]^{'}(e_1)\\ &= -2bD_2^{'}(e_1).\end{aligned}$$

Segue che $\left[D_3^{'}, D^{'}\right] = -2bD_2^{'}$. In particolare $-2bD_2^{'} \in I^{'}$, $I^{'}$ è abeliano e quindi:

$$\begin{aligned}\left[-2bD_2^{'}, D^{'}\right](e_1) &= -2ba\left[D_2^{'}, D_4^{'}\right](e_1) - 2b^2\left[D_2^{'}, D_5^{'}\right](e_1)\\ &= -2ba\left[D_2, D_4\right]^{'}(e_1) - 2b^2\left[D_2, D_5\right]^{'}(e_1)\end{aligned}$$

$$= -(2baD_6'(e_1) + 2b^2D_3'(e_1))$$

$$= 0.$$

Segue che $\left[-2bD_2', D'\right] = -(2baD_6' + 2b^2D_3') = 0$ se e solo se $ba = b^2 = 0$ se e solo se $b = 0$. Analogamente si ha che:

$$\left[D_6', D'\right](e_1) = a\left[D_6', D_4'\right](e_1) + b\left[D_6', D_5'\right](e_1)$$

$$= a\left[D_6, D_4\right]'(e_1) + b\left[D_6, D_5\right]'(e_1)$$

$$= -2aD_2'(e_1).$$

Segue che $\left[D_6', D'\right] = -2aD_2' \in I'$. Poiché I' è abeliano:

$$\left[-2aD_2', D'\right](e_1) = -2a^2\left[D_2', D_4'\right](e_1) - 2ab\left[D_4', D_5'\right](e_1)$$

$$= -2a^2\left[D_2, D_4\right]'(e_1) - 2ab\left[D_4, D_5\right]'(e_1)$$

$$= -4a^2D_6'(e_1) - 2abD_3'(e_1)$$

$$= -4a^2D_6'(e_1)$$

$$= 0.$$

Segue che $-4a^2D_6' = 0$ se e solo se $a = 0$. $\square$

Conseguenza del Lemma 3.1.1 è il seguente:

Lemma 3.1.2. *Se $D \in I$, dove I è un ideale di Lie abeliano di $Der(\mathbb{O})$, allora $D(e_1) = 0$.*

Dimostrazione. Ricordiamo che $D(e_1) = \sum_{l=1}^{6} \lambda_l D_l(e_1)$, dunque, per mostrare che $D(e_1) = 0$, occorre provare che $\lambda_l = 0$, per ogni $l = 1, \ldots, 6$. Allora, consideriamo $D|_{\mathfrak{I}} = D' = \lambda_1 D_1' + \lambda_2 D_2' + \lambda_3 D_3' + \lambda_4 D_4' + \lambda_5 D_5' + \lambda_6 D_6'$, e mostriamo che $D' = 0$. Poiché $D \in I$, per definizione di I', si ha che $D' \in I'$. Allora si ha:

$$\left[D_1', D'\right](e_1) = \left[D_1, D\right]'(e_1)$$

$$= \lambda_1\left[D_1, D_1\right]'(e_1) + \lambda_2\left[D_1, D_2\right]'(e_1) + \lambda_3\left[D_1, D_3\right]'(e_1) +$$

$$+\ \lambda_4\left[D_1,D_4\right]^{'}(e_1)+\lambda_5\left[D_1,D_5\right]^{'}(e_1)+\lambda_6\left[D_1,D_6\right]^{'}(e_1)$$

$$=-\lambda_4 D_5^{'}(e_1)+\lambda_5 D_4^{'}(e_1)$$

Poiché $-a_4D_5^{'}+a_5D_4^{'}\in I^{'}$, per il Lemma 3.1.1, segue che $\lambda_4=\lambda_5=0$. Analogamente:
$\left[D_2^{'},D^{'}\right](e_1)=\left[D_2,D\right]^{'}(e_1)$

$$=\lambda_1\left[D_2,D_1\right]^{'}(e_1)+\lambda_2\left[D_2,D_2\right]^{'}(e_1)+$$

$$+\ \lambda_3\left[D_2,D_3\right]^{'}(e_1)+\lambda_6\left[D_2,D_6\right]^{'}(e_1)$$

$$=-\lambda_3 D_5^{'}(e_1)-2\lambda_6 D_4^{'}(e_1).$$

Poiché $-\lambda_3D_5^{'}-2\lambda_6D_4^{'}\in I^{'}$, per il Lemma 3.1.1, segue che $\lambda_3=\lambda_6=0$. Inoltre:
$\left[D_6^{'},D^{'}\right](e_1)=\left[D_6,D\right]^{'}(e_1)$

$$=a_1\left[D_6,D_1\right]^{'}(e_1)+a_2\left[D_6,D_2\right]^{'}(e_1)$$

$$=2a_2D_4^{'}(e_1).$$

Come nei casi precedenti si ha che $2\lambda_2D_4^{'}\in I^{'}$ e quindi, per il Lemma 3.1.1, segue $\lambda_2=0$. Infine si ha:
$\left[D_5^{'},D^{'}\right](e_1)=\left[D_5,D\right]^{'}(e_1)=a_1\left[D_5,D_1\right]^{'}(e_1)=-a_1D_4^{'}(e_1)$.
Siccome $-\lambda_1D_4^{'}\in I^{'}$, ancora per il Lemma 3.1.1, segue che $\lambda_1=0$. Allora si ha $D^{'}(e_1)=D|_{\mathfrak{J}}(e_1)=0$ e d' altra parte $D|_{\mathfrak{J}}(e_1)=D(e_1)=\sum_{l=1}^{6}\lambda_lD_l(e_1)=0$ se e solo se $\lambda_l=0$ per ogni $l=1,\ldots,6$. □

Osservazione 31. Dal Lemma 3.1.2 e dall' Osservazione 30 segue che le espressioni per $D(e_2)$, $D(e_4)$ diventano:

$$D(e_2)=\sum_{l=7}^{11}\lambda_lD_l(e_2)=\sum_{j=3}^{7}\beta_je_j,$$

$$D(e_4)=\lambda_8D_8(e_4)+\lambda_9D_9(e_4)+\sum_{l=12}^{14}\lambda_lD_l(e_4)=-\beta_4e_2+\beta_5e_3+\sum_{k=5}^{7}\gamma_ke_k.$$

Il Lemma 3.1.2 è utile per dimostrare la seguente:

Proposizione 3.1.3. *Se I è un ideale di Lie abeliano di $Der(\mathbb{O})$ allora necessariamente $I=\{0\}$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che I sia non nullo e sia $D \in I$, con $D \neq 0$; in particolare $D \in Der(\mathbb{O})$, dunque $D = \lambda_1 D_1 + \ldots + \lambda_{14} D_{14}$. Per il Lemma 3.1.2 si ha $D(e_1) = 0$, quindi $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_6 = 0$ da cui segue che $D = \lambda_7 D_7 + \ldots + \lambda_{14} D_{14}$. Poiché I è un ideale di Lie di $Der(\mathbb{O})$, si ha che $[D_1, D] \in I$. In particolare, per il Lemma 3.1.2, si ha $[D_1, D](e_1) = 0$; d' altra parte:

$$\begin{aligned}
[D_1, D](e_1) &= D_1(D(e_1)) - D(D_1(e_1)) \\
&= -D(e_2) \\
&= -\lambda_7 D_7(e_2) - \lambda_8 D_8(e_2) - \lambda_9 D_9(e_2) - \lambda_{10} D_{10}(e_2) - \lambda_{11} D_{11}(e_2) \\
&= -(\lambda_7 e_3 + \lambda_8 e_4 + \lambda_9 e_5 + \lambda_{10} e_6 + \lambda_{11} e_7) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Poichè e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 sono linearmente indipendenti segue $\lambda_l = 0$, per $l = 7, \ldots, 11$. Dall' ultima uguaglianza si ha $D(e_2) = 0$ e $D(e_4) = \sum_{l=12}^{14} \lambda_l D_l(e_4)$. Per mostrare che $D(e_4) = 0$ si procede in modo analogo, infatti, poiché I è un ideale di Lie di $Der(\mathbb{O})$, si ha che $[D_3, D] \in I$. In particolare, per il Lemma 3.1.2, $[D_3, D](e_1) = 0$ e d' altra parte:

$$\begin{aligned}
[D_3, D](e_1) &= D_3(D(e_1)) - D(D_3(e_1)) \\
&= -D(e_4) \\
&= -\lambda_{12} D_{12}(e_4) - \lambda_{13} D_{13}(e_4) - \lambda_{14} D_{14}(e_4) \\
&= -\lambda_{12} e_5 - \lambda_{13} e_6 - \lambda_{14} e_7 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

L' ultima uguaglianza implica che $\lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{14} = 0$, quindi $D(e_4) = 0$. Allora, poiché $e_3 = e_1 e_2$, $e_5 = e_1 e_4$, $e_6 = e_4 e_2$, $e_7 = e_3 e_4$ e per la regola di Leibniz (1.1), si ha che $D = 0$, con $D \in I$, e questo contraddice l' ipotesi che I fosse non nullo. Dunque necessariamente $I = \{0\}$. $\square$

Siamo ora in grado di dimostrare la seguente:

Teorema 3.1.4. *L' algebra di Lie $Der(\mathbb{O})$ è semisemplice.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 3.1.3 $Der(\mathbb{O})$ non possiede ideali di Lie abeliani non nulli quindi, per la Proposizione 1.2.3, $Der(\mathbb{O})$ è semisemplice. □

3.2 Semplicità dell' algebra di Lie $Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$

In questa sezione dimostreremo che la complessificazione $Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$ della $\mathbb{R}$ - algebra di Lie $Der(\mathbb{O})$ è un' algebra di Lie semplice su $\mathbb{C}$ da cui seguirà che essa è isomorfa all' algebra di Lie eccezionale di tipo G_2; innanzitutto occorre introdurre il concetto di complessificazione di una $\mathbb{R}$ - algebra di Lie.

Definizione 3.1. Sia L_0 una $\mathbb{R}$ - algebra di Lie finita dimensionale. Si chiama **complessificazione** di L_0 la $\mathbb{C}$ - algebra di Lie

$$L_{\mathbb{C}} = L_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

In particolare $dim_{\mathbb{C}}(L_{\mathbb{C}}) = dim_{\mathbb{R}}(L_0)$.

Definizione 3.2. Sia L un' algebra di Lie su $\mathbb{C}$. Si chiama **forma reale** di L una $\mathbb{R}$ - sottoalgebra di Lie, L_0, di L tale che

$$L = L_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C},$$

ossia L è la complessificazione di L_0.

Ora descriviamo le $\mathbb{R}$ - algebre di Lie semplici in base alla loro complessificazione. Vale il seguente:

Teorema 3.2.1 ([8, Theorem 6.94])**.** *Sia L_0 un' algebra di Lie semplice su $\mathbb{R}$. Allora L_0 ha una delle seguenti forme:*

1) *L_0 è la forma reale di un' algebra di Lie semplice su $\mathbb{C}$.*

2) *$L_{\mathbb{C}}$ è la somma diretta di due ideali semplici, ciascuno dei quali è isomorfo a L_0 come $\mathbb{R}$ - algebra.*

Corollario 3.2.2 ([8, **Proposition 6.95**]). *Se $L_{\mathbb{C}} = L_0 \otimes \mathbb{C}$ è un' algebra di Lie semplice su $\mathbb{C}$ allora la sua forma reale L_0 è semplice su $\mathbb{R}$.*

Il processo di complessificazione di un' algebra di Lie reale preserva la semisemplicità, infatti:

Proposizione 3.2.3. *Sia L_0 un' algebra di Lie su $\mathbb{R}$ e sia $L_{\mathbb{C}} = L_0 \otimes \mathbb{C}$ la sua complessificazione. Allora $L_{\mathbb{C}}$ è semisemplice se e solo se L_0 è semisemplice.*

Dimostrazione. Siano K, $K_{\mathbb{C}}$ rispettivamente le forme di Killing su L_0, $L_{\mathbb{C}}$. Per il Teorema 1.2.4 basta mostrare che K è non degenere se e solo se $K_{\mathbb{C}}$ è non degenere. Notiamo che se $x, y \in L_0$ si ha che $K(x, y) = K(x \otimes 1, y \otimes 1) = K_{\mathbb{C}}(x \otimes 1, y \otimes 1) = K_{\mathbb{C}}(x, y)$. Da quest' ultima uguaglianza segue che, se S, $S_{\mathbb{C}}$ denotano rispettivamente i radicali di K, $K_{\mathbb{C}}$, allora $(S)_{\mathbb{C}} = S_{\mathbb{C}}$. Di conseguenza $S = \{0\}$ se e solo se $S_{\mathbb{C}} = \{0\}$. $\square$

Ora vogliamo dimostrare che la complessificazione dell' algebra delle derivazioni $Der(\mathbb{O})$ è isomorfa all' algebra di Lie eccezionale di tipo G_2; quindi occorre innanzitutto complessificare le $\mathbb{R}$ - algebre $\mathbb{O}$ e $Der(\mathbb{O})$.

Osservazione 32. Denotiamo con $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ la complessificazione della $\mathbb{R}$ - algebra $\mathbb{O}$:

$$\mathbb{O}_{\mathbb{C}} = \mathbb{O} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

In questo modo $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ è una $\mathbb{C}$ - algebra: $\mathbb{O}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} + \mathbb{C}e_1 + \ldots + \mathbb{C}e_7$ e $dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}}) = dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{O}) = 8$. In modo analogo denotiamo con $Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$ la complessificazione della $\mathbb{R}$ - algebra $Der(\mathbb{O})$:

$$Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}} = Der(\mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

In questo modo $Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$ è una $\mathbb{C}$ - algebra di Lie con forma reale $Der(\mathbb{O})$. In particolare si ha che $Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}D_1 + \ldots + \mathbb{C}D_{14}$ e $dim_{\mathbb{C}}(Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}) = dim_{\mathbb{R}}(Der(\mathbb{O})) = 14$. Notiamo inoltre che, essendo $Der(\mathbb{O})$ un' algebra di Lie semisemplice su $\mathbb{R}$, per la Proposizione 3.2.3, si ha che $Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$ è semisemplice. Di conseguenza, per il Teorema 1.2.5, $Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$ è una somma diretta di ideali di Lie semplici e quindi di algebre di Lie semplici, ossia

$$Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}} = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{D}_t$$

per qualche $t \in \mathbb{N}$ e con $\mathcal{D}_i$ semplice, per ogni $i = 1, \ldots, t$. In particolare una derivazione $D \in Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$ si scrive in modo unico come

$$D = \sum_{i=1}^{t} D_i$$

dove D_i appartiene al relativo $\mathcal{D}_i$.

Il nostro scopo è di dimostrare che $Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$ è semplice, ossia che $t = 1$. Per procedere abbiamo bisogno di introdurre alcuni risultati che riguardano l' algebra $Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$.

Proposizione 3.2.4. *Siano $D, E \in Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$. Allora D, E commutano se e solo se D_i, E_j commutano, per $i, j = 1, \ldots, t$.*

Dimostrazione. Per l' Osservazione 32 si ha che $D = \sum_{i=1}^{t} D_i$, $E = \sum_{i=1}^{t} E_i$ con $D_i, E_i \in \mathcal{D}_i$ per ogni $i = 1, \ldots, t$. In particolare, poiché $Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$ è somma diretta di algebre di Lie, per la Definizione 1.14, si ha che $[D_i, E_j] = 0$ per ogni $i \neq j$. Segue che

$$0 = [D, E] = \left[\sum_{i=1}^{t} D_i, \sum_{i=1}^{t} E_i\right] = \sum_{i=1}^{t} [D_i, E_i] \Longleftrightarrow [D_i, E_i] = 0$$

per ogni $i = 1, \ldots, t$. $\square$

Definizione 3.3 (Centralizzatore). Sia $D \in Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$. Si chiama centralizzatore di D in $Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$ l' insieme delle derivazioni di $Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$ che commutano con D, ossia

$$C(D) = \{E \in Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}} \mid [E, D] = 0\}$$

Proposizione 3.2.5. *Sia $D \in Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$ con $D \neq 0$. Allora $C(D)$ è una sottoalgebra di Lie non banale di $Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$; in particolare:*

$$C(D) = \bigoplus_{i=1}^{t} (C(D) \cap \mathcal{D}_i)$$

con $C(D) \cap \mathcal{D}_i \neq \{0\}$ per ogni $i = 1, \ldots, t$, ossia $C(D)$ è una somma diretta di t sottoalgebre.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che $C(D) \neq \{0\}$, infatti $[D, D] = 0$ dunque $D \in C(D)$. Siano ora $E, F \in C(D)$ elementi arbitrari e siano $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$; per la Definizione 3.3 si ha che $[E, D] = [F, D] = 0$, quindi:
$[\alpha E + \beta F, D] = \alpha\,[E, D] + \beta\,[F, D] = 0$.
Segue che $\alpha E + \beta F \in C(D)$. Ora, se consideriamo $[[F, E]\,, D]$, per l' identità di Jacobi si ha:
$[[F, E]\,, D] = [F, [E, D]] + [[F, D]\,, E] = [F, 0] + [0, E] = 0$.
Segue che $[F, E] \in C(D)$. Infine dimostriamo che $C(D)$ è una somma diretta di t sottoalgebre: sia $E \in C(D)$, in particolare, $E \in Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$, quindi, per l' Osservazione 32, $E = \sum_{i=1}^{t} E_i$ con $E_i \in \mathcal{D}_i$ per ogni $i = 1, \ldots, t$. Per la Proposizione 3.2.4, si ha che $[E_i, D_j] = 0$ per ogni $i, j = 1, \ldots, t$, quindi $E_i \in C(D)$ per ogni $i = 1, \ldots, t$. Segue che $C(D) = \bigoplus_{i=1}^{t} (C(D) \cap \mathcal{D}_i)$. Rimane da dimostrare che $(C(D) \cap \mathcal{D}_i) \neq \{0\}$, per ogni $i = 1, \ldots, t$; dunque, sia i fissato e sia $D \in Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$. Per l' Osservazione 32, $D = D_1 + \ldots + D_t$; se $D_i \neq 0$ allora, per la Proposizione 3.2.4, si ha $[D_i, D] = 0$, ossia $D_i \in C(D)$ e quindi $C(D) \cap \mathcal{D}_i \neq \{0\}$; se $D_i = 0$ allora tutta la sottoalgebra $\mathcal{D}_i \subseteq C(D)$, infatti, se $D_i = 0$, allora $[0, F_i] = 0$, per ogni $F_i \in \mathcal{D}_i$, quindi $F_i \in C(D)$ con $F_i \neq 0$. $\square$

La proposizione vista sarà utile per dimostrare che $Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$ è semplice. Ora procederemo nel modo seguente: fisseremo una derivazione $D \in Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$ e consideriamo il suo centralizzatore $C(D)$; mostreremo che questo centralizzatore è la somma diretta di al più due ideali di Lie non banali cioè, usando le notazioni della Proposizione 3.2.5, $t \leq 2$. A questo punto, per mostrare che $t \neq 2$, faremo vedere che non esistono due algebre di Lie semplici la somma delle cui dimensioni dia 14 ossia la dimensione di $Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$, quindi necessariamente si avrà $t = 1$.

Osservazione 33. Per il Teorema 2.3.4 sappiamo che un' applicazione lineare $D : \mathbb{O} \longrightarrow \mathbb{O}$ assume sugli elementi di $\mathcal{B}$ i valori descritti nella Tabella 2.3 se e solo se $D \in Der(\mathbb{O})$. Inoltre, poiché $\mathcal{B}' = \{D_1, \ldots, D_{14}\}$ è una base di $Der(\mathbb{O})$, allora $\mathcal{B}'_{\mathbb{C}} = \{D_1 \otimes 1, \ldots, D_{14} \otimes 1\}$ è una base di $Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$. Di conseguenza, se indichiamo con $\mathcal{B}_{\mathbb{C}} = \{1, e_1 \otimes 1, \ldots, e_7 \otimes 1\}$ una base di $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$, fissata una derivazione $D \in Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$, D assume su $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ i valori descritti nella Tabella 2.3 e quindi, ponendo $\alpha_2 = -1$, $\alpha_i = 0$,

$\beta_j = 0$, $\gamma_k = 0$ per $i, j = 3, \ldots, 7$, $k = 5, 6, 7$, possiamo definire la seguente derivazione di $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$:

$$\begin{gathered} D(e_1) = -e_2 \\ D(e_2) = e_1 \\ D(e_3) = D(e_4) = D(e_7) = 0 \\ D(e_5) = e_6 \\ D(e_6) = -e_5 \end{gathered}$$

Lemma 3.2.6. *Sia $E \in Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$ definita dalle relazioni*

$$\begin{gathered} E(e_1) = \sum_{i=1}^{7} \alpha_i e_i \\ E(e_2) = \sum_{i=1}^{7} \beta_i e_i \\ E(e_4) = \sum_{i=1}^{7} \gamma_i e_i; \end{gathered}$$

se $D \in Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$ è la derivazione definita nell' Osservazione 33 e se $E \in C(D)$ allora si ha:

$$E(e_1) = \alpha_2 e_2 + \alpha_5 e_5 + \alpha_6 e_6 \tag{3.2}$$

$$E(e_2) = \beta_1 e_1 + \beta_5 e_5 + \beta_6 e_6 \tag{3.3}$$

$$E(e_4) = \gamma_3 e_3 + \gamma_7 e_7 \tag{3.4}$$

con $-\beta_1 - \alpha_2 = -\beta_5 + \alpha_6 = \beta_6 + \alpha_5 = -\gamma_3 + 2\alpha_6 = 0$.

Dimostrazione. Il lemma fornisce la forma esplicita di una derivazione dell' algebra $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ che commuta con la derivazione D della stessa algebra. Poiché $E \in C(D)$, $[E, D] = 0$. In particolare, se $[E, D] = 0$, allora $E(D(e_1)) - D(E(e_1)) = 0$.
Per come abbiamo definito $D(e_1)$ nell' Osservazione 33 e per definizione di $E(e_1)$

$$E(-e_2) = D\left(\sum_{i=1}^{7} \alpha_i e_i\right),$$

per definizione di $E(e_2)$ e per linearità di E, D

$$-\sum_{i=1}^{7} \beta_i e_i = \sum_{i=1}^{7} \alpha_i D(e_i),$$

per definizione di D nell' Osservazione 33

$$-\sum_{i=1}^{7}\beta_i e_i = -\alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_1 + \alpha_5 e_6 - \alpha_6 e_5$$

cioè

$$(-\beta_1 - \alpha_2)e_1 + (\alpha_1 - \beta_2)e_2 - \beta_3 e_3 - \beta_4 e_4 + (\alpha_6 - \beta_5)e_5 - (\beta_6 + \alpha_5)e_6 - \beta_7 e_7 = 0.$$

L' uguaglianza ottenuta è una combinazione lineare di vettori linearmente indipendenti, quindi segue

$$-\beta_1 - \alpha_2 = \alpha_1 - \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \alpha_6 - \beta_5 = -\beta_6 - \alpha_5 = \beta_7 = 0.$$

Inoltre E è una derivazione definita esattamente come la derivazione D dell' Osservazione 29, quindi, per la Proposizione 2.3.3, si ha che

$$\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_4 = \gamma_1 + \alpha_4 = \gamma_2 + \beta_4 = \alpha_6 + \beta_5 - \gamma_3 = 0.$$

In particolare da $\beta_5 = \alpha_6$ e $\alpha_6 + \beta_5 - \gamma_3 = 0$ si ha $2\alpha_6 - \gamma_3 = 0$. Segue che $E(e_2) = \beta_1 e_1 + \beta_5 e_5 + \beta_6 e_6$. In modo analogo si ha che $[E, D](e_2) = 0$ se e solo se $E(D(e_2)) - D(E(e_2)) = 0$. Per definizione di $D(e_2)$ nell' Osservazione 33 e per definizione di $E(e_2)$ si ha

$$E(e_1) = D\left(\sum_{i=1}^{7}\beta_i e_i\right),$$

per definizione di $E(e_1)$ e per linearità di D

$$\sum_{i=1}^{7}\alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{7}\beta_i D(e_i),$$

per definizione di D nell' Osservazione 33

$$\sum_{i=1}^{7}\alpha_i e_i = -\beta_1 e_2 + \beta_2 e_1 + \beta_5 e_6 - \beta_6 e_5.$$

D' altra parte, per la Proposizione 2.3.3, $\alpha_1 = \beta_2 = 0$, $\beta_1 + \alpha_2 = 0$, quindi

$$\alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + (\alpha_5 + \beta_6)e_5 + (\alpha_6 - \beta_5)e_6 + \alpha_7 e_7 = 0$$

cioè

$$\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 + \beta_6 = \alpha_6 - \beta_5 = \alpha_7 = 0.$$

Da tutto questo si ha $E(e_1) = \alpha_2 e_2 + \alpha_5 e_5 + \alpha_6 e_6$. Infine si ha che $[E, D]\,(e_4) = 0$ se e solo se $E(D(e_4)) - D(E(e_4)) = 0$. Poiché $D(e_4) = 0$ e per definizione di $E(e_4)$

$$0 = -D\left(\sum_{i=1}^{7} \gamma_i e_i\right) = -\sum_{i=1}^{7} \gamma_i D(e_i),$$

per definizione di D nell' Osservazione 33

$$-\gamma_1 e_2 + \gamma_2 e_1 + \gamma_5 e_6 - \gamma_6 e_5 = 0,$$

se e solo se

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_5 = \gamma_6 = 0.$$

Dunuqe $E(e_4) = \gamma_3 e_3 + \gamma_7 e_7$. □

Osservazione 34. Poiché valgono le relazioni $e_1e_2 = e_3$, $e_1e_4 = e_5$, $e_4e_2 = e_6$, $e_3e_4 = e_7$ e poiché E è una derivazione di $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$, possiamo ottenere i valori di $E \in C(D)$ sui vettori e_3, e_5, e_6, e_7 estendendo E con la regola di Leibniz; dunque si ha:

$$E(e_3) = e_1E(e_2) + E(e_1)e_2 = (-\alpha_6 - \beta_5)e_4 - (\alpha_5 - \beta_6)e_7 \tag{3.5}$$

$$E(e_5) = e_1E(e_4) + E(e_1)e_4 = -\alpha_5 e_1 + (\alpha_6 - \gamma_3)e_2 - (\alpha_2 + \gamma_7)e_6 \tag{3.6}$$

$$E(e_6) = e_4E(e_2) + E(e_4)e_2 = (\beta_5 - \gamma_3)e_1 - \beta_6 e_2 - (\beta_1 - \gamma_7)e_5 \tag{3.7}$$

$$E(e_7) = e_3E(e_4) + E(e_3)e_4 = (\alpha_5 - \beta_6)e_3 - (\alpha_2 + \beta_1 + \gamma_7)e_4. \tag{3.8}$$

Corollario 3.2.7. *L' insieme $\mathcal{B}_{C(D)} = \{D, E_1, E_2, E_3\}$ è una base del centralizzatore di D, dove:*

$$(E_1(e_1), E_1(e_2), E_1(e_3), E_1(e_4), E_1(e_5), E_1(e_6), E_1(e_7)) = (e_5, -e_6, -2e_7, 0, -e_1, e_2, 2e_3)$$
$$(E_2(e_1), E_2(e_2), E_2(e_3), E_2(e_4), E_2(e_5), E_2(e_6), E_2(e_7)) = (e_6, e_5, -2e_4, 2e_3, -e_2, -e_1, 0)$$
$$(E_3(e_1), E_3(e_2), E_3(e_3), E_3(e_4), E_3(e_5), E_3(e_6), E_3(e_7)) = (-e_2, e_1, 0, 2e_7, -e_6, e_5, -2e_4)$$

Dimostrazione. Dal Lemma 3.2.6 sappiamo che $\beta_1 = -\alpha_2$, $\beta_5 = \alpha_6$, $\beta_6 = -\alpha_5$, $\gamma_3 = 2\alpha_6$. Sostituendo tali relazioni nelle equazioni (3.3), (3.4), (3.5), (3.6), (3.7), (3.8), si ottiene che:

$$\begin{aligned}
E(e_1) &= \alpha_2 e_2 + \alpha_5 e_5 + \alpha_6 e_6\\
E(e_2) &= -\alpha_2 e_1 + \alpha_6 e_5 - \alpha_5 e_6\\
E(e_3) &= -2\alpha_6 e_4 - 2\alpha_5 e_7\\
E(e_4) &= 2\alpha_6 e_3 + \gamma_7 e_7\\
E(e_5) &= -\alpha_5 e_1 - \alpha_6 e_2 - (\alpha_2 + \gamma_7) e_6\\
E(e_6) &= -\alpha_6 e_1 + \alpha_5 e_2 + (\alpha_2 + \gamma_7) e_5\\
E(e_7) &= 2\alpha_5 e_3 - \gamma_7 e_4
\end{aligned}$$

Dunque E dipende soltanto da 4 coefficienti $-\alpha_2$, α_5, α_6, γ_7 tra di loro indipendenti. Allora otteniamo una base di $C(D)$ ponendo $-\alpha_2 = 1$ e $\alpha_5 = \alpha_6 = \gamma_7 = 0$; in questo caso si ha che E coincide esattamente con la derivazione D definita nell' Osservazione 33; poi poniamo $\alpha_5 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_6 = \gamma_7 = 0$ e otteniamo la derivazione E_1 definita da

$$\begin{aligned}
E_1(e_1) &= e_5\\
E_1(e_2) &= -e_6\\
E_1(e_3) &= -2e_7\\
E_1(e_4) &= 0\\
E_1(e_5) &= -e_1\\
E_1(e_6) &= e_2\\
E_1(e_7) &= 2e_3.
\end{aligned}$$

Analogamente, ponendo $\alpha_6 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_5 = \gamma_7 = 0$ si ottiene la derivazione E_2 definita da

$$\begin{aligned}
E_2(e_1) &= e_6\\
E_2(e_2) &= e_5\\
E_2(e_3) &= -2e_4\\
E_2(e_4) &= 2e_3\\
E_2(e_5) &= -e_2\\
E_2(e_6) &= -e_1\\
E_2(e_7) &= 0.
\end{aligned}$$

Infine, ponendo $\alpha_2 = -1$, $\gamma_7 = 2$, $\alpha_5 = \alpha_6 = 0$ si ottiene la derivazione E_3 definita da

$$
\begin{aligned}
E_3(e_1) &= -e_2 \\
E_3(e_2) &= e_1 \\
E_3(e_3) &= 0 \\
E_3(e_4) &= 2e_7 \\
E_3(e_5) &= -e_6 \\
E_3(e_6) &= e_5 \\
E_3(e_7) &= -2e_4
\end{aligned}
$$

Segue che, per il Lemma 3.2.6, ogni derivazione $F \in C(D)$ è somma di D, E_1, E_2, E_3 le quali sono un sistema di generatori linearmente indipendenti di $C(D)$, quindi $\mathcal{B}_{C(D)} = \{D, E_1, E_2, E_3\}$ è una base di $C(D)$. □

Il prossimo passo consiste nel dimostrare che le derivazioni E_1, E_2, E_3 appartengono tutte ad uno stesso ideale di $Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$, ideale che, d' ora in poi, denotiamo con (E_1, E_2, E_3). Da questo si avrà che, siccome, per il Corollario 3.2.6, $\mathcal{B}_{C(D)}$ è una base di $C(D)$, allora ogni elemento di $C(D)$ si scriverà in modo unico come somma di un elemento dell' ideale generato da D, che denotiamo con (D) e di un elemento di (E_1, E_2, E_3); quindi, dalla Proposizione 3.2.5, seguirà che necessariamente $t \leq 2$ da cui $Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}} = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$.

Proposizione 3.2.8. *Le derivazioni E_1, E_2, E_3, definite nel Corollario 3.2.6, appartengono tutte allo stesso ideale di Lie del centralizzatore di D.*

Dimostrazione. Procediamo nel modo seguente: fissiamo la derivazione $E_1 \in C(D)$, consideriamo la derivazione E_2 e mostriamo che $[E_1, E_2] = -2E_3 \in (E_2)$; analogamente, fissiamo $E_2 \in C(D)$, consideriamo E_3 e mostriamo che $[E_2, E_3] = -2E_1 \in (E_3)$; infine, fissiamo $E_3 \in C(D)$, consideriamo E_1 e mostriamo che $[E_3, E_1] = -2E_2 \in (E_1)$. Da questo seguirà la catena di inclusioni $(E_3) \subseteq (E_2) \subseteq (E_1) \subseteq (E_3) = (E_1, E_2, E_3)$. Inoltre ci basterà valutare i precedenti prodotti di Lie soltanto sui vettori e_1, e_2, e_4, infatti, il prodotto di Lie di due derivazioni è una derivazione e e_1, e_2, e_4 generano $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ come algebra. Valutiamo innanzitutto $[E_1, E_2](e_1)$:

$$
\begin{aligned}
[E_1, E_2](e_1) &= E_1(E_2(e_1)) - E_2(E_1(e_1)) \\
&= E_1(e_6) - E_2(e_5)
\end{aligned}
$$

$= 2e_2$

$= -2E_3(e_1)$

Valutiamo lo stesso prodotto di Lie su e_2:
$[E_1, E_2]\,(e_2) = E_1(E_2(e_2)) - E_2(E_1(e_2))$

$= E_1(e_5) - E(-e_6)$

$= -2e_1$

$= -2E_3(e_2)$.

Infine per il vettore e_4 si ha:
$[E_1, E_2]\,(e_4) = E_1(E_2(e_4)) - E_2(E_1(e_4))$

$= 2E_1(e_3)$

$= -2(2e_7)$

$= -2E_3(e_4)$.

Quindi $[E_1, E_2] = -2E_3$. Analogamente si dimostra, con conti analoghi a quelli fatti per $[E_1, E_2]$, che $[E_2, E_3] = -2E_1$ e $[E_3, E_1] = -2E_2$. Questo vuol dire che E_1, E_2, $E_3 \in (E_1, E_2, E_3)$. $\square$

Osservazione 35. Ricordiamo che, per la Proposizione 3.2.5, $C(D) = \bigoplus_{i=1}^{t}(C(D) \cap \mathcal{D}_i)$, dunque, come conseguenza immediata della Proposizione 3.2.8, si ha che E_1, E_2, E_3 devono appartenere tutte alla stessa componente $C(D) \cap \mathcal{D}_i$, per qualche $i = 1, \ldots, t$, di $C(D)$. D' altra parte $C(D)$ è generato, come $\mathbb{C}$ - sottoalgebra di Lie di $Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$, dalle derivazioni D, E_1, E_2, E_3 e quindi si possono verificare due eventualità:

1. $(D) = C(D) \cap \mathcal{D}_1$ e $(E_1, E_2, E_3) = C(D) \cap \mathcal{D}_2$, a meno di un riordinamento dei $\mathcal{D}_i$;
2. $C(D) = C(D) \cap \mathcal{D}_1$ ossia $C(D) \subseteq \mathcal{D}_1$.

D' altra parte, poiché $C(D) \cap \mathcal{D}_i \neq \{0\}$ per ogni i, necessariamente $t \leq 2$ e quindi, siccome $C(D) \subseteq Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$, segue che $Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}} = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$.

Ora ci resta soltanto da dimostrare che $t \neq 2$ da cui seguirà che $Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$ è semplice. Per raggiungere tale scopo facciamo la seguente:

Osservazione 36. Dai risultati ottenuti ricaviamo che $Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}} = \mathcal{D}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{D}_t$ con $t \leq 2$; questo vuol dire che l' algebra di Lie $Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$ è semplice oppure è somma diretta di al più due algebre di Lie semplici. D' altra parte, per l' Osservazione 32, $dim(Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}) = 14$, quindi $Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$ è un' algebra di Lie semplice di dimensione 14 oppure $Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$ è la somma diretta di al più due algebre di Lie semplici la somma delle cui dimensioni è 14. Questa seconda eventualità non può capitare, infatti, per il Teorema di classificazione delle algebre di Lie semplici finito dimensionali, le $\mathbb{C}$ - algebre di Lie semplici che hanno dimensione minore di 14 oppure uguale a 14 sono quattro: A_1, A_2, B_2, G_2 con

$$dim(A_1) = 3,\ dim(A_2) = 8,\ dim(B_2) = 10,\ dim(G_2) = 14.$$

D' altra parte, poiché la somma delle dimensioni di due qualsiasi tra queste $\mathbb{C}$ - algebre di Lie è sempre diversa da 14, segue che $Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}} = \mathcal{D}_1$, ossia $t < 2$.

Conseguenza immediata dell' Osservazione 36 è il seguente:

Teorema 3.2.9. *$Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$ è un' algebra di Lie semplice isomorfa all' algebra di Lie di tipo eccezionale G_2.*

Ora, usando il Corollario 3.2.2, si ha che $Der(\mathbb{O})$ è una $\mathbb{R}$ - algebra di Lie semplice.

Teorema 3.2.10. *L' $\mathbb{R}$ - algebra di Lie semplice $Der(\mathbb{O})$ è la forma reale dell' algebra di Lie eccezionale di tipo G_2.*

Dimostrazione. Per l' Osservazione 36 $Der(\mathbb{O})_{\mathbb{C}} = \mathcal{D}_1 \cong G_2$, quindi, per il Teorema 3.2.1, necessariamente $Der(\mathbb{O})$ è la forma reale di G_2. □

Questo teorema conclude la nostra argomentazione perché fornisce la realizzazione dell' agebra di Lie di tipo eccezionale G_2 in termini di algebra di derivazioni, in particolare di endomorfismi, dell' algebra degli ottonioni.

Bibliografia

[1] J. Baez , The Octonions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 145, Vol. 39, No. 2 (2001), 145 - 205.

[2] C. Chevalley and R. D. Schafer, The Exceptional Simple Lie Algebras F_4 and E_6, *Departments of Math., Col. Univ. and Univ. of Penn.* , 137, Vol.36, 1950, 137 - 141.

[3] P. L. Clark, Non Associative Algebras, *Departments of Math., Univ. of Georgia*, 2010, 12 - 16.

[4] K. McCrimmon, A Taste of Jordan Algebras, New York, Berlin, and Heidelberg, Springer Verlag, 2004.

[5] J. R. Faulker and J. C. Ferrar, Exceptional Lie Algebras and Related Algebraic and Geometric Structures, *Bull. London Math. Soc.* 9 (1977), No. 1, 1 - 35.

[6] F. B. Gonzalez, Lie Algebras, December 4, 2007.
www. tufts.edu/$\sim$ fgonzale/lie.algebras.book.pdf

[7] J. E. Humphreys, Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, Springer Verlag, New York, Heidelberg, and Berlin, 1972.

[8] A. W. Knapp, Lie Groups Beyond an Introduction, Birkh*ä*user, Boston, Basel, and Berlin, 1996.

[9] K. E. McLewin, Octonions and the Exceptional Lie Algebra $\mathfrak{g}_2$, Blacksburg, Virginia, April 23, 2004.

[10] R. Précenth, The (1, 2, 4, 8) - Theorem for Composition Algebras, *Departments of Math., Uppsala Univ.* , June 2, 2013.

[11] R. D. Schafer, An Introduction to Nonassociative Algebras, New York and London, Academic Press, 1966.

[12] N. Zhukavets, Composition Algebras, *Lecture Notes*, Tampere, Finland, 2007, 9 - 23.