

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Il metodo di
steepest descent
per la regolarizzazione di immagini

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Giovanna Citti

Presentata da:
Noemi Montobbio

Sessione I
Anno Accademico 2013/2014

Introduzione

Scopo di questa tesi è la descrizione di un metodo efficiente per il calcolo di minimi di funzionali, con particolare attenzione verso le sue applicazioni alla regolarizzazione di immagini.

Il metodo di *steepest descent* (letteralmente *la discesa più ripida*) consiste nella determinazione di successioni minimizzanti per funzionali definiti su spazi di Hilbert. L'idea principale che porta all'approssimazione di punti di minimo è quella di considerare un flusso nella direzione opposta al gradiente del funzionale, che è ortogonale agli insiemi di livello: si determinano cioè le soluzioni di problemi di Cauchy aventi come secondo membro il gradiente cambiato di segno. Al variare del dato iniziale, le soluzioni costituiscono quello che viene chiamato il *flusso di steepest descent* del funzionale. La discretizzazione di tali soluzioni permette di costruire successioni lungo le quali il valore del funzionale diminuisce; se poi viene verificata una condizione di compattezza dei livelli del funzionale, detta di Palais-Smale, allora la successione converge effettivamente verso i minimi. Un notevole vantaggio del metodo di *steepest descent* è l'efficienza computazionale, dovuta all'uso essenziale di problemi di Cauchy. Il primo capitolo sarà dedicato all'esposizione di questa procedura.

Nell'ambito dell'elaborazione di immagini, la scelta del funzionale da minimizzare può essere mirata per esempio ad ottenere maggiore regolarità nell'immagine finale, o ad accentuare determinate caratteristiche geometriche. In questo contesto, il flusso di *steepest descent* può essere interpretato come un'*analisi multiscala*: fornisce cioè una famiglia di immagini indicizzate da un parametro, detto *variabile di scala*, che esprime la progressione della modifica. Il secondo capitolo tratterà di alcuni esempi di algoritmi di regolarizzazione, a partire dall'equazione del calore, storicamente il primo processo di questo tipo applicato alle immagini. La diffusione da essa provocata non ha direzioni privilegiate: nell'immagine risultante si assiste quindi ad una riduzione del rumore, accompagnata però da una perdita di definizione delle caratteri-

stiche geometriche, come i contorni e le componenti connesse. L'esigenza di conservare la geometria dell'immagine rende allora necessaria una diffusione anisotropa, generata come *steepest descent* di operatori non lineari. Un primo esempio di questi è il funzionale *Total Variation*, che dipende dalla norma L^1 del gradiente e dà luogo ad un'equazione di diffusione tangenziale ai contorni delle immagini; una sua generalizzazione è l'algoritmo proposto da Perona e Malik [4], che pesa diversamente la diffusione lungo le componenti tangenziale e normale ai contorni.

Nel terzo capitolo si espone infine una più recente evoluzione di queste tecniche di regolarizzazione, basata sull'interpretazione di un'immagine come varietà bidimensionale; su una tale varietà è possibile definire una struttura riemanniana, indotta dalla metrica euclidea dello spazio tridimensionale in cui è immersa. In quest'ottica si può utilizzare il metodo di *steepest descent* per costruire algoritmi che tengono essenzialmente conto delle caratteristiche geometriche dell'immagine, codificate da tale metrica.

Indice

Introduzione	i
1 Il flusso di <i>steepest descent</i>	1
1.1 Flussi di diffusione	1
1.2 Problemi di Cauchy su spazi di Banach	2
1.2.1 Operatori contrattivi	2
1.2.2 Esistenza e unicità della soluzione	2
1.3 Il metodo di <i>steepest descent</i>	5
1.3.1 Differenziabilità in spazi di Banach; punti critici	5
1.3.2 Il flusso di <i>steepest descent</i>	7
1.3.3 Esistenza di minimi di funzionali	8
2 Dalla <i>heat equation</i> alla diffusione di Perona-Malik	13
2.1 La <i>heat equation</i>	13
2.2 Il funzionale di <i>Total Variation</i> (TV)	16
2.3 L'algoritmo di Perona-Malik	17
3 Diffusione mediante l'operatore di Laplace-Beltrami	19
3.1 Metriche riemanniane	19
3.1.1 Varietà differenziabili di \mathbb{R}^N	19
3.1.2 Varietà riemanniane	20
3.1.3 La metrica indotta da un'immagine	23
3.2 Il problema di Dirichlet su varietà riemanniane	24
3.2.1 Lo spazio $L^2(\Omega, \sqrt{g}dx)$	24
3.2.2 Il gradiente riemanniano	26
3.2.3 Lo spazio W_0^1	27
3.2.4 L'operatore di Laplace-Beltrami	29
3.2.5 Soluzioni deboli	30

3.2.6	Soluzioni deboli come minimi di funzionali	32
3.3	L'uso dell'operatore di Laplace-Beltrami nella regolarizzazione di immagini	34
	Bibliografia	37

Elenco delle figure

2.1	Diffusione di un'immagine tramite la <i>heat equation</i>	14
2.2	Azione del flusso di <i>steepest descent</i> in L^2 e in W_0^1	16
2.3	Regolarizzazione di un'immagine tramite il flusso di diffusione generato dal funzionale TV.	17
2.4	Un'immagine regolarizzata con l'algoritmo di Perona-Malik.	18
3.1	La metrica indotta da un'immagine	24
3.2	Evoluzione di un'immagine attraverso il flusso di Laplace-Beltrami.	35

Capitolo 1

Il flusso di *steepest descent*

1.1 Flussi di diffusione

Un *flusso di diffusione* [1] è un processo che modifica progressivamente l'immagine originale, determinando una famiglia di immagini sempre meno dettagliate; questi metodi sono spesso basati su equazioni differenziali alle derivate parziali.

L'immagine originale è rappresentata (nel caso in bianco e nero) da una funzione di due variabili

$$I(x, y),$$

che descrive la scala dei grigi. L'idea è quella di definire un ambiente tridimensionale mediante l'aggiunta di una coordinata t , che rappresenterà la *scala* della modifica attuata su $I(x, y)$; tale ambiente è detto *scale space* (spazio di scala). Si avrà dunque una funzione $I(x, y, t)$, con

$$I(x, y, 0) = I(x, y).$$

L'immagine originale è cioè assunta come *condizione iniziale* di un problema del tipo

$$\begin{cases} I_t = F(I) \\ I(x, y, 0) = I(x, y), \end{cases} \quad (1.1)$$

dove I_t denota la derivata parziale di I rispetto alla variabile di scala t , ed F è un opportuno operatore applicato ad I . La scelta di F è mirata alla minimizzazione di funzionali definiti su spazi di funzioni; nelle seguenti sezioni illustreremo in che modo la soluzione di un problema di Cauchy è legata alla determinazione di tali minimi.

1.2 Problemi di Cauchy su spazi di Banach

In questa sezione viene descritto il problema 1.1 come un problema di Cauchy su uno spazio di Banach. Si richiama pertanto questa nozione dando un teorema di esistenza e unicità, e ci si basa principalmente sulla trattazione di Pini [2].

1.2.1 Operatori contrattivi

Definizione 1.1. Sia E uno spazio di Banach, $D \subset E$ e sia $T : D \rightarrow D$. Si dice che T è un *operatore contrattivo*, o una *contrazione*, se

$$\exists a \in \mathbb{R}, 0 < a < 1 \quad : \quad \|T(x) - T(y)\| \leq a\|x - y\| \quad \forall x, y \in D.$$

Osservazione. Una contrazione è in particolare uniformemente lipschitziana, dunque continua.

Riportiamo ora due noti risultati riguardanti le contrazioni.

Teorema 1.1 (Banach-Caccioppoli). Sia E uno spazio di Banach e sia D un suo sottoinsieme chiuso. Se $T : D \rightarrow D$ è un operatore contrattivo, D ammette un unico *punto fisso*. Cioè:

$$\exists! x \in D \quad : \quad T(x) = x.$$

□

Teorema 1.2. E spazio di Banach, $D = \overline{D} \subset E$, $T : D \rightarrow D$. Se esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che T^m sia una contrazione, allora esiste uno ed un solo punto fisso di T .

□

1.2.2 Esistenza e unicità della soluzione

Definizione 1.2. Siano dati uno spazio di Banach E , un elemento $u_0 \in E$ ed un intervallo reale $I = [t_0, t_0 + a]$, $a > 0$. Sia poi $f : I \times E \rightarrow E$. Consideriamo il *problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \alpha'(t) = f(t, \alpha) & \forall t \in I \setminus \{t_0\} \\ \alpha(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Si dice che una funzione $\alpha \in C(I, X)$ è *soluzione forte* del problema se

- $\alpha(t_0) = u_0$;
- per $t \in I \setminus \{t_0\}$, α è derivabile e $\alpha'(t) = f(t, \alpha(t))$.

Teorema 1.3. Con le notazioni precedenti, sia $S := \{x \in E : \|x - u_0\| \leq b\}$, con $b > 0$. Sia poi $f \in C(I \times S, E)$ e *uniformemente lipschitziana rispetto al secondo argomento*, cioè

$$\exists K > 0 \quad : \quad \|f(t, u) - f(t, v)\| \leq K\|u - v\| \quad \forall t \in I, \forall u, v \in S.$$

Allora, posto $c := \min\{a, \frac{b}{M}\}$ dove M è tale che $\|f(t, u)\| \leq M$ su $I \times S$, su $I_0 := [t_0, t_0 + c]$ esiste una ed una sola funzione α , a valori in S , soluzione forte del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \alpha'(t) = f(t, \alpha) & \forall t \in I_0 \setminus \{t_0\} \\ \alpha(t_0) = u_0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Dimostrazione. Osserviamo che la limitatezza di $\|f(t, u)\|$ su $I \times S$ è assicurata dalla condizione di lipschitzianità. Infatti, per $(t, u) \in I \times S$:

$$\|f(t, u)\| \leq \|f(t, u) - f(t, u_0)\| + \|f(t, u_0)\| \leq K\|u - u_0\| + \|f(t, u_0)\| \leq Kb + m,$$

e l'esistenza di m tale che $\|f(t, u_0)\| \leq m$ per ogni $t \in I$ segue dalla continuità della funzione $t \mapsto f(t, u_0)$ sul compatto I .

Consideriamo ora lo spazio di Banach

$$F := (C(I_0, X), \|\cdot\|_F),$$

dove $\|\gamma\|_F = \sup_{t \in I_0} \|\gamma(t)\|$. Sia poi

$$D := \{\gamma \in C(I_0, X) \quad : \quad \|\gamma(t) - u_0\| \leq b \quad \forall t \in I_0\},$$

e definiamo l'operatore

$$T : D \rightarrow F \quad , \quad T(\gamma)(t) := u_0 + \int_{t_0}^t f(s, \gamma(s)) ds \quad , \quad \forall \gamma \in D, t \in I_0.$$

Si ha:

- D è chiuso.

Se $(\gamma_n)_n$ è una successione in D che converge a $\gamma \in \overline{D}$, allora

$$\|\gamma(t) - u_0\| \leq \|\gamma(t) - \gamma_n(t)\| + \|\gamma_n(t) - u_0\| \leq \|\gamma - \gamma_n\|_F + b \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b,$$

dunque $\gamma \in D$.

- T ha valori in D .

$$\forall \gamma \in D, t \in I_0 \quad \|T(\gamma)(t) - u_0\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s, \gamma(s))\| ds \leq Mc \leq b.$$

- Esiste $m \in \mathbb{N}$ per cui T^m è una contrazione. Per ogni $\gamma, \delta \in D$

$$\|T(\gamma)(t) - T(\delta)(t)\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s, \gamma(s)) - f(s, \delta(s))\| ds \leq K(t - t_0) \|\gamma - \delta\|_F;$$

Induttivamente,

$$\begin{aligned} \|T^m(\gamma)(t) - T^m(\delta)(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \|f(s, T^{m-1}(\gamma)(s)) - f(s, T^{m-1}(\delta)(s))\| ds \leq \\ &\leq \frac{K^m(t - t_0)^m}{m!} \|\gamma - \delta\|_F \leq \frac{K^m c^m}{m!} \|\gamma - \delta\|_F. \end{aligned}$$

È sufficiente allora prendere m in modo che sia $(Kc)^m < m!$.

In definitiva, T ammette un unico punto fisso $\alpha \in D$, cioè esiste un'unica soluzione di 1.2. \square

Denotiamo con $[t_0, T[$ l'intervallo massimale di esistenza di α .

Lemma 1.1. *Se $T < +\infty$,*

$$\nexists \lim_{t \uparrow T} \alpha(t).$$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista $v_0 \in E$ tale che $v_0 = \lim_{t \uparrow T} \alpha(t)$, e sia β la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \beta'(t) = f(t, \beta) \\ \beta(T) = v_0, \end{cases}$$

definita in un intorno di T . Ma allora la funzione

$$\gamma(t) := \begin{cases} \alpha(t) & \text{per } t \in [t_0, T[\\ \beta(t) & \text{per } t \in [T, T + \epsilon[\end{cases}$$

è una soluzione di 1.2 definita su $[t_0, T + \epsilon[$, e questo costituisce un assurdo. \square

Lemma 1.2. *Sia A un sottoinsieme chiuso di E . Se esiste $c > 0$ per cui $\|f(t, v)\| \leq c$ per ogni $v \in A$ e per ogni $t \in [t_0, T[$, e se $\alpha(t) \in A$ per ogni $t \in [t_0, T[$, allora*

$$T = +\infty.$$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $T < +\infty$. Allora, se $t_n \in [t_0, T[$, per ogni k, h vale:

$$\|\alpha(t_k) - \alpha(t_h)\| = \left\| \int_{t_k}^{t_h} \alpha'(s) ds \right\| = \left\| \int_{t_k}^{t_h} f(s, \alpha) ds \right\| \leq \int_{t_k}^{t_h} \|f(s, \alpha)\| ds \leq c|t_h - t_k|.$$

Ne segue che, per $t_n \uparrow T$, $(\alpha(t_n))_n$ è di Cauchy e dunque converge in A , assurdo per il lemma 1.1. \square

1.3 Il metodo di *steepest descent*

1.3.1 Differenziabilità in spazi di Banach; punti critici

Sia E uno spazio di Banach. Un *funzionale* su E è una funzione continua

$$J : E \rightarrow \mathbb{R}.$$

Definizione 1.3. Siano E, F spazi di Banach. Diciamo che $J : E \rightarrow F$ è *differenziabile* (secondo Fréchet) in $u \in E$ con derivata $dJ(u) \in L(E, F)$ se, per $h \rightarrow 0$,

$$J(u + h) - J(u) = dJ(u)h + o(\|h\|_E).$$

Si dice che J è *differenziabile in E* se J è differenziabile in ogni punto di E . Se J è differenziabile in E , e la mappa

$$E \mapsto L(E, \mathbb{R}) \quad , \quad u \mapsto dJ(u)$$

è continua, si dice che

$$J \in C^1(E, \mathbb{R}).$$

Definizione 1.4. Sia dato il funzionale $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ sullo spazio di Banach E , e sia $z \in E$. Si dice che z è un *punto critico* di J se J è differenziabile in z e $dJ(z) = 0$. Dato invece un numero $c \in \mathbb{R}$, si dice che c è un *livello critico* di J se esiste un punto critico $z \in E$ per cui $J(z) = c$.

Osservazione.

- Se E è uno spazio di Hilbert, sia $J \in C^1(E, \mathbb{R})$. Fissato $u \in E$, dal teorema di rappresentazione di Riesz segue che esiste un unico $v \in E$ per cui

$$\langle v, h \rangle_E = dJ(u)h \quad \forall h \in E.$$

v sarà chiamato il *gradiente* di J in u ; si denota

$$v =: \nabla J(u).$$

Dunque un punto critico di J è soluzione dell'equazione

$$\nabla J(u) = 0.$$

- Se su E è definito altro un prodotto scalare

$$b : E \times E \rightarrow \mathbb{R},$$

si può definire un gradiente rispetto a b . Fissato $u \in E$, se esiste un unico $w \in E$ per cui

$$b(w, h) = dJ(u)h \quad \forall h \in E,$$

si dice che w è il *gradiente di J rispetto a b in u* e si denota

$$w =: \nabla_b J(u).$$

Proposizione 1.1. *Sia E uno spazio di Banach. Siano date $g :]a, b[\rightarrow E$ differenziabile in $t \in]a, b[$ ed $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in $g(t)$.*

1. $d(f \circ g)(t) = df(g(t)) \circ dg(t)$.
2. Se E è di Hilbert,

$$d(f \circ g)(t) = \langle \nabla f(g(t)), g'(t) \rangle.$$

Dimostrazione. $\tau \in]a, b[, \tau \rightarrow t$.

$$\begin{aligned} (f \circ g)(\tau) &= f(g(\tau)) = f(g(t) + dg(t)(\tau - t) + o(\tau - t)) = \\ &= f(g(t)) + df(g(t))(g(\tau) - g(t)) + o(g(\tau) - g(t)) + o(dg(t)(\tau - t) + o(\tau - t)) = \\ &= (f \circ g)(t) + (df(g(t)) \circ dg(t))(\tau - t) + o(\tau - t). \end{aligned}$$

Se E è di Hilbert, riformulando in termini del gradiente otteniamo:

$$d(f \circ g)(t)h = (df(g(t)) \circ dg(t))h = \langle \nabla f(g(t)), dg(t)h \rangle = \langle \nabla f(g(t)), g'(t) \rangle h.$$

□

L'esistenza di punti critici è strettamente legata alle deformazioni di sottolivelli.

Definizione 1.5. Sia E uno spazio di Hilbert, sia $a \in \mathbb{R}$ e sia dato un funzionale $J : E \rightarrow \mathbb{R}$. L'insieme

$$E^a := \{u \in E \quad : \quad J(u) \leq a\}$$

è un *sottolivello* di J in E .

Definizione 1.6. Dato $A \subset E$, $i \in C(A, E)$ è una *deformazione* di A in E se è omotopa all'identità, cioè se esiste $F \in C(A \times [0, 1], E)$ tale che

$$\forall u \in A \quad \begin{cases} F(u, 0) = u, \\ F(u, 1) = i(u). \end{cases}$$

1.3.2 Il flusso di *steepest descent*

Definizione 1.7. Sia $J \in C^1(E, \mathbb{R})$. Il *flusso di steepest descent* di J (o brevemente la *steepest descent* di J) è la funzione $\alpha(u, t)$ tale che, per ogni $u \in E$, $t \mapsto \alpha(u, t)$ sia soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \alpha'(t) = -\nabla J(\alpha(t)) \\ \alpha(0) = u. \end{cases}$$

Denoteremo anche $\alpha(u, t) =: \alpha_u(t)$.

Lemma 1.3. Sia α la *steepest descent* del funzionale $J \in C^1(E, \mathbb{R})$. Allora valgono i fatti seguenti.

1. Per ogni $u \in E$, $t \mapsto J(\alpha(u, t))$ è decrescente sull'intervallo massimale $[0, T_u[$ di definizione della soluzione $t \mapsto \alpha(u, t)$.
2. Per ogni $u \in E$ e per ogni $t, \tau \in [0, T_u[$,

$$J(\alpha(u, t)) - J(\alpha(u, \tau)) = - \int_{\tau}^t \|\nabla J(\alpha(u, s))\|^2 ds.$$

3. Se J è limitato inferiormente, $T_u = +\infty \quad \forall u \in E$.

Dimostrazione. 1. Fissato $u \in E$,

$$\frac{d}{dt} J(\alpha_u(t)) = \langle \nabla J(\alpha_u(t)), \alpha'_u(t) \rangle = -\|\nabla J(\alpha_u(t))\|^2 \leq 0.$$

2. Segue da quanto visto sopra:

$$J(\alpha(u, t)) - J(\alpha(u, \tau)) = \int_{\tau}^t \frac{d}{ds} J(\alpha_u(s)) ds = - \int_{\tau}^t \|\nabla J(\alpha_u(s))\|^2 ds.$$

3. Per assurdo, supponiamo che esista $v \in E$ con $T_v < +\infty$. Allora, da 2. con $\tau = 0$,

$$J(\alpha_v(t)) - J(v) = - \int_0^t \|\nabla J(\alpha_v(s))\|^2 ds.$$

Siccome J è limitato dal basso, esiste $M > 0$ tale che

$$\int_0^t \|\nabla J(\alpha_v(s))\|^2 ds \leq M < +\infty.$$

Sia ora $(t_n)_n$ una successione in $[0, T_v[$, $t_n \uparrow T_v$. Allora, per ogni k, h ,

$$\begin{aligned} \|\alpha_v(t_k) - \alpha_v(t_h)\| &\leq \int_{t_h}^{t_k} \|\alpha'_v(s)\| ds = \int_{t_h}^{t_k} \|\nabla J(\alpha_v(s))\| ds \leq \\ &\leq |t_k - t_h|^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_h}^{t_k} \|\nabla J(\alpha_v(s))\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq |t_k - t_h|^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Pertanto la successione $(\alpha_v(t_n))_n$ risulta di Cauchy, portando ad un assurdo per il lemma 1.1, siccome abbiamo supposto $T_v < +\infty$. □

1.3.3 Esistenza di minimi di funzionali

Proposizione 1.2. *Supponiamo che esistano $\delta > 0$, $c \in \mathbb{R}$ per cui*

$$\|\nabla J(u)\| \geq \delta \quad \forall u \in E : |J(u) - c| \leq \delta.$$

Allora esiste una deformazione i di $E^{c+\delta}$, tale che

$$i(E^{c+\delta}) \subset E^{c-\delta}.$$

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che J sia inferiormente limitato. Per la 3. del lemma 1.3, $T_u = +\infty$ per ogni $u \in E$. Sia $T := \frac{2}{\delta}$, e poniamo

$$i(u) := \alpha(u, T),$$

dove α è la *steepest descent* di J .

Proviamo che

$$J(i(u)) \leq c - \delta \quad \forall u \in E^{c+\delta}.$$

Supponiamo per assurdo che esista $v \in E^{c+\delta}$ per cui $c - \delta < J(i(v)) = J(\alpha_v(T))$. Siccome $s \mapsto J(\alpha_v(s))$ è decrescente (lemma 1.3, 1.), si avrà

$$c - \delta < J(\alpha_v(s)) \quad \forall s \in [0, T].$$

Ora, $\|\nabla J(\alpha_v(s))\| \geq \delta$ per ipotesi, e inoltre $J(v) \leq c + \delta$ perché $v \in E^{c+\delta}$. Pertanto, per la 2. del lemma 1.3 con $\tau = 0$,

$$\begin{aligned} J(\alpha_v(T)) &= J(v) - \int_0^T \|\nabla J(\alpha_v(s))\|^2 ds \leq J(v) - \delta^2 T = \\ &= J(v) - 2\delta \leq c + \delta - 2\delta = c - \delta, \end{aligned}$$

e questo costituisce un assurdo.

Infine osserviamo che, se J non è limitato dal basso, è sufficiente considerare

$$\tilde{J}(u) := \eta(J(u)),$$

con $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ strettamente crescente ed inferiormente limitata, tale che $\eta(s) = s$ per ogni $s \geq c - \delta$. Così \tilde{J} risulta limitato dal basso, e inoltre $\tilde{J}(u) = J(u)$ per ogni $u \in \{u \in E : J(u) \geq c - \delta\}$. Quindi, ripetendo gli argomenti precedenti, segue la tesi. \square

Definizione 1.8. Una successione $(u_n)_n$ in E , tale che $J(u_n)$ sia limitato e $\nabla J(u_n) \rightarrow 0$, è detta una *successione di Palais-Smale* (brevemente, una *(PS)-successione*). Si dice che $(u_n)_n$ è una *(PS)_c-successione*, dove $c \in \mathbb{R}$, se $(u_n)_n$ è una *(PS)-successione* e $J(u_n) \rightarrow c$.

Diciamo che J soddisfa la *condizione (PS)* (rispettivamente *(PS)_c*), se ogni *(PS)-successione* (rispettivamente *(PS)_c-successione*) ammette una sottosuccessione convergente.

Teorema 1.4. Sia $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ limitato inferiormente e verificante la condizione *(PS)_m* per

$$m := \inf_{u \in E} J(u) > -\infty.$$

Allora

$$\exists z \in E \quad : \quad \begin{cases} J(z) = m, \\ \nabla J(z) = 0. \end{cases}$$

Inoltre, se $\alpha = \alpha(u, t)$ è la *steepest descent* di J e se v è un punto di E tale che non ci siano livelli critici in $[m, J(v)]$,

$$J(\alpha(v, t)) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} m.$$

Dimostrazione. Consideriamo una successione $(u_n)_n$ tale che

$$J(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} m.$$

Possiamo assumere, a meno di sottosuccessioni, che

$$\|\nabla J(u_n)\| \rightarrow 0,$$

altrimenti esisterebbe $\delta > 0$ tale che $\|\nabla J(u_n)\| \geq \delta$ per ogni n tale che $|J(u_n) - m| \leq \delta$, e ne seguirebbe (Proposizione 1.2) l'esistenza di una deformazione i di $E^{m+\delta}$ in E per cui

$$i(E^{m+\delta}) \subset E^{m-\delta}.$$

Questo non è possibile perché $E^{m-\delta} = \emptyset$, mentre $E^{m+\delta} \neq \emptyset$.

Allora $(u_n)_n$ è una $(PS)_m$ -successione: per ipotesi, $(u_n)_n$ ammette una sottosuccessione che converge ad un certo $z \in E$. Ne segue che

$$J(z) = m \quad , \quad \nabla J(z) = 0.$$

Proviamo ora che la *steepest descent* di J si avvicina, per $t \rightarrow +\infty$, ad un punto di minimo. Intanto il lemma 1.3 (3.) garantisce che α_v sia definita in $[0, +\infty]$, poiché J è limitato inferiormente. Per il lemma 1.3 (1.), $t \mapsto J(\alpha(v, t))$ è decrescente; inoltre è limitata inferiormente, quindi

$$\exists \lim_{t \rightarrow +\infty} J(\alpha(v, t)) =: w \quad , \quad w \leq J(v).$$

Mostriamo ora che

$$w = m.$$

Supponiamo per assurdo che $w \neq m$, cioè che $w \in]m, J(v)]$. Allora esiste $\delta > 0$ per cui

$$\|\nabla J(u)\| \geq \delta \quad \forall u : |J(u) - w| \leq \delta.$$

Segue dunque, dalla Proposizione 1.2, che

$$\exists \bar{t} \in [0, +\infty] \quad : \quad i(E^{w+\delta}) \subset E^{w-\delta},$$

dove $i(u) := \alpha(u, \bar{t})$. In altre parole,

$$\exists \bar{t} \in [0, +\infty] \quad : \quad \alpha(v, \bar{t}) < w;$$

questo è assurdo perché $t \mapsto J(\alpha(v, t))$ è decrescente. Pertanto

$$J(\alpha(v, t)) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} m.$$

□

In definitiva, la *steepest descent* di un funzionale fornisce una successione minimizzante; il fatto che tale successione si determini risolvendo un problema di Cauchy rende questo metodo molto efficiente dal punto di vista dell'implementazione. Il metodo della *steepest descent* è trattato (in una forma più generale che consente anche lo studio di minimi vincolati) nel testo di Ambrosetti e Malchiodi [3], su cui ci si è basati in questa sezione.

Capitolo 2

Dalla *heat equation* alla diffusione di Perona-Malik

Le tecniche di regolarizzazione sono perlopiù mirate ad eliminare gli effetti della degradazione subita da un'immagine digitale, costituita per esempio dal rumore introdotto dal dispositivo di acquisizione. Si rende necessario quindi semplificare l'immagine per rimuovere eventuali elementi di disturbo ma enfatizzarne al contempo certi dettagli, quali i contorni.

I primi flussi di diffusione che hanno trovato applicazione nell'elaborazione di immagini erano lineari; un'evoluzione successiva di questi metodi ha portato all'introduzione di diffusioni non lineari e al tentativo di conservare le caratteristiche geometriche delle immagini. Presentiamo ora, in ordine cronologico, tre esempi di processi di diffusione.

2.1 La *heat equation*

La *heat equation* (equazione del calore)

$$I_t = \Delta I$$

è stata il primo processo di diffusione applicato ad immagini.

L'equazione del calore si trova come equazione di *steepest descent* in L^2 del funzionale

$$J(I) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla I\|^2.$$

J è ben definito sullo spazio di Hilbert $W_0^1(\Omega)$, che si ottiene come completamento dello spazio $C_0^1(\Omega)$ delle funzioni di classe C^1 su Ω e a supporto

compatto, rispetto alla norma

$$\|u\|_{\nabla} := \|\ |\nabla u|\ \|_2.$$

Il differenziale di Fréchet di J è

$$dJ(I)h = \langle I, h \rangle_{\nabla}.$$

Infatti:

$$\begin{aligned} J(I+h) - J(I) - \langle I, h \rangle_{\nabla} &= \frac{1}{2}\|I+h\|_{\nabla}^2 - \frac{1}{2}\|I\|_{\nabla}^2 - \langle I, h \rangle_{\nabla} = \\ &= \frac{1}{2}\|I\|_{\nabla}^2 + \frac{1}{2}\|h\|_{\nabla}^2 + \langle I, h \rangle_{\nabla} - \frac{1}{2}\|I\|_{\nabla}^2 - \langle I, h \rangle_{\nabla} = \\ &= \frac{1}{2}\|h\|_{\nabla}^2 = o(\|h\|_{\nabla}). \end{aligned}$$

Ora, osservando che $W_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, su W_0^1 si può considerare il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ indotto da L^2 . Il gradiente di J rispetto a tale prodotto scalare, in un punto $I \in C^2(\Omega)$, è

$$\nabla_{L^2} J(I) = -\Delta I.$$

Infatti, integrando per parti,

$$dJ(I)h = \int_{\Omega} \nabla I \nabla h = - \int_{\Omega} \Delta I h = \langle \Delta I, h \rangle_2.$$

Si osservi che si possono scegliere funzioni test $h \in C_0^\infty$, per cui l'espressione ha senso se ΔI è integrabile sui compatti di Ω . Per questa equazione di *steepest descent* si ha il seguente risultato classico di regolarità.

Teorema 2.1. Per ogni dato iniziale $u_0 \in W_0^1$, la soluzione dell'equazione di *steepest descent* in L^2 associata al funzionale $J(I) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla I\|^2$ e con dato nullo su $\partial\Omega$ è di classe C^∞ su $\Omega \times [\epsilon, +\infty[$ per ogni $\epsilon > 0$.

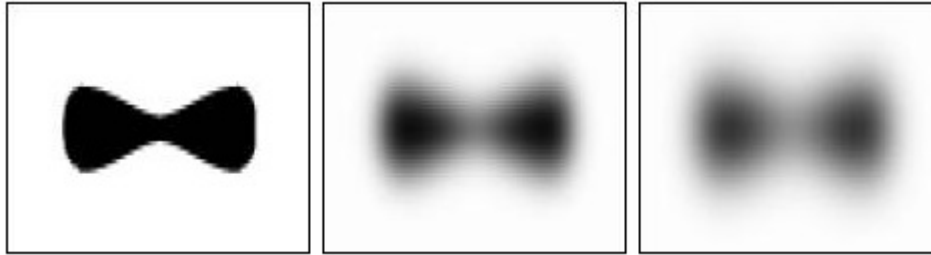


Figura 2.1: Diffusione di un'immagine tramite la *heat equation*. (Immagine tratta da [1])

La scelta del funzionale J ha come vantaggio la linearità; le immagini filtrate tramite la *heat equation* acquistano regolarità, e questo permette l'eliminazione del rumore.

In fisica, la *heat equation* modella l'evoluzione temporale delle temperature sulla superficie di un foglio metallico; nel caso delle immagini si ottiene, analogamente, una diffusione in tutte le direzioni che non tiene conto della geometria dell'immagine: i contorni vengono danneggiati, e non vengono mantenute le componenti connesse.

Osservazione.

$(W_0^1, \|\cdot\|_{\nabla})$ è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare

$$\langle u, v \rangle_{\nabla} := \langle |\nabla u|, |\nabla v| \rangle_2.$$

Calcolando il gradiente del funzionale J su tale spazio, è possibile applicare la teoria sviluppata nel Capitolo 1 ottenendo una diversa equazione.

- Il gradiente di J in W_0^1 è $\nabla J(I) = I$, dunque l'equazione di *steepest descent* associata a J è

$$I_t = I.$$

- J è limitato dal basso:

$$J(I) \geq 0 \quad \forall I \in W_0^1.$$

In particolare $0 = \inf_{I \in W_0^1} J(I)$.

- J verifica la condizione $(PS)_0$.

Sia $(I_n)_n$ una $(PS)_0$ -successione, cioè:

$$J(I_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad , \quad \nabla J(I_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Allora $dJ(I_n) \rightarrow 0$; d'altra parte,

$$\|dJ(I)\|_{(W_0^1)^*} = \sup_{\|h\|=1} |dJ(I_n)h| = \|I_n\|_{W_0^1}.$$

Pertanto

$$I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

I fatti precedenti sono sufficienti a garantire l'esistenza di punti di minimo, e la possibilità di approssimarli tramite soluzioni dell'equazione $I_t = I$. È possibile dimostrare che anche nei due successivi esempi di flussi di diffusione sono verificate le ipotesi del Teorema 1.4.

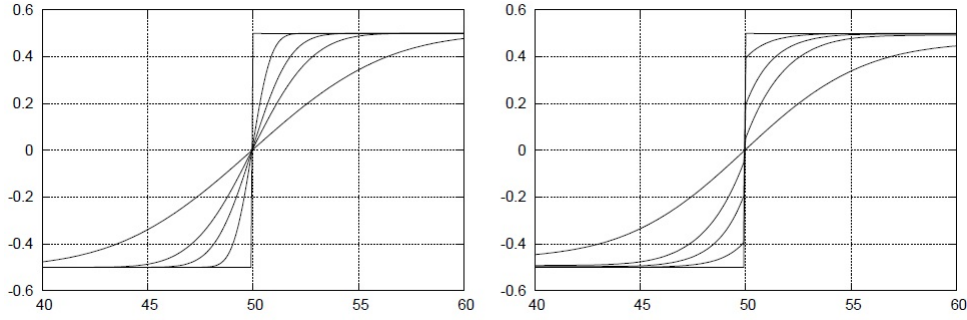


Figura 2.2: Diffusione di una funzione costante a tratti in una dimensione, tramite l'equazione del calore (immagine a sinistra) e tramite l'equazione di *steepest descent* di J in W_0^1 (immagine a destra). Si può osservare che l'equazione in L^2 regolarizza immediatamente la discontinuità, che invece permane per un intervallo finito di tempo usando l'equazione in W_0^1 ; questo contribuisce a spiegare perché, nel caso delle immagini, la diffusione in W_0^1 conserva i contorni per un tempo leggermente più lungo. (Immagine tratta da [6])

2.2 Il funzionale di *Total Variation* (TV)

La necessità di controllare la direzione di diffusione per preservare i contorni porta all'introduzione di un flusso generato dal funzionale

$$J(I) := \int_{\Omega} \|\nabla I\|.$$

L'obiettivo è quello di diffondere in direzione tangenziale, e non diffondere in direzione normale agli insiemi di livello dell'immagine. A questo scopo si minimizza un funzionale dipendente dal gradiente, che è ortogonale agli insiemi di livello. Risulta

$$-\nabla J(I) = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla I}{|\nabla I|} \right).$$

Ora,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla I}{|\nabla I|} \right) &= \sum_i \partial_i \left(\frac{\partial_i I}{|\nabla I|} \right) = \sum_i \frac{\partial_i I |\nabla I| - \partial_i I \partial_i |\nabla I|}{|\nabla I|^2} = \\ &= \frac{1}{|\nabla I|} \left(\Delta I - \sum_i \frac{\partial_i I}{|\nabla I|} \sum_j \left(\frac{\partial_j \partial_i I \partial_j I}{|\nabla I|} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{|\nabla I|} \left(\Delta I - \sum_j \left(\sum_i \partial_j \partial_i I \frac{\partial_i I}{|\nabla I|} \right) \frac{\partial_j I}{|\nabla I|} \right) = \\ &= \frac{1}{|\nabla I|} (\Delta I - \langle \mathcal{H}\nu, \nu \rangle), \end{aligned}$$

dove \mathcal{H} è la matrice hessiana di I , e ν è il vettore normale agli insiemi di livello. Questa scrittura evidenzia come la diffusione venga effettuata in tutte le direzioni (ΔI) eccetto quella normale, rappresentata da

$$\langle \mathcal{H}\nu, \nu \rangle.$$

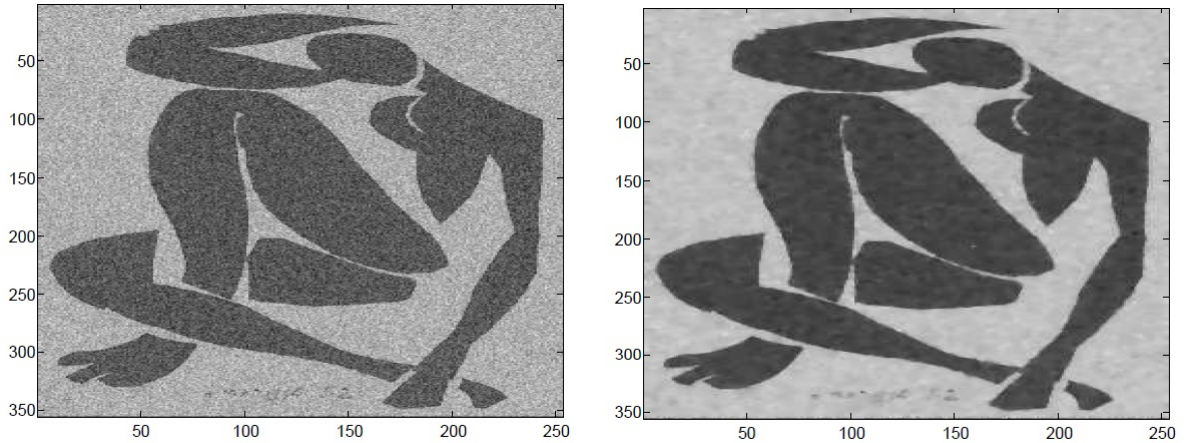


Figura 2.3: Regolarizzazione di un'immagine tramite il flusso di diffusione generato dal funzionale TV.

2.3 L'algoritmo di Perona-Malik

Un altro filtro molto usato è quello proposto da Perona e Malik [4], dato da

$$I_t = \operatorname{div}(f(|\nabla I|)\nabla I).$$

Osserviamo che il caso

$$f(s) = s^{-1}$$

si riconduce alla *total variation*. f è detta funzione di *diffusività*, e il suo ruolo è quello di controllare, in modo dipendente dal gradiente, l'entità della diffusione nelle varie direzioni. In modo analogo alla *TV*, è possibile esplicitare in modo separato le direzioni di diffusione. Si ottiene:

$$\operatorname{div}(f(|\nabla I|)\nabla I) = f(|\nabla I|) (\Delta I - \langle \mathcal{H}\nu, \nu \rangle) + (f(|\nabla I|) + f'(|\nabla I|)|\nabla I|) \langle \mathcal{H}\nu, \nu \rangle.$$

L'algoritmo di Perona-Malik permette dunque di pesare, in base alla scelta della f , la diffusione lungo le direzioni tangenziale e normale. Una scelta

comune di funzione di diffusività è

$$f(|\nabla I|) = \frac{1}{1 + \frac{|\nabla I|^2}{\lambda^2}}.$$

Anche in questo caso l'equazione si ottiene minimizzando un funzionale, in particolare

$$J(I) := \int_{\Omega} \phi(|\nabla I|),$$

dove $\phi' = f$.

È interessante osservare che questo filtro ha portato da subito a risultati inspiegabilmente buoni nella regolarizzazione di immagini. Solo in tempi successivi si è scoperto che nell'implementazione si faceva uso di differenze finite non convergenti alle derivate; dunque il metodo utilizzato nella pratica non corrisponde in effetti a quello descritto.

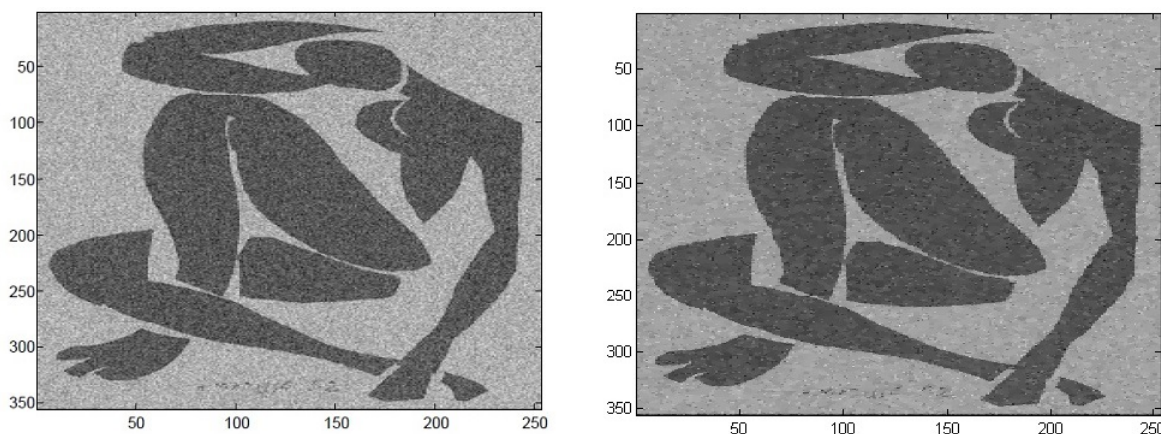


Figura 2.4: Un'immagine regolarizzata con l'algoritmo di Perona-Malik.

Capitolo 3

Diffusione mediante l'operatore di Laplace-Beltrami

Un ulteriore metodo per modellizzare la geometria di un'immagine è quello di considerare il grafico della funzione $I(x, y)$ come una varietà bidimensionale immersa in uno spazio a dimensione più alta. Nella seguente sezione si introduce, basandosi principalmente sul testo di Jürgen Jost [5], il concetto di metrica riemanniana su una varietà differenziabile: questo permette di operare sul grafico $z = I(x, y)$ tramite una nozione di distanza che modella le sue caratteristiche geometriche.

3.1 Metriche riemanniane

3.1.1 Varietà differenziabili di \mathbb{R}^N

Richiamiamo le nozioni di varietà e spazio tangente.

Definizione 3.1. Sia $M \subset \mathbb{R}^N$, $M \neq \emptyset$. Si dice che M è una *varietà differenziabile di \mathbb{R}^N di dimensione d* , dove $1 \leq d < N$, se per ogni $p \in M$ esistono un intorno U di p in M ed una funzione $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{N-d}$, $f \in C^\infty$ per cui:

1. $M \cap U = \{u \in U : f(u) = 0\}$;
2. la matrice Jacobiana di f in p ha rango massimo, cioè $N - d$.

Si dice che f è una *equazione locale di M in p* .

Osservazione. Come conseguenza del teorema di Dini sulle funzioni implicite, ogni varietà differenziabile di dimensione d è localmente grafico di una funzione

di d variabili reali. Ne segue che, per ogni $p \in M$, esistono un intorno U di p in M ed un diffeomorfismo C^∞

$$x : U \rightarrow \Omega,$$

dove Ω è un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^d .

Osservazione. Localmente, cioè fissato un punto $p \in M$ e fissati U e x come sopra, ogni punto $q \in U$ è univocamente determinato dalla sua immagine $x(q) \in \Omega$, con la quale è spesso identificato. Si usa chiamare *coordinate locali* di q le componenti di $x(q) \in \mathbb{R}^d$: la scrittura

$$x = (x^1, \dots, x^d)$$

indica le coordinate euclidee in \mathbb{R}^d , che verranno adottate come coordinate locali su M .

Definizione 3.2. Sia M una varietà differenziabile di \mathbb{R}^N di dimensione d , e sia $p \in M$. Un vettore $h \in \mathbb{R}^N$ si dice *tangente a M nel punto p* se esiste una curva differenziabile $\psi :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow M$ tale che

$$\psi(0) = p, \quad \psi'(0) = h.$$

L'insieme di tutti i vettori di \mathbb{R}^N tangenti ad M in p si chiama lo *spazio tangente ad M in p* , e si denota con $T_p M$.

Teorema 3.1. Sia M una varietà differenziabile di \mathbb{R}^N di dimensione d , e sia f una sua equazione locale in un punto $p \in M$. Allora

$$T_p M = \ker df(p).$$

□

Corollario 3.1. $T_p M$ è uno spazio vettoriale di dimensione d .

□

3.1.2 Varietà riemanniane

Definizione 3.3. Una *metrica riemanniana* su una varietà differenziabile M è determinata da un prodotto scalare su ogni spazio tangente $T_p M$ che dipende in modo C^∞ dal punto base $p \in M$.

Una *varietà riemanniana* è una varietà differenziabile sulla quale sia definita una metrica riemanniana.

Esplicitamente, date coordinate locali $x = (x^1, \dots, x^d)$ su M , una metrica è rappresentata da una matrice simmetrica e definita positiva

$$(g_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,d}, \quad g_{ij} \in C^\infty \quad \forall i, j.$$

Il prodotto scalare di due vettori tangenti $v, w \in T_p M$, rappresentati da coordinate (v^1, \dots, v^d) e (w^1, \dots, w^d) rispettivamente, sarà dunque

$$\langle v, w \rangle_g := g_{ij}(x(p))v^i w^j.$$

Osservazione. Definire $(g_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,d}$ basandosi su una particolare scelta di coordinate locali $x = (x^1, \dots, x^d)$ non è restrittivo, perché la dipendenza di tipo C^∞ da p richiesta nella definizione non dipende dalla scelta delle coordinate.

Le seguenti definizioni chiariscono come un prodotto scalare del tipo $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ introduca una nozione di distanza tra due punti di una varietà.

Definizione 3.4. Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso in \mathbb{R} , e sia $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una curva differenziabile. Si definisce la *lunghezza di γ* nel modo seguente:

$$L(\gamma) := \int_a^b \left\| \frac{d\gamma}{dt}(t) \right\|_g dt,$$

dove $\|v\|_g := \sqrt{\langle v, v \rangle_g}$. Se γ è una curva differenziabile a tratti, la sua lunghezza è definita come la somma delle lunghezze dei tratti differenziabili.

In coordinate locali $x = (x^1(\gamma(t)), \dots, x^d(\gamma(t)))$, si ottiene:

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(x(\gamma(t))) \frac{dx^i}{dt}(\gamma(t)) \frac{dx^j}{dt}(\gamma(t))} dt.$$

Definizione 3.5. Sia M una varietà riemanniana connessa e siano $p, q \in M$. Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ una metrica Riemanniana su M . Si definisce la *distanza* tra p e q come

$$d_g(p, q) := \inf A,$$

dove

$$A := \{L(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \rightarrow M \text{ curva differenziabile a tratti con } \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\}.$$

Osservazione. La definizione è ben posta, perché due punti $p, q \in M$ possono sempre essere collegati tramite una curva differenziabile a tratti.

Infatti, l'insieme L_p dei punti $q \in M$ che possono essere collegati a p tramite una curva differenziabile a tratti risulta aperto; L_p non è vuoto perché contiene p . D'altra parte, anche $M \setminus L_p = \bigcup_{q \notin L_p} L_q$ è aperto. Pertanto, siccome M è connessa, risulta $M = L_p$.

La distanza così definita soddisfa inoltre le usuali proprietà, conferendo una struttura metrica alla varietà M .

Proposizione 3.1. *Sia M una varietà differenziabile connessa, e sia $(g_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,d}$ una metrica riemanniana su M .*

1. $d_g(p, q) \geq 0$ per ogni $p, q \in M$; $d_g(p, q) = 0$ se e solo se $p = q$.
2. $d_g(p, q) = d_g(q, p)$.
3. $d_g(p, q) \leq d_g(p, r) + d_g(r, q)$ per ogni $p, q, r \in M$.

La distanza d_g induce su M la stessa topologia determinata dalla metrica euclidea.

Dimostrazione. Dalla definizione segue immediatamente che

$$d_g(p, q) \geq 0, \quad d_g(p, q) = d_g(q, p), \quad d_g(p, q) \leq d_g(p, r) + d_g(r, q).$$

Rimane da provare che $d_g(p, q) > 0$ per p e q tali che $p \neq q$.

Sia $x : U \rightarrow \Omega$ un diffeomorfismo dall'intorno U di p in M all'aperto Ω di \mathbb{R}^d .

Allora esiste $\epsilon > 0$ tale che

- $B_\epsilon(x(p)) \subset \Omega$;
- $q \notin x^{-1}(B_\epsilon(x(p)))$.

Pertanto, per ogni curva differenziabile a tratti

$$\gamma : [a, b] \rightarrow M \text{ con } \gamma(a) = p, \gamma(b) = q,$$

$x(\gamma)$ interseca il bordo di $B_\epsilon(x(p))$ in un punto z . Ora, siccome $(g_{ij}(x))$ è definita positiva e continua sul compatto $B_\epsilon(x(p))$, esiste $\lambda > 0$ per cui

$$g_{ij}(y)\xi^i\xi^j \geq \lambda|\xi|^2 \quad \forall y \in B_\epsilon(x(p)), \forall \xi = (\xi^1, \dots, \xi^d) \in \mathbb{R}^d.$$

Dato che la distanza (euclidea) di z da p è ϵ ,

$$L(\gamma) \geq L(\gamma \cap x^{-1}(B_\epsilon(x(p)))) \geq \lambda\epsilon > 0.$$

Proviamo infine che ogni sfera euclidea $B(p, \epsilon)$ contiene una sfera

$$B^g(p, \delta) := \{q \in M : d_g(p, q) < \delta\},$$

e viceversa. Per continuità, esistono $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ per cui

$$\lambda_1^2 |\xi|^2 \leq g_{ij}(q) \xi^i \xi^j \leq \lambda_2^2 |\xi|^2 \quad \forall q \in B(p, \epsilon), \xi \in \mathbb{R}^d,$$

perciò

$$\lambda_1 |p - q| \leq d_g(p, q) \leq \lambda_2 |p - q| \quad \forall q \in B(p, \epsilon).$$

Dunque è sufficiente prendere δ tale che $\lambda_2 \delta < \epsilon$ per avere

$$B(p, \lambda_1 \delta) \subset B^g(p, \delta) \subset B(p, \lambda_2 \delta).$$

□

Osservazione. Le metriche riemanniane possono essere viste come una generalizzazione della metrica euclidea. Infatti questa si ritrova come caso particolare, per

$$g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{per } i = j \\ 0 & \text{per } i \neq j. \end{cases}$$

Per funzioni definite su varietà riemanniane si darà in seguito una generalizzazione delle nozioni di gradiente e di laplaciano note su spazi euclidei.

3.1.3 La metrica indotta da un'immagine

Consideriamo ora un'immagine

$$I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad I(x, y) \in [0, 256],$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Definiamo poi

$$M := \{(x, y, I(x, y)) : (x, y) \in \Omega\}.$$

M è una varietà di dimensione 2 di \mathbb{R}^3 ; è possibile costruire su di essa una metrica riemanniana, cioè un prodotto scalare sullo spazio tangente in ogni punto, nel modo seguente. Anzitutto, se $p = (x, y) \in M$, lo spazio tangente $T_p M$ è il sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 generato dai vettori

$$e_1 = (1, 0, I_x(x, y)), \quad e_2 = (0, 1, I_y(x, y)).$$

Su $T_p M = \text{Span}\{e_1, e_2\}$ definiamo il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ così:

$$\langle (\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \rangle_g := \langle \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 \rangle,$$

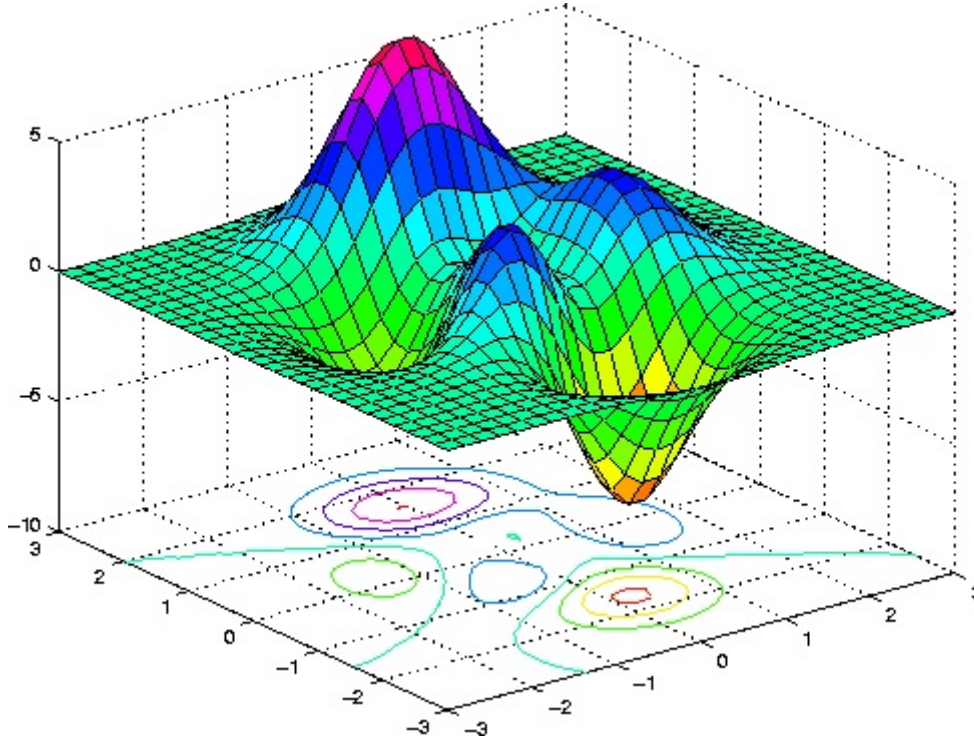


Figura 3.1: Nella metrica indotta dal grafico di $I(x, y)$, gli intorni sono deformati in base alle caratteristiche geometriche della varietà $z = I(x, y)$.

per ogni $(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \in T_p M$, dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota il prodotto scalare euclideo in \mathbb{R}^3 . Scriviamo esplicitamente la matrice $(g_{ij})_{i,j}$.

$$\begin{aligned} \langle (\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \rangle_g &= \alpha_1 \beta_1 \|e_1\|^2 + \alpha_1 \beta_2 \langle e_1, e_2 \rangle + \alpha_2 \beta_1 \langle e_2, e_1 \rangle + \alpha_2 \beta_2 \|e_2\|^2 = \\ &= (\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} \|e_1\|^2 & \langle e_1, e_2 \rangle \\ \langle e_1, e_2 \rangle & \|e_2\|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dunque

$$g_{ij}(x, y) := \langle e_i(x, y), e_j(x, y) \rangle \quad \forall i, j = 1, 2, \forall (x, y) \in M.$$

3.2 Il problema di Dirichlet su varietà riemanniane

3.2.1 Lo spazio $L^2(\Omega, \sqrt{g}dx)$

Definizione 3.6. Sia Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^d , e sia $g : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^+$ continua. Si definisce

$$L^2(\Omega, \sqrt{g}dx) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ misurabile, con } \int_{\Omega} f^2(x) \sqrt{g(x)} dx < +\infty \right\}.$$

Osservazioni.

1. Le funzioni di $L^2(\Omega, \sqrt{g}dx)$ sono da intendere come definite *quasi dappertutto* (q.d.).
2. Sia M una varietà riemanniana di dimensione d su cui è definita una metrica $(g_{ij})_{i,j=1,\dots,d}$, e sia $g = \det(g_{ij})_{i,j}$. Sia poi U un aperto di M diffeomorfo a Ω .

Una $f \in L^2(\Omega, \sqrt{g}dx)$ può allora essere pensata su U considerando la composizione $f \circ x$ (dove $x(p)$ rappresenta coordinate locali di M , per $p \in U$), e risulta:

$$\int_{\Omega} f^2(x) \sqrt{g(x)} dx = \int_U f^2(x(p)) d\sigma(p).$$

Proposizione 3.2. *Sia $f \in L^2(\Omega, \sqrt{g}dx)$, con Ω aperto limitato di \mathbb{R}^d .*

$$\|f\|_{L^2(\Omega, \sqrt{g}dx)} := \sqrt{\int_{\Omega} f^2(x) \sqrt{g(x)} dx}$$

è una norma su $L^2(\Omega, \sqrt{g}dx)$.

Dimostrazione. È sufficiente verificare che, date $f, h \in L^2(\Omega, \sqrt{g}dx)$,

$$\langle f, h \rangle_g := \int_{\Omega} f(x)h(x) \sqrt{g(x)} dx$$

è un prodotto scalare su $L^2(\Omega, \sqrt{g}dx)$. La norma indotta da questo sarà la $\|\cdot\|_{L^2(\Omega, \sqrt{g}dx)}$. Dato che $g(x) > 0 \forall x \in \Omega$, si ha:

1. $\langle f, f \rangle_g = \int_{\Omega} f^2(x) \sqrt{g(x)} dx \geq 0$;
2. $\langle f, f \rangle_g = 0 \Leftrightarrow f = 0$ q.d.;
3. si vede immediatamente che $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ è simmetrico e lineare nelle due variabili.

□

Osservazione. Ricordiamo che per un aperto limitato Ω di \mathbb{R}^d si definisce

$$L^2(\Omega) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ misurabile, con } \int_{\Omega} f^2(x) dx < +\infty \right\},$$

con norma $\|\cdot\|_2$ indotta dal prodotto scalare

$$\langle f, h \rangle_2 := \int_{\Omega} f(x)h(x)dx.$$

Questo spazio si ritrova come il caso particolare $L^2(\Omega, \sqrt{g}dx)$, dove $g \equiv 1$ si può pensare come $\det(\delta_{ij})_{i,j}$.

Proposizione 3.3. *Per ogni $g : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $L^2(\Omega, \sqrt{g}dx) = L^2(\Omega)$ e le norme*

$$\|\cdot\|_2 \quad , \quad \|\cdot\|_{L^2(\Omega, \sqrt{g}dx)}$$

sono equivalenti su tale spazio (che denoteremo brevemente con L^2).

Dimostrazione. Siccome g è continua sul compatto $\bar{\Omega}$, esistono $c_1, c_2 > 0$ per cui

$$c_1^2 \leq g(x) \leq c_2^2 \quad \forall x \in \Omega.$$

- Sia $f \in L^2(\Omega)$. Allora $\int_{\Omega} f^2 \sqrt{g} \leq c_2 \int_{\Omega} f^2$. Dunque $f \in L^2(\Omega, \sqrt{g}dx)$.
- Sia $f \in L^2(\Omega, \sqrt{g}dx)$. Allora

$$\int_{\Omega} f^2 = \frac{1}{c_1} c_1 \int_{\Omega} f^2 \leq \frac{1}{c_1} \int_{\Omega} f^2 \sqrt{g}.$$

Pertanto $f \in L^2(\Omega)$.

Infine, per ogni $f \in L^2$ si ha:

$$c_1(\|f\|_2)^2 \leq (\|f\|_{L^2(\Omega, \sqrt{g}dx)})^2 \leq c_2(\|f\|_2)^2.$$

□

3.2.2 Il gradiente riemanniano

Definizione 3.7. Sia M una varietà riemanniana su cui è definita una metrica $(g_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,d}$, e sia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Si definisce

$$\nabla_g f := (g^{ij} \partial_j f)_i,$$

dove

$$(g^{ij})_{i,j=1,\dots,N} := ((g_{ij})_{i,j=1,\dots,N})^{-1}.$$

Osservazioni.

1. Per $g_{ij} = \delta_{ij}$,

$$\nabla_g F = \nabla F.$$

2. Se f è equazione locale di M attorno ad un punto $p \in M$,

$$\nabla_g f \perp_g h \quad \forall h \in T_p M,$$

cioè

$$\langle \nabla_g f(p), h \rangle_g = 0 \quad \forall h \in T_p M.$$

Infatti, per ogni $h \in T_p M$, si ha:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_g f(p), h \rangle_g &= \langle (g^{ik} \partial_k f(p))_{i=1, \dots, N}, h \rangle_g = g_{ij}(x(p)) (g^{ik}(x(p)) \partial_k f(p)) h^j = \\ &= (g_{ij}(x(p)) g^{ik} \partial_k f(p)) h^j = (\delta_{jk}(x(p)) \partial_k f(p)) h^j = \partial_j f(p) h^j = \\ &= \langle \nabla f(p), h \rangle = 0. \end{aligned}$$

3.2.3 Lo spazio W_0^1

Definizione 3.8. Per $u \in C_0^1(\Omega) := \{f \in C^1(\Omega) : \exists r > 0, \exists x \in \Omega \text{ t.c. } \text{supp}(f) \subset \overline{B(x, r)} \subset \Omega\}$, si definisce

$$\|u\|_{\nabla_g} := \| |\nabla_g u| \|_{L^2(\Omega, \sqrt{g} dx)}.$$

Proposizione 3.4. $\|\cdot\|_{\nabla_g}$ è una norma su C_0^1 , equivalente a $\|\cdot\|_{\nabla}$ ($g \equiv 1$).

Dimostrazione. È sufficiente mostrare che è un prodotto scalare quello così definito:

$$f, h \in C_0^1 \quad ; \quad \langle f, h \rangle_{\nabla_g} := \langle \nabla f, \nabla h \rangle_g.$$

Per ogni $f \in C_0^1$ si ha:

$$\langle f, f \rangle_{\nabla_g} = 0 \Leftrightarrow \nabla f \equiv 0 \Leftrightarrow f \equiv 0,$$

poiché f è a supporto compatto.

Il resto segue dalle proprietà di $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$, dunque $\|\cdot\|_{\nabla_g}$ è una norma.

Per provare l'equivalenza delle due norme, si sfrutta l'*uniforme ellitticità* dell'equazione $\Delta_g u = f$, cioè la proprietà seguente:

$$\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad : \quad c_1^2 |\xi|^2 \leq g^{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq c_2^2 |\xi|^2 \quad \forall x \in \overline{\Omega} \quad , \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Per ogni $u \in C_0^1$, ponendo $\xi = \nabla u$ si ottiene:

$$c_1^2 |\nabla u|^2 \leq g^{ij}(x) \partial_i u \partial_j u \leq c_2^2 |\nabla u|^2,$$

cioè

$$c_1^2 |\nabla u|^2 \leq |\nabla_g u|^2 \leq c_2^2 |\nabla u|^2.$$

Allora, dall'equivalenza delle norme $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_{L^2(\Omega, \sqrt{g}dx)}$, segue:

- $\|u\|_{\nabla_g} = \|\nabla_g u\|_{L^2(\Omega, \sqrt{g}dx)} \leq c'_1 \|\nabla_g u\|_2 \leq c'_1 c_2 \|\nabla u\|_2 = c'_1 c_2 \|u\|_{\nabla};$
- $\|u\|_{\nabla} = \|\nabla u\|_2 \leq c'_2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega, \sqrt{g}dx)} \leq \frac{c'_2}{c_1} \|\nabla_g u\|_{L^2(\Omega, \sqrt{g}dx)} = \frac{c'_2}{c_1} \|u\|_{\nabla_g}.$

□

Osservazione. Lo spazio $(C_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{\nabla_g})$ non è completo. Un controesempio è costituito dalla successione $(u_n)_n$ così definita:

$$u_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad u_n(x) = u_n(x_1, \dots, x_d) := \sqrt{x_1^2 + \frac{1}{n^2}}.$$

Si tratta infatti di una successione di Cauchy che non converge in C_0^1 . È sufficiente mostrarlo con la norma $\|\cdot\|_{\nabla}$, equivalente a $\|\cdot\|_{\nabla_g}$ per ogni g .

Per $k = 1, \dots, d$

$$\partial_1 u_n = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + \frac{1}{n^2}}} \quad ; \quad \partial_k u_n = 0 \quad \forall k \neq 1.$$

Dunque

$$\nabla u_n(x) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + \frac{1}{n^2}}}, 0, \dots, 0 \right).$$

- Per il teorema della convergenza dominata,

$$\begin{cases} |\nabla u_n(x) - \nabla u_m(x)| \leq 2 \\ |\nabla u_n(x) - \nabla u_m(x)| \rightarrow 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \|\nabla u_n - \nabla u_m\|_2 \rightarrow 0,$$

cioè $\|u_n - u_m\|_{\nabla} \rightarrow 0$.

- Si ha:

$$\nabla u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} v(x) \text{ q.d.}, \quad \text{con } v(x) := \begin{cases} (\delta_{1i})_i & \text{se } x_1 > 0 \\ (-\delta_{1i})_i & \text{se } x_1 < 0. \end{cases}$$

Osserviamo che $v(x) = \nabla u(x)$, dove $u(x) := |x_1| \notin C_0^1$.

Ora, $|\nabla u_n(x) - v(x)| \leq 2$; per il teorema della convergenza dominata si ha allora:

$$\|\nabla u_n - \nabla u\|_2 = \|\nabla u_n - v\|_2 \rightarrow 0,$$

cioè $\|u_n - u\|_{\nabla} \rightarrow 0$.

Definizione 3.9. Con le notazioni precedenti, si definisce

$$W_{0(g)}^1(\Omega) := \overline{C_0^1(\Omega)}^{\|\cdot\|_{\nabla_g}},$$

cioè il *completamento* dello spazio $C_0^1(\Omega)$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{\nabla_g}$.

Osservazioni.

1. Dall'equivalenza delle norme $\|\cdot\|_{\nabla_g}$ e $\|\cdot\|_{\nabla}$ segue l'indipendenza da g dello spazio $W_{0(g)}^1$, che quindi denoteremo soltanto con W_0^1 .
2. Per ogni $u \in C_0^1$ vale la disuguaglianza:

$$\|u\|_2 \leq c\|u\|_{\nabla_g},$$

dove c è una costante reale. Queste disuguaglianze si estendono, mediante passaggi al limite di successioni di Cauchy in C_0^1 , ad ogni $u \in W_0^1$.

Proposizione 3.5. Sia $(u_n)_n$ una successione di Cauchy in $(C_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{\nabla_g})$. Allora $(u_n)_n$ e $(\nabla u_n)_n$ convergono in L^2 .

Dimostrazione. $\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, \exists c \in \mathbb{R}$ per cui

$$\|u_n - u_m\|_2 \leq c\|u_n - u_m\|_{\nabla_g} = c\|\nabla u_n - \nabla u_m\|_{L^2(\Omega, \sqrt{g}dx)} < \epsilon \quad \forall n, m \geq n_\epsilon.$$

Dalla completezza di L^2 segue la tesi. \square

Corollario 3.2. $W_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$.

3.2.4 L'operatore di Laplace-Beltrami

In analogia con il caso euclideo, l'operatore che generalizza il laplaciano è la divergenza del gradiente (riemanniano).

Definizione 3.10. Sia M una varietà riemanniana su cui è definita una metrica $(g_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,d}$. La *divergenza riemanniana* div_g di una funzione $h \in C^2(M, \mathbb{R}^d)$ è

$$div_g h := \frac{1}{\sqrt{g}} div(\sqrt{g}h),$$

dove $g := \det(g_{ij})_{i,j}$, e dove div denota la divergenza euclidea. sia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2$; l'*operatore di Laplace-Beltrami* è così definito:

$$\Delta_g f := div_g \nabla_g f.$$

Esplicitamente,

$$\Delta_g f = \operatorname{div} \nabla_g f = \partial_i f (g^{ij} \partial_j f) = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i f (g^{ij} \sqrt{g} \partial_j f).$$

3.2.5 Soluzioni deboli

Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in L^2$, dove Ω è un aperto limitato di \mathbb{R}^d . Si vogliono studiare eventuali soluzioni del seguente *problema di Dirichlet*:

$$\begin{cases} \Delta_g u = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Definizione 3.11. Sia $u \in L^2$. Per $i \in \{1, \dots, d\}$ si dice che u è *derivabile in senso debole rispetto ad x_i* , con derivata $v \in L^2$, se

$$\int_{\Omega} v \phi = - \int_{\Omega} u \partial_i \phi \quad \forall \phi \in C_0^\infty.$$

Si denota $v =: \partial_i u$. Se esiste $\partial_i u$ per ogni $i \in \{1, \dots, d\}$, si definiscono anche

$$\nabla u := (\partial_1 u, \dots, \partial_d u) \quad ; \quad \nabla_g u := (g^{ij} \partial_j u)_{i=1, \dots, d}.$$

Osservazione. La derivata debole è un'estensione della derivata classica.

Se u è derivabile rispetto ad x_i in senso classico con derivata v , e in senso debole con derivata v^{deb} , per ogni $\phi \in C_0^\infty$ si ha:

$$\int_{\Omega} v^{deb} \phi = - \int_{\Omega} u \partial_i \phi;$$

integrando per parti:

$$\int_{\Omega} v^{deb} \phi = \int_{\Omega} v \phi.$$

Dato che questo vale per ogni $\phi \in C_0^\infty$, segue che $v^{deb} = v$.

Proposizione 3.6. Se $u \in W_0^1$, per ogni $i \in \{1, \dots, d\}$ esiste $\partial_i u \in L^2$.

Dimostrazione. Tutti gli elementi di W_0^1 sono limiti di successioni di Cauchy in $(C_0^1, \|\cdot\|_{\nabla_g})$. Esiste dunque una successione $(u_n)_n$ di Cauchy in tale spazio, che converge ad u . In particolare,

$(\nabla u_n)_n$ è di Cauchy in $L^2 \Rightarrow \partial_i u_n \rightarrow v_i \in L^2$ per ogni i .

Integrando per parti si ottiene infine, per ogni $\phi \in C_0^\infty$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_i u_n \phi &= - \int_{\Omega} u_n \partial_i \phi \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow & \\ \int_{\Omega} v_i \phi &= - \int_{\Omega} u \partial_i \phi. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\forall i = 1, \dots, d \quad \exists \partial_i u = v_i \in L^2.$$

□

Osservazione. Sia $u \in C^2$ soluzione del problema di Dirichlet 3.1. Allora, per ogni $\phi \in C_0^\infty$,

$$-\int_{\Omega} \Delta_g \phi \sqrt{g} = \int_{\Omega} f \phi \sqrt{g}.$$

Integrando per parti,

$$\int_{\Omega} \nabla_g u(x) \nabla_g \phi(x) \sqrt{g(x)} dx = - \int_{\Omega} \Delta_g u(x) \phi(x) \sqrt{g(x)} dx.$$

Quindi, per $u \in C^2$,

$$\begin{aligned} u \text{ soluzione classica di 3.1} &\iff - \int_{\Omega} \nabla_g u(x) \nabla_g \phi(x) \sqrt{g(x)} dx = \\ &= \int_{\Omega} f(x) \phi(x) \sqrt{g(x)} dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty. \end{aligned}$$

L'espressione integrale trovata caratterizza quindi le soluzioni classiche di 3.1. Inoltre, riformulando la nozione di *soluzione* in questi termini, è possibile estenderla a funzioni meno regolari; l'espressione non perde infatti di significato inserendovi una $u \in W_0^1$ e utilizzando le derivate deboli.

Definizione 3.12. $u \in W_0^1$ si dice *soluzione debole* di 3.1 se

$$- \int_{\Omega} \nabla_g u(x) \nabla_g \phi(x) \sqrt{g(x)} dx = \int_{\Omega} f(x) \phi(x) \sqrt{g(x)} dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty.$$

Osservazione. W_0^1 è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare così definito:

$$u, v \in W_0^1 \quad ; \quad \langle u, v \rangle_{\nabla_g} := \int_{\Omega} \nabla_g u(x) \nabla_g v(x) \sqrt{g(x)} dx.$$

Teorema 3.2. Sia $f \in L^2$. Esiste un'unica $u \in W_0^1$ soluzione debole del problema di Dirichlet 3.1

$$\begin{cases} \Delta_g u = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Dimostrazione. Definiamo

$$A : W_0^1 \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad A(\phi) := - \int_{\Omega} f(x) \phi(x) \sqrt{g(x)} dx.$$

Risulta $A \in (W_0^1)^*$. Infatti A è lineare, e inoltre

$$|A(\phi)| = \left| \int_{\Omega} f \phi \sqrt{g} \right| \leq c \|f\|_{L^2(\Omega, \sqrt{g} dx)} \|\phi\|_{L^2(\Omega, \sqrt{g} dx)} \leq (\tilde{c} \|f\|_{L^2(\Omega, \sqrt{g} dx)}) \|\phi\|_{\nabla_g}$$

per ogni $\phi \in W_0^1$, cioè A è limitato.

Allora, per il teorema di rappresentazione di Riesz,

$$\exists! u \in W_0^1 \quad : \quad \langle u, \phi \rangle_{\nabla_g} = A(\phi) \quad \forall \phi \in W_0^1.$$

In altri termini, osservando che $C_0^\infty \subset W_0^1$, $\exists! u \in W_0^1$ per cui

$$- \int_{\Omega} \nabla_g u(x) \nabla_g \phi(x) \sqrt{g(x)} dx = \int_{\Omega} f(x) \phi(x) \sqrt{g(x)} dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty;$$

esiste cioè un'unica soluzione debole di 3.1 in W_0^1 . \square

3.2.6 Soluzioni deboli come minimi di funzionali

Teorema 3.3. Dato il funzionale

$$T : W_0^1 \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad T(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\|\nabla_g u\|_g)^2 \sqrt{g(x)} dx + \int_{\Omega} f(x) u(x) \sqrt{g(x)} dx,$$

1. $\exists \min_{W_0^1} T =: u$;
2. u è soluzione debole del problema 3.1

$$\begin{cases} \Delta_g u = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Dimostrazione. 1. Sia $(u_n)_n$ una successione in W_0^1 tale che

$$T(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \inf_{W_0^1} T.$$

$(T(u_n))_n$ è convergente, dunque è limitata. Esiste cioè $c > 0$ tale che $|T(u_n)| \leq c$ per ogni n . Allora $(u_n)_n$ è limitata in norma $\|\cdot\|_{\nabla_g}$:

$$\begin{aligned} c &\geq |T(u_n)| = \left| \frac{1}{2} (\|u_n\|_{\nabla_g})^2 + \int_{\Omega} f u_n \sqrt{g} \right| \geq \\ &\geq \frac{1}{2} (\|u_n\|_{\nabla_g})^2 - \int_{\Omega} |f| |u_n| \sqrt{g} \geq \\ &\geq \frac{1}{2} (\|u_n\|_{\nabla_g})^2 - \|f\|_{L^2(\Omega, \sqrt{g} dx)} \|u_n\|_{L^2(\Omega, \sqrt{g} dx)} \geq \\ &\geq \|u_n\|_{\nabla_g} \left(\frac{1}{2} \|u_n\|_{\nabla_g} - \tilde{c} \|f\|_{L^2(\Omega, \sqrt{g} dx)} \right). \end{aligned}$$

Quindi esiste una sottosuccessione $(u_{n_j})_j$ che converge debolmente nello spazio di Hilbert $(W_0^1, \|\cdot\|_{\nabla_g})$. Sia u il limite debole. Si ha:

- $\|u\|_{\nabla_g} \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \|u_{n_j}\|_{\nabla_g}$.

- In \mathbb{R} ,

$$\int_{\Omega} f u_{n_j} \sqrt{g} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f u \sqrt{g}.$$

Per provarlo consideriamo il funzionale lineare

$$A : W_0^1 \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad A(u) := \int_{\Omega} f u \sqrt{g}.$$

A è limitato:

$$\left| \int_{\Omega} f u \sqrt{g} \right| \leq c \|f\|_{L^2(\Omega, \sqrt{g} dx)} \|u\|_{L^2(\Omega, \sqrt{g} dx)} \leq \tilde{c} \|u\|_{\nabla_g}.$$

Allora

$$A \in (W_0^1)^* \quad \Rightarrow \quad A(u_{n_j}) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} A(u),$$

per la convergenza debole di $(u_{n_j})_j$.

In definitiva,

$$\begin{aligned} T(u) &= \frac{1}{2} (\|u\|_{\nabla_g})^2 + A(u) \leq \frac{1}{2} \liminf_{j \rightarrow \infty} (\|u_{n_j}\|_{\nabla_g})^2 + \lim_{j \rightarrow \infty} A(u_{n_j}) = \\ &= \liminf_{j \rightarrow \infty} T(u_{n_j}) = \lim_{j \rightarrow \infty} T(u_{n_j}) = \inf_{W_0^1} T. \end{aligned}$$

Segue che

$$\exists \min_{W_0^1} T = T(u).$$

2. Resta da verificare che il punto di minimo trovato è soluzione debole di 3.1. Per ogni $h \in W_0^1$ con $\|h\|_{\nabla_g} = 1$, se esiste il differenziale di Gateau $\partial_h T(u)$, allora

$$\partial_h T(u) = 0.$$

Calcoliamo dunque $\partial_h T(v)$. Sia $h \in W_0^1$ con $\|h\|_{\nabla_g} = 1$.

$$T(v) = T_1(v) + T_2(v) \quad , \quad \begin{cases} T_1(v) := \frac{1}{2} (\|v\|_{\nabla_g})^2 \\ T_2(v) := \int_{\Omega} f v \sqrt{g}. \end{cases}$$

- $\partial_h T_1(v) = \langle v, h \rangle_{\nabla_g} = \int_{\Omega} \nabla_g v \nabla_g h \sqrt{g}$.
- $T_2 \in (W_0^1)^* \quad \Rightarrow \quad \partial_h T_2(v) = T_2(v)$.

Quindi, nel punto di minimo u , per ogni $h \in W_0^1$ con $\|h\|_{\nabla_g} = 1$, $\partial_h T(u) = 0$. Cioè:

$$\int_{\Omega} \nabla_g u \nabla_g h \sqrt{g} + \int_{\Omega} f u \sqrt{g} = 0 \quad \Rightarrow \quad - \int_{\Omega} \nabla_g u \nabla_g h \sqrt{g} = \int_{\Omega} f u \sqrt{g},$$

dunque u è soluzione debole di 3.1. □

3.3 L'uso dell'operatore di Laplace-Beltrami nella regolarizzazione di immagini

Consideriamo un'immagine $I(x, y)$ definita su $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, e sia $(g_{ij})_{i,j=1,2}$ una metrica riemanniana sulla varietà bidimensionale $z = I(x, y)$. Definiamo il funzionale

$$J : W_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad J(I) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\|\nabla_g I(x, y)\|_g)^2 \sqrt{g(x, y)} dx dy.$$

Si può osservare che, se $g_{ij} = \delta_{ij}$, si ritrova il funzionale che induce la *heat equation*.

Consideriamo invece il caso in cui (g_{ij}) è la metrica indotta sulla varietà $z = I(x, y)$ dall'immersione in \mathbb{R}^3 . L'idea è quella di ottenere una diffusione che tenga conto della geometria dell'immagine.

Dal teorema 3.3 è noto che J ha minimo in W_0^1 , e il punto di minimo u è soluzione debole di

$$\Delta_g I = 0.$$

Riformuliamo ora il problema in termini di *steepest descent*. Osserviamo intanto che

$$dJ(I)h = \langle I, h \rangle_{\nabla_g}.$$

In modo del tutto analogo al caso $g_{ij} = \delta_{ij}$, anche in questo contesto si può parlare di gradiente rispetto a due differenti prodotti scalari su W_0^1 : il prodotto scalare standard $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\nabla_g}$ e il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega, \sqrt{g} dx)}$ indotto da L^2 ; in entrambi i casi la metrica (g_{ij}) è quella indotta dall'immagine. Denotando con $\nabla J(I)$ e $\nabla_2 J(I)$ rispettivamente il gradiente in W_0^1 e quello in L^2 , si ha:

$$\nabla J(I) = -\Delta_g I \quad ; \quad \nabla_2 J(I) = I.$$

Usando il prodotto scalare standard di W_0^1 , si ottiene dunque un flusso generato da

$$I_t = I.$$

La più classica elaborazione in L^2 genera invece l'equazione

$$I_t = -\Delta_g I.$$

Come si può osservare nell'immagine 3.3, questo filtro elimina il rumore pur conservando i contorni dell'immagine, la cui forma non viene cambiata.



Figura 3.2: Evoluzione di un'immagine attraverso il flusso di Laplace-Beltrami. Nel caso di immagini a colori, la funzione $I(x, y)$ è a valori vettoriali: le informazioni sono codificate in tre canali, chiamati Red, Green, Blue (R,G,B). (Immagine tratta da [1])

Quest'ultimo esempio mostra come sia possibile risolvere problemi di elaborazione di immagini utilizzando strumenti di analisi funzionale uniti a nozioni di geometria differenziale riemanniana. Lo strumento della *steepest descent* è molto generale ed è stato utilizzato in tutti gli esempi che abbiamo visto; si ricorre poi a strumenti geometrici per modellare più precisamente le caratteristiche dell'immagine. Tra questi, la scelta della metrica indotta dall'immagine è particolarmente flessibile: permette infatti di codificare proprietà anche diverse tra loro, legate per esempio al colore e ad altri svariati aspetti.

Bibliografia

- [1] A. Spira, N. Sochen, R.Kimmel. Geometric Filters, Diffusion Flows, and Kernels in Image Processing. *Handbook of Geometric Computing. Applications in Pattern Recognition, Computer Vision, Neuralcomputing, and Robotics*. Springer, 2005.
- [2] Bruno Pini. Lezioni di Analisi Matematica di secondo livello. Parte prima. Clueb Bologna, 1983.
- [3] Antonio Ambrosetti, Andrea Malchiodi. Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics 104*. Cambridge University Press, 2007.
- [4] P. Perona and J. Malik. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12:629-639, 1990.
- [5] Jürgen Jost. Riemannian Geometry and Geometric Analysis (Fifth Edition). Springer, 2008.
- [6] Jeffrey Calder. Sobolev Gradient Flows and Image Processing. *Master thesis*. Queen's University, 2010.

