

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Corso di Laurea in Fisica

Quantizzazione del campo elettromagnetico: la nascita del concetto di fotone

Relatore:
Prof. Fabio Ortolani

Presentata da:
Santiago Barbieri

Sessione I
Anno Accademico 2013/2014

A mia nonna

Abstract

Scopo di questo studio è mostrare come, a partire dalle equazioni di Maxwell nella forma classica, sia possibile associare al campo elettromagnetico una funzione Hamiltoniana che risulti essere somma delle Hamiltoniane di un numero discreto di oscillatori armonici, ciascuno dei quali è associato ad un modo normale di vibrazione del campo. Tramite un procedimento puramente formale di quantizzazione, è possibile ricavare un'espressione per lo spettro del campo elettromagnetico e viene introdotto il concetto di *fone*, inteso come quanto d'eccitazione di un singolo oscillatore. Si ricava la ben nota espressione $U = \hbar\omega$ per l'energia del fotone e si deducono alcuni importanti aspetti, quali le fluttuazioni quantistiche del campo elettromagnetico e il problema legato alla divergenza dell'energia di vuoto fotonico, che aprono le porte all'elettrodinamica quantistica.

Indice

1	Cenni storici sulla natura del campo elettromagnetico	6
2	Richiamo di alcuni risultati sull'elettromagnetismo classico	11
2.1	Potenziale vettore e gauge	11
2.2	Onde elettromagnetiche nel vuoto	14
2.3	Energia del campo elettromagnetico	15
3	Seconda quantizzazione	18
3.1	Richiamo sui sistemi di particelle indistinguibili	18
3.2	Introduzione dei numeri di occupazione e degli operatori di creazione e distruzione	19
4	Quantizzazione del campo elettromagnetico	24
4.1	Hamiltoniana del campo elettromagnetico ed oscillatori armonici	24
4.2	Quantizzazione	30
4.3	Alcune importanti considerazioni fisiche	34
5	Bibliografia	38

Prefazione

*Questi ultimi cinquant'anni di conscia meditazione non mi hanno portato più vicino alla risposta a questa domanda: che cos'è un **quantum** di luce? Naturalmente oggi ogni briccone crede di conoscere la risposta, ma egli inganna se stesso.*

Albert Einstein

Da quando ho intrapreso il mio attuale percorso di studi nel campo della fisica, uno degli aspetti che più mi hanno incuriosito è stato proprio il concetto di *quanto* di luce. L'immagine intuitiva che mi ero creato del campo elettromagnetico era quella che viene descritta in ogni manuale di Fisica Generale II: sostanzialmente un'onda trasversale avente una componente elettrica e una magnetica tra loro perpendicolari. Avanzando negli studi, ho sentito citare più volte il fatto che, in realtà, tale campo ammette una quantizzazione; tuttavia, non avendo mai ricevuto nel corso degli anni una vera spiegazione di questo fenomeno, mi è sempre stato poco chiaro come ciò potesse avvenire. Per fare un parallelismo: sistemi come l'elettrone, il protone, l'atomo di idrogeno vengono presentati immediatamente come quantistici; ci si applica al loro studio sapendo già che essi necessitano di una trattazione *non classica*. O meglio, viene descritto, ad esempio, il modello di Bohr, ma si sottolinea subito il fatto che esso, pur fornendo alcune previsioni corrette, è sbagliato nei suoi postulati, poiché descrive il comportamento di oggetti microscopici da un punto di vista puramente classico. Il campo elettromagnetico è invece l'unico sistema fisico che mi viene in mente del quale venga prima presentata una trattazione classica corretta (quella di Maxwell, di cui viene peraltro mostrata anche una spettacolare conseguenza: la relatività ristretta) e del quale in seguito si assumano certe proprietà quantistiche senza dimostrazione alcuna, almeno nel corso di laurea triennale. Per ovviare a questa lacuna senza andare a scomodare la Teoria dei campi, mi sono prefisso di mostrare come, a partire dalle equazioni di Maxwell classiche, si possa procedere ad una quantizzazione del campo elettromagnetico e sia possibile introdurre il concetto di fotone. Senza la pretesa di essere dei bricconi, per dirla con Einstein, si può vedere il fotone come espressione dello spettro dell'energia del campo elettromagnetico: esso rappresenta un'eccitazione di un particolare modo normale di vibrazione quantizzato. In Teoria dei campi si possono poi associare al fotone proprietà tipiche delle particelle, quali il momento o lo spin. Tutto ciò, pur permettendo di inserire i fotoni in una teoria matematica che ne sappia descrivere il comportamento, non spiega, naturalmente, cosa essi siano. In effetti, mi viene in mente quanto udii affermare da Jean-Marc Lévy-Leblond ¹

¹Fisico teorico, è docente nelle università di Parigi 7 Diderot e Nizza

ad una conferenza tenuta presso l'università di Bologna nel marzo del 2014:

*Quando pensiamo ad un'entità quantistica come ad un oggetto che abbia comportamento ondulatorio sotto certe condizioni e corpuscolare sotto altre, dobbiamo tener presente il fatto che esso, in realtà, non è né un'onda né un corpuscolo. Poniamo di avere una scatoletta di tonno; se la osserviamo dall'alto vedremo un cerchio, se la osserviamo frontalmente, invece, essa ci apparirà come un rettangolo. Ma cos'è dunque questa scatoletta: un cerchio o un rettangolo? Nessuna delle due cose: è un cilindro! Ecco perché smetterei di parlare di dualismo onda-particella, termine che mi sembra impreciso, e introdurrei il termine **quantone**.*

1 Cenni storici sulla natura del campo elettromagnetico

Fin dalla notte dei tempi l'essere umano si è interrogato su quale fosse la natura della luce; sebbene le prime notizie riguardanti questo argomento risalgano, nel mondo occidentale, ai presocratici, è ragionevole pensare che fenomeni naturali quali, per esempio, il fuoco, i fulmini o la riflessione su specchi d'acqua, abbiano suscitato l'interesse dell'umanità in periodi ben remoti. Con un rapido sguardo all'evoluzione storica delle conoscenze sulla luce e sul campo elettromagnetico, si può notare come gli aspetti che suscitavano il maggiore interesse di studio siano cambiati nelle varie epoche.

Nel mondo antico, per esempio, più che alla natura intrinseca della luce, si pose grande attenzione al meccanismo della visione, cercando di darne una spiegazione. La prima testimonianza pervenutaci ² risale ad Alcmeone di Crotona, discepolo di Pitagora, vissuto nel V secolo a.C., che dà una descrizione, a grandi linee, dell'occhio e del suo funzionamento. I fenomeni visivi interessano anche Empedocle (492-430 a.C.), che è il primo a tentare di dare una spiegazione alla percezione dei colori: ogni oggetto, secondo Empedocle, ha la capacità di far fluire al suo esterno delle *emanazioni* (*percipiendum*), che colpiscono gli organi di senso (*percipiens*). Tali emanazioni devono per forza passare attraverso i *pori* che gli elementi che costituiscono la materia (acqua, fuoco, terra, aria) possiedono. Poiché anche gli occhi, come qualsiasi oggetto, sono costituiti da un misto dei quattro elementi e, perciò, presentano dei pori, solo quelle emanazioni che passano perfettamente attraverso i pori degli occhi potranno essere percepite nella visione; i colori sono, per l'appunto, un'emanazione che passa perfettamente dai pori visivi, gli odori, ad esempio, pur essendo anch'essi delle emanazioni, non hanno questa proprietà.

Molto interessante, sempre nel mondo antico, è il caso di Democrito, fondatore della scuola atomistica, che è il primo a dare un'interpretazione della visione in termini corpuscolari. La percezione visiva è, secondo Democrito, data dall'interazione tra gli occhi e l'*eidolon*, un flusso di atomi che proviene dall'oggetto e attraversa l'aria.

Di grande importanza nel mondo antico fu poi il dibattito tra le varie teorie estromissive ed intromissive, ossia tra chi sosteneva che la percezione visiva fosse un'entità uscente dagli occhi e che la visione avvenisse al momento dell'interazione tra quest'entità e l'oggetto visto, e chi sosteneva invece che fossero gli oggetti ad emanare una proprietà che colpiva gli organi di senso producendo la percezione sensoriale. Senza entrare nello specifico, vale la pena di citare la teoria di Platone la quale, in un certo senso, mescola tra loro intromissione ed estromissione; come egli scrive nel *Timeo*³:

²La si può trovare, assieme a tutti gli altri frammenti dei presocratici giunti fino a noi, nel saggio di Hermann Diels *Die fragment der Vorkkratiker*, del 1903

³Nella traduzione di Giovanni Reale.

Quando, dunque, vi sia luce diurna intorno a tale corrente del fuoco puro della vista, allora, incontrandosi simile con simile e unendosi assieme, se ne forma un corpo unico e omogeneo nella direzione degli occhi, in quel punto in cui ciò che scaturisce dal di dentro s'incontra con quello che confluisce dal di fuori. E questo corpo, divenuto capace delle stesse impressioni a causa delle somiglianze delle sue parti, quando tocca qualunque cosa o qualunque cosa tocchi lui, diffondendo i moti di questi (riferito alle cose, N.D.R.) per tutto quanto il corpo fino all'anima, fornisce questa sensazione per la quale noi diciamo di vedere.

Nell'interpretazione di Lindberg ⁴, Platone suppone che vi sia un *fuoco*, inteso come proprietà visiva che esce dagli occhi, il quale, sotto la condizione che vi sia della luce solare, s'incontra con un analogo flusso proveniente dagli oggetti creando un nuovo mezzo capace di trasmettere i *moti* delle cose al corpo e, infine, all'anima. Al lettore moderno può apparire molto interessante il fatto che Platone introduca l'idea secondo cui vi debba essere un mezzo attraverso il quale i segnali luminosi si propagano: egli, come abbiamo visto, chiamava *moti* tali segnali; fino alla fine del XIX secolo, per fare un parallelismo in un contesto completamente diverso, si continuò ad ipotizzare l'esistenza dell'Etere, un fantomatico mezzo la cui vibrazione avrebbe dato origine alle onde elettromagnetiche. I falliti tentativi di misurare le proprietà dell'Etere sono alla nascita della teoria della relatività ristretta.

Nel corso dell'antichità moltissimi altri cercarono di dare una spiegazione ai fenomeni visivi, sia da un punto di vista fisico che medico: tra essi citiamo Aristotele, Erone, Galeno, Tolomeo e gli Stoici e, soprattutto, il matematico Euclide. Nel suo *Ottica*, egli tratta la propagazione della luce da un punto di vista geometrico: partendo da 7 postulati, vengono dimostrati 58 teoremi (effettivamente corretti, almeno da un punto di vista matematico) che descrivono la propagazione in linea retta della luce e la prospettiva attraverso la quale gli oggetti sono visti.

A partire dall'Alto Medioevo, lo studio della luce viene portato avanti principalmente nel mondo arabo: il peripatetico Al Kindi (801-873 d.C.) prende le mosse dalla teoria Euclidea descrivendo la propagazione della luce proveniente da un oggetto da un punto di vista fisico introducendo, peraltro, il concetto di *forza*⁵ della luce, che egli utilizza nella descrizione della visione laterale. Grandi progressi nella conoscenza dell'occhio e dei meccanismi fisici della visione furono poi dovuti a uno dei più grandi medici arabi del tempo, Hunain Ibn Ishaq (809-873 d.C.), ma il più grande contributo nello studio dei fenomeni luminosi, in quell'epoca, venne probabilmente da Ibn Al Haytam (965-1039 d.C.), detto Alhacen nel mondo occidentale. Nel suo *Kitab al Manazir (Libro di ottica)*, apparso in Occidente attraverso una traduzione spuria col titolo di *De aspectibus*, egli introduce l'idea che la luce si propaghi attraverso delle perturbazioni sferiche a partire

⁴*The theory of vision*

⁵Che corrisponde, a grandi linee, a quella che oggi viene denominata *intensità*.

da ogni punto dell'oggetto visto (aspetto che ricorda vagamente il principio di Huygens sulla propagazione dei fronti d'onda); vasta e approfondita, almeno per quel tempo, è inoltre l'indagine che egli conduce sui meccanismi fisiologici del senso visivo, sulla visione binoculare e su fenomeni quali la diffusione della luce da parte della nebbia, la camera oscura o i colori (nello studio di questi ultimi egli fa uso di concetti tipicamente aristotelici come Potenza e Atto).

Le opere degli autori arabi, e le traduzioni arabe di molti autori greci, giungono in Occidente nella prima parte del XII secolo e contribuiscono allo sviluppo di quella branca della filosofia medievale denominata *metafisica della luce*.

Il primo ad occuparsi di ottica in Occidente, durante il Medioevo, fu Robert Grosseteste (1168-1253), il quale elaborò una teoria della visione in cui è facile riconoscere l'influenza di Platone, di Plotino e di Sant'Agostino. Non si può prescindere dal fatto che, nel Medioevo, lo studio della luce era associato alla teologia: conoscere il comportamento materiale della luce era un primo passo verso la conoscenza di Dio, dell'unica Verità.

Nel *De Veritate* Grosseteste scrive:

[...]nessuna verità è percepita eccetto la luce della vita suprema. Come un occhio malato non vede i corpi colorati, salvo che essi non siano illuminati dalla luce del Sole, così l'occhio malato della mente non percepisce la verità stessa, tranne che nella luce della verità suprema.

La verità divina è, in un certo senso, la luce nella sua forma più perfetta, poiché permette di rischiarare la mente di ogni uomo con la vera conoscenza. L'intero studio della luce ha perciò, sia per Grosseteste che per i suoi successori, un fine teologico. Il pensiero di Grosseteste fu sviluppato successivamente da Roger Bacon (1214-1294) e John Pecham (1240-1292), i quali, per dare un'idea di quanto fosse importante nel Medioevo la cultura araba, conoscevano il *De aspectibus* di Alhacen.

Durante il Rinascimento, la luce e la visione sono oggetto di grande interesse da parte, soprattutto, di artisti e architetti; uno degli aspetti salienti di questo periodo è, per l'appunto, la nascita della prospettiva pittorica, che permetteva all'artista di poter riprodurre uno spazio tridimensionale sulla superficie di una tela. Varie ricerche sulla prospettiva e sulla propagazione dei raggi visivi vengono compiuti, tra gli altri, da Filippo Brunelleschi (1377-1446), costruttore della cupola del duomo di Firenze, Leon Battista Alberti (1404-1472) e, soprattutto, Piero della Francesca (1420-1492). Quest'ultimo, oltre ad essere uno dei massimi pittori rinascimentali, fu anche insigne matematico e nel suo *De perspectiva pingendi* riuscì ad inquadrare la prospettiva in una serie di regole matematiche ⁶. Per dare un'idea dell'importanza che gli studi sulla Prospettiva ebbero

⁶Si tenga presente che la descrizione matematica, al tempo, non faceva ancora uso del formalismo odierno.

nello studio della propagazione della luce, basti pensare che Johannes Kepler (1571-1630), più noto col nome latinizzato di Keplero, utilizzò un marchingegno, ideato da Dürer per ricavare in maniera esatta le dimensioni sulla tela di un oggetto reale visto in prospettiva, per cercare di spiegare certi risultati ottenuti misurando il diametro della Luna durante un'eclisse.

Il punto di svolta nello studio della luce e dell'ottica, come del resto in ogni branca della Scienza, si ha naturalmente nel XVII secolo, con la nascita del metodo sperimentale. Risale a questo periodo la formulazione delle leggi della riflessione e della rifrazione da parte di Willebrord Snel van Royen (1580-1626) e René Descartes (1596-1650), che vi giunsero indipendentemente,⁷ e sempre databili al XVII secolo sono i primi tentativi di stabilire se la luce avesse una velocità finita. Galileo (1564-1642) formulò un'esperimento tramite il quale si sarebbe potuta misurare la velocità della luce ma, a causa delle brevi distanze utilizzate nella misurazione (Galileo parla di poche miglia), tale tentativo fallì; è solo con le osservazioni del moto dei satelliti di Giove condotte da Roemer (1644-1710) che fu possibile stabilire un'ordine di grandezza per la velocità della luce, che secondo lo scienziato danese aveva un valore pari a $2,08 \times 10^8$ m/s. Di grande interesse in questo periodo storico, anche ai fini della trattazione che segue, è infine il dibattito apertosi tra la scuola avente come capostipite Huygens (1629-1695), che considerava la luce alla stregua di un'onda meccanica propagantesi in un mezzo detto Etere, e la scuola di Newton (1642-1727), che invece supponeva che la radiazione luminosa fosse composta da corpuscoli. L'autorità di cui Newton godeva riuscì per un certo tempo a mettere in secondo piano, anche se non riuscì mai ad eclissarla, la teoria ondulatoria descritta da Huygens nel suo *Traité de la lumière*; nonostante queste difficoltà, l'esperimento di Young (1773-1829) sulla luce passante attraverso una doppia fenditura e le successive ricerche di Fresnel (1788-1827) e Fraunhofer (1787-1826), le quali mostravano che la luce aveva, in certe situazioni, comportamenti tipici delle onde, diedero nuovo impulso all'ipotesi ondulatoria. Verso la fine del XIX secolo, con la teoria di Maxwell, nella quale la luce veniva descritta, per l'appunto, come un'onda elettromagnetica, pareva non dover più neanche esser messo in discussione il fatto che la luce fosse semplicemente un'onda. Sorprendentemente per i fisici dell'epoca, agli albori del XX secolo la teoria classica dell'elettromagnetismo si dimostrò fallimentare nel cercare di spiegare la radiazione di corpo nero, una cui adeguata, quanto allora inspiegabile, descrizione fu trovata da Max Planck (1858-1947), il quale avanzò la supposizione che l'energia elettromagnetica potesse essere scambiata solo attraverso *pacchetti discreti* dati dalla relazione $E = h\nu$, dove E è l'energia del pacchetto, ν è la frequenza della radiazione monocromatica considerata e h è una costante avente le dimensioni di un'azione. Nel 1905, l'*annus mirabilis* della fisica, un ricercatore ancora poco conosciuto, Albert Einstein, pubblicò un articolo sull'emissione di elettroni da parte di lastre metalliche bombardate da raggi ultravioletti.

⁷Si tenga presente che la legge della rifrazione era nota già al matematico arabo Ibn Sahl, che la utilizzò in un trattato sulle lenti risalente al 984 d.C.

Scrive Einstein che:

L'energia, durante la propagazione di un raggio di luce, non è distribuita in modo continuo e direttamente proporzionale allo spazio, ma consiste di un numero finito di quanti di energia localizzati in certi punti dello spazio, che si muovono senza dividersi e sono capaci di essere assorbiti o generati

Da cosa, dunque, era costituita la radiazione elettromagnetica, da onde o da corpuscoli? La risposta a questa domanda ha portato alla nascita della meccanica quantistica e di buona parte della fisica del XX secolo. Senza andare a scomodare questioni filosofico-concettuali, che, in forma molto semplice, possono essere trovate nella prefazione di questo studio, basti ricordare le relazioni di De Broglie (1892-1987), che stabiliscono come ad ogni onda monocromatica avente frequenza angolare ω e numero d'onda \vec{k} possano essere associate quantità corpuscolari quali un'energia E ed un momento \vec{p} :

$$\begin{cases} E = \hbar\omega \\ \vec{p} = \hbar\vec{k} \end{cases}$$

Dove, com'è noto, la costante di Planck (ridotta) assume un'importanza fondamentale.

2 Richiamo di alcuni risultati sull'elettromagnetismo classico

2.1 Potenziale vettore e gauge

I campi elettromagnetici classici, assieme a tutti i fenomeni ad essi legati, sono descrivibili tramite le quattro equazioni di Maxwell che, utilizzando il sistema c.g.s., assumono la forma ⁸ :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

Le prime due equazioni legano \vec{E} e \vec{B} alle sorgenti di carica (ρ) e di corrente (\vec{j}). Le ultime due stabiliscono invece proprietà dei campi che non dipendono dalla presenza o meno di sorgenti. La penultima equazione (Legge di Gauss per il campo magnetico) implica che \vec{B} possa essere scritto nella forma:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (5)$$

Si può infatti verificare, usando semplicemente le definizioni di tali operatori, che la divergenza del rotore di un qualsiasi campo vettoriale è sempre nulla.

Naturalmente le altre equazioni di Maxwell imporranno delle ulteriori condizioni che \vec{A} dovrà soddisfare. Per esempio, sostituendo (5) nella (4) si ha che:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Poiché quest'ultima relazione, essendo stata ricavata dalle equazioni di Maxwell nel caso più generale, è valida in ogni punto dello spazio, si ha che il campo $\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ è

⁸Si noti come, nella trattazione che segue, non si sia fatto uso dei campi ausiliari \vec{H} e \vec{D} . Le densità di carica ρ e di corrente \vec{j} che appaiono nelle formule seguenti tengono perciò conto, almeno formalmente, anche delle cariche di polarizzazione e delle correnti di magnetizzazione.

irrotazionale su tutto R^3 e quindi può essere espresso come $\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \varphi$, dove φ è un campo scalare.

Si ottiene dunque il risultato:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Introducendo il quadrivettore potenziale

$$A^\mu = (\varphi, \vec{A}) \quad (6)$$

vediamo i campi \vec{E} e \vec{B} dipendono dalle sue componenti in questo modo:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (7)$$

Se andiamo a sostituire queste due espressioni nelle rimanenti equazioni di Maxwell, (1) e (2), è immediato vedere come queste ultime divengano due equazioni differenziali nelle componenti del quadrivettore A^μ :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 4\pi \rho \\ &\implies \nabla^2 \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})}{\partial t} = -4\pi \rho \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\vec{\nabla} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ &\implies -\nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \frac{1}{c} \frac{\partial (\vec{\nabla} \varphi)}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{aligned} \quad (9)$$

Dove, nella seconda equazione si è utilizzata la relazione:

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = -\nabla^2 \vec{A} + \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$$

Si può dimostrare ⁹ che tale sistema di equazioni differenziali del secondo ordine nelle componenti di A^μ ammette sempre soluzione.

⁹Non lo faremo in questa sede, in quanto il ragionamento ci porterebbe molto lontani dagli argomenti che vogliamo trattare

Notiamo tuttavia come, nonostante i vincoli imposti, il quadrivettore potenziale non sia ancora univocamente determinato da tale sistema, in quanto se modifichiamo le componenti così:

$$\begin{cases} \vec{A} \longrightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} f \\ \varphi \longrightarrow \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \end{cases} \quad (10)$$

e andiamo a sostituire tali espressioni nelle equazioni (7) e (5), il sistema [(8), (9)] rimane invariato. Il cambio nelle coordinate di A^μ appena visto, che prende il nome di trasformazione di gauge¹⁰, non modifica i campi \vec{E} e \vec{B} e non ha quindi alcun effetto sulla fisica del sistema. L'utilità di introdurre il quadrivettore potenziale deriva proprio dal fatto che, lavorando sulle sue componenti invece che su quelle di \vec{E} o di \vec{B} , si può sempre scegliere un gauge che semplifichi le equazioni che descrivono il problema che si sta affrontando senza modificarne le informazioni fisiche.

Il più popolare tra i gauge che s'incontrano in fisica è il cosiddetto *gauge di Lorentz*:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (11)$$

O, in notazione relativistica:

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

Scelto infatti un quadrivettore potenziale A'^μ , soluzione delle equazioni (8) e (9), se esso non rispetta il gauge di Lorentz basta effettuare la trasformazione

$$A^\mu = A'^\mu - \partial^\mu f$$

e la richiesta che il nuovo potenziale A^μ soddisfi il gauge di Lorentz si esprime come:

$$\partial_\mu A^\mu = \partial_\mu A'^\mu - \partial_\mu \partial^\mu f = 0$$

Ai nostri scopi sarà perciò sufficiente scegliere il gauge f in modo tale che valga:

$$\partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu \partial^\mu f$$

Ossia, f dev'essere soluzione dell'equazione differenziale

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f = - \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} \right)$$

¹⁰ *Calibro*, in inglese.

E si può dimostrare, ancora una volta, che tale equazione ammette sempre soluzioni.

Se scegliamo un quadrivettore le cui componenti soddisfino il gauge di Lorentz, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$, è immediato verificare che le equazioni di Maxwell per i potenziali, (8) e (9), assumono la forma semplificata:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi = -4\pi\rho \quad (12)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (13)$$

Lasciamo ora da parte il gauge di Lorentz e torniamo alle equazioni (8) e (9) nella loro forma più generale; notiamo che possiamo sempre imporre la condizione:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (14)$$

Tale scelta prende il nome di *gauge di Coulomb* e semplifica le equazioni (8) e (9) riducendole alla forma:

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi\rho \quad (15)$$

$$-\nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial(\vec{\nabla}\varphi)}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (16)$$

Il gauge di Coulomb sarà molto utile quando procederemo con la quantizzazione del campo elettromagnetico. Non andremo oltre, in questa trattazione, nell'illustrare le possibili scelte di gauge, in quanto ciò non rientra nei nostri scopi.

2.2 Onde elettromagnetiche nel vuoto

Prendiamo le equazioni (12) e (13) appena trovate ed analizziamole nel caso in cui le sorgenti di carica e di corrente siano assenti; si vede subito che esse divengono:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi = 0 \quad (17)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} = 0 \quad (18)$$

Ossia, ciascuna delle componenti di A^μ soddisfa l'equazione di D'Alembert, che descrive la propagazione di onde.

Applicando l'operatore rotore ad entrambi i membri di (18) si ottiene:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{B} = 0 \quad (19)$$

Prendendo poi il gradiente di (17), applicando l'operatore $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$ a (18), sommando tra loro le due equazioni ottenute e cambiando il segno del risultato, si ha infine:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \left(-\vec{\nabla} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

Che, tenendo conto della (7) diviene:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{E} = 0 \quad (20)$$

Le due equazioni ottenute, (19) e (20), descrivono la propagazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto.

2.3 Energia del campo elettromagnetico

Torniamo adesso alle equazioni di Maxwell iniziali (1 – 4).

Prendiamo la legge di Ampère-Maxwell (2) e moltiplichiamo scalarmente per \vec{E} entrambi i membri:

$$\vec{E} \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \vec{E} \cdot \left(\frac{4\pi}{c} \vec{j}\right)$$

Analogamente, moltiplichiamo scalarmente per $-\vec{B}$ entrambi i membri della Legge di Faraday-Neumann-Lenz (4)

$$-\vec{B} \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = 0$$

Sommando queste due relazioni otteniamo:

$$\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) - \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) - \frac{1}{c} \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (21)$$

Tenendo conto dell'identità vettoriale:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{w} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) - \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{w})$$

E delle semplici regole di derivazione:

$$\begin{aligned}\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial (\vec{E} \cdot \vec{E})}{\partial t} \\ \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial (\vec{B} \cdot \vec{B})}{\partial t}\end{aligned}$$

L'espressione (21) assume la forma:

$$\frac{1}{8\pi} \frac{\partial (E^2 + B^2)}{\partial t} + \frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{B}) + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0 \quad (22)$$

Integrando questa relazione su un certo volume di spazio si ha:

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3x \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) = - \int_V d^3x \frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{B}) - \int_V d^3x \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (23)$$

E, tenendo conto del teorema della divergenza:

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3x \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) = - \int_{\Sigma} d\sigma \frac{c}{4\pi} \hat{n} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{B}) - \int_V d^3x \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (24)$$

Dove Σ è la superficie che racchiude il volume (finito) considerato.

Riconosciamo subito, nell'espressione dentro il primo integrale, la densità di energia del campo elettromagnetico. La relazione (24) appena ricavata, nota come *Teorema di Poynting*, afferma perciò che l'energia associata al campo elettromagnetico in un volume di spazio può variare nel tempo per due fenomeni:

1. A causa del suo trasferimento a delle cariche elettriche eventualmente presenti in tale volume ($\vec{j} \neq 0$)
2. Perché vi è un flusso netto di energia attraverso la superficie della zona di spazio considerata.

Quest'ultimo aspetto è caratterizzato dall'integrale di superficie al secondo membro di (24), dove compare il cosiddetto vettore di Poynting:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \wedge \vec{B})$$

Per una piccola superficie $d\Sigma$ si ha che il flusso di potenza elettromagnetica che la attraversa è, istantaneamente (supponiamo che non vi siano cariche elettriche nella piccola regione di spazio considerata, ossia $\vec{j} = 0$):

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \vec{S} \cdot d\vec{\Sigma}$$

E dunque, se prendiamo $d\vec{\Sigma}$ perpendicolare al vettore di Poynting:

$$\|\vec{S}\| = \frac{dU}{d\Sigma dt}$$

Il modulo del vettore di Poynting rappresenta perciò l'intensità dell'energia elettromagnetica che attraversa una superficie infinitesima $d\Sigma$ ad esso perpendicolare (se la piccola regione di spazio che consideriamo non contiene cariche in moto).

Notiamo infine che il teorema di Poynting nella forma (23) può essere espresso localmente come:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{S} - \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (25)$$

O, in assenza di correnti:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{S} \quad (26)$$

Dove $U = \frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2)$ è la densità di energia istantaneamente contenuta nel campo elettromagnetico.

Vedremo che sarà proprio a partire da quest'ultima espressione che sarà possibile associare al campo una funzione hamiltoniana. Quantizzando tale hamiltoniana, noteremo che essa presenterà degli autovalori discreti, interpretabili come le energie di *quanti di oscillazione* detti, per l'appunto, fotoni. Prima di affrontare quest'aspetto, che costituisce il nucleo centrale di questo studio, è utile richiamare brevemente l'apparato formale di quella che viene spesso chiamata, con un termine fuorviante, *seconda quantizzazione*, la quale si rivelerà di estrema utilità nel proseguimento della nostra indagine.

3 Seconda quantizzazione

3.1 Richiamo sui sistemi di particelle indistinguibili

In meccanica quantistica i sistemi di particelle indistinguibili vengono studiati facendo uso del postulato di simmetrizzazione:

Lo stato di un sistema di particelle indistinguibili è descritto da un ket completamente simmetrico nel caso dei bosoni, da un ket completamente antisimmetrico nel caso dei fermioni.

Ricordando le definizioni degli operatori di simmetrizzazione ed antisimmetrizzazione

$$\hat{S} = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} \hat{P}_{\alpha} \quad (27)$$

$$\hat{A} = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} \hat{P}_{\alpha} \quad (28)$$

(dove N è il numero di particelle che costituiscono il sistema, α è una qualsiasi permutazione di N indici, ε_{α} il suo segno e \hat{P}_{α} il corrispondente operatore permutante) possiamo scrivere il postulato in forma matematica. Se $|\psi_B\rangle$ ed $|\psi_F\rangle$ rappresentano, rispettivamente, gli stati di più bosoni o fermioni indistinguibili, deve valere:

$$\hat{S}|\psi_B\rangle = |\psi_B\rangle \quad (29)$$

$$\hat{A}|\psi_F\rangle = |\psi_F\rangle \quad (30)$$

Se conosciamo una base nello spazio degli stati di una singola particella, $\{|u_i\rangle\}$, dove per semplicità supponiamo che i sia un indice discreto, possiamo costruire il più generale ket che descriva lo stato del sistema delle N particelle nel seguente modo:

1. Numeriamo arbitrariamente le particelle, assegnando a ciascuna un numero naturale compreso tra 0 e N .
2. Assegniamo a ciascuna di esse un autostato $\{|u_i\rangle\}$ (possiamo assegnare lo stesso autostato anche a più di una particella), ottenendo così il ket:

$$|1 : u_i\rangle \otimes |2 : u_j\rangle \otimes \dots \otimes |N : u_p\rangle = |1 : u_p; 2 : u_j; \dots; N : u_p\rangle \quad (31)$$

dove alla particella con indice 1 è stato assegnato lo stato $\{| u_i \rangle\}$, a quella con indice 2 lo stato $\{| u_j \rangle\}$ e così via (ribadiamo che non è necessario che gli indici i, j, \dots, p siano tutti diversi).

3. Applichiamo al ket (31) l'operatore \hat{S} (\hat{A}) se le particelle con cui abbiamo a che fare sono bosoni (fermioni), ottenendo così un ket completamente simmetrico (antisimmetrico):

$$\hat{S} |1 : u_i; 2 : u_j; \dots; N : u_p\rangle , \quad \text{Caso bosonico} \quad (32)$$

$$\hat{A} |1 : u_i; 2 : u_j; \dots; N : u_p\rangle , \quad \text{Caso fermionico} \quad (33)$$

4. A questo punto, ciascuno stato del sistema di particelle identiche può essere ottenuto combinando linearmente i ket (32) e (33):

$$|\varphi_B\rangle = \sum_{i,j,\dots,p} b_{i,j,\dots,p} \hat{S} |1 : u_i; 2 : u_j; \dots; N : u_p\rangle , \quad \text{Caso bosonico} \quad (34)$$

$$|\varphi_F\rangle = \sum_{i,j,\dots,p} f_{i,j,\dots,p} \hat{A} |1 : u_i; 2 : u_j; \dots; N : u_p\rangle , \quad \text{Caso fermionico} \quad (35)$$

Ricordiamo infine che, per quanto riguarda i fermioni, se il vettore

$$|1 : u_i; 2 : u_j; \dots; N : u_p\rangle$$

presenta due o più indici uguali, l'applicazione su di esso dell'operatore \hat{A} restituisce il ket nullo; questo risultato esprime matematicamente il *Principio di esclusione di Pauli*: due o più fermioni indistinguibili non possono trovarsi contemporaneamente nello stesso stato quantistico.

3.2 Introduzione dei numeri di occupazione e degli operatori di creazione e distruzione

Il procedimento utilizzato, è facile capirlo, è lungo e praticamente inapplicabile nel caso in cui il numero delle particelle coinvolte sia molto grande, è limitato al caso in cui il numero delle particelle del sistema sia fisso e, ulteriore scomodità, i ket che vengono sommati all'interno di (34) e (35) non sono tutti indipendenti. Per quanto riguarda quest'ultimo aspetto, non è difficile verificare che se due ket del tipo (31) presentano gli stessi indici, ovviamente permutati in modo diverso (le somme (34) e (35) comprendono anche questi casi), l'azione degli operatori \hat{S} e \hat{A} su di essi sarà la stessa. Per esempio, scambiando solo gli indici delle prime due particelle in vettori nella forma (31), si ottiene:

$$\hat{S} |1 : u_i; 2 : u_j; \dots; N : u_p\rangle = \hat{S} |1 : u_j; 2 : u_i; \dots; N : u_p\rangle \quad (36)$$

Il caso fermionico è perfettamente analogo (si ha al più un cambio di segno nel ket finale).

Per ovviare a queste difficoltà introduciamo il formalismo della seconda quantizzazione.

Partiamo innanzitutto dal numero di occupazione n_j di uno stato quantistico, definito, in ciascuno dei ket del tipo (32) o (33), come il numero di particelle del sistema che si trovano nello stesso stato quantistico $|u_j\rangle$. Se il sistema è costituito da N particelle vale, naturalmente:

$$\sum_j n_j = N$$

Nel caso bosonico possiamo perciò definire il vettore:

$$|n_1; n_2; \dots; n_p\rangle = C \hat{S} \left| \overbrace{1 : u_1, 2 : u_1, \dots, n_1 : u_1}^{n_1 \text{ particelle nello stato } u_1}; \overbrace{n_1 + 1 : u_2, n_1 + 2 : u_2, \dots, n_1 + n_2 : u_2; \dots}^{n_2 \text{ particelle nello stato } u_2} \right\rangle \quad (37)$$

Dove $n_1, n_2 \dots$ sono i vari numeri di occupazione. Nel caso dei fermioni, \hat{S} va sostituito con \hat{A} e i numeri di occupazione possono assumere soltanto i valori 0 o 1 (principio di esclusione di Pauli). La costante C va scelta imponendo la normalizzazione dello stato, si trova che essa vale:

$$C = \sqrt{\frac{N!}{n_1! n_2! \dots}}, \quad \text{Bosoni} \quad (38)$$

$$C = \sqrt{N!}, \quad \text{Fermioni} \quad (39)$$

Per quanto visto nella (36), il vettore (37) è rappresentativo di tutti i ket (non indipendenti) che hanno gli stessi numeri di occupazione.

Lo stato del sistema potrà perciò essere scritto come

$$|\varphi_B\rangle = \sum_{i,j,\dots,p} b_{i,j,\dots,p} |n_1; n_2; \dots; n_p\rangle, \quad \text{Caso bosonico} \quad (40)$$

$$|\varphi_F\rangle = \sum_{i,j,\dots,p} f_{i,j,\dots,p} |n_1; n_2; \dots; n_p\rangle, \quad \text{Caso fermionico} \quad (41)$$

Dove, nelle sommatorie, si hanno soltanto ket tra loro indipendenti. I vettori $|n_1; n_2; \dots; n_p\rangle$ costituiscono perciò una base nello spazio degli stati del sistema di particelle identiche considerato.

Come abbiamo detto, la fisica di un sistema di N particelle indistinguibili si svolge in un sottospazio \mathcal{F}^N (dei ket totalmente simmetrici per i bosoni, di quelli totalmente antisimmetrici per i fermioni) del prodotto tensoriale degli spazi di Hilbert di ciascuna particella:

$$\mathcal{F}^N \subset \mathcal{H}^N = \overbrace{\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}}^{N \text{ volte}}$$

Concentriamoci adesso, in vista dei nostri scopi, soltanto sul caso in cui le particelle con cui abbiamo a che fare siano bosoni.

Nel caso in cui il numero delle particelle nel nostro sistema non sia fisso, introduciamo gli *operatori di creazione*, definendone l'azione su un qualsiasi ket del tipo (37):

$$a_i^\dagger : \mathcal{F}^N \mapsto \mathcal{F}^{N+1}$$

$$a_i^\dagger |n_1; n_2; \dots; n_i; \dots\rangle = \sqrt{n_i + 1} |n_1; n_2; \dots; n_i + 1; \dots\rangle \quad (42)$$

Come la sua stessa denominazione suggerisce, l'operatore di creazione a_i^\dagger crea una particella che si trova nello stato $|u_i\rangle$; il ket risultante è già simmetrizzato (o antisimmetrizzato).

Allo stesso modo possiamo trovare l'aggiunto di questo operatore, che indicheremo con a_i . Dalla formula di aggiunzione e della (42) otteniamo:

$$\begin{aligned} \langle \bar{n}_1; \bar{n}_2; \dots; \bar{n}_i; \dots | a_i | n_1; n_2; \dots; n_i; \dots \rangle &= \left(\langle n_1; n_2; \dots; n_i; \dots | a_i^\dagger | \bar{n}_1; \bar{n}_2; \dots; \bar{n}_i; \dots \rangle \right)^* \\ &= \sqrt{\bar{n}_i + 1} \delta_{n_1, \bar{n}_1} \delta_{n_2, \bar{n}_2} \dots \delta_{n_i, \bar{n}_i + 1} \delta_{n_i + 2, \bar{n}_i + 2} \dots \end{aligned} \quad (43)$$

Da cui possiamo dedurre che l'azione di a_i è:

$$a_i |n_1; n_2; \dots; n_i; \dots\rangle = \sqrt{n_i} |n_1; n_2; \dots; n_i - 1; \dots\rangle \quad (44)$$

Ossia, a_i *distrugge* una particella che si trova nello stato $|u_i\rangle$, ed è perciò denominato *operatore di distruzione*. Si può facilmente capire che a_i agisce tra gli spazi:

$$a_i : \mathcal{F}^N \mapsto \mathcal{F}^{N-1}$$

Mediante l'utilizzo degli operatori di creazione e distruzione possiamo controllare sistemi che contengono un numero variabile di particelle indistinguibili. Tali operatori

agiscono perciò su uno spazio che non specifica il numero delle particelle presenti e prende il nome di *Spazio di Fock*:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^1 \oplus \mathcal{F}^2 \oplus \dots = \bigoplus_{N=0}^{+\infty} \mathcal{F}^N$$

Chiamiamo $|0, 0, \dots, 0, \dots\rangle = |0\rangle$ lo stato di vuoto, nel quale il sistema non contiene particelle. Si noti come il ket $|0\rangle$ non sia il vettore nullo (che corrisponde ad uno stato fisicamente impossibile da realizzare), bensì descriva semplicemente lo stato, fisicamente realizzabile, in cui non vi siano bosoni.

Si avrà, per definizione:

$$a_i^\dagger |0\rangle = |u_i\rangle \quad (45)$$

L'operatore di creazione crea una particella nello stato u_i a partire dal vuoto.

Per creare un sistema in uno stato generico basta applicare opportunamente l'operatore di creazione:

$$|n_1; n_2; \dots; n_i; \dots\rangle = \frac{(a_1^\dagger)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \frac{(a_2^\dagger)^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} \dots \frac{(a_i^\dagger)^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} \dots |0, 0, \dots, 0, \dots\rangle = \prod_j \frac{(a_j^\dagger)^{n_j}}{\sqrt{n_j!}} |0\rangle \quad (46)$$

Non è difficile capire che, poiché creano (distruggono) particelle in stati diversi, gli operatori a_i^\dagger e a_j^\dagger (a_i e a_j) con $i \neq j$ commutano. Naturalmente essi commuteranno anche se $i = j$, poiché, in tal caso, si riducono allo stesso operatore.

Si ha perciò:

$$[a_i^\dagger, a_j^\dagger] = [a_i, a_j] = 0$$

Per $i \neq j$ commuteranno anche a_i^\dagger e a_j , non è difficile vederlo in base a come agiscono nella (42) e nella (44).

Per $i = j$ vale invece:

$$\begin{aligned} [a_i, a_i^\dagger] |n_1; n_2; \dots; n_i; \dots\rangle &= a_i a_i^\dagger |n_1; n_2; \dots; n_i; \dots\rangle - a_i^\dagger a_i |n_1; n_2; \dots; n_i; \dots\rangle \\ &= a_i \sqrt{n_i + 1} |n_1; n_2; \dots; n_i + 1; \dots\rangle - a_i^\dagger \sqrt{n_i} |n_1; n_2; \dots; n_i - 1; \dots\rangle \\ &= \sqrt{(n_i + 1)^2} |n_1; n_2; \dots; n_i; \dots\rangle - \sqrt{n_i^2} |n_1; n_2; \dots; n_i; \dots\rangle \end{aligned}$$

$$= (n_i + 1 - n_i) |n_1; n_2; \dots; n_i; \dots\rangle = |n_1; n_2; \dots; n_i; \dots\rangle$$

E, perciò:

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} \tag{47}$$

4 Quantizzazione del campo elettromagnetico

4.1 Hamiltoniana del campo elettromagnetico ed oscillatori armonici

Torniamo ora al campo elettromagnetico e mostriamo come, con l'ausilio gli strumenti fin qui acquisiti, sia possibile operare su di esso una quantizzazione. Ricordiamo innanzitutto il teorema di Poynting (24), che esprime la conservazione dell'energia in un certo volume di spazio V :

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3x \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) = - \int_{\Sigma} d\sigma \frac{c}{4\pi} \hat{n} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{B}) - \int_V d^3x \vec{j} \cdot \vec{E}$$

La parte di energia immagazzinata nel campo è data dal termine:

$$\int_V d^3x \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) \quad (48)$$

Applichiamo ora un gauge conveniente ai nostri scopi, ponendo la prima componente del quadrivettore potenziale A^μ pari a 0:

$$\varphi = 0 \quad (49)$$

Notiamo che è sempre possibile effettuare tale scelta purché, dato un quadripotenziale $A^\mu = (\varphi, \vec{A})$, si scelga una trasformazione (10) in cui il gauge f soddisfi:

$$\varphi = \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \quad (50)$$

Teniamo anche presente il gauge di Coulomb (che è sempre possibile introdurre, in quanto $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ è un parametro libero nelle equazioni (8) e (9)), grazie al quale l'equazione (15) assume la forma:

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi \rho, \quad (51)$$

Ciò è compatibile con la nostra scelta di porre $\varphi = 0$ se e solo se $\rho = 0$, ossia se, nel sistema che andiamo ad analizzare, non vi sono cariche. Poiché è nostro interesse, in questa trattazione, indagare solo le proprietà quantistiche del campo elettromagnetico, senza andare ad indagare le sue eventuali interazioni con la materia, assumiamo tranquillamente $\rho = 0$.

Il calibro:

$$\begin{cases} \varphi = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \end{cases} \quad (52)$$

prende il nome di *gauge di radiazione*, proprio perché ben si adatta allo studio del campo elettromagnetico nel vuoto.¹¹

Si ha dunque, con tale scelta:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (53)$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (54)$$

Nonostante nello studio dell'elettromagnetismo capiti spesso di avere a che fare con campi elettrici o magnetici prodotti da distribuzioni infinite di carica o di corrente, è utile notare che queste ultime siano soltanto utili approssimazioni impossibili da realizzare fisicamente. Nella realtà, un campo elettromagnetico sarà sempre confinato in una certa regione di spazio (sufficientemente ampia). Possiamo perciò affermare che, in generale, tutte le quantità legate ad un qualsiasi campo elettromagnetico (\vec{E} , \vec{B} , A^μ) saranno trascurabili, ad esempio, al di fuori di un certo parallelepipedo $L_1 \times L_2 \times L_3$, il cui volume dipenderà dal caso particolare che si sta studiando. Ad esempio, se il campo elettromagnetico considerato è quello prodotto da una molecola polare (come ad esempio l'acqua) è sufficiente che i lati L_1 , L_2 , L_3 abbiano dimensioni dell'ordine del micron ($10^{-6} m$). Se invece si sta studiando il campo elettromagnetico prodotto da un'antenna per le telecomunicazioni sarà necessario che L_1 , L_2 e L_3 abbiano dimensioni dell'ordine dei $10^3 m$. In generale, quindi, poiché i campi \vec{E} , \vec{B} , \vec{A} sono continui all'interno del parallelepipedo $\mathcal{P} = L_1 \times L_2 \times L_3$ e nulli al di fuori (e sono perciò funzioni L^2 in \mathcal{P}), potremo sviluppare ognuna delle loro componenti in serie di Fourier tramite le funzioni:

$$f_{klm}(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{L_1 L_2 L_3}} \sin\left(\frac{k\pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{l\pi y}{L_2}\right) \sin\left(\frac{m\pi z}{L_3}\right), \quad k, l, m \in N \quad (55)$$

Richiamiamo, come risultato dell'analisi funzionale, il fatto che tali funzioni costituiscono una base ortonormale in $L^2(\mathcal{P})$.

$$\int_0^{L_1} dx \int_0^{L_2} dy \int_0^{L_3} dz f_{klm}(x, y, z) f_{k'l'm'}(x, y, z) = \delta_{kk'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

¹¹Notiamo che se un quadrivettore potenziale soddisfa le condizioni (52), esso soddisfa automaticamente anche le condizioni (11) imposte dal gauge di Lorentz.

$$S(x, y, z, t) = \sum_{klm} q_{klm}(t) f_{klm}(x, y, z) \quad \forall S(x, y, z, t) \in L^2(\mathcal{P})$$

Dove:

$$q_{klm}(t) = \int_0^{L_1} dx \int_0^{L_2} dy \int_0^{L_3} dz S(x, y, z, t) f_{klm}(x, y, z)$$

Notiamo inoltre che, poiché rappresentano onde stazionarie all'interno del parallelepipedo \mathcal{P} , le f_{klm} soddisfano le equazioni agli autovalori:

$$\nabla^2 f_{klm}(x, y, z) + \omega_{klm}^2 f_{klm}(x, y, z) = 0 \quad (56)$$

Dove:

$$\omega_{klm}^2 = \pi^2 \left(\frac{k^2}{L_1^2} + \frac{l^2}{L_2^2} + \frac{m^2}{L_3^2} \right) \quad (57)$$

In casi come questo le f_{klm} prendono il nome di *modi normali di vibrazione del parallelepipedo* \mathcal{P} . Espandiamo dunque il potenziale vettore \vec{A} ed il campo elettrico \vec{E} su tali modi ed otteniamo:

$$\vec{A} = \sum_{klm} \vec{q}_{klm}(t) f_{klm}(x, y, z) \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{klm} \vec{q}_{klm}(t) f_{klm}(x, y, z) \right) \\ &= \sum_{klm} -\frac{1}{c} \dot{\vec{q}}_{klm}(t) f_{klm}(x, y, z) = \sum_{klm} \vec{p}_{klm}(t) f_{klm}(x, y, z) \end{aligned} \quad (59)$$

Dove:

$$\vec{q}_{klm}(t) = \int_0^{L_1} dx \int_0^{L_2} dy \int_0^{L_3} dz \vec{A}(x, y, z, t) f_{klm}(x, y, z) \quad (60)$$

$$\vec{p}_{klm}(t) = \int_0^{L_1} dx \int_0^{L_2} dy \int_0^{L_3} dz \vec{E}(x, y, z, t) f_{klm}(x, y, z) \quad (61)$$

Notiamo inoltre che vale la relazione:

$$\vec{p}_{klm}(t) = -\frac{1}{c} \dot{\vec{q}}_{klm}(t) \quad (62)$$

Dimostreremo tra poco che questo legame tra $\vec{p}_{klm}(t)$ e $\vec{q}_{klm}(t)$ non è casuale: se si prendono gli stessi valori di k, l, m esse sono variabili coniugate associate ad una funzione Hamiltoniana.

Torniamo ora all'espressione (48) che esprime l'energia immagazzinata nel campo elettromagnetico contenuto in un certo volume V (che in questo caso coincide col parallelepipedo \mathcal{P}):

$$\int_{V=\mathcal{P}} d^3x \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2),$$

e sostituiamo in essa $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$.

Si ha, utilizzando la notazione tensoriale:

$$\vec{B}^2 = \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{A} \right)^2 = \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \frac{\partial A_m}{\partial x_l} \quad (63)$$

Dove

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{se } ijk \text{ è una permutazione pari di } 1,2,3 \\ -1, & \text{se } ijk \text{ è una permutazione dispari di } 1,2,3 \\ 0, & \text{se almeno due dei tre indici sono uguali tra loro} \end{cases} \quad (64)$$

è il tensore di Ricci-Curbastro, e dove si sottintende la sommatoria su indici ripetuti.

Non è difficile vedere che, una volta fissato l'indice i nell'equazione (63), gli unici termini non nulli saranno quelli per cui $j = l, k = m, j, k \neq i$ e $j = m, k = l, j, k \neq i$, perciò:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \frac{\partial A_m}{\partial x_l} &= \frac{\partial A_m}{\partial x_l} \frac{\partial A_m}{\partial x_l} - \frac{\partial A_l}{\partial x_m} \frac{\partial A_m}{\partial x_l} \\ &= \left(\frac{\partial A_m}{\partial x_l} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial x_l} \left(A_m \frac{\partial A_l}{\partial x_m} \right) + A_m \frac{\partial^2 A_l}{\partial x_m \partial x_l} \end{aligned}$$

Dove, nel secondo passaggio, si è usata la regola di Leibniz per la derivata del prodotto di due funzioni.

Inserendo quest'ultima espressione nella (48) e tenendo conto del fatto che \vec{A} è nullo sulla superficie del volume considerato e del fatto che $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, l'energia del campo elettromagnetico assume la forma:

$$U_{em} = \frac{1}{8\pi} \int_V d^3x \sum_m \left[(E_m)^2 + \sum_l \left(\frac{\partial A_m}{\partial x_l} \right)^2 \right]$$

Ossia:

$$U_{em} = \frac{1}{8\pi} \left[\overbrace{\sum_j \int_V d^3x (E_j)^2}^{\alpha} + \overbrace{\sum_j \int_V d^3x (\vec{\nabla} A_j)^2}^{\beta} \right] \quad (65)$$

Per ragioni di semplicità, consideriamo ora separatamente i due addendi α e β al secondo membro di (65); sostituendo in ciascuno di essi il relativo sviluppo di Fourier, (58) o (59) a seconda che si tratti di \vec{A} o di \vec{E} , si ottiene:

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_j \int_V d^3x (E_j)^2 \\ &= \int_V d^3x \left[\overbrace{\left(\sum_{klm} \vec{p}_{klm}(t) f_{klm}(x, y, z) \right) \cdot \left(\sum_{k'l'm'} \vec{p}_{k'l'm'}(t) f_{k'l'm'}(x, y, z) \right)}^{\vec{E} \cdot \vec{E}} \right] \\ &= \sum_j \sum_{klm} (p_{klm}^j(t))^2 \quad (66) \end{aligned}$$

Dove nell'ultima uguaglianza si è tenuto conto dell'ortonormalità delle funzioni $f_{klm}(x, y, z)$.

Analogamente:

$$\begin{aligned} \beta &= \sum_j \int_V d^3x (\vec{\nabla} A_j)^2 = - \sum_j \int_V d^3x A_j \nabla^2 A_j \\ &= - \sum_j \int_V d^3x \left[\left(\sum_{k'l'm'} q_{k'l'm'}^j(t) f_{k'l'm'}(x, y, z) \right) \left(\sum_{klm} q_{klm}^j(t) \nabla^2 f_{klm}(x, y, z) \right) \right] \\ &= - \sum_j \int_V d^3x \left[\left(\sum_{k'l'm'} q_{k'l'm'}^j(t) f_{k'l'm'}(x, y, z) \right) \left(- \sum_{klm} q_{klm}^j(t) \omega_{klm}^2(x, y, z) \right) \right] \\ &= \sum_j \sum_{klm} \omega_{klm}^2 (q_{klm}^j(t))^2 \quad (67) \end{aligned}$$

Dove nel secondo passaggio si è effettuata un'integrazione per parti (si ricordi che \vec{A} è nullo sulla superficie del parallelepipedo di volume V su cui stiamo integrando) e dove si è tenuto conto del fatto che la base f_{klm} è costituita da autofunzioni dell'operatore di Laplace (equazioni (56) e (57)).

A questo punto, andando a sostituire nella (65) le due espressioni appena trovate per α e β si ha:

$$U_{em} = \frac{1}{8\pi} \sum_j \sum_{klm} \left[(p_{klm}^j(t))^2 + \omega_{klm}^2 (q_{klm}^j(t))^2 \right] \quad (68)$$

Dove, ricordando la (62):

$$p_{klm}^j(t) = -\frac{1}{c} \dot{q}_{klm}^j(t)$$

A questo punto è utile ricordare (nota 11, pag. 25) che, poiché soddisfano il gauge di radiazione, i campi che stiamo considerando ottemperano anche alle condizioni imposte dal gauge di Lorentz (11). In particolare, il potenziale vettore \vec{A} è soluzione dell'equazione (18):

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} = 0$$

essa, come abbiamo visto (pagg. 14-14), è proprio una diretta conseguenza del fatto che \vec{A} , in assenza di sorgenti, rispetta le condizioni di Lorentz.

Perciò, se andiamo a sostituire (58), lo sviluppo in serie di Fourier di \vec{A} , nell'equazione di D'Alembert (18) e teniamo conto della (56) otteniamo:

$$\ddot{\vec{q}}_{klm}(t) + c^2 \omega_{klm}^2 \vec{q}_{klm}(t) = 0 \quad (69)$$

Ossia: ciascuna componente di Fourier di \vec{A} soddisfa l'equazione del moto di un oscillatore armonico.

Da quanto appena visto, l'espressione per l'energia del campo elettromagnetico (68) risulta (formalmente) identica a quella dell'Hamiltoniana di un numero discreto di oscillatori armonici indipendenti, individuati dai quattro numeri (j, k, l, m) ed aventi frequenze ω_{klm} indipendenti da j .

$$\mathcal{H} = \frac{1}{8\pi} \sum_j \sum_{klm} \left((p_{klm}^j(t))^2 + \omega_{klm}^2 (q_{klm}^j(t))^2 \right) \quad (70)$$

Ecco perché tale espressione, formata da coordinate lagrangiane e relativi momenti coniugati, prende il nome di *Hamiltoniana del campo elettromagnetico*.

Non è difficile vedere in effetti che, per gli stessi valori di (k, l, m) , le variabili $\vec{p}_{klm}(t)$ e $\vec{q}_{klm}(t)$ sono coniugate tra loro; dalle equazioni (62) e (69) e dall'Hamiltoniana (70) si ricavano infatti facilmente le:

$$\begin{cases} \dot{p}_{klm}^j(t) = -4\pi c \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{klm}^j} \\ \dot{q}_{klm}^j(t) = -4\pi c \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{klm}^j} \end{cases} \quad (71)$$

le quali, a meno di un fattore moltiplicativo $-4\pi c$ facilmente inglobabile nell'Hamiltoniana, sono proprio le equazioni di Hamilton-Jacobi.

4.2 Quantizzazione

Alla luce di quanto visto nel precedente sottoparagrafo, possiamo ora porre le basi per una trattazione quantistica della radiazione elettromagnetica libera (ricordiamo che i risultati appena ottenuti si basavano tutti sulla scelta del gauge di radiazione).

Secondo le consuete regole di quantizzazione, cominciamo con l'associare ai coefficienti di Fourier $p_{klm}^j(t)$ e $q_{klm}^j(t)$ di ciascuna componente j dei campi \vec{A} ed \vec{E} degli operatori autoaggiunti \hat{P}_{klm}^j e \hat{Q}_{klm}^j . Dato che nell'Hamiltoniana (70) tali coefficienti giocano, rispettivamente, il ruolo del momento e della posizione, richiediamo che gli operatori associati soddisfino le relazioni di commutazione:

$$[\hat{Q}_{klm}^j, \hat{P}_{k'l'm'}^{j'}] = i\delta_{jj'}\delta_{kk'}\delta_{ll'}\delta_{mm'} \quad (72)$$

All'Hamiltoniana (70) possiamo di conseguenza associare un osservabile Hamiltoniano che assumerà la forma:

$$\hat{H} = \frac{1}{8\pi} \sum_j \sum_{klm} \left[\left(\hat{P}_{klm}^j \right)^2 + \omega_{klm}^2 \left(\hat{Q}_{klm}^j \right)^2 \right] = \frac{1}{8\pi} \sum_j \sum_{klm} \hat{H}_{klm}^j \quad (73)$$

Come era naturale aspettarsi, tale operatore è formalmente identico a quello di un sistema di oscillatori armonici quantistici disaccoppiati, ciascuno avente Hamiltoniano ¹² :

¹²Il lettore potrebbe chiedersi come mai, visto che il parametro ω_{klm} non dipende dall'indice j , non andiamo a sommare su di esso nella (70) ottenendo $\mathcal{H} = \frac{1}{8\pi} \sum_{klm} \left((p_{klm}(t))^2 + \omega_{klm}^2 (q_{klm}(t))^2 \right)$ e poi non sostituiamo al posto di $p_{klm}(t) = \sqrt{\sum_j p_{klm}^j(t)}$ e $q_{klm}(t) = \sqrt{\sum_j q_{klm}^j(t)}$ due operatori \hat{P}_{klm} , \hat{Q}_{klm}

$$\frac{1}{8\pi} \hat{H}_{klm}^j = \frac{1}{8\pi} \left[\left(\hat{P}_{klm}^j \right)^2 + \omega_{klm}^2 \left(\hat{Q}_{klm}^j \right)^2 \right] \quad (74)$$

A meno di un fattore di scala $\frac{1}{8\pi}$, l'equazione agli autovalori di ciascun oscillatore assume quindi la forma:

$$\hat{H}_{klm}^j |u_{klm}^j\rangle = U_{klm}^j |u_{klm}^j\rangle \quad (75)$$

E le possibili energie sono, come noto:

$$U_{klm}^j = \left(n_{klm}^j + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_{klm} \quad (76)$$

Dove n_{klm} è un numero intero non negativo.

Lo stato più generale del nostro sistema quantistico sarà perciò:

$$|n_{111}^1, n_{111}^2, n_{111}^3, n_{112}^1, n_{112}^2, n_{112}^3, n_{121}^1, \dots, n_{klm}^j, \dots\rangle \quad (77)$$

E corrisponderà ad un'energia:

$$U_{tot} = \sum_j \sum_{klm} \left(n_{klm}^j + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_{klm} \quad (78)$$

Dove l'oscillatore ($j = 1, k = 1, l = 1, m = 1$) ha energia $E_{111}^1 = \left(n_{111}^1 + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_{111}$, l'oscillatore ($j = 1, k = 1, l = 1, m = 2$) ha energia $E_{112}^1 = \left(n_{112}^1 + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_{112}$ e così via. Possiamo dire che, in generale, l'oscillatore (j, k, l, m) è stato eccitato n_{klm}^j volte, o meglio che sono stati attivati n_{klm}^j *quanti di oscillazione* ciascuno avente energia $\hbar \omega_{klm}$. Riepiloghiamo, ai fini di una migliore comprensione, i passaggi che ci hanno portati fin qui: siamo riusciti, inizialmente, a trovare un'espressione che descrivesse l'energia immagazzinata in un campo elettromagnetico; tramite delle espansioni di Fourier per i campi abbiamo poi associato una funzione Hamiltoniana a tale energia e, infine, seguendo le regole di quantizzazione, abbiamo potuto attribuire al campo elettromagnetico un operatore Hamiltoniano del tipo (73). La trattazione quantistica, per quanto appena

che soddisfino le relazioni di commutazione $[\hat{Q}_{klm}, \hat{P}_{k'l'm'}] = i\delta_{kk'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}$. I calcoli, in effetti, risulterebbero molto più agili perché si avrebbe un indice in meno in tutte le formule. Non sarebbe però possibile ottenere un'espressione per i campi (che vedremo più avanti) in termini degli operatori di creazione e distruzione.

visto, prevede che l'energia del campo elettromagnetico si possa scrivere come somma delle energie di tanti oscillatori armonici dipendenti dai quattro indici discreti j, k, l, m (dove j varia da 1 a 3, mentre k, l, m possono assumere qualsiasi valore intero non negativo). Gli n_{klm}^j quanti di energia di ciascun oscillatore armonico sono proprio ciò cui si dà il nome di *fotoni*. Abbiamo dimostrato, dunque, che ad ogni modo normale di vibrazione f_{klm} (55) con frequenza angolare ω_{klm} (57) sono associabili tre oscillatori armonici (uno per ogni componente dei campi) i cui quanti di energia sono, per l'appunto, i *fotoni*. Notiamo inoltre che le frequenze angolari ω_{klm} associate a ciascun modo normale di vibrazione non dipendono dalla componente j che si sta considerando.

Nulla ci impedisce, nella (77), di avere $n_{klm}^j = 0 \forall j, k, l, m$: tale stato del campo elettromagnetico, in cui tutti gli oscillatori sono nello stato fondamentale con energia $E_{klm}^j = \frac{1}{2}\hbar\omega_{klm}$, corrisponde, fisicamente, all'assenza di fotoni e prende perciò il nome di *vuoto fotonico*. Osserviamo anche che n_{klm}^j può assumere qualsiasi valore intero non negativo quindi, se interpretiamo i fotoni come delle particelle, potremo averne un numero qualsiasi nello stesso stato $|u_{klm}^j\rangle$, il che implica che esse dovranno per forza essere di natura bosonica (Principio di esclusione di Pauli). Applichiamo adesso il formalismo della seconda quantizzazione a quanto appena visto. Introduciamo, per ogni oscillatore del tipo (j, k, l, m) , gli operatori di creazione e distruzione:

$$\begin{cases} a_{klm}^{\dagger j} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{Q}_{klm}^j - i\hat{P}_{klm}^j \right) \\ a_{klm}^j = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{Q}_{klm}^j + i\hat{P}_{klm}^j \right) \end{cases} \quad (79)$$

Essi, secondo la (47), soddisfano la relazione di commutazione:

$$\left[a_{klm}^j, a_{klm}^{\dagger j} \right] = \delta_{jj'} \delta_{kk'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (80)$$

Fisicamente, l'operatore di creazione $a_{klm}^{\dagger j}$ permette di *creare* un fotone, associato alla j -esima componente di un campo avente frequenza angolare ω_{klm} . L'operatore di distruzione corrispondente a_{klm}^j , naturalmente, *distrugge* un fotone dello stesso tipo.

Possiamo perciò vedere lo stato (77) come:

$$\begin{aligned} & |n_{111}^1, n_{111}^2, n_{111}^3, n_{112}^1, n_{112}^2, n_{112}^3, n_{121}^1, \dots, n_{klm}^j, \dots\rangle \\ &= \frac{\left(a_{111}^{\dagger 1}\right)^{n_{111}^1}}{\sqrt{n_{111}^1!}} \frac{\left(a_{111}^{\dagger 2}\right)^{n_{111}^2}}{\sqrt{n_{111}^2!}} \frac{\left(a_{111}^{\dagger 3}\right)^{n_{111}^3}}{\sqrt{n_{111}^3!}} \frac{\left(a_{112}^{\dagger 1}\right)^{n_{112}^1}}{\sqrt{n_{112}^1!}} \dots \frac{\left(a_{klm}^{\dagger j}\right)^{n_{klm}^j}}{\sqrt{n_{klm}^j!}} \dots |0, \dots, 0, \dots\rangle \end{aligned} \quad (81)$$

Ossia, applicando l'operatore di creazione dei fotoni $a_{klm}^{\dagger j}$ di frequenza ω_{klm} un numero n_{klm}^j di volte, a partire dallo stato di vuoto fotonico e per ogni valore di j, k, l, m ,

possiamo ottenere qualsiasi stato del campo elettromagnetico quantizzato. L'azione degli operatori di creazione (42) ci garantisce inoltre la normalizzazione dello stato finale.

A questo punto un qualsiasi stato $|\psi(t)\rangle$ del campo elettromagnetico risulta sovrapposizione di stati del tipo (77):

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n_{111}^1 \dots n_{klm}^j \dots} c_{n_{111}^1 \dots n_{klm}^j \dots}(t) |n_{111}^1, \dots, n_{klm}^j, \dots\rangle \quad (82)$$

E, dall'equazione di Schroedinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

possiamo prevederne l'evoluzione. Si ha, come in tutti i casi in cui l'operatore hamiltoniano non dipende dal tempo:

$$c_{n_{111}^1 \dots n_{klm}^j \dots}(t) = c_{n_{111}^1 \dots n_{klm}^j \dots}(0) \exp \left[-i \overbrace{\sum_j \sum_{klm} \left(n_{klm}^j + \frac{1}{2} \right) \omega_{klm}}^{\text{Energia di un singolo autostato del sistema}} \right] t \quad (83)$$

Possiamo infine esprimere \vec{A} ed \vec{E} stessi in termini operatoriali. Sostituendo nelle espansioni di Fourier (58) ed (59) i coefficienti $p_{klm}^j(t)$ e $q_{klm}^j(t)$ con gli operatori \hat{Q}_{klm}^j e \hat{P}_{klm}^j troviamo l'espressione quantistica per ciascuna componente dei campi:

$$A^j = \sum_{klm} q_{klm}^j(t) f_{klm}(x, y, z) \mapsto \hat{A}^j = \sum_{klm} \hat{Q}_{klm}^j f_{klm}(x, y, z) \quad (84)$$

$$E^j = \sum_{klm} p_{klm}^j(t) f_{klm}(x, y, z) \mapsto \hat{E}^j = \sum_{klm} \hat{P}_{klm}^j f_{klm}(x, y, z) \quad (85)$$

E, dalla definizione (79) degli operatori di creazione e distruzione otteniamo, con qualche semplice passaggio algebrico:

$$\begin{cases} \hat{Q}_{klm}^j = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a_{klm}^{\dagger j} + a_{klm}^j \right) \\ \hat{P}_{klm}^j = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(a_{klm}^{\dagger j} - a_{klm}^j \right) \end{cases} \quad (86)$$

Di conseguenza, le componenti dei campi possono essere scritte come:

$$\begin{cases} \hat{A}^j = \sum_{klm} f_{klm}(x, y, z) \hat{Q}_{klm}^j = \sum_{klm} \frac{1}{\sqrt{2}} f_{klm}(x, y, z) \left(a_{klm}^{\dagger j} + a_{klm}^j \right) \\ \hat{E}^j = \sum_{klm} f_{klm}(x, y, z) \hat{P}_{klm}^j = \sum_{klm} \frac{i}{\sqrt{2}} f_{klm}(x, y, z) \left(a_{klm}^{\dagger j} - a_{klm}^j \right) \end{cases} \quad (87)$$

4.3 Alcune importanti considerazioni fisiche

Discutiamo, a questo punto, delle importanti conseguenze fisiche derivanti da quanto visto. Consideriamo innanzitutto a calcolare il valore di aspettazione di ciascuna componente del campo elettrico:

$$\langle \hat{E}^j \rangle = \langle \psi(t) | \hat{E}^j | \psi(t) \rangle \quad (88)$$

Dove lo stato $|\psi(t)\rangle$ lo ricordiamo, è dato da:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n_{111}^1 \dots n_{klm}^j \dots} c_{n_{111}^1 \dots n_{klm}^j \dots}(t) |n_{111}^1, \dots, n_{klm}^j, \dots\rangle \quad (89)$$

Sostituendo la relazione (87), che esprime \hat{E}^j in termini degli operatori di creazione e distruzione, nella (88) si ottiene:

$$\begin{aligned} \langle \hat{E}^j \rangle &= \langle \psi(t) | \hat{E}^j | \psi(t) \rangle \\ &= \sum_{n_{111}^1 \dots n_{klm}^j \dots} \sum_{n_{111}^1 \dots n_{klm}^j \dots} c_{n_{111}^1 \dots n_{klm}^j \dots}^*(t) c_{n_{111}^1 \dots n_{klm}^j \dots}(t) \langle n_{111}^1, \dots, n_{klm}^j, \dots | \hat{E}^j | n_{111}^1, \dots, n_{klm}^j, \dots \rangle \\ &= \sum_{n_{111}^1 \dots n_{klm}^j \dots} \sum_{n_{111}^1 \dots n_{klm}^j \dots} \sum_{klm} c_{n_{111}^1 \dots n_{klm}^j \dots}^*(t) c_{n_{111}^1 \dots n_{klm}^j \dots}(t) \\ &\quad \left(\langle n_{111}^1, \dots, n_{klm}^j, \dots | \frac{i}{\sqrt{2}} f_{klm}(x, y, z) \left(a_{klm}^{\dagger j} - a_{klm}^j \right) | n_{111}^1, \dots, n_{klm}^j, \dots \rangle \right) \end{aligned} \quad (90)$$

Benché complicata, l'espressione precedente si semplifica notevolmente se teniamo conto di come gli operatori di creazione e distruzione agiscono sugli stati. Ricordando le identità (42) e (44)

$$\begin{aligned} a_{klm}^{\dagger j} |n_{111}^1; n_{111}^2; \dots; n_{klm}^j; \dots\rangle &= \sqrt{n_{klm}^j + 1} |n_{111}^1; n_{111}^2; \dots; n_{klm}^j + 1; \dots\rangle \\ a_{klm}^j |n_{111}^1; n_{111}^2; \dots; n_{klm}^j; \dots\rangle &= \sqrt{n_{klm}^j} |n_{111}^1; n_{111}^2; \dots; n_{klm}^j - 1; \dots\rangle \end{aligned}$$

e ricordando la relazione (83) si vede subito che le uniche frequenze di Bohr ω_{klm} che possono comparire nell'equazione (88) sono proprio le frequenze $\frac{\omega_{klm}}{2\pi}$ associate ai modi normali di vibrazione $f_{klm}(x, y, z)$.

Il valore di aspettazione $\langle \hat{E}^j \rangle$ del campo elettrico risulta perciò essere una sovrapposizione di tutte le onde stazionarie $f_{klm}(x, y, z)$ che possono esistere all'interno del parallelepipedo \mathcal{P} .

Consideriamo adesso il valore di aspettazione di una qualsiasi componente del campo elettrico (o del potenziale vettore) tra due stati di vuoto fotonico:

$$\langle 0 | \hat{E}^j | 0 \rangle \quad (91)$$

Sempre per via del fatto che gli operatori di creazione e distruzione hanno elementi diagonali nulli (identità (42) e (44)), possiamo affermare che:

$$\langle 0 | \hat{E}^j | 0 \rangle = \langle 0 | \sum_{klm} \frac{i}{\sqrt{2}} f_{klm}(x, y, z) \left(a_{klm}^{\dagger j} - a_{klm}^j \right) | 0 \rangle = 0 \quad (92)$$

Come intuitivamente potevamo immaginarci, lo stato di vuoto fotonico è il corrispondente quantistico dello stato classico in cui il campo elettrico è identicamente nullo in ogni punto dello spazio. Vi è, tuttavia, un'importantissimo aspetto che va tenuto in conto: andando a calcolare il valore di aspettazione di $(\hat{E}^j)^2$ nello stato di vuoto fotonico si ottiene:

$$\begin{aligned} & \langle 0 | (\hat{E}^j)^2 | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \left(\sum_{klm} \frac{i}{\sqrt{2}} \left(a_{klm}^{\dagger j} - a_{klm}^j \right) f_{klm}(x, y, z) \right) \times \left(\sum_{k'l'm'} \frac{i}{\sqrt{2}} \left(a_{k'l'm'}^{\dagger j'} - a_{k'l'm'}^{j'} \right) f_{k'l'm'}(x, y, z) \right) | 0 \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{klm} \sum_{k'l'm'} \left(\langle 0 | a_{klm}^{\dagger j} a_{k'l'm'}^{\dagger j'} | 0 \rangle - \langle 0 | a_{klm}^{\dagger j} a_{k'l'm'}^{j'} | 0 \rangle \right) f_{klm}(x, y, z) f_{k'l'm'}(x, y, z) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{klm} \sum_{k'l'm'} \left(-\langle 0 | a_{klm}^j a_{k'l'm'}^{\dagger j'} | 0 \rangle + \langle 0 | a_{klm}^j a_{k'l'm'}^{j'} | 0 \rangle \right) f_{klm}(x, y, z) f_{k'l'm'}(x, y, z) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{klm} \sum_{k'l'm'} \langle 0 | a_{klm}^j a_{k'l'm'}^{\dagger j'} | 0 \rangle f_{klm}(x, y, z) f_{k'l'm'}(x, y, z) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{klm} f_{klm}^2(x, y, z) \end{aligned} \quad (93)$$

Dove si sono nuovamente utilizzate le (42) e (44), oltre all'ortonormalità degli auto-stati $|n_{klm}^j\rangle$ e $|n_{k'l'm'}^{j'}\rangle$.

Dunque, andando a misurare il valore della componente E^j del campo elettrico nello stato di vuoto fotonico un grande numero di volte, otterremo mediamente un valore nullo (equazione (92)) ma i nostri risultati presenteranno una varianza non nulla. Infatti, tenendo conto della (93) e della definizione di varianza si ha:

$$\langle 0 | \left(\hat{E}^j - \langle \hat{E}^j \rangle \right)^2 | 0 \rangle = \langle 0 | \left(\hat{E}^j \right)^2 | 0 \rangle = \frac{1}{2} f_{klm}^2(x, y, z) \quad (94)$$

La trattazione quantistica prevede dunque che anche nello stato di vuoto fotonico il campo elettrico non sia sempre identicamente nullo (come è invece nello stato classico in cui $\vec{E} = 0$) ma che, anzi, subisca delle fluttuazioni attorno al valore $\vec{0}$. Un analogo discorso vale per il potenziale vettore \vec{A} (e di conseguenza per il campo magnetico \vec{B}). Questo aspetto è di fondamentale importanza, per esempio, per spiegare il fenomeno della diseccitazione degli elettroni. Si pensi ad un atomo non soggetto ad alcun campo elettrico; nell'Hamiltoniano di un suo elettrone gli unici termini d'interazione sono, se si prescinde da quanto visto finora, dovuti soltanto al nucleo ed agli altri elettroni. Supponendo che l'elettrone considerato si trovi in un autostato del proprio Hamiltoniano, esso dovrebbe, in linea di principio, permanervi indefinitamente. I risultati sperimentali¹³ mostrano invece che, dopo un certo tempo, l'elettrone si diseccita e passa nell'autostato fondamentale emettendo radiazione elettromagnetica. Se teniamo conto di quanto abbiamo appena dimostrato, non è difficile dare una spiegazione, almeno qualitativa, di questo fenomeno. Il fatto che il campo elettrico abbia valor medio nullo non significa, come abbiamo visto, che qualora lo si misuri ad un dato istante, si ottenga sempre un valore nullo (equazione (94)). L'elettrone dell'atomo che consideriamo potrebbe perciò interagire col campo elettromagnetico a causa delle fluttuazioni quantistiche che quest'ultimo presenta (anche nello stato di vuoto fotonico, corrispondente alla situazione in cui non si sta applicando alcun campo elettromagnetico al sistema!). Un'analisi dettagliata dell'interazione campo elettromagnetico quantizzato-elettrone costituisce un passo successivo a questa trattazione ed esula, naturalmente, dai nostri scopi.

Accenniamo, infine, ad un altro particolare (tutt'altro che irrilevante!) nascosto in alcuni calcoli fin qui visti.

¹³Si pensi, ad esempio, alle prime osservazioni effettuate su gas eccitati da scariche elettriche.

La quantità:

$$U_0 = \sum_j \sum_{klm} \frac{1}{2} \hbar \omega_{klm} , \quad (95)$$

che esprime l'autovalore dell'energia totale del campo elettromagnetico quantizzato nello stato di vuoto fotonico, è infinita. Non è difficile comprendere come dietro questo aspetto della teoria si nascondano difficoltà molto grandi, che sarebbe impossibile discutere in questa sede. In una trattazione semplice come questa, possiamo fare la seguente considerazione, non proprio rigorosa ma sostanzialmente corretta: l'energia di un sistema è sempre definita a meno di una costante additiva e ciò che in definitiva si misura fisicamente sono sempre differenze e mai valori assoluti dell'energia. Possiamo perciò prendere l'energia di vuoto fotonico come una costante (sebbene infinita) e trascurarla; in tal modo l'energia di un autostato del campo elettromagnetico rispetto al vuoto fotonico risulta:

$$U_0 = \sum_j \sum_{klm} n_{klm}^j \hbar \omega_{klm} \quad (96)$$

Questa relazione indica che sono stati attivati n_{klm}^j quanti di oscillazione del modo normale di vibrazione avente frequenza angolare ω_{klm} . Poiché è fisicamente impossibile attivare un numero infinito di quanti (si dovrebbe fornire al sistema un'energia infinita), in questo caso la (96) si riduce ad una sommatoria e non abbiamo problemi di divergenza. Senza pretese di completezza accenniamo infine al fatto che la teoria dei campi, ed in particolare l'elettrodinamica quantistica (QED), risolvono i problemi di divergenza delle serie del tipo e (95) tramite un procedimento detto *rinormalizzazione*.

5 Bibliografia

Sul campo elettromagnetico classico:

1- Alexander Altland, *Classical Electrodynamics*

Sulla quantizzazione del campo elettromagnetico:

2- Albert Messiah, *Quantum Mechanics* vol. II, cap. XXI, pag. 1022-1032 - North Holland Publishing Company, Amsterdam 1961

3- Claude Cohen Tannoudji, Bernard Diu, Franck Laloë *Quantum mechanics*, cap. V, complemento J_V - WILEY-VCH, Weinheim

Sul formalismo della seconda quantizzazione:

4- Fabio Ortolani, *Appunti di teoria quantistica della materia*

Sulla storia della luce e del campo elettromagnetico:

5- Rodolfo Guzzi, *La strana storia della luce e del colore*, Springer

*Quale vivente,
dotato di sensi,
non ama tra tutte
le meravigliose parvenze
dello spazio che ampiamente lo circonda,
la più gioiosa, la luce-
coi suoi colori,
coi raggi e con le onde;
la sua soave onnipresenza
di giorno che risveglia?*

Novalis

Ringraziamenti

Desidero ringraziare in primo luogo il Professor Fabio Ortolani per avermi guidato nello scegliere l'argomento di questa tesi, nonché per la revisione scientifica che egli ha operato su di essa e per le utili chiarificazioni fornitemi nel suo studio di via Irnerio, a Bologna.

Un sincero e caloroso ringraziamento va poi al mio stimato collega, nonché grande amico, Matteo Parisi per gli utili suggerimenti e le correzioni datemi con simpatia, amicizia e precisione.

Indirizzo un altro speciale ringraziamento al Professor Giovanni Carlo Bonsignori, al Professor Nicola Semprini Cesari, al Professor Alexandr Kamenchtchik ed alla Professoressa Elisa Ercolessi per aver risvegliato in me, in molti casi, l'interesse per la fisica, nonché per l'aiuto datomi in svariate circostanze.

Desidero ringraziare i miei genitori, Paola Luciani e Michele Barbieri, per il supporto che mi hanno dato nel corso di questo ciclo triennale, durante il quale hanno sempre riposto la massima fiducia in me ed in ciò che studiavo. Per la stessa ragione desidero ringraziare anche i miei zii, Anna Barbieri e Beppe Paleari.

Un ringraziamento molto affettuoso va agli amici del dipartimento di fisica di via Irnerio, con i quali ho condiviso molti bei momenti sia in aula studio che al di fuori dell'università: Maria Celeste Maschio, Matteo Marchesini, Claudio Corte Coi, Marco Malvagio, Carmine Mattia, Clarissa Albertazzi, Emma Minarelli, Veronica Ilari, Federica Bucci, Roberta Marino, Giulia Giannini, Luca Cantarello, Arianna Valmassoi, Francesco Barbano, Alberto Curcella, Paolo Ghinassi, Filippo Pedrazzini, Ivano Colombaro, Samantha Calcagnile, Teresa Morini, Lucio Alticozzi, Valentina Cicero, Brian Losi.

Per avermi regalato alcuni dei momenti più belli della mia vita, desidero ringraziare immensamente la *Compagnia dell'Ultimo Minuto*, senza la quale non sarei colui che attualmente sono: Giacomo Piccardi, Elisa Vitiello, Caterina Vannucci, Pier Niccolò Sasseti, Alessandro Anderlini, Archimede Pii, Mariangela Suppa, Marco Bartolini, Fabio Schneider, Arturo Cavari, Beniamino Tuliozi.

Agli amici fiorentini e senesi Gabriele Gennari, Gaia Bisignano, Eleonora Paggetti, Lisa Bartali e Lucrezia Batacchi mando un pensiero affettuoso per la stima, il supporto e la simpatia con la quale mi hanno accompagnato, e mi accompagneranno, nei tempi passati e futuri.

A due ex-professori, Maria Carla Caccialupi ed Ivan Casaglia, vanno il mio affetto e la mia gratitudine: hanno lasciato in me tesori che serberò per sempre.

Questi anni bolognesi non sarebbero stati così belli, inoltre, se non avessi conosciuto e lavorato col gruppo teatrale *Laborattori*: Marina Pitta, Gianfranco Rimondi, Lorenza Boccia, Morena Maini, Marcello Soli, Domenico Troncato, Emy Pacilli, Simone Cardillo, Nino Lupo, Rita Chierici, Matilde Tursi, Isabella Lo Conte.

Agli amici del corso di francese Frédéric Dani, Beatrice Musumarra e Fulvia, nonché all'insegnante Valentine Castellarin, va *toute ma sympathie*; come anche tutta la mia simpatia va agli amici dell'improvvisazione bolognese: Michele Cinti, Francesco Frisari e Benedetta Perich.

Per avermi aiutato a comprendere quanto grande sia la mia passione per l'insegnamento, ringrazio inoltre i miei allievi bolognesi delle ripetizioni: Lorenzo Meloni, Laura Zoccadelli e Lorenzo Cangini.

Un sincero ringraziamento, per i bei momenti passati insieme durante questi anni universitari e per la simpatia che ci unisce va infine a: Francesco De Marco, Massimo Giorgi, Gauthier Dupraz e Lynda, Giorgio Tonsi, Beta Martin Girgenti, Pietro Gasparini, Alessandro Rubini, Gianluigi Bellu, Eva Quattrini, Mohan Thiella e, naturalmente, Giancarlo Di Martino.