

ALMA Mater Studiorum  
Università degli Studi di Bologna

---

---

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea in Astronomia

Dipartimento di Fisica e Astronomia

Teorema del Viriale e applicazioni astrofisiche

Elaborato Finale

Candidato:  
Debora Bruno

Relatore:  
Prof. Daniele Dallacasa



---

---

Sessione prima  
Anno Accademico 2013/14

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>1 Teorema del Viriale Tensoriale</b>	<b>3</b>
1.1 Equazione del teorema del viriale in forma tensoriale . . . . .	3
1.2 Rotazione delle galassie ellittiche . . . . .	5
<b>2 Teorema del Viriale Scalare</b>	<b>8</b>
2.1 Equazione del teorema del viriale in forma scalare . . . . .	8
2.2 Configurazioni di equilibrio . . . . .	9
2.3 Massa galassie ellittiche . . . . .	10
2.4 Rapporto massa-luminosit� . . . . .	10
<b>Conclusione</b>	<b>13</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>13</b>

# Introduzione

Nel 1870 il fisico-matematico tedesco Rudolf Clausius arrivò alla prima formulazione del Teorema del Viriale, teorema che mette in relazione il valor medio dell'energia cinetica e quello dell'energia potenziale per sistemi che si muovono in una porzione limitata dello spazio. Tale teorema si sarebbe rilevato di grande importanza per le applicazioni astrofisiche potendo estenderlo ad un sistema di  $N$  particelle. In questa studio si intende dimostrare il teorema del viriale e descriverne le diverse applicazioni astrofisiche. A tale scopo consideriamo un sistema di particelle  $N$ , in cui la forza agente su una particella dipende dalla struttura complessiva del sistema stesso. In tali condizioni si deduce che la forza agente su ciascuna particella non varia rapidamente, e che ogniuna di esse viene accelerata lentamente dal campo di forza generato dal sistema complessivo. Conoscendo nel sistema considerato il tempo in cui avvengono gli scambi energetici, ovvero il tempo di rilassamento dato dal rapporto tra il numero di incontri tra le particelle e il tempo di attraversamento, possiamo distinguere i sistemi collisionali da quelli non collisionali. I sistemi collisionali sono quei sistemi per i quali il tempo di rilassamento è minore del tempo di vita del sistema stesso, al contrario quelli non collisionali sono quei sistemi il cui tempo di rilassamento è maggiore rispetto al tempo di vita del sistema stesso. Il tempo di rilassamento per una galassia è di  $10^{(6-7)}$  anni mentre per un ammasso globulare è di 1 – 10 anni. Quindi le galassie costituiscono sistemi non collisionali mentre gli ammassi globulari sistemi collisionali. Da qui, gli oggetti che prenderemo in esame saranno le galassie.

Dimostrata la validità del teorema, esso verrà applicato a sistemi galattici, con delle dovute approssimazioni, per ricavare informazioni sulla loro morfologia e sulla loro cinematica. In particolare la forma tensoriale ci permette di capire come variano le variabili responsabili della rotazione delle galassie ellittiche. Mentre la forma scalare ci permette di stabilire quando, conoscendo la sua energia, un sistema è all'equilibrio o in caso contrario come si comporta per tornarcivi.

# Capitolo 1

## Teorema del Viriale Tensoriale

### 1.1 Equazione del teorema del viriale in forma tensoriale

Si consideri un sistema formato da una galassia con  $N$  stelle identiche di massa  $m$ . Tali stelle si muovono sotto l'azione di un potenziale regolare  $\Phi(\vec{x}, t)$ . Qualunque sistema non collisionale ad ogni istante  $t$  é dato dal numero di stelle  $f(\vec{x}, \vec{v}, t)d^3\vec{x}d^3\vec{v}$  aventi posizione nel volume infinitesimo  $d^3\vec{x}$  centrato in  $\vec{x}$  e velocità nell'intervallo infinitesimo  $d^3\vec{v}$  centrato in  $\vec{v}$ . Dove  $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$  é detta funzione di distribuzione del sistema, tale che risulta essere  $f \geq 0$  ovunque nello spazio delle fasi.

In particolare ipotizziamo di avere solo stelle con variazioni piccole di velocità cosí che la funzione di distribuzione risulterà essere nulla.

Partendo dall'equazione non collisionale di Boltzmann e dall'equazione di Jeans, che mettono in relazione la densità spaziale delle stelle con la loro velocità, per il sistema in esame possiamo scrivere

$$\int x_k \frac{\partial(\rho \bar{v}_i)}{\partial t} d^3\vec{x} = - \int x_k \frac{\partial(\rho \bar{v}_i \bar{v}_j)}{\partial x_i} d^3\vec{x} - \int \rho x_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} d^3\vec{x} \quad (1.1)$$

dove  $\rho$  é la densità di massa, che assumiamo trascurabile per grandi raggi.

Applicando il teorema della divergenza otteniamo

$$\int x_k \frac{\partial(\rho \bar{v}_i \bar{v}_j)}{\partial x_i} d^3\vec{x} = - \int \delta_{ki} \rho \bar{v}_i \bar{v}_j d^3\vec{x} = -2K_{kj} \quad (1.2)$$

dove si é utilizzato il Tensore Energia Cinetica definito da

$$K_{jk} \equiv \frac{1}{2} \int \rho \bar{v}_j \bar{v}_k d^3\vec{x} \quad (1.3)$$

nel quale sono presenti i due contributi energetici, rispettivamente quello ordinato e quello casuale

$$T_{jk} \equiv \frac{1}{2} \int \rho \bar{v}_j \bar{v}_k d^3 \vec{x} \quad ; \quad \Pi_{jk} \equiv \int \rho \sigma_{jk}^2 d^3 \vec{x} \quad (1.4)$$

Nell' equazione (1.1) dato che le  $x_k$  non dipendono dal tempo possiamo portare le derivate rispetto al tempo fuori dall'integrale e calcolando la media delle componenti  $(k, j)$  e  $(j, k)$  scriviamo

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \rho (x_k \bar{v}_j + x_j \bar{v}_k) d^3 \vec{x} = 2T_{jk} + \Pi_{jk} + W_{jk} \quad (1.5)$$

Definiamo il Tensore Momento di Inerzia come

$$I_{jk} \equiv \int \rho x_j x_k d^3 \vec{x} \quad (1.6)$$

quindi dall'equazione di continuit 

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \frac{\partial (\nu \bar{v}_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (1.7)$$

e applicando il teorema della divergenza, avremo

$$-\frac{1}{2} \int \frac{\partial (\rho \bar{v}_i)}{\partial x_i} x_j x_k d^3 \vec{x} = \frac{1}{2} \int \rho \bar{v}_i (x_k \delta_{ji} + x_j \delta_{ki}) d^3 \vec{x} \quad (1.8)$$

che sostituiamo nel differenziale rispetto al tempo dato da

$$\frac{1}{2} \frac{dI_{jk}}{dt} = \frac{1}{2} \int \frac{\partial \rho}{\partial t} x_j x_k d^3 \vec{x} \quad (1.9)$$

cos  da avere

$$\frac{1}{2} \frac{dI_{jk}}{dt} = \frac{1}{2} \int \rho (\bar{v}_j x_k + \bar{v}_k x_j) d^3 \vec{x} \quad (1.10)$$

Ora combinando quest'ultima equazione con l'equazione (1.5) otteniamo il Teorema Tensoriale del Viriale

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I_{jk}}{dt^2} = 2T_{jk} + \Pi_{jk} + W_{jk} \quad (1.11)$$

che ci permette di mettere in relazione le propriet  macroscopiche cinematiche e morfologiche di una galassia.

## 1.2 Rotazione delle galassie ellittiche

Il teorema tensoriale del viriale ci permette di dedurre informazioni sui i movimenti interni delle galassie ellittiche partendo da una conoscenza delle loro forme e della loro velocità di rotazione. Consideriamo un sistema simmetrico sugli assi ruotante attorno al proprio asse di simmetria di direzione  $z$ , di cui vediamo il bordo. Assumendo che la linea di vista al centro del sistema coincide con l'asse  $x$ , per la simmetria del problema avremo che

$$W_{xx} = W_{yy} \quad ; \quad W_{ij} = 0 \quad ; \quad (i \neq j) \quad (1.12)$$

simile alla relazione tra  $T$  e  $\Pi$ .

Con questa assunzione le uniche equazioni del viriale indipendenti, non banali sono

$$2T_{xx} + \Pi_{xx} + W_{xx} = 0 \quad ; \quad 2T_{zz} + \Pi_{zz} + W_{zz} = 0 \quad (1.13)$$

dividendo la prima per la seconda otteniamo

$$\frac{2T_{xx} + \Pi_{xx}}{2T_{zz} + \Pi_{zz}} = \frac{W_{xx}}{W_{zz}} \quad (1.14)$$

Posto che l'unico movimento di rotazione avviene sull'asse  $z$ ,  $T_{zz} = 0$ , e

$$2T_{xx} = \frac{1}{2} \int \rho \bar{v}_\phi^2 d^3\vec{x} = \frac{1}{2} M v_0^2 \quad (1.15)$$

dove  $M$  è la massa del sistema e  $v_0^2$  la velocità quadratica media misurata sulla massa, possiamo scrivere

$$\Pi_{zz} = M \sigma_0^2 \quad (1.16)$$

dove  $\sigma_0^2$  è la velocità quadratica media casuale misurata sulla massa lungo la linea di vista della galassia, e

$$\Pi_{zz} \equiv (1 - \delta) \Pi_{xx} = (1 - \delta) M \sigma_0^2 \quad (1.17)$$

dove  $\delta < 1$  è il parametro che misura l'anisotropia del tensore della velocità di dispersione della galassia.

Combinando quest'ultima definizione con l'equazione (1.14) possiamo scrivere

$$\frac{v_0^2}{\sigma_0^2} = 2(1 - \delta) \frac{W_{xx}}{W_{zz}} - 2 \quad (1.18)$$

Per un sistema le cui superfici isodense sono ellissoidi concentrici simili qualsiasi rapporto di termini come  $\frac{W_{xx}}{W_{zz}}$  dipende solo dall'ellitticità  $\epsilon$  di queste superfici, e non dalla densità radiale della struttura. Così l'ultima equazione, che è un'equazione esatta,

afferma che per tale sistema il rapporto  $\frac{v_0}{\sigma_0}$  dipende solo da  $\epsilon$  e da  $\delta$ . Lungo ogni curva il parametro di anisotropia  $\delta$  é costante, inoltre l'elasticitá della superficie isodensa é indipendente dal rapporto  $\frac{v_0}{\sigma_0}$  quando quest'ultimo é piccolo. Quindi non possiamo aspettarci di vedere una galassia ellittica dal suo piano equatoriale, bisogna considerare come variano la sua velocitá di rotazione apparente e l'ellitticitá apparente. Tali variazioni dipendono dall'inclinazione  $i$  della galassia che si modifica lentamente sul bordo. In ogni punto all'interno della galassia, la linea di vista della componente della velocitá di rotazione diventa una frazione  $\sin(i)$  di questo valore orientato sul bordo.

Dunque la velocitá di rotazione apparente ponderata sulla massa é

$$\bar{v}(i) = v_0 \sin i \quad (1.19)$$

allo stesso modo la velocitá quadratica media casuale lungo le varie linee di vista é

$$\bar{\sigma}^2(i) = \sigma_0^2 \sin^2 i + (1 - \delta) \sigma_0^2 \cos^2 i = \sigma_0^2 (1 - \delta \cos^2 i) \quad (1.20)$$

Se il rapporto assiale é  $(1 - \epsilon_t)$  e quello apparente é  $(1 - \epsilon_a)$  abbiamo che

$$(1 - \epsilon_a)^2 = (1 - \epsilon_t)^2 \sin^2 i + \cos^2 i \quad (1.21)$$

allora

$$\epsilon_a(2 - \epsilon_a) = \epsilon_t(2 - \epsilon_t) \sin^2 i \quad (1.22)$$

In linea di principio é possibile calcolare  $v$  e  $\sigma$  da spettri di alta qualitá su una griglia di punti che coprono la superficie di una galassia ellittica. Nella pratica i dati calcolati con una serie di ipotesi e approssimazioni portano ad una stima quantitativa non completa. In galassie reali l'ellitticitá varia spesso con il raggio, per tale ragione si puó tracciare una galassia nel piano  $(v/\sigma, \epsilon)$ , e indicando per questo sistema  $(\bar{v}/\bar{\sigma})$  e  $\epsilon_a$  vediamo che tali quantitá sono legate in modo molto simile alle quantitá definite in precedenza dove abbiamo considerato  $\delta \simeq 0$ .

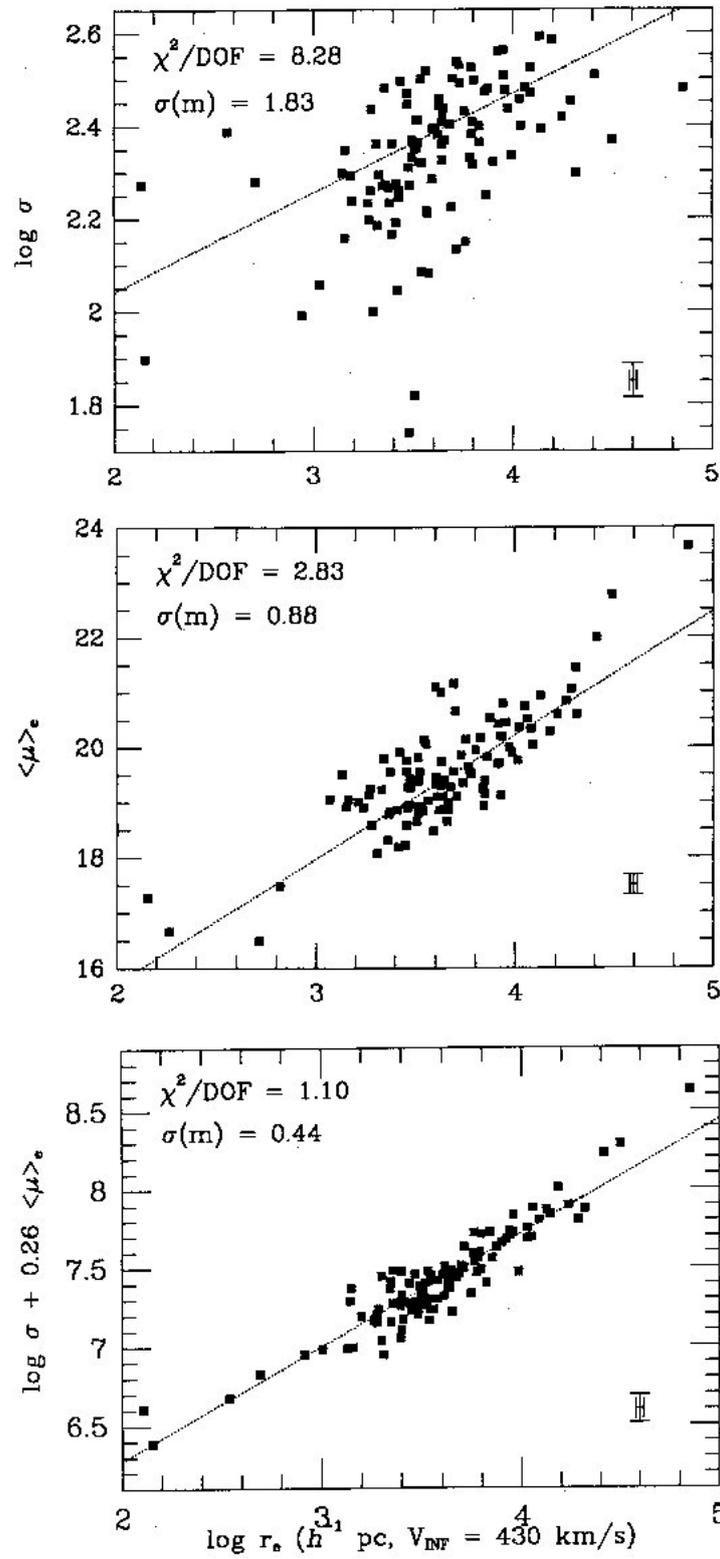


Figura 1.1: piano fondamentale delle galassie ellittiche

# Capitolo 2

## Teorema del Viriale Scalare

### 2.1 Equazione del teorema del viriale in forma scalare

Si consideri un sistema di  $N$  particelle autogravitante per il quale vale il teorema

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I_{jk}}{dt^2} = 2T_{jk} + \Pi_{jk} + W_{jk} \quad (2.1)$$

Tale teorema é un insieme infinito di identitá tensoriali, del quale se si prende la traccia piú semplice e si considera che il sistema é all' equilibrio, dalla definizione (1.3) di  $K$  possiamo scrivere che

$$traccia(T) + \frac{1}{2}traccia(\Pi) \equiv K \quad (2.2)$$

con  $K$  energia cinetica totale del sistema. Quindi se consideriamo un sistema stabile, ovvero  $\frac{d^2 I}{dt^2} = 0$  possiamo scrivere l'identitá rigorosa del il teorema del viriale in forma scalare

$$2K + W = 0 \quad (2.3)$$

L'energia cinetica di un sistema stellare di massa  $M$  é data da  $K = \frac{1}{2}M \langle v^2 \rangle$ , dove  $\langle v^2 \rangle$  é la velocitá quadratica media delle stelle del sistema. Di conseguenza il teorema del viriale afferma che

$$\langle v^2 \rangle = \frac{|W|}{M} = \frac{GM}{r_g} \quad (2.4)$$

dove  $r_g$  é il raggio gravitazionale definito da

$$r_g \equiv \frac{GM^2}{|W|} \quad (2.5)$$

Per stimare la velocità quadratica media senza calcolare il valore del raggio gravitazionale utilizziamo il raggio mediano  $r_h$  definito come il raggio entro il quale siamo a metà della massa della stella. Sappiamo che in molti sistemi stellari semplici il raggio mediano  $r_h$  é legato al raggio gravitazionale  $r_g$  da  $r_h \simeq 0.4r_g$ . Pertanto un'utile approssimazione può essere

$$\langle v^2 \rangle = \frac{|W|}{M} \simeq 0.4 \frac{GM}{r_h} \quad (2.6)$$

## 2.2 Configurazioni di equilibrio

In un sistema autogravitante con energia  $E$  possiamo scrivere dal teorema del viriale che

$$E = K + W = -K = \frac{1}{2}W \quad (2.7)$$

Da questa equazione si deduce che se un sistema formato da materiale compatto é in uno stato di riposo all'infinito, ovvero  $K = W = E = 0$ , e si stabilizza attraverso qualsiasi processo in una condizione di equilibrio, esso impiega metà dell'energia gravitazionale, in forma di energia cinetica e dispone l'altra metà per ottenere un'energia di legame  $E_b = -E$  pari all'energia cinetica.

Si consideri un sistema stabile all'equilibrio con energia  $E$ , rappresentabile da una galassia con  $N$  stelle. Ipotizziamo di estrarre energia dal sistema considerato, che in un primo momento si raffredda, e avrà quindi una nuova energia  $E_1$  tale per cui  $E_1 < E$ . Per tornare allo stato di equilibrio il sistema dovrà spostarsi in uno stato più denso ma anche più caldo attraverso una contrazione e quindi il risultato finale sarà un aumento della temperatura del sistema. Viceversa se aggiungiamo dell'energia al sistema iniziale, quindi lo scaldiamo, questo, per tornare ad una situazione di equilibrio, si espanderà e il sistema finale risulterà più freddo. Abbiamo quindi la cosiddetta Catastrofe Gravotermica, in cui un sistema che non si trova più in uno stato di equilibrio modifica il proprio stato a spese della gravità per tornarvi.

Dalla stessa equazione conoscendo la velocità quadratica media e il raggio  $R$  di un sistema virializzato otteniamo il tempo di oscillazione  $\tau_{osc}$  dato da

$$\tau_{osc} = \frac{1}{\sqrt{G\rho}} \simeq \frac{R}{\sqrt{\langle v_r^2 \rangle}} \quad (2.8)$$

Da questo risultato deduciamo che se abbiamo un sistema autogravitante vicino ad una configurazione di equilibrio con energia  $E$  e massa totale  $M$  esso compie delle oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio.

Dal grafico in figura 2 si deduce che i sistemi che hanno energia  $E > 0$  non possono essere in equilibrio, mentre sistemi con energia  $E < 0$  possono essere all'equilibrio sotto la condizione che la retta dell'energia intersechi quella del viriale.

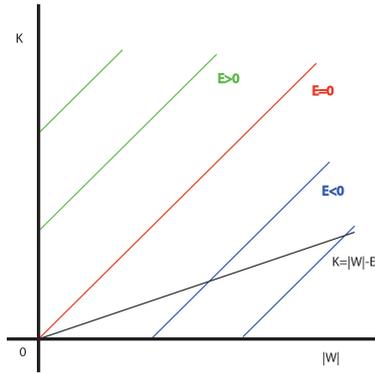


Figura 2.1: retta del teorema del viriale

### 2.3 Massa galassie ellittiche

Essendo le galassie ellittiche sono sistemi molto regolari consideriamo che esse si trovino in condizioni stazionarie o quasi-stazionarie. Dallo studio dell'allargamento di righe stellari di assorbimento stimiamo la velocità tipica  $\sigma$  all'interno di tali galassie. Inoltre studi fotometrici ci consentono di valutare il raggio  $R$  di metà luminosità. Quindi considerando una galassia ellittica di massa  $M$ , velocità  $\sigma$  e raggio  $R$  dal teorema del viriale possiamo scrivere

$$2\left(\frac{1}{2}M\sigma^2\right) = \frac{1}{2} \frac{GM}{R} \quad (2.9)$$

e ricavare la massa  $M$  totale della galassia

$$M = \frac{2\sigma^2 R}{G} \quad (2.10)$$

### 2.4 Rapporto massa-luminosità

Possiamo utilizzare il teorema del viriale scalare per calcolare il rapporto massa-luminosità che ci permette di stabilire se la luminosità totale di una galassia che misuriamo è prodotta da tutta la massa della galassia che osserviamo o diversamente se è prodotta in parte anche da una massa che non osserviamo e quindi dalla cosiddetta materia oscura.

Consideriamo una galassia sferica con rapporto massa-luminosità  $\Upsilon$  indipendente dal raggio. Prendiamo un sistema di coordinate in cui la linea di vista del centro della galassia coincide con l'asse  $x$ . L'energia cinetica associata al moto lungo la direzione  $x$  è

$$K_{xx} = \frac{1}{2} \int \rho \bar{v}_x^2 d^3 \vec{x} \quad (2.11)$$

essendo

$$\rho(r) = \Upsilon \nu(r) \quad (2.12)$$

possiamo riscrivere l'energia cinetica in termini della densità luminosa

$$K_{xx} = \frac{1}{2} \Upsilon \int dy \int dx \int \nu \bar{v}_x^2 dx \quad (2.13)$$

l'integrale più interno dell'equazione fornisce la luminosità ponderata lungo la linea di vista della velocità di dispersione. Quindi l'energia cinetica nella direzione  $x$  può essere espressa in termini di brillantezza superficiale e velocità di dispersione lungo la linea di vista come

$$K_{xx} = \frac{1}{2} \Upsilon \int \int I(y, z) \sigma_p^2 dy dz \quad (2.14)$$

ora se assumiamo che la galassia sia sferica e non rotazionale, l'energia cinetica totale è data da

$$K = 3K_{xx} = \Upsilon J \quad (2.15)$$

dove abbiamo definito

$$J \equiv 3\pi \int_0^\infty I(R) \sigma_p^2(R) R dR \quad (2.16)$$

Dalle definizioni di  $\rho(r)$  e  $\nu(r)$  otteniamo

$$\rho(r) = -\frac{\Upsilon}{\pi} \int_r^\infty \frac{dI}{dR} \frac{dR}{\sqrt{R^2 - r^2}} \quad (2.17)$$

Infine possiamo scrivere

$$W = \Upsilon^2 \bar{J} \quad (2.18)$$

dove  $\bar{J}$  è un integrale che dipende solo da  $I(R)$ .

Utilizzando il teorema del viriale scalare otteniamo che

$$\Upsilon = -\frac{2J}{\bar{J}} \quad (2.19)$$

questo risultato ci consente, quindi, di calcolare il rapporto massa-luminosità conoscendo solo le misure dell'intensità luminosa  $I$  e della velocità di dispersione  $\sigma_p$ .

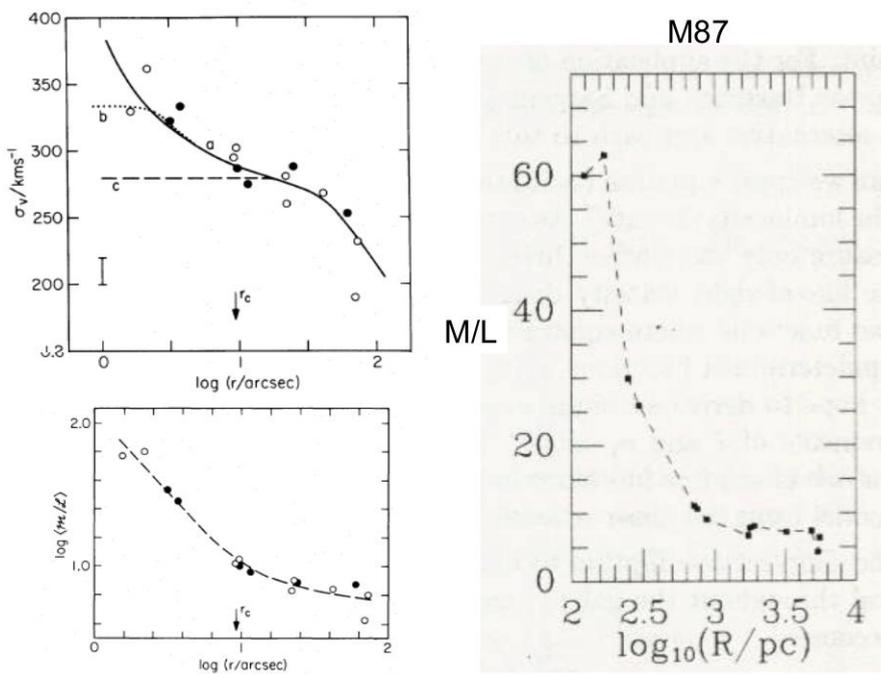


Figura 2.2: perfilo massa-luminositá

# Conclusione

Le applicazioni del teorema del viriale rappresentano un mezzo importante per studi astrofisici. Infatti come si è visto applicandolo a sistemi costituiti da una galassia contenente  $N$  particelle si è capito come varia la loro velocità e la loro forma e a cosa è dovuta questa variazione. Inoltre è stato possibile calcolarne la massa totale conoscendo il raggio, dato da studi fotometrici, e la velocità stimata dalle linee di assorbimento. Con un'ulteriore applicazione si è riuscito a vedere come con una modifica dello stato del sistema, questo passa in una configurazione di non equilibrio per poi tornare in una situazione simile a quella iniziale, ovvero di equilibrio, a spese della gravità con il fenomeno della catastrofe gravotermica. Un altro parametro importante che si è ottenuto è il rapporto massa-luminosità che ci permette, in base al suo valore, di stabilire la presenza o meno di materia oscura. Quindi tale teorema risulta essere uno strumento fondamentale per capire le dinamiche energetiche di sistemi complessi che descrivono l'universo.

# Bibliografia

- [1] *Galactic Dynamics*, Binney-Treamaine 1994
- [2] *Lecture notes on stellar dynamics*, Luca Ciotti