

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

Scuola di Scienze
Corso di Laurea in Fisica

LA TRASFORMATA DI RADON E LA
SUA APPLICAZIONE NELLA
RICOSTRUZIONE DI IMMAGINI

Relatore:
Prof. Fabio Ortolani

Presentata da:
Roberta Marino

Sessione I
Anno Accademico 2013/2014

A Filippo

Abstract

Scopo di questo lavoro è mostrare una soluzione al problema della ricostruzione delle immagini basata sullo strumento matematico della trasformata di Radon. In un primo momento si introdurrà il problema legato ad un particolare ambito, quello medico; ci si focalizzerà, infatti sui principi di funzionamento della TAC (tomografia assiale computerizzata) e si cercherà di chiarire dal punto di vista fisico come la trasformata di Radon del coefficiente di attenuazione del materiale sia utile per visualizzare degli organi o comunque degli oggetti che altrimenti non potrebbero essere visibili, se non rompendo la struttura che li contiene. Dopo aver raccontato un po' di storia della TAC, sarà necessario quindi definire tale trasformata, le sue principali proprietà e trovare una formula per la sua inversione. Si mostrerà che la sola formula d'inversione non potrà essere utilizzata a livello pratico; si ricaverà allora un algoritmo di retroproiezione filtrata, basato sulla trasformata di Radon, applicato per visualizzare delle immagini tramite TAC.

Indice

Introduzione	1
1 Un'applicazione: la TAC	2
1.1 La Tac e il suo legame con la trasformata di Radon	3
1.2 Storia della tomografia computerizzata	5
2 La trasformata di Radon	9
2.1 In 2 dimensioni	9
2.2 In 3 dimensioni	11
2.3 Estensione a dimensioni maggiori	11
2.4 Proprietà di base	12
2.4.1 Omogeneità	12
2.4.2 Linearità	12
2.4.3 Proprietà di shifting	12
2.4.4 Trasformata delle derivate	13
2.4.5 Derivata della trasformata	13
2.4.6 Relazione con la trasformata di Fourier	14
3 Inversione	16
3.1 Dimensione dispari	16
3.2 Dimensione pari	17
3.3 Unificazione	18
3.3.1 Dimensione dispari	19
3.3.2 Dimensioni pari	19
3.3.3 Unificazione formale	20
4 Ricostruzione delle immagini	21
4.1 Introduzione	21
4.2 Definizioni ed osservazioni iniziali	22
4.3 Formula di retroproiezione filtrata: deduzione	25
Conclusioni	27
Bibliografia	28

Introduzione

La tesi parla della trasformata di Radon e si concentra principalmente sull'aspetto applicativo di questo strumento matematico.

Al giorno d'oggi svariati sono i settori in cui viene utilizzata: dalla geologia all'astronomia, campo in cui è stata fornita nel 1956 una prima soluzione a un problema pratico di ricostruzione; in questa tesi, si è deciso tuttavia di concentrarsi sul campo medico.

La ricostruzione delle immagini tramite Tac si basa infatti sulla trasformata di Radon; si mostrerà, quindi, nel primo capitolo, il principio di funzionamento della tomografia e come si colleghi dal punto di vista matematico e fisico alla scoperta di Radon. Si darà inoltre uno sguardo generale alla storia della Tac, che fu introdotta negli anni 70, solo circa 50 anni dopo la pubblicazione dell'articolo di Johann Radon in cui si presentava la trasformata con le sue potenzialità. Si descriverà l'evoluzione nel corso del tempo dei macchinari utilizzati, allo scopo di capirne i meccanismi di funzionamento e le migliorie fatte nella loro prestazione.

Dopo un primo capitolo dedicato alla trattazione della Tac, la più diffusa applicazione del lavoro di Radon, si darà in quello successivo un'impronta più formale e rigorosa. Sarà finalmente data una definizione di trasformata di Radon, prima in 2 dimensioni, poi in n dimensioni; si mostrerà il suo legame con la trasformata di Fourier e si elencheranno alcune delle sue proprietà fondamentali; alcune di queste, come l'omogeneità e lo shifting, saranno utilizzate nel terzo capitolo che tratterà il problema dell'inversione, consistente nel ricavare una funzione incognita a partire dalla sua trasformata di Radon. È appunto la conoscenza di tale funzione, il coefficiente di attenuazione, già introdotto nel primo capitolo, che permetterà di ricostruire un'immagine che altrimenti non potrebbe essere visualizzata se non rompendo l'oggetto. Nonostante nelle applicazioni sia utilizzata principalmente la trasformata di Radon in 2 dimensioni, nel corso del terzo capitolo si userà la definizione più generale, quella per dimensioni generiche. Si troveranno due diverse formule per l'inversione a seconda che la funzione sia definita su un dominio di dimensioni pari o dispari, ma alla fine si arriverà ad un'unificazione formale. Il quarto ed ultimo capitolo tratta della ricostruzione delle immagini da un punto di vista pratico. Saranno presentate in un primo momento le difficoltà che non hanno permesso di applicare alla lettera le formule d'inversione ricavate precedentemente; un ruolo fondamentale per la ricostruzione sarà invece svolto dagli algoritmi. Se ne ricaverà uno: l'algoritmo di retroproiezione filtrata, facente uso della trasformata di Radon. Tuttavia prima di arrivare a ciò sarà necessario dare qualche definizione introduttiva e dimostrare il teorema della fetta centrale, utilizzato poi per trovare l'algoritmo precedentemente citato.

Capitolo 1

Un'applicazione: la TAC

Nel 1917 Johann Radon dimostrò matematicamente che una funzione, avente date caratteristiche, poteva essere ricostruita conoscendo tutti i possibili integrali di linea lungo le infinite rette nel suo dominio. Una trattazione più formale sarà fatta nei capitoli a venire; intanto, in un primo momento, sarà mostrata una tra le applicazioni più diffuse di questa scoperta: la TAC (o CAT: computerized axial tomography). Grazie al lavoro di Radon, infatti, è stato possibile affrontare il problema della ricostruzione: determinare la struttura interna di un oggetto senza il bisogno di romperlo o tagliarlo. La TAC ha permesso di visualizzare parti interne del corpo quali ad esempio il cervello e il cuore (vedi Fig.1.1)



(a) TAC del cervello mostra emorragia come area bianca al centro e si estende nei solchi ai lati (contrassegnata dalla freccia).



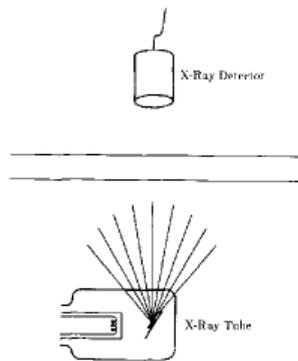
(b) Immagine acquisita con la TAC coronarica.

Figura 1.1: Alcuni esempi di ricostruzione con TAC.

1.1 La Tac e il suo legame con la trasformata di Radon

L'oggetto da ricostruire attraverso tomografia può considerarsi una distribuzione bidimensionale di una funzione: il coefficiente di attenuazione dell'oggetto. Si cercherà ora di spiegare il ruolo di questa grandezza. Si prendano N fotoni, tutti alla stessa energia che devono attraversare un oggetto di spessore x . Il fascio di particelle si attenuerà a causa dei fotoni assorbiti dagli atomi del materiale per effetto fotoelettrico o deviati per effetto Compton. Le particelle che attraverseranno il materiale senza interagire con esso, saranno segnalate da un rivelatore, posto al di là dell'ostacolo.

Figura 1.2: un materiale omogeneo è irradiato da raggi X. Il fascio incontra un rivelatore posto dalla parte opposta dell'oggetto per misurarne l'attenuazione.



Preso il numero di fotoni arrivati al rivelatore uguale a $N + \Delta N$ si ha che ΔN soddisfa la seguente relazione:

$$\frac{\Delta N}{N} \cdot \frac{1}{\Delta x} = -\tau - \sigma \quad (1.1)$$

dove τ e σ rappresentano rispettivamente il numero di fotoni per unità di lunghezza percorsa che interagiscono con il materiale per effetto fotoelettrico e per effetto Compton. Unendo per praticità i due coefficienti nell'unico μ e considerando uno spessore di materiale attraversato Δx infinitesimo, la (1.1) diventa l'equazione differenziale:

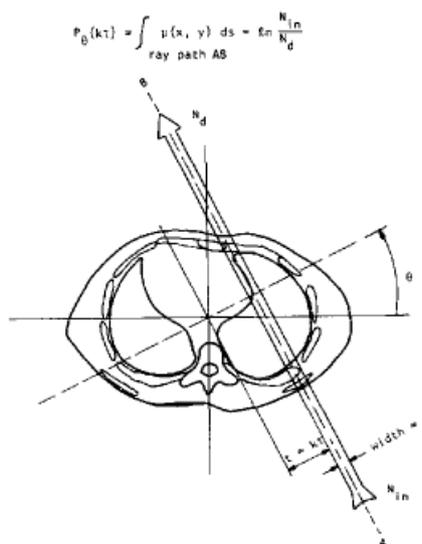
$$\frac{1}{N} dN = -\mu dx \quad (1.2)$$

che ha soluzione:

$$N(x) = N_0 \exp(-\mu x) \quad (1.3)$$

dove N_0 è il numero di fotoni che entrano nell'oggetto, $N(x)$ è la quantità di fotoni non interagenti in funzione della posizione, μ è detto coefficiente di attenuazione del materiale: il suo valore dipende dal materiale attraversato dai raggi X e dall'energia del fascio di particelle; di sopra μ si è assunto costante lungo il percorso d'integrazione, ma in generale non è così.

Figura 1.3: Un fascio di raggi X si propaga attraverso una sezione trasversale del corpo umano. Il fascio incontra un rivelatore posto dalla parte opposta per misurarne l'attenuazione.



Si consideri infatti una sezione del corpo umano attraversata da un singolo fascio di fotoni di larghezza molto ridotta (vedi Fig. 1.3). N_{in} sia il numero di fotoni in entrata e N_d quello in uscita. Si ha che μ è una funzione del piano in figura. A questo punto la soluzione della (1.2) sarà:

$$N_d = N_{in} \exp\left[- \int_{\text{raggio}} \mu(x, y) ds\right] \quad (1.4)$$

$$\int_{\text{raggio}} \mu(x, y) ds = \ln \frac{N_{in}}{N_d} \quad (1.5)$$

Si osserva che il lato sinistro della (1.5) è un campione della trasformata di Radon di μ lungo una particolare retta (vedi la definizione 2.1); l'integrazione viene fatta lungo la linea AB in figura 1.3. Di conseguenza, misure di $\ln(\frac{N_{in}}{N_d})$ per diversi angoli e distanze dall'asse dell'oggetto passante per l'origine forniscono campioni della trasformata di Radon della funzione μ che per mezzo del processo d'inversione portano alla conoscenza di $\mu(x, y)$ nel piano. Diventa allora possibile avere una ricostruzione fedele dell'interno del corpo sottoposto a tale processo dal momento che μ dipende fortemente dal tipo di materiale attraversato da raggi X. È però necessario far sì che i fotoni siano tutti alla stessa energia: il coefficiente di attenuazione dipende infatti dall'energia del fotone.

1.2 Storia della tomografia computerizzata

Il lavoro di Radon risale ai primi del ventesimo secolo, tuttavia solo nel 1963, il fisico Allan M. Cormack comunicò i risultati dei suoi esperimenti fatti con il primo apparecchio per effettuare la TAC ne il "Journal of Applied Physics".



(a) *Allan McLeod Cormack è stato un fisico sudafricano naturalizzato statunitense, premio Nobel per la medicina nel 1979, insieme a Godfrey Hounsfield, per i suoi lavori sulla tomografia computerizzata a raggi X.*

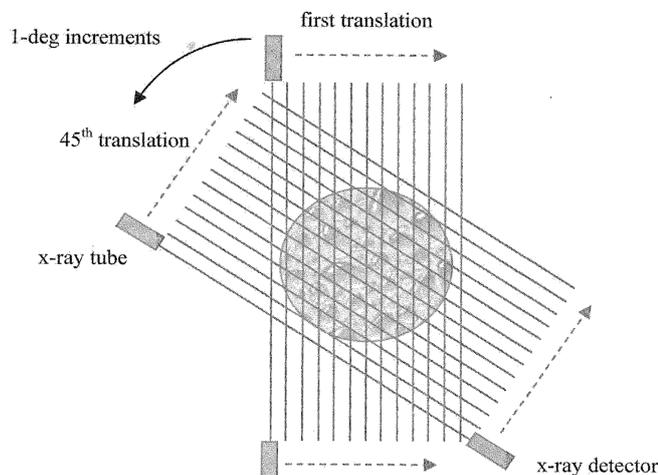


(b) *Sir Godfrey Newbold Hounsfield, lo si vede qui con un macchinario per la tomografia computerizzata.*

Figura 1.4

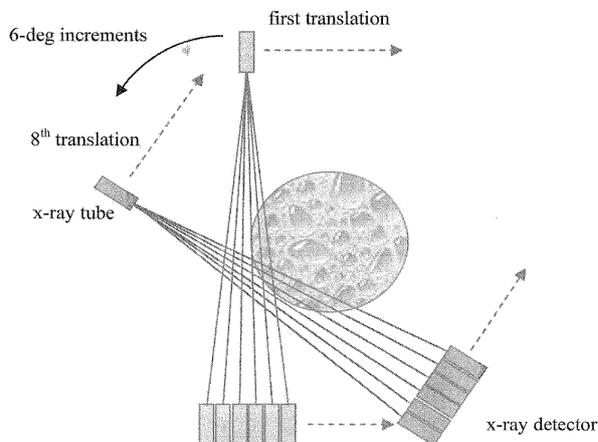
Cormack aveva compreso l'importanza del conoscere la distribuzione nel corpo del coefficiente di attenuazione dei raggi X, tuttavia, a seguito della pubblicazione dei suoi articoli ricevette come unica risposta quella del centro di ricerche svizzero sulle valanghe; gli si chiedeva la possibilità di prevedere la profondità della neve con il nuovo metodo. La svolta si ebbe nel 1967, anno in cui l'ingegnere Godfrey N. Hounsfield iniziò indipendentemente le sue ricerche nel campo, supportato dall'EMI (Electrical and Musical Industries), un'azienda orientata verso le nuove tecnologie. Finalmente nel 1971 il primo dispositivo per la TAC fu installato nell'ospedale londinese Atkinson-Morley e il 4 ottobre dello stesso anno si ebbe il primo paziente, malato di una ciste che fu vista nitidamente grazie al macchinario. Nel 1979 Cormack e Hounsfield furono insigniti del premio nobel per la medicina. Naturalmente a partire dal 1971 nel corso degli anni c'è stata un'evoluzione nella tecnologia dei macchinari usati per la tomografia. La geometria dei dispositivi è cambiata per poter accorciare i tempi per l'acquisizione dei dati da 4.5 minuti a meno di 50 ms. Non è cambiato tuttavia il ragionamento alla base: si cerca di acquisire da più angoli e distanze dall'asse passante per il centro dell'oggetto, il numero di fotoni che hanno attraversato il materiale non avendo interagito con esso in modo tale da ricavare la funzione coefficiente di attenuazione. Il dispositivo costruito dall'EMI nel 1971 è detto di prima generazione. Un solo fascio di fotoni alla volta attraversava l'oggetto da studiare per raggiungere il rivelatore. Fatta la misura dell'intensità di radiazione uscente, il tubo a raggi X e il detector traslavano; l'operazione si ripeteva e dopo 45 traslazioni entrambi i dispositivi ruotavano di un grado attorno all'oggetto.

Figura 1.5: Geometria di un dispositivo di prima generazione.



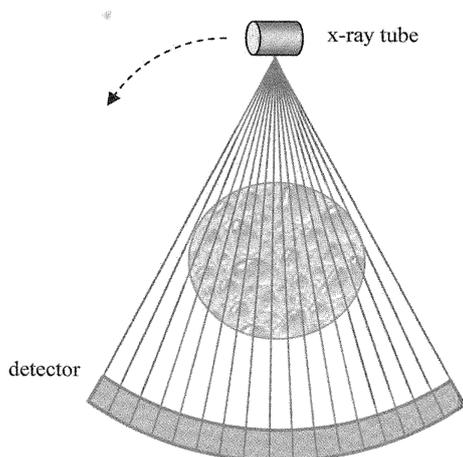
Le operazioni di misura, traslazione e rotazione si ripetevano e l'acquisizione dati poteva durare fino a 4.5 minuti. La lunghezza di tale processo poteva portare il paziente a muoversi e quindi causare una scarsa qualità dell'immagine ricostruita. Ciò portò allo sviluppo dei dispositivi di seconda generazione. Nonostante funzionassero sempre con traslazioni e rotazioni, il numero di movimenti fu ridotto utilizzando contemporaneamente più fasci e rivelatori. I tempi si accorciarono a 20 secondi.

Figura 1.6: Geometria di un dispositivo di seconda generazione.



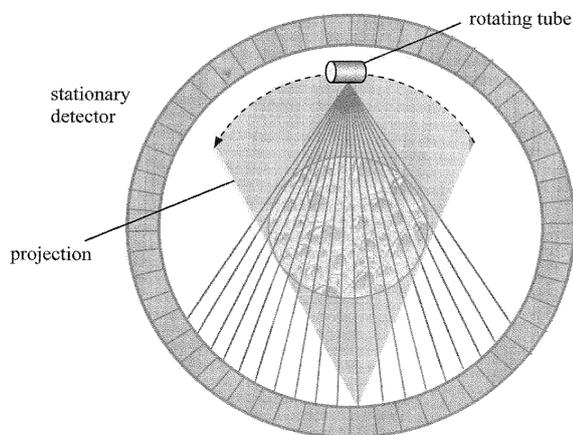
Nei modelli di terza generazione i detector descrivevano un arco attorno alla sorgente di raggi X la cui lunghezza era tale da coprire tutto l'oggetto senza bisogno che ci fosse bisogno di traslazione. Si aveva solo rotazione dell'apparato attorno al paziente riducendo di molto i tempi.

Figura 1.7: Geometria di un dispositivo di terza generazione.



Variazioni nella geometria si ebbero anche con i macchinari di quarta generazione: i rivelatori si richiudevano in un anello che restava fermo durante la scansione; la sorgente di raggi X ruotava intorno al paziente emettendo fasci a ventaglio.

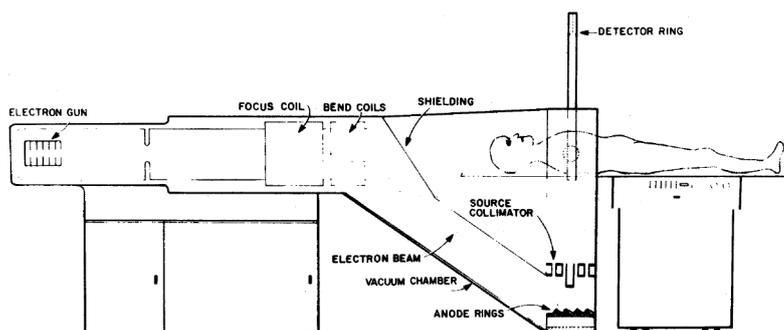
Figura 1.8: Geometria di un dispositivo di quarta generazione.



Tra il 1980 ed il 1984 furono introdotti tomografi funzionanti con fasci di elettroni oltre che con raggi X; questi furono chiamati scanner di quinta generazione.

Un fascio di elettroni ad alta velocità, proveniente da un cannone elettronico, veniva focalizzato e forzato a muoversi fino a percorrere tutto il bersaglio di anodi che aveva una forma ad arco; venivano quindi prodotti dall'impatto dei raggi X a ventaglio che dopo aver attraversato l'oggetto da analizzare andavano incontro a dei detector organizzati in un anello. Il vantaggio fu quello di far durare i tempi di acquisizione tra i 20 e i 50 ms, permettendo la ricostruzione di immagini del cuore. I tempi furono ridotti di tanto perché si aveva a che fare con particelle e non macchinari in movimento.

Figura 1.9: Geometria di un dispositivo di quinta generazione.



Capitolo 2

La trasformata di Radon

Si passa ora a una descrizione più rigorosa dello strumento matematico utilizzato.

Si darà una definizione della trasformata di Radon in due e in più dimensioni; si darà poi uno sguardo alle sue proprietà.

2.1 In 2 dimensioni

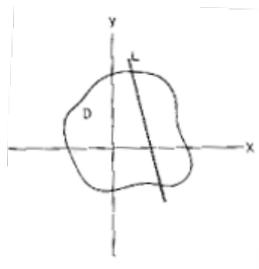
Definizione 2.1 (Trasformata di Radon). *Sia $f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e a supporto compatto.*

Data L , una retta nel piano, è possibile definire l'integrale di linea di f lungo L . La trasformata di Radon $\mathcal{R}f$ è un'applicazione che associa a ciascuna retta L l'integrale di f lungo questa. Vale equivalentemente:

$$\check{f} = \mathcal{R}f = \int_L f(x, y) ds \quad (2.1)$$

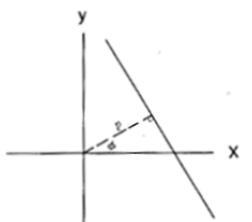
con ds incremento lungo L .

Figura 2.1: linea L nel dominio D .



La formula (2.1) potrà essere scritta in diversi modi tra loro equivalenti a seconda del sistema di coordinate e del modo di esprimere la retta d'integrazione. Si mostreranno ora alcuni esempi. Si può scegliere di scrivere l'equazione di L , la retta lungo la quale si integra, in forma normale, una volta fatta la scelta di un sistema cartesiano. L'equazione della retta sarà quindi la (2.2)

Figura 2.2: coordinate per descrivere la retta.



$$p = x \cos \phi + y \sin \phi. \quad (2.2)$$

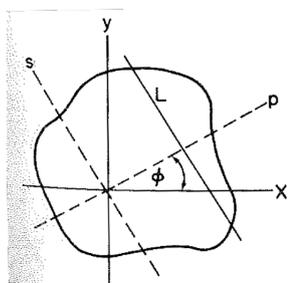
La (2.1) diventerà

$$\check{f}(p, \phi) = \mathcal{R}f = \int_L f(x, y) ds. \quad (2.3)$$

Se si sceglie invece un sistema di coordinate con assi p ed s, ruotati di ϕ rispetto agli assi cartesiani x e y come mostrato in figura 2.3 e quindi verificanti:

$$\begin{aligned} x &= p \cos \phi - s \sin \phi \\ y &= p \sin \phi + s \cos \phi \end{aligned}$$

Figura 2.3: retta L relativa a coordinate iniziali e ruotate.



la (2.1) diventerà:

$$\check{f}(p, \phi) = \mathcal{R}f = \int_{-\infty}^{\infty} f(p \cos \phi - s \sin \phi, p \sin \phi + s \cos \phi) ds. \quad (2.4)$$

Un'altra possibile espressione della (2.1) si può ottenere, estendendo l'integrale a tutto \mathbb{R}^2 .

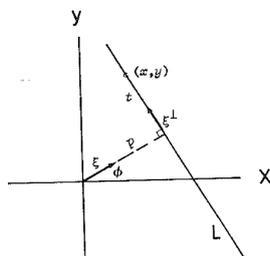
Si introducono allora i vettori \mathbf{x} e ξ , di componenti rispetto ai versori di base \hat{i} e \hat{j} (paralleli rispettivamente agli assi x e y in figura 2.4):

$$\mathbf{x} = (x, y)$$

$$\xi = (\cos \phi, \sin \phi).$$

L'equazione della retta d'integrazione in forma normale sarà la (2.5)

Figura 2.4: Un altro modo di scrivere la retta L.



$$p = x \cos \phi + y \sin \phi = \xi \cdot \mathbf{x}. \quad (2.5)$$

Quindi l'integrale (2.1) diventerà:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) \delta(p - \xi \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (2.6)$$

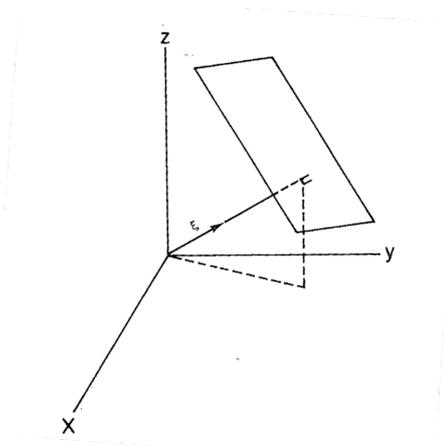
2.2 In 3 dimensioni

In tre dimensioni la (2.6) si generalizza avendo \mathbf{x} , $\xi \in \mathbb{R}^3$ e

$$p = \xi \cdot \mathbf{x} = \xi_1 x + \xi_2 y + \xi_3 z.$$

2.3 Estensione a dimensioni maggiori

Figura 2.5: Geometria per la trasformata di Radon in tre dimensioni.



Definizione 2.2 (Trasformata di Radon). *Sia $f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e a supporto compatto.*

Dato un iperpiano nello spazio, è possibile definire l'integrale di f su di esso. La trasformata di Radon $\mathcal{R}f$ è un'applicazione che associa a ciascun iperpiano S l'integrale di f su S . Vale equivalentemente

$$\check{f}(p, \xi) = \mathcal{R}f = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \delta(p - \xi \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.7)$$

con $\mathbf{x}, \xi \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ e ξ è un versore che definisce l'orientazione dell'iperpiano con equazione:

$$p = \xi \cdot \mathbf{x} = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots \xi_n x_n.$$

2.4 Proprietà di base

Si mostreranno alcune delle proprietà della trasformata di Radon basandosi sulla definizione più generale valida per \mathbb{R}^n (vedi def. 2.2).

2.4.1 Omogeneità

La funzione $\check{f}(p, \xi)$ è una funzione positivamente omogenea.

Si osserva infatti (per $s \in \mathbb{R}, s \neq 0$):

$$\check{f}(sp, s\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \delta(sp - s\xi \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} = |s|^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \delta(p - \xi \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} = |s|^{-1} \check{f}(p, \xi).$$

Si è sfruttata una delle proprietà della delta di Dirac:

$$\delta(at) = \frac{\delta(t)}{|a|} \quad (2.8)$$

avendo nella formula di sopra a e $t \in \mathbb{R}$.

Dalla precedente catena di uguaglianze si nota anche che $\mathcal{R}f$ è pari; vale, infatti che per $s = 1$ si ha:

$$\check{f}(-p, -\xi) = \check{f}(p, \xi).$$

2.4.2 Linearità

Siano f e g due funzioni e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ due costanti:

$$\mathcal{R}(c_1 f + c_2 g) = \int_{\mathbb{R}^n} [c_1 f(\mathbf{x}) + c_2 g(\mathbf{x})] \delta(p - \xi \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} = c_1 \check{f} + c_2 \check{g}.$$

2.4.3 Proprietà di shifting

Siano \mathbf{x} ed \mathbf{a} tali che: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Considero la funzione $f(\mathbf{x} - \mathbf{a})$; la sua trasformata di Radon è:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}f(\mathbf{x} - \mathbf{a}) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \delta(p - \xi \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y}) \delta(p - \xi \cdot \mathbf{a} - \xi \cdot \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \\ &= \check{f}(p - \xi \cdot \mathbf{a}, \xi). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Vale, inoltre, se si considera inizialmente $f(\mathbf{x} + \mathbf{a})$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}f(\mathbf{x} + \mathbf{a}) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} + \mathbf{a})\delta(p - \xi \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y})\delta(p + \xi \cdot \mathbf{a} - \xi \cdot \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \\ &= \check{f}(p + \xi \cdot \mathbf{a}, \xi).\end{aligned}\tag{2.10}$$

2.4.4 Trasformata delle derivate

Sia data una funzione: $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$, si vuole trovare la trasformata di Radon di $\frac{\partial f}{\partial x_k}$. Si osserva inizialmente che:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \frac{\epsilon}{\xi_k}) - f(\mathbf{x})}{\frac{\epsilon}{\xi_k}}\tag{2.11}$$

dove $f(\mathbf{x} + \frac{\epsilon}{\xi_k})$ sarebbe $f(x_1, \dots, x_k + \frac{\epsilon}{\xi_k}, \dots, x_n)$ e ξ_k è la k-esima componente di ξ . Si fa ora la trasformata di Radon della (2.11), tenendo in considerazione la (2.10) con $\mathbf{a} = (0, \dots, \frac{\epsilon}{\xi_k}, \dots, 0)$:

$$\mathcal{R}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = \xi_k \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\check{f}(p + \epsilon, \xi) - \check{f}(p, \xi)}{\epsilon} = \xi_k \frac{\partial \check{f}(p, \xi)}{\partial p}.\tag{2.12}$$

Quindi vale:

$$\mathcal{R}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = \xi_k \frac{\partial \check{f}(p, \xi)}{\partial p}\tag{2.13}$$

Con l'uso della proprietà di linearità segue che la trasformata di Radon di

$$\sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

per arbitrari scalari a_k è:

$$\mathcal{R}\left(\sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = \mathbf{a} \cdot \xi \frac{\partial \check{f}(p, \xi)}{\partial p}.\tag{2.14}$$

Dalla (2.13) segue inoltre che:

$$\mathcal{R}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}\right) = \xi_l \xi_k \frac{\partial^2 \check{f}(p, \xi)}{\partial p^2}.\tag{2.15}$$

2.4.5 Derivata della trasformata

Studiando la trasformata di Radon di una derivata di una funzione f si è visto che il risultato coinvolge anche la derivata di $\check{f}(p, \xi)$ rispetto a p .

Si considererà ora la derivata di $\check{f}(p, \xi)$ rispetto a una delle componenti del versore ξ . Si comincia dalla definizione:

$$\check{f}(p, \xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\delta(p - \xi \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x}.\tag{2.16}$$

Si derivano poi ambo i membri rispetto a una componente di ξ

$$\frac{\partial \check{f}}{\partial \xi_k} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \xi_k} \delta(p - \xi \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (2.17)$$

L'identità

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} \delta(p - \xi \cdot \mathbf{x}) = -x_k \frac{\partial}{\partial p} \delta(p - \xi \cdot \mathbf{x}) \quad (2.18)$$

conduce a:

$$\frac{\partial \check{f}}{\partial \xi_k} = -\frac{\partial}{\partial p} \int_{\mathbb{R}^n} x_k f(\mathbf{x}) \delta(p - \xi \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.19)$$

o, equivalentemente a:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} \mathcal{R}(f(\mathbf{x})) = -\frac{\partial}{\partial p} \mathcal{R}(x_k f(\mathbf{x})). \quad (2.20)$$

2.4.6 Relazione con la trasformata di Fourier

Definizione 2.3. La trasformata di Fourier è un'applicazione che associa a una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ una nuova funzione tramite l'operazione:

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \check{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \exp[-i2\pi\xi \cdot \mathbf{x}] d\mathbf{x} \quad (2.21)$$

dove $\xi \in \mathbb{R}^n$.

La trasformata di Fourier inversa, invece, si definisce come:

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}f)(\xi) \exp[+i2\pi\xi \cdot \mathbf{x}] d\xi. \quad (2.22)$$

Per collegare la trasformata di Radon alla trasformata di Fourier si osserva che la (2.21) si può riscrivere nella forma:

$$\check{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) \exp[-i2\pi t] \delta(t - \xi \cdot \mathbf{x}) \quad (2.23)$$

con $t \in \mathbb{R}$. Ora siano: $\xi = s\mathbf{k}$ e $t = sp$ con $s, p \in \mathbb{R}$ e \mathbf{k} vettore di modulo unitario.

Vale allora:

$$\check{f}(s\mathbf{k}) = |s| \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) \exp[-i2sp\pi] \delta(sp - s\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}). \quad (2.24)$$

Si utilizza allora una delle proprietà della delta di Dirac:

$$\delta(at) = \frac{\delta(t)}{|a|} \quad (2.25)$$

avendo nella formula di sopra a e $t \in \mathbb{R}$.

La (2.24) diventa allora:

$$\check{f}(s\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \exp[-i2sp\pi] \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) \delta(p - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}). \quad (2.26)$$

L'ultimo integrale è la trasformata di Radon di f .

Da qui segue che:

$$\tilde{f}(s\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(p, \mathbf{k}) \exp[-i2sp\pi] dp. \quad (2.27)$$

Si osserva che nel lato destro dell'uguaglianza si ha la trasformata di Fourier unidimensionale lungo la coordinata radiale p della trasformata di Radon.

Capitolo 3

Inversione

Come visto precedentemente è necessario invertire la trasformata di Radon, ossia esprimere f in termini di \check{f} per poter ricavare informazioni sulla struttura interna di un oggetto. Si considereranno due formule, da utilizzare a seconda che \mathbb{R}^n sia con n pari o dispari, poi si cercherà di unificare i due risultati raggiunti.

3.1 Dimensione dispari

Si ricorda che: $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, ξ è un versore di \mathbb{R}^n , p è uno scalare.

Preso un \mathbf{x} arbitrario si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y}) |\xi \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})| d\mathbf{y} &= \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{y} f(\mathbf{y}) \int_{-\infty}^{\infty} dp |p| \delta[p - \xi \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp |p| \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{z} f(\mathbf{x} + \mathbf{z}) \delta(p - \xi \cdot \mathbf{z}) = \int_{-\infty}^{\infty} |p| \check{f}(p + \xi \cdot \mathbf{x}, \xi) dp. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Di sopra è stato usato il cambio di variabile $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z}$ e la proprietà di shifting della trasformata di Radon (vedi formula (2.10)).

Integrando la (3.1) si ottiene:

$$\int_{|\xi|=1} d\xi \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{y} f(\mathbf{y}) |\xi \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})| = \int_{|\xi|=1} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} dp |p| \check{f}(p + \xi \cdot \mathbf{x}, \xi). \quad (3.2)$$

Si utilizza a questo punto l'identità valida per $n \geq 3$ dispari:

$$4(2\pi)^{n-1} (-1)^{(n-1)/2} f(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}}^{2(n-1)/2} \nabla_{\mathbf{x}}^2 \int_{|\xi|=1} d\xi \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{y} f(\mathbf{y}) |\xi \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})|. \quad (3.3)$$

Mettendo insieme la (3.2) e la (3.3) si ottiene:

$$4(2\pi)^{n-1} (-1)^{(n-1)/2} f(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}}^{2(n-1)/2} \nabla_{\mathbf{x}}^2 \int_{|\xi|=1} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} dp |p| \check{f}(p + \xi \cdot \mathbf{x}, \xi). \quad (3.4)$$

Si fa il cambio di variabile $p = t - \xi \cdot \mathbf{x}$ e si ha:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dp |p| \check{f}(p + \xi \cdot \mathbf{x}, \xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} |t - \xi \cdot \mathbf{x}| \check{f}(t, \xi) dt = \int_{-\infty}^{\xi \cdot \mathbf{x}} |t - \xi \cdot \mathbf{x}| \check{f}(t, \xi) dt + \\
+ \int_{\xi \cdot \mathbf{x}}^{\infty} (t - \xi \cdot \mathbf{x}) \check{f}(t, \xi) dt &= \int_{\xi \cdot \mathbf{x}}^{\infty} (t - \xi \cdot \mathbf{x}) \check{f}(t, \xi) dt - \int_{-\infty}^{\xi \cdot \mathbf{x}} (t - \xi \cdot \mathbf{x}) \check{f}(t, \xi) dt.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Si utilizza quindi la regola di Leibnitz per differenziare gli integrali¹ ottenendo:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{x}}^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} dp |p| \check{f}(p + \xi \cdot \mathbf{x}, \xi) \right) &= \nabla_{\mathbf{x}}^2 \left(\int_{\xi \cdot \mathbf{x}}^{\infty} (t - \xi \cdot \mathbf{x}) \check{f}(t, \xi) dt \right) + \\
- \nabla_{\mathbf{x}}^2 \left(\int_{-\infty}^{\xi \cdot \mathbf{x}} (t - \xi \cdot \mathbf{x}) \check{f}(t, \xi) dt \right) &= 2\xi \cdot \xi \check{f}(\xi \cdot \mathbf{x}, \xi).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Siccome $\xi \cdot \xi = 1$ si ha :

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} dp |p| \check{f}(p + \xi \cdot \mathbf{x}, \xi) \right) = 2\check{f}(\xi \cdot \mathbf{x}, \xi). \tag{3.7}$$

Mettendo insieme la (3.7) e la (3.4) si ricava che:

$$f(\mathbf{x}) = \mathcal{C}_n (\nabla_{\mathbf{x}}^2)^{(n-1)/2} \int_{|\xi|=1} \check{f}(\xi \cdot \mathbf{x}, \xi) d\xi \tag{3.8}$$

avendo $\mathcal{C}_n = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{2(2\pi)^{(n-1)}} = \frac{1}{2(2\pi i)^{(n-1)}}$.

È possibile scrivere la (3.8) portando il laplaciano dentro l'integrale:

$$f(\mathbf{x}) = \mathcal{C}_n \int_{|\xi|=1} \left(\frac{\partial}{\partial p} \right)^{n-1} \check{f}(\xi \cdot \mathbf{x}, \xi) d\xi. \tag{3.9}$$

3.2 Dimensione pari

Il procedimento per trovare f a partire dalla sua trasformata di Radon in questo caso non è molto diverso da quello seguito per una dimensione dispari; a cambiare è l'identità di partenza, si userà una valida per n pari:

$$(2\pi)^n (-1)^{(n-2)/2} f(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}}^{2n/2} \int_{|\xi|=1} d\xi \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{y} f(\mathbf{y}) \ln |\xi \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})|. \tag{3.10}$$

Vale inoltre che:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y}) \ln |\xi \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})| d\mathbf{y} &= \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{y} f(\mathbf{y}) \int_{-\infty}^{\infty} dp \ln |p| \delta[p - \xi \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})] = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dp \ln |p| \check{f}(p + \xi \cdot \mathbf{x}, \xi).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

¹La regola di Leibnitz fornisce una formula per differenziare un integrale definito i cui estremi d'integrazione sono funzioni della variabile. Vale infatti che:

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{a(z)}^{b(z)} dx f(x, z) = \int_{a(z)}^{b(z)} dx \frac{\partial f}{\partial z} + f(b(z), z) \frac{\partial b}{\partial z} - f(a(z), z) \frac{\partial a}{\partial z}.$$

Dalle (3.10) e (3.11) si ottiene che:

$$(2\pi)^n (-1)^{(n-2)/2} f(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}}^{2(n-2)/2} \nabla_{\mathbf{x}}^2 \int_{|\xi|=1} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} dp \ln|p| \check{f}(p + \xi \cdot \mathbf{x}, \xi). \quad (3.12)$$

Si può scrivere il risultato precedente, che già fornisce una formula per f , in un altro modo avendo studiato:

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 \mathbf{I}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dp \ln|p| \check{f}(p + \xi \cdot \mathbf{x}, \xi).$$

Si applica ora la regola di Leibnitz per differenziare gli integrali, ottenendo:

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dp \ln|p| \check{f}(p + \xi \cdot \mathbf{x}, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \ln|p| \check{f}_{tt}(p + \xi \cdot \mathbf{x}, \xi).$$

Il cambio di variabile $p = t - \xi \cdot \mathbf{x}$ e l'integrazione per parti danno:

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 \mathbf{I}(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \ln|t - \xi \cdot \mathbf{x}| \check{f}_{tt}(t, \xi) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\check{f}_t(t, \xi)}{t - \xi \cdot \mathbf{x}} dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\check{f}_p(p, \xi)}{p - \xi \cdot \mathbf{x}} dp. \quad (3.13)$$

Nell'ultimo passaggio si è sfruttato il fatto che t è una variabile d'integrazione e si è quindi è stata scambiata con p ponendo $t = p$; le due variabili non sono in questo caso quelle legate dalla relazione $p = t - \xi \cdot \mathbf{x}$.

Inserendo il risultato della (3.13) nella (3.12) si ottiene:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{C_n}{i\pi} \nabla_{\mathbf{x}}^{2(n-2)/2} \int_{|\xi|=1} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{\check{f}_p(p, \xi)}{p - \xi \cdot \mathbf{x}}. \quad (3.14)$$

Nell'uguaglianza di sopra si è usata l'espressione: $C_n = \frac{1}{2(2\pi i)^{(n-1)}}$.

È stata quindi ricavata la formula per l'inversione per una dimensione pari.

Si può scrivere la (3.14) in un altro modo usando in un primo momento la regola di Leibnitz per la differenziare gli integrali e in seguito due integrazioni per parti. Si ottiene allora:

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{\check{f}_p(p, \xi)}{p - \xi \cdot \mathbf{x}} = \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{\check{f}_{ppp}(p, \xi)}{p - \xi \cdot \mathbf{x}} \quad (3.15)$$

da cui si ha che:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{C_n}{i\pi} \int_{|\xi|=1} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{(\frac{\partial}{\partial p})^{n-1} \check{f}(p, \xi)}{p - \xi \cdot \mathbf{x}}. \quad (3.16)$$

3.3 Unificazione

Si osserva dalle uguaglianze (3.9) e (3.16) che la formula per trovare f a partire dalla sua trasformata di Radon ha una forma diversa a seconda che il dominio di tale applicazione abbia dimensioni n pari o dispari.

Si cercherà un'unificazione dei due casi in questo modo: si considereranno separatamente le formule d'inversione, rispettivamente, per dimensioni dispari e pari; si riconurranno, quindi le due formule (3.9) e (3.16) a espressioni formalmente in accordo tra loro.

3.3.1 Dimensione dispari

Si parte considerando una funzione arbitraria di $\xi \in \mathbb{R}^n$ e di $p = \xi \cdot \mathbf{x}$ tale che $\psi(p, \xi) = \psi(-p, -\xi)$.

Si definisce allora l'operatore \mathcal{R}^\dagger :

$$\hat{\psi} = \mathcal{R}^\dagger \psi = \int_{|\xi|=1} \psi(\xi \cdot \mathbf{x}, \xi) d\xi. \quad (3.17)$$

Si definisce, inoltre l'operatore Υ_o tale che, agendo su una funzione di variabile reale p , dia una funzione \bar{g} di variabile reale t ,

$$\bar{g}(t) = \Upsilon_o g(p) = \mathcal{C}_n \left(\frac{\partial}{\partial p} \right)^{n-1} g(p) \Big|_{p=t}. \quad (3.18)$$

Certamente t può essere sostituito da qualsiasi scalare, come, per esempio p o $\xi \cdot \mathbf{x}$.

Dopo aver definito i due nuovi operatori la formula d'inversione (3.9) si può scrivere anche come segue; infatti, dal momento che la trasformata di Radon è pari (vedi sottosez. 2.4.1) \mathcal{R}^\dagger può agire su di essa. Vale allora:

$$f(\mathbf{x}) = \int_{|\xi|=1} \check{f}(\xi \cdot \mathbf{x}, \xi) d\xi = \mathcal{R}^\dagger \check{f}(t, \xi) = \mathcal{R}^\dagger \Upsilon_o \check{f}(p, \xi). \quad (3.19)$$

Inoltre, poiché $\check{f} = \mathcal{R}f$ si può scrivere:

$$f = \mathcal{R}^\dagger \Upsilon_o \mathcal{R}f \quad (3.20)$$

che suggerisce l'identità: $\mathcal{R}^\dagger \Upsilon_o \mathcal{R} = I$.

3.3.2 Dimensioni pari

Il risultato ottenuto con la (3.19) ha un corrispondente per n pari che può essere ottenuto cominciando dalla (3.16) e definendo la trasformata di Hilbert:

$$g_H(t) = \mathcal{H}g = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(p)}{p-t} dp. \quad (3.21)$$

Ora, se $t = \xi \cdot \mathbf{x}$ si ha che $g_H = \mathcal{H}g$ è funzione di $\xi \cdot \mathbf{x}$, ovvero si ha $g_H(\xi \cdot \mathbf{x})$.

La (3.16) si può scrivere allora come:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\mathcal{C}_n}{i} \int_{|\xi|=1} d\xi [\mathcal{H}((\frac{\partial}{\partial p})^{n-1} \check{f}(p, \xi))](\xi \cdot \mathbf{x}, \xi). \quad (3.22)$$

Se si definisce l'operatore Υ_e che agisce su una funzione arbitraria $g(p)$ nel modo che segue:

$$\bar{g}(t) = \Upsilon_e g(p) = \frac{\mathcal{C}_n}{i} [\mathcal{H}((\frac{\partial}{\partial p})^{n-1} g(p))](t) \quad (3.23)$$

si ha che per un n pari, $f(\mathbf{x})$ si esprime come:

$$f(\mathbf{x}) = \int_{|\xi|=1} \check{f}(\xi \cdot \mathbf{x}, \xi) d\xi = \mathcal{R}^\dagger \check{f}(t, \xi) = \mathcal{R}^\dagger \Upsilon_e \check{f}(p, \xi). \quad (3.24)$$

Si nota come le formule d'inversione (3.19) e (3.24) siano formalmente in accordo.

3.3.3 Unificazione formale

In conclusione, definendo l'operatore Υ come

$$\bar{g}(t) = \Upsilon g = \begin{cases} \Upsilon_o g = C_n (\frac{\partial}{\partial p})^{n-1} g(p)|_{p=t} & n \text{ dispari} \\ \Upsilon_e g = \frac{C_n}{i} [\mathcal{H}((\frac{\partial}{\partial p})^{n-1} g(p))](t) & n \text{ pari.} \end{cases} \quad (3.25)$$

Vale allora per n pari o dispari:

$$f = \mathcal{R}^\dagger \Upsilon \mathcal{R} f = \mathcal{R}^\dagger \Upsilon \check{f} = \mathcal{R}^\dagger \bar{f} = \hat{f}. \quad (3.26)$$

Capitolo 4

Ricostruzione delle immagini

4.1 Introduzione

Trattato il problema dell'inversione si potrebbe pensare che il più sia fatto: una formula porterebbe alla ricostruzione delle immagini; ciò non risulta vero; una formula per l'inversione è infatti l'inizio di un nuovo problema che riguarda l'applicazione della teoria.

La (3.26) risulta valida se f è continua a supporto compatto e se gli integrali di linea \tilde{f} esistono per ogni retta.

la condizione di continuità potrebbe non essere così difficile da soddisfare in diversi casi, inoltre, anche la richiesta che la funzione f sia a supporto compatto non dà preoccupazioni; si può immaginare, infatti che fuori dal corpo che si vuole analizzare il coefficiente di attenuazione sia trascurabile.

Sfortunatamente, le posizioni delle sorgenti e dei ricevitori sono limitate dalla struttura della macchina, quindi non si ha acquisizione di tutti gli infiniti integrali di linea.

Ciò è di fatto un problema; vale infatti il seguente teorema di Smith, Solomon e Wagner che afferma, dopo la riformulazione di Marr (1982):

Teorema 4.1.1. *Una funzione f a supporto compatto definita in \mathbb{R}^2 è unicamente determinata da ogni insieme infinito, ma non finito, di proiezioni (vedi def. 4.2).*

Nonostante ciò si può trarre incoraggiamento da un teorema formulato nel 1980 ad opera di Hamaker, Smith, Solomon e Wagner secondo cui una funzione incognita può essere ricostruita in maniera approssimata conoscendo un alto numero di sue proiezioni.

Si ha tuttavia un'altra difficoltà: il problema della tomografia infatti è mal posto. Ciò significa che c'è bisogno di un'alta precisione nelle misure delle proiezioni per poter determinare f in modo soddisfacente; perturbazioni non troppo piccole sulle misure dell'attenuazione del raggio darebbero un valore del tutto errato della funzione incognita.

Si può allora pensare che sia fondamentale nel campo applicativo un approccio fatto di sperimentazioni di diversi algoritmi. È allora interessante mostrare un algoritmo che porta alla ricostruzione della struttura interna di un oggetto. Ci si riferisce all'algoritmo di retroproiezione filtrata. Prima d'introdurlo si riprende per comodità la definizione di trasformata di Fourier e si introduce il

concetto di proiezione; è inoltre necessario descrivere il teorema di Fourier della fetta centrale.

4.2 Definizioni ed osservazioni iniziali

Definizione 4.1 (Trasformata di Fourier). *La trasformata di Fourier è un'applicazione che associa a una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ una nuova funzione tramite l'operazione:*

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \tilde{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \exp[-i2\pi\xi \cdot \mathbf{x}] d\mathbf{x} \quad (4.1)$$

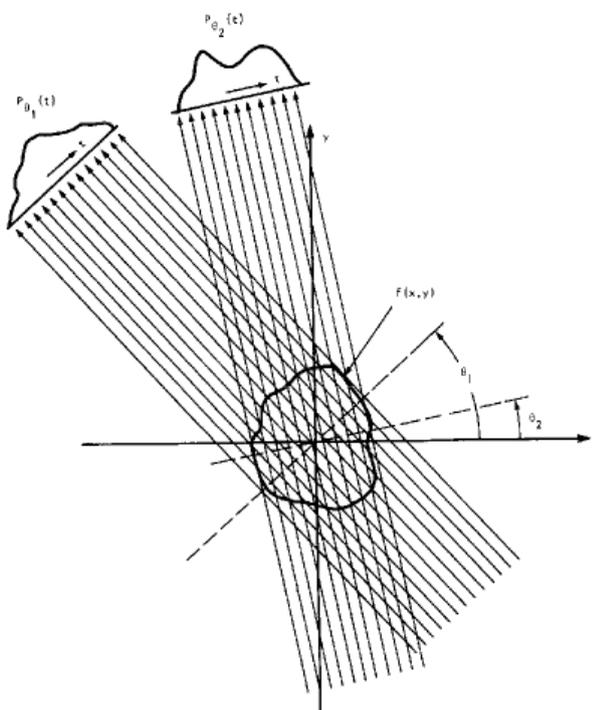
dove $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Va introdotta poi la trasformata di Fourier inversa, che si definisce:

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}f)(\xi) \exp[+i2\pi\xi \cdot \mathbf{x}] d\xi. \quad (4.2)$$

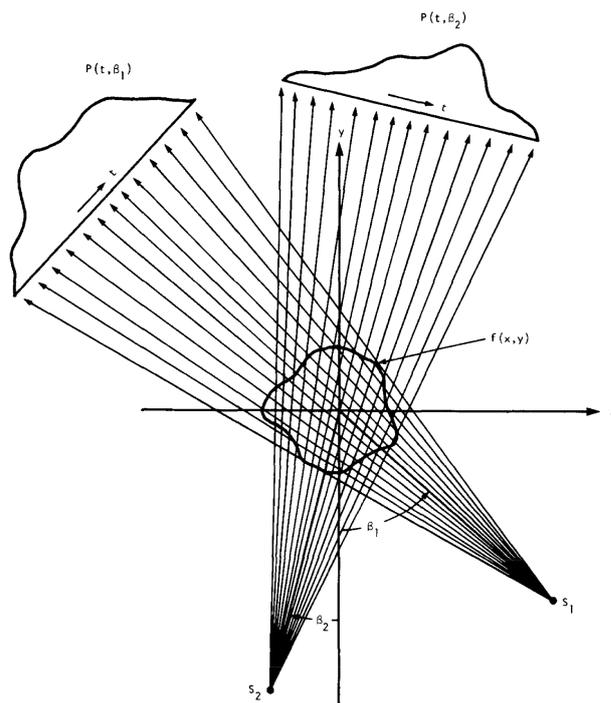
Definizione 4.2 (Proiezione). *Una proiezione consiste in un insieme di integrali di linea. Un semplice esempio è una collezione di integrali fatti lungo linee parallele che viene indicata con $P_\theta(t)$ con θ costante. Questa viene detta proiezione parallela e può essere costruita muovendo lungo linee parallele una sorgente di raggi X ed un rivelatore posti alle estremità di un oggetto.*

Figura 4.1: Esempi di proiezioni parallele della funzione $f(x, y)$ per due diversi angoli.



Un altro tipo di proiezione si ha ponendo un'unica sorgente di fronte a una fila di detector; questo tipo di proiezione si chiama a ventaglio perché i raggi si dipartono da un punto comune come si può vedere nella figura 4.2 qui sotto:

Figura 4.2: Esempi di proiezioni a ventaglio della funzione $f(x, y)$.

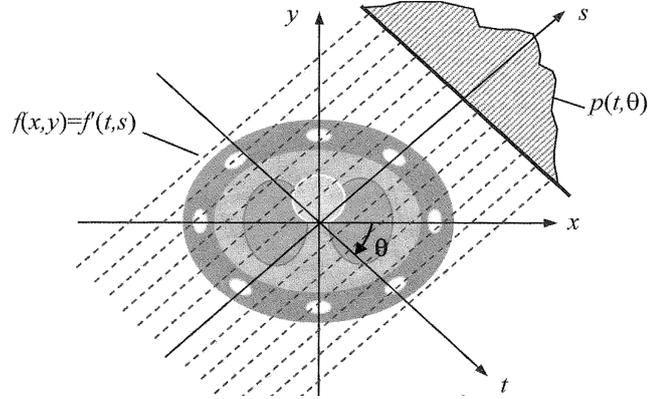


Si enuncia e si dimostra ora il teorema di Fourier della fetta centrale.

Teorema 4.2.1 (Teorema della fetta centrale). *Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$; la trasformata di Fourier della proiezione parallela della funzione $f(x, y)$ per un arbitrario angolo θ eguaglia i valori assunti dalla trasformata di Fourier bidimensionale della funzione $f(x, y)$ lungo una retta presa allo stesso angolo.*

Dimostrazione. Si sceglie, prima di tutto, un sistema di coordinate (t, s) ruotato rispetto all'originario (x, y) , in modo tale che un asse s abbia la stessa direzione e lo stesso verso dei raggi X che attraversano l'oggetto da studiare (vedi figura (4.3)).

Figura 4.3: Rappresentazione schematica dei due sistemi di coordinate.



Le coordinate nei due sistemi sono legate, quindi, dalle relazioni:

$$\begin{cases} t = x \cos \theta + y \sin \theta \\ s = -x \sin \theta + y \cos \theta. \end{cases} \quad (4.3)$$

La funzione $f(x, y)$ sarà $f'(t, s)$ nel nuovo sistema di coordinate. La proiezione $p(t, \theta)$ sarà allora:

$$p(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t, s) ds. \quad (4.4)$$

Se si indica con $P(\omega, \theta)$ la trasformata di Fourier di $p(t, \theta)$ rispetto a t si ha:

$$P(\omega, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t, \theta) \exp[-i2\pi\omega t] dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t, s) ds \exp[-i2\pi\omega t] dt. \quad (4.5)$$

Si adopera nell'ultimo integrale nella (4.5) il cambio di variabile secondo la (4.3) ottenendo:

$$P(\omega, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-i2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)] dx dy. \quad (4.6)$$

Per collegare la trasformata di Fourier di una proiezione: $P(\omega, \theta)$ alla trasformata di Fourier della funzione iniziale $f(x, y)$ si osserva la trasformata di Fourier bidimensionale di $f(x, y)$ ovvero $F(u, v)$:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-i2\pi(xu + yv)] dx dy. \quad (4.7)$$

Se si confrontano la (4.6) e la (4.7) si nota che:

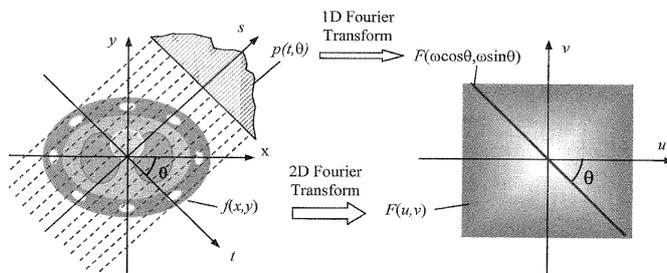
$P(\omega, \theta) = F(u, v)$ se $u = \omega \cos \theta$ e $v = \omega \sin \theta$ Vale infatti:

$$F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) = P(\omega, \theta). \quad (4.8)$$

Le espressioni $u = \omega \cos \theta, v = \omega \sin \theta$ definiscono una retta passante per l'origine che forma un angolo θ con l'asse delle u . Si è visto che la trasformata di Fourier di una proiezione parallela di $f(x, y)$ è anche una fetta della trasformata di

Fourier bidimensionale di f . La fetta è inoltre presa allo stesso angolo della proiezione.

Figura 4.4: Rappresentazione del teorema della Fetta centrale.



Si è quindi dimostrato l'enunciato del teorema. \square

4.3 Formula di retroproiezione filtrata: deduzione

Si tratta di un procedimento finalizzato a conoscere una funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a partire dalla trasformata di Fourier di campioni delle trasformate di Radon di f per angoli θ che vanno da 0 a π .

Si parte dalla considerazione che una funzione $f(x, y)$ può essere ricavata dalla sua trasformata di Fourier $F(u, v)$. Vale infatti:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) \exp[i2\pi(ux + vy)] dudv. \quad (4.9)$$

A questo punto si passa dal sistema di coordinate cartesiane (u, v) a quello polare (ω, θ) ponendo:

$$\begin{cases} u = \omega \cos \theta \\ v = \omega \sin \theta. \end{cases} \quad (4.10)$$

Effettuando il cambio di variabile la (4.9) diventa:

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) \exp[i2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)] \omega d\omega. \quad (4.11)$$

Se si utilizza il teorema di Fourier della fetta centrale si ha che la (4.11) si scrive come:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} P(\omega, \theta) \exp[i2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)] \omega d\omega = \\ &= \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} P(\omega, \theta) \exp[i2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)] \omega d\omega + \\ &+ \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} P(\omega, \theta + \pi) \exp[-i2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)] \omega d\omega. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Se si osserva la (4.6) si nota che $P(\omega, \theta + \pi) = P(-\omega, \theta)$.

Si arriva allora, sostituendo nella (4.12) alla seguente formula:

$$f(x, y) = \int_0^\pi d\theta \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega, \theta) |\omega| \exp[i2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)] d\omega. \quad (4.13)$$

$P(\omega, \theta)$ è la trasformata di Fourier della proiezione all'angolo θ . L'integrale all'interno è la trasformata di Fourier inversa di $P(\omega, \theta) |\omega|$: rappresenta una proiezione filtrata da una funzione. La formula che si è ricavata mostra che l'immagine ricostruita $f(x, y)$ è somma di tutte le proiezioni filtrate che passano per (x, y) .

Conclusioni

Obiettivo di questa tesi era non solo quello di dare una definizione della trasformata di Radon, d'introdurre le sue proprietà e di arrivare a risolvere il problema dell'inversione, ossia trovare f in termini di \tilde{f} da un punto di vista teorico.

Scopo principale era mostrare come i risultati raggiunti in ambito matematico possano essere dei punti di partenza per risolvere altri problemi, legati a campi diversi. Se ne è fatto un esempio con la tomografia applicata in ambito medico; è possibile oggi avere una visione nitida di parti interne del corpo grazie alla TAC, il cui funzionamento si basa in genere su un algoritmo di retroproiezione che fa uso del concetto di trasformata di Radon e del suo legame con la trasformata di Fourier (vedi paragrafo 4.3).

Si è visto, tuttavia, che talvolta un risultato matematico, per poter essere applicato in un ambito diverso, non può essere preso nella sua interezza, e a questo proposito nel paragrafo (4.1) si è mostrato come il problema dell'inversione della trasformata di Radon, risolto in ambito matematico nel terzo capitolo, non possa essere sfruttato in campo pratico, almeno per quanto riguarda la tomografia. Inoltre non sempre accade che si trovi subito il modo di utilizzare delle scoperte in campo teorico; Johann Radon sviluppò nel 1917 la struttura matematica comune a molti problemi di ricostruzione, tuttavia il suo articolo rimase nell'ombra per circa mezzo secolo; solo nel 1956 Bracewell diede una prima soluzione a un problema pratico di ricostruzione: il campo era la radioastronomia e si richiedeva di determinare le regioni del disco solare che emettevano microonde. Ancora più tardiva fu l'invenzione della TAC: il primo scanner fu introdotto, come visto precedentemente, negli anni 70 ad opera di Allan McLeod Cormack e Godfrey Newbold Hounsfield.

Per completezza si devono elencare le mancanze di questa tesi.

Non sono stati mostrati gli effetti biologici dei raggi X, usati nella tomografia, né si è data una descrizione dettagliata degli scanner, ma solo qualitativa, né si sono visti altri ambiti di applicazione del problema della ricostruzione oltre a quello medico, tuttavia è stato interessante notare come fisica, matematica, ingegneria possano essere applicate nello sviluppo di settori in apparenza distanti.

Bibliografia

- [1] Hsieh J.(2009), *Computed Tomography Principles, Design, Artifacts and Recent Advances*, seconda ed., SPIE, Bellingham.
- [2] Kac A. and Slaney M.(1988), *Principles of Computerized Tomographic Imaging*, IEEE Press.
- [3] Stanley R.Deans(1983), *The Radon Transform And Some Of Its Applications*, John Wiley and Sons, New York.

Ringraziamenti

Per cominciare vorrei ringraziare di cuore il mio relatore, Fabio Ortolani, che mi ha seguito offrendomi tutta la sua disponibilità. Ringrazio i miei genitori, Franca e Gerardo, mia sorella Federica, nonna Carmela e Shaki per avermi sostenuto e incoraggiato in questo percorso.

Ringrazio i miei zii, Dayana e Amit che mi hanno fatto sentire a casa in loro compagnia.

Ringrazio Filippo, il mio meraviglioso ragazzo che mi è sempre stato accanto, ha sempre confidato in me, nonostante le mie insicurezze e mi ha aiutato in parte ad accantonarle.

Ringrazio le mie coinquiline: Francesca, Linda, Carolina e Francesca.

Ringrazio Bruna, Nicole, Lisa, Teresa, Giulia, Emma, Giorgia e Cristina con cui ho condiviso non solo il luogo di studio, ma anche una bella amicizia.

Ringrazio Maria, Rosaria, Sabrina, Laura e Teresa, le mie amiche storiche; in loro compagnia il tempo insieme scorre, anzi corre piacevolmente.

Ringrazio Giovanni, Franca, Bianca e Nina che mi hanno accolto con ospitalità commovente.

Ringrazio tutti i professori ed miei compagni di corso.