Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica - Indirizzo Didattico

L'insegnamento della probabilità nella scuola secondaria di secondo grado: un progetto sulla probabilità condizionata

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Giorgio Bolondi

Presentata da:
Alice Bolognesi

Sessione I
Anno Accademico 2013/14

Indice

Introduzione

Questo progetto documenta alcune riflessioni e attività proposte sull'insegnamento della probabilità, in particolare sull'introduzione del concetto di probabilità condizionata in una classe seconda di una scuola secondaria di secondo grado.
La prima parte della tesi presenta una breve esposizione della nascita del calcolo delle probabilità e della sua storia fino a metà del Novecento. In seguito viene presentata una panoramica sulla storia dell'insegnamento della probabilità, tale insegnamento non ha mai avuto vita facile e in effetti gli insegnanti hanno sempre incontrato difficoltà nell'introdurre tale materia nelle scuole di oggi.
Il secondo capitolo affronta il ruolo dell'intuizione e dell'istruzione nell'ambito del calcolo delle probabilità: descrive come le prime intuizioni probabilistiche siano presenti nei primi anni di vita di ogni individuo e quanto l'istruzione possa favorire o sfavorire una migliore comprensione dell'argomento. A tal proposito, analizzerò alcuni studi e lavori fondazionali di Fischbein.
La parte centrale della mia tesi descrive un progetto che ho proposto in una classe seconda del Liceo di Faenza; ho introdotto il concetto di probabilità condizionata agli alunni con lo scopo di osservare se tale nuova nozione non prevista nel loro programma potesse migliorare le prestazioni in alcuni quesiti di probabilità all'interno delle Prove Invalsi, quesiti per i quali dati raccolti mostrano come siano di difficile comprensione per gli studenti. Ho ipotizzato che l'insegnamento della probabilità condizionata potesse facilitare la risoluzione di determinati esercizi proposti in queste prove. Riporterò quindi una descrizione delle lezioni tenute in classe e le schede di esercizi consegnate agli studenti, con relativi risultati ottenuti e osservazioni.

Capitolo 1

Cenni storici

1.1 Breve storia del calcolo delle probabilità

Una delle prime trattazioni del calcolo delle probabilità e della matematica dei giochi e dell'azzardo è quella data da Frate Pacioli[1]. La sua opera più famosa è la *Summa de aritmetica, geometria, proporzioni et proporzionalitate* del 1494. In questo trattato, tra l'altro, il frate esprimeva tutta la sua riconoscenza agli studi dell'algebra di Fibonacci attestandone il reale valore scientifico.
L'impostazione che Pacioli diede alla probabilità è quella che poi si è evoluta e trasformata nel rischio finanziario in materia di investimenti e rischio assicurativo. Le sue osservazioni nacquero durante una partita a palla tra due frati che si erano accordati di concludere il torneo solo quando uno dei due avesse vinto almeno 10 giri. In una situazione del genere, al termine del gioco ci sarebbero stati un vincitore e un vinto. Ma Pacioli complicò la questione decidendo che i due giocatori avrebbero dovuto puntare 50 ducati a testa e che la posta sarebbe dovuta essere divisa in proporzione al punteggio raggiunto. Un'ulteriore complicanza nasceva dal momento in cui i due frati non avevano modo di concludere la partita. Il dilemma di Pacioli allora era: come si sarebbe dovuta dividere equamente la posta in gioco nell'ipotesi che il punteggio raggiunto fosse diverso?
Un problema simile è alla base delle origini del moderno calcolo delle probabilità, che si fanno risalire alla corrispondenza avvenuta nel 1654 tra Blaise Pascal

[1] Fra' Luca Bartolomeo de Pacioli (1445 - 1517)

e Pierre de Fermat per quanto riguarda un problema di gioco d'azzardo[2]. Il problema dei punti fu rivolto a Pascal da un saggista e matematico dilettante di nome Antoine Gombaud[3]; Pascal capì che c'era bisogno di inventare un nuovo metodo di analisi per risolvere il quesito, dal momento che per arrivare alla soluzione bisognava riflettere sulle possibilità di ogni giocatore di arrivare alla vittoria dato il punteggio al momento in cui era stato interrotto il gioco.
La corrispondenza col collega matematico Fermat gettò poi le basi per la teoria della probabilità moderna.
Pochi anni dopo, nel 1656, Galileo Galilei pubblicò *Sopra la scoperta dei dadi*; in particolare egli spiegò come mai, lanciando tre dadi, il 10 sia più probabile del 9 nonostante che entrambi i risultati si ottengano da un uguale numero di combinazioni. Il 9 si ottiene con le sei combinazioni (1, 2, 6), (1, 3, 5), (1, 4, 4), (2, 2, 5), (2, 3, 4), (3, 3, 3), il 10 con le sei combinazioni (1, 3, 6), (1, 4, 5), (2, 2, 6), (2, 3, 5), (2, 4, 4), (3, 3, 4). Tuttavia, mentre una combinazione di tre numeri uguali può presentarsi in un solo modo, una con due numeri uguali può presentarsi in tre modi diversi, una con tre numeri diversi in sei modi diversi. Si può ottenere il 10 in 27 modi e il 9 in 25 modi.
Negli stessi anni in Germania Huygens[4] pubblicò il primo libro a stampa sulla probabilità, chiamato *De ratiociniis in ludo aleae* (1657). Questa opera si basa sul lavoro di Fermat, Blaise Pascal e Girard Desargues. Frans Von Schooten tradusse il manoscritto originale tedesco *Van Rekeningh in Spelen van Geluck* in latino e lo pubblicò in nella sua opera *Exercitationum mathematicarum.* Il trattato riguarda i giochi di fortuna e grazie ad esso Huygens viene tuttora considerato una dei fondatori della disciplina del calcolo delle probabilità.
Per quanto riguarda l'inizio della statistica matematica, lo si può riscontrare in *Osservazioni sui conti della mortalità* di Graunt (1662), la cui trattazione riguarda la probabilità per gli affari delle assicurazioni. Un'altra opera degna di nota è *Disseratio De Ars Combinatoria* di Liebniz (1666), nella quale il matematico cerca di applicare la probabilità numerica a questioni legali.

[2]Pascal stesso affermò: "Sono certo di poterlo spiegare, ma ciò richiederà qualche parola da parte mia e un po' di pazienza da parte vostra" (Blaise Pascal, lettera a Pierre de Fermat, 24 agosto 1654).

[3]Meglio conosciuto come il Cavalier de Mèrè.

[4]Christiaan Huygens (1629 - 1695)

Gli studi relativi all'argomento compiuti tra la fine del Seicento e l'inizio del Settecento si articolarono in una serie di pubblicazioni ancora incentrate principalmente sui giochi, ma con impostazioni e contenuti più elaborati: tra le più note vi sono l'*Ars conjectandi* di Jakob Bernoulli, l'*Essai d'analyse sur les jeux de hasard* di Pierre Remodn de Montmort, il *De mensura sortis, seu de probabilitate eventuum in ludis a casu fortuito pendentibus* e la *Doctrine of chances* di Abraham de Moivre.
Una sistemazione più organica avvenne solo all'inizio dell'Ottocento, quando Laplace propose l'enunciazione di principi generali e la definizione classica di probabilità.
In seguito, il cacolo delle probabilità, che quindi era nato come teoria matematica dei giochi, crebbe progressivamente di importanza; agli inizi del XIX secolo Laplace affermò che "è notevole il fatto che una scienza iniziata con l'analisi dei giochi d'azzardo dovesse essere elevata al rango dei più importanti oggetti della conoscenza umana"[5]. La teoria conobbe un grande sviluppo nel XX secolo, quando Kolmogorov introdusse l'approccio assiomatico (1933) che ancora oggi ne costituisce il fondamento. In quell'anno Kolmogorov pubblicò *Concetti fondamentali del Calcolo delle Probabilità*, sviluppando la ricerca che era ormai cristallizzata sul dibattito fra quanti consideravano la probabilità come limiti di frequenze relative (impostazione frequentista) e quanti cercavano un fondamento logico della stessa.
Oltre a quella kolmogoroviana, negli anni dal 1925 al 1940 anche altre scuole si concentrarono su questo argomento; esse sono la scuola americana di Feller e quella francese di Lèvy e Frèchet.
Se da una parte l'entusiasmo era grande, in Francia, a partire dalla seconda metà dell'Ottocento il calcolo delle probabilità fu in generale escluso, se non esplicitamente rifiutato, da una comunità di matematici che non lo consideravano degno di far parte delle proprie ricerche e dei loro insegnamenti. In contrapposizione a questi studiosi, Emile Borel decise di sviluppare e approfondire lo studio di questa materia e nel 1928 fondò l'IHP, "Institut Henri Poincarè", un istituito di matematica e fisica teorica. Alla fine degli anni Trenta Frèchet riuscì a creare

[5] A. I. Dale, Pierre - Simon Laplace, Philosophical Essay on Probabilities, Spronger - Verlag, 1995

un primo gruppo di probabilisti che discutevano le loro tesi a partire dal 1936; alcuni di essi furono Doeblin, Fortet, Malècot e Ville. Doeblin e Ville in particolare costituirono un gruppo di lavoro molto attivo, che diventò poi il seminario di Borel di calcolo delle probabilità.
Negli stessi anni in Francia fu forte l'influenza di Bourbaki. Nella sua impostazione il calcolo delle probabilità ebbe un ruolo secondario.
Il movimento bourbakista ha grandi responsabilità per l'indifferenza e la svalutazione della disciplina nella cerchia dei matematici di professione e anche dei professori di matematica.

1.2 La storia dell'insegnamento del calcolo delle probabilità nell'università

Nel dicembre del 1785 un manifesto, ispirato al *Discorso Preliminare dell'Enciclopedia* di d'Alembert e largamente diffuso tra il popolo, annunciò l'apertura di un nuovo insegnamento destinato a "entrambi i sessi" in un'istituzione privata chiamata Liceo. Come professori (chiamati Accademici), vennero annunciati Deparcieux e Gaspard Monge per la fisica, Condorcet per la matematica. Condorcet reclutò (su consiglio di Monge) Sylvestre - Francois Lacroix per condurre il corso al suo posto. Il 14 e il 16 gennaio del 1786 Condorcet tenne la lezione d'inaugurazione fissando il programma di matematica per il primo anno. Il corso comprendeva sei parti:

- Elementi di aritmetica, di geometria e di algebra.
- Meccanica.
- Idrodinamica.
- Applicazioni di matematica a problemi di fisica.
- Spiegazioni sui fenomeni astronomici e sul sistema del mondo.
- Infine, nella sesta e ultima parte, un trattato sul calcolo sull'interesse dei soldi, sul modo di creare le tavole di mortalità e di leggerne i risultati, su come applicare la teoria delle combinazioni sul gioco d'azzardo, e le varie questioni relative al calcolo delle probabilità.

Si potrebbe pensare che il quinto e il sesto punto non potevano essere trattati il primo anno considerato che Lacroix lesse come lezione d'apertura il 4 dicembre 1768 il *Discours sur l'astronomie et le calcul des probabilities*, scritto da Condorcet per il secondo anno. Queste lezioni, di un livello abbastanza alto, furono interrotte nell'agosto del 1787 a causa di una bassa affluenza di studenti. Non si conosce esattamente il contenuto dell'insegnamento; tutto lascia pensare che il corso fosse stato fermato prima che egli avesse potuto dare anche solo una lezione sul calcolo delle probabilità.
Durante il governo che andò dall'ottobre 1791 al settembre 1792, nel quale fu

uno dei 745 deputati e nel febbraio 1792 presidente, Condorcet scelse di appartenere al Comitato d'Istruzione pubblica del quale fu presidente, difendendo il principio di un'istruzione effettivamente universale, uguale per gli uomini e le donne, i poveri e i ricchi.
Nell'aprile del 1792 egli propose la creazione all'interno dei licei di una cattedra dedicata unicamente all'applicazione del calcolo alle scienze morali e politiche.
Il 29 marzo 1794 Condorcet, condannato a morte dal tribunale rivoluzionario, in fuga e nascosto a Parigi da luglio del 1793, dopo tre giorni di latitanza e tre giorni di carcere si suicidò.
In seguito naque l'Istituto Politecnico[6] il 24 settembre 1794 e l'Istituto Normale[7] il 30 ottobre. Questo istituto, che esisterà solo per sei mesi, organizzò delle lezioni di matematica tenute da tre acclamati matematici: Laplace, Monge e Lagrange[8]. Laplace svolse dieci lezioni di cui l'ultima, il 10 maggio 1795, riguardava il calcolo delle probabilità che diede la traccia per il ben noto testo che pubblicò nel 1814 sotto il titolo di *Essai philosophique sur les probabilitès.* Questa lezione, che noi conosciamo come un testo di 16 pagine, fu discussa in un'ora e probabilmente fu ascoltata da un numero considerevole di studenti (anche centinaia). La cosa più importante fu che questa lezione, che al giorno d'oggi verrebbe definita come conferenza, venne subito pubblicata. Essa rappresentò il debutto effettivo in Francia della diffusione dell'approccio matematico alla probabilità. Tuttavia era ancora difficile vederla come qualcosa di più che un tentativo d'insegnamento; dopo poco tempo l'Istituto chiuse.
Fu riaperto nel 1808, nello stesso momento in cui apriva la *Facultè des Sciences de Paris* nella quale Lacroix era il docente principale; ma il progetto di creare una cattedra per il calcolo delle probabilità non venne portato a termine. Nel 1822 l'Istituto venne nuovamente chiuso e poi ristabilito nel 1826; nel 1830 venne tenuto un corso sul calcolo delle probabilità da Abelard Lèvy, poi nel 1834 da Cournout ed ebbe termine con la morte di Poisson nel 1840.
All'Istituto Politecnico era previsto un capitolo sulle "Applicazioni dell'analisi ai problemi di probabilità e di aritmetica politica" all'interno del corso "Analisi applicata alla geometria", ma parve che Ferry non ebbe tempo di affrontare

[6]Ècole Polytechnique - Ècole Centrale des Travaux Publics
[7]Ècole Normale Supèrieure
[8]Joseph - Louis Lagrange (1736 - 1813)

l'argomento durante il corso del primo anno nel 1795. Di Joseph Fourier possediamo un foglio manoscritto sul quale egli scrisse che aveva seguito un "corso particolare su una branca dell'analisi", cioè "la scienza delle probabilità" all'Istituto Politecnico. Il periodo durante il quale sembra essersi svolto questo corso fu verso la fine del 1795, ma non si è a conoscenza di un'eventuale proposta dello stesso corso negli anni successivi. Pierre Crèpel, matematico e studioso di storia della scienza, considera ragionevole supporre, basandosi sui documenti che si possiedono, che nessun altro insegnamento di questo tipo ebbe luogo fino a quando non è avvenuta la riorganizzazione dell'Istituto nel 1816.
Nel marzo del 1816 fu previsto un corso di aritmetica sociale che durò sei lezioni, dal 5 al 22 giugno 1819. Questo corso fu tenuto da Arago[9] fino al 1830 e può essere considerato a posteriori come il debutto di un vero e proprio insegnamento probabilistico. Come scrisse Crèpel: "Il corso sembra essere giunto a obiettivi convergenti. Alcuni studiosi, anche interessati ai problemi politici e sociali, cercano di promuovere una branca della matematica che guidicano in primo luogo formativa, ma anche molto utile; questi uomini, che hanno un punto di vista più "politico", vogliono crescere i futuri funzionari dell'amministrazione e dar loro le conoscenze indispensabili per la creazione del capitalismo. Non si trovano però nè la riflessione critica sui fondamenti dell'economia (la cattedra di economia politica e sociale verrà creata nel 1906), nè l'ambizione di insegnare i fondamenti di una nuova scienza sociale. Il programma appare come un compromesso, ma il suo contenuto è essenzialmente matematico (e lo diventerà ancora di più)." In breve, il progetto di Condorcet svanì per un secolo e mezzo[10].
Arago tenne il corso di aritmetica sociale dal 1819 al 1830. Nel 1831 gli succedette Savary[11]. Le lezioni di Arago non furono mai oggetti di pubblicazione, ma gli appunti di alcuni dei suoi alunni possono fornire una panoramica degli argomenti affrontati, almeno per quanto riguarda l'anno 1825. Il calendario del corso, ripreso dal Registro d'Istruzione per l'anno accademico 1824 - 25, indica:

- "Giovedì 7 luglio: (1a lezione) Principi generali del calcolo della probabilità

[9] François Arago (1786-1853)

[10] Georges Thèodule Guilbaud cercò di farlo rinascere nella metà degli anni 1940, in particolare fondando l'*Ecole Pratique des Hautes Etudes* nel 1955 e un corso di studi di Matematica Sociale.

[11] Felix Savary (1797 - 1841).

- Sabato 9: (2a lezione) Applicazioni ed esempi

- Lunedì 11 (3a lezione) Applicazioni dei principi della probabilità al calcolo delle scelte nel gioco della lotteria. Tavole di mortalità e problemi che esse riescono a risolvere

- Giovedì 14: (4a lezione) Interessi, sconti e rendite

- Sabato 16 (5a lezione) Assicurazioni, aritmetica commerciale. Calcolo della media di dati forniti in situazioni particolari.

L'interrogazione generale[12] è stata condotta dal professore Arago e dall'assistente Mathieu dal 28 luglio al 2 agosto."
Fino al 1838 fu dunque Savary a sostenere le lezioni di Argo introducendo l'enunciato del teorema di Bernoulli e riducendo la parte di economia.
Dall'anno 1834 - 35 il corso venne chiamato "Elementi del calcolo delle probabilità, et aritmetica sociale".
A partire dal 1838 - 39 il corso venne condotto da Duhamel seguito dall'assistente August Comte, sempre durante il secondo anno e con il medesimo programma[13].
A partire dal 1841 le lezioni di calcolo delle probabilità vennero vennero assegnate a Liouville negli anni dispari e a Sturm negli anni pari.
In seguito ci fu una deriva della matematica e dell calcolo puro; il programma fu ridotto nel 1845 - 46, in particolare la parte sulla media tra diversi dati, e nel 1848 - 49 scomparvero anche il teorema di Bernoulli e la probabilità degli eventi futuri dedotta dall'osservazione degli eventi già avvenuti. La lunghezza effettiva del corso era tra le 2 e le 6 lezioni, il metodo dei minimi quadrati veniva insegnato all'interno del corso di geodesia di Chasles. Poco a poco l'aritmetica politica ebbe sempre meno spazio nelle lezioni, e nel 1845 venne annullato il corso di aritmetica commerciale.
Nel XIX secolo corsi del genere scomparvero in tutta la Francia. Crèpel, che si occupò del problema in maniera molto approfondita, non trovò nulla di esplicito,

[12] Che sarebbe a dire il corso di "Analisi applicata alla geometria a tre dimensioni, geodesia e aritmeticaa sociale".

[13] In questi anni la probabilià era stata divisa in due parti: la parte più generale era integrata al coro di analisi, mentre la teoria degli errori al corso di geodesia e astronomia.

nè nel Conservatorio delle Arti e dei Mestieri nè all'Accademia del commercio, antenata dell'Istituto Superiore del Commercio, creata nel 1818, nè nell'Istituto Centrale delle Arti e dei Manufatti creato nel 1829. Nella Facoltà delle Scienze di Parigi la prima cattedra del calcolo delle probabilità fu creata nel 1824 ma all'Assemblea dei Professori "Francoeur osservò che la probabilità era stata insegnata per anni, ma questo corso si era presentato così poco utile che era necessario eliminarlo".

Come abbiamo già osservato, all'Istituto Normale Superiore ci fu un corso d'insegnamento tra il 1830 e il 1840, anno nel quale fu soppresso a causa della morte di Poisson. Tuttavia bisogna notare che tra il 1836 e il 1840 Cournot tenne un corso all'Istituto Normale Superiore contemporaneamente a Poisson, che lo presiedette alla Facoltà di Scienze.

Nel primo periodo del XIX secolo il *Traitè èlèmentaire de calcul des probabilitès*[14] di Lacroix fu l'unico libro francese progettato per l'insegnamento del calcolo delle probabilità, oltre ai libri di Poisson del 1837 e di Cournot del 1843. A partire dal giugno del 1819 fu tenuto un insegnamento piuttosto elementare ma regolare della probabilità, chiamato Calcolo delle Probabilità e Aritmetica Sociale, all'interno dell'Istituto Politecnico al secondo anno. Era seguito da circa un centinaio di studenti. Quindi l'unico manuale a disposizione era quello di Lacroix, e rimase tale fino al 1873[15].

A partire dal 1854 all'Istituto Politecnico Bertrand[16] condusse un corso di Calcolo delle Probabilità per circa 40 anni negli anni pari, che quindi fu ascoltato da oltre 3000 studenti. Gli allievi degli anni dispari, per contro, dal 1869 al 1883 seguirono il corso con Hermite e poi con Jordan[17], che però non era interessato a quegli argomenti, dicendo che al massimo avrebbe introdotto la teoria degli errori all'interno di Astronomia e Geodesia. Bertrand invece pensava che questo insegnamento fosse "formativo e critico che cambiava ogni anno in qualche aspetto, sia dal punto di vista dei temi che degli esempi"; egli pubblicò un trattato nel 1889. Questo manuale, molto considerato e diffuso per una

[14] 1816; 1822; 1833;...1864

[15] Nel 1873 Laurent pubblicò un Trattato sul calcolo delle probabilità.

[16] Joseph Bertrand (1822 - 1900)

[17] Jordan nel 1894 confessò che avrebbe fatto scomparire senza rimorso le tre lezioni che dedicava al calcolo delle probabilità.

ventina d'anni, ebbe anche un ruolo negativo per lungo tempo, a causa del suo sarcasmo sulle ricerche di Condorcet, Laplace e Poisson sulla probabilità.
A partire dal 1894 - 95 il calcolo delle probabilità non fu più affrontato all'interno del corso di analisi, ma nel corso di astronomia e geodesia come una semplice introduzione alla teoria degli errori. Questa situazione durò per 25 anni, mentre dal 1919 il calcolo delle probabilità venne reintrodotto nel corso di analisi e tenuto da Lèvy[18] negli anni dispari e da Hadamard[19] negli anni pari. Nel 1942 fu creata una cattedra di matematica applicata occupata da Brard finalizzata all'introduzione delle nozioni di statistica matematica.
Nel 1919 Lèvy scoprì il lavoro della scuola russa di Tchebitchev, Markov e Liapounov e decise di introdurre un corso sul moto browniano e tutto quello che riguardava la legge di Gauss; questo corso era molto interessante e notevole, ma di difficile comprensione. Lèvy insegnò fino al 1958, anno nel quale fu sostituito dal genero Schwartz[20]; nel 1997 egli affermò di aver rinnovato l'insegnamento che riguarda la matematica pura, ma di aver anche dato nuova importanza alla matematica applicata, nella quale figura la probabilità. Effettivamente il gruppo dei probabilisti, tra i quali Mètivier e Jacques Neveu, conobbe un grande sviluppo.
Nel 1852 alla Facoltà di Scienze la cattedra di Calcolo delle Probabilità fu trasformata in cattedra di Fisica Matematica e Calcolo delle Probabilità (questo cambiamento mostrava la deriva dell'insegnamento di tale argomento). Dal 1886 al 1896 Poincarè[21] fu il titolare della cattedra; durante questi dieci anni egli dedicò un semestre nel 1891 - 92 (circa 12 o 13 lezioni) al calcolo delle probabilità basandosi sul corso di Bertrand al Politecnico. Nel 1896 Boussinesq diventò titolare della cattedra ma non fece nessuna lezione sulla probabilità; nel 1909 Èmile Borel invece tenne un corso sull'argomento per due anni, e così fece anche Louis Bachelier dal 1910 al 1914. Nel 1919 Borel diventò titolare della cattedra fino al 1941 ed è grazie a lui che all'interno della Facoltà di Scienze si instaurò una continuità nell'insegnamento della probabilità. Questi corsi però erano seguiti solo da pochi studenti.

[18] Paul Lèvy (1886 - 1971)
[19] Jacques Hadamard (1865 - 1963)
[20] Laurent Schwartz (1915 - 2002)
[21] Henri Poincarè (1854 - 1912)

Per quanto riguarda la Statistica, negli anni 1850 vennero insegnati alcuni elementi all'Istituto Nazionale Agronomico all'interno di un corso sulle tavole di mortalità. Nel 1854 all'interno del Conservatorio Nazionale di Arti e Mestieri fu istituito un corso di economia industriale e statistica; nacquero altri corsi, ma in generale ebbero vita breve. Nel 1883 la *Sociètè de Statistique de Paris* organizzò delle conferenze che furono rapidamente interrotte nel 1885; nel 1892 ne furono organizzate 15 per il Ministero della Guerra. All'Istituto di Scienze Politiche Levasseur tenne nel 1884 un corso di Statistica e geografia economica. Tra il 1889 e il 1908 Laurent fece un corso di probabilità per attuari. Agli inizi degli anni 1890 Fernand Faure insegnò in un corso di Statistica alla Facoltà di Diritto di Bordeaux; nel 1892 egli diventò il titolare della cattedra di questo insegnamento fino al 1927. Nel 1930 furono crati due dottorati, uno in Scienze Economiche e l'altro in Economia Politica, nei quali il corso di statistica era obbligatorio per il primo anno e facoltativo per il secondo.
La svolta decisiva a questa situazione venne data nel 1922 da Borel[22] (51 anni), March[23] (63 anni) e Faure[24] (71 anni), tutti membri della Società di Statistica di Parigi. Essi permisero la creazione dell'Istituto di Statistica dell'Università di Parigi. Borel fu professore all'Istituto Normale Superiore e alla Facoltà di Scienze, March alla Facoltà di Statistica[25] e Faure alla Facoltà di Diritto; quest'ultimo si occupava anche della creazione di un istituto interfacoltario tra le Facoltà di Diritto, Scienze, Medicina e Lettere. Dopo la fine della Grande Guerra, March, che allora era il direttore della SGF, invitò lo statistico Henri Bunle ad andare a lavorare al Servizio di Statistica creato per l'Alemannia e l'Alsazia. Bunle, colpito dal livello di competenza degli statistici alemanni e stimolato all'insegnamento da Frèchet[26] e da Halbwachs[27], il primo per quanto riguarda le competenze sulle assicurazioni e il secondo sulla statistica, fu spinto da March a creare un istituto di statistica a Parigi.
Il corso cominciò nel 1924 - 25 e prese piede alla Facoltà di Diritto a partire dal 1928, all'interno dei locali dell'Istituto Poincarè. Questo istituto, allora, di-

[22] Èmile Borel (1871 - 1956)
[23] Lucien March (1859 - 1933)
[24] Fernand Faure (1853 - 1929)
[25] Statistique Gènèrale de la France (SGF)
[26] Maurice Frèchet (1878 - 1973)
[27] Maurice Halbwachs (1877 - 1945)

venne un luogo in cui far convivere i matematici e gli studiosi di fisica applicata, finanziato dalla Fondazione Rockfeller. Borel fu uno dei massimi esponenti in questa iniziativa; il suo intento era di creare una struttura che dava la possibilità ai fisici e ai matematici di incontrarsi, di scambiarsi i propri problemi e le proprie conoscenze, e anche di lavorare insieme a studiosi della cultura probabilistica.
All'interno dell'ISUP i corsi erano destinati alla formazione di studenti in quattro aree: la demografia e l'economia, il campo attuariale, le tecniche e le ricerche industriali, e la medicina. Più precisamente l'istituto, che mirava a insegnare il metodo statistico e le sue applicazioni sia dal punto di vista teorico che pratico, aveva come punti fondamentali:

- i metodi statistici e le applicazioni della matematica alla statistica, alla finanza e all'economia politica;
- la demografia, la biometria[28], l'igiene pubblica e l'istruzione;
- l'assistenza, la previsione e l'assicurazione;
- l'industria, il commercio, l'agricoltura, i trasporti, la banca e il credito;
- le finanze pubbliche.

I corsi erano distribuiti in due anni. Il programma degli studi prevedeva quattro corsi il primo anno; due corsi erano obbligatori, quello di statistica descrittiva (condotto da March[29] fino al 1939) e quello di statistica matematica (tenuto da Darmois). Gli altri due corsi erano a scelta tra quello di demografia e statistica sanitaria, di teoria di assicurazioni sulla vita, operazioni finanziarie, elementi di economia politica matematica, applicazioni del metodo statistico alla scienza degli affari, legislazione e igiene e assistenza sociale (gli ultimi due corsi non vennero mai fatti partire). Nel secondo anno gli studenti dovevano seguire due corsi a scelta e scrivere una tesi.

[28] È la disciplina che studia le grandezze biofisiche allo scopo di identificarne i meccanismi di funzionamento, di misurarne il valore e di indurre un comportamento desiderato in specifici sistemi tecnologici.

[29] Fu March a introdurre la statistica inglese di Galton e Pearson, una statistica matematica non probabilistica.

Nel 1924 - 25 ci furono 4 studenti iscritti, e una situazione simile si ebbe fino al 1930. Dal 1931 al 1937 si iscrissero 8 nuovi allievi per anno, mentre nel 1937 - 38 ci furono 15 nuovi iscritti.
Nel giro di 15 anni, fino al 1940, l'ISUP ebbe 100 laureati, di cui 47 Certificati di abilitazione (per un solo anno di studi), 7 Certificati superiori di studi statistici (per due anni di studi senza aver scritto una tesi) e 46 laureati all'Istituto di Statistica. Ma questi laureati non erano considerati all'interno di un diploma universitario per cui non avevano alcuna possibilità di intraprendere una carriera amministrativa in Francia.
I primi due direttori dell'istituto furono Lucien March e Michel Huber[30], entrambi già direttori della Statistica Generale della Francia; Darmois[31] fu direttore dal 1945 fino alla sua morte, nel 1960, quando fu sostituito da Duguè[32] fino al 1980.
Negli anni 1922 - 23 e 1923 - 24 Borel tenne lui stesso il primo corso di Metodi statistici basato sugli elementi base della statistica matematica; in seguito chiese a Darmois, che era professore a Nancy ed era stato suo allievo all'Istituto Normale Superiore, di condurre il corso.
Nel 1925 - 26 il corso di Darmois comprendeva 16 lezioni:

1. Caratteri statistici. Associazioni.
2. Variabili statistiche. Curve di frequenza.
3. Medie. Devianze. Correlazione. Covarianza.
4. Applicazioni.
5. Correlazioni multiple.
6. Applicazioni.
7. Stabilità di frequenze. Probabilità. Principi fondamentali.
8. Prove ripetute. Teorema di Bernoulli. Legge di Laplace.
9. Applicazioni.

[30]Michel Huber (1875 - 1947)
[31]Georges Darmois (1888 - 1960)
[32]Daniel Duguè (1912 - 1987)

10. Poligoni asimmetrici. Legge dei piccoli numeri.

11. Registrazione dei dati statistici. Dispersione. Schema delle urne.

12. Deviazione di osservazioni.

Questo primo piano di lezioni si evolverà abbastanza rapidamente verso un'inversione di priorità tra i modelli statistici e i modelli probabilistici e presenterà un "indurimento" matematico di tale corso.
Nel 1928 Darmois pubblicò *Statistique Mathèmatique*; i primi 3 capitoli sono basati sui fondamenti della teoria delle probabilità e nel quarto si introduce la descrizione delle osservazioni e il loro trattamento probabilistico.
Dal 1925 al 1938 è notevole osservare come cambiò il piano dei corsi; nell'ultimo anno esso comprendeva 20 lezioni:

1, 2, 3 Statistica, stabilità di frequenze. Probabilità. Teoremi fondamentali.

4, 5, 6 Variabili aleatorie, grandezze aleatorie. Medie. Speranze Matematiche. Metodo di Tchebichef per la legge dei grandi numeri.

7, 8 Prove ripetute. Legge di Laplace. Legge di Poisson per le piccole probabilità.

9, 10 Schema delle urne. Eventi indipendenti. Eventi dipendenti.

11, 12 Poligoni di frequenza. Curva di frequenza. Rappresentazioni analitiche.

13, 14 Correlazione. Retta di regressione. Coefficienti di correlazione, di contingenza. Correlazione totale e parziale. Correlazione dei ranghi.

15, 16 Metodi di stima.

19, 20 Coefficienti di approssimazione per le funzioni. Dipendenza delle variabili aleatorie e coefficienti di correlazione. Conclusioni generali.

A partire dal 1945 Darmois, che divenne il nuovo direttore, rese l'ISUP un luogo eccezionale per la diffusione di nuove applicazioni matematiche, grazie alla sua vitalità e alla sua chiarezza .
Nel 1952 nacque il Centro della Formazione per le Applicazioni Industriali della Statistica che organizzava quattro tipi di stages: controllo statistico della

qualità, formazione ai metodi statistici, tecniche statistiche per l'ingegneria, economia della ditta. Dal 1952 al 1959 questo centro formò 1079 stagisti. Negli anni 1950 entrarono all'ISUP circa 15 studenti del Politecnico e una dozzina di allievi dell'Istituto di Applicazione del Servizio Nazionale della Statistica; gli studenti laureati ogni anno erano tra i 40 e i 50. Negli anni 60, quando ormai l'ENSAE[33] formava i futuri professionisti dell'INSEE[34], gli studenti erano più di cinquanta per anno.

All'ENSAE i corsi derivavano da quelli dell'ISUP, come quello del Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica, Metodi statistici, Demografia matematica e descrittiva, Statistica agricola, economia e sociale; altri corsi erano Teoria e pratica dei sondaggi, Pratica statistica e Organizzazione dei servizi statistici in Francia e all'estero.

A metà degli anni 50 Georges Thèodule Guilbaud creò, all'interno dell'ISUP, il Dipartimento Universitario di Ricerca Operativa. Nel 1955 Febvre[35] creò il Centro di Matematica Sociale e di Statistica. Nel 1953 Daniel Schwartz fondò un corso per gli studenti di medicina che dieci anni più tardi venne chiamato CESAM.

Nel periodo 1945 - 1960 molti centri di formazione come l'Istituto di Amministrazione delle Imprese, il Centro di Studi di Programmi Economici e l'Istituto di Perfezionamento del Metodo di Controllo delle Gestioni integrarono nei loro programmi alcuni corsi di statistica.

---

[33] Ècole National de la Statistique et de l'Administration

[34] Institut National de la Statistique et des Etudes Economiques

[35] Lucien Febvre (1878 - 1956)

Capitolo 2

Il pensiero probabilistico

Lo studio e l'analisi del pensiero probabilistico, in particolare il suo sviluppo nei bambini e successivamente nei ragazzi, è un argomento di grande interesse. Questo argomento di studio fu centrale nella ricerca di Efraim Fischbein (1920 - 1988), che si basò soprattutto sul ruolo dell'intuizione nel pensiero matematico e scientifico, sullo sviluppo del pensiero probabilistico e sull'influenza che l'istruzione scolastica ha su quest'ultimo.

Per studiare l'"apprendimento probabilistico"[1] si utilizzano situazioni sperimentali in cui una persona si trova davanti a una successione di prove per ognuna delle quali è prevista una scelta su due possibili esiti[2] e, ad ogni prova, è richiesto all'individuo di prevedere l'evento prima che esso sia mostrato. Generalmente la sequenza è determinata casualmente da alcuni processi con la probabilità di ogni evento fissata. In questa circostanza viene osservato un fenomeno chiamato "probability matching", dove le frequenze relative delle previsioni del soggetto, dopo una serie di prove, tendono ad approssimare la probabilità del rispettivo evento.[3]

Il "probability matching" viene osservato a partire dai bambini di 3 - 4 anni e generalmente sembra stabilirsi nei bambini di 6 anni.

Fischbein suggerì che quando le probabilità delle previsioni approssimano le

[1]Probability learning (E. Fischbein).

[2]Per esempio: una pallina estratta dall'interno di un'urna può essere nera o bianca.

[3]Per esempio: un'urna contiene 10 palline di cui 7 nere e 3 bianche; in questa circostanza la probabilità che la previsione sia corretta è $0.7^2 + 0.3^2 = 0.58$. Data una sequenza casuale, la strategia ottimale è quella di prevedere l'uscita della pallina con probabilità maggiore ad ogni evento. Questa strategia si chiama "massimizzazione".

probabilità degli eventi allora è possibile presumere che il soggetto in questione possieda una particolare intuizione per quanto riguarda la probabilità. In particolare, il "probability matching" è la manifestazione di una particolare intuizione, quella della frequenza relativa.
Ci sono comunque diversi casi in cui il probability matching non sembra richiedere la presenza di un'intuizione riguardante la frequenza relativa; si può riscontrare, per esempio, in situazioni in cui la probabilità di un particolare evento cresce dopo che l'evento stesso si è già manifestato più volte. In altre situazioni invece il partecipante all'esperimento, basandosi su un piccolo numero di prove, pensa che ci sia un particolare schema che sta alla base della sequenza.
Il modello sperimentale dell'apprendimento della probabilità è fermamente radicato in metodologie comportamentali che mettono in risalto vari fenomeni; un esempio può essere la tendenza a prevedere, dopo che un evento si ripete più volte, un esito diverso da quest'ultimo. Un altro esempio può essere quello che vede gli effetti positivi dell'istruzione formale della probabilità nel senso che le risposte date dai bambini approssimano in maniera migliore la previsione rispetto al probability matching.

Un altro argomento di ruolo centrale è lo sviluppo concettuale delle idee di scelta e probabilità. Oltre al già citato Fischbein, anche Piaget[4] si occupò di studiare tale questione. Lo sviluppo del pensiero probabilistico è strettamente legato all'ambito generale dello sviluppo cognitivo e i concetti di incertezza si potenziano in contemporanea con le strutture operazionali logiche. La scoperta della scelta viene fatta gradualmente; riferendosi alle operazioni utilizzate nella sua crescita il bambino comprende la nozione di scelta che in seguito farà nascere in esso un sistema di probabilità.
È comunque necessario distinguere tra l'intuizione primaria[5] di scelta e il concetto di scelta; per Fischbein l'intuizione della scelta si presenta fin dalla giovane età ed è un'intuizione costruita giorno per giorno dall'esperienza del bambino. Bisogna distinguere tra il concetto di probabilità come un calcolo sugli eventi esplicito e corretto e l'intuizione di probabilità come una considerazione sogget-

[4] Jean Piaget (1896 - 1980).
[5] "Primary intuition".

tiva e globale riguardante le prove.
L'intuizione primaria comprende acquisizioni cognitive derivate dalla vita quotidiana del soggetto senza il bisogno di istruzioni sistematiche. Questa abilità verrà in seguito migliorata con l'educazione, dando istruzioni relative alla probabilità: se un bambino non è capace di risolvere un certo problema a una certa età, non si può decidere a priori che esso non sia capace di acquisire una certa abilità dopo che gli vengano date istruzioni adeguate. L'intuizione secondaria[6] invece comprende le acquisizioni che hanno tutte le caratteristiche dell'intuizione ma sono costruite a partire da un'educazione scientifica, che avviene soprattutto a scuola. Perciò i bambini hanno bisogno di esperienze concrete che dimostrino le dinamiche dei fenomeni stocastici e che rendano familiari i concetti di previsione, esperimenti e verifiche, scelta e necessità, leggi statistiche, concetto di intuizione, ecc.
Inoltre l'educazione scolastica deve fornire agli alunni dei modelli generativi[7] che rappresentano un'intera classe di situazioni collegate tra loro e che facilmente si prestano ad adattarsi a nuove situazioni simili. Uno di questi modelli è il grafo ad albero, che aiuta l'acquisizione del calcolo combinatorio nei ragazzi.
Un problema di grande rilevanza nell'insegnamento della probabilità è l'influenza culturale che subiscono i ragazzi: l'ambiente che li circonda (affiancato dall'istruzione in fisica, chimica, matematica e anche storia e geografia) spinge gli studenti alla ricerca di relazioni causali che giustificano spiegazioni univoche. Questo spiega il perchè l'intuizione del concetto di scelta rimane esterno allo sviluppo intellettuale e non beneficia sufficientemente dello sviluppo degli schemi operazionali del pensiero, che vengono sfruttati univocamente per il ragionamento deduttivo.

[6]"Secondary intuition".
[7]"Generative models".

2.1 Il ruolo dell'intuizione

Per quanto riguarda la comprensione del pensiero probabilistico bisogna mettere in risalto due aspetti di particolare importanza.
Il primo riguarda la concezione delle cognizioni intuitive come adattamenti all'ambiente circostante e modellate dall'esperienza.
Spesso infatti le intuizioni che interessano le situazioni probabilistiche conducono a ragionamenti sbagliati. Questo può essere dovuto sia alla limitazione dell'esperienza umana sia alle intuizioni che si hanno in attività pratiche che possono creare incomprensioni quando vengono tradotte in concetti astratti. Infatti il processo di comprensione del pensiero probabilistico deve essere una mescolanza di situazioni pratiche e di strutture matematiche che spesso nella vita quotidiana non avviene. Fa eccezione l'esperienza che i bambini e gli adulti possono fare con i giochi di fortuna, come il gioco d'azzardo, nei quali il legame tra le situazioni e le strutture probabilistiche che li caratterizzano è maggiormente diretto. Nonostante questo, bambini e ragazzi con una considerevole esperienza nel gioco coi dadi (e altri giochi) non riescono ad astrarre facilmente i principi della probabilità dall'esperienza.
Parlando a livello generale, possiamo considerare un grande risultato il capire come le decisioni razionali sono legate all'esperienza, in particolare all'esperienza ripetuta; specialmente risulta controintuitivo comprendere che un giudizio probabilistico può essere valutato indipendentemente dall'evento accaduto. Per esempio, è difficile convincere un giocatore principiante del bridge che la mano appena giocata è sbagliata anche se risultata poi vincente, oppure che la mano che ha ottenuto un risultato negativo è comunque giusta. In questi casi riuscire a convincere il soggetto in questione di certe conclusioni basandosi sull'evidenza empirica richiede la comprensione del concetto di una classe di equivalenza che contiene situazioni ripetute molte volte, in modo che alla lunga sia possibile osservare un certo schema. Nonostante questo l'interpretazione dei risultati può comunque condurre verso numerosi errori; in particolare è evidente la tendenza ad attribuire probabilità più alte ad eventi che sono più facilmente richiamabili alla memoria, per ragioni affettive e cognitive.
Il secondo aspetto della questione deriva sia dalla ricerca cognitiva che dalla pratica educazionale e spiega come l'intuizione probabilistica differisca dall'in-

tuizione che si ha in altre aree matematiche e scientifiche. Questo è dovuto dal fatto che in generale il substrato intuitivo relativo alla probabilità è minore rispetto agli altri; per esempio, un bambino sviluppa da subito un'intuizione aritmetica avendo a che fare ogni giorno col calcolo di quantità. Analogamente con la geometria: possediamo una naturale predisposizione geometrica di gran lunga maggiore rispetto a quella probabilistica. E per quanto il calcolo 2+2 ottiene una risposta molto velocemente, la stessa cosa non vale per la probabilità; per esempio, la piccola probabilità che una persona ha di vincere al superenalotto si contrappone al fatto che qualcuno vinca ogni settimana.

2.2 Il ruolo dell'istruzione

Nei suoi studi, Fischbein analizzò anche come l'insegnamento della probabilità possa coinvolgere l'intuizione probabilistica. In particolare sottopose alcuni ragazzi dai 10 ai 13 anni (livello 5 - 7) in Israele a 12 lezioni sulla probabilità, che comprendevano il concetto di evento certo, possibile ed impossibile, eventi in situazioni sperimentali, il concetto di scelta, la probabilità e la frequenza relativa, eventi semplici e composti e la loro probabilità. Sebbene i concetti siano tutt'altro che semplici per gli studenti del quinto livello, circa il $60-70\%$ degli allievi del livello 6 e l'$80-90\%$ del livello 7 riuscì a comprendere e applicare molti di essi. Ulteriori dati furono raccolti da classi che non erano state sottoposte a tali lezioni.
Confrontando i risultati ottenuti, Fischbein osservò che l'istruzione data ai ragazzi aveva avuto effetti benefici su alcune misconcezioni intuitive, ma anche effetti dannosi in altri campi. In particolare, le classi sottoposte alle lezioni avevano ottenuto migliori risultati per quanto riguarda il ragionamento sulle proporzioni per comparare le probabilità. Da questo si può dedurre che il pensiero probabilistico e il ragionamento sulla proporzioni sono basati su distinti schemi mentali.
La conclusione più ovvia da trarre dallo studio appena considerato è che l'istruzione nella probabilità non produce automaticamente un maggiore impatto nell'intuizione e nel pensiero probabilistico. Più precisamente, si nota la complessità dell'interazione tra intuizione, sviluppo logico ed effetti dell'istruzione formale.
Infine, si possono individuare tre componenti principali nel costruire una strategia pedagogica che tiene conto dell'intuizione. In primo luogo, le intuizioni primarie devono essere identificate come parti di un'investigazione sistematica psico - didattica; per gli studenti è necessario imparare ad analizzare e formalizzare le proprie intuizioni primarie. È chiaro che è estremamente difficile cambiare le intuizioni primarie o adattarle al di fuori del ristretto campo di applicazione iniziale.
In secondo luogo è necessario stabilire intuizioni secondarie attraverso l'istruzione. Gli studenti devono essere posti davanti a situazioni che offrano loro l'opportunità di essere la parte attiva nel calcolo delle probabilità, nella previsione di eventi in situazioni incerte, in momenti che prevedono l'uso di dadi, monete e

palline per osservare, registrare e valutare i set di dati che possono ottenere.
Se una nozione non è rappresentata in maniera intuitiva in generale si tende a produrre un modello che può sostituire la nozione stessa nel processo di ragionamento. Questo si chiama modello intuitivo; esso può essere applicato tacitamente o consapevolmente e può essere generato in maniera indipendente o attraverso l'istruzione. Per esempio, come citato in precedenza, il grafo ad albero è uno strumento fondamentale per tradurre concetti astratti in rappresentazioni concrete, ma l'intuitività del diagramma non è naturale; l'uso di esso comporta la creazione di una serie di convenzioni che specificano i significati delle immagini usate.
Infine, le intuizioni primarie non spariscono; anche se vengono minate dall'istruzione formale, continuano a influenzare i giudizi di nascosto[8]. Fischbein chiama questo fenomento "dilemma pedagogico", intendendo i modelli intuitivi di validità limitata necessari per rendere accessibili alcuni concetti matematici che in seguito diventano fortemente integrati nel pensiero del soggetto. Poichè questo dilemma non può essere evitato, deve essere affrontato con un'appropriata strategia didattica. In particolare, riconoscendo il potenziale effetto demoralizzante su uno studente che scopre che ciò che aveva considerato evidente non è invece reale, Fischbein consiglia di chiarire all'alunno il prima possibile che questo è un fenomeno naturale.

[8]Per esempio, uno studente può capire a livello logico che, lanciando una moneta diverse volte, ogni uscita ha la stessa probabilità di ottenere testa o croce; tuttavia intuitivamente penserà che dopo l'uscita di testa 3 - 4 volte di fila, c'è una maggiore possibilità di ottenere testa nel lancio successivo.

Capitolo 3

L'insegnamento della probabilità nella scuola secondaria di secondo grado

3.1 Le Indicazioni Nazionali dei Licei

Esaminando le recenti Indicazioni Nazionali per l'insegnamento della matematica nei vari livelli scolastici compare, alla pari di aritmetica, algebra e geometria, la sezione di "Dati e Previsioni", l'area che si riferisce alla probabilità e alla statistica. Infatti nella società dell'informazione queste due materie sono diventate fondamentali nella vita quotidiana di ogni cittadino.
Spesso l'insegnamento e la comprensione del concetti di probabilità risulta essere ostico sia dal punto di vista degli insegnanti che da quello degli alunni; le difficoltà sono dovute a vari motivi, tra i quali possono essere citati:

- gli insegnamenti universitari della statistica e della probabilità per la formazione degli insegnanti non sono molto diffusi sul territorio nazionale;

- non sono state realizzate recentemente azioni globali per l'aggiornamento o la formazione degli insegnanti in servizio al momento dell'introduzione di nuovi contenuti;

- pur esistendo in rete delle proposte di ottimo livello presentate da gruppi di lavoro sulla didattica della matematica, il loro impatto appare ancora limitato.

In particolare, ho analizzato le Indicazioni Nazionali dei Licei; per quanto riguarda la parte relativa al primo biennio esse recitano così:

> "Lo studente sarà in grado di rappresentare e analizzare in diversi modi (anche utilizzando stumenti informatici) un insieme di dati, scegliendo le rappresentazioni più idonee. Saprà distinguere tra caratteri qualitativi, quantitativi discreti e quantitativi continui, operare con distribuzioni di frequenze e rappresentarle. Saranno studiate le definizioni e le proprietà dei valori medi e delle misure di variabilità, nonchè l'uso di strumenti di calcolo (calcolatrice, foglio di calcolo) per analizzare raccolte di dati e serie statistiche. Lo studio sarà scolto il più possibile in collegamento con le altre discipline anche in ambiti entro cui i dati siano raccolti direttamente dagli studenti.
> Lo studente sarà in grado di ricavare semplici inferenze dai diagrammi statistici.
> Egli apprenderà la nozione di probabilità, con esempi tratti da contesti classici e con l'introduzione di nozioni di statistica.
> Sarà appronfondito in modo rigoroso il concetto di modello matematico, distinguendone la specificità concettuale e metodica rispetto all'approccio della fisica classica."

Per quanto riguarda il secondo biennio leggiamo:

> "Lo studente, in ambiti via via più complessi, il cui studio sarà sviluppato il più possibile in collegamento con le altre discipline e in cui i dati potranno essere raccolti direttamente dali studenti, apprenderà a far uso delle distribuzioni doppie condizionate e marginali, dei concetti di deviazione standard, dipendenza, correlazione e regressione, e di campione.
> Studierà la probabilità condizionata e composta, la formula di Bayes e le sue applicazioni, nonchè gli elementi base del calcolo combinatorio.
> In relazione con le nuove conoscenze acquisite approfondirà il concetto di

> modello matematico."

Infine, per il quinto anno:

> "Lo studente apprenderà le caratteristiche di alcune distribuzioni discrete e continue di probabilità (come la distribuzione binomiale, la distribuzione normale, la distribuzione di Poisson).
> In relazione con le nuove conoscenze acquisite, anche nell'ambito delle relazioni della matematica con le altre discipline, lo studente approfondirà in concetto di modello matematico e svilupperà la capacità di costruirne e analizzarne esempi."

Questo è quanto le Indicazioni Nazionali dicono circa gli obiettivi specifici di apprendimento di tale argomento.
Per quanto riguarda gli assi culturali, essi non danno alcuna indicazione sulla conoscenza della probabilità. Citando quanto riporta la documentazione relativa ad essi, "l'asse matematico ha l'obiettivo di far acquisire allo studente saperi e competenze che lo pongano nelle condizioni di possedere una corretta capacità di giudizio e di sapersi orientare consapevolmente nei diversi contesti del mondo contemporaneo". Nonostante questo nella lista che segue questa introduzione non viene riportata alcuna nozione nè di statistica nè tantomeno di probabilità.

3.2 Le Prove Invalsi

In particolare nella mia ricerca mi sono concentrata su questa sezione perchè alla fine del loro anno di studi, gli studenti delle classi seconde nella scuola secondaria di secondo grado vengono sottoposti alle Prove Invalsi. Queste prove sono lo strumento utilizzato per rilevare e misurare periodicamente il livello di apprendimento degli studenti italiani. Gli standard delle prove sono definiti a partire dalle Indicazioni per il curricolo del Ministero. Attualmente si prevede la somministrazione di prove oggettive di italiano e matematica, discipline scelte anche per la loro valenza trasversale. Il questionario è anonimo.
L'obiettivo principale delle Prove Invalsi è quello di monitorare il Sistema nazionale

d'Istruzione e confrontarlo con le altre realtà comunitarie ed europee. In particolare servono:

- a ciascuno studente, perchè è un diritto conoscere il livello raggiunto di competenze;
- alle scolastiche, per l'analisi della situazione al fine di mettere a punto eventuali strategie di miglioramento;
- al Ministero dell'Istruzione, per operare investimenti e scelte politiche.

Capitolo 4

L'intervento in 2Bs

4.1 Descrizione del progetto

Il progetto a cui ho sottoposto la classe 2Bs riguarda l'introduzione della probabilità condizionata. Come abbiamo potuto osservare dalle Indicazioni Nazionali, questo argomento viene normalmente trattato nel secondo biennio della scuola secondaria di secondo grado.
Tuttavia, alcune domande delle Prove Invalsi propongono quesiti che possono essere risolti con l'utilizzo della probabilità condizionata e dei teoremi che la riguardano. Ovviamente ci sono strade diverse per trovarne la soluzione, ma dai dati raccolti a livello nazionale si può osservare che la comprensione degli alunni su certi argomenti non è affatto completa.
In particolare, i quesiti di cui parlo sono il D6 del livello 10 dell'anno 2012 e il D11 del livello 10 dell'anno 2013. Alla fine del ciclo delle lezioni ho chiesto agli studenti di risolverli per osservare se una spiegazione sulla probabilità condizionata può effettivamente portare a prestazioni migliori. Un altro obiettivo della mia ricerca è studiare se concretamente un'anticipazione della spiegazione su tale argomento può essere compresa dagli alunni di una seconda liceo nonostante sia indicata per gli anni successivi.
Ho anche preso ispirazione del sito "Risorse per Docenti", che si propone di dare un supporto all'implementazione delle Indicazioni Nazionali attraverso progetti che promuovono lo sviluppo professionale degli insegnanti. All'interno della categoria m@t.abel si ritrovano le classi delle Indicazioni Nazionali (Numeri,

Geometria, Relazioni e Funzioni, Dati e Previsioni). In quest'ultima si trova un'unità didattica dal titolo "Qual è la probabilità di... sapendo che... " che propone un'introduzione della probabilità condizionata nella scuola secondaria di secondo grado al I biennio.

4.2 Descrizione della classe

Il mio progetto è stata condotto all'interno del Liceo di Faenza, in particolare in 2Bs. La professoressa di matematica di riferimento è Angela Drei.
La classe è composta da 25 alunni.
La classe ha cambiato insegnante all'inizio della seconda; è composta da alunni studiosi, però anche superficiali e molto preoccupati della valutazione. Dalla mia esperienza in classe e dalle opinioni della professoressa Drei, alcuni di essi hanno difficoltà nel calcolo algebrico, in diversi faticano nel fare le dimostrazioni di geometria; inoltre alcuni fanno fatica a riconoscere analogie con concetti noti. Per diversi alunni lo studio è mnemonico.
Vi è un ragazzo molto interessato e capace, ma la sua presenza non riesce a stimolare molto i compagni; alcune ragazze sono interessate ma molto timorose.

4.3 Prerequisiti e analisi del progetto

Gli alunni erano già stati sottoposti a lezioni introduttive sulla probabilità da parte dell'insegnante; i prerequisiti che essi possedevano sono:

- definizione classica di probabilità;
- assiomi di Kolmogorov;
- probabilità dell'unione e dell'intersezione di due eventi;
- accenni al calcolo combinatorio (senza entrare nei dettagli).

Durante queste lezioni venivano poi sottoposti ad esercizi che venivano risolti insieme alla fine dell'ora.
Il mio intervento si è svolto durante 4 ore di incontri[1] durante i quali sono stati

[1] Ogni lezione è da considerarsi da 60 minuti effettivi.

affrontati anche degli esempi proposti come esercizi da risolvere inerenti agli argomenti trattati durante la lezione. Ogni lezione è stata suddivisa in due parti: nei primi 30 minuti circa spiegavo agli studenti l'argomento, consegnando loro una scheda che comprendeva la teoria e qualche esempio in aiuto alla spiegazione orale. Dopo la teoria venivano risolti alcuni esercizi alla lavagna o direttamente da me o da alcuni ragazzi.

La seconda parte prevedeva la risoluzione di 3 esercizi in maniera autonoma, ad eccezione di una coppia di studenti che li svolgevano insieme mentre venivano ripresi da una videocamera.

Durante l'ultima lezione ho sottoposto la classe al problema di Monty Hall (vedi paragrafo 4.7) e in seguito ho somministrato una piccola prova comprendente tre quesiti delle Prove Invalsi degli anni 2011, 2012 e 2013, per osservare se i nuovi argomenti trattati potessero essere utili nella risoluzione di tali esercizi.

4.4 Il primo intervento (22 - 3 - 2014)

Nella prima lezione gli alunni presenti sono stati 23; l'ora è iniziata con la presentazione del progetto a cui i ragazzi sarebbero stati sottoposti. Inizialmente ho fatto un breve ripasso della definizione classica di probabilità e degli assiomi che la regolano. La lezione poi ha previsto l'introduzione alla probabilità condizionata. Ho dato loro la definizione e qualche semplice esempio, chiarendo che tale probabilità esprime una sorta di correzione delle aspettative di un evento, correzione dettata dal fatto che si verifichi un altro evento in precedenza.
Ho fatto notare agli alunni che la probabilità condizionata a volte può coincidere con la probabilità dell'evento stesso e altre no. L'esempio che poi è stato citato (il primo nella scheda) riporta un caso in cui la probabilità condizionata e quella non condizionata sono diverse.
In seguito ho introdotto il Teorema della Probabilità Condizionata, sincerandomi che gli alunni ricordassero la definizione e le possibili applicazioni della probabilità dell'intersezione di due eventi. L'esempio che poi ho proposto loro (il secondo riportato sulla scheda di teoria) ha lasciato gli alunni un po' confusi; essi mi hanno chiesto di fare nuovi esempi per una comprensione più chiara dell'argomento.
Di seguito riporto la scheda di teoria consegnata ai ragazzi:

La probabilità condizionata

Definizione: La probabilità dell'evento A **condizionata** all'evento aleatorio B, che si indica con $P(A|B)$, è la probabilità che si verifichi l'evento A nell'ipotesi che si verifichi l'evento B.

Esempio: Si lancia un dado. Qual è la probabilità che esca il numero 4, nell'ipotesi che esca un numero pari?

Gli eventi in cosiderazione sono:

$$A\text{=uscita del numero 4} \qquad B\text{=uscita di un numero pari.}$$

Calcoliamo la probabilità $P(A|B)$. In questo caso lo spazio degli eventi possibili è condizionato dall'evento che esca un numero pari, perciò esso è $\{2, 4, 6\}$. Quindi gli eventi possibili sono 3 e di essi solo uno è favorevole. Applichiamo la definizione classica di probabilità e otteniamo:

$$P(A|B) = \frac{1}{3}.$$

NB: Senza porre la condizione dell'uscita di un numero pari, la probabilità dell'evento A sarebbe $P(A) = \frac{1}{6}$.

Teorema (della probabilità condizionata): Siano A e B due eventi con $P(A), P(B) > 0$. Allora

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Esempio: Si lanciano due dadi. Qual è la probabilità che la somma dei punti sulle due facce sia 5, sapendo che su una di esse è uscito 2?
Consideriamo gli eventi:

$$A\text{=la somma dei punti è 5} \qquad B\text{=in un dado è uscito 2.}$$

Calcoliamo la probabilità $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.
La probabilità $P(A \cap B)$ equivale all'evento "in un dado è uscito 2 e la somma dei punti è 5". Su 36 eventi possibili, solo 2 sono favorevoli (il caso in cui sul primo dado esca 2 e sul secondo esca 3, e viceversa). Perciò $P(A \cap B) = \frac{2}{36}$.
La probabilità dell'uscita del 2 in almeno un dado è invece $P(B) = \frac{11}{36}$.
Perciò

$$P(A|B) = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{2}{11}.$$

Nella seconda mezz'ora di lezione gli alunni sono stati sottoposti a tre esercizi per verificare il livello di apprendimento degli argomenti appena spiegati. Di seguito, gli esercizi proposti con relativi risultati ottenuti:

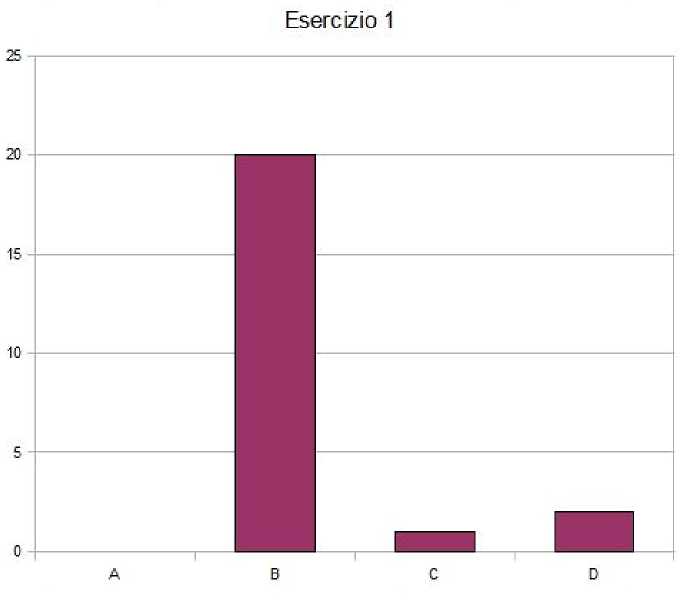
Esercizio 1:

Si estrae una carta da un mazzo di 40. Qual è la probabilità di estrarre una figura nell'ipotesi che sia stata estratta una carta di bastoni?

- ☐ $\frac{3}{13}$
- ☐ $\frac{3}{10}$
- ☐ $\frac{11}{40}$
- ☐ $\frac{3}{40}$

Ora calcola la probabilità che la carta estratta sia una figura senza alcuna ipotesi. Cosa osservi?

La risposta corretta è la lettera B. Per risolvere tale esercizio basta applicare la definizione classica di probabilità; in questo caso i casi possibili sono 10 (numero di carte di bastoni) e i favorevoli sono 3 (numero di figure). La domanda posta dopo serve per stimolare gli studenti nel ragionamento sul condizionamento dato dall'evento che la carta estratta sia di bastoni. Nell'esempio visto insieme agli alunni, infatti, la probabilità condizionata era diversa dalla probabilità dell'evento non condizionato, mentre in questo caso la situazione è diversa. I risultati ottenuti sono i seguenti:



I risultati riguardanti il quesito a risposta multipla sono soddisfacenti. Due alunni scelgono il distrattore D, l'unico che effettivamente poteva mettere in difficoltà se venivano considerate le tre figure di bastoni all'interno dell'intero mazzo da 40 carte. Come spiegazione Elena, una ragazza che risponde D, scrive: "Perchè per ogni seme ci sono 3 figure e le carte totali del mazzo sono 40".
Per quanto riguarda la domanda aperta, molti hanno riportato il calcolo della probabilità secondo la definizione classica. Un soggetto scrive:

$$\frac{12}{40} \rightarrow \frac{3 \text{ figure} \cdot 4 \text{ semi}}{40(\text{carte totali})}.$$

Nonostante questo non semplifica la frazione e quindi non è chiaro se abbia notato che la probabilità è la stessa.
Un altro alunno scrive: "$\frac{3}{10}$: i due risultati sono uguali. $P(A) = P(A|B)$."

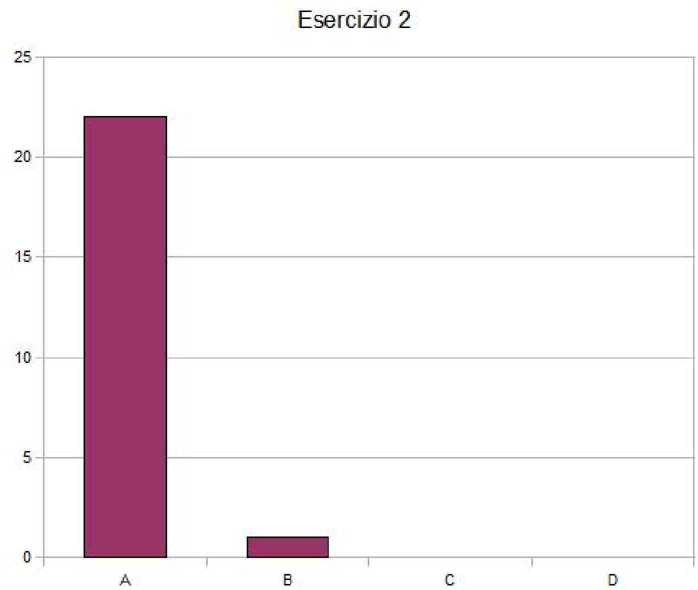
Esercizio 2:

In un'urna sono contenute 10 palline numerate da 1 a 10. Qual è la probabilità che sulla pallina estratta ci sia il numero 5 sapendo che sulla pallina c'è un numero dispari?

- ☐ $\frac{1}{5}$
- ☐ $\frac{1}{10}$
- ☐ $\frac{3}{5}$
- ☐ $\frac{3}{10}$

Dare una breve motivazione.

La risposta è $\frac{1}{5}$, la lettera A. Il ragionamento è analogo a quello dell'esercizio precedente e del primo esempio della scheda.
I risultati ottenuti sono i seguenti:



I risultati sono molto soddisfacenti. Anche per quanto riguarda la motivazione da dare, gli alunni dimostrano di aver capito che si restringe l'insieme degli eventi possibili e di essi si considera un evento favorevole.
Uno di essi scrive: "5 sono i numeri dispari $\{1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9\}$ e uno è favorevole, quindi ottengo $\frac{1}{5}$".
Giulia da la risposta corretta e motiva così: "Siccome se non fosse stato specificato che il numero è dispari le probabilità sarebbero state 1 su 10, avendo ora quest'informazione le possibilità *si dimezzano* a 1 su 5, cioè $\frac{1}{5}$". È evidente che Giulia ha fatto un ragionamento analogo a quello ascoltato durante la spiegazione ma non ha compreso che il fatto che la pallina sia dispari aumenta la

probabilità di ottenere il numero 5, tanto che scrive che le possibilità si dimezzano.

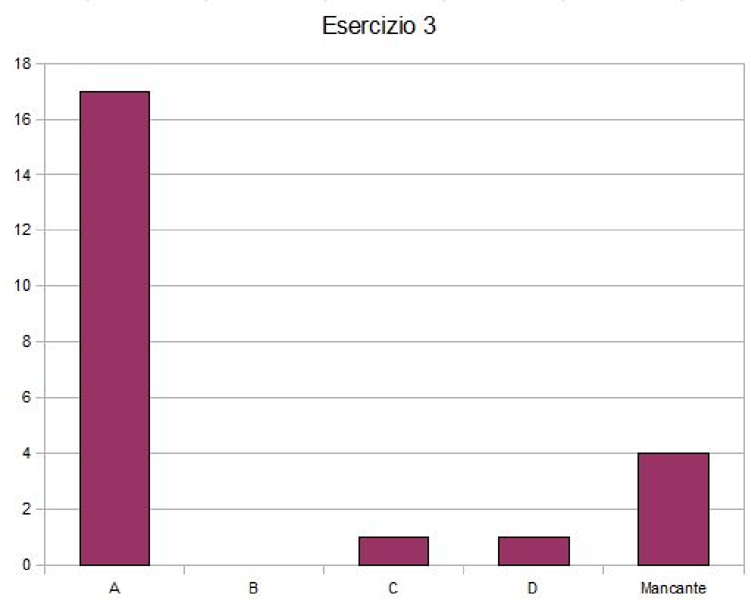
Esercizio 3:

Si estrae un numero al gioco della tombola (90 numeri da 1 a 90). Qual è la probabilità che venga estratto un numero pari nell'ipotesi che si estragga un numero maggiore di 60 (e diverso da 60)? Eseguire il calcolo tramite il teorema della probabilità condizionata.

- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ $\frac{7}{15}$
- ☐ $\frac{13}{45}$
- ☐ $\frac{15}{31}$

Riportare i passaggi.

La risposta corretta è la A. Gli studenti hanno risposto così:



La richiesta in questo esercizio è quella di risolverlo tramite il Teorema della Probabilità Condizionata. In 4 non rispondono; questo può essere dovuto al fatto che hanno impiegato molto tempo per eseguire i precedenti due esercizi. Escludo la possibilità che abbiano ritenuto difficile l'applicazione del teorema, considerando che come ausilio potevano servirsi della scheda di teoria.

I passaggi riportati sono in generale tutti simili e dicono:

"A = pari

B = maggiore di 60

$P(A \cap B) = \frac{15}{30}$

$P(B) = \frac{30}{90}$

$P(A|B) = \frac{15}{30} \cdot \frac{90}{30}$."

4.5 Il secondo intervento (25 - 3 - 2014)

La seconda lezione, che ha visto 25 alunni presenti, è cominciata con un breve ripasso di quella precedente. In questa ora ho deciso di affrontare l'argomento dei grafi ad albero; il mio obiettivo era quello di introdurre il Teorema di Bayes e mi sono confrontata con la professoressa Drei, la quale mi ha consigliato di spiegare prima tali diagrammi per una comprensione migliore (la professoressa stessa usa questa strada quando espone agli alunni tale teorema). Inoltre il grafo ad albero è anche citato da Fischbein nelle sue ricerche, considerato come utile nella comprensioni di calcoli della probabilità (Fischbein si concentrava soprattutto sul calcolo combinatorio, ma la rappresentazione ad albero è utile e rappresenta in maniera molto chiara molte situazioni di probabilità condizionata).

Come nella lezione precedente ho consegnato agli studenti una breve introduzione sui grafi ad albero, un esempio svolto e due esercizi da fare svolgere a due alunni alla lavagna. Ho spiegato che ad ogni ramo bisogna associare la sua probabilità; i rami più alti rappresentano gli eventi che condizionano la situazione proposta, mentre quelli più in basso gli eventi condizionati. Quindi, il prodotto di tali rami resituisce la probabilità dell'intersezione dei due eventi considerati; agli studenti ho anche dato una piccola dimostrazione scritta alla lavagna basandomi sul Teorema della Probabilità Condizionata visto nella lezione precedente.

Ho introdotto i due esercizi da svolgere alla lavagna volutamente con soli due rami di partenza; un esercizio con tre rami lo si può trovare nella scheda di esercizi che gli alunni hanno eseguito nell'ultima mezz'ora di lezione. Ho deciso di introdurre questo tipo di esercizio nella risoluzione individuale per vedere come si comportavano i ragazzi davanti a una situazione che ancora non avevano incontrato.

La reazione degli studenti davanti a questo argomento è stata molto positiva. Hanno ritenuto che il grafo ad albero sia una maniera molto semplice ed efficace per chiarificare la storia degli eventi e per mettere ordine davanti al testo dell'esercizio.

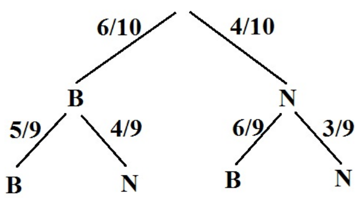
La scheda di teoria che ho proposto loro è la seguente:

I grafi ad albero

Il grafo ad albero (o albero degli eventi) è un diagramma ad albero che consente sia di rappresentare la sequenza dei possibili eventi sia di calcolare le probabilità successive delle combinazioni degli eventi. Il numero totale dei percorsi rappresenta il numero totale degli eventi possibili (ad ogni percorso è associata la probabilità corrispondente dell'evento).
La regola generale per "muoversi" su un grafo ad albero è:

- lungo i rami **si moltiplica** → "e" logica;
- in orizzontale **si addiziona** → "o" logica.

Esempio: Da un'urna contenente 6 palline bianche (B) e 4 nere (N) si toglie una pallina a caso. Che probabilità ho di estrarre una pallina nera?



Per calcolare la probabilità richiesta si considerano i rami che si concludono in una pallina nera. Si ottiene:

$$P(N) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{4}{15} + \frac{2}{15} = \frac{2}{5}.$$

Esercizio: In due sezioni si contano il numero di alunni che portano gli occhiali.
Nella sezione A 16 alunni portano gli occhiali e i restanti 5 no (per un totale di 21 alunni).
Nella sezione B 8 alunni portano gli occhiali e i restanti 15 no (per un totale di

23 alunni).
Qual è la probabilità che, scelto un alunno a caso, esso porti gli occhiali?

Esercizio: Si hanno due urne.
L'urna A contiene 9 palline rosse e 3 gialle.
L'urna B contiene 3 palline rosse e 5 gialle.
Viene lanciato un dado. Se esce 1, si pesca una pallina dall'urna A; altrimenti si pesca dall'urna B. Qual è la probabilità che esca una pallina rossa?

Di seguito, gli esercizi proposti nella seconda mezz'ora di lezione:

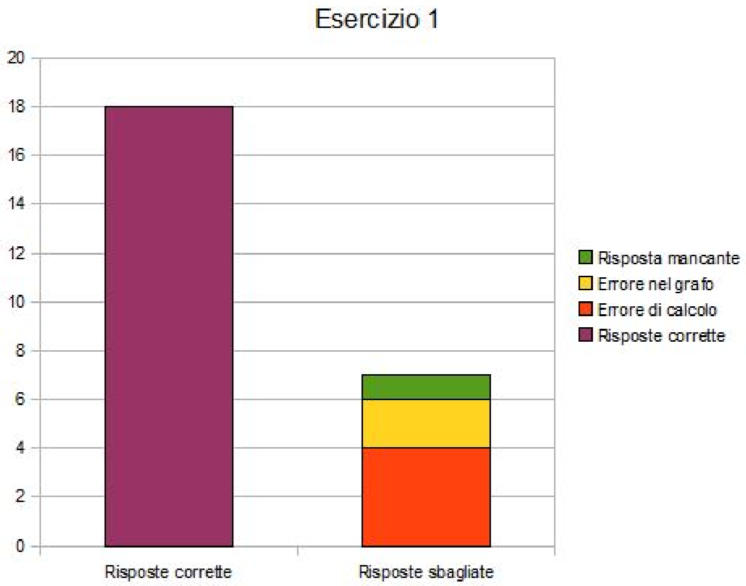
Esercizio 1:

> Un'urna contiene 3 palline bianche e 4 nere. Estraiamo una pallina: se esce nera la rimettiamo dentro insieme ad altre 2 nuove palline nere, se è bianca la teniamo fuori senza mettere dentro l'urna niente. Qual è la probabilità che la seconda pallina estratta sia nera?
> (Disegnare il diagramma ad albero e riportare i calcoli.)

Per risolvere l'esercizio bisogna considerare i rami che terminano con l'uscita di una pallina nera. Il calcolo da svolgere è quindi il seguente:

$$P(N) = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{4}{7} \cdot \frac{6}{9} = \frac{2}{7} \cdot \frac{8}{21} = \frac{2}{3}.$$

Di seguito l'istogramma delle risposte:



Osserviamo che il 72% della classe ha risposto in maniera corretta, mentre gran parte degli studenti che hanno sbagliato hanno fatto errori di calcolo.

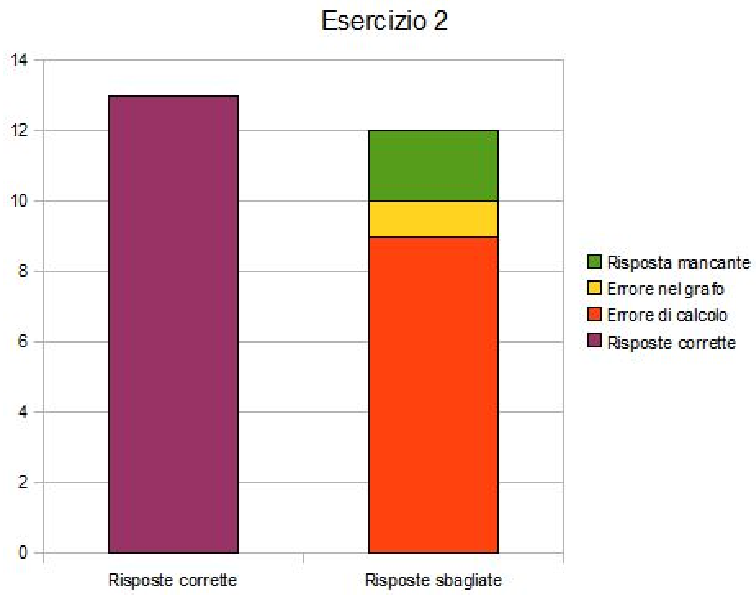
Esercizio 2:

Abbiamo due scatole di cioccolatini.
La scatola A ne contiene 16 al cioccolato al latte e 4 al cioccolato fondente.
La scatola B ne contiene 8 al cioccolato al latte e 4 al cioccolato fondente.
Lanciamo un dado; se esce o 1 o 2 prendiamo un cioccolatino dalla scatola A, altrimenti lo prendiamo dalla scatola B. Qual è la probabilità di ottenere un cioccolatino al latte?
(Disegnare il diagramma ad albero e riportare i calcoli.)

Per risolvere l'esercizio bisogna svolgere il seguente calcolo (considerando i rami che terminano con l'estrazione del cioccolatino al latte):

$$P(L) = \frac{2}{6} \cdot \frac{16}{20} + \frac{4}{6} \cdot \frac{8}{12} = \frac{4}{15} \cdot \frac{4}{9} = \frac{32}{45}.$$

I risultati ottenuti sono i seguenti:



Notiamo che in questo caso la percentuale delle risposte corrette si abbassa al 52%. In generale, anche nei casi in cui la risposta sbagliata nasce da un errore di calcolo, il disegno dei grafo è corretto.

Una particolare osservazione può essere posta nel caso di Elena: la ragazza ignora completamente il lancio del dado ed attribuisce all'estrazione dall'urna A la probabilità di $\frac{20}{32}$ (cioccolatini dell'urna A fratto cioccolatini totali), dall'urna B la probabilità di $\frac{12}{32}$. In seguito svolge il seguente calcolo:

$$\frac{20}{32} \cdot \frac{16}{20} \cdot 2 + \frac{12}{32} \cdot \frac{8}{12} \cdot 4 = 1 + 1 = 2.$$

Elena non si è posta il problema che la probabilità da lei ottenuta sia maggiore di 1. Ha cerchiato il risultato come ha fatto negli altri 2 esercizi prendendolo per giusto. È ovvio che ha affidato al calcolo completa fiducia per la risoluzione dell'esercizio, senza domandarsi se il valore trovato possa essere accettato.

Esercizio 3:

In una fabbrica ci sono 3 macchinari che producono in totale 100 confezioni di un prodotto.

Il macchinario A produce 40 confezioni, di cui 4 difettose.

Il macchinario B produce 32 confezioni, di cui 4 difettose.

Il macchinario C produce 28 confezioni, di cui 2 difettose.

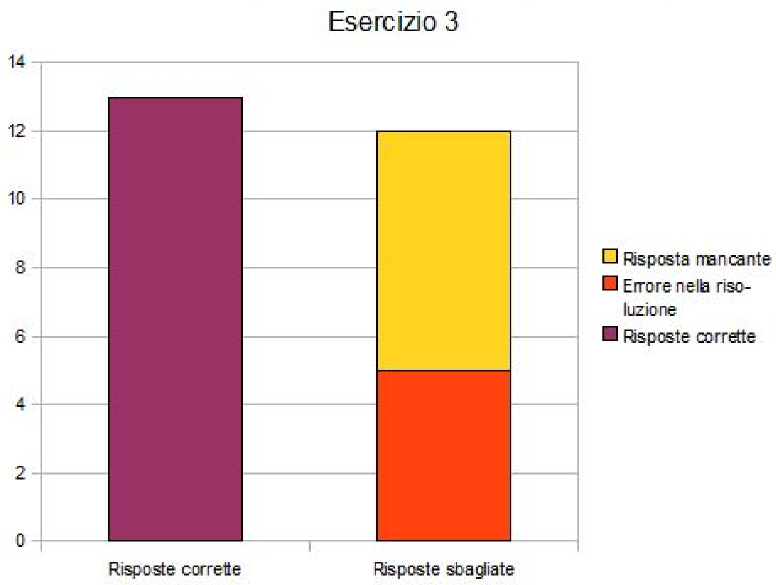
Qual è la probabilità che, prendendo un pezzo a caso, esso sia difettoso?

(Disegnare il diagramma ad albero e riportare i calcoli.)

Ho inserito questo esercizio per porre gli studenti davanti a una situazione che non avevano ancora affrontato, quella del grafo con 3 rami iniziali. Il risultato corretto dell'esercizio è:

$$P(D) = \frac{40}{100} \cdot \frac{4}{40} + \frac{32}{100} \cdot \frac{4}{32} + \frac{28}{100} \cdot \frac{2}{28}.$$

I risultati ottenuti sono i seguenti:



Anche in questo caso solo poco più della metà della classe da la risposta corretta. Il problema principale che ho riscontrato in questo esercizio è l'uso della proposizione "di cui". Molti ragazzi mi hanno contestato il testo dicendo che i conti non tornavano e che in tutto le macchine producevano 110 confezioni; infatti essi contavano le difettose come confezioni ulteriori rispetto a quelle prodotte dai macchinari. Questo errore ha portato molti studenti a sbagliare le frazioni indicanti le probabilità e quindi a trovare il risultato sbagliato.
Carlotta addirittura scrive che la probabilità è 100.

4.6 Il terzo intervento (29 - 3 - 2014)

Nella terza lezione gli alunni presenti sono stati 22. L'ora è cominciata con un breve ripasso di quella precedente, ricordando come ci si muove sui grafi ad albero e ripetendo ancora una volta il Teorema della Probabilità Condizionata. È partendo da quest'ultimo che ho dato una piccola dimostrazione della Formula di Bayes.
Questa formula è stata introdotta in maniera facilitata agli alunni; la generale prevede la conoscenza di certi simboli, per esempio quello di sommatoria, che gli studenti di seconda superiore ancora non conoscono. Essi invece hanno appreso durante l'anno precedente il concetto di partizione di un insieme, necessario per la comprensione del teorema, ma ho deciso di introdurre una forma semplificata dell'argomento per non creare troppa confusione.
Nella seconda parte della scheda teorica che ho consegnato alla classe ho presentato un esempio e ripassato insieme ai ragazzi il significato di ogni singolo ramo, in modo di ottenere una migliore comprensione del grafo. Ho fatto notare ai ragazzi che l'elemento al denominatore si ottiene proprio applicando la formula che avevamo studiato nella lezione precedente.
L'ultimo esercizio nella scheda invece è stato svolto da un ragazzo alla lavagna.
La scheda teorica è la seguente:

Il Teorema di Bayes

Riprendiamo il **Teorema della probabilità condizionata**: dati due eventi A e B con $P(A), P(B) > 0$, allora vale

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

da cui ricaviamo

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B).$$

Scambiando gli eventi, lo stesso teorema dice che

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)},$$

da cui ricaviamo

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A).$$

Per la proprietà transitiva possiamo dire che vale

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

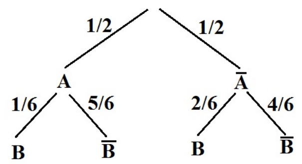
e ricavare le formule

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} \qquad P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}.$$

Esempio: Abbiamo due dadi. Il primo non è truccato, mentre il secondo ha il numero 1 su 4 facce e il numero 3 sulle restanti 2. Lancio uno dei due dadi ed esce 3. Qual è la probabilità di aver lanciato il primo dado?
Individuiamo 2 eventi:

A=lancio del primo dado B=esce il numero 3.

Dobbiamo calcolare la probabilità $P(A|B)$. Disegnamo il grafo ad albero della situazione:



e utilizziamo la formula:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6}} = \frac{1}{3}.$$

Esercizio: In una cittadina si nota che alle scuole elementari il 10% degli studenti porta gli occhiali, alle medie la percentuale sale al 25% mentre alle superiori è del 40%. Qual è la probabilità che, scelto un alunno con gli occhiali, esso frequenti le scuole elementari?

Come nelle altre lezioni, gli ultimi 30 minuti sono stati dedicati alla risoluzione di tre esercizi in maniera individuale. Gli esercizi proposti sono i seguenti:

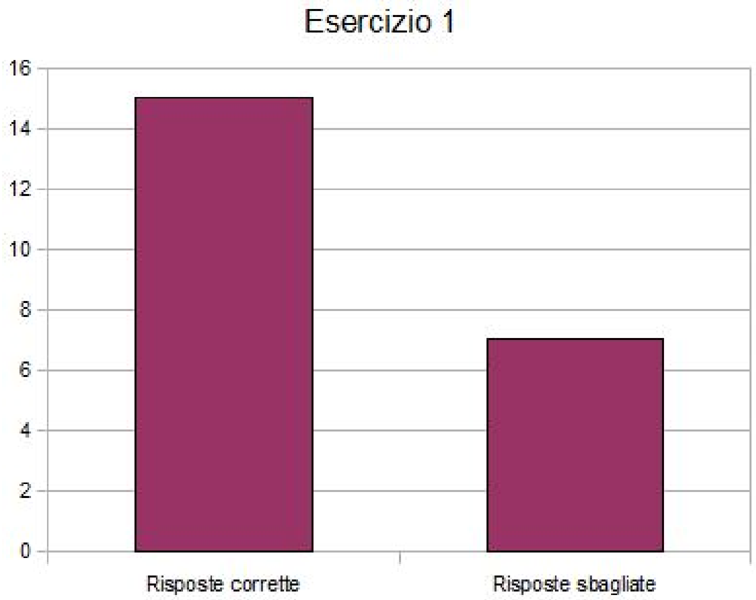
Esercizio 1:

> Uno studente deve sostenere un esame. Se studia passa con probabilità 99% ma se va in discoteca la sera prima la sua probabilità di promozione si riduce al 50%. Deciderà di andare in discoteca se esce testa lanciando una moneta. Se egli supera l'esame qual è la probabilità che sia andato a ballare?
> (Disegnare il grafo ad albero e riportare i calcoli.)

Chiamando E l'evento che lo stuente passi l'esame e D l'evento in cui sia andato in discoteca, il calcolo da compiere è:

$$P(D|E) = \frac{P(E|D) \cdot P(D)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{99}{100}} = \frac{50}{149}.$$

In questo esercizio si richiede semplicemente di applicare la formula vista nella spiegazione. L'abilità dei ragazzi viene vista prima nel disegnare in maniera adeguata il grafo, e in seguito nel riconoscere a quale ramo corrispondono le varie probabilità.
I risultati ottenuti sono i seguenti:



Circa il 70% degli alunni ha dato la risposta corretta. Le risposte sbagliate vedono principalmente la causa nell'applicazione della formula di Bayes. Si nota che per alcuni di loro non è ancora chiaro il concetto di probabilità condizionata; infatti quando calcolano la probabilità che ho chiamato P(E|D) alcuni la considerano già come il prodotto della stessa con la probabilità dell'evento D, ripetendo poi nel prodotto al numeratore il fattore P(D).
Un'altra difficoltà riscontrata da un paio di studenti è nella frase "la sua probabilità di promozione si riduce al 50%". Gli alunni interpretano questa affermazione come l'azione di sottrarre alla probabilità iniziale (il 99%) il 50% di essa, attribuendo quindi la probabilità del 49% all'evento che il soggetto del problema passi l'esame dopo essere andato a ballare.

Esercizio 2:

L'urna A contiene 3 palline rosse e 2 palline azzurre mentre l'urna B ne contiene 2 rosse e 8 azzurre. Si lancia una moneta; se esce testa si estrae dall'urna A, se esce croce dall'urna B. Si determini la probabilità

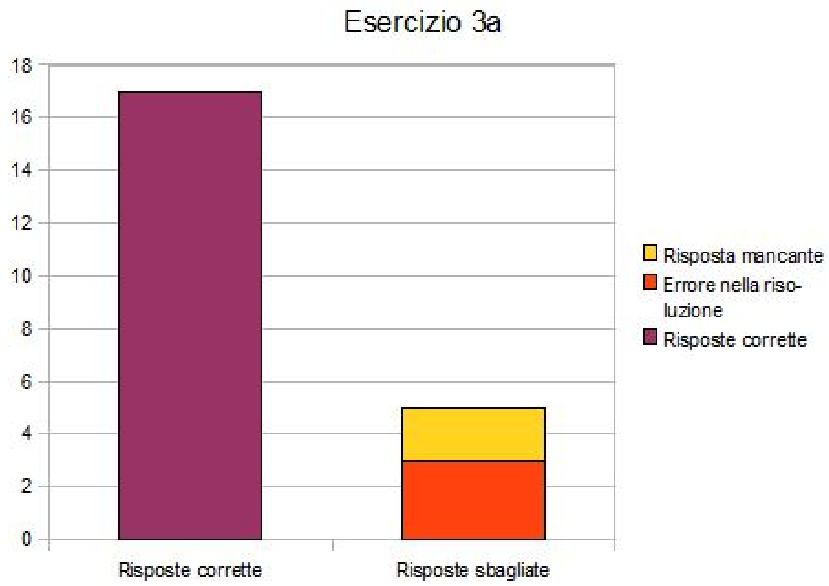
- di estrarre una pallina rossa;
- che sia uscita testa, se è stata estratta una pallina rossa.

(Disegnare il grafo ad albero e riportare i calcoli.)

Questo esercizio presenta due domande, la prima delle quali vuole facilitare la ricerca del risultato della seconda. La prima domanda è stata inserita anche per stimolare i ragazzi a non dimenticare le lezioni precedenti; la sua soluzione è:

$$P(R) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{10} = \frac{2}{5}.$$

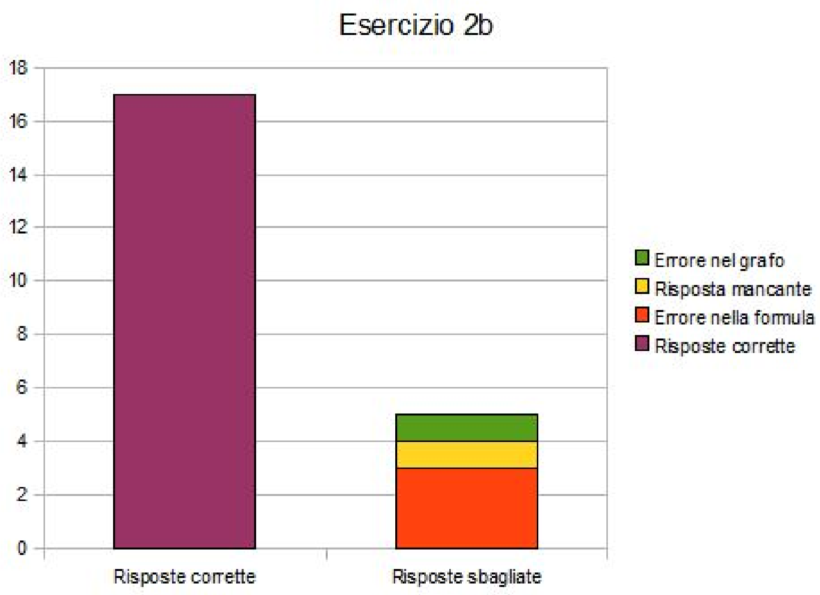
Gli alunni hanno così risposto:



Quindi l'esito è molto positivo. Osservo però che molti ragazzi hanno risolto la seconda richiesta prima di questa; probabilmente ciò è dovuto al fatto che ricordavano meglio la formula utile alla seconda domanda.
La soluzione di essa è:

$$P(A|R) = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{4}.$$

I risultati sono:



I dati rispecchiano quelli dell'istogramma precedente.

Esercizio 3:

Tra i partecipanti ad un concorso per giovani musicisti, il 50% suona il pianoforte, il 30% suona il violino ed il restante 20% suona l'oboe. Inoltre, partecipano per la prima volta al concorso il 10% dei pianisti, il 33% dei violinisti e il 10% degli oboisti.

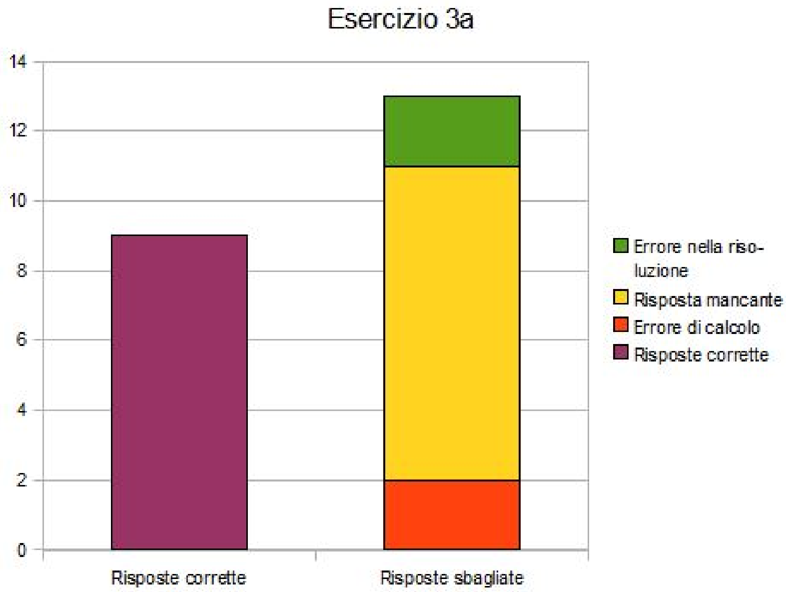
- Scelto a caso un partecipante, qual è la probabilità che sia al suo primo concorso?
- Sapendo che il partecipante è al suo primo concorso, qual è la probabilità che sia un oboista?

(Disegnare il grafo ad albero e riportare i calcoli.)

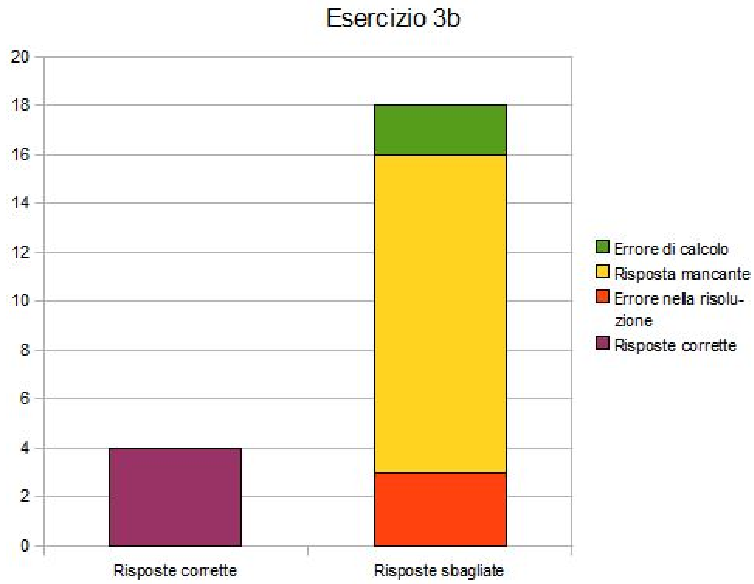
Anche in questo caso le domande poste sono due, e la loro funzionalità è simile a quella dell'esercizio precedente. Considerando l'evento P="il partecipante è al suo primo concorso", si calcola

$$P(P) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{10} \cdot \frac{33}{100} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10} = \frac{169}{1000}.$$

Di seguito, le risposte degli studenti:



Osserviamo che in questa domanda più del 50% della classe ha dato una risposta errata; la maggior parte di queste risposte in realtà sono proprio mancanti. Ancora più alta è la percentuale delle risposte sbagliate nella seconda domanda:



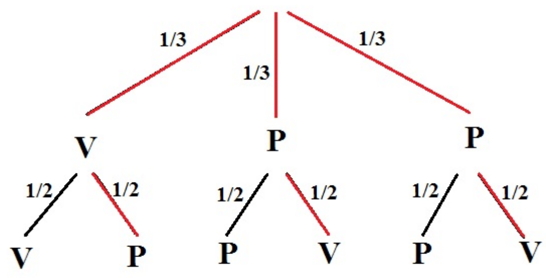
In generale, i grafi sono stati disegnati bene dalla maggior parte dei ragazzi; quindi hanno capito in che situazione si trovavano. Su ogni ramo la probabilità è stata assegnata con la percentuale. Durante l'applicazione della formula gli alunni però non si sono preoccupati di trasformare tale percentuale in frazione, ed hanno ottenuto risultati totalmente sbagliati.

Ancora una volta troviamo studenti che propongono probabilità maggiori di 1.

4.7 Il quarto intervento (3 - 4 - 2014)

Durante la quarta lezione tutti gli alunni erano presenti. Ho deciso di non fare una spiegazione teorica; ritengo che gli argomenti affrontati siano stati più che sufficienti e approfonditi nella giusta maniera per una classe seconda.
Ho sottoposto gli studenti al problema di Monty Hall. Questo è un famoso problema di teoria della probabilità legato al gioco a premi americano *Let's Make a Deal*.
Nel gioco il concorrente viene posto davanti a tre porte chiuse; dietro due di esse stanno due capre, mentre dietro la terza si trova un'automobile. Il conduttore, che conosce ciò che si trova dietro ad ogni porta, chiede di scegliere una porta al concorrente, e poi ne apre una delle altre due, mostrando una capra. In seguito propone al giocatore di cambiare la propria scelta iniziale.
Il problema di Monty Hall pone la seguente domanda: cambiare porta aumenta la probabilità di vincere l'automobile?
Ho chiesto agli studenti di analizzare il problema e di esporre le proprie riflessioni. Alla domanda posta in precedenza Giovanni ha risposto così:
"A questo punto ho la stessa probabilità di vincere sia la capra che la macchina, perchè c'erano due capre e una macchina e adesso una porta è stata aperta quindi rimangono soltanto due porte con una macchina e una capra, quindi ho il 50% di probabilità di prendere la macchina in una delle due porte."
Sandro invece ha risposto:
"Io cambierei per un fatto di psicologia: il conduttore forse mi vuole ingannare."
Matteo ha detto che gli era già stato posto il problema in precedenza e sa che deve cambiare, ma non si ricorda la spiegazione.
A questo punto ho mostrato agli studenti due video: il primo è tratto dal telefilm *Numb3rs*, il secondo dal film *21*. In entrambi ci si trova in un contesto classe e un insegnante chiede agli alunni di risolvere il problema di Monty Hall. Nel primo video una ragazza risponde nella stessa maniera di Giovanni, affermando che dal momento che sono rimaste due porte la probabilità di vincere cambiando la porta è la stessa che si ha mantenendo la scelta fatta al principio. I filmati si concludono con la risoluzione del quesito.
Dopo la visione gli allievi non erano ancora molto convinti. Allora ho chiesto loro di costruire insieme il grafo ad albero della situazione; il risultato è stato il

seguente:



L'evento V indica la vincita dell'automobile, l'evento P il caso contrario.
I rami evidenziati in rosso sono quelli che rappresentano la strategia del cambiare. Già dal grafo la risposta è abbastanza evidente: i casi che si ottengono modificando la scelta iniziale sono tre, e due di essi portano alla vittoria. Applicando la definizione classica la probabilità di vittoria è dunque $\frac{2}{3}$.
Ho chiesto allora agli studenti di cercare la soluzione analoga applicando il Teorema della Probabilità Condizionata. Insieme abbiamo deciso di indicare con C l'evento in cui si decide di cambiare la porta, allora:

$$P(C) = \frac{3}{6};$$
$$P(V \cap C) = \frac{2}{6};$$
$$P(V|C) = \frac{P(V \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}.$$

A questo punto, gli studenti si sono convinti: la risposta è sì, le probabilità di trovare l'automobile raddoppiano.
A parole, possiamo affermare di trovarci davanti a tre situazioni differenti:

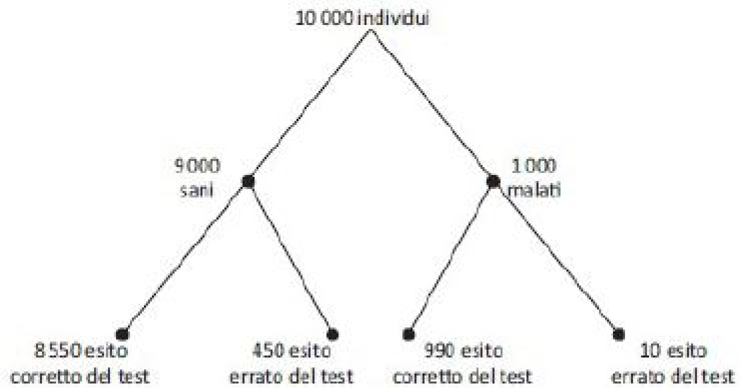
- il concorrente sceglie la capra numero 1. Il conduttore scarta la capra numero 2 e cambiando il giocatore vince l'automobile.
- Il concorrente sceglie la capra numero 2. Il conduttore scarta la capra numero 1 e cambiando il giocatore vince l'automobile.
- Il concorrente sceglie l'automobile. Il conduttore scarta una delle due capre (non importa quale) e cambiando il giocatore vince la capra rimanente.

Nei primi due casi, cambiando la porta il concorrente vince l'auto; nel terzo una capra. Dal momento che la strategia del "cambiare" porta alla vittoria in due situazioni su tre, la probabilità di vincere adottando tale strategia è $\frac{2}{3}$.

Negli ultimi 30 minuti di lezione ho dato agli studenti i 3 esercizi da risolvere; questa volta sono stati tratti dalle Prove Invalsi degli anni precedenti per eseguire una sorta di verifica e per porre gli studenti davanti ai quesiti veri e propri che andranno ad affrontare alla fine dell'anno scolastico.
Inoltre ho utilizzato questi esercizi per poter confrontare i risultati ottenuti in classe con i dati nazionali e i grafici delle varie risposte.

Esercizio tratto dalle Prove Invalsi 2012:

Si sa che in una popolazione di 10000 individui il 10% è affetto da una malattia, mentre il 90% è sano.
Il test che diagnostica la presenza della malattia è affidabile solo parzialmente: il 5% dei casi rileva la malattia su un indivuduo sano e nell'1% dei casi non rileva la malattia su un individuo malato. Il diagramma seguente riassume la situazione:



a. Utilizzando i dati del diagramma ad albero, completa la seguente tabella.

	Esito corretto del test	Esito errato del test	Totale
Sani		450	
Malati			
Totali	9540		10000

b. Qual è la probabilità che l'esito del test sia corretto per una persona scelta a caso da quella popolazione?

A. ☐ 99,0%

B. ☐ 97,0%

C. ☐ 95,4%

D. ☐ 85,5%

c. Qual è la probabilità che un individuo, preso a caso tra tutti quelli che hanno avuto un esito corretto del test, sia sano? Scrivi il risultato in percentuale con una cifra dopo la virgola.

Risposta:....................%

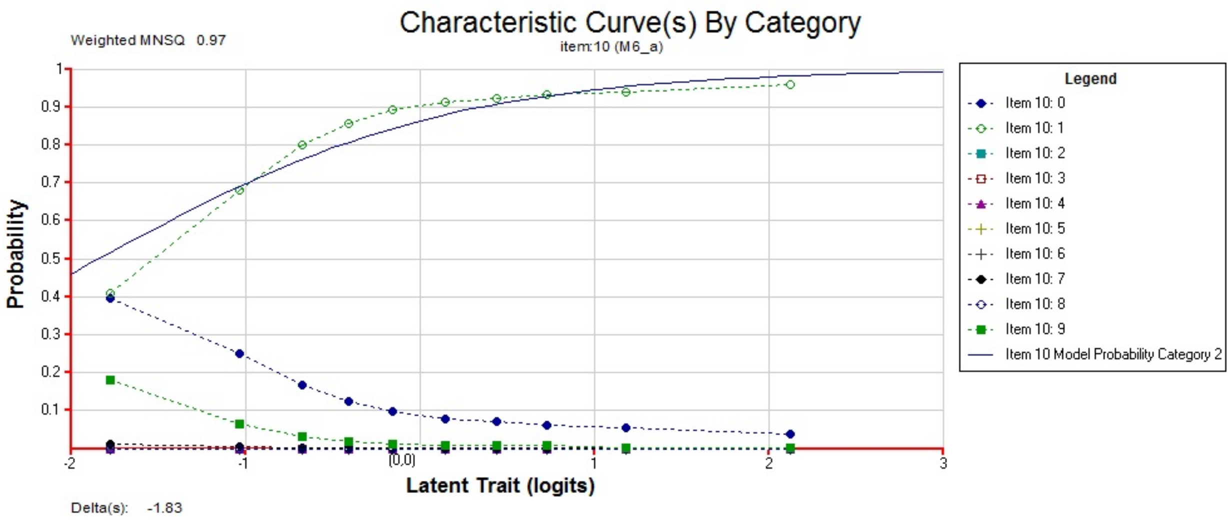
Osserviamo per prima cosa che i dati forniti all'inizio del testo sono inutili in quanto anche la sola presenza del diagramma ad albero fornisce i valori necessari per la risoluzione.
Per quanto riguarda il punto a, riporto i dati raccolti nel 2012 inerenti alla tipologia di Istituto Liceo:

M6_a - Utilizzando i dati del diagramma ad albero, completa la seguente tabella

		Frequenza	Percentuale	Percentuale valida	Percentuale cumulata
Validi	Errato	28756	11,0	11,0	11,0
	Corretto	223917	86,0	86,0	97,0
	Non valida	731	,3	,3	97,3
	Not Reached	20	,0	,0	97,3
	Mancante	6998	2,7	2,7	100,0
	Totale	260422	100,0	100,0	

a. Tipologia di Istituto = Licei

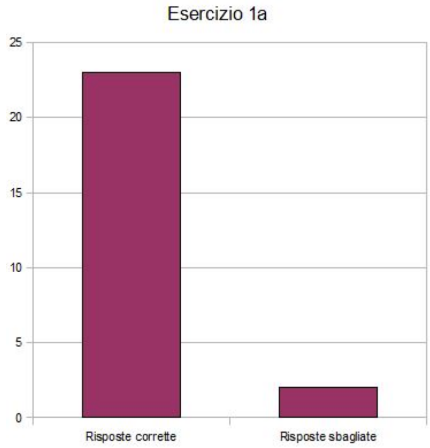
Osserviamo quindi che un'alta percentuale (l'86%) ha completato la tabella in maniera corretta. Il distractor plot relativo a questa domanda è il seguente:



Si nota che già gli alunni appartenenti al percentile degli studenti più deboli hanno comunque un'alta percentuale di risposta corretta.
L'indice di discriminazione[2] di questa domanda è di 0,35. Possiamo affermare quindi che questa domanda ha avuto esiti positivi dalla maggior parte degli studenti.
Ho riscontrato la stessa situazione in classe. Su 25 alunni presenti, 23 hanno

[2]L'indice di discriminazione consente di valutare in termini quantitativi la capacità di una domanda di individuare gruppi rispondenti in funzione del loro livello di preparazione. In altri termini, quanto più una domanda è discriminativa, tanto più essa è in grado di misurare la variazione di probabilità di fornire la risposta corretta anche per piccole variazioni di abilità del rispondente. L'indice di discriminazione deve raggiungere generalmente almeno il valore di 0,20 e può considerarsi buono quando supera i valori di 0,25 - 0,28.(Pisa Technical Report (2003) pag.123)

completato la tabella in modo corretto; i 2 che hanno sbagliato è perchè hanno fatto errori di calcolo. Di seguito i risultati ottenuti:



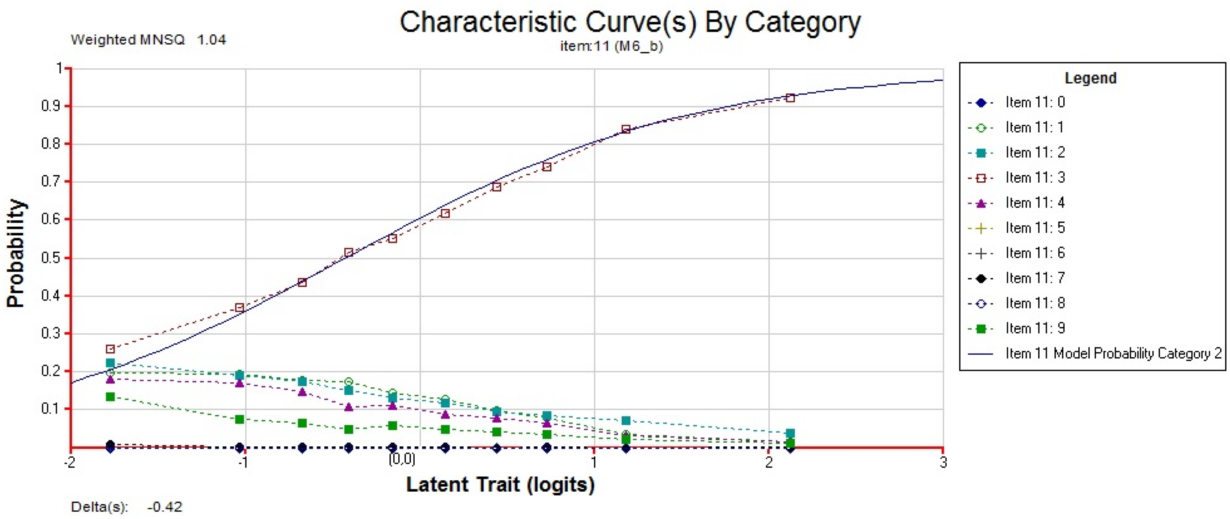
Per quanto riguarda il quesito b, i dati forniti dalle statistiche Invalsi sono:

M6_b - Qual è la probabilità che l'esito del test sia corretto per una persona scelta

		Frequenza	Percentuale	Percentuale valida	Percentuale cumulata
Validi	A. 99,0%	25714	9,9	9,9	9,9
	B. 97,0%	28952	11,1	11,1	21,0
	C. 95,4%	169025	64,9	64,9	85,9
	D. 85,5%	22317	8,6	8,6	94,5
	Non valida	671	,3	,3	94,7
	Not Reached	20	,0	,0	94,7
	Mancante	13723	5,3	5,3	100,0
	Totale	260422	100,0	100,0	

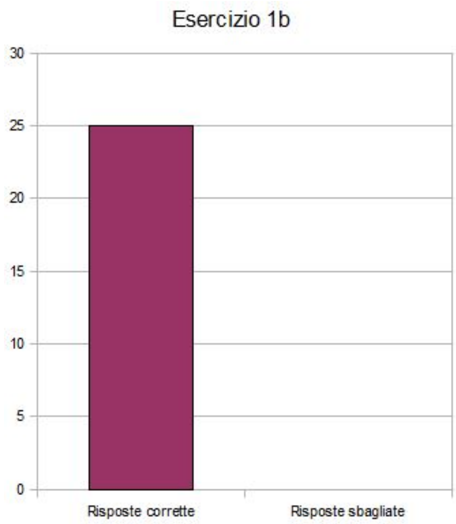
a. Tipologia di Istituto = Licei

La risposta corretta è la C. Notiamo che la percentuale di risposte giuste si abbassa al $64,9\%$, comunque ancora alta. Per ottenere tale risultato basta dividere il numero di persone per le quali l'esito del test sia corretto (9540) per il numero totale di persone (10000). Il distractor plot relativo al questito è il seguente:



Questo indica che in generale le risposte sbagliate sono state date in maniera simile da tutti i tipi di ragazzi. La seconda opzione maggiormente scelta è la lettera B. Praticamente nessuno ha lasciato la risposta in bianco. L'indice di discriminazione in questo caso è 0,40.

In 2Bs i risultati sono stati più che soddisfacenti; infatti tutti gli alunni hanno risposto in maniera corretta alla domanda:



I problemi sorgono alla terza domanda; la causa principale potrebbe essere che è una domanda aperta. La risposta corretta è $89,6\%$ e si trova calcolando il rapporto tra il numero di individui sani per i quali l'esito del test è corretto e il numero di tutti gli individui per i quali l'esito del test risulta giusto.

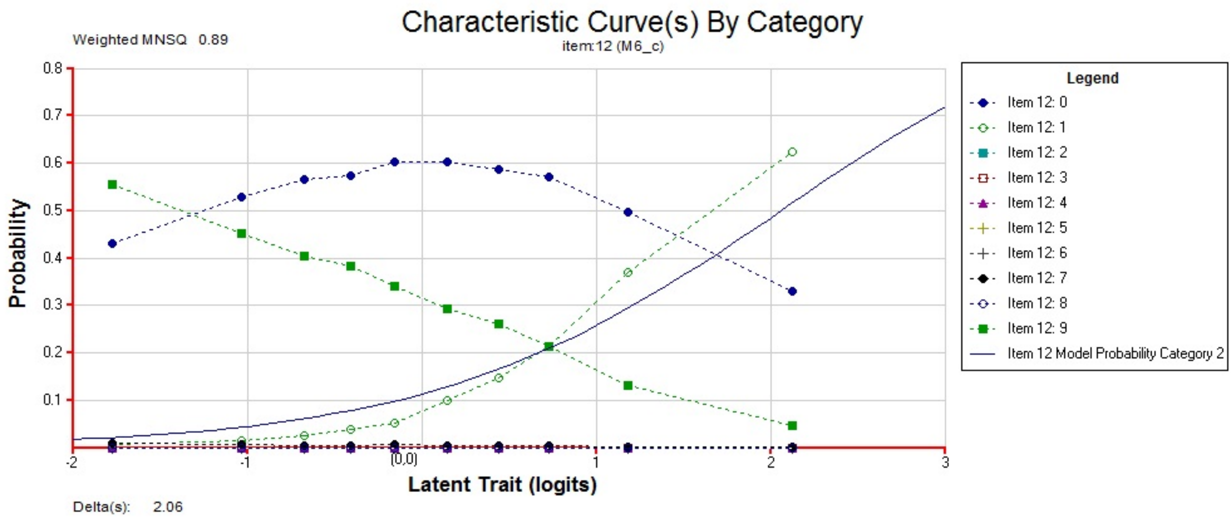
L'indice di discriminazione è 0,49. La percentuale di risposte esatte si abbassa notevolmente, come osserviamo nella seguente tabella:

M6_c - Qual è la probabilità che un individuo, preso a caso tra tutti quelli che

		Frequenza	Percentuale	Percentuale valida	Percentuale cumulata
Validi	Errato	131214	50,4	50,4	50,4
	Corretto	51940	19,9	19,9	70,3
	Non valida	996	,4	,4	70,7
	Not Reached	20	,0	,0	70,7
	Mancante	76252	29,3	29,3	100,0
	Totale	260422	100,0	100,0	

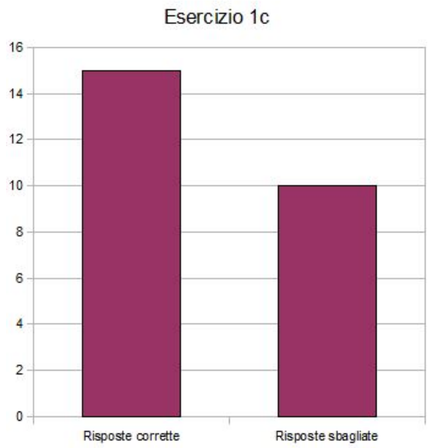
a. Tipologia di Istituto = Licei

Di notevole importanza è il numero che rappresenta la risposte mancanti. Mentre nelle domande precedenti era molto basso (2,7 - 5,3) in questo caso sale a 29,3; questo significa che circa un terzo dei ragazzi non ha risposto alla domanda.



Dal distractor plot osserviamo che per quanto riguarda gli alunni più deboli, la maggior parte di essi decide di non rispondere; una situazione analoga si riscontra comunque anche negli altri percentili. Riescono a rispondere in maniera corretta soltanto gli studenti più abili, mentre in riferimento ai percentili di mezzo si ha un'alta percentuale di riposte sbagliate.

In 2Bs i risultati sono migliori (sottolineando comunque che siamo all'interno di un Liceo Scientifico); il 60% delle risposte è corretto. Nessuno ha lasciato la risposta in bianco.



Molti ragazzi hanno inizialmente tentato di risolvere il quesito applicando la formula di Bayes; ho osservato che hanno fatto molta confusione: alcuni non ricordavano l'enunciato, altri non capivano la probabilità da attribuire ad ogni ramo. Questo evidentemente è causato dal contratto didattico: gli alunni si sono sentiti obbligati ad applicare le formule e i teoremi affrontati in classe senza pensare che l'esercizio potesse essere risolto in maniera diversa (e, molto probabilmente, più semplice).
Un alunno, per esempio, applicando la formula trova come risultato $0,9\%$; il soggetto in questione non si chiede se il valore trovato può essere effettivamente giusto per il situazione descritta dal testo (dando un semplice sguardo ai dati forniti si può osservare che il valore ottenuto è decisamente troppo basso).
Molte delle risposte sbagliate invece indicano l'$85,5\%$, percentuale trovata dividendo il numero di individui sani con esito corretto del test per il numero totale di individui.

Esercizio tratto dalle Prove Invalsi 2013:

> Una fabbrica utilizza due diversi macchinari, M_1 e M_2, per produrre tondini.
> M_1 ha un indice di qualità uguale a 0,96 (cioè la probabilità che un tondino che esce da M_1 non sia difettoso è del 96%), mentre M_2 ha indice di qualità uguale a 0,98.

a. La probabilità che un tondino esca da M_2 difettoso è:

A. □ 0,02

B. □ 0,04

C. □ 0,96

D. □ 0,98

b. Per la realizzazione di tondini metallici, M_1 e M_2 lavorano in serie, cioè ogni tondino viene lavorato prima da M_1 e poi da M_2.
Supponiamo che gli eventi "M_1 produce un tondino non difettoso" e "M_2 produce un tondino non difettoso" siano tra loro indipendenti; allora la probabilità che un tondino non sia difettoso alla fine del ciclo di preparazione (cioè dopo essere stato lavorato sia da M_1 che da M_2) è:

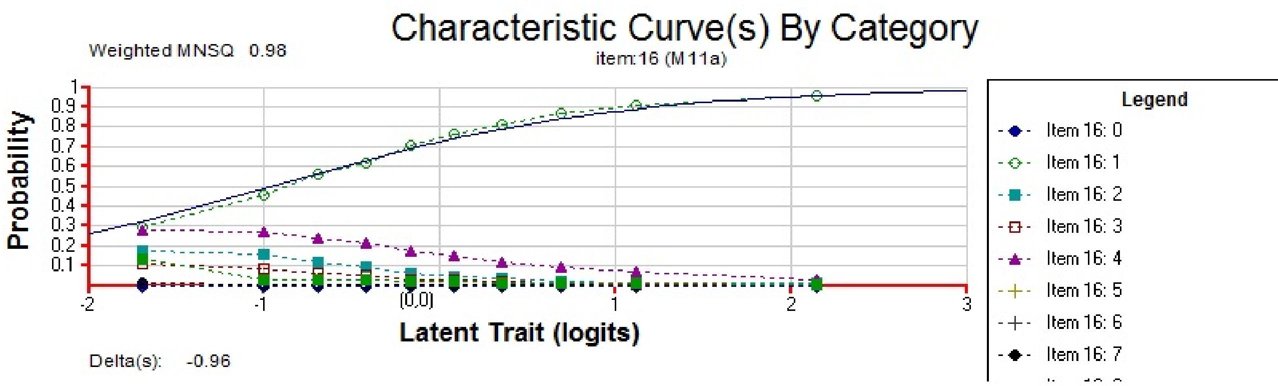
A. □ 98%

B. □ $94,08\%$

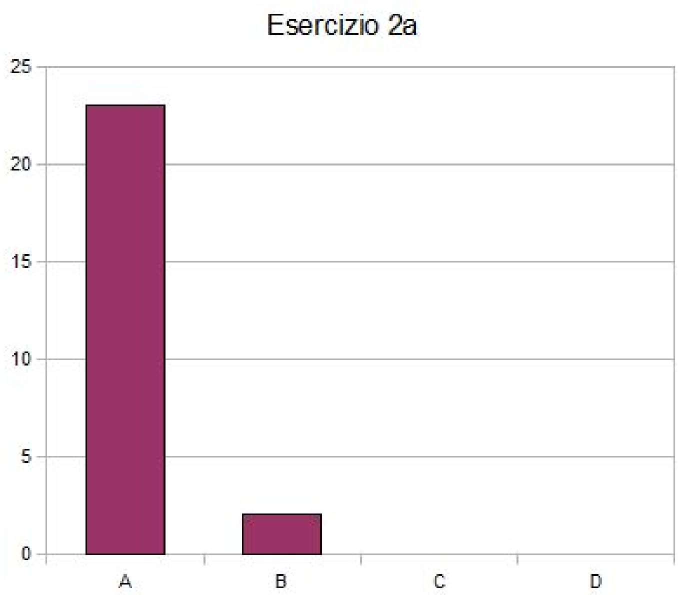
C. □ 6%

D. □ $1,94\%$

Per il primo punto la risposta corretta è la lettera A. Il distractor plot relativo è il seguente:



La percentuale di risposte esatte è del $68,65\%$. Le risposte B e C non sono buoni distrattori, infatti vengono scelte da una percentuale molto bassa di studenti. La lettera D invece viene scelta dal $16,60\%$ degli alunni, probabilmente da quelli che hanno letto male la domanda o non hanno capito il significato di "indice di qualità", nonostante sia spiegato nel testo. L'indice di discriminazione è di 0,40. Per quanto riguarda i risultati ottenuti in classe, essi sono:

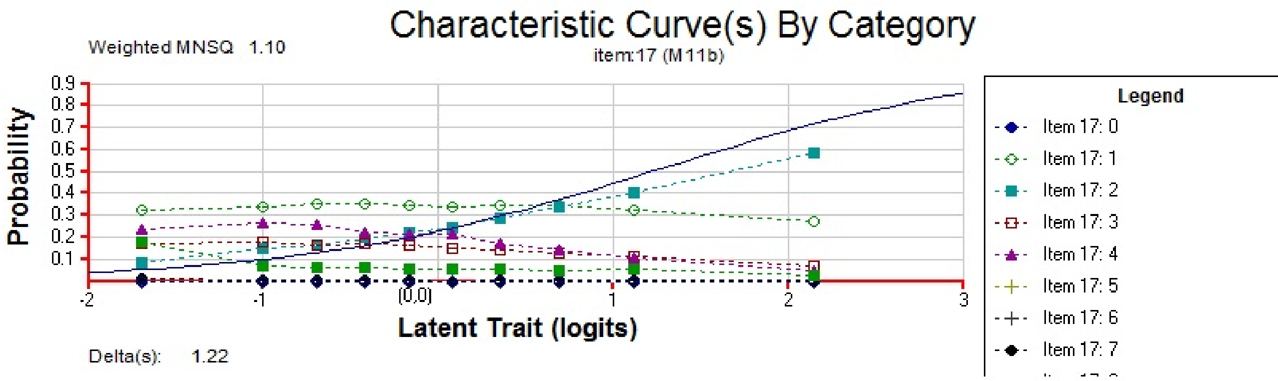


Osserviamo che sono molto diversi dai risultati nazionali. Infatti quasi tutta la classe risponde in maniera corretta; solo in 2 scelgono la risposta B. In questo caso particolare, i soggetti costruiscono un grafo ad albero per rappresentare la situazione; attribuiscono in maniera appropriata ad ogni ramo la giusta probabilità, ma poi cercano di applicare il Teorema della Probabilità Condizionata senza ricordare l'enunciato. Escludono la lettera A in quanto scegliendo lo 0,02 "dai per scontato che (il tondino) venga da M_2"[3] È evidente che le ragazze non hanno chiaro il concetto della condizione che viene posta sulla probabilità che il tondino esca difettoso: quel "dare per scontato" è effettivamente la condizione che caratterizza la risposta.

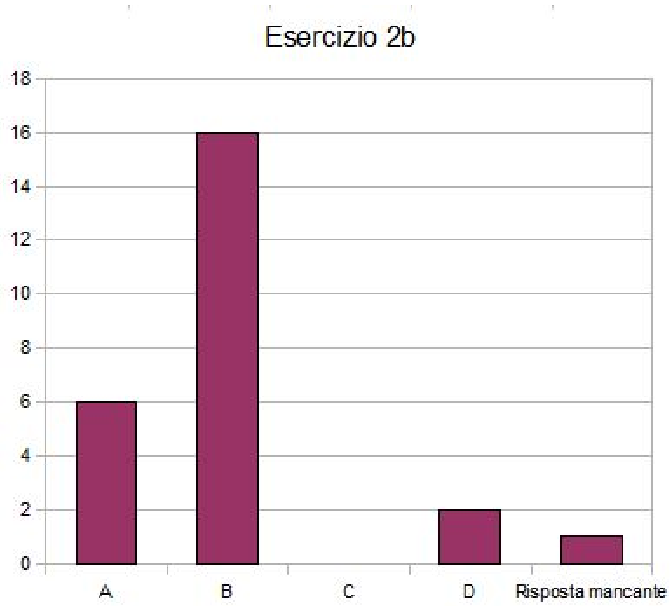
Nella seconda domanda la risposta esatta è la lettera B; per ottenere il risultato bisogna moltiplicare le probabilità che il tondino prodotto non sia difettoso di entrambi i macchinari. La percentuale delle risposte esatte che si riscontra è molto bassa: meno di un terzo degli studenti risponde in maniera corretta (più precisamente, il $26,24\%$). Una percentuale più alta sceglie la risposta A. L'indice di discriminazione di questa domanda è di 0,32.

Di seguito, il distractor plot:

[3] Il dialogo tra le due studentesse è ricavato dalle riprese effettuate in classe.



Osserviamo che gli studenti più deboli scelgono la risposta esatta soltanto come quarta opzione; prima di essa vengono preferite la risposta A e la D, oppure non ne viene proprio data una. In generale la percentuale di scelta della lettera A rimane la stessa per tutti i gruppi di ragazzi, dai più deboli ai più forti.
In 2Bs i risultati sono stati i seguenti:



Anche in questo caso la risposta sbagliata maggiormente scelta è la A, ma da una percentuale notevolmente più bassa. Infatti sceglie la risposta B il 64% della classe. Non è chiaro se il concetto di "eventi indipendenti" sia stato compreso appieno; dalle riprese ho osservato che le studentesse principalmente sono andate per esclusione, indicando che il 6% e l'$1,94\%$ sono percentuali troppo basse, mentre che il 98%, essendo l'indice di qualità di M_2, è troppo alto. Non hanno eseguito veri e propri passaggi per arrivare alla soluzione.

Esercizio tratto dalle Prove Invalsi 2011:

> La corriera passa alle 6:30 alla fermata dove sale Giorgio. Nel 40% dei casi è in orario, nel 50% dei casi ha un ritardo di 5 minuti e nei rimanenti casi ha un ritardo di 10 minuti. Se Giorgio arriva alla fermata alle 6:34, che probabilità ha di prendere la corriera?

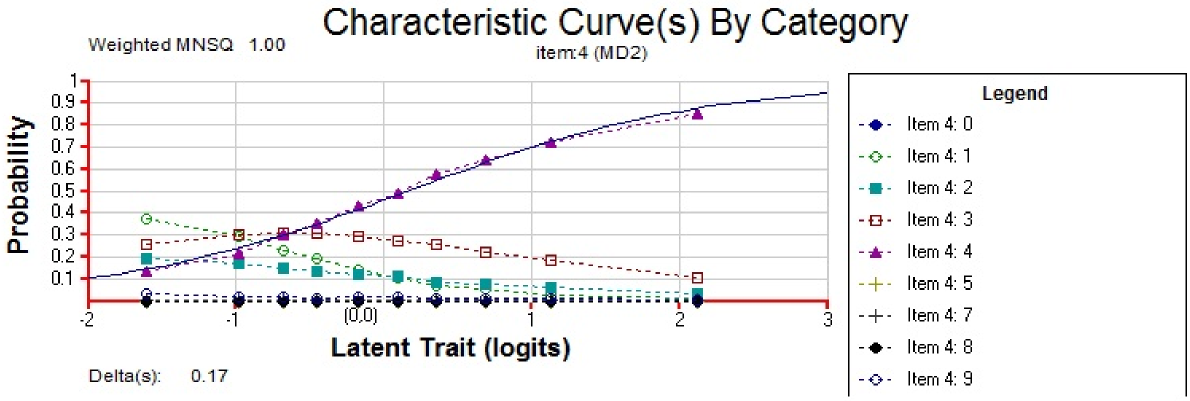
A. ☐ 10%

B. ☐ 40%

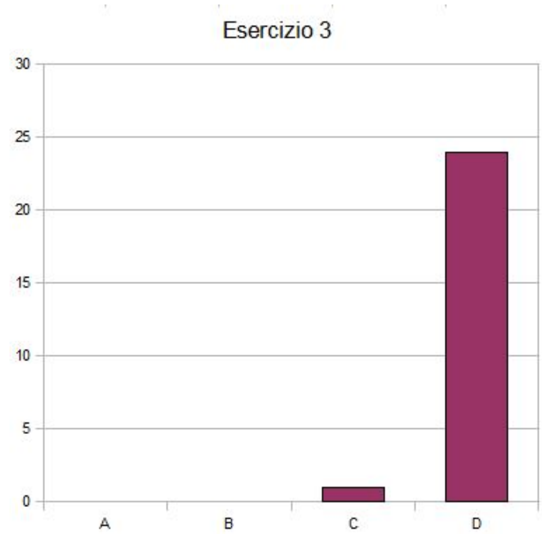
C. ☐ 50%

D. ☐ 60%

Questa domanda non riguarda propriamente la probabilità condizionata nei termini in cui è stata affrontata durante le lezioni, ma a mio parere è significativa sia per i dati rilevati a livello nazionale sia per quelli ottenuti nella 2Bs.
La risposta corretta è la lettera D; per raggiungere questo risultato si deve sommare la percentuale di ritardo di 5 minuti (50%) con quella di ritardo di 10 minuti (10%).
La domanda può apparire semplice, ma le risposte corrette a livello nazionale rappresentano solamente il $46,19\%$ del totale, poco meno della metà. La seconda opzione più scelta ($25,23\%$) è la risposta C.
Di seguito, il distractor plot:



Osserviamo che gli studenti più deboli scelgono abbastanza indistintamente tra le opzioni date, e questa situazione si riscontra per tutta la prima metà dei percentili. La risposta giusta viene data soltanto dagli alunni più forti.
Per quando riguarda i dati raccolti in 2Bs, questo è il risultato:



Gli studenti hanno trovato questo quesito molto semplice. In molti meravigliati sono venuti a chiedermi se bastasse solo un calcolo veloce per ottenere il giusto risultato. Però molti di essi hanno cercato la soluzione disegnando il grafo ad albero della situazione, e questo non era richiesto, anzi, probabilmente può essere ritenuto un passaggio sbagliato. Nonostante questo gli alunni hanno comunque provato a disegnarlo spinti dal contratto didattico: a tutti i costi hanno voluto applicare il diagramma per la risoluzione in quanto protagonista di tutte le spiegazioni precedenti.
Nelle riprese Costanza e Chiara cominciano a disegnare il grafo ad albero, ma

da subito non sanno che probabilità assegnare ai rami; Chiara rilegge il testo e ragiona sulle percentuali, e in poco tempo trova la risposta esatta disegnando una croce sopra al diagramma abbozzato.

4.8 Analisi del materiale video

Le riprese sono state fatte durante tutti gli interventi, e documentano la risoluzione degli esercizi proposti nella seconda mezz'ora di ogni lezione da parte di due studenti. Esse sono state rese possibili su concessione del Liceo di Faenza.
Il video più interessante è quello che si svolge nella quarta lezione, in quanto si affrontano esercizi delle Prove Invalsi e si può analizzare se e come gli studenti utilizzano gli argomenti appena appresi per la loro risoluzione. Le ragazze che svolgono gli esercizi proposti sono Costanza e Chiara.
Nel primo esercizio, dopo aver compilato la tabella in maniera corretta, le due studentesse attribuiscono ad ogni ramo del grafo ad albero fornito la relativa probabilità, nonostante questo passaggio non sia affatto necessario. Anche la percentuale inclusa nel testo è fuorviante. Dopo alcuni ragionamenti Chiara capisce che il secondo quesito può essere risposto semplicemente utilizzando i dati della tabella.
Per il calcolo della probabilità nella domanda c. le studentesse prendono la calcolatrice; è utile osservare l'utilizzo che esse fanno di questo strumento nei restanti minuti del video. Soprattutto per quanto riguarda la risoluzione del secondo quesito, la calcolatrice riveste un ruolo fondamentale. Le alunne disegnano il grafo ad albero relativo alla situazione e cercano di ricordare le formule fornite durante le precedenti lezioni di teoria; per trovare la risposta utilizzano la calcolatrice più volte (6/7) in maniera inopportuna, svolgendo lo stesso calcolo ripetutamente e sperando che lo strumento restituisca loro una delle opzioni del testo. Questo è un tipico caso di delega formale: dopo aver riconosciuto i numeri e le eventuali operazioni che possono agire tra di essi, spetta alla calcolatrice resituire il risultato corretto, senza sottoporre alcun tipo di ragionamento a tale atto, tanto che le studentesse, ottenendo ripetutamente il risultato 0.01 non presente tra le opzioni, procedono per esclusione scegliendo la risposta B (errata).

Un altro esempio di delega formale si riscontra nella risoluzione dell'ultimo quesito; esso non richiede alcun utilizzo del grafo ad albero, ma Chiara e Costanza procedono subito disegnandone uno e tentando di attribuire ad ogni ramo la sua probabilità. Come scritto in precedenza, nel fare questa operazione Chiara capisce che il diagramma non è d'aiuto, ma Costanza rimane comunque perplessa sul fatto che non abbia potuto utilizzare tale strumento.

Capitolo 5

Conclusioni

In conclusione al progetto che ho condotto in classe, posso affermare che l'esperienza è stata positiva. Gli studenti si sono dimostrati attenti e disponibili nel confronto, nonostante l'argomento non fosse nelle loro corde.
Per quanto riguarda l'apprendimento della probabilità condizionata, a mio parere esso non è stato acquisito completamente. Questo non è dovuto al livello di matematica che si possiede al secondo anno di un liceo, perchè la probabilità non necessariamente ha bisogno di prerequisiti derivanti da altre branchie della matematica.
Gli unici prerequisiti necessari sono probabilmente il calcolo con le frazioni e con le percentuali; soprattutto in riguardo a queste ultime, ho notato negli studenti molta difficoltà nell'utilizzarle. Plausibilmente essi non hanno ben chiaro il significato vero e proprio di percentuale, ma associano ad essa misconcezioni che sono osservabili facilmente anche nella risoluzione di molti quesiti delle Prove Invalsi.
Probabilmente spiegare la probabilità condizionata nel primo biennio è prematuro, oppure devono essere dedicate più ore per un migliore apprendimento. A mio parere dovrebbe anche cambiare il modo di introdurre la probabilità, dandole la stessa dignità degli altri ambiti di contenuti matematici.
I grafi ad albero sono l'argomento che è stato maggiormente compreso. Gli studenti hanno affermato che questo tipo di diagramma è molto intuitivo e grazie ad esso la comprensione delle situazioni a cui erano sottoposti risultava più chiara. Nonostante questo non penso abbiano assimilato totalmente l'utilizzo dei grafi ad albero; durante la risoluzione di esercizi che non ne richiedevano l'u-

so gli studenti hanno comunque cercato di rappresentare la situazione tramite il diagramma. Questo comportamento è riconducibile a una clausola del contratto didattico che prende il nome di delega formale, citata in precedenza, nella quale lo studente legge il testo decidendo l'operazione da effettuare ed i numeri con i quali deve operare e in seguito lascia lavorare l'algoritmo al posto suo (in questo caso delega il risultato al grafo ad albero). Questo fenomeno si può osservare soprattutto nel quarto intervento, in cui gli studenti hanno risolto un quesito sulla probabilità che non richiedeva assolutamente l'uso del diagramma, ma nel quale quasi la totalità lo ha disegnato.

Bibliografia

[1] N. Meusnier, *Sur l'histoire de l'enseignement des probabilitès et des statistiques* (2006)

[2] J. Renouard, *Histoire des sciences mathèmatiques en Italie, depuis la renaissance des lettres* (1840)

[3] E. Fischbein, *The intuitive sources of probabilistic thinking in children* (1975)

[4] B. Greer, *Understanding probabilistic thinking: the legacy of Efraim Fischbein* (2001)

[5] B. De Finetti, *Teoria delle Probabilità* (1970)

[6] B. D'Amore, *Elementi di Didattica della Matematica* (1999)

[7] PISA 2003 Technical Report

[8] M. G. Ottaviani, *Insegnare ed apprendere statistica e probabilità a scuola: il problema dell'aggiornamento degli insegnanti* (2011)

[9] B. Betrò, *La probabilità nella vita quotidiana (Introduzione elementare ai modelli probabilistici)* (2010)

Sitografia

[1] Indicazioni Nazionali per i Licei, *www.nuovilicei.indire.it*

[2] Risorse per docenti dai progetti nazionali, *www.risorsedocentipon.indire.it*

[3] Prove Invalsi, *www.invalsi.it*

Ringraziamenti

Ringrazio innanzitutto il Professor Giorgio Bolondi per la sua grandissima disponibilità mostrata durante questi mesi e per avermi permesso di sviluppare questo lavoro, per avermi fornito il materiale necessario e per avermi invitato a seminari utili e interessanti sulla probabilità.

Ringrazio la Professoressa Angela Drei per gli insegnamenti che mi ha dato (sia come alunna che come tirocinante), per il sostegno espresso e la grande fiducia che mi ha mostrato.

Ringrazio i miei genitori che mi hanno sostenuto in questi cinque di Università, sia a livello economico ma soprattutto morale e affettivo, dandomi la massima fiducia. Li ringrazio per il bene che mi hanno dimostrato, per essere sempre stati al mio fianco nei momenti belli e in quelli di sconforto. Ringrazio Matteo per il suo conforto e il suo appoggio, per essere sempre pieno di vitalità e per farmi sentire una sorella davvero speciale.

Ringrazio Sara, Benedetta, Eva, Giorgia e tutte le mie altre compagne di Università, sia della Laurea Triennale che della Magistrale, per avermi accompagnato in questi cinque anni.

Ringrazio lo Scaricume, amici di cui veramente non potrei fare a meno, che mi hanno accompagnato da quando ero piccola e che tuttora non smettono di starmi accanto, con il loro calore e il loro immenso sostegno. Ringrazio Valluc per condividere con me la passione per la matematica, e tutti gli altri amici che mi circondano e che mi hanno fatto diventare la persona che sono. Ringrazio Pilaf per il suo ascolto e la sua dolcezza.