Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA NELLA SCUOLA SECONDARIA DALL'UNITÀ D'ITALIA

Tesi di Laurea in Analisi matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Paolo Negrini

Presentata da:
Giorgia Casadei

I Sessione
Anno Accademico 2013/2014

Indice

Introduzione

Ci piaccia o no, viviamo tutti in un'epoca in cui ci imbattiamo nei risultati delle scienze esatte ad ogni angolo di strada, sia che le disprezziamo, che tremiamo davanti ad esse, o che le teniamo in pregio perchè alleviano i nostri dolori e proteggono dalla morte i nostri cari. L'unica cosa che non potremmo fare sarebbe quella di bandirle. Perciò il miglior consiglio che si può dare a chiunque, in questa seconda metà del secolo, è quello di imparare a comprendere, nella misura delle sue possibilità, tanto le scienze esatte quanto gli scienziati.
Questa affermazione di James B. Conant (Dorchester, 1893 - Hannover, 1978) potrebbe riassumere gli ideali e lo spirito che hanno guidato, nel Novecento, i sostenitori della creazione di una scuola secondaria superiore in cui le materie scientifiche, in particolare la matematica, prevalessero sulle altre.
Come si legge nel primo capitolo di questa tesi, il liceo scientifico ha faticato molto a nascere, a causa di una radicata convizione di origine gentiliana che ha sempre sostenuto l'importanza assoluta delle materie classiche e letterarie nella formazione culturale di uno studente che aspiri ad ottenere un diploma liceale e ad intraprendere una carriera universitaria.

La prova scritta di matematica alla maturità scientifica, proposta dal Ministero, rappresenta da sempre per gli studenti uno dei momenti più temuti di tutto il percorso scolastico.
L'analisi, realizzata per la stesura di questa tesi, delle prove di matematica assegnate, a partire dalla nascita dell'esame di Stato con la riforma Gentile del 1923, ha mostrato che i contenuti delle prove proposte nei vari anni hanno di fatto plasmato i curricoli reali del nostro liceo scientifico, influenzando e orientando il lavoro degli insegnanti e lo studio dei ragazzi talvolta più delle stesse indicazioni ufficiali.
Basta pensare all'insistenza con cui la maggioranza dei professori fino al 1968 ha proposto ai suoi alunni problemi geometrici da risolvere algebricamente, che si riducevano poi, quasi sempre, alla discussione di un trinomio di 2° grado. Nei programmi e piani di studio di quei periodi era detto solamente alla fine: *Nelle ultime quattro classi: applicazioni dell'algebra alla geometria*

di 1° e 2° grado, con relativa discussione; ma, a causa della presenza di questo argomento quasi ogni anno alla maturità scientifica, gli insegnanti dedicavano sempre tantissimo tempo ad esso, tanto che De Finetti definì questa abitudine "*Trinomite, ... una tra le più vistose tra le disgraziatamente non poche forme di cretinismo scolastico*".
Nelle prove di matematica attuali i maggiori motivi di discussione sono il fatto che non ci sia un criterio condiviso da tutti i commissari italiani che regoli la correzione delle prove e il fatto che i problemi e i quesiti assegnati spazino tra tanti argomenti e ogni anno non ci siano chiari argomenti attorno ai quali ruotino le prove, ma ci si possa aspettare sempre di tutto; ultimamente si sta notando un peso sempre maggiore attribuito alle applicazioni del calcolo integrale, a cui però gli insegnanti raramente in classe riescono a dedicare il tempo necessario.

Grazie alla raccolta *Esami di maturità*, a cura di Ercole Suppa, [37], mi è stato possibile reperire alcune prove scritte di matematica proposte nell'esame di licenza Istituto Tecnico, sezione Fisico-Matematica, prima del 1924, e i problemi della prova scritta assegnati nell'esame di maturità scientifica dal 1924 agli ultimi anni '60; ho poi utilizzato testi contenenti lo svolgimento dei temi di maturità a partire dagli anni '70 fino alla scorsa estate.

In questa tesi ho inoltre pensato di esaminare i punti di vista diversi che, a partire dagli anni '50, il periodico *Archimede* ha diffuso e ho potuto così riflettere sulla varietà del pensiero che anche tra professori e cultori di didattica della matematica ha circolato riguardo a temi importanti come le caratteristiche del liceo scientifico e l'articolazione della prova scritta di matematica alla maturità fin dalle sue origini.

Capitolo 1

Storia del Liceo Scientifico

In questo capitolo si percorrono le tappe principali della storia della scuola italiana, soffermandosi in particolare su quelle che hanno caratterizzato l'insegnamento della matematica nelle scuole di istruzione secondaria superiore, e che hanno portato alla nascita dell'odierno liceo scientifico.
Partendo dall'Unità d'Italia, le proposte innovative riguardo ai curricoli di matematica nella scuola secondaria sono sempre state numerose, alcune sono divenute realtà ordinamentali, altre sono state adottate sperimentalmente, altre ancora, seppure non istituzionalmente, hanno comunque lasciato una loro traccia.
Una Tavola Cronologica, a conclusione di un libro dell'ispettore Vincenzo Vita sulle proposte dei programmi di matematica che si sono susseguite dal 1867 al 1981, mostra una frequenza maggiore di un programma ogni due anni.

1.1 1859: la legge Casati sulla Pubblica Istruzione

Dopo il periodo rivoluzionario che aveva determinato la caduta delle monarchie assolute, la scuola italiana venne ordinata per la prima volta dalla legge Casati, provvedimento legislativo promulgato il 13 novembre 1859 dal ministro della Pubblica Istruzione Gabrio Casati.
Questa legge fissò le caratteristiche generali della pubblica istruzione distinguendo l'*istruzione secondaria classica*, a cui assegnava il "fine di ammaestrare i giovani in quegli studi, mediante i quali si acquista una cultura letteraria e filosofica che apre l'adito agli studi superiori che menano al conseguimento dei gradi accademici nelle Università dello Stato", e l'*istruzione tecnica*, che aveva il "fine di dare ai giovani che intendono dedicarsi a determi-

nate carriere del pubblico servizio, alle industrie, ai commerci ed alla condotta delle cose agrarie, la conveniente cultura generale e speciale". Riguardo alla scuola secondaria classica precisava inoltre che "essa è di due gradi e vien data in stabilimenti separati: pel primo grado nello spazio di cinque anni, pel secondo in quello di tre anni", mentre "l'istruzione tecnica è di due gradi e vien data tanto pel primo, quanto pel secondo nello stadio di tre anni".
La legge Casati non poneva però queste due forme di istruzione allo stesso livello, ma le classificava, escludendo l'istruzione tecnica dal ramo dell'istruzione secondaria: "la pubblica istruzione si divide in tre rami, al primo dei quali appartiene l'istruzione superiore, al secondo l'istruzione secondaria, al terzo la tecnica e la primaria"; l'ordinamento dell'*istruzione magistrale* venne inserito tra le disposizioni riguardanti l'istruzione primaria, quasi a significare il carattere non secondario e non specifico delle scuole destinate alla formazione dei futuri maestri.
Per assicurare l'istruzione classica, la legge Casati istituì il *ginnasio-liceo*, per l'istruzione tecnica la *scuola tecnica* e l'*istituto tecnico*, scuole che hanno subìto le modifiche più sostanziali nel tempo per meglio adeguarsi alle sempre crescenti esigenze della società italiana, e per l'istruzione magistrale *la scuola normale* (scuola che in questa tesi non vuole essere descritta e approfondita, perchè non attenente ai nostri scopi).
La legge Casati, pur rappresentando un momento fondamentale della scuola italiana, si ispirava tuttavia all'ideale dell'educazione classica umanistica, dando così origine a una visione incompleta della cultura.
Emanata in origine per il Regno Sardo e la Lombardia, la legge Casati venne estesa successivamente, non sempre integralmente e talvolta con modifiche rilevanti, alle altre regioni del Regno d'Italia non appena ne era dichiarata l'annessione.
Questa legge rappresentò il cardine dell'istruzione fino al 1923, anno della riforma Gentile.

1.2 Il ginnasio-liceo dal 1859 al 1911

L'anno successivo alla pubblicazione della legge Casati, il ministro Mamiani emanò per il *ginnasio-liceo* regolamenti che fissavano l'orario settimanale delle lezioni, le modalità degli esami e i programmi per gli esami finali del ginnasio e del liceo.
Il 36% delle ore di insegnamento del liceo era dedicato alla matematica e alle scienze.
Nei programmi di matematica era previsto l'insegnamento dell'aritmetica

nelle classi del ginnasio superiore e quello dell'algebra nelle classi del liceo ed erano prescritti argomenti come il calcolo combinatorio, la teoria dei limiti e la teoria delle disuguaglianze di primo e secondo grado con l'applicazione alla discussione di alcuni problemi. Per quanto riguarda la geometria i programmi prescrivevano anche la "divisione armonica delle rette" con i concetti di polo e polare e di asse radicale di due cerchi, la costruzione dei cinque poliedri e le più semplici nozioni sulle sezioni coniche.
Questi programmi non furono però adottati in tutte le regioni d'Italia, poichè si ritenne opportuno seguire la diversa tradizione scolastica che si era consolidata in ognuna di queste prima dell'unificazione.

Non appena costituito il regno d'Italia, si avvertì la necessità di una riorganizzione della scuola italiana, nella quale fossero emanati programmi che unificassero l'insegnamento in tutte le scuole del nuovo stato. Speciali commissioni ebbero l'incarico di formulare e proporre all'allora ministro Coppino i nuovi programmi. Nei ginnasi-licei fu introdotto, per la geometria, su richiesta del Cremona, lo studio diretto degli *Elementi* di Euclide.
I nuovi programmi, emanati nel 1867, sopprimevano l'insegnamento dell'aritmetica pratica e prescrivevano un insegnamento esclusivamente razionale della geometria e dell'aritmetica.
Come si leggeva nelle premesse ai programmi, l'insegnamento della matematica doveva essere visto "come un mezzo di cultura intellettuale, come una ginnastica del pensiero, diretta a svolgere la facoltà del raziocinio e ad aiutare quel giusto e sano criterio che serve di lume per distinguere il vero da ciò che ne ha soltanto l'apparenza" e a tale scopo era necessario non solo che fosse introdotto lo studio degli *Elementi* di Euclide, "il più perfetto modello di rigore geometrico", ma anche che l'aritmetica e l'algebra fossero svolte "col più assoluto rigore"; l'insegnante inoltre aveva il compito di "mostrare il legame di tutte queste parti, la dipendenza loro, e, con unità di metodo, con rigore scientifico, comporre un tutto, che sia avviamento alle scienze esatte e compimento della coltura filosofica degli alunni per ciò che riguarda la logica matematica".

Tutti i regolamenti emanati successivamente alla legge Casati prescrivevano che all'esame di licenza liceale per la matematica fossero previste due prove, una scritta e una orale.
Nel 1875 un decreto Bonghi porta una modifica sostanziale concedendo alla commissione esaminatrice la facoltà di accordare il diploma di licenza "anche a quei candidati i quali, essendosi segnalati nel greco, avessero fallito in matematica o, essendosi segnalati in matematica, avessero fallito in greco, quando dal complesso dell'esame le apparisse che il candidato compensi con la profondità e precisione delle cognizioni in una materia il difetto del-

l'altra", stabilendo inoltre che "quegli i quali hanno ottenuto l'attestato nel modo sopra detto non potranno iscriversi che alle facoltà di scienze naturali e matematiche se hanno fallito in greco, alla facoltà di filosofia e lettere, di diritto e di medicina se hanno fallito in matematica", ma precisando subito dopo che essi "non potranno conseguire la laurea nella facoltà di filosofia e lettere o in quella di scienze se non hanno rifatta e vinta la prova in cui erano falliti". La disposizione Bonghi, ponendo allo stesso livello, ai fini dell'iscrizione alle facoltà universitarie, il diploma concesso in entrambi i casi, considerava uguali i contributi culturali e formativi apportati dalla matematica e dal greco, e non fissava quella discriminazione fra studi classici e studi scientifici, a danno di questi ultimi, che ispirerà invece quasi tutti i decreti succesivi e la stessa riforma Gentile nella istituzione dell'attuale liceo scientifico, discriminazione che solo la liberalizzazione dell'accesso agli studi universitari nel 1969 eliminerà definitivamente.
Con questo decreto iniziò a delinearsi una primitiva differenziazione tra gli studi liceali classici e scientifici.

Il riconoscimento di parità fra le due discipline, una classica e l'altra scientifica, concesso dal decreto Bonghi, non si mantenne costante negli anni successivi, anzi con il passare del tempo prevalse la tendenza opposta che voleva caratterizzare il liceo come scuola di cultura generale ad indirizzo essenzialmente letterario; tendenza incoraggiata anche dal fatto che molti giovani, che si sentivano inclini verso gli studi scientifici, potevano accedere alla sezione fisico-matematica dell'istituto tecnico, che consentendo l'iscrizione alle facoltà universitarie di scienze matematiche, fisiche e naturali e non essendo strettamente legata ad alcuna attività tecnico-professionale, incominciava ad acquistare il carattere di scuola di cultura generale ad indirizzo essenzialmente scientifico.
Nel 1884 venne soppressa la prova scritta di matematica agli esami di licenza ginnasiale e venne stabilito che per gli esami di licenza liceale le prove scritte fossero tutte letterarie con facoltà del Ministro di aggiungerne altre, anche se negli anni immediatamente successivi il Ministro si avvalse di questa facoltà per disporre la prova scritta di matematica agli esami di licenza liceale.
Con questo regolamento si aprì la discussione sull'opportunità di mantenere o meno negli esami finali del liceo la prova scritta di matematica.
Nel 1888 venne ripristinato l'equilibrio tra le due discipline, greco e matematica, con un decreto che prescriveva oltre alla versione dal greco, un "tema sopra una delle discipline scientifiche", con facoltà del candidato di optare per l'una o per l'altra delle prove scritte o di svolgerle entrambe.
Questa disposizione venne confermata l'anno dopo da un regolamento che concedeva inoltre parità di trattamento ai giovani che superassero l'una o

l'altra prova scritta, consentendo l'iscrizione, senza esame, a qualsiasi facoltà universitaria comunque si conseguisse il diploma di licenza. In quell'anno venne inoltre concessa una licenza d'onore a chi avesse superato l'esame in una sola sessione con "dieci punti nell'italiano, nel latino e nella matematica e con non meno di otto punti in ciascuna delle altre materie", questo rispecchiava la tendenza a considerare la matematica allo stesso livello dell'italiano e del latino.
Nel 1891 un decreto prescriveva negli esami di licenza liceale la prova scritta di matematica, in aggiunta a quella di greco, senza possibilità di opzione.
Ma già l'anno successivo, caduto il ministro Villari, a cui si dovette l'ultimo decreto, riprese vigore la tendenza opposta e il nuovo ministro Martini limitò l'apporto che le discipline scientifiche dovevano dare nella preparazione culturale dei giovani; si legge in una sua circolare: "Per quanto si riferisce alle scienze matematiche e naturali, ben comprendono i professori l'opportunità che questi insegnamenti siano tenuti entro i limiti proporzionali al fine per cui, nella scuola classica, si trovano congiunti con le discipline letterarie ... Esse possono (se l'insegnante si tenga, come fu sempre prescritto, ai soli elementi, evitando i particolari minuti e perchè tali qui inutili), contribuire a maturare le menti dei giovani senza ingombrarle e senza togliere soverchio di tempo agli altri studi".
Questa tendenza ricevette forza e riconoscimento da un decreto dell'anno successivo, il 1893, emanato dal ministro Baccelli prima della fine dell'anno scolastico, che soppresse negli esami di licenza liceale la prova scritta di matematica e da un decreto dello stesso anno che soppresse la prova scritta di matematica anche negli esami di licenza ginnasiale e di promozione.
Il liceo assumeva così un indirizzo nettamente letterario che si accentuava ancora di più con i decreti successivi del 1894 e del 1896.
La matematica venne definitivamente eliminata dalle materie ritenute primarie nella formazione dei giovani liceali.

Nel 1898 il ministro Baccelli modificò l'ordinamento del liceo, anche se solo in via sperimentale, istituendo accanto al ginnasio-liceo e soltanto in alcune città sedi di più licei, un *liceo riformato*, dove le filosofie e le materie scientifiche erano in parte sostituite dalle lingue straniere, francese e tedesco.
Il nuovo decreto concedeva inoltre agli alunni dell'ultima classe di questo liceo la possibilità di scegliere tra lo studio del greco e quello della matematica, non consentendo ai primi di potere iscriversi alla facoltà di scienze fisiche, matematiche e naturali, ai secondi la possibilità di iscriversi a quella di lettere e filosofia.
Soppresso questo esperimento dal ministro Gallo, il suo successore, il ministro Orlando, nel 1904, dopo aver disposto che per il greco e la matematica

le prove agli esami di licenza liceale fossero soltanto orali, riprese la possibilità dell'opzione tra lo studio del greco e quello della matematica, concedendola agli alunni promossi alla seconda classe del liceo. Lo scopo di questo provvedimento fu di "consentire ai giovani prossimi alla maturità universitaria un'istruzione più conforme alla propria indole intellettuale e agli scopi concreti delle loro future attività", mediante un potenziamento dell'insegnamento del greco e della matematica, che restavano pur sempre "fra i fattori della cultura generale ", potenziamento ottenuto, per ridurre il sovraccarico, "liberando dall'inutile peso gli incapaci per predestinazione".
Vennero inoltre apportate alcune modifiche al programma d'insegnamento: fino alla prima liceale erano contratte le nozioni necessarie per una preparazione matematica sufficiente a chi non voleva proseguire negli studi scientifici, mentre nelle ultime due classi furono introdotti altri argomenti necessari per dare una più ricca preparazione specifica a chi volesse proseguire nelle facoltà scientifiche. Con queste modifiche i programmi vennero avvicinati così a quelli della sezione fisico-matematica dell'istituto tecnico, rispetto ai quali restavano ancora quantitativamente al di sotto. Il decreto Orlando disponeva inoltre per tutti gli alunni l'obbligo di frequentare un corso complementare di cultura greca, ritenuto utile ed efficace perchè abbracciava tutti gli aspetti, letterari, filosofici e scientifici, del mondo greco.
La facoltà di opzione fu poi soppressa nel 1911.

1.3 L'istruzione tecnica

Lo sviluppo degli insegnamenti tecnico-scientifici in Italia avvenne essenzialmente a partire dalla prima metà del diciannovesimo secolo e coincise col progresso commerciale ed industriale della nazione.
Mano a mano che si specificavano meglio le necessità economiche dell'Italia, si chiariva anche la differenziazione tra scuole tecniche e scuole professionali, le prime dirette a fornire i principi delle scienze e delle teorie tecniche, le seconde rivolte alla formazione di abilità pratiche per mezzo dell'apprendistato e della sperimentazione.
Le scuole destinate ad impartire un'istruzione professionale ai "giovani che non intendono attendere agli studi classici" erano state istuite per la prima volta nell'ordinamento piemontese dalla legge Boncompagni del 1848 che le aveva denominate *Corsi speciali*, per distinguerle dalle scuole tradizionali che erano invece *Corsi Classici*.
La legge Casati nel riordinare queste scuole, distingueva un triennio inferiore, che denominava *Scuola tecnica*, ed un triennio superiore, suddiviso in sezioni, che denominava *Istituto tecnico*, costituito come scuola di istruzione

professionale, stabilendo che in queste scuole gli insegnamenti dovevano essere impartiti "sotto l'aspetto dei loro risultamenti pratici e particolarmente sotto quelli delle applicazioni di cui possono essere suscettibili nelle condizioni naturali ed economiche dello Stato".
Il successivo regolamento del 1860, emanato dal ministro Mamiani, stabiliva quattro sezioni per l'Istituto Tecnico: commerciale amministrativa, agronomia, chimica e fisico-matematica, diversamente distribuite e raggruppate secondo le necessità locali; le prime tre di durata biennale, contrariamente a quanto disponeva la legge Casati, e la quarta, che doveva avviare ad un complesso di professioni, di durata triennale.
Ma appena due anni dopo la legge Casati, nel 1861, gli Istituti Tecnici passarono alle dipendenze del Ministero dell'Agricoltura, Industria e Commercio, perchè potessero provvedere, mediante insegnamenti che si adeguassero ai luoghi ed ai tempi, alle varie e mutevoli esigenze produttive della vita nazionale; questo passaggio aveva lo scopo di potenziare gli insegnamenti professionali.
Nel 1864 furono istituite ben 29 sezioni *speciali* che, per la immediata constatazione di impossibilità nella loro attivazione concreta, furono ridotte subito nell'anno successivo a 9; la sezione fisico-matematica fu soppressa nello stesso anno e venne assorbita dalla nuova sezione di costruzioni e meccanica e gli Istituti Tecnici modificarono la loro denominazione in *Istituti industriali e professionali*.
Successivamente una riforma del 1871 ripristinò la denominazione di Istituti Tecnici, ricostituì la sezione fisico-matematica distaccandola dalla sezione industriale e ne rivoluzionò anche lo spirito informatore, arricchendo e potenziando lo studio delle materie di cultura generale, "perché - si riconobbe - l'insegnamento professionale non può veramente fiorire se non è nutrito da una larga cultura letteraria e scientifica"; nello stesso anno la durata dei corsi che la legge Casati aveva fissato pari a 3 anni fu estesa a 4 o 5 anni, conglobando così in ogni singola sezione l'anno preparatorio comune introdotto col regolamento del 1865, allo scopo di approfondire e riprendere gli insegnamenti impartiti nella scuola tecnica.
La riforma mirava così ad elevare il tono di questi istituti, ma non si riuscì a realizzare questa finalità: per le loro origini di scuole di apprendimento pratico, per la presenza di insegnamenti strettamente professionali e per il ceto sociale della maggior parte dei giovani frequentanti, che provenivano in genere da ambienti familiari economicamente e culturalmente arretrati, continuavano ad essere, sia nella reputazione generale sia nella stessa tradizione legislativa, corsi di studi meno formativi e di livello inferiore al ginnasio-liceo, tradizionalmente ritenuto come l'unica scuola adatta a fornire ai giovani una formazione completa, valida per il proficuo proseguimento negli studi superio-

ri. Sempre nello stesso anno, 1871, le sezioni vennero definitivamente ridotte in fisico-matematica, agronomica, commerciale, sezione di agrimensura, di ragioneria e industriale.
Intanto la scuola tecnica, rimasta nel 1861 alle dipendenze del Ministero della pubblica istruzione e quindi staccata dagli istituti tecnici dei quali, secondo la legge Casati, avrebbe dovuto essere il corso inferiore, acquistava, accanto al fine istitutivo di scuola propedeutica di tali istituti, anche quella di scuola di cultura generale, conclusiva di un ciclo di studi destinato ai giovani che volessero avviarsi immediatamente alle attività lavorative.
Anche nel 1877, dopo il rientro degli istituti tecnici alle dipendenze dello stesso Ministero, la scuola tecnica, costretta a conciliare due finalità diverse, non riuscì a soddisfare nè i sostenitori di una scuola formativa, di cultura generale, come base e premessa di una successiva specializzazione, nè i sostenitori di una scuola pratica, per l'addestramento dei futuri lavoratori.

1.3.1 La sezione fisico-matematica

Fra le sezioni dell'istituto tecnico istituite dal regolamento del 1860, si distingueva ed assumeva una particolare importanza, tanto da essere la più frequentata, la *sezione fisico-matematica*, come quella che, consentendo l'accesso agli studi universitari, appariva la più vicina al liceo; la stessa durata triennale del suo corso di studi, mentre per le altre tre la durata era biennale, la rendeva la sezione più interessante dell'intero istituto tecnico.
Dopo la temporanea fusione con la sezione di meccanica e costruzioni, la riforma del 1871, nel ripristinare questa sezione con il fine specifico di preparare agli studi tecnici superiori, la concepiva come "la base o il perno di ogni altra sezione", dalla presenza essenziale in ogni istituto tecnico, "la sezione cardinale dell'istituto e quella da cui trarranno alimento e vigore tutte le altre".
La sezione fisico-matematica poteva mantenere questa posizione di prestigio in quanto era l'unica che non avviava i propri alunni ad alcuna attività professionale e quindi l'unica che non aveva la necessità di includere nei propri programmi insegnamenti speciali, potendo anzi prolungare nel secondo biennio differenziato gli insegnamenti di carattere generale che nel primo biennio servivano di preparazione alle altre sezioni. Essa diveniva cioè una scuola di cultura generale dove, al posto delle lingue classiche, erano studiate le lingue moderne e, citando un passo della *Relazione* del ministro Maiorana-Calatabiano, "il contributo letterario si trovava controbilanciato in modo preminente da un insegnamento delle scienze fisico-matematiche più intenso e così esteso da invadere anche il campo dell'insegnamento scientifico superiore."
Così quando nel 1877 gli istituti tecnici ritornarono alle dipendenze del

Ministero della pubblica istruzione, la sezione fisico-matematica, con il suo doppio indirizzo letterario e scientifico, costituiva un corso di studi parallelo e sostanzialmente non inferiore alla tradizionale scuola classica; un vero e proprio *liceo scientifico*, come da più parti fu anche riconosciuto: "L'Italia, checchè altri dica, ha già il suo liceo scientifico nella sezione fisico-matematica dell'istituto tecnico"[1].
Le disposizioni che alla fine del secolo furono emanate sugli esami di licenza e sulla concessione della licenza d'onore riguardavano congiuntamente il liceo e la sezione fisico-matematica; nel primo consideravano come materie principali l'italiano, il latino e la storia, mentre nella seconda consideravano come materie principali la matematica e la fisica, accanto ancora all'italiano.
Come ha sottolineato il Vita "la struttura della sezione fisico-matematica era tale da poter dare ai giovani non solo una buona preparazione scientifica, ma anche una pur forte preparazione letteraria, almeno nelle lettere moderne e quindi tale da poter assicurare una preparazione veramente integrale", e a testimoniare tale validità stava, secondo lui, "il fatto che da essa sono usciti scienziati completi come Vito Volterra, Corrado Segre e Francesco Severi".
Eppure nonostante pareri entusiasti riguardo alla sezione fisico-matematica, questa non soddisfaceva gli "umanisti scientifici" di allora; la sua presenza all'interno dell'istituto tecnico la faceva apparire come una scuola di compromesso, intermedia tra scuola classica e scuola tecnica, ben lontana dall'auspicato istituto secondario a base scientifica, del tutto equivalente, ai fini formativi e culturali, al liceo.
È per questo motivo che da più parti si premeva per una riforma radicale delle scuole secondarie superiori che, tenendo conto delle nuove esigenze della società, differenziasse il liceo con un'articolazione capace di dare ai giovani un'uguale formazione culturale, pur se con prospettive diverse.

Poco dopo l'emissione della legge Casati si manifestarono contestazioni alla tradizionale istruzione preuniversitaria, esclusivamente letteraria e classica, che aspiravano ad ottenere una nuova scuola, diversa dalla scuola classica ma conducente come questa agli studi superiori.
Ispirandosi ad altri paesi in cui, per l'avanzato processo di industrializzazione, era stata istituita, accanto alla scuola classica, una scuola di alta cultura, ma senza latino e greco, i sostenitori di questa nuova tendenza ottennero, con il regolamento del 1860, in contrasto con quanto disponeva la stessa legge Casati, che i giovani licenziati della sezione fisico-matematica dell'istituto tecnico potessero iscriversi alla facoltà universitaria di scienze matematiche, fisiche e naturali.

[1] Dalla relazione del Direttore generale Chiarini al Ministro della pubblica istruzione, pubblicata nel Bollettino Ufficiale del 9-2-1899, pag. 349

Anche dopo il passaggio degli istituti tecnici alle dipendenze del Ministero di agricoltura, industria e commercio, questa possibilità continuò ad essere riconosciuta agli alunni di questa sezione e quando, con il decreto del 1865, la sezione fu soppressa ed assorbita dalla sezione quadriennale di meccanica e costruzioni, fu concesso che alla fine del terzo anno, cioè prima del conseguimento del diploma di perito meccanico, potesse essere rilasciato un *Certificato di licenza fisico-matematica* con il quale si poteva accedere ancora alla facoltà di scienze, questa volta previo un esame integrativo di latino.
Negli anni si susseguirono numerose riforme che regolarono l'accesso all'università per gli studenti provenienti dalla sezione fisico-matematica; i cambiamenti attuati riflettevano, con il passare del tempo, un sempre maggiore prestigio che questa sezione stava acquistando.

Mentre la parte strettamente organizzativa degli Istituti Tecnici, vale a dire la suddivisione in sezioni con le rispettive denominazioni e la durata delle singole sezioni, erano state definitivamente stabilite già nel 1871, le materie di insegnamento, gli orari, i programmi continuarono a subire frequenti modifiche fino al 1892, rimanendo poi del tutto invariati.
Il regolamento del 19 settembre 1860 prevedeva tre insegnamenti di "cultura generale" comuni a tutte le sezioni, italiano, storia e geografia, che venivano impartiti da un unico insegnante.
Gli orari ed i programmi subirono sbalzi notevoli e furono soggetti a frequenti incertezze e ripensamenti da parte dei legislatori fino ad essere definitivamente stabiliti nel 1892; le materie e gli orari [2] della sezione fisico-matematica erano i seguenti

	I	*II*	*III*	*IV*
Lettere italiane	6	5	4	6
Lingua francese	3	3	2	-
Lingua tedesca o inglese	-	3	5	5
Geografia	3	3	-	-
Storia	3	3	2	-
Disegno	6	6	4	6
Matematica	6	5	5	5
Fisica	-	-	5	3
Chimica	-	-	3	4
Storia naturale	3	3	-	-
Totale	30	31	30	29

[2] Il regolamento del 1860 prevedeva 4 ore di matematica al primo e secondo anno; nel 1876 le ore salirono a $7\frac{1}{2}$ nel primo e secondo corso e 6 negli ultimi due, mentre il regolamento del 1885 aveva assegnato rispettivamente 6, 5, 5, 4 ore settimanali di matematica.

Gli alunni di tutte le sezioni svolgevano nei primi due anni lo stesso programma di matematica. Gli studenti frequentanti la sezione di agrimensura e industriale continuavano dopo il primo biennio lo studio della matematica con un massimo di 4 ore settimanali in modo però sommario e superficiale, dato l'addensarsi delle materie professionali negli ultimi due anni; le sezioni di agronomia, commercio e ragioneria invece, dopo il primo biennio non seguivano più ore di matematica.
Poichè, dopo i primi due anni, la maggior parte degli alunni dell'Istituto Tecnico non avrebbe più o quasi studiato la matematica, il programma del primo biennio prevedeva uno studio alquanto intenso di questa materia con svariati argomenti che spesso venivano trattati in modo affrettato ed incompleto con scarse applicazioni pratiche ed esercizi. Tutto questo avveniva a svantaggio sia degli alunni della sezione fisico-matematica che avrebbero avuto bisogno di uno svolgimento più accurato e completo degli argomenti del primo biennio, che costituivano le fondamenta per gli studi matematici superiori, sia di quelli delle altre sezioni per cui era essenziale proprio l'aspetto pratico ed applicativo dello studio della matematica del tutto o quasi trascurato nei primi due anni.
Il numero elevato di ore e di materie di insegnamento venne considerato da molti un problema, un sovraccarico enorme per gli studenti, a cui veniva chiesto troppo, e oltretutto, secondo alcuni, non permetteva di raccogliere ottimi frutti. Invece secondo altri, come il sopracitato Vita, il numero elevato di materie e di ore di insegnamento degli Istituti Tecnici ed in particolare della sezione fisico-matematica era una caratteristica degna di lode.

Vediamo ora quali direzioni seguivano i programmi di matematica per la scuola tecnica a partire dalla riforma del ministro Coppino.
Nel 1867, a differenza del ginnasio-liceo i cui alunni delle prime quattro classi erano stati esclusi da qualsiasi approccio alla matematica, nelle scuole tecniche fu predisposto un programma di matematica che aveva inizio sin dalla prima classe e che teneva conto delle finalità essenzialmente pratiche che ad essa venivano allora assegnate, dalle istruzioni premesse al programma si legge "il fine dell'insegnamento della matematica nella scuola tecnica è quello di fornire ai giovani in tempo assai ristretto la maggior somma possibile di cognizioni utili per le applicazioni nelle arti e nei mestieri"; ma già nel 1880 un decreto del ministro De Sanctis, ritornato ancora al governo della pubblica istruzione, modificava questo programma, specificando per la prima volta che "l'insegnamento della matematica nella scuola tecnica deve conservare il suo doppio scopo, istruttivo ed educativo".
Altri successivi decreti ad opera del ministro Coppino e di Boselli portarono cambiamenti nei programmi scolastici degli istituti tecnici.

I programmi di matematica per l'istituto tecnico emanati nel 1871 dal ministro Castagnola, rappresentarono, come quelli emanati dal ministro Coppino nel 1867 per il ginnasio-liceo, una svolta decisiva nell'insegnamento della matematica.
Le premesse al programma iniziavano con l'indicazione delle finalità di questo insegnamento: fornire ai giovani un insieme di nozioni "suscettive di utili e non remote applicazioni" e "rafforzare la facoltà di ragionamento".
L'eccessiva estensione dei programmi del 1871 fu dovuta al tentativo di organizzare la sezione fisico-matematica come scuola preparatoria alla scuola di applicazione per ingegneri, ma ai suoi licenziati non fu mai consentita l'iscrizione a quest'ultima scuola, che così potevano accedervi solo dopo sette anni di scuola secondaria. Si dovette quindi intervenire per ridurre il programma di questa sezione entro limiti più contenuti ed evitare che i suoi alunni si trovassero nella situazione di dover ripetere nel primo biennio universitario molti degli argomenti già studiati nella scuola secondaria. Fino al 1892 per questa sezione si susseguirono varie modifiche ai programmi insegnati.
Sinteticamente il programma di matematica della sezione fisico-matematica era il seguente:

Primo biennio: *Aritmetica e algebra*: tutta l'aritmetica razionale, tutta l'algebra elementare. *Geometria*: tutta la geometria elementare piana e solida.
Secondo biennio: *Aritmetica e algebra*: disuguaglianze, massimi e minimi, espressioni indeterminate, frazioni continue, disposizioni, permutazioni e combinazioni, binomio, analisi indeterminata. *Geometria*: figure simmetriche, figure simili ed omotetiche, elementi di geometria descrittiva, sezioni coniche, uguaglianze, area e volume di figure sferiche, poliedri regolari, trigonometria piana e sferica.

I programmi Coppino del 1867 per il ginnasio-liceo e quelli Castagnola del 1871 per la scuola tecnica e gli istituti tecnici riflettevano, a livello di scuola secondaria, lo sviluppo delle ricerche matematiche del tempo sulle geometrie proiettiva e descrittiva; la fedeltà al metodo deduttivo e al modello greco, che aveva ispirato i programmi, doveva risollevare il tono dell'insegnamento matematico e dare ai giovani delle scuole secondarie la formazione indispensabile per affrontare con profitto gli studi universitari. Ma questo indirizzo di assoluto rigore rilevava sempre più le sue deficienze didattiche per l'impatto cui sottoponeva i giovani quattordicenni che dovevano affrontare gli studi geometrici sin dall'inizio con metodo razionale.
È interessante osservare che per il primo biennio dell'Istituto Tecnico e per la scuola tecnica non vennero editi libri di testo di matematica appositamente compilati, perciò tutti i libri di testo adottati nei primi due anni dell'Istituto

Tecnico erano gli stessi utilizzati nel ginnasio superiore e nel liceo. Questa comunanza di libri di testo creava quindi una gran discrepanza tra il libro di testo e l'indirizzo della scuola.

Tabella 1.1: ALUNNI ISCRITTI

	1868	1906
Anno propedeutico comune	-	5768
Fisico-matematica	1722	2441
Commercio e ragioneria	1213	4986
Agrimensura e agronomia	1461	1455
Industriale	92	157
Totale	4488	17420

Tabella 1.2: RAPPORTI TRA L'ISTRUZIONE CLASSICA E L'ISTRUZIONE TECNICO-PROFESSIONALE (SCUOLE DI II E III GRADO)

	in migliaia	in percentuale
1901-02 Istruzione classica	84,8	58,0%
Istruzione tecnica	61,4	42,0%
1911-12 Istruzione classica	110,2	46,2%
Istruzione tecnica	128,3	53,8%
1921-22 Istruzione classica	157,5	43,1%
Istruzione tecnica	216,8	57,9%

Leggendo nelle tabelle i dati statistici riguardanti il numero di iscritti agli Istituti Tecnici, il numero delle sezioni ed i rapporti tra istruzione classica ed istruzione tecnico-professionale, si osserva che gli Istituti Tecnici ed in particolare la sezione fisico-matematica hanno subìto un continuo e progressivo sviluppo.
Nel periodo immediatamente successivo alla legge Casati, la prevalenza della scuola tradizionale di indirizzo classico su quella tecnica e professionale fu piuttosto netta ed evidente.
I dati statistici rilevano una notevole preferenza da parte dei ceti "possidenti" per il liceo ed il ginnasio in rapporto alla scuola tecnica ed all'Istituto Tecnico.
La relazione Bertini sulle condizioni della scuola secondaria italiana all'indomani dell'unità rivelava come l'istruzione tecnica rappresentasse poco più di un terzo della popolazione delle scuole secondarie nel nord, circa un terzo nell'Italia Centrale, un po' meno di un terzo in Sicilia, circa un quarto in Sardegna e un quarto nell'Italia meridionale continentale.

Col trascorrere degli anni, il progresso economico e scientifico del paese ed i bisogni crescenti delle amministrazioni pubbliche e private portarono gradatamente l'istruzione tecnica in una posizione di primo piano; il numero di coloro che affluivano all'istituto fu in continuo aumento e la sezione che rilevò sempre un maggior numero di iscritti, come già detto, fu la fisico-matematica.

1.4 I licei differenziati

La crisi in cui si dibatteva l'istruzione secondaria italiana che, cercando di conciliare tendenze opposte, non riusciva a dare un assetto stabile al ginnasio-liceo, considerato per tradizione come la sola scuola idonea a fornire ai giovani una preparazione adeguata ad affrontare gli studi universitari, verso la fine del secolo sfociava in una più forte caratterizzazione degli istituti esistenti, accentuando da una parte il carattere spiccatamente classico del liceo-ginnasio e potenziando dall'altra la sezione fisico-matematica dell'istituto tecnico.
Ma questa soluzione non appariva pienamente soddisfacente perchè la sezione fisico-matematica sembrava strettamente legata alle finalità professionali dell'istituto tecnico e l'uniformità del liceo ad indirizzo classico sembrava costituire un impedimento per quegli studenti che, non molto dotati nello studio del latino e del greco, avrebbero potuto meglio essere potenziati negli studi a carattere scientifico.
Il problema era già stato avvertito dalla riforma Coppino e vari progetti erano stati presentati per risolverlo: ad esempio nel 1870 il ministro Correnti aveva presentato un *Liceo nazionale* che sostitusse tutti gli istituti di istruzione secondaria esistenti e che soddisfacesse, mediante raggruppamenti unitari di varie materie da realizzare nel suo ambito e nel corso degli studi, le diverse esigenze ed attitudini dei giovani; oppure nel 1879 il ministro Coppino presentò il progetto per un *Liceo misto* nel quale convogliassero il ginnasio inferiore e la scuola tecnica. Il problema aveva avuto anche soluzioni parziali, come quella del *Liceo riformato o moderno* proposto dal ministro Baccelli nel 1889 nel quale si voleva estrarre dal seno dello stesso ginnasio-liceo un corso di studi ad indirizzo diverso.
Questi progetti si rivelarono insufficienti e non inquadrati in un'organica riorganizzazione di tutta la scuola secondaria.
Nel 1905 il ministro Bianchi, sotto il governo Giolitti, decise di affidare ad una "Commissione Reale per l'ordinamento degli studi secondari in Italia" l'incarico di affrontare la questione e di presentare proposte concrete.
La Commissione, presieduta da Paolo Boselli, concluse i suoi lavori nel 1909

presentando un progetto di riforma che veniva incontro alle richieste avanzate delle tre correnti che si erano andate delineando alla fine del secolo, una delle quali propendeva per l'esclusività degli studi classici, mentre le altre due affermavano rispettivamente la necessità di sviluppare gli studi scientifici o le lingue moderne.
Il progetto di riforma Boselli prevedeva nell'ambito delle scuole di cultura generale a carattere pre-universitario, un ginnasio di tre anni senza latino, come scuola unica di preparazione agli studi secondari superiori, da cui si dipartivano tre licei quinquennali: il liceo classico con latino e greco, il liceo moderno con latino e due lingue straniere ed il liceo scientifico con scienze esatte e sperimentali e lingue moderne, trasfomazione della sezione fisico-matematica.
L'istruzione tecnica professionale si distingueva ancora in due gradi, inferiore e superiore, e costituiva un ramo a sè.
Il valore che veniva assegnato al titolo finale di studio conseguito nei tre licei non era però lo stesso: il diploma di liceo classico consentiva l'iscrizione al primo corso di qualsiasi facoltà universitaria o istituto superiore, la licenza del liceo moderno non era valida per l'iscrizione alla facoltà di lettere se non previo esame integrativo di lingua e letteratura greca e la licenza del liceo scientifico doveva essere integrata per l'iscrizione alla facoltà di giurisprudenza da un esame di lingua e letteratura latina e per l'iscrizione alla facoltà di lettere anche da un esame di lingua e letteratura greca.
Questa discriminazione rifletteva ancora una volta il predominare della tendenza che vedeva negli studi classici un valore formativo integrale della personalità dei giovani e in quelli scientifici soltanto un valore parziale, tendenza che ebbe i suoi riflessi anche nella successiva riforma Gentile.
Al progetto di riforma Boselli erano allegate, per ciascun tipo di scuola, proposte di programmi; il programma di matematica per il quinquiennio del liceo, in ciascuno dei tre tipi, era concepito dalla Commissione Boselli come prolungamento di quello del corso inferiore.
Anzitutto i programmi proposti per il liceo classico e per il liceo moderno coincidevano nelle prime quattro classi, differendo solo nell'ultima classe per assumere un carattere più consono alle finalità del corso corrispondente; quello del liceo scientifico, che prevedeva 5 ore per ogni classe, presentava un contenuto più ampio, ottenuto spostando nelle prime tre classi quanto negli altri due tipi di liceo era previsto per le prime quattro classi ed includendo nelle ultime due classi quelle nozioni che erano ritenute indispensabili per completare e rafforzare la preparazione scientifica dei giovani che frequentavano questo tipo di liceo (venivano sviluppati più a fondo i concetti di funzione e derivata e veniva introdotta per la prima volta la nozione di integrale, fino ad allora mai inclusa nei programmi ministeriali della sezione

fisico-matematica).
Il progetto Boselli non riuscì ad avere la necessaria approvazione e fu abbandonato, ebbe soltanto una parziale realizzazione nel 1911, quando il ministro Credaro volle istituire, presso il ginnasio-liceo tradizionale, che da questo momento iniziò ad essere formalmente chiamato classico, una sezione di *ginnasio-liceo moderno* quinquennale che si prefiggeva, come finalità propria, la formazione culturale dei giovani non solo attraverso lo studio della lingua nazionale e della tradizione latina, ma anche mediante lo studio delle lingue moderne ed una più ricca preparazione scientifica[3].
Contemporaneamente fu soppressa per gli alunni del liceo classico la facoltà di opzione tra il greco e la matematica, concessa dal ministro Orlando nel 1904, e furono emanati nuovi programmi.

1.5 La riforma Gentile e la fine della sezione fisico-matematica

Il processo evolutivo della scuola classica italiana verso una differenziazione che nel suo stesso seno diede vita a sezioni diverse, ma con uguale validità e potere formativo, trovò un'imperfetta soluzione nel 1923 con la riforma Gentile, che portò a considerare, ai fini della formazione culturale dei giovani, soltanto l'apporto delle discipline storico-estetico-letterarie, trascurando e sottovalutando l'apporto che potevano dare le discipline scientifiche in generale e la matematica in particolare.
"La cultura formale della scuola media è cultura essenzialmente umanistica e però essenzialmente letteraria e filologica perchè nella letteratura è la espressione più pura dell'animo umano e la filologia è lo strumento necessario ad intendere la letteratura", queste parole pronunciate dal Gentile mostrano chiaramente il principio guida che il ministro seguì nell'ideazione della sua riforma.
Il Reale Decreto del 6 maggio distingueva gli istituti medi in tre categorie corrispondenti a tre fini diversi:

[3]In questa scuola la matematica interessava in quanto linguaggio adatto a scrivere i fenomeni naturali e perciò i suoi programmi presentavano significative novità: si sottolineava che l'insegnante doveva far notare come i concetti fondamentali della matematica moderna, quello di funzione in particolare, fossero suggeriti dalle scienze d'osservazione e come, precisati successivamente dalla matematica, avessero a loro volta esercitato un benefico influsso sullo sviluppo di queste. La nozione di funzione e il calcolo infinitesimale furono introdotti per la prima volta in modo ufficiale proprio in questa scuola. Il Liceo moderno fu l'unica, parziale, realizzazione del progetto presentato dalla "Commissione Reale per l'ordinamento degli studi secondari in Italia".

- Le scuole complementari di tre anni destinate a completare l'istruzione che si impartiva nelle elementari.

- Gli Istituti Magistrali con un corso inferiore di quattro anni ed uno superiore di tre destinati all'esercizio del magistero elementare.
  Gli Istituti Tecnici di otto anni (quattro anni per il corso inferiore e quattro anni per il superiore) con lo scopo di preparare gli alunni all'esercizio di alcune professioni e corrispondenti alle antiche sezioni di commercio, ragioneria e agrimensura. Quelle che prima costituivano la sezione agronomica e la industriale vennero affidate al Ministero dell'Economia Nazionale.

- Le scuole più propriamente di cultura con lo scopo di preparare i giovani agli studi superiori e comprendenti il ginnasio-liceo, ed il *liceo scientifico.*

Il ginnasio era di cinque anni, tre per l'inferiore e due per il superiore, mentre il liceo era di tre anni.
Il *Liceo Scientifico*, al posto sia dell'antica sezione fisico-matematica dell'istituto tecnico che della più recente sezione di ginnasio-liceo moderno, aveva la durata di quattro anni ed era l'unica scuola priva di un proprio corso inferiore propedeutico, vi si poteva accedere mediante un esame di ammissione dal quadriennio inferiore dell'Istituto Tecnico, dalla quarta ginnasio e dal quadriennio inferiore dell'Istituto Magistrale.
Inoltre, essendo i programmi per l'esame di ammissione al liceo scientifico gli stessi di quelli previsti per l'esame di ammissione all'istituto tecnico superiore, la nuova scuola rimaneva, come lo era la sezione fisico-matematica, ancorata alle scuole ad indirizzo tecnico.
Il liceo scientifico era così sorto, in un certo senso, dalla fusione del liceo moderno con l'antica sezione fisico-matematica.
Vengono quindi soppressi la sezione fisico-matematica, per il suo carattere "ibrido" e la "discorde duplicità" dei fini, e il liceo moderno, perchè ogni scuola doveva "corrispondere ad una cultura ben definita", istituendo al loro posto "un liceo speciale in cui i bisogni della cultura scientifica abbiano la loro piena soddisfazione".
Il ginnasio-liceo moderno, a causa del sopravvenire del periodo bellico, subito dopo la sua istituzione, non aveva avuto la possibilità di assumere una propria fisionomia e soprattutto non aveva potuto rivelare la validità della sua impostazione; la sezione fisico-matematica aveva invece una sua valida tradizione di scuola efficiente e formativa e la sua soppressione costituì un notevole passo indietro.
La riforma Gentile sembrò dunque realizzare quella scissione tra la sezione

fisico-matematica e le altre dell'Istituto Tecnico che da tanti e per tanto tempo era stata desiderata.
Ma il liceo scientifico sorto nel 1923 era solo apparentemente la continuazione della sezione fisico-matematica con la quale, a parte la suddivisione in quattro anni, aveva ben poco in comune.
Lo studio delle materie scientifiche e della matematica assunsero in questa scuola una funzione ed un'importanza neanche paragonabili a quella che aveva sempre avuto nell'antica sezione; in essa la matematica non aveva lo scopo di diffondere una moderna cultura scientifica (come nel liceo moderno), nè quello di preparare specificatamente alle facoltà scientifiche (come nella sezione fisico-matematica), ma doveva sviluppare, come scriveva Gentile, "l'attività analitica e sistematica dello spirito".
Ad aggravare l'insufficienza della nuova scuola stava anche il fatto che essa "ha per fine di sviluppare ed approfondire l'istruzione dei giovani che aspirano agli studi universitari in facoltà diverse da quelle di giurisprudenza e di lettere", mentre il liceo classico, senza dare un'adeguata preparazione scientifica, consentiva ai propri alunni l'accesso anche alle facoltà scientifiche.
"Lo spirito antimatematico, ed in generale antiscientifico", come lo definì Vita, che animava la riforma Gentile, si manifestava anche nella distribuzione dell'orario settimanale assegnato a questa disciplina, che raggiungeva la sua punta minima: nel ginnasio-liceo un'ora nella prima classe, due ore in ciascuna delle altre classi del ginnasio, 3, 2 e 3 ore in prima, seconda e terza liceale; nel liceo scientifico 5 ore in prima e 3 in ciascuna delle altre tre classi.
A causa di questa diminuzione di ore rispetto al regolamento relativo alla sezione fisico-matematica del 1892, che parve piuttosto eccessiva, e per il prescritto abbinamento dell'insegnamento della matematica alla fisica[4], la riforma Gentile incontrò le più forti critiche da parte dei professori di matematica della scuola secondaria e della scuola universitaria, compresi i soci della Mathesis[5]; anche l'Accademia dei Lincei[6] protestò contro la riforma perchè impregnata di insegnamenti filosofici troppo astratti e lontani da ogni spirito scientifico.

[4]Con la riforma Gentile nel 1923 era sorta la laurea mista in matematica e fisica e il relativo abbinamento della matematica e della fisica nelle scuole secondarie.
Solamente nel 1960, volendo accentuare la distinzione fra l'indirizzo astratto, puramente logico-deduttivo proprio della matematica, e l'indirizzo sperimentale proprio della fisica, il nuovo ordinamento didattico soppresse la laurea (mista) in matematica e fisica.

[5]Società italiana di matematica (successivamente di scienze fisiche e matematiche) fondata nel 1895 sotto la presidenza di Bettazzi. Composta in prevalenza da professori di scuole secondarie, ha sempre potuto fruire anche di un vivo interesse da parte di professori universitari.

[6]L'Accademia dei Lincei, fondata nel 1603 da Federico Cesi, è la più antica accademia del mondo; annoverò tra i suoi primi soci Galileo Galilei.

Per garantire la libertà d'insegnamento, il programma di matematica del liceo scientifico era compilato sotto forma di "programma d'esame" del conclusivo esame di Stato, e non prevedeva una scansione annuale; gli insegnanti avevano il compito di preparare gli studenti al superamento degli esami e quindi potevano organizzare le lezioni, modulare gli argomenti, nei vari anni del corso, secondo propri metodi.
I programmi sia per gli esami di ammissione che per quelli di maturità, non portavano alcuna indicazione metodologica, quasi a voler rappresentare la minore considerazione in cui questa scuola era tenuta rispetto al liceo classico; inoltre come programma d'ammissione valeva quello indicato per gli esami di ammissione all'istituto tecnico superiore, perpetuando così il vecchio ordinamento che vedeva come scuola propedeutica alla sezione fisico-matematica la scuola tecnica.
Diversamente da quanto previsto per il ginnasio-liceo, nei due tipi di esame era prevista la prova scritta su un "problema riguardante la materia degli esami orali", ma tra gli argomenti indicati per gli esami di maturità non si faceva cenno a disequazioni o a discussioni di equazioni parametriche di primo e di secondo grado. Nonostante ciò i problemi inviati dal Ministero per questi esami comportavano sempre lo studio e la discussione di un'equazione parametrica, condizionando di conseguenza la preparazione dei giovani e la stessa trattatistica; una maggiore aderenza al programma avrebbe sicuramente evitato l'instaurarsi di un metodo di studio di tipo meccanico e ripetitivo, senza alcuna incidenza formativa, che ha caratterizzato la preparazione matematica dei giovani del liceo scientifico in questo periodo.
Il programma per gli esami di maturità era quantitativamente più ricco di quello previsto per gli esami di maturità classica, ma presentava comunque sempre elementi di disorganicità e frammentarietà. La stessa divisione in due parti distinte del programma, delle quali una raccoglieva argomenti che avevano un carattere prevalentemente algoritmico e l'altra conteneva argomenti da studiare sotto l'aspetto teorico, non aiutavano a dare una visione unitaria della matematica.
Il programma di matematica era quantitativamente inferiore sia a quello previsto per il vecchio liceo moderno che a quello precedentemente in vigore nella sezione fisico-matematica.
Rispetto al vecchio programma della soppressa sezione di liceo moderno, nel nuovo c'era un minore sviluppo della geometria analitica, oltre ad un distacco più netto tra le questioni di algebra e quelle di geometria; rispetto a quello della sezione fisico-matematica, mancava lo studio dei primi elementi di geometria descrittiva e di trigonometria sferica, e lo studio di vari argomenti particolari sui solidi.

1.6 I programmi di matematica per il liceo scientifico dopo la riforma Gentile fino al 1945

I programmi emanati nel 1936 dal ministro De Vecchi comportavano variazioni di poco rilievo, distribuendo la materia nei vari anni di corso e sopprimendo alcuni argomenti facoltativi, come ad esempio la teoria della similitudine nello spazio.
Come nuova indicazione metodologica riferita al liceo scientifico, venne espresso che, a causa del maggior sviluppo del programma, era possibile portare i giovani a "meglio riconoscere i rapporti tra le varie teorie" e quindi a vedere il loro mutuo intrecciarsi e anche la loro stretta connessione fra le varie parti della matematica e le applicazioni di questa alle questioni fisiche.
L'anno successivo Bottai emanò nuovi programmi d'esame, che pur non comportando variazioni sostanziali da quelli di De Vecchi, presentavano lo stesso carattere nozionistico riscontrato nei programmi emanati a seguito della riforma Gentile. Per gli esami di maturità scientifica veniva espresso che il colloquio doveva tendere ad accertare che il candidato sapesse "comprendere la connessione logica delle proposizioni studiate, sviluppando anche il procedimento dimostrativo delle più importanti". Di particolare interesse era il riferimento ai problemi di applicazione dell'algebra alla geometria previsti per l'esame orale della maturità scientifica, "con discussione servendosi anche del piano cartesiano, e deduzione, nei casi semplici, della risoluzione per via sintetica". Quest'ultima indicazione ebbe però una limitata fortuna, mentre continuò a dominare la discussione basata sull'uso di disequazioni ed equazioni parametriche, delle quali in realtà non c'era cenno in questi programmi, come già in quelli di De Vecchi e Gentile.
Così il programma di matematica per gli alunni frequentanti il nuovo liceo scientifico era ridotto rispetto a quello previsto per le due scuole che esso sostituiva e la riforma Gentile, anche per questo motivo, rappresentava per l'insegnamento matematico un notevole passo indietro.

1.7 La riforma Bottai della Scuola Media

Nel 1940, con il ministro Bottai, venne gradualmente iniziata una nuova riforma della scuola secondaria italiana, che per le vicessitudini della seconda guerra mondiale poteva essere solo attuata in parte, limitatamente cioè al primo triennio, che veniva costituito come scuola a sè, sotto la denominazione di *Scuola Media*, unificante i trienni inferiori del ginnasio, dell'istituto magi-

strale e dell'istituto tecnico.
La matematica confinata prima ad un rango di disciplina di seconda categoria, sia come contenuti sia come orari, acquisì a questo punto una certa dignità: con la riforma del Bottai il numero delle ore settimanali veniva portato a 3 ore per ogni classe e negli esami di licenza fu ripristinata la relativa prova scritta.
I contenuti del programma erano ancora di tipo tradizionale, mentre le indicazioni metodologiche presentavano qualche carattere di modernità; è interessante notare che per la prima volta venne fatto l'invito a "corredare le lezioni di aritmetica e geometria con appropriate piccole informazioni di carattere storico".

1.8 L'insegnamento della matematica dal 1945 al 1959

Subito dopo la fine della guerra, le mutate condizioni politiche del nostro paese, portarono all'emanazione di nuovi programmi sia per la scuola media che per i licei e gli istituti magistrali. Questi programmi dapprima furono formulati da una Commissione nominata dai Governi Alleati ed emanati per i territori occupati, successivamente fatti propri dal Ministero della Pubblica Istruzione ed estesi, con inizio dall'anno scolastico 1945-46, a tutto il territorio nazionale.
L'insegnamento della matematica per la scuola media tornò ad avere un carattere che privilegiava principalmente l'aspetto pratico e sperimentale dell'insegnamento a questo livello e il riferimento alle notizie storiche divenne opzionale.
Anche i programmi per i licei della stessa Commissione non presentavano novità degne di attenzione.
Interessanti sono le "avvertenze" che corredavano il documento, sia per le classi ginnasiali superiori che per il liceo scientifico, nelle quali si consigliava di "dare largo posto all'intuizione, al senso comune, all'origine psicologica e storica delle teorie, alla realtà fisica" e si suggeriva di seguire un metodo che, attraverso "approssimazioni successive", conducesse "gradualmente i giovani alla piena consapevolezza dei concetti e delle proprietà". Per la prima volta nei programmi ministeriali c'era così un invito esplicito a prestare attenzione alle necessità psicologiche degli alunni.
(Il programma formulato nel 1945 per il liceo scientifico è riportato nel paragrafo 7.1 di questa tesi.)
Purtroppo, nonostante queste chiare indicazioni di natura didattica, i con-

tenuti dei programmi erano ancora quelli della Riforma Gentile. Le novità metodologiche non vennero avvertite, perchè non trovarono spazio nei libri di testo, che seguivano gli stantii schemi tradizionali, non facendo così leva sugli insegnanti.
Si continuava ad insegnare un'algebra rivolta alle sole regole di calcolo, apprese meccanicamente, senza consapevolezza, ed una geometria priva d'apertura ad analisi critiche.
La metodologia era quella ex cathedra: spiegazione, applicazione, interrogazione; si apprendeva e si ripeteva.
Così, mentre i suggerimenti di natura didattica mostravano una chiara evoluzione verso una maggiore aderenza alle necessità psicologiche dei discenti, i libri di testo e gli argomenti elencati nel programma si mantenevano ancorati ad un vecchio modello.

Nel 1952 una Consulta Didattica, coordinata per la matematica da Attilio Frajese, nominata dal ministro Gonella, provvedeva ad elaborare nuovi programmi di studio, in relazione ad un progetto di riforma per il riordinamento della scuola secondaria.
La riforma Gonella prevedeva, dopo la scuola elementare, un corso medio triennale suddiviso in tre indirizzi: classico, tecnico e normale. La matematica, insieme alle osservazioni scientifiche, era tuttavia materia comune nei tre rami. La scuola superiore era costitita da tre indirizzi liceali di durata quinquennale, classico, scientifico e magistrale, ai quali si accedeva dal ciclo medio classico, e da indirizzi tecnici e professionali di varia durata.
La premessa ai programmi dei tre corsi liceali si rivelava interessante: in essa era detto, con riferimento alla geometria, che, per rendere più graduale l'approccio razionale a tale disciplina, spesso ostacolo per gli studenti meno adatti e occasione di rifiuto della matematica , "è opportuno evitare nelle prime classi del liceo l'introduzione di una sfilza di postulati, partendo invece da proprietà evidenti per avviare il processo dimostrativo". Si consigliava anche di tralasciare dimostrazioni di proprietà di chiaro carattere intuitivo, la cui sottigliezza non sempre a questa età è colta. La sistemazione della geometria era prevista nelle ultime due classi liceali, quando "i giovani per la maggiore maturità raggiunta e per gli studi filosofici già intrapresi, sono in grado di poter meglio affrontare uno studio puramente razionale della geometria", durante questi ultimi due anni era didatticamente opportuno riservare attenzione "alla rielaborazione critico-storica di qualche argomento precedentemente trattato, come saggio esemplificativo del processo ipotetico-deduttivo e del valore del rigore della matematica".
Si andavano delineando quindi alcune linee che si ritrovarono poi nei programmi sperimentali degli anni '80.

L'orario previsto per la matematica era tuttavia molto esiguo, addirittura inferiore a quello della riforma Gentile, ad esempio per il liceo scientifico erano previste 3 ore per ogni classe, eccetto l'ultima per la quale ne erano predisposte 2.
I programmi della Consulta non furono però mai attuati perchè la legge di Riforma Gonella non fu approvata dal Parlamento.
I programmi proposti dalla Consulta per i licei attribuivano alla matematica ancora una valenza eminentemente formativa, mentre per l'istruzione tecnica i programmi attribuivano alla matematica un significato decisamente strumentale e di supporto alle discipline professionali.

Nel 1959 il ministro Medici emanò un nuovo programma per gli esami di maturità che non sostituì il piano di studi del 1945, ma fissò, per i candidati frequentanti l'ultima classe, in aggiunta al programma svolto in questa, i principali argomenti del programma delle classi precedenti sui quali le commissioni esaminatrici potevano condurre il colloquio d'esame. A questo riguardo nell'elenco relativo al liceo scientifico comparvero "le equazioni parametriche; confronto delle radici con uno o due numeri dati", argomenti che, in verità, non erano menzionati nel piano di studi del 1945.
Il programma Medici aderì, anche se in misura abbastanza ridotta, ai principi che avevano ispirato la proposta della Consulta didattica del 1952 di richiedere la rielaborazione finale per l'acquisizione del processo ipotetico-deduttivo; diceva infatti il nuovo decreto: "una parte dell'esame consisterà nell'esposizione di concetti fondamentali (definizioni, enunciazioni di proprietà e dimostrazione logica di qualcuna di queste)".
Il decreto del ministro Medici, per vari motivi, non ebbe mai piena esecuzione.

Negli anni '60 iniziò a farsi sempre più strada il dibattito in merito ai problemi della scuola italiana sia in ambienti specializzati, che presso la stampa[7].
Autorità, associazioni e studiosi denunciavano quanto fosse grande il numero delle storture da correggere, e iniziarono concretamente ad impegnarsi perchè gli insegnamenti scientifici iniziassero ad assumere nella scuola italiana il giusto posto che loro competeva.
Il fatto che nella scuola italiana si dedicassero agli insegnamenti scientifici orari troppo scarsi era constatato anche dal confronto con gli orari ed i pro-

[7] Come per esempio in *Archimede*, "rivista per insegnanti e cultori di matematiche pure e applicate", che fu fondata nel 1949. Uno dei suoi obiettivi era quello di sensibilizzare gli insegnanti secondari di matematica ai problemi più urgenti e importanti del suo insegnamento, in modo da sollecitare il processo di revisione degli ordinamenti scolastici italiani. Soprattutto negli anni '60 in essa si incominciò ad accusare la riforma del 1923 per aver creato nel liceo scientifico non una scuola ad orientamento veramente scientifico, ma la "brutta copia" del liceo classico e per aver messo in ogni scuola secondaria in secondo piano, dopo le discipline umanistiche, le materie scientifiche.

grammi degli insegnamenti scientifici nelle scuole secondarie nei principali paesi del mondo, che erano maggiori rispetto all'Italia, e dal fatto che, da noi, le aperture universitarie erano meno agevoli per coloro che preferivano tali insegnamenti.
Nell'articolo di Roberto Giannarelli pubblicato nel numero 2 di *Archimede* del 1959 si legge: "Il vero problema della scuola secondaria italiana, che comprende in sè il problema del latino, è in fondo tutto qui: affermare la piena validità di una scuola secondaria di cultura, seria e severa, senza il latino. In tutti i paesi del mondo una simile affermazione si presenta come naturale, come ovvia ... Da noi, diciamolo chiaramente, sono ancora parecchi coloro che ... negano tale validità. ... Il problema vero si ha completando l'alternativa [di lasciare o togliere il latino dalla scuola media e da altre scuole] col proporre che l'eventuale abolizione del latino conservi alle scuole le possibilità di continuazione degli studi secondari e superiori per tutte le vie che possono essere desiderate dal diplomato.
... Noi siamo convinti della necessità di affiancare al liceo classico un'altra scuola secondaria superiore di cultura che abbia come piloni maestri l'italiano e la matematica ... ma pensiamo anche che in tutte le scuole secondarie occorre rinnovare radicalmente i metodi di insegnamento, modificare e aggiornare i programmi, introdurre le prove scritte senza le quali non si può avere un vero e serio insegnamento della matematica."

1.9 Aria di rinnovamento nell'insegnamento matematico: "A bas Euclid!"

Il Convegno nazionale della Mathesis tenutosi a Roma il 2 maggio 1963, si aprì con le denunce da parte di Mario Villa:
"Mentre, nel sorprendente progresso tecnico-scientifico, la funzione delle matematiche va crescendo con ritmo accelerato, mentre il metodo matematico penetra in tutte le scienze e nelle loro applicazioni, che cosa si può dire finora dell'insegnamento delle matematiche nelle scuole secondarie?
Esso è rimasto là, assolutamente fermo quasi che il grande progresso della matematica moderna non lo riguardasse.
Le Università hanno aggiornato o stanno aggiornando i loro corsi agli sviluppi più recenti delle matematiche. ... Se non vogliamo creare un fossato sempre più largo tra l'insegnamento secondario e l'insegnamento superiore è urgente modernizzare l'insegnamento secondario. ... Occorre dunque dare una maggior cultura matematica a chi non prosegue gli studi matematici e consentire a chi li continua di partire da basi più avanzate.

Una riforma dell'insegnamento della matematica nella scuola secondaria si impone."
Negli anni '60 si accese insistentemente il dibattito sull'insegnamento della matematica, scosso principalmente da un movimento nato qualche anno prima a livello internazionale e tendente a rinnovare l'insegnamento matematico secondario. Questo fervore, attribuendo ai contenuti e alle metodologie tradizionali la responsabilità del rifiuto della matematica da parte di molti studenti, aspetto che si faceva sempre più evidente poichè la scuola stava diventando un fenomeno di massa, portò alla costituzione di una "Commissione internazionale per il rinnovamento ed il miglioramento dell'insegnamento matematico".
Tutto ciò ebbe origine da un convegno organizzato a Royaumont, vicino a Parigi, nel 1959, dall'OCSE (Organizzazione di Cooperazione e di Sviluppo Economico) sul tema "Le nuove matematiche", che aveva lo scopo di fare il punto della situazione sull'insegnamento della matematica nella scuola secondaria dei Paesi membri e di verificare la possibilità di inserire nell'insegnamento stesso i risultati delle più recenti conquiste matematiche, opportunamente adattati. Se la scienza cammina, si diceva, la scuola non può rimanere ferma: infatti la ricerca matematica teorica, soprattutto nel campo dell'algebra, aveva fatto molti passi avanti mentre l'insegnamento scolastico era rimasto fermo all'algebra classica e alla geometria di Euclide.
Tra le relazioni presentate al Convegno, la più significativa, dalle proposte più innovative, con il titolo "Per una nuova concezione dell'insegnamento della matematica" fu quella del matematico Jean Dieudonné. Nella relazione tenuta egli osservò che lo studio della geometria euclidea e dell'algebra elementare, mentre poteva essere considerato sino alla fine del secolo scorso una preparazione sufficiente per gli studenti che all'università avessero seguito studi scientifici, che non oltrepassavano il calcolo infinitesimale e la geometria analitica, risultavano ora inadeguati per la trasformazione che questi programmi avevano subìto, non solo per l'introduzione di concetti nuovi ma anche per l'uso di un linguaggio completamente diverso da quello a cui i giovani provenienti dalle scuole secondarie erano abituati.
Nel corso della conferenza Dieudonné attribuì questo inconveniente all'inattualità dell'insegnamento della geometria greca ("A bas Euclid!" è ormai un noto slogan).
Dieudonné espose anche quali dovessero essere secondo lui i nuovi studi da insegnare, che dovevano rimpiazzare lo studio di Euclide: usare già dalla scuola primaria il linguaggio e le notazioni simboliche moderne della teoria degli insiemi, impiegare i metodi di approssimazione per il calcolo numerico delle radici di un'equazione, rendere familiari in geometria i concetti di simmetria, traslazione, rotazione, per giungere in successivi cicli di studio agli aspetti

formali delle strutture algebriche, in particolare dei gruppi di trasformazioni in geometria e più in generale delle trasformazioni lineari. Inoltre per collegare ulteriormente il programma di matematica per le scuole secondarie con quello svolto nei primi anni di università, propose anche il calcolo differenziale e integrale, l'introduzione dei numeri complessi e la loro interpretazione geometrica, la classificazione delle forme quadratiche, e quindi delle coniche, e la sistemazione assiomatica della geometria.
Il discorso di Dieudonné destò scalpore; al termine del Convegno si decise di costituire una Commissione di esperti, formata da insegnanti di matematica delle Università, scuole secondarie e istituti per la formazione di insegnanti di scuole secondarie, che, sulla base di quanto proposto dal matematico francese, studiasse un possibile programma da sperimentare. Fu sottolineata l'importanza di dare una svolta di ammodernamento all'insegnamento della matematica che però non escludesse totalmente la geometria euclidea, e fu espressa la necessità di pubblicare testi adeguati, aderenti allo spirito della nuova matematica.
Questa commissione, riunitasi nell'agosto del 1960 a Dubrovnik, in Jugoslavia, formulò un progetto di programma, pubblicato nel libro *Un programme moderne de mathématiques pour l'enseignement secondaire*, che costituiva un'introduzione al pensiero matematico indispensabile per una cultura moderna. Le proposte fatte si riferivano ad un corso di tre anni di ciclo medio e ad uno ugualmente di tre anni di ciclo superiore.
Le proposte scaturite dal convegno di Dubrovnik volevano dare suggerimenti per una modernizzazione dell'insegnamento della matematica che tenesse conto dei linguaggi e dei metodi della matematica più recente; dalla lettura degli argomenti proposti in questo programma si osserva che lo studio della matematica poggiava sulle nozioni elementari della teoria degli insiemi, sul concetto di vettore e sull'algebra astratta. Si suggeriva di non dare dall'inizio una presentazione formale delle diverse strutture algebriche, ma di condurre l'allievo attraverso l'esame delle proprietà delle operazioni sugli insiemi numerici, delle composizioni isometriche e di altri opportuni esempi, a cogliere analogie strutturali e pervenire quindi ai concetti di gruppo, anello e corpo. Nei successivi anni di scuola secondaria si poteva dare una sistemazione teorico-formale. In geometria era proposta la classificazione delle diverse proprietà delle figure in base a gruppi di trasformazioni, in particolare di isometrie ed affinità, con qualche riferimento anche alle trasformazioni proiettive. Si chiudeva il programma con la struttura di uno degli spazi studiati, vettoriale, affine o metrico.
Inoltre nel documento si sottolineava l'importanza di dare unitarietà alla matematica e di superare una visione separata dell'algebra e della geometria: i concetti algebrici dovevano essere alla base dello studio della geometria e

questa, a sua volta, doveva servire a vivificare la teoria algebrica.
Da questi programmi si osserva come negli anni '60 ci fosse ancora una scarsa sensibilità pedagogico-didattica e, come osserva il filosofo e pedagogista M. Pellerey, "fiducia eccessiva in un quasi automatico sviluppo intellettuale collegato all'introduzione di alcune strutture matematiche a scapito di una più incisiva capacità di matematizzazione di situazioni grezze"; la metodologia proposta in questo programma faceva leva su un'attività creatrice, ma non parlava ancora di insegnamento per "problemi".
Per esaminare queste proposte la Commissione Internazionale per l'insegnamento Matematico organizzò nel 1961 un convegno a Bologna dove venne ribadita ancora la necessità di aggiornare l'insegnamento della matematica nella scuola secondaria, fermo da mezzo secolo, introducendo trattazioni che presentassero i vari rami della matematica da un punto di vista unitario. In particolare venne esaminata la geometria, che per le varie tendenze nel modo di introdurla, offriva le maggiori difficoltà nel processo di modernizzazione dell'insegnamento.

1.10 Proposte e innovazioni negli anni '60-70

Subito dopo il Convegno, il Ministero della Pubblica Istruzione organizzò Corsi di preparazione per gli insegnanti e istituì le Classi Pilota di matematica nelle quali, accanto ad argomenti tradizionali, dovevano essere impartiti argomenti di matematica moderna. Queste classi avrebbero dovuto rappresentare, per l'intera comunità dei docenti, fari di ammodernamento, ma, nonostante gli apprezzamenti ed i giudizi positivi che ricevettero dai professori che le tennero, non lo furono, infatti come Classi Pilota vennero istituite solo alcune penultime classi di licei ed istituti magistrali, perciò non si ritennero validi i risultati della sperimentazione. Una sperimentazione condotta in una classe intermedia di un corso di studi ed i cui alunni sono stati preparati in precedenza con metodi tradizionali, non può infatti dare risultati attendibili perchè l'inserimento, in un contesto che segue determinati criteri e metodi, di argomenti nuovi da presentare con criteri e metodi diversi, può determinare negli allievi un fenomeno di rigetto che in altre situazioni potrebbe anche non verificarsi.
Le Classi Pilota ebbero comunque la funzione di stimolare l'ambiente accademico e scolastico interessato ai problemi dell'insegnamento verso forme di ricerca teorica e sperimentale.

Il nuovo indirizzo trovò in Italia la sua prima applicazione, in occasione di una riforma della scuola secondaria inferiore che unificò la presistente scuola media dell'ordinamento Bottai con la scuola di avviamento professionale, nei

programmi che per questa scuola media unificata furono emanati dal ministro Gui nel 1963.
È interessante osservare che con tale riforma la scuola elementare assunse carattere obbligatorio, nonostante i primi otto anni di scuola fossero obbligatori già con la Riforma Bottai, ma non c'era stata sufficiente attenzione all'osservanza.
Sempre dalla conferenza d'apertura del Convegno della Mathesis riportiamo un apprezzamento di M. Villa a questa riforma scolastica "... per la grande maggioranza dei giovani questa nuova scuola aprirà possibilità che altrimenti sarebbero state loro negate. E la Società ne sarà avvantaggiata anche perchè la selezione potrà esser fatta su un numero di giovani molto maggiore."
Nonostante questi fatti positivi non mancarono denunce dei matematici a problemi che comportò questa riforma come l'abbinamento dell'insegnamento delle "Osservazioni ed elementi di scienze naturali" a quello della matematica.

Negli anni '60-'70 si succedettero molte proposte di rinnovamento del curricolo di matematica della scuola secondaria.
Uno stimolante confronto di idee tra posizioni innovatrici e attegiamenti conservatori si ebbe in occasione di due convegni promossi dall'U.M.I. (Unione Matematica Italiana) e dalla C.I.I.M. (Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica) che si svolsero nel febbraio del 1966 e del 1967 presso il Centro Europeo dell'Educazione (CEDE) di Villa Falconieri a Frascati.
Ai due convegni parteciparono numerosi docenti universitari, impegnati nella ricerca didattica, e docenti di scuola. A quell'epoca mentre l'università era molto interessata all'innovazione dell'insegnamento matematico, non accadeva lo stesso nella scuola secondaria, dove regnavano principalmente la staticità e l'inerzia.
Al termine dei due convegni furono formulati i due Programmi di Frascati che costituirono una proposta unitaria per le prime due classi della secondaria ed una proposta "minima" per il triennio delle scuole liceali, con esclusione dell'istituto magistrale.
I programmi facevano riferimento a due finalità della matematica: "Formare la mente del giovane introducendolo alla riflessione e al ragionamento matematico e fornirgli alcuni semplici, ma fondamentali strumenti di comprensione e di indagine"; in essi si affermava che "una notevole fonte di interesse sta nella possibilità di risolvere problemi significativi, tratti da vari campi della scienza e della tecnica, e di far precedere, ove sembri opportuno, l'esposizione teorica dei vari argomenti da una presentazione di problemi che ne suggeriscono la trattazione".
Comincia quindi a farsi strada una metodologia "per problemi" che sarà

ripresa nelle proposte sperimentali formulate in seguito. L'attenzione ai problemi di apprendimento e alle esigenze educative a tutti i livelli di scuola incominciò da questo momento ad essere sentita.
Un auspicio fatto al Convegno di Frascati esprimeva il desiderio che "ai giovani, invece di poche vie scolastiche pressochè equivalenti, come ora avviene, si aprano parecchie scuole accortamente predisposte in modo da far corrispondere a vocazioni anche lievemente diverse, molteplici ordinamenti scolastici, come avviene nell'istruzione secondaria dei Paesi più moderni e progrediti" (dall'articolo *Nuovi programmi di matematica per i licei* di R. G., pubblicato in *Archimede*, n. 2-3 del 1966).
Al Convegno ci si augurava di innalzare l'insegnamento matematico in tutte le scuole secondarie e in modo nettamente differenziato nelle scuole a carattere scientifico-tecnico, destinate a divenire sempre più numerose. Quindi si riteneva necessario creare una scuola secondaria veramente scientifica con orari settimanali adeguati per le materie scientifiche e per rendere tale il liceo scientifico era necessario togliere ore all'insegnamento delle materie letterarie e darlo a quello delle materie scientifiche.
Leggiamo la drastica conclusione di un articolo di Mario Villa, riguardante il convegno, pubblicato sul numero 5-6 del 1966 di *Archimede*: "...o si faccia un vero liceo scientifico oppure si prenda una soluzione più semplice, la più semplice di tutte: lo si sopprima. Si ritorni cioè alla situazione precedente alla riforma Gentile, rimettendo in vita, con i necessari aggiornamenti, la vecchia sezione fisico-matematica degli istituti tecnici."

Nel settembre del 1965 si verificò un notevole calo nelle iscrizioni alla quarta ginnasiale (liceo classico) e un forte aumento nelle iscrizioni al liceo scientifico, agli istituti tecnici industriali e per geometri, questo a causa della facoltatività dello studio del latino nella terza classe di scuola media e soprattutto dell'apertura di tutte le facoltà universitarie, tranne quella di lettere, ai provenienti dal liceo scientifico e dall'apertura di parecchie facoltà universitarie ai provenienti dagli istituti tecnici.

Tra coloro che auspicavano una riforma scolastica, nel numero 1-2 di *Archimede* del 1968, presso la rubrica *Polemiche matematiche* anche Giro (pseudonimo del direttore del periodico Roberto Giannarelli) espresse la sua opinione, affermando che i tempi fossero ormai maturi per risolvere il problema della scuola "che veda accanto al vecchio e glorioso liceo classico, da conservare e da difendere, un'altra scuola che formi, con altri insegnamenti, quella parte di giovani che ad essi si sentono vocati ...sono finalmente arrivati i tempi favorevoli alla creazione, in Italia, di una via che conduca i giovani all'Università, dopo che questi avranno seriamente lavorato in una scuola secondaria veramente scientifica la quale non rappresenterà un puro ritorno al passato perchè tra essa e la sezione fisico-matematica di tempi lontani esisterà ben poco di comune dopo quasi mezzo secolo in cui la civiltà e la cultura hanno compiuto passi giganteschi."

Dal 1966 al 1972 furono attivati nuovi indirizzi di istruzione tecnica, con i relativi programmi, e furono rivisti anche programmi già funzionanti. Interessante e supportato da valide considerazioni metodologiche appare il programma per l'indirizzo Periti aziendali e Corrispondenti esteri; in esso veniva sottolineata l'importanza di coordinare la matematica con le altre discipline, in particolare quelle professionali, che offrono esempi di "problemi" del mondo reale per un'attività di matematizzazione, si legge "sarà opportuno, partendo dal concreto, abituando al ragionamento, avviare alla teoria e, se si vuole, all'astratto, per consentire l'abitudine alla generalizzazione". Così l'invito alla metodologia "per problemi" compare per la prima volta in un programma ufficiale, così come per la prima volta nei contenuti dell'ultima classe sono inseriti concetti riguardanti il calcolo automatico e i principi di funzionamento degli elaboratori elettronici. Così nel 1966 l'informatica entrò nella scuola.
Negli anni '70 il computer influenzava quasi tutta la vita sociale e produttiva dei paesi sviluppati, ed era ovunque oggetto di studio in indirizzi specialistici della scuola secondaria. Anche in Italia vennero attivati l'ITC per perito programmatore (1970) e l'ITI per perito informatico (1972). L'informatica in questi indirizzi era una disciplina autonoma ed aveva prevalentemente funzione di formazione professionale, era affiancata da un separato, ma forte, insegnamento della matematica, della statistica, della probabilità e della ricerca operativa.
Nel 1969 venne approvata la legge che riformava l'esame di maturità liberalizzando l'accesso all'università a tutti i diplomati di un corso quinquennale; nel 1974 vennero approvati i Corsi Delegati, alcuni dei quali consentivano l'attuazione di progetti sperimentali di innovazione.
Nel 1977 ci fu una importante Riforma della Scuola media che rappresentò la seconda revisione del ciclo medio nel dopoguerra e che portò a compimento l'unicità della Scuola dell'obbligo, sopprimendo le materie opzionali ancora esistenti. La matematica formava ancora un'unica cattedra con le scienze sperimentali, che cambiò solo di nome, assumendo la denominazione di Scienze matematiche, chimiche, fisiche e naturali e attribuendosi complessivamente 6 ore settimanali in ciascun anno, decisione che non soddisfece del tutto la comunità matematica.
I programmi proposti erano innovativi sia nei contenuti che nelle modalità di presentazione. Venivano indicati dapprima gli obiettivi e i suggerimenti metodologici dell'insegnamento scientifico nel suo complesso, a sottolineare

l'unitarietà del sapere anche con altre discipline, poi separatamente obiettivi, metodologie, e contenuti per la matematica e per le scienze sperimentali. Lo sviluppo dell'intuizione, sostenuto da ragionamenti gradualmente più organizzati, l'acquisizione di capacità di comunicazione mediante il linguaggio naturale, ma anche simbolico e grafico, la conquista di capacità di sintesi attraverso l'osservazione di analogie strutturali in situazioni diverse, erano gli obiettivi principali da raggiungere in matematica. Sempre più esplicitamente si faceva riferimento a un insegnamento "per problemi" che "dall'analisi dei fatti concreti avvii ad un'attività di matematizzazione intesa come interpretazione matematica della realtà". Inoltre in questi programmi si trovava l'invito ad un uso ragionato di strumenti di calcolo, come le calcolatrici tascabili.
Questo programma si rivelò di certo interessante ma fu forse troppo ambizioso per trovare reale applicazione nelle scuole, in cui spesso i nuovi contenuti venivano esclusi e ci si rifugiava nell'inerzia dell'insegnamento tradizionale.
Questi programmi hanno costituito un forte punto di riferimento per le scelte successive effettuate nella scuola secondaria superiore, anche solo a livello sperimentale. A partire dal 1974 furono infatti attivati nelle scuole secondarie molti progetti sperimentali, autorizzati con Decreto dal Ministro. Quelli dell'Istruzione tecnica e dell'Istruzione professionale acquistarono sempre maggior importanza e alcuni anni dopo il '90 divennero di ordinamento. Nei Licei fiorirono progetti autonomamente elaborati dalle scuole che, in seguito, si trasformarono in Progetti Brocca e, successivamente ed in misura limitata, in Progetti Proteo e Autonomia.
Iniziò un periodo di massimo impegno in cui enti ed associazioni si occuparono dell'innovazione matematica a tutti i livelli scolastici e nel 1975 presso alcune università sorsero i Nuclei di ricerca didattica con la collaborazione tra docenti universitari e di scuola. I progetti sperimentali della scuola secondaria superiore seguivano principalmente le indicazioni del Programma di Frascati.
Fu questo dunque un periodo ricco di ricerca teorica e sul campo, ed anche di rinnovata produzione editoriale, che tuttavia, vedeva coinvolte poche scuole coraggiose.

1.11 Il Piano Nazionale per l'Informatica

Il *Piano Nazionale per l'Informatica (PNI)* fu varato nel 1985 dal Ministro Falcucci con l'intento di introdurre l'informatica nelle scuole di ogni ordine e grado. In realtà questo progetto di grandissima portata coinvolse solo la scuola secondaria superiore, di cui aggiornò nell'arco di sette anni

circa 24.000 docenti di matematica e fisica.
Uno dei problemi che si presentò nell'elaborazione di questa sperimentazione fu dove e come inserire l'insegnamento dell'informatica, se come disciplina autonoma o nell'ambito di altre discipline.
Il Comitato propose che l'insegnamento delle basi teoriche dell'informatica, in indirizzi non specialistici, fosse inserito all'interno della matematica e della fisica, discipline a cui essa doveva la sua nascita e il suo sviluppo; come infatti scriveva G. Prodi in un articolo: "Vi sono profonde ragioni di carattere culturale che legano l'informatica ai capitoli più tradizionali della matematica: sono rami che escono da uno stesso tronco".
Durante l'anno scolastico '85/86 furono preparati e avviati corsi di aggiornamento dei docenti, alla fine dello stesso anno '85 furono scritti i programmi di matematica e fisica del biennio, che nell'anno scolastico '86/87 furono inseriti nelle scuole in maniera informale. Dall'anno scolastico '87/88, dopo le dovute approvazioni, fissati orari e cattedre, resi familiari ai docenti nell'ambito dell'aggiornamento PNI, i programmi furono proposti ed adottati sperimentalmente da moltissime scuole di ogni ordine.
L'aggiornamento andò avanti fino al 1992/1993. Nel frattempo, nell'anno 1989 furono scritti i programmi del triennio, che entrarono in attuazione con continuità con quelli del biennio.
Il comitato istituito dal Ministero, formato da docenti universitari e ispettori, che elaborò i programmi del biennio, ritenne che non ci si potesse limitare ad una semplice aggiunta di contenuti, ma fosse necessario un riesame completo delle mete formative, e quindi dei contenuti e delle metodologie.
In linea con una visione unitaria del biennio elaborò due soli programmi, uno più intenso, di matematica "forte", e uno più ristretto, detto programma "debole" che però qualitativamente non si differenziava dal primo.
I programmi furono organizzati in una premessa che esplicitava le finalità della matematica e ne fissava gli obiettivi da raggiungere, nei contenuti raggruppati in grandi temi senza scansione annuale, ciascuno dei quali aveva un commento che ne dava la chiave di lettura, e nei suggerimenti metodologici. I temi costituivano un quadro di riferimento entro cui il docente doveva organizzare un cammino didattico, muovendosi e integrando i contenuti l'uno con l'altro.
Nella premessa erano sottolineate la matematizzazione della realtà, estesa anche all'interpretazione e alla modellizzazione di fenomeni economici e problemi sociali, ed i processi di formalizzazione, che avevano acquistato maggiore importanza con l'avvento dell'informatica. Veniva suggerito un insegnamento "per problemi" e di evitare un apprendimento episodico. (Nel paragrafo 5.1 di questa tesi, dalla Circolare Ministeriale del 6 febbraio 1991, n. 24, ho riportato gli obiettivi e i contenuti del programma PNI per il trennio del

liceo scientifico.)
Per quanto riguarda l'informatica l'attenzione inizialmente fu rivolta soprattutto agli aspetti algoritmici più che a quelli strumentali, nonostante ciò si iniziava già a parlare di "insegnare l'informatica, insegnare con l'informatica". L'uso delle tecnologie come strumento per insegnare, si è andato via via affermando ed ha finito per prevalere.
I programmi PNI ebbero una grande azione dirompente. Infatti la matematica insegnata in quel momento nelle scuole liceali era del 1945, ma di fatto risaliva alla riforma Gentile, e anche i programmi degli indirizzi attivati successivamente o riformati, tranne qualche eccezione, presentavano lo stesso piatto panorama.
Nel 1996 la Direzione Classica, accogliendo le osservazioni di molti docenti sulla complessità dei programmi PNI del triennio, procedette ad una loro modifica per le scuole liceali, in un'ottica di riduzione dei contenuti e anche di omogeneizzazione ai programmi Brocca. Il programma conservava la formulazione per temi, affiancata da una proposta di suddivisione per anni, alcuni argomenti vennero soppressi, altri semplificati o presentati come facoltativi.
La sperimentazione PNI ha avuto grande diffusione nelle scuole di ogni ordine nelle classi del biennio, mentre a livello di triennio la sua presenza è stata forte essenzialmente nei licei ed in particolare nel liceo scientifico.
Inoltre nelle scuole liceali, i decreti approvativi del progetto, che inizialmente erano distinti per biennio e per triennio (consentendo così l'attivazione anche nei soli primi anni di studio) divennero quinquennali, poichè si ritenne privo di fondamento didattico cambiare a metà del percorso di studi contenuti e metodologie di insegnamento.
Con il progetto PNI una matematica vestita a nuovo entrava ufficialmente nella scuola secondaria superiore in forma sperimentale, ma si trattava di sperimentazione voluta dal Ministero e diffusa su larga scala.

1.12 La matematica nel Progetto Brocca

Nel 1987, la mancata approvazione delle diverse proposte di riforma della scuola secondaria superiore, dovuta soprattutto all'alternarsi di governi in tempi molto ravvicinati, indusse il Ministro in carica a costituire un comitato presieduto dall'on. Brocca, sottosegretario alla Pubblica Istruzione, con il compito di redigere un progetto di riordino della scuola secondaria superiore. Il Comitato definì le finalità e l'impianto generale della nuova scuola ed i piani di studio degli indirizzi che avrebbero dovuto sostituire la Scuola liceale e tecnica. Ci fu un forte dibattito sulle finalità e sulle caratteristiche dell'indirizzo scientifico, tra coloro che sostenevano il latino ad oltranza e quelli

che ritenevano più proficuo rafforzare la formazione scientifica. In conclusione furono previsti due indirizzi, quello scientifico con il latino e quello scientifico-tecnologico senza latino e con l'informatica come materia autonoma. In entrambi, in ogni caso, l'area scientifica era ben rappresentata.
Una commissione elaborò i programmi: nel 1988 quelli del biennio, nel 1990 quelli del triennio e il progetto fu attivato in via sperimentale nell'anno scolastico '91/92.
Il programma di matematica del biennio Brocca ricalcava in sostanza quello del biennio PNI.
Le indicazioni metodologiche del *progetto Brocca* iniziavano diversamente da quelle del PNI: "Non ci si può illudere di poter partire da una disciplina già confezionata, cioè da teorie e da concetti già elaborati e scritti, senza prendersi cura dei processi costruttivi che li riguardano. È invece importante partire da situazioni didattiche che favoriscano l'insorgere di problemi matematizzabili, la pratica di procedimenti euristici per risolverli, la genesi dei concetti e delle teorie".
I programmi del triennio dei due progetti presentavano diversità sia sull'organizzazione del curricolo, che in quello Brocca era scandito per anni anzichè per temi, sia per alcuni contenuti.

Gli orari di insegnamento della matematica in entrambi i progetti furono in generale soddisfacenti.
Come il PNI, anche il Progetto Brocca ha avuto attuazione soprattutto nei Licei. I programmi di matematica PNI e Brocca, pur con degli aggiustamenti, furono attivati anche in Progetti assistiti dell'Istruzione tecnica, compresi quelli divenuti di ordinamento, e nel Progetto '92 dell'Istruzione Professionale.

Capitolo 2

Caratteristiche della maturità scientifica fino alla riforma del 1968

L'articolo 33 della Costituzione italiana afferma: *" . . . È prescritto un esame di Stato per l'ammissione ai vari ordini e gradi di scuole o per la conclusione di essi e per l'abilitazione all'esercizio professionale. . . . "*.
Esame di maturità è il nome con il quale l'*Esame di Stato conclusivo del corso di studio di istruzione secondaria superiore* (o più genericamente *Esame di Stato*) è comunemente conosciuto ed è la prova finale del corso di studi della scuola superiore italiana.
Esso permette il conseguimento del diploma di attestazione degli studi effettuati prima d'intraprendere l'età adulta, gli studi all'università e la vita professionale.
Questo tipo di esame può essere sostenuto da tutti gli studenti che abbiano frequentato una scuola secondaria di secondo grado.

2.1 Storia dell'Esame di maturità

L'esame di Stato, nato con la riforma Gentile ha subìto numerose modifiche nel corso degli anni, per adeguarlo di volta in volta alle istanze socioculturali di ciascuna diversa epoca e al mutare delle esigenze e degli obiettivi della scuola secondaria; i cambiamenti hanno riguardato sia la struttura delle prove scritte e orali, sia la composizione delle commissioni giudicatrici, sia le formule per l'assegnazione dei voti finali.
Prima del 1923 l'esame di Stato era semplicemente l' *esame di licenza.*

Analizziamo i cambiamenti principali a partire dal 1923, anno della sua nascita.

Nel 1923 il ministro Gentile fissò con un decreto che al termine degli studi liceali, per entrare all'Università, gli studenti fossero obbligati a sostenere un esame di Stato con alcune prove che permettessero di giudicare la maturità del candidato. Proprio per questo iniziò a chiamarsi *"esame di maturità"*.
L'esame si articolava in quattro prove scritte e una prova orale su tutte le materie dell'intero corso, (ricordiamo che la riforma Gentile non prevedeva "programmi di studio", ma "programmi d'esame", da modulare durante i vari anni dell'intero corso).
La commissione esaminatrice era costituita esclusivamente da docenti esterni, in gran parte professori universitari, ed era presieduta formalmente dal ministro. Gli esami si tenevano fuori sede (40 sedi su tutto il territorio nazionale per la maturità classica, 20 sedi per la maturità scientifica).
La votazione non prevedeva un punteggio unico, ma tanti voti quante erano le materie.
Era prevista la sessione di esami di riparazione.
Le prime due prove scritte erano italiano e latino, comuni ad entrambi i licei; le altre due prove erano greco e ancora latino (traduzione in latino dall'italiano) al classico, matematica e lingua straniera allo scientifico.
L'impatto di questo nuovo esame fu particolarmente pesante: nell'anno scolastico 1924/1925 i promossi furono il 59,5% alla maturità classica e 54,9% alla maturità scientifica (l'anno precedente, quello dell'esordio, la percentuale era stata ancora più bassa).
L'esame fu poi alleggerito negli anni successivi dal ministro Pietro Fedele, sotto la pressione dell'opinione pubblica.

Nel 1940 a causa della guerra, vennero apportate dal ministro Bottai molte semplificazioni nelle procedure dell'esame di maturità del Gentile.
In questi anni il propagarsi del conflitto, anche nel territorio italiano, rese estremamente problematico lo spostamento di studenti e insegnanti e la convocazione stessa delle commissioni esterne, venne così a mancare la regolarità delle prove e venne disposta la sostituzione dell'esame con lo scrutinio finale.

Nel 1951 il ministro Guido Gonella ripristinò l'esame di maturità di Gentile sia per il numero delle prove scritte e per l'orale, che per la formazione della Commissione. Le uniche novità furono l'introduzione dei membri interni (prima due e poi soltanto uno) e la limitazione dei programmi ai due anni precedenti l'ultimo, per i quali venivano richiesti soltanto "cenni".

Nel 1969 il ministro Fiorentino Sullo estese l'esame di maturità a tutti i corsi di studio dei cicli quadriennali e quinquennali di istruzione secondaria superiore e decise che l'esame consistesse in due prove scritte e due materie per il colloquio (di cui una a scelta del candidato) e che il punteggio finale fosse espresso in sessantesimi. Vennero soppressi gli esami di riparazione relativi all'esame finale e liberalizzati gli accessi agli studi universitari. Nelle classi sperimentali vennero stabilite due prove scritte ma anche un colloquio orale su tutte le materie del quinto anno. La commissione era completamente esterna tranne che per la presenza di un membro interno. Il decreto, convertito nella legge n. 146 del 1971, avrebbe dovuto avere una validità sperimentale di soli due anni, ne durò invece quasi trenta.

Nel 1997 il ministro Luigi Berlinguer, con la Legge 425 del 10 dicembre 1997, stabilì numerosi cambiamenti a cominciare dalla denominazione: da *Esame di maturità* si passò ad *Esame di Stato*, basato sulla verifica e certificazione delle conoscenze, competenze e capacità. Vennero previste tre prove scritte, di cui la terza predisposta dalla Commissione, ed un colloquio su tutte le discipline dell'ultimo anno; vennero introdotti il credito scolastico e il credito formativo. La Commissione era composta da 6 o 8 commissari, di cui metà interni e metà esterni, più il Presidente esterno all'Istituto. Si stabilì che la votazione finale fosse espressa in centesimi: 45 punti alle prove scritte, 35 al colloquio orale, e 20 punti al credito scolastico.

Nel 2001 il ministro Letizia Moratti, con la Legge del 28 dicembre 2001, n. 448 (legge finanziaria del 2002), stabilì che le Commissioni fossero costituite da soli membri interni e da un Presidente esterno nominato per tutte le Commissioni operanti in ciascun istituto.

Nel 2007 il ministro Giuseppe Fioroni, con la Legge dell'11 gennaio 2007, n. 1, ritornò alle Commissioni miste e reintrodusse l'ammissione all'esame; il credito scolastico passò da 20 a 25 punti e il colloquio da 35 a 30 punti.

Infine nel 2010 il ministro Mariastella Gelmini ha stabilito che dall'anno scolastico 2009/2010 non basta più la semplice media sufficiente, ma, per essere ammessi all'Esame di Stato, bisogna riportare un voto almeno pari al sei in tutte le discipline.

L'esame di maturità venne svolto dal 1924 al 1968 in due sessioni (l'estiva e l'autunnale di riparazione) e dal 1969 ad oggi in un'unica sessione, quest'ultima tuttora si articola nella sessione ordinaria e in quella suppletiva, che permette di sostenere l'esame ai candidati impossibilitati a farlo nella sessione ordinaria.

2.2 La seconda prova alla maturità scientifica

Come già affermato varie volte, il Liceo Scientifico venne istituito nel 1924, come riforma della sezione fisico-matematica degli Istituti Tecnici.
Nell'esame conclusivo del liceo scientifico è sempre stata presente la prova scritta di matematica.
Dall'istituzione di tale ordine di studi fino al 1968 l'esame prevedeva la prova scritta su tutte le materie per le quali lo scritto era presente nel piano di studi e nel liceo scientifico la matematica era tra queste.
La legge di riforma del '69 riduceva le prove scritte a due, delle quali la seconda da scegliere tra alcune materie indicate per ciascun indirizzo da un'apposita tabella. Per il liceo scientifico, ovviamente, tra queste c'era la matematica che, di fatto, fu sempre proposta fino alla riforma successiva del 1997.
Quest'ultima, che innalzò a tre le prove scritte, stabilì che la seconda dovesse vertere su una materia che caratterizzasse l'indirizzo di studi, per cui le norme d'ordinamento prevedevano prove scritte con valutazione formale.
Per il liceo scientifico d'ordinamento, l'unica disciplina che soddisfaceva a tali criteri era la matematica, che pertanto, venne assegnata negli esami di Stato del giugno 1999 e 2000.
Lo stesso avvenne per i corsi sperimentali del Progetto Pni, mentre per il Progetto Brocca ad indirizzo scientifico e ad indirizzo scientifico-tecnologico, oltre alla matematica, venne scelta la fisica.
Prima del 2000 la prova era consistita, a seconda degli anni, in uno o più quesiti, di cui non sempre era chiaro a quanti il candidato dovesse rispondere, creando spesso notevoli incertezze tra gli studenti e i commissari d'esame. Sinteticamente:

- 1924-1969: la prova consisteva in uno o due problemi con varie domande; era interamente obbligatoria, senza possibilità di scelta da parte del candidato (durata della prova: quattro ore);
- 1970: un solo problema con più domande;
- 1971-1972: quattro problemi tra cui sceglierne *almeno* due;
- 1973-1975: quattro problemi tra cui il candidato doveva scegliere e risolvere *quelli che riteneva più adeguati alla propria preparazione*;
- 1975: tre problemi tra cui sceglierne *almeno* due;
- 1976-1989: quattro problemi tra cui sceglierne *almeno* due;

- 1990-1999: tre problemi tra cui sceglierne due (durata della prova dal 1971 al 2000: cinque o sei ore);
- dal 2000: "Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario" (durata della prova: sei ore)

Come si è appena letto, dal 1971 venne introdotto il diritto di scelta da parte del candidato, ma con una formulazione ambigua, non era specificato infatti cosa significasse *almeno*: non veniva detto se risolvere almeno due problemi portasse ad avere la sufficienza oppure il massimo punteggio, inoltre anche la parola *adeguatezza* comportava numerose ambiguità.
Tutto ciò creava anche problemi di soggettività nella valutazione dell'elaborato.
L'imprecisione della formulazione, lamentata da molti docenti, spinse nel 1990 ad una formulazione meno ambigua da parte dell'Amministrazione Scolastica, perciò a partire da tale anno e fino al 1999 furono proposti tre quesiti entro cui il candidato doveva sceglierne e risolverne esattamente due.

Le prove di matematica (come quelle delle altre materie fondamentali) sono state sempre ministeriali, ossia proposte dal Ministero della Pubblica Istruzione e perciò uguali per tutto il territorio dello Stato italiano, con l'eccezione degli anni tra il 1940 e il 1945, a causa degli eventi bellici di quell'epoca.
Le caratteristiche dei temi ministeriali sono cambiate nel tempo, aderendo agli indirizzi pedagogici e didattici prevalenti al momento, e la variazione più notevole e innovatrice si è avuta col passaggio dal primo periodo (quello che va dal 1924 al 1968) al secondo (dal 1969 ad oggi).

2.3 L'esame di licenza fisico-matematica nell'Istituto Tecnico

Purtroppo sono riuscita a raccogliere pochi dati sull'esame di licenza a cui venivano sottoposti i candidati della sezione fisico-matematica.
Dalle poche informazioni (non molto chiare!) trovate sono giunta a conoscenza che fino al 1923, nell'esame di licenza fisico-matematica si assegnavano due temi, inizialmente uno di teoria dei numeri, allora in programma, e uno di geometria, mentre nell'ultimo periodo entrambi di applicazione dell'algebra alla geometria.
Il tema più vecchio che sono riuscita a reperire risale alla licenza del 1898:

Facendo ruotare un triangolo rettangolo di un giro completo intorno a ciascuno dei cateti successivamente si hanno due coni. Si indichino con $S^{'}$ ed $S^{''}$ le superfici *laterali dei due coni e con S la superficie della sfera avente per diametro l'ipotenusa. Determinare i lati del triangolo nell'ipotesi che sia: $aS' + bS'' = cS$ dove a, b, c sono numeri assoluti noti e sia pur data la superficie s del triangolo.*

Le questioni principali dei problemi assegnati in questo periodo riguardavano a sfere, coni inscritti o circoscritti a sfere o generati dalla rotazione di un triangolo attorno ad un lato, quadrilateri inscritti in circonferenze o studi di triangoli.
Un problema abbastanza caratteristico di questo periodo è simile a quello del 1921:

Trovare i cateti di un triangolo rettangolo sapendo che l'ipotenusa è a ed il rapporto tra il raggio r_a del cerchio exinscritto tangente all'ipotenusa a ed il raggio r del cerchio inscritto è m.

2.4 Prove di matematica al Liceo Scientifico dal 1924 al 1968

2.4.1 Premesse

A partire dalla nascita dell'esame di maturità, il problema proposto fu quasi sempre unico e non lasciava perciò facoltà di scelta al candidato.
Il fatto che, fin dalla riforma Gentile, le prove fossero assegnate dal Ministero della Pubblica Istruzione, fece avanzare da subito pareri discordanti e proteste che accusavano la potestà accentratrice del Ministero, sostenendo che l'uniformità delle prove fosse eccessiva, in quanto livellava tutti gli Istituti (o almeno le ultime classi), limitando la libertà d'insegnamento.
D'altra parte questa assegnazione delle prove costituiva un efficace mezzo di controllo della preparazione dei candidati di ogni Istituto e di confronto tra le diverse scuole, che si trovavano così alla pari nel momento degli esami conclusivi.
Il fatto che fosse il Ministero ad assegnare le prove comportava perciò aspetti vantaggiosi ma anche aspetti inconvenienti.

Anche il problema dell'assegnazione di un tema o di due temi a scelta fu quasi subito al centro di una discussione che vedeva schierate varie opinioni. Chi sosteneva la possibilità di scelta presso i candidati, vedeva nell'assegnazione di due problemi una soluzione adatta per adeguare la natura del tema alla preparazione del candidato, ma questo comportava anche la possibilità che il giovane, non troppo esperto, potesse indugiare assai a lungo su uno dei temi e quindi, in presenza di serie difficoltà, potesse essere indotto a tentare

la risoluzione dell'altro tema, andando così incontro ad una notevole perdita di tempo e di energie.
D'altra parte, il candidato doveva mostrare di avere una certa "intuizione" nella scelta del tema che più rispettasse la sua preparazione perchè anche questo concorreva alla valutazione delle sue capacità intellettuali.
Chiaramente queste considerazioni si riferivano a quei candidati che erano preparati, in modo più o meno completo, su tutte le parti del programma, mentre non valevano per quei candidati che, sapendo che alla prova scritta avrebbero avuto la facoltà di scegliere tra un tema di applicazione dell'algebra alla geometria e una questione di geometria analitica, preferivano omettere del tutto lo studio di una delle due parti.
In un articolo del numero 6 del periodico *Archimede* del 1953 si constatava che "casi di questo genere non sono infrequenti, e riguardano sia candidati privatisti isolatamente presi, come pure intere classi, nelle quali l'insegnante, per un verso o per l'altro, vantandosi di possedere "senso pratico", con scarso senso di responsabilità, preferisce limitare la preparazione per la prova scritta orientando i giovani ad uno solo dei due temi tradizionali." L'assegnazione di un solo tema avrebbe in questo caso permesso di fermare abusi di questo genere, perciò gli autori dell'articolo suggerivano di assegnare "un solo tema, o di applicazione di algebra alla geometria, o di geometria analitica, o eventualmente di altro tipo, variando la scelta nelle successive sessioni".

Riguardo l'articolazione della prova di matematica, intorno agli anni '60 cominciavano a comparire anche proposte di suddivisione del compito in una serie di quesiti indipendenti.
Questa idea prendeva spunto da una simile formulazione della prova ormai collaudata in molti Stati e permetteva di rendere il giudizio dei commissari d'esame più uniforme.
Nei convegni di Frascati, si parlò anche della licenza liceale, e si propose appunto che la prova scritta di matematica fosse articolata in alcuni semplici quesiti fra loro indipendenti, intesi a valutare la preparazione su punti diversi del programma d'insegnamento e atti a saggiare la maturità dell'allievo. I motivi di questa decisione erano di rendere la prova più idonea agli effetti del giudizio, e di evitare distorsioni nello svolgimento del programma intese a "preparare alla prova scritta". Tra le cose che infatti facevano perdere tempo, a scapito dello svolgimento del programma, c'era il gonfiamento dei metodi e degli accorgimenti per svolgere il tema d'esame quando esso verteva su un dato tipo stereotipato di questioni.
Si sosteneva che una prova con molte domande, semplici ma gradualmente discriminative, avrebbe indotto a distribuire in maniera equilibrata l'attenzione su tutti gli argomenti del programma. Una prova articolata con nu-

merose domande avrebbe permesso un giudizio più valido, più globale, meno aleatorio.
D'altra parte alcuni ribattevano che questa tipologia di prova non permetteva però di stabilire collegamenti, controlli o verifiche, cosa che invece era necessaria nella risoluzione di un articolato problema, in cui spesso bisognava ritornare sui propri passi, per rivedere, magari sotto altri punti di vista, il proprio lavoro e rimetterlo tutto in discussione.

A conclusione di questa discussione può essere interessante leggere quanto Salvatore Temussi nel numero 1-2 di *Archimede* del 1967 sosteneva: "...la prova scritta di matematica degli esami di maturità ... da alcuni anni è oggetto delle più disparate critiche a volte troppo superficiali. La questione dei temi delle prove di esame è da considerare con la massima attenzione perchè il modo come esse si svolgono condiziona inevitabilmente tutto l'insegnamento, e bisogna evitare che la scuola sia prevalentemente corso di preparazione agli esami."

2.4.2 I temi assegnati

Nel periodo tra il 1924 e il 1968 il compito d'esame si articolò per la maggior parte degli anni in un problema geometrico da risolvere con l'aiuto dell'algebra o della trigonometria.
Generalmente compariva un parametro (a volte più di uno), che comportava impostare una discussione sulla possibilità di esistenza e sul numero delle soluzioni del problema, mentre altre volte, una domanda complementare facoltativa richiedeva la risoluzione per via geometrica del problema, oppure generalizzazioni delle questioni trattate.
Assai rari sono stati quesiti di sola algebra (risoluzione di equazioni o sistemi, ecc.).
Propongo ora alcuni esempi specifici di problemi assegnati in quegli anni.

Dal 1924 al 1933 si assegnò un unico tema di algebra applicata alla geometria.
Tema assegnato nella sessione riparatrice (o sessione autunnale) del 1925:

Determinare gli angoli acuti $\angle ABC = \beta$ ed $\angle ACB = \gamma$ di un triangolo rettangolo ABC in modo che sia soddisfatta la relazione: $p \sin\beta + q \sin\gamma = r$ dove p, q, r, sono tre numeri positivi assegnati. Fissati p, q, con $p < q$, fra quali limiti può variare r perchè il problema abbia soluzione?
NB. Il candidato potrà assumere, volendo, come incognita $\tan\frac{\beta}{2}$. È poi in sua facoltà completare l'esercizio costruendo il triangolo rettangolo ABC di data ipotenusa $BC = a$, i cui angoli acuti β e γ fanno assumere ad r (cioè a $p \sin\beta + q \sin\gamma = r$) il

massimo valore di cui è suscettibile.

Tema assegnato alla sessione estiva del 1927:

Dato un angolo retto yOx ed un punto M ad esso interno che abbia da Oy ed Ox rispettivamente le distanze a e b, condurre per M una retta tale che, detti A e B i punti d'intersezione di essa coi lati dell'angolo retto, si abbia $AM^2 + BM^2 = m^2$, dove m è un numero reale assegnato. Discutere i risultati e dire come deve essere condotta la retta AB, perchè sia minima la somma $AM^2 + BM^2$.
Il candidato ha facoltà di esaminare la questione da un punto di vista più generale, considerando anche i casi nei quali la retta AB incontra uno dei lati dell'angolo retto ed il prolungamento dell'altro.

La sola eccezione al problema di algebra applicata alla geometria fu nella sessione di riparazione del 1929, nella quale l'unico tema assegnato consistette nella risoluzione di un sistema di quarto grado:

Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha = a^2 \\ x(x+y) = m^2 \end{cases}$$

e dare le condizioni a cui debbono soddisfare a, m ed α affinchè x ed y siano reali.
Il candidato può, se lo crede, discutere anche il segno delle radici in relazione ai valori di a, m ed α.

Dal 1934 si ritornò ai due temi, ma con l'innovazione che uno dei due riguardava una conica, qualche elemento di geometria analitica compariva già nelle prove anche se un pò mascherato (come nel problema del 1927 riportato prima).
Da questo momento la geometria analitica iniziò ad acquistare importanza, comparendo successivamente sempre con più frequenza, soprattutto con quesiti sulle coniche o su altre curve che non fossero la retta e il cerchio (nei problemi assegnati fino al 1940, la parabola fu la protagonista quasi assoluta di questo tipo di problema!); in un articolo del numero 6 di *Archimede* del 1953 si sottolineava che su questo argomento "dal 1934 in poi, a mano a mano si sono assegnati temi sempre più difficili specialmente se si tiene conto dei pochi e semplici argomenti di geometria analitica compresi nei programmi in vigore."
Nella sessione autunnale del 1939 fu proposto un tema che aveva per protagoniste ben due coniche:

Disegnare, in un sistema di assi cartesiani ortogonali, le due curve rappresentate dalle equazioni:

$$y = n(mx^2 + 3x) \qquad (parabola)$$

$$y = \frac{2n}{x} \qquad (iperbole)$$

sapendo che m ed n sono tali che uno dei punti d'intersezione delle due curve è il punto (1; 6).
Determinare inoltre le coordinate degli altri punti d'intersezione delle due curve.
È in facoltà del candidato di trovare anche il massimo dei rettangoli aventi due vertici consecutivi sull'asse delle ascisse e gli altri due sull'arco della suddetta parabola determinato da questo asse stesso.

Insieme alla geometria analitica cominciò a comparire (di rado e molto timidamente!) l'analisi, con la richiesta per lo più di ricerca di punti di massimo o minimo, rette tangenti e calcolo di aree.
Uno dei primi problemi in cui vengono richieste alcune nozioni d'analisi è il secondo problema assegnato nella sessione autunnale del 1934:

Rispetto a due assi cartesiani ortogonali, l'equazione di una curva (parabola) è della forma $y = ax^2 + bx + c$.
Determinare a, b, c, sapendo che la curva passa per i due punti $(0; 1)$ e $(1; 0)$ e che in quest'ultimo è tangente ad una retta inclinata di $45°$ sull'asse delle x.
Determinare anche:
(a) l'altro punto d'intersezione della curva con l'asse delle x e la direzione della tangente in esso alla curva;
(b) il punto della curva di ordinata minima;
(c) come deve essere scelto m affinchè la retta $y = mx$ passante per l'origine intersechi la curva.

Nelle sessioni estive dal 1940 al 1945, come già detto, le prove di maturità non furono regolari in tutto il paese, in alcune città a volte non vennero svolte (come ad esempio al liceo scientifico Righi di Bologna) ma furono sostituite dallo scrutinio conclusivo dell'ultimo anno mentre in altre località furono svolte ma probabilmente seguendo un'autonomia locale.
Nel '45, '46, '47 le scuole funzionarono in maniera precaria e per bombardamenti, sfollamenti, mancanza di insegnanti e di aule il programma ministeriale non sempre venne portato a termine; per non gravare sugli studenti, si stabilì che il programma d'esame dei candidati dovesse vertere sulla materia effettivamente svolta durante l'ultimo anno di scuola. Perciò, col ripristino dell'esame di maturità, gli studenti avevano l'obbligo di rispondere solo su ciò che era stato loro insegnato.
Dal 1946, con la ripresa postbellica, si ritornò ai due temi dei due tipi, fino al 1951.
Ad esempio nella sessione autunnnale del 1948 vennero proposti questi due problemi:

1. Data una circonferenza di diametro $AB = 2r$, determinare sul prolungamento di AB, oltre B, un punto P tale che si abbia $PT^2 + TQ^2 = kPA^2$, con k numero reale positivo, ove T è il punto di contatto di una delle tangenti condotte da P alla circonferenza e Q il punto d'intersezione di questa tangente con quella condotta in A alla circonferenza stessa. Discutere il problema.

2. In coordinate cartesiane ortogonali è data la parabola $y = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$. Condurre dall'origine delle coordinate una retta del primo quadrante, tale che dette A, B le intersezioni con la parabola e C, D le rispettive proiezioni ortogonali sull'asse x, il rapporto del trapezio ABCD e del quadrato di lato CD sia k, con k numero reale positivo. Discutere il problema.

Nella sessione estiva del 1952 nessuno dei due temi verteva sulla geometria analitica, il secondo problema consisteva nella ricerca di un massimo mentre il primo problema era il seguente:

Il punto O è l'ortocentro del triangolo ABC del quale sono assegnati l'angolo BAC di ampiezza α, il segmento AO di lunghezza s. Indicata con x l'ampiezza dell'angolo CAO, si esprimano per mezzo di s, α, x le lunghezze dei tre lati del triangolo e quelle dei segmenti OB, OC.
Supposto che l'angolo α abbia il coseno eguale a $\frac{1}{3}$, si determini l'angolo x in modo che si abbia:

$$2OB + 3OC = kBC$$

essendo k un numero reale positivo dato. Nella discussione il candidato può limitarsi a considerare il solo caso del triangolo ABC acutangolo.
È facoltativa la risoluzione geometrica.

Riporto quanto affermato dal professore Lorenzo Caldo in un articolo di *Archimede* del 1953 riguardo alla risoluzione di questo problema: "Molti candidati non hanno scritto una sola parola della risoluzione perchè non conoscevano il significato del vocabolo "ortocentro" ... ancora più grave la giustificazione che qualche insegnante ha dato al fiasco dei suoi alunni, sostenendo che lo studio dei punti notevoli del triangolo non è più contemplato dai programmi: il che, se può essere preso sul serio da un profano che si attenga alla lettera all'enunciato sommario dei programmi in vigore oggi ... non può essere condiviso da ogni insegnante che si rispetti, e specialmente da coloro che preparano seriamente per gli esami di maturità scientifica, i quali sanno bene quale ampio sviluppo si debba dare alla breve avvertenza riportata in calce ai programmi, che dice testualmente: *"Nelle ultime quattro classi: applicazioni dell'algebra alla geometria di 1° e 2° grado, con relativa discussione"*".
La parte principale dello svolgimento della risoluzione consisteva nella dis-

cussione dell'equazione

$$\frac{7}{9}\sin x + \frac{4}{9}\sqrt{2}\cos x = \frac{2}{9}\sqrt{2}k$$

$$\text{con } 0 < x < \alpha,\ k > 0,\ \cos\alpha = \frac{1}{3},\ \alpha = 70°32',$$

a cui si riduceva il problema.

A partire dalla sessione autunnale dello stesso anno fino al 1968 il tema per sessione fu unico e gli argomenti principalmente trattati in questi problemi erano sempre applicazioni dell'algebra alla geometria e discussioni di equazioni parametriche, seguite da problemi di geometria analitica e molto di rado da problemi risolubili con applicazioni dell'analisi.

Grazie ad un interessante articolo di Pietro Rebbi, pubblicato su *Archimede*, n. 1-2, del 1968 è possibile fare alcune riflessioni sulle prove di maturità di matematica di questi anni.
La prima riflessione riguarda alla disparità notevole sul grado di difficoltà dei problemi proposti nei vari anni.
Consideriamo, ad esempio, il tema proposto nella prima sessione del 1960:

È dato il trapezio ABCD, rettangolo in A e in D, nel quale la base maggiore AB, la base minore DC e l'altezza AD hanno rispettivamente le lunghezze $2b$, b, h. Si determini su AD un punto P in guisa che BC risulti ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti rispettivamente eguali a CP e alla metà di BP.
È facoltativa la risoluzione geometrica

dove ponendo $AP = 2x, BP = y$, nasceva un sistema di immediata discussione, e quello proposto in precedenza nella prima sessione del 1958:

Siano date le due parabole di equazioni:

$$y = 2x^2 + x - 1 \quad (1)$$

$$y = x^2 + 3x + 2 \quad (2)$$

Detto $A(-1;0)$ il punto che esse hanno in comune e considerata una retta r passante per A e non parallela all'asse delle ordinate, siano:

- *B l'ulteriore punto d'intersezione di r con la parabola (1);*
- *C l'ulteriore punto d'intersezone di r con la parabola (2);*
- *D il punto d'intersezione di r con l'asse delle ordinate.*

Si determini il coefficiente angolare m di r in guisa che risulti:

$$\frac{1}{AB} - \frac{1}{AC} = \frac{k}{AD}$$

essendo k un numero reale assegnato. Nel caso di k positivo, si determini l'eventuale massimo di k al variare di m.

in cui volendo tener conto del fatto che AB, AC e AD sono segmenti di cui vanno considerate le misure in valore assoluto, ne nasceva una complicata discussione che poteva trovare un agevole sviluppo solo tracciando il grafico di tre funzioni razionali, ciascuna considerata in un particolare campo di esistenza.

Un'altra considerazione fatta dal Rebbi era che spesso i "nota bene", presenti alla fine dei temi, anzichè chiarire ed essere utili suggerimenti per la risoluzione dei problemi, aggiungevano più confusione riguardo all'impostazione del problema.

La macchinosità di alcuni elaborati era spesso criticata, come il tema assegnato nella sessione autunnale del 1960, che non era eccessivamente difficile, ma l'insieme dei passaggi di carattere prettamente algebrico, che portavano alla risoluzione del problema, potevano dare facilmente luogo a qualche errore di segno o di trascrizione, il quale avrebbe impedito di giungere alla soluzione del problema stesso:

In un piano, sul quale è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali xOy, si considerino le curve di equazione:

$$y = a^2x^3 - 3a(2a-3)x^2 + 9(a-1)(a-3)x + b$$

essendo a e b due parametri, determinando quelle particolari curve per le quali il punto di minimo e il punto di massimo hanno le ordinate rispettivamente eguali a 0 e a 1. Trovate le ascisse dei punti di minimo e di massimo e quelle degli altri punti di queste particolari curve che appartengono alle rette di equazioni $y = 0$ e $y = 1$, si calcolino, per ciascuna curva, le aree delle regioni finite delimitate dalla curva e dalle rette di cui sopra. Limitatamente ad una delle curve particolari, si scriva l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse delle y, che passa per il punto di massimo della curva e per i due suoi punti di ordinata nulla, e si calcoli l'area della regione parabolica i cui punti hanno ordinata positiva e non maggiore di quella del predetto punto di massimo.

Un altro fatto che faceva discutere era la presenza di punti che richiedevano la conoscenza di formule che un candidato poteva non ricordare sul momento e in conseguenza a ciò poteva rimanere bloccato sin dall'inizio.

Proponiamo ora, dopo il testo del tema della sessione estiva 1965, alcune critiche che nello stesso anno vennero fatte su questo problema e furono discusse su *Archimede* (vedi [16]).

Nel triangolo ABC, la proiezione HC del lato AC sulla retta BC è tripla della proiezione HB del lato AB sulla stessa retta BC. Posto $AH = h$, $BC = x$, $\tan \widehat{BAC} = y$:

1. *si trovi la relazione che sussiste tra x e y, considerando separatamente i casi in cui H risulti esterno o interno al segmento BC;*

2. *nel caso in cui H sia esterno al segmento BC, si rappresenti graficamente la funzione $y(x)$ dedotta dalla relazione precedente e se ne studi l'andamento;*

3. *si risolvano graficamente i problemi di costruzione del triangolo ABC dati due dei tre elementi BC, AH, BAC.*

   Facoltativamente:

4. *nel caso di H esterno al segmento BC, supposto $h = \frac{1}{2}$, si calcoli l'area della superficie compresa tra la curva e la sua corda passante per i punti di ascissa $x = 0$ e $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$;*

5. *nel caso di H interno al segmento BC, supposto $h = 4$, si rappresenti graficamente la funzione $y(x)$ dedotta dalla relazione di cui al n. 1.*

Quell'anno molti sostennero che il tema era stato una sorpresa, specialmente per coloro che prevedevano che sarebbe stato assegnato un problema di applicazione dell'algebra ad una questione di geometria, seguito dalla cosiddetta "discussione".
Per costoro, essendo molto abituati alla traduzione in equazione di una relazione geometrica, non era stato difficile rispondere alla domanda del punto 1.
Da indagini svolte, risultò che la maggior parte dei ragazzi dichiarò di non avere mai affrontato una richiesta simile alla 3, consistente nella risoluzione di un triangolo eseguita con metodo geometrico puro.
Riguardo ai punti 2 e 5, che erano ovvie applicazioni del programma di studio della quinta classe del liceo scientifico, non ci furono lamentele; neanche sul punto 4, che era facoltativo, ce ne furono, nonostante in esso ci fosse da calcolare un integrale basato sulla conoscenza della derivata della funzione logaritmica, derivata che effettivamente non rientrava nei limiti dei programmi d'insegnamento del tempo (c'era in quelli anteriori al 1963), ma di fatto molti insegnanti la facevano studiare, anche se a volte, come sosteneva Caldo "in maniera troppo dogmatica".

2.4.3 La "famigerata" discussione del trinomio di 2° grado

Riguardo al tema di applicazione dell'algebra alla geometria, ci fu, già negli anni '50, chi ne propose la radiazione definitiva, sostenendo che, con la discussione e la costruzione di tabelle per tutti i casi che potevano presentarsi nella risoluzione del problema al variare di un parametro, si mortificasse lo studio della matematica, e questo tipo di problema non fosse adatto al fine di un accertamento della preparazione matematica, il quale avrebbe dovuto mettere in luce attitudini e formazione mentale, più che possesso di cognizioni, più o meno slegate, di regole, di schemi, di formule.
Altri invece sostenevano l'importanza delle osservazioni che il giovane era costretto a fare quando, per aderire alla questione geometrica trattata, doveva fissare preliminarmente le condizioni di disuguaglianza associate alle equazioni, oppure quando si soffermava ad esaminare la figura in corrispondenza dei valori estremi o di valori di particolare rilievo del parametro.
Inoltre anche nella fase di traduzione del problema geometrico in equazioni algebriche, c'era un elemento assai importante per valutare la preparazione del candidato, perchè in tale parte egli poteva mettere in evidenza la sua eventuale prontezza d'intuizione, le sue eventuali facoltà di sintesi e il possesso di nozioni matematiche fondamentali.

Come osservato, nei problemi di maturità assegnati nel periodo tra il 1924 e il 1968, un ruolo di particolare importanza aveva la discussione di un trinomio di 2° grado in cui spesso si articolava il problema, anche per il peso che le commissioni giudicatrici davano a questa nella formulazione del giudizio:
"Le maggiori deficienze si riscontrano nella discussione dei risultati della risoluzione dei problemi"(Marseguerra, "Sulla dicussione dei problemi di matematica di maturità scientifica", *Archimede*, n. 1, 1954).
Ciò finì per indurre molti degli insegnanti, impegnati nella preparazione dei candidati, a dedicare tempo e attenzione minuziosa alla discussione e non pochi fecero ricorso a metodi che si prestassero ad essere facilmente applicati, anche quando non erano del tutto assimilati.
Secondo Marseguerra, l'inconveniente non dipendeva da difficoltà intrinseche dei temi inviati dal Ministero, poichè, secondo lui, essi erano sempre alla portata della maggior parte degli alunni dei licei scientifici, ma doveva attribuirsi "all'uso invalso in molti Licei, anche per colpa di alcuni testi scolastici, di ridurre la discussione di ogni problema a schemi prestabiliti . . . I nostri giovani compilano tabelle, spesso senza aver idee chiare sulla discussione, applicando meccanicamente il metodo studiato, anche quando esso sia non conveniente o addirittura inapplicabile."
La cosiddetta "discussione" con l'andare del tempo assunse un aspetto mec-

canico deteriore, perchè nell'intento di facilitare l'apprendimento, si finì con l'abusare di mnemonica nella trattazione delle sue varie fasi, trascurando completamente il fondamento geometrico della questione, che comportava lo stabilire le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza dell'ente studiato e la presentazione dell'ente stesso in alcuni casi particolari notevoli.
La discussione veniva ridotta a stabilire le limitazioni da imporre su una certa variabile (detta parametro), da cui dipendevano i coefficienti di un'equazione di secondo grado, affinchè l'equazione stessa avesse radici reali e comprese in un certo intervallo.
Dapprima questo risultato si otteneva con il cosiddetto metodo diretto, che consisteva nella risoluzione di sistemi di disequazioni, alcune delle quali irrazionali; poi sono venute le semplificazioni, come quella di Tartinville, o quella fondata sulla regola di Cartesio dei segni delle radici reali di un'equazione, o quella di Budan-Fourier, che stabilisce regole per determinare caratteristiche delle radici di un polinomio di grado n, tramite la successione delle derivate prime, seconda, ..., n-esima del polinomio; e infine si è giunti ai cosiddetti metodi grafici per mezzo dei quali, ricorrendo alla geometria analitica, si riduceva la questione alla intersezione di rette e parabole o di rette e circonferenze, o di rette e curve di altra natura.
Tra questi metodi primeggiò quello, famoso, di Tartinville-Girod, contro il quale si scagliò il matematico Bruno De Finetti in articoli fortemente critici quali "Come liberare l'Italia dal morbo della trinomite?", pubblicato sul *Periodico di matematiche*, n. 4, dell'ottobre 1965 e "Contro la matematica per deficienti", del *Periodico di Matematiche*, n. 1-2, del maggio 1974.
In essi De Finetti classificò l'esasperante insistenza, soprattutto nel liceo scientifico, su problemi comportanti la soluzione e la discussione di equazioni di 2° grado, specialmente attraverso schemi meccanici tipo quello di Tartinville, denominando questa abitudine *"Trinomite, ... una tra le più vistose tra le disgraziatamente non poche forme di cretinismo scolastico"*.
Nel primo articolo di De Finetti sopra citato si legge:

"Si tratta precisamente del morbo che affligge quello che i programmi chiamano "insegnamento della matematica" nel Liceo scientifico, ma che i matematici considerano un abominevole vilipendio e una sconcia mistificazione parodistica della loro materia. In questa scuola infatti - che, stando al nome, dovrebbe aprire le intelligenze alla comprensione della matematica e delle scienze - avviene invece che, ai soliti difetti dell'insegnamento tradizionale (in cui si ama soffermarsi su banali minuzie rendendole complicate ed astruse anzichè illuminare su cose importanti e interessanti e quindi attraenti), si aggiunge la jattura della prova scritta all'esame di licenza.
È già difficile in genere e di per sè, nonostante le belle parole e intenzioni e

istruzioni in contrario, che siffatti esami, attraverso la mastodontica organizzazione burocratica e gli intoppi di pseudogaranzie giuridico-formalistiche, giungano ad accertare alcunchè di attinente alla maturità e preparazione globale di un essere vivente anzichè premiare chi è talmente ottuso da immagazzinare e ricordare passivamente e indiscriminatamente, senza distinzione di preferenza interesse e importanza, qualunque nozione o formula o metodologia gli venga propinata. ...
...Ma la prova scritta di matematica per il Liceo scientifico costituisce un caso a sè sotto due punti di vista: primo, perchè si tratta di un esempio insuperabilmente patologico di aberrazione intesa a favorire l'incretinimento sistematico e totale dei giovani; secondo, perchè non c'è nessuna difficoltà a modificarlo eliminandone gli inconvenienti e le loro deleterie ripercussioni su tutto il corso degli studi. Da tempo immemorabile (almeno da decenni) avviene precisamente che questa famigerata prova scritta ripeta con qualche variante sempre lo stesso problema stereotipato (equazione di 2° grado, o "trinomia", con un parametro: da ciò il termine di "trinomite" per indicare l' eccessiva insistenza su questo solo particolare argomento): problema che ha soprattutto la disgrazia di poter essere ridotto a uno schema macchinale, formale, pedestre, che va sotto il nome di un certo Tartinville.
Il giudizio negativo su tale situazione è opinione comune - probabilmente unanime - dei matematici. Nella recente riunione della Commissione internazionale per l'insegnamento matematico (Frascati, Villa Falconieri, 8-10 ottobre 1964), il prof. C. F. Manara (dell'Univ. di Milano), relatore ufficiale sulla situazione italiana, espresse decisamente tale opinione e tale diagnosi: di matematica s'impara meno e peggio al Liceo scientifico che nelle altre scuole medie superiori perchè ivi si sacrifica tutto ciò che avrebbe reale interesse e valore formativo per la preoccupazione di fornire questi mezzucci da analfabeti per far trovare la soluzione di quel problema (confidando sia sempre il medesimo) senza bisogno di capirci un'acca.
Già il giorno precedente, in una seduta della Commissione italiana, era stato discusso il modo di por fine a questa situazione insostenibile, convenendo ... che basterebbe far consistere la prova scritta, anzichè nel solito tema stereotipato ma macchinoso, in una serie di domandine e problemini facili ma variati e significativi. E c'era una sola difficoltà: che non si trattava di combattere posizioni avverse (che pare non sussistano neppure negli ambienti ministeriali) ma solo di sapere chi e come possa prendersi l'autorità e responsabilità di decidere un cambiamento indubbiamente lecito ma che, urtando una consuetudine, potrebbe dar pretesto a proteste sia pur ingiustificate."

Nell'articolo del numero 1 di *Archimede* del 1954 si osservava che nei temi ministeriali, riguardanti applicazioni alla geometria e alla trigonometria, dal 1947 al 1952, su 15 temi, 4 si potevano discutere col metodo di Cartesio, 9 con quello di Tartinville, 1 col metodo diretto, mentre quello della prima sessione del 1950, non richiedeva alcuna discussione perchè si riduceva ad

un'applicazione alla geometria e alla trigonometria.
Anche uno dei temi indicati sopra come discutibili con la regola di Cartesio, inviato nella seconda sessione del 1950, non richiedeva alcuna discussione, poichè l'unica condizione richiesta, che le radici fossero positive, era senz'altro soddisfatta, perchè l'equazione presentava sempre due variazioni.
Appariva chiaro che il Ministero, pur avendo dato una certa preferenza a temi che si potevano discutere con il metodo di Tartinville, inviava temi che si potevano trattare con altri metodi, cioè intendeva bandire qualsiasi tipo di schema prestabilito.
Nel 1954, in [25], Marseguerra osservava che molti problemi, risolvibili per via trigonometrica, si potevano discutere con un metodo diretto assai confacente alla trigonometria.
Consideriamo ad esempio il tema della prima sessione del 1947:

I due settori circolari consecutivi AOB, BOC del cerchio di centro O e raggio r, hanno ciascuno l'angolo al centro di ampiezza $\alpha \leq 45°$. Si determini l'angolo α in modo che sia k il rapporto fra il maggiore e il minore dei due solidi generati dai due settori dati, in una rotazione completa attorno alla retta OA.
Si consideri il caso particolare $k = 1 + \sqrt{2}$.
NB. Per la risoluzione del problema, il candidato può ricordare che se si ha un settore circolare AOB, ed H è la proiezione ortogonale di B su OA, il volume del solido generato dal settore in una rotazione completa attorno alla retta OA è dato da: $\frac{2}{3}\pi r^2 h$, dove r ed h sono rispettivamente le misure di OA ed HA.

Questo si riduce a risolvere e a discutere l'equazione in $\cos\alpha$

$$2\cos^2\alpha - (k+1)\cos\alpha + k - 1 = 0,$$

$$\text{con } 0 < \alpha \leq 45°; \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos\alpha < 1.$$

Le cui radici sono:

$$\cos\alpha = 1, \quad \cos\alpha = \frac{1}{2}(k-1).$$

La radice $\cos\alpha = 1$, dà $\alpha = 0$ che può essere accettata come soluzione limite.
La seconda radice dà $\alpha = \arccos\frac{1}{2}(k-1)$, dove α rappresenta la minima soluzione positiva. Affinchè l'ultima soluzione sia accettabile per il problema, l'arco α $(\neq 0)$ deve avere l'estremo nel primo ottante e quindi k deve soddisfare le disequazioni

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{1}{2}(k-1) < 1,$$

ossia a

$$1 + \sqrt{2} \leq k < 3.$$

Dunque solo se k soddisfa queste limitazioni il problema ammette soluzioni e ne ammette una sola.
In particolare se $k = 1 + \sqrt{2}$, si ha $\alpha = 45°$ e quindi α assume il valore massimo. Per $k \to 3$ si ottiene la soluzione limite $\alpha \to 0$. Per $k = 3$ la soluzione $\cos\alpha = 1$ diventa doppia.

In riferimento ai problemi detti sopra, il metodo diretto si poteva applicare anche a tre dei quattro problemi che si potevano discutere con il metodo di Cartesio e a quattro dei nove che si potevano discutere con il metodo di Tartinville, cioè complessivamente a otto dei quindici temi presi in esame.

Molti insegnanti, nell'applicazione del metodo di Tartinville, esigevano minuziose ed inutili tabulazioni dei vari aspetti della questione, mentre altri riducevano di molto il procedimento con accorte semplificazioni e col ricorso a schemi grafici finali, che gli alunni, dopo averci preso la mano, disegnavano senza didascalie esplicative e chiarimenti; questo rivelava che i ragazzi lavoravano meccanicamente senza rendersi conto del riferimento ai principi che avevano via via applicato.
In un articolo di *Archimede*, n. 1-2, del 1966, Lorenzo Caldo suggeriva, di non sopprimere del tutto le discussioni, ma di farne un uso limitato e sempre con riferimento al caso geometrico studiato, dedicando una maggiore cura alla risoluzione geometrica pura dei problemi, che non doveva essere considerata come una novità del programma liceale, essendo essa un ripasso approfondito delle esercitazioni di geometria razionale di cui l'insegnamento della matematica in prima e seconda non poteva fare a meno; anche perchè nei temi ministeriali spesso era richiesto facoltativamente la risoluzione geometrica del quesito.
Marseguerra riteneva che "la risoluzione e la discussione dei problemi di matematica debbono essere condotte come piccole ricerche con carattere personale," e per questo motivo i "professori dovrebbero far apprendere più metodi di discussione, senza dare la preminenza a schemi particolari, lasciando però, nelle esercitazioni, agli alunni libertà di scelta e facendo notare, di volta in volta, in sede di revisione degli elaborati, quale sia il metodo apparso più conveniente, più elegante, ecc."
De Finetti: "Ogni esercizio dovrebbe, più o meno, stimolare riflessioni, offrire aperture su qualche visuale nuova, abituare all'eclettismo, all'iniziativa, allenare la mente in senso almeno un pò "creativo"."

2.4.4 Il Palatini-Faggioli (1968) e la discussione dei problemi di 2° grado

Ho ritenuto interessante a questo punto osservare come un libro di testo scolastico del tempo affrontasse nel concreto questo argomento.
Dopo alcune ricerche sono riuscita a reperire da un amico di famiglia il testo *Elementi di algebra per licei scientifici*, volume secondo, di Palatini-Faggioli, edizione 1968.
Il testo tratta questo argomento nell'*Appendice*, dopo aver affrontato i capitoli *I numeri reali, Calcolo dei radicali, Numeri immaginari-Numeri complessi, Equazioni di secondo grado ad una incognita, Equazioni di grado superiore al secondo, Sistemi di equazioni di grado superiore al primo, Problemi di secondo grado, Progressioni aritmetiche e geometriche, Rappresentazione grafica delle funzioni* e *Logaritmi.*

L'Appendice è così articolata:

APPENDICE - **Sulle disequazioni e sulla discussione dei problemi di secondo grado**

Disequazioni in generale — Disequazioni di 1° grado — Disequazioni di 2° grado. — Sistemi di disequazioni — Disequazioni frazionarie — Disequazioni irrazionali — Confronto delle radici di una equazione di 2° grado con uno o due numeri dati — Osservazioni importanti — Discussione di problemi di 2° grado — Casi importanti per la ricerca dei limiti — Ricerca dei limiti delle equazioni irrazionali — Discussione dei problemi simmetrici.

Riporto di seguito i paragrafi contenenti la teoria dedicata a questo argomento, ho tralasciato gli esempi inseriti in mezzo alla spiegazione, riportando solamente uno degli esempi con cui si conclude l'*Appendice* che altro non è che un problema di geometria con discussione.

Confronto delle radici di un'equazione di 2° grado con uno o due numeri dati.

402. La discussione di problemi di 2° grado, come si vedrà in seguito, consiste nel confronto delle radici di un'equazione di 2° grado con uno o due numeri dati.
Il metodo di discussione che in seguito esporremo è conosciuto sotto il nome di *metodo di Tartinville*; avvertiamo però subito che esistono anche altri metodi, i quali potranno formare oggetto di studio ulteriore. Ogni metodo ha i suoi vantaggi e i suoi inconvenienti, per cui è consigliabile di non attenersi costantemente ad uno di essi per discutere un qualsiasi problema assegnato. Un po' di buon senso e la pratica suggeriscono sempre la via migliore da seguire, che può anche essere una via diretta e spontanea senza rientrare in alcuno degli schemi prefissati. In ogni caso si ricordi di ricorrere sempre alla rappresentazione e interpretazione geometrica, che sono particolarmente utili nelle questioni di cui parliamo, come del resto abbiamo incominciato a mostrare nei n. precedenti.

403. La risoluzione di un dato problema sia ricondotta a quella di una equazione di 2° grado

$$(3) \qquad f(x) = a\,x^2 + b\,x + c = 0\,,$$

nella quale i coefficienti a, b, c siano espressioni note di quantità date, di cui una, che diremo m, possa assumere valori arbitrari: la variabile m si chiama allora *parametro* e brevemente diciamo allora che i coefficienti a, b, c si suppongono funzioni del parametro m.

Generalmente le radici dell'equazione (3) sono sottoposte a certe condizioni, traducibili in disequazioni di 1° o di 2° grado nella variabile m, che possono essere di due tipi:

1°) *Le radici vanno confrontate con un dato numero reale* α, *cioè deve essere*

$$x \leq \alpha \qquad \text{oppure} \qquad x \geq \alpha\,.$$

2°) *Le radici vanno confrontate con due numeri reali* α *e* β (*supponiamo* $\alpha < \beta$), *cioè deve essere*

$$\alpha \leq x \leq \beta\,.$$

Si hanno dunque problemi di due tipi secondo la natura delle condizioni che vi intervengono: *discutere* uno di tali problemi significa trovare i limiti entro i quali deve variare il parametro m, affinchè il problema abbia due, una o nessuna soluzione.

404. Se l'incognita x è sottoposta alle condizioni

$$\alpha \leq x \leq \beta ,$$

allora è manifesto che α e β costituiscono il *minimo* o il *massimo* dei valori possibili per x,

Se invece le condizioni poste sono

$$\alpha < x < \beta$$

si suol dire che α e β sono il *limite inferiore* e il *limite superiore* dei valori che possono esser assunti dall'incognita. Per esempio, se la x rappresenta l'altezza di un triangolo rettangolo inscritto in una circonferenza di raggio r, ovviamente deve essere

$$0 < x \leq r$$

e da qui si rileva che r è il massimo di x e zero ne è il limite inferiore.

Quando α o β (o ambedue) sono soluzioni dell'equazione (3), cioè quando $f(\alpha) = 0$ oppure $f(\beta) = 0$, i numeri α e β si dicono *soluzioni limiti* e saranno o no soluzioni effettive del problema che si sta trattando a seconda del significato che in esso vengono ad assumere. Per contrapposto, tutti i valori di x interni all'intervallo (α, β) costituiscono le *soluzioni ordinarie*.

Cose analoghe si ripetono quando l'incognita x è sottoposta alla condizione

$$x \geq \alpha \qquad \text{oppure} \qquad x \leq \alpha .$$

405. Si constaterà in seguito che durante la discussione si è condotti a suddividere l'intero intervallo di variabilità del parametro m (che, generalmente, è costituito da tutta la retta) in intervalli parziali, in ciascuno dei quali le soluzioni hanno certe caratteristiche. I valori di m che individuano gli intervalli parziali costituiscono i cosiddetti *capisaldi* della discussione.

Le radici dell'equazione (3) saranno denotate, come al solito, con x_1 e x_2 e si supporrà sempre $x_1 \leq x_2$.

Si vedrà in seguito che qualche volta interessa far intervenire nella discussione la semisomma delle radici $\dfrac{x_1 + x_2}{2}$; essa si suol denotare con la lettera Σ (sigma) ed è, per le note relazioni tra radici e coefficienti di una equazione di 2º grado,

$$\Sigma = -\frac{b}{2\,a} .$$

È facile osservare che è sempre

$$x_1 \leq \frac{x_1 + x_2}{2} \leq x_2$$

cioè il numero Σ è sempre interno all'intervallo delle radici, oppure coincide con le radici stesse se queste sono coincidenti.

... ...

Osservazioni. È bene tenere presente che:

1°) *I valori che annullano* Δ *devono corrispondere ad un valore del parametro in cui si hanno due permanenze o due variazioni*, perchè dovendo le radici essere eguali, devono necessariamente avere lo stesso segno.

2°) *I valori che annullano il 1° e il 3° coefficiente devono cadere nell'intervallo di realtà*, perchè quando questi coefficienti sono nulli le radici sono reali.

3°) *I valori che annullano il 2° coefficiente possono cadere fuori dell'intervallo di realtà*, perchè quando il secondo cefficiente è nullo, le due radici sono opposte e questo può accadere anche quando non sono reali.

407. Vediamo ora come si discutono i problemi del primo dei tipi accennati nel n. 403, cioè dei problemi le cui soluzioni sono fornite dalle radici dell'equazione

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c = 0\,,$$

con la condizione

$$x \leq \alpha \qquad \text{oppure} \qquad x \geq \alpha\,.$$

In ogni caso la prima disequazione da scriversi è quella esprimente la realità delle radici, cioè

$$\Delta \geq 0\,.$$

Se è $\Delta = 0$ le radici dell'equazione sono coincidenti ed eguali a $\Sigma = -\dfrac{b}{2\,a}$ e allora il loro confronto con il numero α è ovvio.

Supponiamo allora che sia $\Delta > 0$.

Si calcoli $f(\alpha)$ e si confronti il segno con quello del primo coefficiente del trinomio $f(x)$: possono allora presentarsi questi casi:

1° caso. $f(\alpha)$ ed a hanno segno contrario. Allora α è interno all'intervallo delle radici, cioè sarà

$$x_1 < \alpha < x_2\,;$$

se ne deduce che una sola soluzione sarà accettabile e precisamente la x_1 o la x_2 secondochè la condizione posta è $x < \alpha$ oppure $x > \alpha$.

2° caso. $f(\alpha)$ ed a hanno lo stesso segno. Allora α è esterno all'intervallo delle radici, cioè sarà

$$\alpha < x_1 < x_2 \qquad \text{oppure} \qquad x_1 < x_2 < \alpha\,.$$

Per decidere quale delle due condizioni è verificata, si osserva che, siccome Σ è compreso fra x_1 e x_2, si presenta il primo caso quando $\alpha < \Sigma$ e il secondo quando $\alpha > \Sigma$; basta dunque confrontare α con Σ per decidere se le soluzioni seguono o precedono il numero α. A seconda della condizione posta dal problema, questo ammetterà due soluzioni oppure nessuna.

Per discutere dunque un problema del 1° tipo bisogna prima di tutto esprimere che $\Delta \geq 0$, *poi determinare il segno di* $f(\alpha)$ *e confrontare tale segno con quello di* a.

In ogni caso la discussione si completa con l'esame della soluzione limite $x = \alpha$, cioè con l'esame della equazione $f(\alpha) = 0$. Ricordando ancora una volta che $\Sigma = -\dfrac{b}{2\,a}$ è compreso fra le radici, la soluzione limite coincide con x_1 o con x_2 secondochè è

$$\alpha < -\frac{b}{2\,a} \qquad \text{oppure} \qquad \alpha > -\frac{b}{2\,a}.$$

... ...

409. Passiamo ora ai problemi del secondo tipo, cioè alla risoluzione dell'equazione

$$f(x) = a x^2 + b x + c = 0 ,$$

con le condizioni

$$\alpha \leq x \leq \beta .$$

Scritta la condizione di realità

$$\Delta \geq 0$$

e formati $f(\alpha)$ ed $f(\beta)$ si possono presentare i casi seguenti:

1° caso. $f(\alpha)$ ed $f(\beta)$ hanno entrambi segno contrario a quello di a; allora α e β sono ambedue interni all'intervallo delle radici, cioè si ha

$$x_1 < \alpha < \beta < x_2 ,$$

perciò il problema non ammette alcuna soluzione.

2° caso. $f(\alpha)$ ha il segno contrario a quello di a ed $f(\beta)$ ha lo stesso segno di a; in questo caso α è interno e β esterno all'intervallo delle radici, cioè si ha

$$x_1 < \alpha < x_2 < \beta ,$$

perciò il problema ha una sola soluzione e precisamente la maggiore.

3° caso. $f(\alpha)$ ha lo stesso segno di a ed $f(\beta)$ ha il segno contrario; questa volta è α esterno e β interno all'intervallo delle radici, cioè

$$\alpha < x_1 < \beta < x_2 ,$$

perciò il problema ha una sola soluzione e precisamente quella minore.

4° caso. $f(\alpha)$ ed $f(\beta)$ hanno entrambi lo stesso segno di a; allora α e β sono entrambi esterni all'intervallo delle radici, ma possono ambedue precedere o seguire le radici, oppure una precedere e l'altra seguire le radici. Per decidere del caso si fa intervenire la semisomma Σ; allora ricordando, al solito, che Σ è compreso fra le radici si ha:

se $\beta < \Sigma$ ossia $\Sigma - \beta > 0$, allora $\alpha < \beta < x_1 \leq x_2$, quindi nessuna soluzione;

se $\Sigma < \alpha$ ossia $\alpha - \Sigma > 0$, allora $x_1 \leq x_2 < \alpha < \beta$, quindi nessuna soluzione;

se $\alpha < \Sigma < \beta$ ossia $\Sigma - a > 0$ e $\beta - \Sigma > 0$, allora $\alpha < x_1 \leq x_2 < \beta$, quindi due soluzioni distinte oppure coincidenti.

Per discutere dunque un problema del secondo tipo bisogna prima di tutto esprimere che è $\Delta \geq 0$, *poi determinare i segni di* $f(\alpha)$ *ed* $f(\beta)$ *e confrontare tali segni con quello di* a.

La discussione si completa con l'esame delle soluzioni limiti. Si considerano a tal fine le equazioni $f(\alpha) = 0$ ed $f(\beta) = 0$: in corrispondenza ai valori del parametro m per cui sono soddisfatte queste condizioni, l'una o l'altra delle radici o ambedue coincidono con i numeri α e β e la discussione si esaurisce agevolmente facendo intervenire, come precedentemente, la semisomma Σ delle radici.

Se è $f(\alpha) = 0$ ed $f(\beta)$ ed a hanno segni contrari, allora β risulta interno alle radici ed α coincide perciò con la soluzione minore x_1; in questo caso si ha quindi la sola soluzione limite $x_1 = \alpha$.

Se $f(\alpha) = 0$, mentre $f(\beta)$ ed a hanno lo stesso segno, allora β è esterno alle radici, perciò α coincide con la soluzione minore o con la maggiore secondochè si ha

$$\alpha < \Sigma \qquad \text{oppure} \qquad \alpha > \Sigma .$$

Si avrà perciò

$$x_1 = \alpha < x_2 < \beta \qquad \text{oppure} \qquad x_1 < x_2 = \alpha < \beta ,$$

e quindi due soluzioni, di cui una limite $x_1 = \alpha$ o $x_2 = \alpha$.

Se è $f(\beta) = 0$ ed $f(\alpha)$ ha il segno contrario a quello di a, allora è α interno all'intervallo delle radici e β coinciderà con la soluzione maggiore; in questo caso il problema ha la sola soluzione limite $x_2 = \beta$.

Se $f(\beta) = 0$ ed $f(\alpha)$ ha lo stesso segno di a, allora α è esterno all'intervallo delle radici, mentre β coincide con una delle soluzioni e precisamente sarà

$$\alpha < x_1 = \beta < x_2 \qquad \text{se} \qquad \beta < \Sigma$$

e quindi la sola soluzione limite $x_1 = \beta$, sarà invece

$$\alpha < x_1 < x_2 = \beta \qquad \text{se} \qquad \beta > \Sigma ,$$

e quindi due soluzioni di cui una limite $x_2 = \beta$.

Se è contemporaneamente $f(\alpha) = 0$ ed $f(\beta) = 0$, allora α e β coincidono colle radici x_1 e x_2 e precisamente si ha

$$x_1 = \alpha \qquad \text{e} \qquad x_2 = \beta .$$

... ...

Osservazioni importanti.

411. Dopo aver ordinato i valori del parametro in ordine crescente, occorre verificare l'esattezza del quadro, tenendo presente quanto segue:

1°) *Nell'intervallo dove è* $\Delta < 0$, $f(\alpha)$ *e* $f(\beta)$, *sono entrambe concordi col primo coefficiente*; infatti sappiamo che, per $\Delta < 0$, un trinomio di secondo grado assume sempre il segno del primo coefficiente, per qualsiasi valore reale di x.

2°) $f(\alpha)$ *ed* $f(\beta)$ *si annullano nell'intervallo di realtà, cioè dove* $\Delta \geq 0$.

3°) *Quando* Δ *è* $= 0$, $f(\alpha)$ *ed* $d(\beta)$ *devono essere entrambe concordi col primo coefficiente*. Infatti se quando Δ è eguale a zero, $f(\alpha)$ fosse concorde mentre $f(\beta)$ fosse discorde col primo coefficiente, una radice sarebbe compresa entro i limiti α e β e l'altra radice sarebbe esterna a questo intervallo, mentre le due radici devono essere eguali.

Può accadere che per uno stesso valore del parametro sia $\Delta = 0$ e $f(\alpha) = 0$, in tale caso $x_1 = x_2 = \Sigma = \alpha$.

4°) *I valori che rendono* $\Sigma - \alpha = 0$ *devono cadere in un intervallo in cui è* $\Delta > 0$ *e* $f(\alpha)$ *è discorde col primo coefficiente, oppure in un intervallo in cui è* $\Delta < 0$. *Analogamente per i valori che rendono* $\beta - \Sigma = 0$.

5°) *Quando il primo coefficiente è funzione del parametro, il valore che annulla il primo coefficiente deve cadere nell'intervallo di realtà.* Infatti quando il primo coefficiente è zero, l'equazione diventa di primo grado, ed ha perciò una radice reale. *Si può constatare che*: *quando il primo coefficiente diventa zero, una radice va all'infinito.*

412. Verificata l'esattezza del quadro, si passa alla discussione o,meglio, alla conclusione della discussione e bisogna osservare che *non vi possono essere salti*, cioè non si passa da due soluzioni a nessuna, senza che vi sia prima una soluzione; e così non si passa da una soluzione a due, senza che vi sia una soluzione limite ed una ordinaria, ecc. ....

Talvolta, osservando l'equazione che si deve discutere, si può prevedere che il problema ammetterà una sola soluzione, allora non è necessario calcolare la condizione di realtà, basterà risolvere la disequazione

$$f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$$

che è condizione sufficiente per la positività di Δ.

Per *esempio*, sia da risolvere il sistema

$$(*) \quad \begin{cases} x^2 - (m-1)\,x - 2 = 0; & (1) \\ 0 < x \leq 2. & (2) \end{cases}$$

Poichè il primo membro della (1) non ha mai due variazioni, le radici non possono essere entrambe positive, perciò il sistema dato (*) non avrà mai due soluzioni.

Basterà quindi risolvere la disequazione:

$$f(0) \cdot f(2) \leq 0$$

ossia

$$-2\,(4 - 2\,m) \leq 0$$

questa è soddisfatta per $m \leq 2$.

Il sistema (*) ha una sola soluzione per $m < 2$. Per $m = 2$ si ha la soluzione limite $x = 2$.

Dall'equazione (1) si poteva ricavare che le radici sono certamente reali, poichè il primo e terzo coefficiente sono di segno contrario.

... ...

Discussione di problemi di 2° grado.

414. La risoluzione di un problema geometrico col sussidio dell'algebra consta di diverse parti:

1°) Intavolazione.
2°) Risoluzione e ricerca dei limiti entro cui devono variare le incognite.
3°) Discussione.
4°) Costruzione.

415. Intavolazione.

Le relazioni geometriche esistenti fra i vari elementi del problema assegnato, devono essere trasformate in una o più relazioni fra le misure degli elementi noti e incogniti che vi compariscono.

Il numero delle equazioni algebriche che si devono trovare è sempre eguale a quello delle incognite.

Bisogna stare attenti che le equazioni siano indipendenti fra loro e che nessuna delle eguaglianze sia una identità.

La scelta delle incognite costituisce una prima difficoltà. Si tenga presente che spesso è più facile impostare un problema usando due incognite invece di una sola.

416. Risoluzione e ricerca dei limiti entro cui possono variare le incognite.

Una volta tradotto il problema geometrico in linguaggio algebrico, si devono risolvere le equazioni stabilite e scegliendo quale incognita deve comparire nell'*equazione risolvente* (trattandosi di un sistema) si tenga presente che *essa deve determinare in modo unico la figura di cui tratta il problema.*

Per esempio se si parla di un triangolo isoscele inscritto in un cerchio di dato raggio, converrà scegliere quale incognita dell'equazione risolvente, la misura dell'altezza e non quella della base, perchè per ogni base corrispondono due triangoli isosceli diversi e quindi la figura *non è univocamente determinata.*

Trovata l'equazione risolvente, prima di passare alla discussione bisogna trovare le condizioni a cui devono soddisfare le incognite, perchè esse possano essere soluzioni del problema (poichè in generale il sistema impostato ha un numero di soluzioni maggiore che non il problema).

Nella ricerca di questi limiti osserveremo attentamente la figura, e la particolare natura geometrica delle incognite ci fornirà queste limitazioni; sovente non tutti i limiti trovati sono indispensabili perchè alcuni sono inclusi in altri e perciò devono essere eliminati. Non è possibile dare qui le regole che permettano di trovare queste disequazioni esprimenti le condizioni a cui devono soddisfare le incognite perchè possano essere soluzioni del problema. Consigliamo gli allievi di fare molti esercizi: noi ora, con degli esempi, mostreremo come si deve procedere.

... ...

420. Discussione.

Impostato il problema, trovati i limiti a cui devono sottostare le incognite perchè le radici trovate siano soluzioni del problema, si passerà alla discussione usando:

a) *La regola di Cartesio* se occorrono soltanto la realtà e la positività delle radici.

b) *Il metodo diretto* quando il 1° coefficiente dell'equazione risolvente non contiene il parametro, quando le radici hanno forma semplice e quando il confronto si debba fare con un solo numero reale o per una sola radice.

c) *Con uno dei diversi metodi indiretti*, per esempio: con il *metodo* già visto di *Tartinville-Girod*, che permette di confrontare le radici di una equazione di 2° grado con uno o più numeri senza risolverla.

421. Costruzione.

Ottenuta la risoluzione del problema per via algebrica, si costruiscono graficamente gli elementi domandati e forniti dalle espressioni algebriche trovate. Consigliamo di vedere nel nostro testo di geometria (*) il capitolo riguardante la costruzione geometrica di espressioni algebriche.

(*) « Elementi di Geometria » per i Licei Scientifici, 1° vol. - Edit. Ghisetti e Corvi, Milano.

Il libro fornisce dunque uno schema risolutivo da seguire per la discussione dei problemi.

422. Ecco ora la risoluzione di qualche problema di geometria con la relativa discussione.

1° Problema. — *Dato il quadrato* ABCD *di lato* a, *determinare sulla semiretta* AB *un punto* E *tale che sia* k *il rapporto fra l'area del quadrato di lato* DE *e quello di lato* CE.

Indicando con x la misura di AE (fig. 70), si ha subito, secondo l'enunciato del problema, l'equazione

$$\frac{x^2 + a^2}{(x - a)^2 + a^2} = k\,;$$

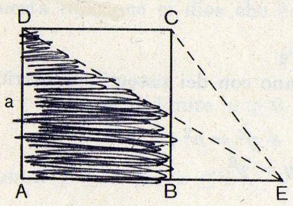


Fig. 70.

che, ridotta a forma intera, diventa

$$f(x) = (k - 1)\,x^2 - 2\,a\,k\,x + a^2\,(2\,k - 1) = 0\,.$$

Le condizioni a cui deve soddisfare la x sono quelle di essere reale e positiva.

Vediamo la condizione di realità $\Delta \geq 0$.

Adoperando la formula ridotta si ha

$$\frac{1}{4}\,\Delta = a^2\,k^2 - a^2\,(2\,k - 1)\,(k - 1) \geq 0$$

e quindi, sviluppando e riducendo (essendo a^2 positivo)

$$k^2 - 3\,k + 1 \leq 0\,.$$

Questa equazione è soddisfatta per

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \leq k \leq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\,.$$

Per la positività delle radici applichiamo la regola di Cartesio e perciò esaminiamo i segni dei coefficienti del trinomio $f(x)$, come si è spiegato nel n. 406.

Il 1° coefficiente del trinomio $f(x)$ è positivo o nullo per

$$k - 1 \geq 0 \qquad \text{ossia per} \qquad k \geq 1\,.$$

Il 2° coefficiente è $-2\,a\,k$, quindi è sempre negativo, perchè a e k, per la loro natura, sono numeri positivi.

Il 3° coefficiente è $a^2\,(2\,k - 1)$, perciò (siccome è sempre $a^2 > 0$) è positivo o nullo per

$$2\,k - 1 \geq 0 \qquad \text{cioè per} \qquad k \geq \frac{1}{2}\,.$$

I capisaldi della discussione, in ordine crescente sono pertanto:

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\,; \qquad \frac{1}{2}\,; \qquad 1\,; \qquad \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\,.$$

Facendo la solita rappresentazione geometrica, otteniamo la figura 71. Da qui si vede che:

Per $k < \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$ si ha $\Delta < 0$, quindi l'equazione non ammette radici reali e il problema non ha alcuna soluzione.

Per $k = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$ si ha $\Delta = 0$, perciò si hanno due soluzioni reali coincidenti, ma non accettabili come soluzioni del problema, perchè negative (vi sono due permanenze).

Per $\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} < k < \dfrac{1}{2}$ si ha $\Delta > 0$, cioè le radici sono reali, ma nessuna soluzione è accettabile, perchè ambedue negative: si hanno infatti due permanenze.

Per $k = \dfrac{1}{2}$ si ha $\Delta > 0$ e il 3° coefficiente è uguale a zero; perciò una delle due soluzioni

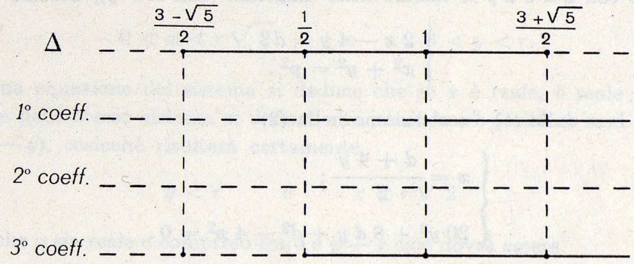


Fig. 71.

è uguale a zero. È questa una soluzione limite e corrisponde al caso in cui il punto E coincide con A.

L'altra soluzione è

$$\frac{2\,a\,k}{k-1} = \frac{a}{-\dfrac{1}{2}} = -2\,a$$

non accettabile perchè negativa.

Per $\dfrac{1}{2} < k < 1$ si ha $\Delta > 0$; si ha poi una permanenza e una variazione, cioè una soluzione positiva e una negativa: è accettabile solo quella positiva.

Per $k = 1$ si ha $\Delta > 0$; il 1° coefficiente è nullo, quindi l'equazione diventa di primo grado ed ammette la sola soluzione

$$\frac{a^2\,(2\,k-1)}{2\,a\,k} = \frac{a}{2},$$

che è anche soluzione del problema: in questo caso il punto E cade nel punto medio del lato AB.

Per $1 < k < \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$ si ha $\Delta > 0$; si hanno due variazioni, perciò ambedue le soluzioni sono positive ed entrambe accettabili.

Per $k = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$ si ha $\Delta = 0$; le due radici sono eguali ed è

$$x_1 = x_2 = \frac{a\,k}{k-1} = \frac{(3+\sqrt{5}\,)\,a}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\,a\,;$$

queste radici sono accettabili come soluzioni del problema.

Per $k > \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ si ha $\Delta < 0$; l'equazione non ammette radici reali quindi il problema non ha soluzioni. Segue da ciò che $k = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ è il massimo valore che può raggiungere k, cioè il rapporto $\dfrac{\overline{ED}^2}{\overline{EC}^2}$.

Nella parte conclusiva di *Esercizi*, dopo vari esercizi dedicati alla *Discussione delle radici di equazioni parametriche*, il testo propone 150 *Problemi di algebra applicata alla geometria con discussione* suddivisi per argomento trattato (parallelogrammi, triangoli, trapezi, circonferenza e geometria di argomento vario) e una sessantina di problemi di geometria solida, con alcuni problemi dedicati esplicitamente ai solidi di rotazione.
Questi esercizi costituivano un buon allenamento per gli esami di maturità.

2.4.5 Osservazioni su temi di maturità e insegnamento della matematica negli anni '60

"Anche per la matematica, siamo stanchi di discutere: bisogna agire seriamente" con questo titolo Vito Romano Costantini nel 1968 pubblicò un articolo su *Archimede* nel quale denunciava la situazione, già in parte analizzata nella parte precedente della tesi, in cui si trovava l'insegnamento della matematica negli anni '60.
"Appurato e premesso che nei licei scientifici la ... "trinomite" costituisce quella meccanica deleteria divoratrice della maggior parte del tempo, si deve constatare con pena che, salvo rare eccezioni, vengono immolati alla gloria ... dell'ignoranza i seguenti argomenti:
1) Logaritmi. - In generale gli insegnanti vi dedicano due o tre lezioni per cui gli studenti non hanno la possibilità di "digerirli" a dovere e tantomeno di verificarne l'utilità. Non meravigliamoci allora se al 5° anno vi si trovano impacciati nel campo dell'analisi o se all'Università vengono inesorabilmente bocciati perchè ignorano il valore di $\log 1$ *o quello di* $\log e$. *Non parliamo poi delle progressioni che, a parer mio, è sempre bene conoscere.*
2) Trigonometria. - Confermo pienamente quanto segue: si perviene con rapidità all'argomento equazioni (lineari e omogenee), affinchè ... lo spettro del ... K possa ancora imperare sovrano e ... inaridire sempre più i cervelli. Ma è semplicemente paradossale che i ragazzi ne ignorino le importanti applicazioni nel campo della scienza e della tecnica!
3) Geometria. - Per amor della patria sarebbe bene tacere che nel 3° anno viene ignorata, nel 4° trattata se c'è tempo, nel 5° spiegata quel tanto da

rendere appena decente il programma d'esame. Ciò non sembra onesto; si pensi a quei temi di maturità che hanno richiesto la conoscenza delle misure della calotta o della zona sferica delle quali, è risaputo, se ne dà sì e no solo la definizione.
...Posso affermare senza tema di smentite che gli studenti del liceo classico sono di gran lunga meglio preparati sopra gli argomenti suddetti."

Negli anni '50 e '60 i problemi assegnati alla maturità scientifica presentavano difficoltà sempre crescenti, perciò gli autori dei libri di testo scolastici ritennero opportuno ampliare e approfondire i vari argomenti, seguiti dalla maggior parte degli insegnanti.
Tra i suggerimenti per l'insegnamento della matematica, al Caldo sembrava opportuno che, per esempio, lo studio delle curve piane nelle ultime due classi, come applicazione degli elementi di analisi matematica, fosse limitato all'applicazione di pochi concetti fondamentali e che non si abusasse nello schematizzare i vari casi, perchè altrimenti questo mezzo di indagine avrebbe finito con l'inaridirsi (come le schematizzazioni tartinvilliane).

Come abbiamo detto, dopo la guerra per andare incontro agli studenti, venne stabilito che il programma d'esame dei candidati vertesse sul programma svolto durante l'ultimo anno di scuola.
A causa di questo provvedimento, con il passare degli anni vari professori continuarono a personalizzare il loro insegnamento: alcuni includevano nei loro programmi teoremi come quello di Cauchy o di De l'Hopital, integrali risolti per sostituzioni, per parti, mentre altri, ligi al programma ministeriale, facevano in 5° liceo soltanto massimi, minimi e cenni sul calcolo con integrali di x^m, $\sin x$, $\cos x$.
Così poteva accadere che candidati di due corsi diversi all'interno dello stesso istituto si presentavano con programmi così differenti, come se fossero provenienti da nazioni diverse.
Alcuni professori auspicavano una maggiore chiarezza e precisione nei programmi ministeriali, che dovevano, secondo loro, fissare gli argomenti da svolgere per ogni classe, pretendendo l'esecuzione di esercitazioni su tali argomenti e proponendo un tema finale.
Insomma: *"Si abbia il coraggio di fare qualcosa, perchè è da anni che ci si attende che qualcosa migliori"*(Rebbi, [27]).

Forse per le molte critiche ricevute, ma soprattutto per la riforma degli esami di maturità, a partire dal 1969 la tipologia dei problemi assegnati nella prova di matematica cambiò notevolmente.

Capitolo 3

La matematica alla maturità scientifica fino alla riforma del 2000

3.1 Le prove di matematica al Liceo Scientifico dal 1969 al 2000

Nel 1969 il Ministero della Pubblica Istruzione riformò l'esame di maturità e, dalla prova di matematica dell'estate 1971, cominciò a proporre più di un problema, chiedendo al candidato la risoluzione di alcuni di essi, a scelta.
Come già detto in precedenza, si proposero dai tre ai quattro problemi e non sempre era chiaro quanti dovesse risolverne il candidato per ottenere la sufficienza o il punteggio massimo.
Per avere un'idea di come si articolavano i testi d'esame, riporto la prova completa assegnata nella sessione ordinaria del 1972:

Il candidato risolva, a sua scelta, almeno due dei seguenti quesiti.

1. *Si scriva l'equazione della circonferenza passante per i punti A(-2; 0), B(4; 0) ed avente il centro sulla retta $y = 4$ e si calcolino le coordinate degli estremi del diametro parallelo all'asse delle x. Si determinino poi i coefficienti dell'equazione $y = ax^2 + bx + c$ in modo che le parabole da essa rappresentate abbiano in comune il punto C(0; 4) e siano tangenti all'asse delle ascisse. Tra queste parabole si trovino quelle che passano per l'uno e per l'altro degli estremi del diametro suddetto. Si calcoli infine l'area della regione limitata dalle predette parabole e dall'asse delle x.*

2. *Data una circonferenza di diametro $AB = 2r$, si prendano su di essa, da parte opposta di AB, due punti C e D tali che $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, $\angle BAD = \alpha$. Si consideri*

la funzione: $y = \frac{AD^2 - CD^2}{BC^2}$ espressa per mezzo di $x = tan\alpha$ e se ne studi il grafico.

3. *Si studi la variazione della funzione $y = sen2xcosx$ nell'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$.*

4. *Si determini l'altezza e il raggio di base del cono di volume minimo circoscritto ad una data sfera di raggio r. Si dimostri poi che il suddetto cono è anche quello di minima superficie totale.*

I problemi assegnati, vengono chiamati nella consegna della prova del 1971 e del 1972 "quesiti", fatto che mi ha lasciata un pò perplessa dal momento che usualmente con "quesito" si indica una piccola domanda riguardante prevalentemente argomenti di teoria, mentre questi erano veri e propri problemi da risolvere, spesso articolati in più parti.

Riguardo ai contenuti, gli argomenti attorno a cui iniziò a ruotare (e attualmente tuttora ruota, insieme anche ad altri argomenti) la prova di maturità scientifica erano la goniometria e la trigonometria; la geometria e la geometria analitica; i limiti, le derivate, gli integrali e le aree; la teoria e la cultura matematica generale; il calcolo combinatorio.

3.1.1 Trigonometria e goniometria

Da uno studio presentato in una Conferenza della Mathesis il 10 febbraio 2010 da Laura Giannini, si è constatato che la trigonometria e la goniometria erano particolarmente apprezzate da chi formulò le prove di maturità negli anni '70, in particolare negli anni '71, '72, '77.
Il maggior peso questo argomento lo ebbe nella prova del 1971, che fu l'anno in cui, per la prima volta, fece il suo ingresso proprio la goniometria (vedi il terzo quesito):

Il candidato risolva, a sua scelta, almeno due dei seguenti quesiti.

1. *È dato il triangolo AOB, rettangolo in O, del quale sia h l'altezza relativa all'ipotenusa. Detta x l'ampiezza dell'angolo $\angle OAB$ e posto $\tan\frac{x}{2} = t$, si esprima per mezzo di h e di t il perimetro del triangolo e si studi l'andamento della funzione di t così ottenuta.*

2. *Fra i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio assegnato, si determini quello per cui è massima la somma dell'altezza e del doppio della base.*

3. *Si studi il grafico della funzione $y = 2\sin x + \sin 2x$ nell'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$.*

4. *Considerata la generica parabola di equazione:*

$$x = ay^2 + by + c$$

si determinino i coefficienti a, b e c in modo che essa passi per i punti (-6; 0), (0; 2), (0; 6); indi, si calcoli l'area della regione piana limitata dalla curva e dalle tangenti ad essa nei punti di ascissa nulla.

In questa prova il primo problema, contenente elementi di trigonometria (in particolare la risoluzione di un triangolo rettangolo), si traduceva poi nello studio di una funzione razionale fratta, il secondo quesito poteva essere risolto tramite la geometria elementare o più velocemente tramite la trigonometria, il terzo quesito era il grafico di una funzione goniometrica e infine il quarto richiedeva la geometria analitica.
Negli anni '70 fu spesso assegnato uno studio di funzioni trigonometriche, mentre negli anni '80 questo problema fu proposto molto meno.
A volte lo studio di una funzione trigonometrica serviva per poi disegnare il grafico di un'altra funzione, come nella sessione ordinaria del 1983:

Si studi la funzione:

$$y = \sin(x + \frac{\pi}{3}) + \cos(x - \frac{\pi}{6})$$

e se ne disegni il grafico. Utilizzando il grafico precedente si studi la funzione $y = e^{f(x)}$, *dove* $f(x)$ *è la funzione precedentemente studiata.*

Oppure, come nella sessione suppletiva del 1988, poteva essere assegnato un problema risolubile con la trigonometria, in cui si chiedeva di studiare infine la funzione goniometrica ottenuta:

Si considerino una semicirconferenza di centro O e diametro $AB = 2r$ *e la retta* t *parallela alla retta AB e tangente alla semicirconferenza nel punto C.*
Detti D, E ed F i punti d'intersezione di una perpendicolare al diametro AB rispettivamente con la semicirconferenza, con la retta t *e con lo stesso diametro, si studi come varia il rapporto delle aree dei triangoli OFD e DEC al variare dell'angolo* $\angle DOC$.

A volte all'interno di un problema d'esame è stato assegnato lo studio di una funzione trascendente mista, come nella sessione suppletiva del 1992 in cui era richiesto lo studio della funzione

$$y(x) = e^{-x} \cos x \qquad \textit{per } x \geq 0.$$

Per quanto riguarda le formule e i teoremi di trigonometria era importante principalmente la conoscenza delle funzioni goniometriche e di quelle inverse, le relazioni tra i lati e gli angoli del triangolo rettangolo, le formule di addizione, sottrazione, duplicazione e bisezione, la conoscenza degli archi associati. Per quanto riguarda i teoremi sui triangoli qualunque ho notato che principalmente erano necessari il teorema di Carnot e quello che afferma

che l'area di un triangolo è uguale al semiprodotto delle misure di due lati per il seno dell'angolo fra essi compreso, un po' meno utili il teorema della corda, il teorema dei seni, e quello delle proiezioni.
Fino agli anni '90 i problemi di trigonometria erano abbastanza semplici ad esempio un problema assegnato nel 1972 era:

Data una circonferenza di diametro $AB = 2r$, si prendano su di essa, da parte opposta di AB, due punti C e D tali che $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, $\angle ABD = \alpha$. Si consideri la funzione:

$$y = \frac{AD^2 - CD^2}{BC^2}$$

espressa per mezzo di $x = \tan\alpha$ e se ne studi il grafico.

Per risolverlo erano sufficienti elementari conoscenze di geometria e l'applicazione immediata di formule sui triangoli rettangoli e del teorema della corda.
In alcuni problemi era richiesto il calcolo dell'area di un poligono che poteva essere visto come l'unione di due triangoli, perciò era sufficiente utilizzare le formule dell'area su ciascun triangolo, come nel terzo problema del 1983:

Considerato il triangolo ABC avente i lati $CA = a$ e $CB = 2a$, si costruisca, da parte opposta a C rispetto alla retta AB, il triangolo rettangolo ABD il cui cateto BD sia uguale alla metà del cateto AB. Si studi come varia l'area del quadrangolo ADBC al variare dell'angolo ACB e si calcoli il perimetro di detto quadrangolo quando la sua area è massima.

Dopo gli anni '90 nelle prove di maturità vennero proposti problemi di trigonometria più impegnativi.
Come esempio può essere analizzato il problema 3 assegnato nella sessione suppletiva del 1996:

Nel triangolo ABC, rettangolo in A, risulta: $AB = a$; $\sin\widehat{ABC} = \frac{4}{5}$ dove a è una lunghezza nota.
Indicato con D un punto della semicirconferenza di diametro BC, non contenente A, esprimere l'area S del triangolo ABD in funzione dell'ampiezza x dell'angolo $\widehat{BAD}$. Constatato che si ha:

$$S = \frac{a^2}{6}(4sen^2x + 3senxcosx)$$

studiare questa funzione e disegnarne l'andamento con riferimento alla questione geometrica.
Utilizzare il disegno ottenuto al fine di calcolare per quali valori di x l'area S risulta uguale a ka^2, dove k è un parametro reale.
Determinare infine il perimetro del triangolo ABD per il quale è massima l'area S.

Per portare a termine la prima parte di questo problema i candidati di questo anno necessitarono di una maggiore dimestichezza nell'ambiente della trigonometria rispetto a quelli degli anni precedenti, infatti era importante una padronanza degli angoli associati e del teorema dei seni, che non erano di applicazione immediata.
È spesso accaduto che la trigonometria e la goniometria si siano mescolati con teoremi e proprietà geometriche, come nel problema 2 del 1992, nel quale era importante ricordarsi il teorema della bisettrice dell'angolo interno:

In una semicirconferenza di diametro $AB = 2r$ inscrivere il triangolo ABD retto in D. Tracciare la bisettrice dell'angolo $\angle DAB$: tale bisettrice intersechi il segmento BD in E. Indicato con x l'angolo $\angle BAE$, determinare il rapporto y tra la lunghezza del segmento BE e la lunghezza del segmento BD

$$y = \frac{BE}{BD}.$$

Calcolare il rapporto y per x tendente a zero, quindi rappresentare la funzione $y = f(x)$.

Per quanto riguarda le formule parametriche, non ho notato la loro presenza negli anni precedenti ai '90, queste furono introdotte prevalentemente nei problemi in cui era richiesto il calcolo di un integrale, non risolubile per parti o per sostituzione, in cui comparissero seno e coseno, come $\int \frac{1}{sinx} dx$ assegnato nel giugno del 1995 (in questo problema gli autori delle prove si mostrarono abbastanza clementi nei confronti dei maturandi, fornendo un utile N.B.):

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva K di equazione:

$$y = \sin x + \frac{1}{4\sin x} \qquad \textit{con } -\pi < x < \pi.$$

1. *Disegnarne l'andamento e stabilire, in particolare, se la curva ha flessi.*

2. *Calcolare l'area della regione piana delimitata da K e dalla retta di equazione $y = 1$.*
   N.B. Per il calcolo di una primitiva della funzione $\frac{1}{\sin x}$ si suggerisce di porre $\tan \frac{x}{2} = t$.

Infine un problema denso di trigonometria assegnato prima della riforma dell'esame di maturità del 2000, fu proposto nella sessione ordinaria del 1999; per la risoluzione di questo, Grillo nel suo libro contenente temi di matematica per la preparazione all'Esame di Stato nel liceo scientifico, [33], suggerisce la conoscenza del teorema delle tangenti e delle formule di sottrazione e di bisezione per la tangente (che gli studenti faticano spesso a ricordare!). Eccolo:

Considerato il quadrato ABCD, sull'arco di circonferenza di centro A e raggio AB, contenuto nel quadrato, si prenda un punto T in modo che l'angolo $\widehat{TAB}$ misuri $2x$ radianti. Si conduca quindi per T la retta tangente alla circonferenza e si chiamino P e Q i punti in cui essa seca le rette BC e CD rispettivamente.

(a) *Esprimere in funzione di x il rapporto:* $f(x) = \frac{CP+CQ}{AT}$

(b) *Studiare la funzione $f(x)$ ottenuta, tenendo conto dei limiti imposti alla variabile x dalla questione geometrica, e disegnare il grafico in un piano cartesiano ai fini della soluzione del punto c).*

(c) *Utilizzare il grafico disegnato per determinare x in modo che il rapporto considerato sia uguale ad un numero reale k assegnato.*

(d) *Verificare che il rapporto $f(x)$ può essere scritto nella seguente forma:*

$$f(x) = 2\frac{\sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x + \cos 2x + 1}$$

(e) *Stabilire che risulta:* $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$

3.1.2 Geometria e geometria analitica

Geometria analitica ed euclidea sono sempre stati presenti alla maturità scientifica.
Il problema geometrico classico fu proposto frequentemente dopo gli anni '70, anche se notevolmente ridimensionato rispetto agli anni precedenti (in cui a volte, addirittura, abbiamo visto che fu l'unico argomento!).
A seconda dei periodi, si notano preferenze diverse riguardo varie questioni di geometria.
Nel 1990 e 1991, i candidati che non andavano d'accordo con la geometria, si trovarono in difficoltà, perchè questi furono anni in cui comparve in quantità notevole.
Questa è la prova assegnata nella sessione ordinaria del '91:

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione.

1. *In un piano cartesiano ortogonale Oxy si consideri il punto $A(2x; 0)$. Si trovi il luogo L del punto $B(x; y)$ tale che il triangolo OAB abbia il perimetro $2p$ e si determini l'area della regione finita di piano delimitata dal luogo stesso. Se B_0 è il punto di L del primo quadrante la cui ascissa è $\frac{p}{4}$ ed A_0 è il terzo vertice del*

relativo triangolo, si calcoli l'area del triangolo OA_0B_0. Si individuino inoltre le altre 7 posizioni di B tali che il triangolo OAB sia equivalente ad OA_0B_0.

2. *Si consideri in un piano cartesiano ortogonale Oxy la famiglia di parabole tangenti all'asse delle ascisse nel punto $A(1;0)$. Detto B il punto d'incontro della generica parabola con l'asse delle ordinate, si studi come varia, al variare della parabola, l'area della regione finita di piano compresa tra la parabola stessa e la retta passante per B, parallela alla bisettrice del secondo quadrante, determinandone in particolare i valori estremi relativi.*

3. *Si considerino due circonferenze di centri A ed A', e, rispettivamente, di raggi 9 ed 1, tangenti esternamente nel punto O.*
   Sia r la tangente comune in O ed s una retta tangente ad entrambe le circonferenze rispettivamente nei punti B e B'. Detto C il punto d'intersezione delle rette r ed s si dimostri che i triangoli ACA' e BOB' sono rettangoli e si calcoli il rapporto delle loro aree.

Le coniche. Fino alla fine degli anni '80, negli esami di maturità scientifica, la parabola fu protagonista di un quesito quasi tutti gli anni, seguita, un po' meno dalla circonferenza; invece, l'iperbole e l'ellisse furono chiamate in causa un numero limitatissimo di volte, neanche paragonabile con le prime due coniche.
Sulle parabole sono state assegnate numerosissime questioni, che chiaramente è impossibile elencare tutte, cercherò di proporne alcune.
La richiesta più classica, ovvero quella di determinarne l'equazione conoscendo tre condizioni su di essa, fu assegnata varie volte, come per esempio nella sessione suppletiva del 1980:

Si scriva l'equazione della parabola α avente l'asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate, passante per i punti P(0; 3), Q(2; 3) ed il cui vertice V stia sulla parabola β di equazione $y = -x^2 + 3x$. Detto W l'ulteriore punto comune alle due curve, si scrivano l'equazione della retta tangente ad α in W e quella della retta tangente a β in V e si calcoli l'area della superficie del trapezio mistilineo delimitato da queste due rette e dalle due parabole.

Poche volte fu anche chiesto di verificare la congruenza tra due parabole, come nella sessione ordinaria del 1987:

In un sistema di assi cartesiani ortogonali è assegnata la famiglia di linee di equazione:

$$ax^2 + (1 - 3a)x - y - 3 = 0.$$

Si individuino in tale famiglia la retta r e le due parabole C' e C'' che con la stessa retta formano ciascuna una regione finita di piano avente area $\frac{9}{2}$. Si dimostri che le due parabole ottenute sono congruenti. Si scriva inoltre l'equazione della retta parallela *all'asse delle ordinate tale che le tangenti a C' ed a C'' nei punti di intersezione di essa con le stesse parabole siano parallele.*

Questa richiesta non rappresentava niente di difficile, infatti per dimostrare la congruenza di due parabole di equazioni $y = ax^2+bx+c$ e $y = a_1x^2+b_1x+c_1$ era sufficiente verificare che $|a| = |a_1|$, qualora il candidato avesse voluto completare ulteriormente il discorso, avrebbe potuto trovare anche l'opportuna trasformazione che permetteva di sovrapporre le due curve.
Diversa da quelle proposte sopra è la richiesta fatta nella sessione ordinaria del 1991:

Si consideri in un piano cartesiano ortogonale Oxy la famiglia di parabole tangenti all'asse delle ascisse nel punto A(1; 0). Detto B il punto d'incontro della generica parabola con l'asse delle ordinate, si studi come varia, al variare della parabola, l'area della regione finita di piano compresa tra la parabola stessa e la retta passante per B, parallela alla bisettrice del secondo quadrante, determinandone in particolare i valori estremi relativi.

Analizzando le prove di maturità ho trovato un interessante problema della sessione suppletiva del 1973 che riguarda sia la circonferenza sia la parabola, e che necessita del concetto di curve tangenti tra loro in un punto (quindi curve che hanno in un punto la stessa tangente):

In un riferimento cartesiano ortogonale xOy siano date la parabola e le circonferenze di rispettive equazioni:

$$y = -\frac{2}{3}x^2; \qquad x^2 + y^2 - 2ky = 0$$

essendo k un parametro reale. Delle predette circonferenze si consideri quella che risulta tangente alla parabola ed appartiene al semipiano $y \geq 0$, si scrivano le equazioni delle rette tangenti comuni alla parabola stessa ed alla circonferenza e si dica qual è l'ampiezza dell'angolo x formato dalle due tangenti. Si calcoli, infine, l'area della regione finita del piano compresa fra la parabola e la circonferenza trovata.

Negli anni '90 la nota curva $y = ax^2 + bx + c$ perse parte del suo primato nei testi assegnati alla maturità scientifica.

Le trasformazioni del piano. Un altro argomento importante, che spesso dagli studenti è visto con timore, sono le trasformazioni del piano: nelle prove di maturità assegnate fino alla fine degli anni '80 sono state proposte principalmente simmetrie assiali, poche centrali, e traslazioni di assi, poche di punti.
Bisogna riconoscere che fecero ingresso nel problema assegnato alla maturità nella sessione estiva del 1967:

In un piano, riferito ad un sistema cartesiano ortogonale Oxy, si considerino le parabole di equazione:

$$y = mx^2 + x + 3 - 4m \qquad (1)$$

essendo m un parametro diverso da zero.

(a) *Si determinino le coordinate del vertice della generica parabola di equazione (1), in funzione del parametro m. Successivamente, eliminando m fra le due relazioni così trovate, si studi la curva di equazione $y = f(x)$ che così si ottiene (luogo dei vertici delle parabole) e in particolare si trovino i punti A e B in cui la funzione $f(x)$ ha rispettivamente un massimo e un minimo relativo.*

(b) *Si verifichi che tutte le parabole considerate passano per i punti A e B e si dia una giustificazione di ciò.*

(c) *Fra le parabole di equazione (1) si studino quelle aventi per vertice o A oppure B e si provi che esse sono fra loro simmetriche rispetto al punto medio C del segmento AB.*

(d) *Si calcoli l'area della regione finita limitata dalle due parabole di cui al punto (c).*

Poi le simmetrie assiali furono riconsiderate in un problema della sessione suppletiva del 1972, con una semplice simmetria di una funzione razionale fratta rispetto all'asse y, ma queste poi in generale vennero prese poco in considerazione (precisamente nella sessione ordinaria del 1979, ordinaria del 1985, suppletiva 1985, ordinaria 1986, suppletiva 1988, ordinaria 1989, ordinaria del 1993, ordinaria e suppletiva 1996 e sessione ordinaria e straordinaria 2000).
Una simmetria assiale, ad esempio, venne richiesta nella sessione suppletiva del 1985:

Si consideri la parabola di equazione

$$y = 3x - x^2.$$

Si scriva l'equazione della curva ad essa simmetrica rispetto alla retta di equazione $y = x$ e si determini, nella regione finita di piano delimitata dalle due curve, il segmento di lunghezza massima perpendicolare all'asse di simmetria. Si calcoli inoltre l'area della stessa regione di piano.

Una simmetria centrale invece venne richiesta nella sessione suppletiva del 1988:

Si determinino i coefficienti dell'equazione:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad (a > 0)$$

in modo che la curva da essa rappresentata in un piano cartesiano ortogonale Oxy sia simmetrica rispetto all'origine, abbia in esso per tangente la bisettrice del secondo e del quarto quadrante e sia tale che l'area delle regioni finite di piano delimitate dalla stessa curva e dalla retta congiungente i suoi punti di massimo e di minimo relativi sia $\frac{1}{2}$. Se ne disegni il grafico.

Alla sessione suppletiva del 1996 fu pubblicato un problema, la cui richiesta conclusiva era particolarmente interessante: si chiedeva agli studenti di verificare che due curve si trasformassero l'una nell'altra e di accorgersi che queste fossero simmetriche tra loro rispetto ad un punto (simmetria centrale):

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c$$

dove a, b, c sono numeri reali.
Determinare tra queste le due curve k_1 e k_2 che passano per l'origine e per il punto A(2; 0) e sono tangenti all'asse delle ascisse rispettivamente in O e in A. Disegnare l'andamento di k_1 e di k_2.
Considerata la regione piana R delimitata dagli archi di k_1 e k_2 aventi gli estremi in O e in A, calcolarne l'area e trovare tra le sue corde parallele all'asse delle ordinate quella di lunghezza massima.
Calcolare poi l'area del quadrilatero convesso avente per vertici gli estremi di questa corda e i punti O e A.
Verificare che le equazioni delle due curve k_1 e k_2 si trasformano una nell'altra con la sostituzione

$$\begin{cases} x = 2 - x' \\ y = -y' \end{cases}$$

ed esprimere questa proprietà in termini geometrici.

La traslazione di assi fu richiesta in un numero sempre esiguo di prove. Comparve per la prima volta nella sessione autunnale del 1965, nella quale una delle richieste del problema era di trovare la traslazione di assi che trasformasse l'equazione di una iperbole scritta in forma omografica nell'equazione della forma $xy = k$, caratteristica dell'iperbole equilatera riferita agli asintoti:

In un riferimento cartesiano ortogonale Oxy è data la curva di equazione:

$$y = \frac{2mx + 1}{mx - 2} \quad (1)$$

essendo m una costante reale.
- Ricercare per quale traslazione degli assi l'equazione (1) assume la forma $XY = k$;

... ...

La traslazione di assi fu poi rispolverata nella sessione ordinaria del 1984 (vedi sotto), nell'anno successivo, nel 1987 e nel 1988.

Nella sessione ordinaria del 1984 la richiesta fu abbastanza classica:

Si studi la funzione: $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ *e se ne disegni il grafico. Si individui la traslazione di assi:*

$$x = X + a; \qquad y = Y + b$$

che rende la curva simmetrica rispetto all'origine e si scriva l'equazione della curva trasformata. Si determinino le coordinate dei punti in cui la curva data incontra la bisettrice del primo e del terzo quadrante e si calcoli l'area di una delle regioni finite di piano delimitate dalla curva e dalla bisettrice stessa.

Nella prova suppletiva del 1987 la richiesta fu invece più ricercata:

In un sistema di assi cartesiani ortogonali si consideri la parabola C di equazione: $y = -x^2 + 4x - 3$. *Sottoposta alla trasformazione:*

$$\begin{cases} x = mX \quad (m > 0) \\ y = nY \quad (n > 0) \end{cases}$$

si determinino i coefficienti m *ed* n *in modo che il rettangolo circoscritto al segmento parabolico di C determinato dall'asse delle ascisse si trasformi in un quadrato equivalente. Si calcoli l'area dello stesso segmento parabolico.*

Anche negli anni '90 gli autori delle prove proposero poche trasformazioni ai maturandi del liceo scientifico tradizionale mentre cominciarono ad assegnarle con più frequenza ai maturandi del PNI.

La scelta di un opportuno sistema di riferimento. Spesso nelle prove di maturità si è messo alla prova il buon senso degli studenti, assegnando problemi di geometria in cui veniva chiesto direttamente al candidato di scegliere un opportuno sistema di riferimento, come nel problema della sessione suppletiva del 2000:

Una parabola passante per A e B divide il triangolo ABC in due parti equivalenti. Supposto ABC equilatero di lato 3 cm e l'asse della parabola perpendicolare al segmento AB, in un conveniente sistema di riferimento si determinino:

(a) le coordinate di A, B e C;

(b) l'equazione della parabola;

(c) l'equazione del cerchio inscritto nel triangolo ABC.

In problemi di questo tipo lo studente deve saper gestire bene la situazione, prendendo la decisione più opportuna, perchè a seconda di come introduce gli assi cartesiani si faciliterà o complicherà la risoluzione del problema con le sue stesse mani.
Nel problema sopra riportato, una volta scelto come asse x la retta su cui giace il lato AB e come asse y la retta contenente l'asse del lato AB, per non complicare inutilmente la situazione, è opportuno posizionare il vertice C del triangolo sul semiasse positivo delle y e poi, in conseguenza a ciò, ragionando sui dati del problema, si capisce che la parabola deve avere la concavità verso l'alto.
Non so se un discorso di questo tipo sia facile e scontato per tutti i ragazzi, secondo me richiede una buona capacità di ragionamento e, ai fini della valutazione, anche di saper spiegare con le giuste motivazioni le scelte che sono state compiute.

I luoghi geometrici.

Riprendiamo il problema assegnato nella sessione estiva del 1967. La prima domanda era:

In un piano, riferito ad un sistema cartesiano ortogonale Oxy, si considerino le parabole di equazione:

$$y = mx^2 + x + 3 - 4m \quad (1)$$

essendo m un parametro diverso da zero.
(a) Si determinino le coordinate del vertice della generica parabola di equazione (1), in funzione del parametro m. Successivamente, eliminando m fra le due relazioni così trovate, si studi la curva di equazione $y = f(x)$ che così si ottiene (luogo dei vertici delle parabole) e in particolare si trovino i punti A e B in cui la funzione $f(x)$ ha rispettivamente un massimo e un minimo relativo. ...

Nonostante l'affermazione "eliminando m" non sia formalmente corretta (questo comportò la pubblicazione di articoli pieni di critiche da parte di alcuni professori di matematica agli autori delle prove) credo che possa essere stata di aiuto ai candidati che non ricordassero come si determina un luogo geometrico di punti.
Il primo anno in cui venne assegnata una domanda facoltativa che richiedeva il calcolo di un luogo geometrico di punti fu il 1966. Nel 1968 ci fu ancora una questione facoltativa e poi per ritrovare questo argomento si dovette aspettare fino al 1990.
Ritengo che sui luoghi geometrici possano essere assegnati problemi di diverse difficoltà, alcuni abbastanza semplici come quello proposto sopra o come quello della sessione suppletiva del 1992:

Dati i due punti A(-1; 0) e B(1; 0) determinare il luogo dei punti $P(x; y)$ tali che

$$\frac{PA}{PB} = k \text{ con } k > 0.$$

Descrivere le caratteristiche delle curve trovate come luogo. Trovato, per $k \neq 1$, il centro di tali curve in funzione di k, studiare l'andamento dell'ascissa del centro di tali curve al variare di k.

In questo problema l'equazione del luogo geometrico descritto dal punto P, è un fascio di circonferenze non troppo complicato, le cui caratteristiche si descrivono tranquillamente.
Se invece si leggono il problema assegnato precedentemente nella sessione ordinaria e in quella suppletiva del 1991, ci si rende conto che la difficoltà può anche essere maggiore. Ecco quello assegnato nella sessione ordinaria:

In un piano cartesiano ortogonale Oxy si consideri il punto $A(2x; 0)$. Si trovi il luogo L del punto $B(x; y)$ tale che il triangolo OAB abbia il perimetro $2p$ e si determini l'area della regione finita di piano delimitata dal luogo stesso. Se B_0 è il punto di L del primo quadrante la cui ascissa è $\frac{p}{4}$ ed A_0 è il terzo vertice del relativo triangolo, si calcoli l'area del triangolo OA_0B_0. Si individuino inoltre le altre 7 posizioni di B tali che il triangolo OAB sia equivalente ad OA_0B_0.

In questo caso per trovare il luogo geometrico è determinante che lo studente si chiarisca la situazione con un opportuno disegno, per notare così che al variare del punto A sull'asse delle ascisse, il punto B descriverà un luogo geometrico dato dall'unione insiemistica di due luoghi diversi e simmetrici rispetto all'asse delle ordinate.
Infine ecco il secondo problema proposto nella sessione ordinaria del 1990:

Determinare il luogo dei centri delle circonferenze tangenti alla retta $y = \frac{37}{12}$ e passanti per $A(0; \frac{19}{12})$ ed il luogo dei centri delle circonferenze tangenti alla circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 + 4x + 4y - 8 = 0$$

e passanti per B(2; 2). Calcolare quindi l'area della parte di piano racchiusa dalle due curve.

Questo problema può rivelarsi interessante perchè può essere risolto seguendo diversi metodi, per determinare il primo luogo geometrico si può procedere imponendo la condizione di tangenza $\Delta = 0$ al sistema formato dall'equazione della retta $y = \frac{37}{12}$ e dall'equazione di una generica circonferenza $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ e imponendo poi il passaggio per il punto A. Infine esprimendo b in funzione di a si ottengono le coordinate di un generico centro da cui si ricava senza difficoltà il luogo geometrico cercato.

Oppure si può anche procedere, in modo meno laborioso, osservando che i centri delle circonferenze cercate sono punti che devono avere la stessa distanza dalla retta e dal punto A, perciò ricordando che la *parabola* è il *luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto fuoco e da una retta fissa detta direttrice* si capisce che il luogo richiesto non è altro che la parabola avente come fuoco il punto A e come direttrice la retta $y = \frac{37}{12}$.
Per il secondo luogo cercato si possono fare analoghi ragionamenti.

Geometria classica. La geometria elementare è la base su cui poggiano molti problemi assegnati dagli anni '70 e una buona conoscenza dei teoremi e delle proprietà fondamentali della geometria euclidea sono sempre stati utili e indispensabili (soprattutto per i problemi degli anni '90).
I testi pubblicati che raccolgono le prove di matematica degli ultimi anni, contengono spesso dei formulari con richiami teorici che forniscono agli studenti le formule e le regole di cui si ha normalmente bisogno, e possono rivelarsi utili per un rapido (ma anche superficiale) ripasso della geometria, piana e solida, che non sempre a scuola i professori riescono a completare prima della fine della quinta.
Le proprietà e i teoremi geometrici non sono infatti sempre ricordati dagli studenti perchè affrontati soprattutto nel biennio del liceo scientifico e poi poco ripresi successivamente.
Osservando i richiami teorici presenti nei libri [31], [32], [33] si nota che per quanto riguarda la geometria piana occorre avere ben presenti tutte le proprietà riguardanti i poligoni (in modo particolare i triangoli), i concetti di uguaglianza, similitudine, equivalenza delle figure, le proprietà delle rette parallele, il teorema di Talete, i criteri di uguaglianza e di similitudine dei triangoli, i teoremi di Euclide, i punti notevoli dei triangoli con le rispettive proprietà, l'inscrittibilità e la circoscrittibilità dei poligoni, i teoremi sulla circonferenza (teorema del raggio e della corda, delle tangenti, delle secanti), le proprietà della circonferenza, dei settori circolari, dei segmenti circolari, delle corone circolari.
Per quanto riguarda la geometria solida è necessario innanzitutto conoscere i poliedri, e nel dettaglio i prismi quali parallelepipedo, cubo, piramide e le relative formule del volume, superficie laterale e totale; il cilindro, il cono, la sfera, la calotta sferica e le relative formule; importante è la relazione di Eulero (relazione tra numero facce, vertici e spigoli), l'equivalenza, l'equiscomponibilità dei solidi e il principio di Cavalieri. È importante conoscere il tronco di piramide e di cono, la scodella di Galileo e il teorema di Archimede sull'area del segmento parabolico, quest'ultimo infatti può facilitare il calcolo di certe aree senza applicare l'integrazione.
Dopo questa rassegna di geometria vediamo alcuni problemi in cui la conoscen-

za dei predetti argomenti si è rivelata indispensabile.
Problema 1 della sessione ordinaria del 1990:

Data una semicirconferenza di diametro $AC = 2r$ e centro O, tracciare la semiretta uscente da A, perpendicolare ad AC e giacente rispetto ad AC dalla stessa parte della semicirconferenza. Detto M un punto generico su tale semiretta, indicare con x la distanza di M da A. Da M staccare l'ulteriore tangente in B alla semicirconferenza. Detta K l'intersezione della semicirconferenza con il segmento OM determinare l'area y del quadrilatero ACBK in funzione di x. Determinare il valore di y per x tendente a $+\infty$.

In questo problema è importantissima la conoscenza del teorema delle tangenti condotte ad una circonferenza da un punto esterno, il teorema del raggio e della corda, il primo teorema di Euclide; può rivelarsi utile anche la conoscenza dei criteri di similitudine dei triangoli e della formula di Erone.

I problemi di geometria piana si intrecciano spesso con quelli di geometria solida, perchè molte volte è opportuno lavorare con sezioni dei solidi piuttosto che con i solidi stessi.
Ad esempio nel punto (b) del terzo problema del 2000:

Il candidato dimostri i seguenti enunciati:
(a) Fra tutti i triangoli rettangoli aventi la stessa ipotenusa, quello isoscele ha l'area massima.
(b) Fra tutti i coni circolari retti circoscritti ad una data sfera, quello di minima area laterale ha il suo vertice distante dalla superficie sferica della quantità $r\sqrt{2}$, se r è il raggio della sfera.
Il candidato chiarisca, infine, il significato di $n!$ (fattoriale di n) e il suo legame con i coefficienti binomiali.

Sezionando il cilindro circoscritto alla sfera, si ottengono triangoli simili, lavorando su di essi e utilizzando il teorema delle tangenti si risolve il problema.

Il quesito 3 assegnato nella sessione ordinaria del 1984 può sembrare a prima vista un tipico problema di geometria solida, in realtà si riduce ad un problema di geometria piana:

Si consideri una circonferenza di diametro $AB = 2r$ e si conduca per il punto A, perpendicolarmente al piano della stessa circonferenza, il segmento $AP = a$. Se MN è una corda della circonferenza perpendicolare ad AB, si determini per quale posizione di MN risulta massimo il volume della piramide PAMN. Si risolva il problema anche per via elementare.

Tracciata la figura della piramide, si osserva che poichè l'altezza $AP = a$ rimane costante, il volume è massimo quando è massima l'area del triangolo di base e quindi è sufficiente massimizzare la funzione dell'area di base. Questo problema oltre che con la geometria elementare, può essere risolto anche tramite trigonometria. Il testo d'esame chiede esplicitamente di risolverlo anche per via elementare, cioè senza utilizzare strumenti del calcolo differenziale, ma sostenendo un'argomentazione di diverso tipo, fatto, a mio parere, non sempre ovvio.

Per quanto riguarda l'inscrittibilità di poligoni nella circonferenza, si può considerare come esempio il problema 1 assegnato nel giugno del 1980; questo, oltre ad essere un interessante problema di massimo risolubile tramite la trigonometria, chiedeva di inscrivere un esagono in una circonferenza:

Sui lati opposti AB e CD di un rettangolo ABCD ed esternamente ad esso si costruiscano due triangoli isosceli APB e CQD aventi gli angoli alla base di ampiezza α. Sapendo che il perimetro dell'esagono APBCQD è $2p$, si determinino le lunghezze dei lati del rettangolo in modo che l'area dell'esagono risulti massima. Per quale valore di α tale esagono è inscrittibile in una circonferenza?

La geometria solida utilizzata nei problemi degli anni '70 e '80 è stata introdotta principalmente in problemi di massimo o minimo.
Negli anni '90 si incominciò ad interpellarla per problemi con scopi di tipo più geometrico. Nella sessione ordinaria del 1995 il secondo problema si articolava in più punti, il primo di questi si riferiva ad un cubo:

Nel cubo di vertici A, B, C, D, E, F, G, H le facce ABCD e EFGH sono opposte ed i segmenti AE, BF, CG sono spigoli. Inoltre gli spigoli del cubo hanno lunghezza unitaria. Sullo spigolo BF prendere un punto P tale che: $BP = x$.
(a) Verificare che la distanza y di P dalla diagonale AG è espressa dalla seguente funzione: $y = \sqrt{\frac{2}{3}(x^2 - x + 1)}$.

Per risolvere questa richiesta era indispensabile saper fare un disegno chiaro della situazione geometrica.
La sessione suppletiva del 1998 proponeva:

Sia S una semisfera di centro O e raggio 1 e Γ la sua circonferenza massima. Sulla semiretta di origine O, perpendicolare al piano di Γ e che interseca S, si consideri il punto B tale che $OB = \sqrt{3}$. Il candidato:

1. *individui il punto C del segmento OB che sia il centro dell'ulteriore cerchio di intersezione di S con il cono Σ di base Γ e vertice B;*

2. *detto P un punto del segmento OC la cui distanza da O sia x, scriva in funzione di x i volumi dei coni di vertice O e di base rispettivamente i cerchi Γ_1 e Γ_2 ottenuti dall'intersezione con S e con Σ del piano per P, perpendicolare ad OC;*

3. *considerata la corona circolare W delimitata da Γ_1, e Γ_2, determini il volume $V(x)$ del solido delimitato da W e dalle superfici laterali dei coni anzidetti;*

4. *disegni, in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, la curva di equazione $y = V(x)$.*

Anche questo era un problema con un difficile disegno da costruire, e purtroppo senza di esso non si riusciva a risolvere nulla.
Per rispondere al primo quesito bisognava trovare l'ampiezza dell'angolo al vertice del cono Σ e lavorare sui triangoli rettangoli. Anche nelle richieste successive era opportuno lavorare su sezioni del solido.

Infine ritengo che possa essere interessante proporre agli studenti che oggi si stanno preparando alla maturità, il problema 2 assegnato nella sessione ordinaria del 1974, in quanto le calotte sferiche non sono sempre particolare oggetto di studio (soprattutto nella scuola di oggi):

Sono assegnate due circonferenze C e C' esterne tra loro e rispettivamente di centri O ed O' e raggi r ed $\frac{r}{2}$. Sul segmento $OO' = a$ si prenda un generico punto P non interno alle due circonferenze e si conducano da esso le rette tangenti a C e C'. Gli archi aventi per estremi i punti di contatto ed intersecanti il segmento OO' generano, in una rotazione di $180°$ attorno ad OO' due calotte sferiche. Posto $OP = x$, si determini la posizione di P in corrispondenza della quale risulta massima la somma delle aree delle due calotte.

3.1.3 Elementi di analisi

Domande di teoria. A partire dalla riforma del 1968, con l'introduzione della facoltà di scelta dei candidati, spesso tra i problemi venne inserito un quesito che molti potrebbero definire "nozionistico", cioè una domanda che poteva riferirsi sia a questioni di teoria (principalmente di analisi) che relative ad argomenti che hanno segnato la storia della matematica.
Il primo quesito del genere fu assegnato nella sessione ordinaria del 1974:

Si espongano brevemente gli elementi della teoria per il calcolo degli asintoti di una curva di equazione $y = f(x)$.

Fino agli anni '90 spesso una domanda di questo tipo prendeva il posto di uno dei problemi; la continuità e la derivabilità delle funzioni e i teoremi relativi a questi fondamentali concetti dell'analisi, cominciarono ad essere oggetto di verifica, però sempre in quesiti più teorici, in cui nei casi più "fantasiosi" veniva richiesto di verificare l'applicabilità o meno di teoremi a certe situazioni.
Come ad esempio nella sessione suppletiva del 1988:

Si enunci il teorema di Rolle e si verifichi che esso non è valido per la funzione $f(x) = |x|$ nell'intervallo $[-1; 1]$; quale delle ipotesi dello stesso teorema viene a mancare?

(Si osservi l'inadeguata locuzione utilizzata nella formulazione di questo problema: "non è valido", anzichè "non è applicabile".)
Oppure, come nella sessione suppletiva del 1984, veniva chiesto di illustrare i vari casi di discontinuità e di proporre esempi di funzioni discontinue.

Nella sessione ordinaria del 1988, i candidati dovevano mostrare di aver interiorizzato la definizione di derivata:

Si dimostri, avvalendosi della definizione di derivata come limite del rapporto incrementale al tendere a zero dell'incremento della variabile indipendente, che la derivata della funzione $f(x) = sen^3x$ è la funzione $f'(x) = 3sen^2xcosx$ e si generalizzi la questione per la funzione $f(x) = sen^nx$ con n intero positivo.

Sessione ordinaria '89:

Delle funzioni:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 \qquad g(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$$

una non verifica nell'intervallo $[-1; 2]$ tutte le ipotesi del teorema di Lagrange (o del valore medio). Si dica per quale delle due ciò avviene e si giustifichi l'affermazione. Si determinino per l'altra funzione i valori della variabile indipendente la cui esistenza è assicurata dal teorema stesso.

A volte vennero richieste anche nozioni di teoria dei massimi o dei minimi, la regola di de l'Hopital, condizioni di derivabilità o di integrabilità, a volte hanno chiesto di dimostrare il teorema di Torricelli, più volte hanno chiesto di dimostrare la continuità delle funzioni derivabili, ...
A volte venne richiesto allo studente di dimostrare una certa proposizione, come alla fine del terzo problema della sessione ordinaria del 1997:

...A completamento del problema, considerata una funzione reale di variabile reale $f(x)$, definita in un intervallo I, e detta $f(x)$ decrescente in I se $x' < x''$ implica $f(x^{''}) > f(x')$ per ogni x', x'', dimostrare il seguente teorema:
Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale derivabile in un intervallo I. Condizione sufficiente ma non necessaria affinchè $f(x)$ sia decrescente in I è che risulti $f^{'}(x) < 0$ per ogni x appartenente ad I.

Nella sessione straordinaria del 2000, il primo problema si articolava in tre punti e quello finale chiedeva al candidato:

Dica in cosa consista il problema della quadratura del cerchio e perchè venga definito un problema classico.

Questo tipo di quesiti diventò poi molto utilizzato nel 2001, quando fu adottata la nuova formulazione dell'esame di Stato.

Lo studio di funzione. Cominciarono anche ad avere più peso le applicazioni dell'analisi e, come afferma Ercole Suppa in [30] "per la gioia di quelli che amano i procedimenti meccanici, il posto centrale fu preso dal procedimento meccanico dello studio di funzione cosicchè la trinomite, cacciata dalla porta, rientrò dalla finestra. Con buona pace di De Finetti, la *matematica per deficienti* continuò ad imperversare".
Erano infatti frequenti i quesiti che chiedevano di studiare una funzione (molto spesso razionale fratta o goniometrica, poche volte irrazionale) e di disegnarne il grafico.
Ad esempio questo era il quesito 4 della sessione ordinaria del 1973:

Si studi la funzione

$$y = \frac{1 + x^3}{x^2}$$

se ne disegni il grafico. Si scriva poi l'equazione della tangente nel suo punto A di ordinata nulla e quella della retta passante per lo stesso punto e tangente alla curva in un ulteriore punto B. Detta C l'intersezione della prima tangente con il grafico si calcoli l'area della regione piana limitata dal segmento BC e dal grafico stesso.

Calcolo di limiti, funzioni continue e derivabili, funzioni primitive. Anche il calcolo dei limiti cominciò ad essere richiesto in sede d'esame, come ad esempio nella sessione suppletiva del 1982:

Si verifichi che:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x) + \log(1 - x)}{\cos x - 1} = 2$$

ma una tale richiesta esplicita, in un quesito appositamente formulato, non fu praticamente più fatta fino alla riforma del 2000 in cui la presenza dei 10 quesiti a scelta si prestava meglio a questo tipo di domanda.

Nel problema 1 della sessione ordinaria del 1993 venne assegnata una questione riguardante le funzioni continue:

La funzione $f(x)$ sia rappresentata da

$$f(x) = -3x^2 + Hx, \text{ per } x \leq 1 \qquad \text{da } f(x) = \frac{K}{x^2}, \text{ per } x > 1.$$

Determinare le costanti H e K in modo che la funzione $y = f(x)$ e la sua derivata siano continue in $x = 1$. Rappresentare la funzione così trovata e calcolarne l'integrale definito tra 0 e $+\infty$.

Nel 1988 il testo del primo problema assegnava una funzione e chiedeva di calcolarne una determinata primitiva:

Si considerino la funzione $f(x) = \frac{1+x^2}{x^2}$ e la sua funzione primitiva $F(x)$ che assume lo stesso valore di $f(x)$ per $x = 1$. In un piano cartesiano ortogonale Oxy si traccino le curve di equazione $y = f(x)$ e $y = F(x)$ e si determinino le equazioni delle tangenti nei loro punti comuni. Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle due curve e dalla retta di equazione $x = -2$.

Problemi in cui si chiedeva di occuparsi di questioni come queste ultime due comparvero nelle due prove indicate, ma poi fino alla riforma del 2000 non vennero più assegnati!

Gli integrali, il calcolo di aree e di volumi. Per quanto riguarda il calcolo integrale e il calcolo delle aree, nei programmi per il liceo scientifico dal 1925 al 1935 si legge: "Nozione d'integrale; significato geometrico."
A partire dai programmi di De Vecchi del 1936 si legge "Nozione di integrale; significato geometrico; applicazione al calcolo di qualche area e di qualche volume ... Così le nozioni di calcolo integrale faranno ritrovare con metodi semplici regole già apprese per il calcolo di aree e volumi, e la conoscenza delle derivate servirà a chiarire concetti fisici e a risolvere numerose questioni".
Dal 1944 ritroviamo solamente nel programma della V classe "Nozione di integrale con qualche applicazione".
Questi risultarono argomenti complessivamente stabili negli anni e leggermente in crescita.
Uno dei primi problemi in cui è comparso il calcolo integrale è stato il secondo quesito della sessione autunnale del 1935:

In coordinate cartesiane ortogonali rappresentare graficamente le funzioni:

$$y = x^2 - 3x + 2; \qquad y = -x^2 + x + 2.$$

Delle curve rappresentative determinare i punti d'intersezione con gli assi coordinati e le tangenti in tali punti, nonchè i punti di massimo e di minimo. Dire anche come deve essere condotta una retta parallela all'asse delle x, affinchè risultino uguali le due corde che la retta stessa determina in ciascuna delle curve.
È in facoltà del candidato di calcolare l'area individuata dai due archi delle curve date che hanno per estremi i punti comuni alle curve stesse.

In questo problema era richiesto facoltativamente di mostrare di aver capito come calcolare l'area tra due curve.
La presenza del calcolo integrale fino alla fine degli anni '60 non fu sempre confermata, si trattava di un argomento secondario; ma dal 1970 ogni anno fu sempre più importante, tanto che dal 1970 al 1990 sia nella sessione ordinaria che in quella suppletiva fu richiesto il calcolo di un'area per cui era necessaria

l'integrazione: si chiedeva di calcolare l'area tra due curve o l'area tra una curva e l'asse x, a volte era necessario ragionare sulle figure per capire che bisognava dividere in più parti la regione di cui si voleva calcolare l'area, come nel problema 3 della sessione ordinaria del 1980:

In un sistema di assi coordinati cartesiani si consideri la parabola di equazione

$$y = x^2 + \sqrt{3}x + 1.$$

Condotte per l'origine O le due rette tangenti ad essa, si scriva l'equazione della circonferenza passante per O e per i due punti di contatto e si calcolino le aree delle regioni finite di piano delimitate dalle due curve.

In alcuni anni fu proposto anche più di un problema, all'interno della stessa prova, in cui si chiedeva di calcolare un'area tramite integrazione. Nella sessione ordinaria del 1976 dei quattro problemi proposti due necessitavano del calcolo integrale:

1. *In un sistema di assi cartesiani ortogonali si studi la funzione* $y = \frac{2x-1}{2x^3}$ *e se ne disegni il grafico. Si determinino i coefficienti dell'equazione* $y = ax^2 + bx$ *in modo che la parabola da essa rappresentata passi per il flesso e per l'ulteriore punto d'intersezione della curva con la tangente inflessionale e si calcoli l'area della regione finita delimitata dalle due curve.*

2. *Si studi la funzione* $y = x + 2senx$ *e se ne disegni il grafico nell'intervallo* $-2\pi \leq x \leq 2\pi$*. Si determinino le coordinate dei punti comuni alla curva e alla retta di equazione* $y = x - 2$ *e si calcoli l'area della regione di piano delimitata dalla curva e dalla retta nell'intervallo indicato.*

In alcuni problemi tra le ipotesi era inserita l'area di determinate regioni del piano delimitate dalla curva, che permettevano di ricavare informazioni sulla funzione stessa:

In un sistema di assi coordinati cartesiani si consideri il triangolo equilatero ABC avente il vertice A nel punto (3; 0), il vertice B sull'asse delle ordinate ed il vertice C sulla retta di equazione $x = 3$*. Si determinino i coefficienti dell'equazione:*
$y = ax^2 + bx + c$ *in modo che la parabola da essa rappresentata passi per i vertici A, B del triangolo e divida questo in due parti delle quali quella determinata dal lato AB sia la metà dell'altra.* (Problema 2, 1982).

Bisogna riconoscere che non sempre per calcolare l'area di una parte di piano è indispensabile l'integrazione, infatti a volte nei problemi proposti se si ragiona sulle figure, si riesce ad evitare il calcolo di integrali, come è accaduto nel problema 1 del 1986:

Sia data nei piano cartesiano la circonferenza A di raggio uno e centro nell'origine. Si determinino le equazioni delle circonferenze B e C appartenenti al primo quadrante, tangenti ad entrambi gli assi coordinati e alla circonferenza A e, rispettivamente, interna ed esterna ad A. Le circonferenze B e C e gli assi coordinati determinano tre regioni finite appartenenti al primo quadrante ed esterne a B e C. Si calcoli l'area complessiva delle tre regioni.

Le applicazioni del calcolo integrale oggi richieste alle prove di maturità sono moltissime (dedicheremo un paragrafo più avanti su questo argomento), oltre al calcolo dell'area, un'importante operazione che si può fare tramite l'integrazione è il calcolo del volume di un solido di rotazione.
Questa applicazione del calcolo integrale incominciò ad essere richiesta ai candidati soprattutto negli anni '90, mentre in precedenza era stata proposta solamente nella sessione suppletiva del 1984 e in quella ordinaria del 1987:

Si considerino le parabole di equazioni:

$$y^2 = \frac{1}{2}x; \qquad y^2 = -x + a^2$$

Nella regione finita di piano compresa tra le due curve e l'asse delle ascisse si inscriva il rettangolo con i lati paralleli agli assi coordinati che, in una rotazione completa attorno all'asse delle ascisse, genera il cilindro di massimo volume.
In tal caso si calcoli il volume del solido generato nella precedente rotazione dal triangolo mistilineo avente come lati la base superiore del rettangolo e gli archi delle due parabole compresi tra gli estremi di tale base e il punto d'incontro delle parabole stesse.
(Problema 2, sessione suppletiva 1984)

Applicazioni alla fisica. Dagli anni '90 fecero capolino anche domande interdisciplinari, come nella sessione ordinaria del 1990, in cui vennero richieste applicazioni delle derivate alla fisica:

Tracciare il grafico della funzione

$$y = xe^{-x}.$$

La funzione data rappresenti per $x \geq 0$ la legge oraria del moto di un punto che si muove lungo una semiretta (x rappresenti il tempo e y la distanza del punto P dall'origine della semiretta su cui si muove). Determinare in quale istante P raggiunge la massima velocità, in quale istante la velocità è nulla ed in quale istante l'accelerazione è nulla.

Oppure applicazioni degli integrali alla fisica, come nella sessione suppletiva del 1992:

Studiare la funzione

$$y(x) = (\cos x)e^{-x} \textit{per } x \geq 0.$$

Essa, in opportune unità di misura, rappresenta la corrente elettrica di scarica di un condensatore attraverso una impedenza, essendo x il tempo. In tal caso la carica Q inizialmente presente sulle armature del condensatore è data da

$$Q = \int_0^\infty y(x)dx.$$

Calcolare il valore di Q.

Si trattava in effetti, in vari problemi assegnati, di calcoli ispirati ad applicazioni fisiche, sulle quali tuttavia non erano richieste competenze, poichè la formula da applicare era ogni volta fornita dalla traccia.

Nella sessione suppletiva del 1993 venne proposto un interessante quesito di applicazione del calcolo integrale: calcolare il lavoro compiuto da una forza non costante:

Studiare la funzione

$$f(x) = |\frac{\sin x}{K - \cos x}|$$

dopo avere determinato il valore di K in modo che la funzione abbia un massimo per $x = \frac{\pi}{3}$. Supposto che la funzione rappresenti il valore numerico dell'intensità (espressa in newton) di una forza che agisce lungo l'asse delle ascisse (ove x rappresenti il valore numerico della distanza in metri), calcolare il lavoro fatto dalla forza quando il suo punto di applicazione si sposta dalla posizione $x = 0$ a $x = \pi$. (L'integrale proposto è di facile esecuzione se si pone $k - \cos x = t$).

In questo caso invece si richiedeva al candidato la conoscenza della definizione di *lavoro*, qui espresso da $\int_0^\pi f(x)dx$.

Problema di massimo o minimo. I concetti di massimo e minimo con il metodo delle derivate, erano presenti in sede d'esame di maturità già dalla sessione autunnale del 1927:

Dato un cerchio di raggio r, determinare in esso un angolo al centro $\angle AOB = x$ in modo che, costruito il triangolo equilatero ABC sulla corda AB da parte opposta del centro O, sia kr^2 l'area del quadrilatero OACB. Discutere i risultati e dire quale valore deve avere x perchè il quadrilatero abbia area massima.

e dopo il 1968 continuarono ad essere sempre più richiesti, tanto che sono rimasti tuttora una delle applicazioni fondamentali dell'analisi richieste nella prova di maturità. In genere non costituiscono la richiesta fondamentale del problema ma una richiesta di contorno, a cui però quasi tutti i ragazzi, una volta trovata la funzione da studiare, sono in grado di rispondere; allora come oggi i problemi di massimo o minimo sono principalmente risolubili con la geometria analitica, con la geometria elementare oppure con la trigonometria.

Il quesito 2 della sessione ordinaria del 1971 e il 3 della sessione ordinaria del 1976 sono dei classici per gli esami di maturità.

Quesito 2, 1971:
Fra i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio assegnato, si determini quello per cui è massima la somma dell'altezza e del doppio della base.

Quesito 3, 1976:
In un cono circolare retto avente per raggio di base e per altezza rispettivamente i segmenti r e hr si inscriva il cilindro avente la base sul piano di base del cono e il volume massimo. Per quale valore di h tale cilindro risulta anche equilatero? In questo caso particolare si trovi anche il cilindro inscritto per il quale è massima la superficie totale.

Scommetto che la maggior parte dei miei compagni di scuola, ricordi ancora tutti quei problemi di massimo e minimo sulla geometria piana o sulla geometria solida a cui il nostro professore di liceo ci sottoponeva in preparazione alla maturità!
Negli anni più recenti questi problemi sono stati spesso formulati parlando di casseruole, lattine o serbatoi... ma la sostanza è rimasta sempre quella!
Ecco, ad esempio, un quesito assegnato nella sessione ordinaria del 2006:

La capacità di un serbatoio è pari a quella del cubo inscritto in una sfera di un metro di diametro. Quanti sono, approssimativamente, i litri di liquido che può contenere un serbatoio?

Vorrei sottolineare che in questo tipo di problema, per trovare la capacità del contenitore assegnato, il candidato deve infine svolgere un'equivalenza, e questo, non di rado, crea smarrimento tra gli studenti.

Infine vorrei osservare che non sempre è stato indispensabile lo strumento delle derivate per la risoluzione dei problemi di massimo o di minimo, a volte alcuni problemi di questo tipo erano risolubili semplicemente per via elementare, come nella sessione ordinaria del 1986:

Verificare che la somma dei quadrati di due numeri reali di assegnato prodotto $p > 0$:
(a) decresce quando decresce il valore assoluto della differenza dei due numeri;
(b) raggiunge il valore minimo quando i due numeri sono uguali. Dedurre che, fra i rettangoli di data area, il quadrato ha la diagonale minima.

Questo problema era risolubile considerando la ovvia identità:

$$x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy$$

e osservando che quando $|x - y|$ decresce, anche $(x - y)^2$ decresce.

Serie. Si cominciò a parlare di successioni alla maturità nella sessione ordinaria del 1985, con il seguente quesito di teoria:

Si dia la definizione di limite di una successione numerica e si portino esempi di successioni convergenti, divergenti ed indeterminate.

Nel 1982 il quarto problema era:

Si calcoli la somma:

$$S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \cdots$$

con $n \in \mathbb{N}$, tendente all'infinito.

Questo quesito chiedeva quindi di calcolare la somma di una serie, argomento che, come affermano Gori Giorgi e Valenti in [33], non era esplicitamente menzionato nei programmi ministeriali, ma di cui, tuttavia, nella maggior parte dei testi di analisi per i licei scientifici si trovava qualche cenno.
L'altra prova in cui comparve l'argomento delle successioni fu la sessione suppletiva del 2000:

Si consideri la successione di termine generale $a_n = \frac{f(n)}{3^n}$, dove:

$$f(n) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$$

(a) Dimostrare che $f(n) = 2^n$.
(b) Determinare il più piccolo valore di n per cui risulta: $a_n < 10^{-10}$.
(c) Spiegare perchè, se n è dispari, risulta:

$$f(n) = 2\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{\frac{n-1}{2}}\right]$$

fornendo la dimostrazione di ogni eventuale formula cui si fa ricorso. Scrivere un'espressione equivalente di $f(n)$ quando n è pari.
(d) Calcolare $lim_{n\to\infty} a_n$ e, ricorrendo alla definizione, verificare il limite così trovato.
(e) Esiste $lim_{n\to 10^{10}} a_n$? Motivare esaurientemente la risposta.

Non è difficile osservare che nel caso in cui i candidati non avessero affrontato in classe l'argomento delle successioni e dei coefficienti binomiali, fatto molto probabile, avrebbero dovuto scartare a priori questo problema.
Inoltre osserviamo che la domanda *(e)*, apparentemente semplice, richiedeva in effetti una comprensione profonda del concetto di limite e di punto di accumulazione per un insieme; in questo quesito, poichè 10^{10} non è un punto di accumulazione di $\mathbb{N}$, non solo non esisteva il limite in questione, ma non si poteva nemmeno parlare di limite.
Ma questi tre problemi assegnati furono gli unici di questo tipo fino alla nuova riforma.

3.1.4 La comparsa del calcolo combinatorio

Il calcolo combinatorio era presente nei programmi scolastici del liceo scientifico già dal 1925, su questi era infatti scritto "Calcolo combinatorio e binomio di Newton". A partire dal 1936 i programmi aggiunsero ulteriori nozioni "Disposizioni, permutazioni e combinazioni semplici; binomio di Newton. Elementi di calcolo delle probabilità." Infine dal 1944 erano prescritti "Disposizioni, permutazioni e combinazioni semplici. Binomio di Newton."

Nonostante ciò, prima del 2000 questi argomenti comparvero solo nel '76 e nell'81, con questioni molto semplici, sia nella sessione ordinaria che in quella suppletiva;
quesito 4 sessione ordinaria del 1976:

Si dimostri che $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$.

Quesito 4 sessione suppletiva del 1981:

Si ricavi la formula che dà il numero delle combinazioni semplici di n elementi a k a k.

Non era prettamente di calcolo combinatorio la domanda conclusiva del terzo problema della sessione ordinaria del 2000:

Il candidato chiarisca, infine, il significato di $n!$ (fattoriale di n) e il suo legame con i coefficienti binomiali.

Quell'anno non si capì il senso di questa domanda nel problema assegnato, infatti questa non aveva nessun nesso logico con la parte precedente del problema che riguardava a due questioni da massimizzare.

A partire dalla nuova suddivisione della prova di maturità in problemi e quesiti, il calcolo combinatorio è sempre stato presente all'esame.

3.2 Una breve osservazione

A conclusione di questo capitolo si può osservare che fino alla fine degli anni '80 i problemi assegnati nella prova di maturità furono abbastanza standard e forse anche un pò ripetitivi, ma a partire dagli anni '90 i problemi cambiarono, sia come contenuti che come difficoltà, e diventarono anche più vari e meno prevedibili rispetto a quelli degli anni precedenti.
Penso che oggi i nostri studenti di quinta troverebbero più semplice risolvere le prove degli anni '70 e '80 che quelle assegnate negli ultimi anni.

Capitolo 4

La mini-riforma Moratti

Nell'ottobre del 2000 il Ministero, ritenendo inadeguata la struttura tradizionale della prova di matematica alla maturità scientifica, dettò nuove disposizioni, che vennero applicate a partire dal giugno 2001 e sono attualmente in vigore.
Nella Nota Informativa del Ministero che venne emanata furono spiegate le motivazioni del cambiamento con le seguenti parole:

L'inadeguatezza della struttura tradizionale della prova scritta di matematica all'esame di Stato ha evidenziato l'esigenza di affrontare la questione e di prospettarne la soluzione.
Il testo che sarà proposto è costituito da due problemi, articolati al loro interno in almeno tre quesiti (domande), possibilmente indipendenti tra loro, e da un questionario contenente altri quesiti (da un minimo di 6 ad un massimo di 10) riguardanti argomenti del programma. La tipologia delle questioni è tale da offrire al candidato la più ampia opportunità per esprimere conoscenze, competenze e capacità acquisite nel corso di studi. Il candidato è tenuto a risolvere uno dei due problemi proposti a scelta e circa[1] *la metà dei quesiti del questionario.*
Problemi e quesiti, predisposti in stretta coerenza con il piano di studi seguito, saranno impostati e formulati in modo agile e snello, al fine di rendere più agevole la scelta da parte del candidato. L'articolazione delle questioni sarà ispirata al criterio di una complessità graduale ed a quello di una non necessaria indipendenza tra loro.

Secondo le indicazioni, la prova deve valutare l'apprendimento in matematica da diverse angolature.

[1] La Nota Informativa sottolineava inoltre che: *la precisazione sul numero dei quesiti cui rispondere, necessaria, in particolare, nel caso di proposta di un numero dispari di quesiti, è prevista nell'ambito della prova.*

In primo luogo, si vogliono verificare le conoscenze specifiche, vale a dire la conoscenza e la padronanza di concetti, nozioni, procedure, risultati. In secondo luogo, si vogliono valutare le competenze nell'applicare le procedure e i concetti acquisiti, vale a dire come lo studente sa utilizzare tali conoscenze. Infine, si vogliono valutare le capacità logiche e argomentative: lo sviluppo della capacità di argomentare razionalmente è uno degli obiettivi formativi più alti che viene affidato alla matematica.
Non c'è dubbio che per effettuare questa valutazione sia necessaria una prova articolata da svolgere in un tempo sufficientemente ampio, e che quindi la presenza di un problema e di un questionario da svolgere in 6 ore risponda a questo obiettivo (prima la durata della prova era di cinque ore nelle classi di ordinamento e di sei nei corsi sperimentali).
La legge non specifica che peso debbano rispettivamente avere, nel compito e di conseguenza nella valutazione, il problema e il questionario: generalmente si tende ad assegnare peso equivalente al problema e ai quesiti, ma esistono anche interpretazioni diverse. In particolare, va tenuto presente che anche se i quesiti dovrebbero essere, teoricamente, equivalenti, è del tutto ovvio che ci sono domande da cui si può evincere soprattutto la conoscenza di specifiche nozioni, altre da cui si può principalmente capire se il candidato è in grado di argomentare, altre ancora in cui emerge soprattutto la capacità di eseguire correttamente una determinata procedura.
È quindi solo l'insieme della prova, costituita dal problema e dai quesiti, che permette di verificare le diverse componenti dell'apprendimento.
È importante notare che il Ministero non fornisce le soluzioni dei quesiti o comunque una griglia di correzione. Non indica neppure la natura e il livello delle conoscenze o competenze che ogni singolo quesito vuole accertare, lasciando completa autonomia di valutazione agli insegnanti.
È quindi la Commissione che decide quando un problema è stato risolto completamente e quando la risposta ad un quesito deve essere considerata sufficiente, nonché il peso del problema e di ogni singolo quesito.
In sintesi: è ragionevole pensare che l'attuale prova di matematica, presa nel suo complesso, permetta effettivamente di valutare l'apprendimento del ragazzo relativamente ai contenuti scolastici, dando alla Commissione la possibilità di osservare tale apprendimento nelle diverse componenti specificate dalla legge.

A fianco dei problemi, che spesso presentano aspetti di complessità e di concatenazione, vennero quindi introdotti quesiti singoli, per cercare di facilitare i candidati non particolarmente brillanti in matematica.
Lo scopo del cambiamento della prova era quello di consentire ai candidati un maggiore ventaglio di scelta, in modo da dare a tutti la possibilità di

cimentarsi con quesiti su argomenti affrontati durante la propria carriera scolastica.
Vennero inoltre precisati il numero minimo di domande nel problema e il numero minimo e massimo di quesiti, e ciò cui era tenuto a rispondere il candidato. Acquistarono in precisione tanto la proposta che gli estensori della prova potevano presentare quanto la risposta che veniva richiesta al candidato.

Facciamo alcune riflessioni su questa proposta ministeriale, leggendo le opinioni espresse da Giuseppe Anichini e da Lucia Ciarrapico in un articolo in cui veniva presentata e discussa la normativa attualmente in vigore (vedi [17]): *"gli obiettivi della modifica apportata sembrano essere quelli, principalmente, di consentire:*
− a tutti i candidati di svolgere un'onesta prova di matematica a fronte di un serio impegno di studi;
− ai commissari di effettuare una "misura" la più oggettiva possibile della prestazione del candidato.
Pensiamo che, affinchè la prova risponda effettivamente agli obiettivi suddetti, debbano essere osservati alcuni criteri che cercheremo di esplicitare in forma concisa, augurandoci di essere comprensibili, senza, tuttavia, alcuna pretesa d'esaustività.

1. *Un candidato che ha risposto positivamente alle domande di un problema ed ai quesiti nel numero richiesto, ha diritto al massimo del punteggio, cioè a 15 punti. Poichè la scelta del candidato è libera, riteniamo che gli indici di difficoltà, tanto fra i due problemi, quanto fra i quesiti del questionario, debbano essere pressochè uguali. Se così non fosse, sarebbe difficile un'oggettività nella "misura" della prova. Non è, in altri termini, docimologicamente corretto attribuire, in uno stesso contesto, la stessa valutazione (stesso punteggio) a prove che richiedono prestazioni differenti. Sull'indice di difficoltà sono opportune alcune considerazioni. Concorrono a determinare l'indice di difficoltà (di un problema o di un quesito) i tempi (necessari ad assimilare l'enunciato, ad individuarne la collocazione e nel programma svolto in classe e nel percorso di preparazione individuale) e le capacità, concettuali e tecniche, di approccio, di svolgimento, di soluzione e di verifica della prova. Questi fattori sono altamente soggettivi, variabili da studente a studente, da classe a classe, da scuola a scuola. Tuttavia, pur nella piena consapevolezza della complessità del discorso, riteniamo sia necessario cercare di individuare problemi e quesiti con indice di difficoltà, rispettivamente tra loro, omogenei.*

2. *I quesiti proposti non devono essere problemi più brevi, ma domande ed esercizi. L'intento della nuova proposta non è, come intendiamo sottolineare, rendere la prova più difficile del passato, ma offrire a tutti i candidati la possibilità di svolgerla, almeno parzialmente. Affrontare un problema richiede, rispetto a uno specifico quesito, un maggior tempo di assimilazione, ma, una volta fatto proprio l'argomento, il candidato ha di fronte solo difficoltà*

tecniche e concettuali ben delimitate. Invece, aver a che fare con i quesiti vuol dire, per lo studente, avere una più ampia possibilità di scelta, ma al contempo dover decidere quali fra essi sono i più congeniali alla propria preparazione. Questa offerta diversificata risponde al diritto di autonomia esercitabile da ciascuna scuola nell'approntare i curricoli; essa va incontro anche a quei candidati che hanno approfondito gli argomenti "a macchia di leopardo", cioè non tutti nello stesso modo.
Problemi e quesiti dovranno, perciò, spaziare su tutti gli aspetti fondamentali del programma, senza investire, tuttavia, argomenti troppo particolari o marginali. Riteniamo, anche, che in ogni problema le domande debbano essere di varia difficoltà, possibilmente crescente nella progressione delle stesse. Può essere opportuna, ma certamente non indispensabile, l'indipendenza. Nel questionario, invece, i quesiti dovranno naturalmente essere indipendenti.

3. *Le dimostrazioni dei teoremi visti nella teoria non dovranno far parte, come tali, nè dei quesiti nè dei problemi. Esse spingono generalmente alla memorizzazione, per non dire alla copiatura dal libro, e trovano peraltro migliore collocazione nel colloquio. È bene, invece, chiedere dimostrazioni, anche semplici, ma riferite a situazioni particolari.*

4. *Si dovranno fornire tutte le formule che possono servire. L'esame non deve essere una prova di memoria e, come accade nelle analoghe prove della maggior parte dei paesi europei, si dovrebbe consentire l'uso di formulari, di libri di testo, di calcolatrici (anche programmabili, grafiche e simboliche). La conoscenza e la padronanza dei libri e dello strumento di calcolo e di programmazione non sono elementi di secondo piano nella valutazione complessiva della preparazione del candidato. In tal senso riteniamo, perciò, che le norme dettate vadano riviste.*

5. *È opportuno proporre anche domande e quesiti aperti, puntando sulla creatività e sull'inventiva dello studente, nonchè domande che si prestino a più strategie risolutive. La proposizione di quesiti meccanici o esclusivamente di calcolo non dà una buona valutazione delle capacità di analisi e di sintesi del candidato (si ricordi che questa prova era, non a torto, chiamata di maturità)."*

4.1 Alcune premesse alle nuove prove

Come è abbastanza naturale, i contenuti delle prove proposte riguardano principalmente gli argomenti dell'ultimo anno, anche se ultimamente la presenza di argomenti degli anni precedenti è andata aumentando.
Quindi oggigiorno nella prova di matematica della maturità scientifica ci si

può aspettare di tutto; si può affermare che per affrontarla con tranquillità è fondamentale una buona conoscenza della geometria euclidea e dell'analisi.
I principali gruppi di argomenti proposti nelle prove sono:

- geometria e geometria analitica (tali argomenti sono affrontati prevalentemente nel biennio e durante la terza liceo scientifico; la geometria solida si affronta in quarta o quinta liceo)
- goniometria e trigonometria (prevalentemente affrontate in quarta)
- limiti, derivate, studi di funzione e problemi di massimo e minimo (argomenti di quinta), aree e integrali (tali argomenti sono oggetto di studio al termine della classe quinta e, a volte, manca il tempo per consolidarli con opportuni esercizi)
- calcolo combinatorio
- cultura generale (si riferisce sia a domande di teoria che relative ad argomenti che hanno segnato la storia della matematica o interdisciplinari).

Nel prossimo paragrafo intendo soffermarmi principalmente sugli argomenti che a partire dal 2001 sono stati introdotti come novità e su quelli che sono stati richiesti con una maggiore frequenza.
Anche il capitolo precedente, e in particolare quanto detto riguardo le prove di matematica degli anni '90, sono utili per un approfondimento e una riflessione sulle prove assegnate recentemente, infatti molte richieste sono rimaste le stesse; non ho ritenuto opportuno ripetere caratteristiche delle prove già approfondite in precedenza e valide anche per gli esami attuali.

A chi leggerà la mia tesi in cerca di un consiglio o qualche suggerimento per un eventuale ripasso prima dell'esame, raccomando di leggere anche il capitolo precedente.

4.2 Caratteristiche delle prove

L'integrale e le sue nuove applicazioni: Tradizionalmente il calcolo integrale veniva utilizzato solo per il calcolo di aree o di volumi di solidi di rotazione e si trattava di integrare polinomi o semplici funzioni goniometriche; ho notato che negli anni '90, quasi in ogni prova, veniva richiesta almeno una tra queste due applicazioni.
Un problema significativo fu quello proposto nel 2005 nella sessione ordinaria del tradizionale:

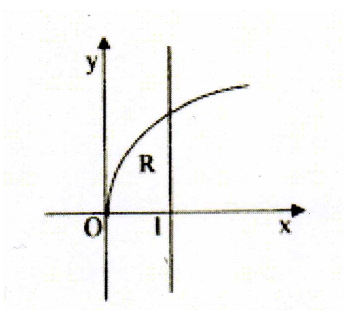
Problema 1. *Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy, ortogonale e monometrico, si consideri la regione R, finita, delimitata dagli assi coordinati e dalla parabola λ di equazione $y = 6 - x^2$.*
1. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di R attorno all'asse y.
2. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di R attorno alla retta $y = 6$.
3. Si determini il valore di k per cui la retta $y = k$ dimezza l'area di R.
4. Per $0 < t < \sqrt{6}$ sia $A(t)$ l'area del triangolo delimitato dagli assi e dalla tangente a λ nel suo punto di ascissa t. Si determini A(1).
5. Si determini il valore di t per il quale A(t) è minima.

Questo problema, se presentato in classe come ripasso, permette di rinfrescare varie questioni sugli integrali: assegnato un ramo di parabola, le prime due domande chiedono il calcolo di volumi di solidi generati dalla rotazione della curva attorno all'asse y e a una retta parallela all'asse x, perciò è necessario adattare a questi casi la formula che fornisce il volume del solido di rotazione di una curva attorno all'asse x. La domanda 3 comporta invece il calcolo dell'area di un segmento parabolico per cui può essere utilizzato il Teorema di Archimede in alternativa ad un integrale.

Negli ultimi anni sono stati proposti esercizi sul concetto di integrale meno semplici, ma anche più interessanti.

Nella sessione ordinaria del 2007 ai corsi tradizionali nel questionario venne posta la seguente domanda:

La regione R delimitata dal grafico di $y = 2\sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 1$ (in figura) è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di S.

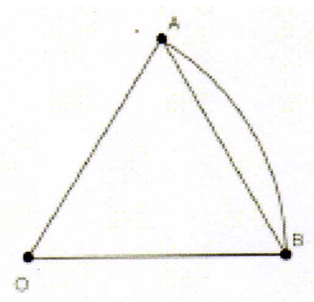


In questo quesito si chiede di calcolare il volume di un solido interpretando il volume come l'integrale dell'area delle sezioni piane del solido, fra loro parallele:

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

È una delle prime volte in cui all'esame di maturità viene fatta una simile richiesta, in precedenza era stata posta nella sessione ordinaria sperimentale del 2005.
Ricordo che anche il problema che io scelsi all'Esame di Stato nel 2009, si concludeva con una domanda simile:

È assegnato il settore circolare AOB di raggio r e ampiezza x (r e x sono misurati, rispettivamente, in metri e in radianti).
4) Sia $r = 2$ e $x = \frac{\pi}{3}$. Il settore AOB è la base di un solido W le cui sezioni ottenute con piani ortogonali ad OB sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di W.



Riguardo alla teoria del calcolo integrale, a partire dal 2000 incominciò ad essere richiesto il teorema della media integrale, spesso presente tra le domande dei questionari, come nel quesito 5 del 2008 sessione suppletiva:

Si calcoli il valore medio della funzione $f(x) = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$ nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$.

e anche applicazioni del Teorema fondamentale del Calcolo integrale, come ad esempio nel 2002 un quesito era:

Calcolare la derivata, rispetto ad x della funzione $f(x)$ tale che:

$$f(x) = \int_x^{x+1} \ln t dt; \qquad \text{con } x > 0$$

A tal riguardo leggiamo il primo problema della maturità scientifica della sessione ordinaria 2013, che aveva come protagonista una funzione integrale:

La funzione f è definita da

$$f(x) = \int_0^x [\cos(\frac{t}{2}) + \frac{1}{2}]dt$$

per tutti i numeri reali x appartenenti all'intervallo chiuso $[9, 0]$.
1. Si calcolino $f^{'}(\pi)$ e $f^{'}(2\pi)$ ove $f^{'}$ indica la derivata di f.
2. Si tracci, in un sistema di coordinate cartesiane, il grafico Σ di $f^{'}(x)$ e da esso si deduca per quale o quali valori di x, $f(x)$ presenta massimi o minimi. Si tracci altresì l'andamento di $f(x)$ deducendolo da quello di $f^{'}(x)$.
3. Si trovi il valor medio di $f^{'}(x)$ sull'intervallo $[0, 2\pi]$.
4. Sia R la regione del piano delimitata da Σ e dall'asse x per $0 \leq x \leq 4$; R è la base di un solido W le cui sezioni con piani ortogonali all'asse x hanno, per ciascun x, $A(x) = 3\sin(\frac{\pi}{4}x)$. Si calcoli il volume di W.

Le nozioni richieste, in questo primo problema, interamente rivolto al programma d'analisi dell'ultimo anno, sono state, oltre la capacità di realizzare grafici, il Teorema fondamentale del Calcolo, il concetto di valor medio di una funzione su un intervallo e qualche idea del legame tra integrazione e volume di un solido.
L'intero problema ruotava quindi intorno ad una funzione integrale esplicitabile eseguendo la semplice integrazione

$$f(x) = \int_0^x [\cos(\frac{t}{2}) + \frac{1}{2}]dt = 2\sin(\frac{x}{2}) + \frac{1}{2}x.$$

Alcuni commenti alla prova hanno obiettato il fatto che questo problema era "forse troppo semplice: l'idea di indirizzare verso l'uso del teorema fondamentale del calcolo in un caso nel quale tale teorema era superfluo non sembra ottimale."

Ho osservato che diversi anni alcuni quesiti sono consistiti nel solo calcolo di un integrale, non troppo immediato (si intende!) e molto spesso risolubile per parti, come

Calcolate $\int_0^1 \arcsin(x)dx$. (q.9 sessione ordinaria 2004)

Un altro tipo di quesito, che spesso viene proposto, nel quale è necessaria la regola di integrazione per sostituzione è come quello assegnato nella sessione suppletiva del 2004:

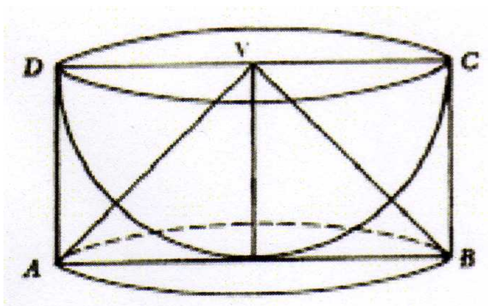
Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale continua su tutto l'asse reale. Si conosce il valore dell'integrale $\int_0^3 = f(x)dx$.
È allora possibile calcolare:

$$(A) \int_0^3 f(\frac{x}{3})dx; \quad (B) \int_0^3 f(3x)dx; \qquad (C) \int_0^1 f(\frac{x}{3})dx; \qquad (D) \int_0^1 f(3x)dx.$$

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

Gli autori delle prove, recentemente, hanno cominciato a formulare quesiti che necessitavano anche del **principio di Cavalieri**. Un'interessante e classica applicazione di questo alla scodella di Galileo è stata proposta nel quesito 9 del 2009:

Nei "Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze", *Galileo Galilei descrive la costruzione di un solido che chiama* scodella *considerando una semisfera di raggio r e il cilindro ad essa circoscritto. La* scodella *si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro. Si dimostri, utilizzando il principio di Cavalieri, che la scodella ha volume pari al cono di vertice V in figura.*



Risultano frequenti i quesiti sul **numero delle radici** di un'equazione assegnata.
Alcuni di questi non sono altro che semplici applicazioni del teorema degli zeri (o di Bolzano), che se presenti in un testo d'esame, a mio parere, rappresentano un regalo per i candidati che ricordano il teorema! Infatti spesso le funzioni proposte non presentano problemi di continuità e non necessitano perciò di particolari calcoli. Come ad esempio il quesito 8 del 2009:

Si provi che l'equazione $x^{2009} + 2009x + 1 = 0$ ha una sola radice compresa tra -1 e 0.

A volte hanno formulato un quesito sempre sulle soluzioni di un'equazione in cui però si chiedeva di trovare al variare di un parametro il numero delle soluzioni, come nel 2008:

Si determini al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione

$$x^3 - 3x^2 + k = 0.$$

Per questo quesito è necessario interpretare l'equazione con il sistema

$$\begin{cases} y = 3x^2 - x^3 \\ y = k, \end{cases}$$

studiare poi la funzione cubica e infine, variando sul grafico la posizione della retta $y = k$, osservare il numero delle intersezioni tra le due curve, e quindi il numero delle soluzioni dell'equazione; in questi problemi non è richiesto di indicare la molteplicità algebrica delle radici ottenute, necessitando questo argomento di molta cautela. Perciò è importante istruire i propri alunni a non andare oltre alla richiesta del problema, ma ad attenersi ad essa per non rischiare di commettere errori inutili.
Riflettendo sempre su problemi di questo genere, leggiamo il quesito 6 della sessione suppletiva del 2011:

Si dica se l'equazione $2\sin x + 2\cos x = 3 + 2^x$ *ha soluzione.*

In questo problema non bisogna cercare di calcolare eventuali soluzioni dell'equazione, ma indagare sulle proprietà delle funzioni che figurano, per giungere alla conclusione attraverso un ragionamento teorico.
Vorrei infine fare un breve commento di carattere generale che prende spunto dal quesito 4 della sessione ordinaria del 2004:

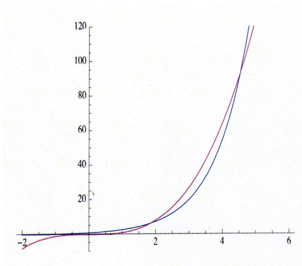
Dimostrate che l'equazione $e^x + 3x = 0$ *ammette una ed una sola soluzione reale.*

In quesiti di questo tipo, a volte, accade in classe che si tende ad incoraggiare gli studenti a svolgere una "risoluzione grafica" dell'equazione, ma questo è sbagliato! Infatti la posizione, pure evidente, delle curve $y = -3x$, $y = e^x$, manifesta evidentemente la ragionevolezza di quanto affermato, ma non dà modo di provarlo. Per una dimostrazione corretta è necessario utilizzare un teorema di analisi, in questo caso il teorema dei valori intermedi, e ragionare sulla iniettività della funzione.

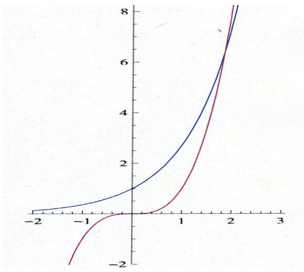
È accaduto che anche gli artefici delle prove siano caduti in errore in tali problemi, forse ingannati dall'osservazione superficiale del grafico; come nel quesito 5 della sessione suppletiva del 2007 (assegnata ai corsi sperimentali):

Si dimostri che l'equazione $e^x - x^3 = 0$ *ha un'unica radice reale e se ne calcoli il valore approssimato con due cifre decimali esatte.*

Il disegno delle curve $y = e^x$ e $y = x^3$, grazie al computer, e all'uso di una unità di misura diversa sui due assi permettono di notare invece che



ci siano due punti comuni alle due curve, assai difficilmente ciò si sarebbe potuto intuire da un disegno realizzato a mano, che probabilmente sarebbe stato simile a questo:



Probabilmente gli autori saranno stati ingannati da questo grafico, tracciato con le loro stesse mani.

Questi sono solo alcuni esempi di quesiti in cui si chiede di indagare sulle soluzioni di un'equazione; sono state proposte molte altre questioni di questo tipo presentate in situazioni diverse.

Spesso nei quesiti è stato richiesto di trovare **espressioni esplicite** o **caratteristiche di funzioni** di cui si conoscono particolari informazioni, ad esempio:

Si determini un polinomio $P(x)$ di terzo grado tale che:

$$P(0) = P'(0) = 0, \quad P(1) = 0 \quad \textit{e} \quad \int_0^1 P(x)dx = \frac{1}{12}.$$

(q.5 sessione ordinaria 2008)

o anche

Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale. Si sa che: $f(x)$ è derivabile su tutto l'asse reale; $f(x) = 0$ solo per $x = 0$; $f(x) \to 0$ per $x \to \pm\infty$; $f'(x) = 0$ soltanto per $x = -2$ e $x = 1$; $f(-2) = 1$ e $f(1) = -2$.
Dire, dandone esauriente spiegazione, se le informazioni suddette sono sufficienti per determinare gli intervalli in cui la funzione è definita, quelli in cui è continua, quelli in cui è positiva, quelli in cui è negativa, quelli in cui cresce, quelli in cui decresce. Si può dire qualcosa circa i flessi di $f(x)$? (q.3 sessione suppletiva 2002)

oppure

Di una funzione $f(x)$ si sa che la sua derivata seconda è 2^x e si sa ancora che $f(0) = (\frac{1}{\ln 2})^2$ e $f'(0) = 0$. Qual è $f(x)$? (q.8 sessione suppletiva 2003)

In questi quesiti si ha uno spostamento dell'attenzione dallo "studio di funzioni" alla "costruzione di funzioni" con date caratteristiche, in questo modo si cerca di evitare che lo studio di funzioni diventi sempre più una specie di rito di scarsa valenza formativa.

Riguardo all'argomento **funzioni**, a volte vengono poste domande sul periodo o sul dominio, come ad esempio il quesito 8 del 2005 sessione suppletiva:

É vero o falso che le due funzioni $\ln(x^2-4)$ *e* $\ln(x+2)+\ln(x-2)$ *hanno lo stesso grafico? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.*

Spesso, ma non sempre ponendo una domanda esplicita, è necessaria l'applicazione dei più classici teoremi di analisi; il quesito numero 6 del 2004 è una applicazione del teorema del valor medio di Lagrange:

Verificate che le due funzioni $f(x) = 3\ln x$ *e* $f(x) = \ln(2x)^3$ *hanno la stessa derivata. Quale giustificazione ne date?*

Riguardo alle nozioni base riguardanti le funzioni, può essere interessante riportare un quesito che, per la sua importanza, è stato posto nella sessione ordinaria del 2009 sia ai corsi tradizionali che a quelli sperimentali:

Sono dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *e* $B = \{a, b, c\}$*. Tra le possibili applicazioni (o funzioni) di A in B, ce ne sono di suriettive? Di iniettive? Di biiettive?*

Nel 2004 invece oltre a conoscere la nozione di funzione era necessaria anche una base di calcolo combinatorio:

Considerate gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *e* $B = \{a, b, c\}$*; quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B?*

L'invertibilità di funzioni non è una domanda molto frequente, è stata chiesta ad esempio nel primo problema del 2010, dove tra i vari punti era richiesto di tracciare il grafico della funzione $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, di dire se essa fosse invertibile e, in caso di risposta affermativa, determinare la sua inversa.

La continuità e la derivabilità delle funzioni sono tra gli argomenti più importanti dell'analisi; spesso nelle prove di maturità (sia tradizionali che sperimentali) viene proposta una funzione definita a tratti di cui si richiede di verificarne queste proprietà. Dalla sessione suppletiva del 2007 ecco il quesito 7:

Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x} & \textit{se } x \neq 0; \\ 0 & \textit{se } x = 0 \end{cases}$$

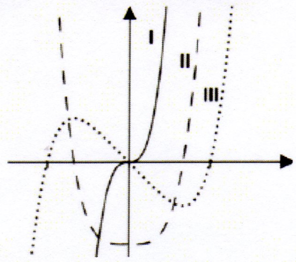
Si dica se essa è continua e derivabile nel punto di ascissa 0.

In quesiti di questo tipo è importante che lo studente sappia la definizione di funzione continua in un punto, abbia presente che la derivabilità implica la continuità e infine che ricordi non solo la definizione di funzione derivabile in un punto, ma anche il criterio di derivabilità.

Negli ultimi anni sta assumendo sempre più importanza saper **esaminare i grafici di funzioni algebriche e trascendenti e saper dedurre informazioni dallo studio di un andamento grafico**. Inoltre, in vista dell'esame, è molto importante anche **acquisire una mobilità di passaggio dal grafico di una funzione a quello della sua derivata e di una sua primitiva**.
L'ultimo quesito del 2011 chiedeva di osservare il legame tra il grafico di una funzione, quello della sua derivata e quello della sua derivata seconda:

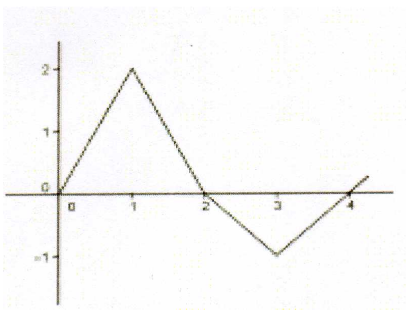
Nella figura a lato, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici. Uno di essi è il grafico di una funzione f, un altro lo è della funzione derivata f' e l'altro ancora di f''. Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici? Si motivi la risposta.

	f	f'	f''
A)	I	II	III
B)	I	III	II
C)	II	III	I
D)	III	II	I
E)	III	I	II



Nella sessione ordinaria del 2013, questioni riguardanti la relazione tra questi grafici sono state proposte una volta nel primo problema e due volte nei quesiti. Ecco l'ottavo quesito:

La funzione f ha il grafico in figura. Se $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, per quale valore positivo di x, g ha un minimo? Si illustri il ragionamento seguito.



Spesso viene richiesto il calcolo di particolari limiti, risolubili la maggior parte delle volte riconducendosi a limiti notevoli o tramite De l'Hopital, ad esempio nella sessione suppletiva del 2011 un quesito chiedeva di calcolare il limite per x che tende a 0 di

$$\frac{e^{x^3}-1}{x\sin^2 x}.$$

Una domanda molto comune chiede di trovare l'equazione della retta tangente al grafico di una funzione in un punto, molto spesso vengono assegnate funzioni integrali oppure funzioni potenza in cui sia la base che l'esponente dipendono da x, come ad esempio $f(x) = (x^2+1)^{\sin x}$ (assegnata nella sessione suppletiva del 2008), nel cui caso è necessario ricordarsi la derivata logaritmica.

Per quanto riguarda lo studio di funzione, questo è presente nei problemi quasi ogni anno, spesso come questione precedente al calcolo di aree di eventuali regioni delimitate dalla curva o di volumi di solidi di rotazione. Nella prova d'esame suppletiva del 2010 entrambi i problemi ruotavano attorno lo studio di funzioni:

1) Data una circonferenza di centro O e raggio unitario, si prendano su di essa tre punti A, B, C, tali che $AB = BC$.
1. Si calcoli, in funzione dell'angolo $\widehat{AOB} = x$, la quantità:

$$AB^2 + BC^2 + CA^2$$

controllando che risulti:

$$f(x) = -4\cos^2 x - 4\cos x + 8.$$

2. Si studi la funzione $f(x)$ e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$.
3. Si verifichi che la curva γ è simmetrica rispetto alla retta di equazione $x = \pi$.
4. Si calcoli il valore medio della funzione f(x) nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$.

2) Sia data la funzione $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.
1. Si determini il dominio di $f(x)$ e si dica se la funzione è continua e derivabile in ogni punto di esso.
2. Si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ.
3. Si calcoli l'area della parte di piano R racchiusa dal grafico γ e dal semiasse positivo delle ascisse.
4. La regione R genera, nella rotazione attorno all'asse delle ascisse, un solido S. In S si inscriva un cono circolare retto con vertice nell'origine. Si determinino raggio e altezza del cono, affinchè il suo volume sia massimo.

All'esame di maturità la **probabilità** viene richiesta agli studenti che hanno frequentato un corso sperimentale, mentre agli studenti del liceo scientifico tradizionale a partire dal 2001 vengono spesso proposti quesiti di **calcolo**

combinatorio, equazioni con **coefficienti binomiali** e qualche questione sul binomio di Newton.
Ne proponiamo qualche esempio:

Una classe è formata da 27 alunni: 15 femmine e 12 maschi. Si deve costituire una delegazione di 5 alunni, di cui 3 femmine e 2 maschi. Quante sono le possibili delegazioni? (q.10 sessione suppletiva 2005)

Nello stesso anno

Le parti letterali dei termini dello sviluppo del binomio $(a+b)^{10}$, ordinati secondo le potenze decrescenti di a e crescenti di b, sono rispettivamente:

$$a^{10}, a^9b, a^8b^2, a^7b^3, a^6b^4, a^5b^5, a^4b^6, a^3b^7, a^2b^8, ab^9, b^{10}.$$

Elencare i loro coefficienti e giustificare in modo esauriente la risposta. (q.9 sessione suppletiva 2005)

Dalla sessione ordinaria del 2007 ho scelto di riportare una semplice equazione con i coefficienti binomiali di risoluzione molto semplice, in cui è necessario ricordarsi la formula che esprime i coefficienti binomiali e le corrette condizioni da porre su n:

Si risolva l'equazione $4\binom{n}{4} = 15\binom{n-2}{3}$.

A volte, come nel 2004, è risultato necessario il concetto di **progressione** aritmetica:

Determinare il più grande valore di n per cui l'espressione numerica $\sum_{k=5}^{n} k$ non supera 10000.

Quesiti sulle **successioni** non sono molto frequenti, ma comunque non sono da sottovalutare. Una delle ultime volte in cui è stata necessaria la nozione di successione fu il problema 2 della sessione ordinaria del 2007:

Si consideri un cerchio C di raggio r.
1. Tra i triangoli isosceli inscritti in C si trovi quello di area massima.
2. Si denoti con S_n l'area del poligono regolare di n lati inscritto in C.
Si dimostri che $S_n = \frac{n}{2}r^2 \sin\frac{2\pi}{n}$ e si trovi un'analoga espressione per l'area del poligono regolare di n lati circoscritto a C.
3. Si calcoli il limite di S_n per $n \to \infty$.
4. Si spieghi in che cosa consista il problema della quadratura del cerchio e se, e in che senso, si tratti di un problema risolubile o meno.

In qualche prova sono state formulate domande di **aritmetica**, che a mio parere, nonostante la loro semplicità, poichè molti studenti non sono abituati ad affrontarle, possono essere spinti, dopo una prima lettura, a cimentarsi su altri quesiti.

Si dimostri che un numero di quattro cifre tutte uguali è divisibile per 101. (q.9 sessione suppletiva 2009)

È necessaria una certa **pratica nell'uso della calcolatrice**.
"*È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile*", questa direttiva, stampata in fondo al testo d'esame, permette l'utilizzo di uno strumento senza il quale alcuni quesiti non potrebbero essere affrontati. Come esempio veloce leggiamo il quesito 2 del 2007:

Le misure dei lati di un triangolo sono 40, 60 e 80 cm. Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.

Si tratta di un classico problema di risoluzione di un triangolo in cui esplicitamente in conclusione vengono richiesti calcoli da eseguire utilizzando la calcolatrice.

La geometria, l'analisi e la trigonometria sono ovunque disseminati nella prova di matematica alla maturità.
Come in parte già osservato nel capitolo precedente, dedicato alle prove assegnate prima del 2000, conoscere i teoremi di **trigonometria** è indispensabile, come pure le formule di uso frequente.
È difficile scegliere e riportare quesiti in cui la trigonometria abbia avuto un certo peso, ho deciso di commentarne alcuni particolarmente interessanti e non troppo classici:

Si calcoli, senza l'aiuto della calcolatrice, il valore di:

$$sin^2(35°) + sin^2(55°)$$

ove le misure degli angoli sono in gradi sessagesimali. (q.9 Sessione ordinaria 2005)

Una volta osservato che 35° e 45° sono angoli complementari, questo quesito diventa molto semplice.
Oppure nel seguente quesito è richiesto di provare tre identità trigonometriche:

Dare una giustificazione delle formule

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1; \qquad \cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$$

e utilizzarle per provare che:

$$\cos(4\alpha) = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1.$$

(q.5 sessione suppletiva 2003)

Nella sessione ordinaria del 2010 fu assegnato un quesito riguardante l'esistenza e la costruzione di un triangolo avente determinate proprietà:

Si provi che non esiste un triangolo ABC con $AB = 3$; $AC = 2$ *e* $\widehat{ABC} = 45°$. *Si provi altresì che se* $AB = 3$; $AC = 2$ *e* $\widehat{ABC} = 30°$, *allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.*

Negli ultimi anni sono stati assegnati anche problemi di trigonometria ispirati a situazioni concrete, come ad esempio:

In cima ad una roccia a picco sulla riva di un fiume è stata costruita una torretta di osservazione alta 11 metri. Le ampiezze degli angoli di depressione per un punto situato sulla riva opposta del fiume, misurate rispettivamente dalla base e dalla sommità della torretta, sono pari a $18°$ *e* $24°$. *Si determini la larghezza del fiume in quel punto.* (q.1 sessione suppletiva 2010)

È questo un semplice problema di applicazione della trigonometria in cui si tratta in sostanza di calcolare la misura di un lato di un triangolo rettangolo in funzione di elementi noti, l'unica difficoltà che potrebbe presentare questo quesito potrebbe essere rappresentata dal non conoscere il significato di *angolo di depressione*.

Per quanto riguarda la **geometria solida e dello spazio** è anch'essa spesso richiesta, a volte in più quesiti all'interno di una stessa prova; ad esempio il quesito 6 e il numero 8 della sessione suppletiva del 2008:

6) Si sechi il solido di una sfera con un piano, in modo che il circolo massimo sia medio proporzionale fra le superficie appianate delle calotte nelle quali rimane divisa la sfera.
8) Si stabilisca per quali valori del parametro reale k *esiste una piramide triangolare regolare tale che* k *sia il rapporto fra il suo apotema e lo spigolo di base.*

Il quesito 6 è un semplice esercizio di geometria dello spazio, in cui l'unica difficoltà consiste nell'interpretazione del testo, scritto con un linguaggio inusuale. Anche il quesito 8 può creare dubbi al candidato nella sua parte interpretativa.

Sono state assegnate anche dimostrazioni di teoremi di geometria dello spazio, come nella sessione ordinaria del 2011:

Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.

Se tagliamo una piramide con un piano parallelo alla base, otteniamo una nuova piramide e un poliedro chiamato tronco di piramide. Ho notato che il calcolo della formula del volume di un tronco di piramide è stato chiesto più volte alla maturità scientifica; per portare a termine questa richiesta è necessario l'ausilio di un particolare teorema di geometria, che non penso sia ricordato da tutti gli studenti: *le sezioni di una piramide con piani paralleli stanno tra loro come i quadrati delle distanze dal vertice.*

Come in parte già accennato, a volte come quesiti sono stati assegnati problemi storici dell'antichità: la quadratura del cerchio, spesso richiesta, come nel quesito 8 del 2011,

In che cosa consiste il problema della quadratura del cerchio? Perchè è così spesso citato?

riferimenti ai solidi platonici,

I poliedri regolari - noti anche come solidi platonici - sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo? (q.2 sessione ordinaria 2006)

o la sezione aurea,

Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare $\sin 18°, \sin 36°$. (q.1 sessione ordinaria 2005)

Nel 2007 l'ultimo quesito era più di cultura generale che prettamente matematico:

Per orientarsi sulla Terra si fa riferimento a meridiani e a paralleli, a latitudini e a longitudini. Supponendo che la Terra sia una sfera S e che l'asse di rotazione terrestre sia una retta r passante per il centro di S, come si può procedere per definire in termini geometrici meridiani e paralleli e introdurre un sistema di coordinate geografiche terrestri?

In esso era richiesto quindi di illustrare il sistema usuale di coordinate geografiche terrestri, basato su latitudine e longitudine. Questo problema conteneva aspetti abbastanza delicati di cui è facile fornire una trattazione superficiale. Si è osservato che molti ragazzi hanno avuto una certa difficoltà ad interpretare geometricamente la situazione geografica e a passare poi da un linguaggio all'altro.

Capitolo 5

La sperimentazione PNI

Nel 1985 furono istituiti nei licei scientifici, come in altre scuole secondarie superiori, dei corsi sperimentali con i quali venivano introdotte delle variazioni sia nei programmi che negli orari d'insegnamento, in vista della riforma delle secondarie.
In questi corsi, le materie scientifiche, e la matematica in particolare, acquistarono maggior peso, basti pensare al PNI e al Progetto Brocca.
La seconda prova scritta agli esami di maturità negli indirizzi scientifici sperimentali, per coerenza con il curricolo seguito, era distinta da quella di ordinamento.
La prova proposta è sempre stata di matematica nelle classi di PNI, mentre è stata alternativamente di matematica o di fisica nelle classi con Progetto Brocca.
In questa tesi ho scelto di analizzare solamente i programmi e le prove di matematica degli indirizzi PNI.

5.1 La Circolare Ministeriale del 6 febbraio 1991

Dalla Circolare Ministeriale del 6 febbraio 1991, n. 24, ho riportato qui sotto gli obiettivi e i contenuti del programma PNI per il trennio del Liceo Scientifico.

OBIETTIVI
Il presente programma mira ad inserire le competenze raggiunte dagli allievi alla fine del biennio in un processo di maggiore astrazione e formalizzazione.
Alla fine del triennio l'allievo dovrà dimostrare di:
- possedere le nozioni ed i procedimenti indicati e padroneggiarne l'organiz-

zazione complessiva, soprattutto sotto l'aspetto concettuale;
- sapere individuare i concetti fondamentali e le strutture di base che unificano le varie branche della matematica;
- avere assimilato il metodo deduttivo e recepito il significato di sistema assiomatico;
- avere consapevolezza del contributo della logica in ambito matematico;
- avere rilevato il valore dei procedimenti induttivi e la loro portata nella risoluzione dei problemi reali;
- avere compreso il valore strumentale della matematica per lo studio delle altre scienze;
- saper affrontare a livello critico situazioni problematiche di varia natura, scegliendo in modo flessibile e personalizzato le strategie di approccio;
- sapere elaborare informazioni ed utilizzare consapevolmente metodi di calcolo e strumenti informatici;
- comprendere il rapporto tra pensiero filosofico e pensiero matematico;
- sapere riconoscere il contributo dato dalla matematica allo sviluppo delle scienze sperimentali;
- essere in grado di inquadrare storicamente l'evoluzione delle idee matematiche fondamentali.

CONTENUTI

Tema n. 1 - Elementi di logica e di informatica
- Approfondimento del procedimento deduttivo: concetti primitivi ed assiomi; definizioni e teoremi; regole d'inferenza e dimostrazioni. Principio d'induzione.
- Coerenza, indipendenza e completezza di un sistema di assiomi. Sistemi formali e modelli.
- Elementi di teoria degli algoritmi.
- Insiemi di dati e loro strutture notevoli.
- Ampliamento delle strutture tipiche dei linguaggi, anche con riferimento ai linguaggi logico-funzionali.

Tema n. 2 - Geometria del piano e dello spazio
- Piano cartesiano: ellisse, iperbole, fascio di rette e fascio di coniche. Luoghi geometrici.
- Le trasformazioni geometriche nel piano: affinità e sue proprietà.
- Incidenza, parallelismo, ortogonalità nello spazio. Angoli di rette e piani, angoli diedri, triedri. Poliedri regolari. Solidi notevoli.
- Le geometrie non euclidee dal punto di vista elementare. La sistemazione assiomatica della geometria euclidea.

Tema n. 3 - Insiemi numerici e strutture
- Numeri reali e continuità della retta. Confronto tra insiemi numerici in-

finiti.
- Numeri complessi e loro rappresentazione grafica. Radici n-esime dell'unità.
- Strutture algebriche fondamentali. Strutture d'ordine. Isomorfismi.
- Matrici e loro composizione, determinanti. Sistemi lineari. Spazio vettoriale sul corpo reale.

Tema n. 4 - Funzioni ed equazioni
- Equazioni e sistemi di secondo grado nell'insieme dei numeri complessi. Equazioni algebriche riconducibili ad equazioni di secondo grado.
- Potenze ad esponente reale. Logaritmi e loro proprietà. Funzioni esponenziale e logaritmica. Equazioni esponenziali e logaritmiche.
- Funzioni circolari. Formule di addizione e principali conseguenze. Equazioni e disequazioni goniometriche.
- Teorema del coseno, teorema dei seni. Risoluzione dei triangoli.

Tema n. 5 - Analisi infinitesimale e numerica
- Progressioni aritmetica e geometrica. Successione numerica e limite di una successione. Il numero π *e il numero* e.
- Limite di una funzione. Funzione continua.
- Derivata di una funzione. Teoremi di Rolle, Cauchy, Lagrange, de l'Hopital.
- Studio di una funzione e sua rappresentazione grafica.
- Il problema della misura: lunghezza, area, volume. Integrale definito. Funzione primitiva ed integrale indefinito. Metodi d'integrazione.
- Equazioni differenziali del primo e del secondo ordine.
- Interpolazione. Risoluzione approssimata di equazioni e sistemi. Derivazione e integrazione numerica.

Tema n. 6 - Elementi di probabilità e statistica
- Speranza condizionata.
- Distribuzione binomiale, normale e di Poisson. Teorema di Bernoulli.
- Formula di Bayes. Nozioni fondamentali di statistica inferenziale; teoria del campione, teoria della stima, verifica delle ipotesi, inferenza bernoulliana.

Nel 1996 fu emanata una nuova Circolare Ministeriale, n. 615, contenente nuove indicazioni riguardo ai programmi scolastici del liceo scientifico indirizzo PNI: furono introdotte alcune novità ed eliminati argomenti presenti in precedenza. In questo documento venne pubblicata anche una suddivisione annuale degli argomenti dei programmi, mentre in quello precedente era lasciato all'insegnante il compito di predisporre il suo itinerario didattico.

5.2 Le prove di matematica proposte ai corsi PNI

Nel 1991-92, si svolsero per la prima volta gli esami di maturità delle classi sperimentali, con temi ministeriali diversi da quelli assegnati agli allievi che avevano seguito i corsi tradizionali. Oltre a qualche difficoltà in più, già dalla prima prova assegnata nel giugno del 1992, apparirono argomenti nuovi:

Il candidato deve svolgere due problemi, scelti tra quelli proposti:

1. In un piano cartesiano ortogonale Oxy si considerino le parabole C e $C^{'}$ di equazione rispettivamente:

$$y - x^2 = 0 \qquad \text{e} \qquad y^2 + 8x - 6y - 3 = 0$$

Si verifichi che C e $C^{'}$ sono tangenti in $A(1;1)$ e che hanno in comune un ulteriore punto B. Detto P un punto della retta AB, sia $QQ^{'}$ la corda intercettata da C sulla parallela per P all'asse delle ascisse, $RR^{'}$ la corda intercettata da $C^{'}$ sulla parallela per P all'asse delle ordinate ed S la proiezione di P sulla retta di equazione $y + 2 = 0$. Si studi come varia il rapporto:

$$\frac{8PS^2}{QQ'RR'}$$

al variare di P, determinando in particolare il suo valore minimo. Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle parabole C e $C^{'}$.

2. In un piano cartesiano ortogonale si indichino con x e y le coordinate di un punto P e con X e Y le coordinate di un punto $P^{'}$. Si consideri la trasformazione di equazioni:

$$\begin{cases} X = ax + by \\ Y = a^{'}x + b^{'}y \end{cases}$$

tale che al punto A di coordinate $x = 1$, $y = 1$ corrisponda il punto $A^{'}$ di coordinate $X = 0$, $Y = 2$ e al punto B di coordinate $x = 1$, $y = 0$ corrisponda il punto $B^{'}$ di coordinate $X = 1$, $Y = 0$.
Si studi la trasformazione ottenuta determinando in particolare i punti e le rette che si trasformano rispettivamente in se stessi.
Detto α l'angolo acuto formato dalla retta r di equazione $y = mx$ e dalla sua trasformata $r^{'}$, si studi come varia la tangente trigonometrica di α al variare della retta r, determinando in particolare il massimo relativo ed il massimo assoluto di $\tan\alpha$.

3. Si desidera fondere due sequenze A e B di numeri interi, non ordinate e con eventuali valori ripetuti, in un'unica sequenza C nella quale compaiono, in ordine crescente e senza ripetizioni, i valori presenti in A e in B.
Il candidato, formulate le eventuali ipotesi aggiuntive che ritiene necessarie, proponga ed illustri una procedura per risolvere il problema e la codifichi in un linguaggio di sua conoscenza.

Questa prova, probabilmente perchè fu la prima, non fu troppo difficile, infatti il primo problema era prevalentemente di geometria analitica e in esso si chiedeva anche qualche elemento di analisi; il secondo problema consisteva in classiche richieste sulle trasformazioni lineari; infine nel terzo problema era richiesta la costruzione di un algoritmo che risolvesse un problema assegnato e la sua codifica in un linguaggio di programmazione a scelta.

Ho osservato che la nuova formulazione della prova di matematica, assegnata a partire dal 2001, ha permesso agli autori delle prove di proporre ogni anno alcuni quesiti comuni tra la prova tradizionale e quella sperimentale, mentre in precedenza questo non era stato possibile; più rari sono i problemi comuni, che a volte contengono anche solo alcune domande uguali.

Di seguito ho analizzato gli argomenti che caratterizzano le prove assegnate al PNI e che le differenziano da quelle assegnate ai corsi tradizionali. (Ho seguito una presentazione degli argomenti diversa dalla suddivisione dei temi fatta nei programmi del 1991.)

Algebra lineare e geometria del piano e dello spazio. A questo argomento con il passare del tempo è stato attribuito un peso sempre maggiore, questo perchè l'algebra lineare ha acquistato un'importanza sempre più crescente in molti rami della matematica pura e applicata, "Ben venga quindi una sua valorizzazione anche in sede di maturità", affermava Vinicio Villani in un articolo del 1998 su *Archimede* [26].
Consideriamo la prova del 1998, in cui uno dei problemi ruotava attorno all'algebra lineare:

Sia dato il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} (k+1)x - y - 1 = 0 \\ 2kx - y - 1 = 0 \\ 2x + y + 1 + h = 0 \end{cases}$$

Il candidato: (a) dica per quali valori di h e k il sistema ammette soluzioni;
(b) interpretate le equazioni del sistema come quelle di tre rette r, s, t di un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, dica quali sono le posizioni delle rette quando il sistema ha soluzione;
(c) nei casi in cui il sistema non ha soluzione, determini, per via algebrica o geometrica, quando le tre rette individuano un triangolo;
(d) in tale condizione, fissato $h = 1$, studi come varia l'area s del triangolo al variare di k e disegni, in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $O'ks$, la curva di equazione $s = s(k)$.

Per la prima parte del problema sono sufficienti i classici teoremi che permettono di classificare il sistema come determinato; ma vorrei osservare che a volte i quesiti di maturità hanno chiesto anche di effettuare l'intera

discussione di un sistema parametrico, e quindi di determinare i valori del parametro che fanno sì che il sistema sia determinato, indeterminato o impossibile.
Nel problema proposto sopra, gli autori della prova hanno chiesto anche di fornire un'interpretazione geometrica della situazione in esame, questa richiesta ha così permesso agli studenti anche di analizzare la situazione dal punto di vista geometrico.
Per quanto riguarda l'algebra lineare, un altro argomento introdotto nelle prove del PNI, e che solamente la nuova riforma Gelmini del 2010 con la formulazione delle Indicazioni Nazionali ha inserito anche nei programmi dei corsi tradizionali, insieme anche all'algebra lineare, sono le trasformazioni lineari, in particolare le affinità e tutte le loro caratteristiche.
Un esempio di questo argomento è già stato riportato all'inizio del paragrafo, un altro problema interessante è quello del 1994:

Si consideri la trasformazione T che muta i punti $A(1;0)$, $B(0;1)$, $C(-1;0)$ *di un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali* Oxy, *rispettivamente nei punti* $A^{'}(0;1)$, $B^{'}(2;-1)$, $C^{'}(0;-1)$.
Si studi la natura di T e si determinino gli elementi che restano uniti nella trasformazione ed il rapporto tra le aree dei triangoli corrispondenti ABC *e* $A^{'}B^{'}C^{'}$.
Detta K la circonferenza per i punti A, B, C e P la parabola di equazione $y = -2x^2+1$, *si dimostri che i loro punti comuni sono vertici di un triangolo equilatero.*
Si considerino le figure $K^{'}$ *e* $P^{'}$ *ottenute da K e P mediante la trasformazione T e la figura* $Q^{'}$ *ottenuta trasformando il quadrato Q, circoscritto a K e con i lati paralleli agli assi coordinati. Avvalendosi della trasformazione T si dica la natura di* $K^{'}$, $P^{'}$ *e* $C^{'}$ *e si determinino:*
(a) le coordinate dei punti in cui $Q^{'}$ *è tangente a* $K^{'}$;
(b) le coordinate dei punti d'intersezione di $K^{'}$ *e* $P^{'}$;
(c) l'area delle tre regioni finite di piano delimitate da $K^{'}$ *e* $P^{'}$.

In questo problema era necessaria la classificazione delle affinità oltre all'analisi di varie caratteristiche di questa.
In alcune prove, assegnate alcune caratteristiche di una affinità, si richiedeva di determinare l'espressione delle sue equazioni, come nella sessione ordinaria del 2000.

Nel 2002 nel questionario si chiedeva di:

Spiegare, con esempi appropriati, la differenza tra omotetia e similitudine nel piano.

Questa domanda di tipo teorico permetteva allo studente preparato di poter esprimersi ampiamente al riguardo.
Il quesito 7 della suppletiva 2004 proponeva un problema per nulla banale di geometria solida:

Descrivere tutte le isometrie dirette che mutano un tetraedro regolare in sè.

Per rispondere a questo quesito, tutt'altro che semplice, lo studente doveva osservare che un'isometria nello spazio si definisce analogamente a quella nel piano, come trasformazione biunivoca che conserva le distanze tra coppie di punti corrispondenti, capire che un'isometria che muta il tetraedro in sè effettua una permutazione dei quattro vertici e che le isometrie dirette che mutano il tetraedro in sè sono tante quante le indirette.

Nella sessione ordinaria del 2005 vennero assegnati due quesiti sulle trasformazioni lineari:

3. Si determinino le equazioni di due simmetrie assiali σ e ϕ la cui composizione $\sigma \circ \phi$ dia luogo alla traslazione di equazione

$$\begin{cases} x' = x + \sqrt{5} \\ y' = y - \sqrt{5} \end{cases}$$

Si determinino poi le equazioni della trasformazione che si ottiene componendo le due simmetrie in ordine inverso, $\phi \circ \sigma$.
6. Le rette r ed s d'equazioni rispettive $y = 1 + 2x$ e $y = 2x - 4$ si corrispondono in una omotetia σ di centro l'origine O. Determinare σ.

Nella sessione ordinaria del 2007 comparve un quesito teorico particolare riguardo a un sottogruppo del gruppo delle affinità:

Si dimostri che l'insieme delle omotetie con centro O fissato è un gruppo.

La risoluzione di questo quesito non è difficile, purchè però si possiedano le conoscenze necessarie. Nonostante nella Circolare Ministeriale del 1991 nel Tema n. 3 fosse già indicata la conoscenza di *Strutture algebriche fondamentali*, una nozione di questo tipo non mi sembra scontata per un maturando! Nel 2009 il quesito 5 del questionario della sessione suppletiva, permetteva di riflettere anche sul significato del rapporto di omotetia:

Nell'omotetia di centro O(0,0) e rapporto $k = -4$, si determini l'equazione della circonferenza corrispondente alla $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$. Si confrontino fra loro i centri e i raggi delle due circonferenze.

Negli ultimi anni le trasformazioni del piano stanno diventando argomento di verifica anche nelle prove di matematica preparate per i corsi tradizionali, con qualche semplice simmetria assiale.

Per quanto concerne il calcolo delle probabilità e della statistica inferenziale, nei primi anni (dal 1993 al 1996) la presenza è stata costante e le competenze richieste sono state anche di livello medio-alto. Non è stato raro il caso che i problemi proposti abbiano richiesto notevole impegno anche ai docenti per giungere alla soluzione. Negli ultimi anni è stata ridotta sensibilmente l'incidenza della statistica.

Elementi di probabilità. Per quanto riguarda questo argomento, ho deciso di non riportare in questa tesi esempi di quesiti assegnati all'esame che parlino di lanci di monete, estrazioni di palline da urne, lanci di dadi e altri quesiti del genere, perchè sono situazioni tipiche per il calcolo della probabilità atte a verificare l'abilità del candidato nel maneggiare teoremi classici e concetti logici elementari, attraverso l'uso di locuzioni come "al più", "almeno" o tramite il "valore di verità" di alcune affermazioni.

Dai quesiti proposti negli anni dal Ministero, si desume che il ruolo attribuito al Calcolo delle Probabilità, per stabilire la maturità degli allievi è molto variabile: si passa da temi di matematica in cui tale disciplina è assente a temi in cui si richiedono conoscenze piuttosto tecniche.

In genere lo svolgimento di un esercizio non banale di Calcolo delle Probabilità richiede conoscenze e abilità nel maneggiare concetti di logica e competenze interdisciplinari in vari rami della matematica, potendo avere approcci algebrici, geometrici, logici di vario genere.

Come afferma Antonio Maturo in [39] "è importante imparare a vedere la Probabilità come disciplina per interpretare, in maniera razionale ma non univoca, le situazioni reali in cui è presente l'incertezza. Per questo scopo è necessario individuare esercizi non ad un'unica soluzione, che prevedano la possibilità di introdurre criteri o anche algoritmi per trarre delle informazioni *utili* dai dati reali."

Vorrei osservare che qualora venga svolto un programma di probabilità e statistica avanzato, i quesiti diventano piuttosto tecnici e si appoggiano sostanzialmente sull'applicazione di risultati relativi a distribuzioni classiche, come quella binomiale, normale o di Poisson. In tutti questi quesiti si è superata la fase della scoperta, dell'intuizione e dello sforzo di comprensione logica e gli studenti si trovano nella fase più tranquilla di applicare, anche con un certo automatismo, le procedure apprese. Comunque fino ad ora sono stati assegnati pochissimi problemi di questo tipo nelle prove d'esame PNI.

Il problema di probabilità fu assegnato per la prima volta nel 1993, sia nella sessione ordinaria che in quella suppletiva. Questo fu quello proposto in giugno:

Un imputato innocente deve essere giudicato da una giuria composta da tre giurati il cui verdetto finale è raggiunto a maggioranza. I tre giurati A, B e C assumono la loro decisione indipendentemente. A e B hanno probabilità p $(0 < p < 1)$ di decidere per l'assoluzione, mentre il giurato C decide in base al risultato ottenuto nel lancio di una moneta.

(a) Si calcoli la probabilità che l'imputato sia assolto.

(b) Supponendo di sostituire il giurato C con un altro giurato D che ha probabilità $p^{'} \neq p$ ($0 < p^{'} < 1$) di decidere per l'assoluzione, si verifichi che la probabilità di assoluzione per l'imputato è maggiore che nel caso precedente se e solo se $p^{'} > \frac{1}{2}$.
(c) Qualora gli imputati siano tre e siano giudicati, indipendentemente tra di loro, dalle giurie prima considerate, si esprima la probabilità dei seguenti eventi:
$E_1 = \{$*la giuria composta da A, B e C ne assolve due su tre*$\}$;
$E_2 = \{$*la giuria composta da A, B e D ne assolve tre su tre*$\}$;
$E_3 = \{$*la giuria composta da A, B e D assolve almeno un imputato*$\}$.
In particolare per $p = \frac{3}{4}$ si determini il valore di $p^{'}$ (probabilità che il giurato D decida per l'assoluzione) in modo che $P(E_1) = P(E_2)$.

Questo problema è di tipo interdisciplinare, relativamente all'area logico-matematica. È necessario saper maneggiare bene alcuni concetti fondamentali di probabilità e saper lavorare con abilità nell'ambito delle equazioni algebriche, riuscendo ad evitare la trappola di calcoli laboriosi.
Per la prima e la seconda parte del problema è necessaria l'applicazione di teoremi della probabilità composta e totale mentre il terzo quesito richiede la conoscenza della distribuzione binomiale.
Nel 1996 è stata richiesta esplicitamente la distribuzione di Poisson:

Al servizio di soccorso stradale di una certa città, aperto 24 ore su 24, arrivano in media 48 chiamate al giorno, due in media all'ora, secondo una distribuzione di Poisson. Il candidato:
(a) calcoli la probabilità che nella prima ora arrivino almeno due chiamate;
(b) calcoli la probabilità che il tempo di attesa fino alla prima chiamata di un certo giorno sia di almeno un'ora;
(c) tenendo presente che il 45% delle chiamate è effettuato da donne che nel 90% dei casi richiedono l'intervento del carro attrezzi, mentre tale intervento è richiesto dagli uomini nel 75% dei casi, determini, se si registra una richiesta di intervento del carro attrezzi, quale è la probabilità che la richiesta sia stata effettuata da un uomo;
(d) calcoli quale è il numero medio di richieste di carro attrezzi per ora.

Il quesito 8 del 2001 ci permette di osservare che spesso i problemi di probabilità possono essere affrontati da due diversi punti di vista: utilizzando il calcolo combinatorio oppure il concetto di probabilità condizionata.

Una classe è composta da 12 ragazzi e 4 ragazze. Tra i sedici allievi se ne scelgono tre a caso: qual è la probabilità che essi siano tutti maschi?

Leggiamo il quesito 3 della sessione ordinaria del 2002:

Assumendo che i risultati - X, 1, 2 - delle 13 partite del Totocalcio siano equiprobabili, calcolare la probabilità che tutte le partite, eccetto una, terminino in parità.

Questo quesito presuppone che il candidato conosca il regolamento e il funzionamento del Totocalcio, ciò non è per niente scontato; per questo motivo è importante che lo studente abbia già visto in classe come funziona questo gioco, come pure giochi con le carte o con i dadi, l'Enalotto o la tombola che possono essere classiche situazioni in cui applicare il calcolo delle probabilità. Possono essere posti anche quesiti di teoria, come è accaduto nella sessione ordinaria del 2006, in cui venne chiesta agli studenti una breve dissertazione sulle diverse definizioni di probabilità:

Bruno De Finetti (1906-1985), tra i più illustri matematici italiani del secolo scorso, del quale ricorre quest'anno il centenario della nascita, alla domanda: "che cos'è la probabilità" era solito rispondere: "la probabilità non esiste!". Quale significato puoi attribuire a tale risposta? È possibile collegarla ad una delle diverse definizioni di probabilità che sono state storicamente proposte?

Negli ultimi anni stanno apparendo con sempre più insistenza problemi di calcolo delle probabilità in uno spazio campionario infinito non numerabile con distribuzione di probabilità uniforme. Questo tipo di problema comparve una delle prime volte nella sessione ordinaria del 2007, nel quesito 6:

Si scelga a caso un punto P all'interno di un triangolo equilatero il cui lato ha lunghezza 3. Si determini la probabilità che la distanza di P da ogni vertice sia maggiore di 1.

In questo caso lo spazio campionario è il triangolo equilatero, e in esso, poichè la distribuzione è chiaramente quella uniforme, si stabilisce che la probabilità di trovare il punto P in un sottoinsieme della figura sia direttamente proporzionale all'area del triangolo. In poche parole

$$p = \frac{\text{Area favorevole}}{\text{Area possibile}}.$$

L'unica difficoltà è nel riuscire ad interpretare il problema e a tradurre il testo in un opportuno modello matematico, per capire quale sia l'area favorevole (in questo caso l'area del triangolo escluso i tre settori circolari di raggio 1 centrati nei vertici del triangolo).

Un problema analogo è stato assegnato nel 2009, quesito 3:

Una moneta da 2 euro (il suo diametro è 25,75 mm) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle quadrate di lato 10 cm. Quale è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella (cioè non tagli i lati dei quadrati)?

In questo caso bisogna osservare che la condizione perchè la moneta cada internamente alla mattonella è che la distanza del centro della moneta dai lati della mattonella sia maggiore o uguale al raggio della moneta, quindi il centro di questa deve stare dentro un quadrato più piccolo di lato pari al lato

della mattonella meno il diametro della moneta.
Il quesito 4 della sessione suppletiva del 2009, formulato sotto forma di problema sul calcolo delle probabilità, è in realtà un problema di geometria solida, in cui calcolati il *volume favorevole* e il *volume possibile*, non resta che farne il rapporto.

Siano dati una sfera di raggio r, il cubo in essa inscritto e il cono circolare retto inscritto nel cubo. Si scelga a caso un punto all'interno della sfera: si determini la probabilità che tale punto risulti interno al cono.

Nella sessione suppletiva dello scorso 2013, il quesito 10 proponeva una nuova situazione geometrica in cui applicare il calcolo delle probabilità:

Data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 16$, si calcoli la lunghezza dell'arco compreso tra i punti $A(2\sqrt{3}, 2)$ e $B(2, 2\sqrt{3})$. Si scelga poi a caso un punto sulla circonferenza: si determini la probabilità che tale punto giaccia sull'arco AB.

In questa situazione, scegliendo a caso un punto sulla circonferenza, la probabilità che tale punto giaccia sull'arco AB è pari al rapporto tra la lunghezza dell'arco AB e la lunghezza della circonferenza; la probabilità richiesta può essere calcolata anche come rapporto tra angoli e in particolare tra l'angolo al centro individuato dall'arco AB e l'angolo al centro dell'intera circonferenza.

Una questione, tra le poche, sulle distribuzioni continue di probabilità è stata posta nel secondo problema della sessione suppletiva del 2005, in essa si chiedeva di trovare il valore di un parametro di una funzione, che le permettesse di essere una densità di probabilità (funzione positiva e continua su tutto $\mathbb{R}$ e con $\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(x)dx = 1$) e di trovare anche la funzione di ripartizione di tale variabile ($F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$):

È assegnata la funzione $f_a(x) = \frac{a}{1+x^2}$, dove a è un parametro reale non nullo.

... ...

5) Verificare che esiste un valore a' di a per il quale la funzione $f_{a'}(x)$ si può considerare la densità di probabilità di una variabile aleatoria continua e determinare la funzione di distribuzione di tale variabile.

Un quesito teorico sulla distribuzione normale di probabilità fu assegnato invece nel 2007:

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Se ne spieghi l'importanza nelle applicazioni della matematica illustrando il significato di μ, σ, σ^2, e come tali parametri influenzino il grafico di $f(x)$.

Statistica. Meno presente rispetto al Calcolo delle Probabilità, la statistica venne introdotta per la prima volta nella sessione suppletiva del 1994.
L'anno successivo nella sessione ordinaria venne assegnato il seguente problema:

Nella tabella seguente sono riportati i dati di un'indagine campionaria, relativamente ad alcune regioni e al 1990, sulla distribuzione delle abitazioni secondo la superficie abitata (area espressa in metri quadrati):

Superficie regione	50-95 mq	96-110 mq	111-130 mq	131-200 mq
Liguria	130	11	6	5
Campania	362	1805	105	122
Sicilia	1068	430	203	149

Il candidato:
(a) stimi la superficie media abitata nelle tre regioni e la deviazione standard delle stime, assumendo come valore rappresentativo di ogni classe il valore medio;
(b) rappresenti mediante diagrammi opportuni le distribuzioni marginali, rispettivamente per regioni e per superficie;
(c) verifichi l'ipotesi: H_0: non c'è differenza significativa (5%) *tra le medie delle superfici nelle diverse regioni;*
(d) verifichi l'ipotesi: H_0: non c'è differenza significativa (5%) *tra le distribuzioni relative alle diverse regioni.*

Questo rappresenta un tipico problema di statistica.
Il problema risultò molto difficile per i candidati, specie nelle domande *(c)* e *(d)*, riguardanti il tema "verifica di ipotesi statistiche" scarsamente o per nulla trattato nei corsi liceali. Questo argomento ben presto scomparve dalle prove ministeriali.
Di quesiti di statistica ne sono stati assegnati molti meno rispetto a quelli di probabilità, e comunque negli anni recenti assai più semplici di quello ricordato sopra, ad esempio nel 2009 venne proposta la seguente domanda in cui era necessaria la definizione di media aritmetica di una lista di dati numerici:

Alla festa di compleanno di Anna l'età media dei partecipanti è di 22 anni. Se l'età media degli uomini è 26 anni e quella delle donne è 19 anni, qual è il rapporto tra il numero degli uomini e quello delle donne?

Elementi di logica e di informatica. Per quanto riguarda questa parte di programma, ho osservato che qualche quesito di informatica è stato formulato principalmente negli anni '90.
Nei primi anni sono stati posti quesiti relativi all'ordinamento e all'elaborazione di dati strutturati (array), in cui era richiesta la costruzione di algo-

ritmi tradotti in un linguaggio di programmazione, come nel terzo problema della sessione suppletiva del 1992:

Si vuole trovare quali valori sono contenuti in un insieme A di numeri interi e con quale frequenza compare ciascun valore. Si desidera inoltre produrre un elenco di valori e delle relative frequenze in ordine decrescente di frequenza.
Il candidato, formulate le eventuali ipotesi aggiuntive che ritiene necessarie, proponga ed illustri una procedura per risolvere il problema e la codifichi in un linguaggio di sua conoscenza.

Dal 1997 il quesito di informatica consiste nel richiedere che lo studente determini il valore della radice di un'equazione (magari trascendente) o di un integrale definito, implementando un algoritmo iterativo. Negli anni 2000 le applicazioni dell'informatica hanno cominciato a perdere importanza in sede di maturità, cominciando essa ad essere richiesta solo nella risoluzione di problemi di analisi numerica (come è detto anche successivamente in questa tesi); si è così abbassato il livello di competenze richieste nel campo della programmazione.
Una delle ultime volte in cui è comparsa l'informatica, non proprio esplicitamente, è stato il quesito 5 del 2005:

Come si definisce e quale è l'importanza del numero e di Nepero [nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550-1617)]. Si illustri una procedura che consenta di calcolarlo con la precisione voluta.

Facciamo nostre le parole di Negrini nel commento a questo quesito in [32]: "la domanda teorica sulla definizione del numero e non presenta difficoltà, trattandosi di un argomento contenuto in tutti i manuali di Analisi matematica; per quanto riguarda la seconda domanda (approssimazione di e) vi sono vari modi per realizzarla; tuttavia una trattazione esauriente richiede la conoscenza di fatti che di solito non vengono presentati agli studenti liceali."
Dunque, con il passare del tempo dalla nascita del PNI, il ruolo dell'informatica, intesa come attività di programmazione con un particolare linguaggio, è stato ridimensionato.

Vorrei sottolineare che nella Circolare Ministeriale del 1996, la *Logica* e l'*Informatica* sono state separate in due diversi temi:

Tema n. 5 - Logica
5.a Alcune regole d'inferenza. Esempi di derivazioni nella logica dei predicati.

Tema n. 6 - Informatica
6.a Implementazione di algoritmi numerici diretti e iterativi, controllo della precisione.
6.b Convergenza di metodi iterativi. Algoritmi ricorsivi. Algoritmi definiti

in modo iterativo e in modo ricorsivo.
6.c Il concetto di algoritmo: esempi di funzioni non calcolabili; Esempi di problemi non decidibili. (Quest'ultimo argomento non è prescrittivo: il suo svolgimento e livello di approfondimento è lasciato alla valutazione degli insegnanti.)

Insiemi numerici e strutture. "Il confronto tra insiemi numerici infiniti porterà a riconoscere la continuità nell'insieme dei numeri reali e la numerabilità negli altri insiemi numerici trattati" oppure "Il confronto tra insiemi infiniti dovrà far risaltare la differenza tra la potenza del numerabile e quella del continuo". Questi commenti rispettivamente della Circolare Ministerale n. 24 del 1991 e della Circolare Ministeriale n. 615 del 1996, possono aiutare a capire lo spirito con cui negli ultimi anni il Ministero sta proponendo quesiti sugli insiemi.
Un quesito riguardante questi argomenti è stato proposto per la prima volta nel 2011:

In una delle sue opere G. Galilei fa porre da Salviati, uno dei personaggi, la seguente questione riguardante l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali ("i numeri tutti"). Dice Salviati: ≪....se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?≫. Come si può rispondere all'interrogativo posto e con quali argomentazioni?

In questa domanda si chiedeva una riflessione sulla caratteristica degli insiemi infiniti, che agli studenti può sembrare paradossale: il fatto che un insieme infinito possa essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.
L'anno successivo il quesito 4 della sessione ordinaria si riferiva al *metodo diagonale di Cantor*:

L'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri razionali sono insiemi equipotenti? Si giustifichi la risposta.

Infine lo scorso 2013 il quesito 9 diceva:

Tre amici discutono animatamente di numeri reali. Anna afferma che sia i numeri razionali che gli irrazionali sono infiniti e dunque i razionali sono tanti quanti gli irrazionali. Paolo sostiene che gli irrazionali costituiscono dei casi eccezionali, ovvero che la maggior parte dei numeri reali sono razionali. Luisa afferma, invece, il contrario: sia i numeri razionali che gli irrazionali sono infiniti, ma esistono più numeri irrazionali che razionali. Chi ha ragione? Si motivi esaurientemente la risposta.

Molti hanno commentato che questo quesito è stato formulato in modo impreciso e sarebbe stato più adatto ad una prova orale.

Le geometrie non euclidee. Nella Circolare Ministerale n. 24 del 1991 tra i commenti ai temi si osservava che la "presentazione delle geometrie non euclidee non sarà fine a se stessa, ma servirà a chiarire meglio i concetti di assioma e di sistema assiomatico-deduttivo; essa potrà essere condotta anche attraverso l'illustrazione dei più significativi tentativi di dimostrazione del V postulato di Euclide. L'acquisizione di questi concetti consentirà il riesame critico ed il concatenamento logico degli argomenti di geometria euclidea già studiati, nonché la enucleazione del relativo sistema di assiomi."
All'esame la geometria non euclidea venne richiesta nelle prove per la prima volta nel 2007:

Si consideri il teorema: "la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto" *e si spieghi perchè esso non è valido in un contesto di geometria non-euclidea. Quali le formulazioni nella geometria iperbolica e in quella ellittica? Si accompagni la spiegazione con il disegno.*

Una domanda del genere fu poi proposta come minimo in altre tre sessioni d'esame.

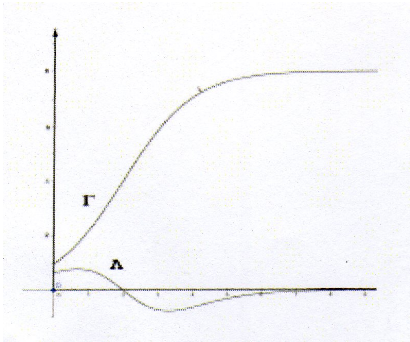
In precedenza nel 2001 era stato posto questo quesito:

Spiegare il significato di sistema assiomatico con particolare riferimento alla sistemazione logica della geometria.

Per rispondere ad esso, poteva essere particolarmente significativo e utile utilizzare anche qualche conoscenza sulle geometrie non euclidee, come accennato all'inizio di questo paragrafetto.

Analisi infinitesimale. L'analisi affrontata nei programmi PNI inizialmente nella Circolare Ministeriale del 1991 prevedeva le *equazioni differenziali del primo e del secondo ordine*, che però non furono più contemplate nella Circolare successiva del 1996.
Per quanto riguarda i quesiti e i problemi di analisi assegnati al PNI, questi contengono spesso questioni indubbiamente più complesse riguardo ai classici argomenti di analisi; per accorgersi di ciò, è sufficiente leggere il primo problema assegnato nel giugno dello scorso 2013:

Una funzione $f(x)$ è definita e derivabile, insieme alle sue derivate prima e seconda, in $[0+\infty[$ e nella figura sono disegnati i grafici Γ e Λ di $f(x)$ e della sua derivata seconda $f''(x)$. La tangente a Γ nel suo punto di flesso, di coordinate $(2;4)$, passa per $(0;0)$, mentre le rette $y=8$ e $y=0$ sono asintoti orizzontali per Γ e Λ, rispettivamente.
1) Si dimostri che la funzione $f'(x)$, ovvero la derivata prima di $f(x)$, ha un massimo e se ne determinino le coordinate. Sapendo che per ogni x del dominio è:
$f''(x) \leq f'(x) \leq f(x)$ qual è un possibile andamento di $f'(x)$?



2) Si supponga che $f(x)$ costituisca, ovviamente in opportune unità di misura, il modello di crescita di un certo tipo di popolazione. Quali informazioni sulla sua evoluzione si possono dedurre dai grafici in figura e in particolare dal fatto che Γ presenta un asintoto orizzontale e un punto di flesso?
3) Se Γ è il grafico della funzione $f(x) = \frac{a}{1+e^{b-x}}$, si provi che $a = 8$ e $b = 2$.
4) Nell'ipotesi del punto 3), si calcoli l'area della regione di piano delimitata da Λ e dall'asse x sull'intervallo $[0, 2]$.

Per rendersi conto del fatto che all'esame di maturità ci si possa aspettare di tutto, ecco il quesito 7 della sessione suppletiva assegnata nel 2005 ai corsi sperimentali:

Spiegare in maniera esauriente perchè una funzione reale di variabile reale integrabile in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, non necessariamente ammette primitiva in $[a, b]$.

Il problema richiedeva, in sostanza, di distinguere tra il concetto di primitiva e quello di integrale: il nocciolo della questione è legato al fatto che una funzione che ha discontinuità a salto in un intervallo, non può avere primitive nell'intervallo (teorema di Darboux).
Si tratta di un problema che abitualmente non fa parte dei programmi liceali, dove si considera, per lo più, l'integrale di Riemann solo per funzioni continue, e neanche figura nella maggior parte dei testi scolastici.
"Se questo esercizio vuole essere uno stimolo ad *ampliare gli orizzonti*, ben venga, ma perchè usare gli studenti candidati alla maturità come cavie?" si chiedeva Luciano Battaia in [48].
Anche il quesito 3 della sessione suppletiva del 2009 ha suscitato alcune polemiche a causa della presenza marginale nei programmi dell'argomento proposto. Nell'articolo *Che cosa non vorrei trovare nello scritto di matematica*, [49], pubblicato nel 2010 da Mariangela Chimetto, professoressa al Liceo Scientifico "G. B. Quadri" di Vicenza, riguardo ad esso si affermava che "nei programmi compaiono le principali nozioni relative al significato

geometrico della derivata, all'integrazione e alla derivazione di una funzione composta, ma non è ovvio che lo studente debba saper risolvere quesiti come il seguente":

Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x) = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sin\frac{x}{2}} \frac{e^{t^2}}{|t|+1} dt$$

nel punto P di ascissa $x = \frac{\pi}{2}$.

Il commento a questo esercizio continuava così: "L'esercizio è complicato, richiede esperienza, padronanza dei concetti necessari, capacità di saperli collegare tra di loro. Dubito che sia alla portata effettiva di uno studente che solo da qualche mese, nella migliore delle ipotesi, ha affrontato il concetto di integrale definito e di funzione integrale, a meno che non sia stato appositamente addestrato allo scopo. Negli ultimi anni sono comparsi spesso quesiti di questo tipo, anche se di solito più semplici. L'effetto è stato di spiazzare gli studenti e di spingere gli autori dei testi scolastici, che già in genere presentano un numero francamente eccessivo di esercizi, ad infarcirli ancora di più di esercizi di puro addestramento. In ogni caso l'impatto sull'immagine della matematica non è positivo."

Analisi numerica. Leggendo la Circolare Ministeriale n. 24 del 1991 ci si accorge subito della presenza di altri argomenti che distinguono il programma del PNI da quello del tradizionale, nel quale risultano completamente assenti: l'*interpolazione* (che però venne eliminata dai programmi della successiva Circolare Ministeriale del 1996, e non venne mai assegnata alla maturità), la *risoluzione approssimata di equazioni e sistemi* e l'*integrazione numerica.*

Questi argomenti caratterizzano fortemente le prove di matematica assegnate alla maturità scientifica del PNI e sono spesso presenti nei problemi e nei quesiti.

"Si utilizzeranno i metodi del calcolo numerico nella determinazione del valore di una funzione in un dato punto, nella risoluzione di equazioni e di sistemi e nel calcolo integrale, quando l'impiego dei metodi tradizionali risulta di difficile applicazione", questa è la giustificazione con cui il Ministero, nella CM sopra detta, giustificava l'introduzione dell'Analisi numerica nei programmi PNI.

Uno dei primi problemi in cui è comparsa l'approssimazione di zeri di equazioni fu il numero 3 della sessione ordinaria del 1994:

In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy *si considerino* *le linee di equazione:*

$$y = x^3 + x^2 \qquad \text{e} \qquad y = -2x^2 + 1.$$

Si dimostri che le due linee hanno un punto d'intersezione nel primo quadrante con ascissa x_0 appartenente all'intervallo $(0,4; 0,8)$.
Avvalendosi di un metodo numerico si determini x_0 con un'approssimazione di $\frac{1}{100}$.
Si descriva una procedura che consenta di calcolare i valori approssimati di x_0 con un'approssimazione di 10^{-n} e la si codifichi in un linguaggio di programmazione conosciuto.

A partire dalla nuova formulazione dell'Esame di Stato tra i quesiti delle prove ne compare spesso uno di questo tipo:

Si dimostri che l'equazione $(3 - x)e^x - 3 = 0$ per $x > 0$ ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte. (quesito 5 sessione suppletiva 2008)

Quesiti del genere rappresentano un ampliamento di quelli proposti ai corsi tradizionali in cui, data un'equazione, viene solamente richiesto di trovare il numero delle sue radici o di provare che ha un'unica radice.
I metodi iterativi più studiati a scuola per la risoluzione approssimata di equazioni sono il metodo di bisezione e il metodo di Newton delle tangenti.

L'integrazione numerica comparve per la prima volta in un problema della sessione suppletiva del 1993. I quesiti in cui tutt'oggi essa viene richiesta sono molto simili tra loro, vediamo il quesito 6 della sessione ordinaria del 2001:

Con uno dei metodi di quadratura studiati, si calcoli un'approssimazione dell'integrale definito

$$\int_0^\pi \sin x dx$$

e si confronti il risultato ottenuto con il valore esatto dell'integrale.

Varie volte è stato chiesto di sfruttare l'integrazione numerica per calcolare un'approssimazione di un numero irrazionale, come π o $\log 2$, assegnando un'integrale definito di cui questi rappresentano il valore.
Ad esempio vediamo il quesito 10 della sessione suppletiva del 2008:

Tenuto conto che:

$$\frac{\pi}{6} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

si calcoli un'approssimazione di π, utilizzando uno dei metodi d'integrazione numerica studiati.

I principali metodi d'integrazione numerica studiati a scuola sono quello dei rettangoli, il metodo dei trapezi e il metodo di Simpson.

La stima dell'errore commesso con l'integrazione spesso non è richiesta, perciò la scelta del calcolo dell'errore in questi casi è lasciata al candidato, come pure a volte non è specificata la precisione dell'approssimazione dello zero di un'equazione, mentre sarebbe più opportuno che il testo dicesse fino a che cifra arrivare.
Sia per quanto riguarda l'approssimazione di zeri di equazioni, sia per l'integrazione numerica, i metodi da utilizzare vengono quasi sempre lasciati scegliere al maturando; come accade in molti problemi di matematica si possono applicare diversi metodi per arrivare alla soluzione, chiaramente in sede d'esame è bene per lo studente, anche ai fini della valutazione, scegliere quello più conveniente in base alle ipotesi della questione assegnata.

Capitolo 6

Riflessioni conclusive

6.1 Riflessioni ...

6.1.1 ... sui programmi

Nei programmi ministeriali del liceo scientifico del 1944, che non risultano particolarmente mutati dal 1923, si legge:

Nella III Classe: ... Uso delle tavole logaritmiche ed applicazione al calcolo del valore di espressioni numeriche. Cenni sull'uso del regolo calcolatore. Rettificazione della circonferenza e quadratura del cerchio ...
Nella IV Classe: ... Qualche semplice equazione goniometrica ... Derivata di una funzione di una variabile e suo significato geometrico e fisico ... Nozioni di equivalenza delle figure solide. Equivalenza di prismi e piramidi. Regole pratiche per la determinazione delle aree e dei volumi dei solidi studiati.
Nella V Classe: ... Nozione di integrale con qualche applicazione. Disposizioni, permutazioni e combinazioni semplici. Binomio di Newton.
Nelle ultime quattro classi: applicazioni dell'algebra alla geometria di 1° e 2° grado con relativa discussione.

In questi programmi, che fino al 2010 lasciarono tracce significative negli argomenti trattati, non emergono indicazioni relative ai livelli di approfondimento degli argomenti o relative alle competenze che gli studenti dovrebbero conseguire; ci sono alcuni argomenti che non vengono più affrontati in classe (come il regolo calcolatore); nel programma di goniometria non si parla di disequazioni e per gli integrali si parla solo di qualche applicazione.
Si rileva perciò una distanza significativa tra ciò che è scritto nei programmi e le richieste dell'esame.
È importante osservare che nel caso della nostra scuola secondaria il quadro di riferimento (quale matematica si insegna, come la si trasmette, perchè si

insegna, ...) non è esplicitato nella normativa, ma siamo in presenza di un quadro di riferimento implicito, in cui confluiscono e coesistono i contenuti elencati nei programmi, le variegate prassi di insegnamento, i modelli forniti dai libri di testo, e molte altre componenti.

6.1.2 ... sulla prova di matematica

Le prove scritte di matematica degli Esami di Stato, da quando esistono, sono materia di discussioni, polemiche, critiche e, perchè no, anche di apprezzamenti e di riferimento per l'insegnamento della matematica.
Come sostiene Aldo Morelli in [44], bisogna riconoscere un grande merito agli estensori dei temi: ogni anno vengono proposti decine di temi per i vari tipi di scuola (si è avuta una grossa complicazione da quando sono stati introdotti i corsi sperimentali per i nuovi programmi, PNI, Brocca, ecc.) soddisfacendo a moltissime condizioni: che i compiti non siano troppo facili, nè troppo difficili; che siano graduati, che rispettino i programmi, e la tradizione, ma che presentino qualche innovazione, ecc.

Come afferma Lucia Ciarrapico in un articolo pubblicato nel 2011 su *Archimede*, [17], *"l'assenza di attribuzione di un punteggio massimo da assegnare alle domande dei problemi e ai quesiti, ha vanificato l'intento di oggettività nella valutazione della prove e di confrontabilità su tutto il territorio nazionale. ... Come deve valutare la Commissione d'Esame una prova in cui il candidato risponde a sei o sette o ... dieci quesiti e a nessun problema? Come valutare il candidato che risponde alle prime domande di entrambi i problemi senza terminarne alcuno?*
C'è chi in questi anni ha deciso di attenersi al mandato e valutare solo le risposte a un problema e a metà dei quesiti, magari scegliendoli tra quelli a cui il candidato abbia risposto in maniera più adeguata. Chi invece ha ritenuto che l'intera prova offerta dal candidato fosse espressione del suo livello di preparazione e ha valutato tutte le risposte fornite.
La conseguenza è stata una differente attribuzione del punteggio, spesso anche notevole, in presenza di prove confrontabili tra loro, da regione a regione, da scuola a scuola, talvolta anche da commissione a commissione all'interno di una medesima scuola.
Ciò non solo non risponde a un principio di equità, con uno sconcerto nel giovane studente, ma ha anche conseguenze pratiche: lo studente rischia di non vincere una borsa di studio a favore di un altro studente che si è impegnato meno o, anche, di non accedere a qualche facoltà universitaria a numero chiuso. Questo qualora siano operanti decreti che prevedono, nell'ammissione a certe facoltà universitarie, un riconoscimento ulteriore agli studenti

che abbiano riportato risultati scolastici di particolare valore agli esami di Stato e negli ultimi tre anni del corso di studi.

Anche l'ampia opzionalità di scelta da parte del candidato, presente solo nella seconda prova scritta del liceo scientifico, ha conseguenze su cui è bene riflettere. Il candidato impiega molto del tempo concesso per la lettura dell'intero testo e per la scelta del problema e dei quesiti a cui può rispondere meglio. Spesso inizia a rispondere a uno dei problemi o dei quesiti e, alla prima difficoltà, lo abbandona per un altro, andando incontro a una dispersione nel lavoro da svolgere e a una riduzione di concentrazione nell'ansia di fare scelte a lui favorevoli."

Le critiche, i commenti e le riflessioni ai problemi d'esame sono veramente tanti, come si nota facilmente leggendo questa tesi. Nella presentazione di Laura Giannini al Convegno Mathesis del 2010, sono state fatte queste conclusioni:

- la nuova struttura della prova di matematica è considerata valida e i contenuti proposti sono valutati sostanzialmente congrui al livello di preparazione medio dei ragazzi;
- i quesiti spesso sono considerati un'ancora di salvezza;
- si osserva che nè i programmi sperimentali (PNI, Brocca, ecc,...) nè quelli tradizionali prevedono degli "standard" ben definiti, in termini di conoscenze, competenze e capacità da raggiungere;
- la differenza di criteri e procedure di valutazione esistenti mostra che siamo lontani dall'avere un criterio condiviso di attribuzione del punteggio; quasi tutti gli insegnanti vorrebbero griglie di valutazione per rendere la correzione più omogenea e per arrivare alla determinazione di un voto in quindicesimi in maniera uniforme sul territorio nazionale;
- *"Alcuni anni fa, per rispondere alle critiche dei docenti, universitari e medi, il Ministero, d'intesa con l'UMI, lanciò, come sfida, un concorso rivolto in particolare ai nuclei di ricerca didattica, consistente nella compilazione di una terna di temi da proporre come seconda prova degli esami di maturità: i migliori sarebbero stati premiati; ma, dei pochi lavori che furono presentati, nessuno fu ritenuto, da una adeguata commissione, meritevole di segnalazione e premiazione. Si capì che* la preparazione dei temi non è cosa facile.*"* (da Aldo Morelli, [44])

Dalle *"Osservazioni conclusive del Rapporto elaborato dal Gruppo di lavoro UMI - INVALSI del 2007"* sulle prove di matematica, ho rilevato le seguenti riflessioni:

- *I ragazzi hanno difficoltà a rispondere in maniera completa e ordinata, anche a quesiti abbastanza semplici. La tendenza generale è di affastellare in maniera incoerente nozioni, riferimenti, spezzoni di soluzioni, calcoli. Sono rari i casi di risposte complete, sintetiche, ben organizzate. Il nostro ragazzo-tipo preferisce due mezze risposte a una risposta completa, sperando che l'insegnante completi, integri, scarti gli eventuali errori, interpreti. ...*

- *I ragazzi tendono a scegliere quesiti chiaramente "scolastici"... Cercano di evitare quelli in cui i contenuti della matematica "scolastica" sono applicati, anche solo superficialmente, a situazioni o contesti extra-matematici.*

- *Prediligono le strategie di soluzione basate sui calcoli, evitando ad esempio quelle più geometriche o sintetiche, anche quando sono più semplici.*

- *In generale, non sempre riescono a rendersi conto di quando arrivano a una soluzione corretta; non hanno l'abitudine di verificare i propri risultati. Alcuni quesiti sono risolti correttamente solo dal 15% dei ragazzi che li hanno scelti.*

- *La struttura della prova lascia margini di scelta (soprattutto relativamente ai quesiti) troppo ampi che, se da un lato possono mettere in imbarazzo uno studente (non è facile prevedere a priori il livello di difficoltà di un problema matematico) dall'altro possono fargli facilmente evitare di prepararsi in talune parti di programma (per esempio, negli sperimentali, si possono evitare i quesiti di probabilità).*

- *I collegamenti con le altre discipline sono sempre difficoltosi ...*

- *I correttori hanno evidenziato in molti casi un cattivo uso della lingua italiana e, al tempo stesso, un abuso di termini tecnici della matematica e simboli tipici della scrittura matematica.*

- *I programmi troppo antichi del liceo scientifico d'ordinamento o troppo ampi dei Licei Brocca o PNI non vincolano gli estensori delle prove e, ogni anno, anzichè avere un chiaro terreno di riferimento per docenti e studenti, ci si deve basare sulle prove degli anni precedenti per individuare, nel vasto territorio delle possibilità, le zone alle quali si riferirà la prova.*

Una riflessione a parte merita la limitazione nell'uso delle calcolatrici. Sicuramente, la difficoltà di molte delle prove proposte negli ultimi anni verrebbe falsata dall'uso di calcolatrici programmabili o altri strumenti di calcolo. Peraltro, molti insegnanti ed esperti ritengono che anche la capacità di usare intelligentemente strumenti di calcolo, oggi accessibili a chiunque, dovrebbe rientrare tra gli obiettivi dell'insegnamento della matematica e quindi essere oggetto di valutazione. Anche nell'attuale situazione, va comunque osservato che la dicitura calcolatrici non programmabili può diventare rapidamente ambigua, e difficile da interpretare, di fronte al tumultuoso evolvere della tecnologia.

6.1.3 ... per gli studenti

Può essere utile per i candidati riflettere sul fatto che quasi mai un problema di matematica possa essere risolto in un solo modo, certi metodi possono rivelarsi più indicati di altri per affrontare un determinato problema e questo può accadere anche in sede di maturità.
La prova d'esame attuale prevede che il candidato scelga il problema ed i quesiti su cui cimentarsi tra alcune alternative; saper effettuare una scelta ponderata riveste una grande importanza: infatti negli ultimi anni, accanto a quesiti molto semplici, la cui risoluzione era immediata per chi conosce l'argomento, ne sono stati assegnati altri assai insidiosi che hanno richiesto parecchio tempo per essere risolti.
Inoltre è importante sottolineare che i quesiti sono talvolta *quesiti di teoria* in cui è richiesto che il candidato spieghi ciò che fa e non che esegua solamente calcoli.
Gli studenti, anche in classe insieme ai loro insegnanti, farebbero bene ad analizzare, discutere ed anche criticare, i compiti più interessanti assegnati nel passato, non escludendo quelli, molto rari, contenenti qualche svista o errore, sempre molto utili ed educativi.
Infine suggerirei ai futuri maturandi di non fare troppo affidamento su una qualunque soluzione delle prove di matematica reperibile su Internet, perchè spesso può provenire da autori sconosciuti; è preferibile consultare libri di buona qualità o siti di cui si conosca l'affidabilità.

6.1.4 ... per gli insegnanti

Ho pensato di dedicare un paragrafo all'articolo *"La prova scritta agli Esami di Stato: L'ANSIA DELLA PREPARAZIONE"*, di Michelangelo Di Stasio, [45], presentato al Congresso Mathesis di Vico Equense perchè l'ho trovato molto interessante e contenente riflessioni e suggerimenti utili per l'insegnamento della matematica al liceo scientifico.
Qui sotto, fino alla fine del paragrafo, sono riportate alcune parti, che ho

leggermente modificato, dell'articolo:

Nello svolgimento del programma di matematica, sia nel corso di ordinamento che nel corso PNI del liceo scientifico, si segue un programma con scansione annuale, e fino a qualche anno fa nella pratica scolastica si rimandava solo alla fine dell'ultimo anno lo studio dei problemi assegnati in precedenti sessioni d'esame. Sembrava che solo in quel periodo si potessero e dovessero affrontare i quesiti dello stesso livello di quelli di solito assegnati agli esami.
Questo modo di procedere era, in un certo senso, dettato dalla struttura stessa della prova: problemi piuttosto corposi organizzati in modo da richiedere, per la loro risoluzione, conoscenze che di solito si acquisiscono solo alla fine dell'ultimo anno e pertanto solo poco prima degli esami ci si avvicinava ad essi per un proficuo lavoro di preparazione alla prova finale. In sostanza le prove di anni precedenti erano di guida a docenti e studenti solo nell'ultimo periodo del quinto anno di scuola superiore. In quest'ultimo anno, essendo più ravvicinata la scadenza degli esami, i docenti aumentavano il carico di lavoro e molti studenti si facevano prendere da una sorta di ansia, fattore non certamente positivo per affrontare un esame.
La nuova struttura della prova, in vigore da qualche anno, rende invece meno stressante il lavoro sia dei docenti che degli studenti e tanto perchè:

- *il questionario, costituito da quesiti piuttosto agili e snelli e riguardanti argomenti circoscritti (in qualche caso il quesito non è niente altro che un problema a soluzione rapida) genera in ciascun allievo la convinzione che qualche risposta corretta riuscirà comunque a darla. Tale sensazione psicologica mentre dà maggiore sicurezza all'alunno bravo, rende meno frustrante l'approccio all'esame anche da parte dello studente meno preparato;*

- *il questionario stesso può essere notevole punto di riferimento anche per il docente che può utilizzarne i quesiti come metro di valutazione dei livelli di approfondimento, dell'insegnamento e dell'apprendimento. E questo senza dover attendere necessariamente l'ultima parte dell'ultimo anno, ma in qualsiasi momento dello svolgimento dei singoli argomenti, qualsiasi sia la loro collocazione temporale. Fare questo con la vecchia struttura dell'esame era più arduo.*

Ancora, credo, si possa fare qualche ulteriore riflessione, cogliendo un aspetto che timidamente sembra affacciarsi nella formulazione di qualche quesito d'esame ma che penso, sia una tendenza decisamente da incoraggiare.
È consuetudine affermare che gli argomenti di matematica sono presentati in maniera del tutto astratta senza alcun riferimento alla realtà. Perciò gli studenti percepiscono i problemi di matematica come artificiosi e del tutto estranei alle questioni reali. Ebbene analizziamo qualche quesito d'esame per vedere se riusciamo a trovare uno stimolo che aiuti l'insegnante a seguire strade meno astratte e

nello stesso tempo solleciti formulazioni dei quesiti più coinvolgenti.
Come primo esempio prendiamo il quesito n.10 della sessione ordinaria del 2001 PNI: Dire, formalizzando la questione e utilizzando il teorema del valor medio o di Lagrange, se è vero che "se un automobilista compie un viaggio senza soste in cui la velocità media è 60 km/h, allora almeno una volta durante il viaggio il tachimetro dell'automobile deve indicare esattamente 60 km/h".
Una tale formulazione del quesito è stata utilizzata dal sottoscritto l'anno scolastico successivo per un approccio meno teorico al teorema. In sostanza al momento di introdurre il teorema in oggetto chiesi agli alunni: "Ieri ho fatto un viaggio in automobile senza soste in cui la velocità media è stata di 60 km/h; secondo voi è vero che almeno un volta durante il viaggio il tachimetro dell'automobile ha indicato esattamente 60 km/h?"; tutti risposero, motivando correttamente, che era vero, meravigliandosi quasi di una domanda tanto banale. A questo punto formalizzammo la questione e pervenimmo al famoso teorema, ma in tal modo esso non fu recepito come un qualche cosa di misterioso ma come una relazione che coglie un fatto frequentissimo della realtà quotidiana. Dissi agli alunni: "In sostanza il teorema di Lagrange non è poi una cosa così lontana da noi se ci accompagna in ogni nostro viaggio in macchina". Ne risultò una più veloce e significativa assimilazione dell'argomento.
Quante partite di calcio della serie A vengono disputate complessivamente (andata e ritorno) nel campionato italiano a 18 squadre? *(quesito n.1, sessione ordinaria PNI 2003)*
Ecco un altro quesito che così posto può sembrare solo una curiosità intellettuale ma che trova il suo riscontro reale non appena si debba determinare, il costo degli arbitraggi dell'intero campionato di serie A conoscendo la spesa di arbitraggio per una singola partita. ...
Un altro quesito interessante che si presta immediatamente ad un aggancio col vissuto quotidiano è il primo quesito del problema n.2 della sessione ordinaria del 2000: Il rettangolo ABCD è tale che la retta che congiunge i punti medi dei suoi lati più lunghi AB e CD lo divide in due rettangoli simili a quello dato. Tali lati hanno lunghezza assegnata a; determinare la lunghezza dei lati minori del rettangolo.
Tale quesito può essere presentato partendo dalla manipolazione del foglio A4, il cui formato soddisfa le richieste del problema; in tal modo tale rettangolo esce dall'ambito della geometria pura per diventare un modello matematico di un oggetto della vita quotidiana che ritroviamo ogni volta che usiamo una stampante o una fotocopiatrice rendendo così meno severo e inquietante il volto arcigno di $\sqrt{2}$*. Tale è infatti il rapporto tra i lati del rettangolo in oggetto (ente matematico) e del foglio A4 che di tale rettangolo è una particolare realizzazione.*
In conclusione voglio dire che gli insegnanti debbono motivare gli alunni spingendoli a vedere che la matematica è intorno a noi nei fatti più banali della vita quotidiana, ma nello stesso tempo anche gli estensori dei quesiti d'esame possono redigerli in

quest'ottica contribuendo a rendere più umano il volto della matematica. Se si pensa poi che i quesiti degli esami vengono pubblicati dai giornali, quindi letti anche da qualche curioso non addetto ai lavori, allora una loro formulazione (di qualcuno di essi, intendo e quando è possibile naturalmente) che faccia riferimento a fatti della vita quotidiana o a problematiche comunque connesse a situazioni reali renderà gli esami un possibile momento di avvicinamento della matematica al cittadino.

6.2 Il syllabus del 2009 per la prova scritta di matematica

Nel luglio 2009 è stato formato un gruppo di lavoro istituito dal MIUR, riunitosi su invito della Direzione generale per gli Ordinamenti scolastici, l'Autonomia Scolastica e il Coordinamento della Struttura Tecnica degli Esami di Stato, coordinato dall'ispettore Ambrisi, per rispondere al disagio e all'insoddisfazione manifestatasi negli ultimi anni nei confronti della prova scritta di matematica agli Esami di Stato dei licei scientifici.
In una riunione finale, il 20 luglio 2009, è stato così formulato un Syllabus per lo scritto di matematica agli Esami di Stato nel liceo scientifico.
In qualche scuola ne è stata diffusa e discussa una copia, ma poi non se n'è più sentito parlare, infatti tale syllabus si è disperso nei corridoi ministeriali e, anzichè essere diffuso come raccomandazione di lavoro, per esempio attraverso il sito del Ministero, così come indicato nella riunione finale, è stato presentato in poche sedi, ma non ha quel valore di indirizzo che avrebbe dovuto avere non soltanto per gli insegnanti e gli studenti, ma anche per gli estensori della prova d'esame.

Il Syllabus costituisce una descrizione di ciò che dovrebbe essere richiesto nella prova scritta di matematica dell'esame di Stato per il liceo scentifico di ordinamento e per i licei che attuano sperimentazioni di tipo PNI e Brocca. Anche se non ha valore ufficiale, questo documento dà comunque delle indicazioni scaturite da un'approfondita discussione di un gruppo di persone qualificate. Il Syllabus può essere perciò un utile strumento nelle mani di professori e allievi in vista dell'Esame di Stato.

Per questo motivo, e perchè rappresenta una sintesi di quanto approfondito in questa tesi, ho pensato di riportarlo ora che ci avviciniamo alla conclusione di questo elaborato.

La forma prescelta per il Syllabus è quella della tipologia delle "domande" alle quali lo studente deve essere in grado di rispondere:
Calcolare/Determinare, Applicare/Risolvere, Spiegare/Illustrare/Definire, Di-

mostrare/Dedurre.
Il Syllabus così organizzato presenta elementi di novità sia con riferimento al superamento dei tradizionali capitoli della matematica, sia con riferimento agli obiettivi essenziali e alle innovazioni che oggi si prospettano per un efficace insegnamento e apprendimento della matematica, intendendo anche che le conoscenze matematiche debbano essere disponibili come modelli per rappresentare e affrontare situazioni e problemi di varia natura.

1. CALCOLARE/DETERMINARE

- Misure di angoli in radianti e in gradi.
- Il numero di permutazioni, disposizioni, combinazioni in un insieme.
- La potenza n-esima di un binomio.
- Nel piano cartesiano, l'equazione di una retta per un punto e parallela o perpendicolare ad una retta data; la pendenza di una retta assegnata e l'equazione della retta tangente al grafico di una funzione in un punto.
- L'equazione cartesiana di luoghi geometrici notevoli.
  In particolare: circonferenza, ellisse, parabola e iperbole.
- Le derivate di funzioni composte.
- Massimi e minimi di una funzione, punti di flesso, asintoti.
- Integrali indefiniti immediati o ad essi riconducibili.
- Integrali per parti e per sostituzioni.
- Aree delle superfici e volumi dei solidi (poliedri, solidi di rotazione, solidi di cui siano note le sezioni lungo una certa direzione).
- Valori approssimati di funzioni e grandezze anche utilizzando una calcolatrice tascabile.

PIANI DI STUDIO PNI e BROCCA
- La media, mediana e scarto quadratico medio di un insieme di dati.
- La probabilità di eventi in situazioni uniformi e a partire dalla probabilità di altri eventi.
- Sottoinsiemi del piano definiti da sistemi di disequazioni.
- Equazioni di traslazioni, rotazioni, simmetrie nel piano soddisfacenti determinate condizioni.

- Soluzioni approssimate di equazioni.
- L'approssimazione di un integrale definito con una procedura di calcolo numerico.
- Proposizioni logicamente equivalenti. La negazione di proposizioni.

2. APPLICARE/RISOLVERE

- Il teorema di Ruffini, $P(x)$ è divisibile per $x - a$ se e solo se $P(a) = 0$.
- I teoremi della geometria euclidea piana e solida. In particolare: il teorema dell'angolo esterno, i teoremi di Pitagora e di Talete, il teorema delle tre perpendicolari.
- Equazioni, disequazioni, sistemi relativi a funzioni goniometriche, esponenziali, logaritmiche e alla funzione modulo.
- Le formule di addizione e le loro immediate conseguenze (duplicazione, bisezione);
- Il teorema dei seni e il teorema del coseno per la risoluzione dei triangoli.
- Limiti notevoli di successioni e di funzioni. In particolare:
  $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,
  $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$,
  $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$
  $\lim_{x\to +\infty} \frac{a^x}{x^\beta} = +\infty$, per $a > 1, \beta > 0$
  $\lim_{x\to +\infty} \frac{(log_a x)}{x^\beta} = 0$, per $a > 1, \beta > 0$
- Il teorema di Lagrange, il teorema di Rolle, il teorema di De L'Hospital, per lo studio delle proprietà e del grafico di una funzione o per il calcolo dei limiti.
- I teoremi del calcolo integrale nella determinazione delle aree e dei volumi.
- Problemi che richiedono di determinare il valore massimo o minimo di una grandezza che si può rappresentare come una funzione derivabile di una opportuna variabile.
- Problemi geometrici di primo e secondo grado dipendenti eventualmente da un parametro.

PIANI DI STUDIO PNI e BROCCA
- Cambiamenti di coordinate, cambiamenti di scala.
- Le formule per la somma dei primi n termini di una progressione

aritmetica o geometrica.
- Il principio di induzione
- Il teorema della media integrale.
- La probabilità condizionata e la formula di Bayes.
- La distribuzione binomiale. La distribuzione normale:
in particolare il suo uso in relazione agli errori di misura.

3. SPIEGARE/ILLUSTRARE/DEFINIRE

- Incidenza, parallelismo, perpendicolarità tra rette e piani nello spazio.
- I poliedri (parallelepipedi, prismi, piramidi, poliedri regolari) e gli sviluppi piani delle loro superfici. I solidi di rotazione (cono, cilindro e sfera), le loro sezioni piane e gli sviluppi piani delle loro superfici.
- Il principio di Cavalieri.
- Sottoinsiemi, prodotto cartesiano di due insiemi, funzioni, funzioni iniettive e suriettive, composizione di due funzioni; funzioni invertibili, funzioni inverse e relativi grafici.
- Funzioni limitate; funzioni crescenti in un intervallo, massimi e minimi (relativi, assoluti); funzioni periodiche.
- Le funzioni $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$.
- Le funzioni esponenziali e logaritmiche: proprietà e grafici.
- Successioni numeriche. In particolare: progressioni aritmetiche e geometriche.
- Limite di una successione e limite di una funzione reale.
- Esempi di funzioni discontinue o non derivabili in qualche punto.
- Lunghezza della circonferenza e area del cerchio.
- Il significato geometrico di integrale definito per una funzione reale definita in un intervallo.

PIANI DI STUDIO PNI e BROCCA
- Relazione di Eulero tra numero di vertici, spigoli, facce
dei poliedri.
- Concetti primitivi, definizioni, assiomi, teoremi. Il V postulato
di Euclide: considerazioni storiche e critiche.
- Il concetto di algoritmo. Algoritmi notevoli; in particolare l'

approssimazione di e e di π.
- Successioni definite per ricorrenza
- L'indipendenza di eventi e le concezioni di probabilità.

4. DIMOSTRARE/DEDURRE

- Uguaglianze e disuguaglianze, algebriche e trigonometriche.
- L'esistenza di al più cinque poliedri regolari.
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- Le espressioni della derivata prima di x^n, $\sin x$, $\cos x$, e^x e da queste ricavare quelle di: $\log x$, $\arcsin x$, $\tan x$, $\arctan x$.
- Una proposizione a partire da un'altra data. Ad esempio:
  - dal teorema di Lagrange, la disuguaglianza:
  $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$
  - la crescenza o decrescenza di una funzione utilizzando il teorema di Lagrange
  - dal teorema di Lagrange il segno di una funzione
  - dal grafico di una funzione $f(x)$, la costruzione dei grafici di: $|f(x)|$, $\frac{1}{f(x)}$, $f(x-k)$, $f(kx)$, $kf(x)$, $k+f(x)$, con k numero reale
  - l'unicità degli zeri di una funzione dal teorema di Rolle.

Capitolo 7

Le Indicazioni nazionali e una domanda per il 2015

Facciamo nostro il paragrafo finale dell'articolo di Maria Vittoria Marchi e Marta Menghini pubblicato nel 2011 su *Archimede*, [15]:

"Tutti i programmi precedenti la riforma del 1923 contenevano dettagliate indicazioni su come trattare i diversi argomenti, in funzione del loro ruolo nell'economia generale della materia e del ruolo di questa nella formazione dello studente.
Dal 1923 al 1933 invece, le indicazioni contenute nei programmi hanno riguardato solo la modalità con cui accertare *l'abilità nel valersi delle formule fondamentali* (cioè la *prontezza* nel risolvere gli esercizi e la *sicurezza* nei calcoli) e l'elenco delle *teorie* per le quali si può ritenere facoltativa la conoscenza della *sistemazione logica* e della dimostrazione dei principali teoremi.
I programmi del 1936 hanno ripreso, in parte, le indicazioni della Commissione Reale. Lo spirito di questa si ritrova anche nel suggerimento di *non adottare un metodo d'insegnamento esclusivamente razionale, ma di dar spazio all'intuizione, alla realtà fisica e all'origine psicologica e storica delle teorie*, contenuto in qualcuno dei "piani di studio" in distribuzione dal dopoguerra. ...
Dal 1945 al 2010 il Ministero della Pubblica Istruzione non è riuscito a fornire alle scuole un programma ufficiale e quindi nessuna indicazione sul ruolo da attribuire alle sue diverse parti.
È così riemersa la visione della matematica di Gentile. Si dà enorme importanza ai calcoli, spesso complessi e di nessuna utilità per la stessa teoria cui si riferiscono, mentre si valorizzano poco i legami tra i vari argomenti: emblematici sono il ritardo con cui si introduce la geometria cartesiana e lo scarso tempo che si dedica all'uso degli integrali nel calcolo di aree e volumi."

7.1 I programmi del 1944

Riporto qui di seguito i programmi di Matematica (reperibili su Intenet, vedi [50]) per il Liceo Scientifico emanati nel 1944; le principali modifiche dei programmi dopo la riforma Gentile sono dovute a Fedele (1925), Ercole (1933), de Vecchi (1936), Bottai (1937).
Questi programmi sono quelli su cui gli insegnanti del liceo scientifico avrebbero dovuto basarsi, fino alla formulazione nel 2010 delle Indicazioni Nazionali (questi costituiscono un riferimento ancora per le attuali quinte).

Istruzioni e piani di studio del 1944. Programmi di Matematica per il Liceo Scientifico.
NOTA: di questi piani di studio esistono diverse edizioni di tipografie private, non del tutto coincidenti. La maggior parte di queste riporta la dizione "conforme ai programmi ufficiali". I programmi ufficiali dovrebbero essere quelli emanati dalla Sottocommissione Alleata all'educazione, presieduta da Carlton Washburne, cui fa riferimento la circolare ministeriale n. 31 del 1945. Riportiamo i programmi editi nel 1954 dalla Casa editrice Pirola, che in una riedizione del 1974 aggiunge in nota "Emanati dalla sottocommissione Alleata dell'Educazione nell'anno 1944".

Avvertenze: l'insegnamento della matematica ha speciale valore nella formazione e nel disciplinamento dell'intelletto. Ma occorre conciliare lo spirito d'indeterminatezza dei giovani con la proprietà, la sobrietà, la sintesi e la precisione che tale disciplina impone, senza però scoraggiarli, comprimendo la loro iniziativa. Anche qui dunque si condurranno ricerche collettive seguendosi il metodo delle approssimazioni successive, perchè la consapevolezza delle parole, dei concetti, delle proprietà, dei ragionamenti si consegue, a poco a poco, per gradi insensibili. E conviene, per tenere sempre vivo l'interesse ai successivi sviluppi, dare largo posto all'intuizione, al senso comune, all'origine psicologica e storica delle teorie, alla realtà fisica, agli sviluppi che conducono ad affermazioni pratiche immediate, mettendo da parte le nozioni statiche e rigide, e quelle puramente logiche, ma che astraggono da ogni impulso intuitivo. Le suddette esigenze non possono essere conciliate certamente dalle definizioni statiche, ma dall'uso spontaneo di quelle dinamiche, più aderenti all'intuizione. Metodo dunque intuitivo dinamico, in istretto contatto col processo storico, senza esclusivismo di vedute, perchè solo così il patrimonio spirituale acquistato nella scuola media inferiore può essere veramente ripreso, evoluto e rafforzato nella scuola d'ordine superiore.
Si tenga conto del particolare valore che deve avere l'insegnamento della matematica nel liceo scientifico.
I Classe
Si svolgerà il programma di algebra e di geometria della IV e V ginnasiale.
[*Algebra*: I numeri razionali relativi e le quattro operazioni fondamentali su di essi. Potenze con esponenti interi relativi. Polinomi (razionali, interi); operazioni su di es-

si. Prodotti notevoli. Casi semplici di scomposizione di polinomi in fattori. Frazioni algebriche; calcoli con esse. Equazioni e problemi di primo grado a un'incognita.
Geometria: Rette, semirette, segmenti. Piani, semipiani; angoli. Triangoli e poligoni piani. Uguaglianza dei triangoli. Rette perpendicolari. Rette parallele. Somma degli angoli interni ed esterni di un poligono. Disuguaglianza tra elementi di un triangolo. Parallelogrammi; loro proprietà e casi particolari. Circonferenza e cerchio. Mutuo comportamento di rette e circonferenze: cenni sul mutuo comportamento di circonferenze complanari. Angoli nel cerchio (al centro o alla circonferenza). Poligoni regolari. Qualche problema grafico fondamentale. Poligoni equivalenti. Teorema di Pitagora.]

II Classe

Concetto di numero reale. Calcolo dei radicali; cenno sulle potenze con esponenti frazionari. Equazioni di 2° grado o ad esse riconducibili. Esempi di sistemi di equazioni di grado superiore al 1° risolubili con equazioni di 1° e 2° grado. Cenni sulle progressioni aritmetiche e geometriche. Coordinate cartesiane ortogonali nel piano. Funzioni di una variabile e loro rappresentazione grafica; in particolare le funzioni $ax + b$; ax^2; $-x$. Proporzioni tra grandezze, similitudine dei triangoli e dei poligoni, teoria della misura, area dei poligoni.

III Classe

Equazioni esponenziali e logaritmi. Uso delle tavole logaritmiche ed applicazione al calcolo del valore di espressioni numeriche. Cenni sull'uso del regolo calcolatore. Rettificazione della circonferenza e quadratura del cerchio. Rette e piani nello spazio: ortogonalità e parallelismo. Diedri, angoloidi. Poliedri, in particolare prismi e piramidi. Cilindro, cono, sfera.

IV Classe

Funzioni geometriche. Curve dei seni e delle tangenti. Formule per l'addizione, la sottrazione, la duplicazione e la bisezione degli argomenti. Qualche semplice equazione goniometrica. Risoluzione dei triangoli rettilinei. La nozione di limite di una funzione. Derivata di una funzione di una variabile e suo significato geometrico e fisico. Derivate di x^2, di $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$. Esercizi di derivazione. Nozioni di equivalenza delle figure solide. Equivalenza di prismi e piramidi. Regole pratiche per la determinazione delle aree e dei volumi dei solidi studiati.

V Classe

Massimi e minimi con il metodo delle derivate, applicazioni. Nozione di integrale con qualche applicazione. Disposizioni, permutazioni e combinazioni semplici. Binomio di Newton.

Nelle ultime quattro classi: applicazioni dell'algebra alla geometria di 1° e 2° grado con relativa discussione.

7.2 I Nuovi Licei e le Indicazioni nazionali

La riforma Gelmini del secondo ciclo di istruzione e formazione, entrata in vigore con l'anno scolastico 2010/2011, ha segnato una tappa fondamentale del percorso di rinnovamento del progetto educativo e formativo della scuola italiana.
Fra gli obiettivi più urgenti si sono individuate la necessità di un adeguamento complessivo dell'ordinamento scolastico italiano alle indicazioni della Comunità Europea. La scuola secondaria superiore è stata dunque completamente riorganizzata con l'intento di offrire un panorama più chiaro di scelte formative che facilitino l'orientamento dei giovani e delle famiglie al fine di progettare meglio il loro futuro.
Il Consiglio Europeo di Lisbona del marzo 2000 ha segnato il punto di avvio di un processo che ha coinvolto gli Stati membri e i rispettivi sistemi nazionali di istruzione e formazione professionale: sulla base della comune esigenza di far fronte a problematiche nuove, derivanti da rapidi cambiamenti economici, sociali, tecnologici e dal continuo bisogno di rinnovamento delle competenze dei cittadini-lavoratori, i Paesi europei hanno deciso di puntare sullo sviluppo del sistema di istruzione e formazione, per accrescere il livello di competitività dell'Europa.
Con il Consiglio di Lisbona ha preso l'avvio una stretta cooperazione in materia di istruzione e formazione professionale fra gli Stati membri.
Per permettere ai giovani istruiti in un Paese di poter essere inquadrati nella struttura lavorativa di un altro, nel 2002 iniziarono i lavori per la definizione di un sistema comune per il riconoscimento dei risultati dell'apprendimento e nacque così il Quadro europeo delle qualifiche e delle competenze (EQF) che costituisce tuttora lo strumento di riferimento che consente, ai diversi paesi europei, di confrontare e riconoscere i livelli di qualifica raggiunti nei vari sitemi formativi nazionali.

Nell'articolo 8 comma 1 del Regolamento recante la "Revisione dell'assetto ordinamentale, organizzativo e didattico dei licei..." nel paragrafo **Risultati di apprendimento del Liceo scientifico** si legge: "Il percorso del liceo scientifico è indirizzato allo studio del nesso tra cultura scientifica e tradizione umanistica. Favorisce l'acquisizione delle conoscenze e dei metodi propri della matematica, della fisica e delle scienze naturali. Guida lo studente ad approfondire e a sviluppare le conoscenze e le abilità e a maturare le competenze necessarie per seguire lo sviluppo della ricerca scientifica e tecnologica e per individuare le interazioni tra le diverse forme del sapere, assicurando la padronanza dei linguaggi, delle tecniche e delle metodologie relative, anche attraverso la pratica laboratoriale".

Linee generali e competenze delle Indicazioni nazionali

Al termine del percorso del liceo scientifico lo studente conoscerà i concetti e i metodi elementari della matematica, interni alla disciplina in sè considerata e rilevanti per la descrizione e la previsione di fenomeni, in particolare del mondo fisico, saprà inquadrare le varie teorie matematiche studiate nel contesto storico entro cui si sono sviluppate e ne comprenderà il significato concettuale. Lo studente avrà acquisito una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico. In particolare, avrà acquisito il senso e la portata dei tre principali momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico: la matematica nella civiltà greca, il calcolo infinitesimale che nasce con la rivoluzione scientifica del Seicento e che porta alla matematizzazione del mondo fisico, la svolta che prende le mosse dal razionalismo illuministico e che conduce alla formazione della matematica moderna e a un nuovo processo di matematizzazione che investe nuovi campi (tecnologia, scienze sociali, economiche, biologiche) e che ha cambiato il volto della conoscenza scientifica.

Gli obiettivi di studio sono:

1) gli elementi della geometria euclidea del piano e dello spazio entro cui prendono forma i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, assiomatizzazioni);

2) gli elementi del calcolo algebrico, gli elementi della geometria analitica cartesiana, una buona conoscenza delle funzioni elementari dell'analisi, le nozioni elementari del calcolo differenziale e integrale;

3) gli strumenti matematici di base per lo studio dei fenomeni fisici, con particolare riguardo al calcolo vettoriale e alle equazioni differenziali, in particolare l'equazione di Newton e le sue applicazioni elementari;

4) la conoscenza elementare di alcuni sviluppi della matematica moderna, in particolare degli elementi del calcolo delle probabilità e dell'analisi statistica;

5) il concetto di modello matematico e un'idea chiara della differenza tra la visione della matematizzazione caratteristica della fisica classica (corrispondenza univoca tra matematica e natura) e quello della modellistica (possibilità di rappresentare la stessa classe di fenomeni mediante differenti approcci);

6) costruzione e analisi di semplici modelli matematici di classi di fenomeni, anche utilizzando strumenti informatici per la descrizione e il calcolo;

7) una chiara visione delle caratteristiche dell'approccio assiomatico nella sua forma moderna e delle sue specificità rispetto all'approccio assiomatico della geometria euclidea classica;

8) una conoscenza del principio di induzione matematica e la capacità di saperlo applicare, avendo inoltre un'idea chiara del significato filosofico di questo principio, della sua diversità con l'induzione fisica e di come esso cos-

tituisca un esempio elementare del carattere non strettamente deduttivo del ragionamento matematico.

Nuovi argomenti introdotti
Nel primo biennio: vettori e matrici (e loro algebra), goniometria e trigonometria, introduzione alla statistica descrittiva, introduzione al concetto di probabilità, algoritmi ed elementi di informatica.
Nel secondo biennio: statistica descrittiva bivariata e teoremi sulla probabilità; nel quinto anno: distribuzioni di probabilità, geometria analitica nello spazio ed equazioni differenziali.

Grazie a questa articolazione di temi e di approcci si potranno istituire collegamenti e confronti concettuali e di metodo con altre discipline come la fisica, le scienze naturali e sociali, la filosofia e la storia.
Al termine del percorso didattico lo studente avrà approfondito i procedimenti caratteristici del pensiero matematico, conoscerà le metodologie di base per la costruzione di un modello matematico di un insieme di fenomeni, saprà applicare quanto appreso per la soluzione di problemi, anche utilizzando strumenti informatici di rappresentazione geometrica e di calcolo.
Tali capacità operative saranno accentuate particolarmente per quel che riguarda la conoscenza del calcolo infinitesimale e dei metodi probabilistici di base. Gli strumenti informatici oggi disponibili offrono contesti idonei per rappresentare e manipolare oggetti matematici e l'insegnamento della matematica offre numerose occasioni per acquisire familiarità con tali strumenti e per comprenderne il valore metodologico. Il percorso, quando si rivelerà opportuno, favorirà l'uso di questi strumenti, anche in vista del loro uso per il trattamento dei dati nelle altre discipline scientifiche. L'uso degli strumenti informatici è una risorsa importante che sarà introdotta in modo critico, senza creare l'illusione che essa sia un mezzo automatico di risoluzione di problemi e senza compromettere la necessaria acquisizione di capacità di calcolo mentale.
Ferma restando l'importanza dell'acquisizione delle tecniche, verranno evitate dispersioni in tecnicismi ripetitivi o casistiche sterili che non contribuiscono in modo significativo alla comprensione dei problemi. L'approfondimento degli aspetti tecnici, sebbene maggiore nel liceo scientifico che in altri licei, non perderà mai di vista l'obiettivo della comprensione in profondità degli aspetti concettuali della disciplina.
L'indicazione principale presente nelle Indicazioni nazionali è: pochi concetti e metodi fondamentali, acquisiti in profondità.

"Nell'ambito della programmazione regionale dell'offerta formativa, può essere attivata l'opzione "scienze applicate" che fornisce allo studente competenze particolarmente avanzate negli studi afferenti alla cultura scientifico-tecnologica, con particolare riferimento alle scienze matematiche, fisiche, chimiche, biologiche e all'informatica e alle loro applicazioni" (art. 8 comma 2).

Con la riforma sono stati aboliti gli indirizzi PNI e qualunque altro tipo di sperimentazione presente nei licei scientifici italiani, permettendo la sola attivazione del Liceo Scientifico (tradizionale) e del Liceo Scientifico opzione "scienze applicate".

A questo punto, essendo giunta alla conclusione del mio elaborato, in cui ho potuto riflettere sui cambiamenti dell'insegnamento della matematica nel liceo scientifico a partire dalla sua nascita, e sulle prove di matematica assegnate alla maturità, che hanno indubbiamente influenzato fino ad ora le scelte didattiche dei professori, mi sorge spontanea una domanda, che sicuramente aleggerà anche nella testa di tutti i docenti che stanno preparando i loro alunni alla maturità scientifica del prossimo anno:

Come cambierà la prova di matematica dalla sessione d'esame del 2015, quando saranno a pieno regime le Indicazioni Nazionali per i Licei?

Bibliografia

[1] Vincenzo Vita, *I programmi di matematica per le scuole secondarie dall'unità d'Italia al 1986*, Pitagora Editrice, Bologna 1986.

[2] Lucia Ciarrapico, *L'insegnamento della matematica dal passato recente all'attualità* [1]

[3] Lucia Grugnetti, *Lineamenti della storia della didattica matematica in Italia dal 1859 al 1950*, Archimede, n. 1 (1985), pag. 28

[4] Elisabetta Ulivi, *Sull'insegnamento scientifico nella scuola secondaria dalla Legge Casati alla Riforma Gentile: la sezione fisico-matematica*, Archimede, n. 4 (1978), pag. 166

[5] Mario Villa, *Nuovi orientamenti nella scuola italiana*[2], Archimede, n. 4 (1963), pag. 216

[6] R. G, *Nuovi programmi di matematica per i licei*, Archimede, n. 2-3 (1966), pag. 124

[7] Roberto Giannarelli, *L'ora della matematica*, Archimede, n. 2 (1959), pag. 61

[8] Roberto Giannarelli, *La matematica e la scuola italiana, oggi*, Archimede, n. 2-3 (1963), pag. 57

[9] Ettore Orlandini, *Preludi di fantasia alla riforma dei licei*, Archimede, n. 1-2 (1967), pag. 68

[10] Mario Villa, *Alcune considerazioni sul liceo scientifico*, Archimede, n. 5-6 (1966), pag. 233

[1] articolo tratto dalla relazione svolta a Cattolica il 7 ottobre 2001, in occasione del Congresso ADT

[2] articolo tratto dalla conferenza d'apertura tenuta al Convegno nazionale della Mathesis (Roma, 2 maggio 1963)

[11] Giro, *Polemiche matematiche*, Archimede, n. 5-6 (1966), pag. 248

[12] Giro, *Polemiche matematiche*, Archimede, n. 1-2 (1968), pag. 24

[13] *<IN>formazione Matematica, materiale e riflessioni sulle Indicazioni nazionali per i nuovi Licei e sulle Linee guida per i nuovi Tecnici e i nuovi Professionali*, De Agostini Scuola

[14] *Regolamento recante "Revisione dell'assetto ordinamentale, organizzativo e didattico dei licei ai sensi dell'articolo 64, comma 4, del decreto legge 25 giugno 2008, n. 112, convertito dalla legge 6 agosto 2008, n. 133."*

[15] Maria Vittoria Marchi, Marta Menghini, *La matematica nel liceo scientifico*, Archimede, n. 2 (2011), pag. 87

[16] Giuseppe Anichini, Lucia Ciarrapico, *Esami di stato: la prova scritta di matematica nel liceo scientifico*, Archimede, n. 2 (2001), pag. 61

[17] Lucia Ciarrapico, *La prova scritta di matematica nel secondo esame di stato del liceo scientifico*, Archimede, n. 2 (2011), pag. 59

[18] Lorenzo Caldo, Roberto Giannarelli, *Tema unico o due temi a scelta nella prova scritta di matematica alla maturità scientifica?*, Archimede, n. 6 (1953), pag. 238

[19] Biagio Lussi, *È il caso di cambiare la natura del tema di maturità scientifica?*, Archimede, n. 3 (1967), pag. 238

[20] Salvatore Temussi, *La riforma dei licei e l'insegnamento matematico*, Archimede, n. 1-2 (1967), pag. 238

[21] Lorenzo Caldo, *Sul primo tema di maturità scientifica del luglio 1952*, Archimede, n. 1 (1953), pag. 17

[22] Bruno De Finetti, *Come liberare l'Italia dal morbo della trinomite?*, Periodico di matematiche, n. 4 (1965), pag. 324

[23] Bruno De Finetti, *Contro la "matematica per deficienti"*, Periodico di matematiche, n. 1-2 (1974), pag. 95

[24] Vincenzo Marseguerra, *Sulla discussione dei problemi di matematica di maturità scientifica*, Archimede, n. 1 (1954), pag.9

[25] Lorenzo Caldo, *Come modificare la prova scritta di matematica negli esami di maturità*, Archimede, n. 1 (1966), pag. 27

[26] Vinicio Villani, *Verso una riforma degli esami di maturità*, Archimede, n. 2 (1998), pag. 51

[27] Pietro Rebbi, *Sui temi di matematica di maturità scientifica*, Archimede, n. 1-2 (1968), pag. 56

[28] Marcello Urbani, *Anche per la matematica, siamo stanchi di discutere: bisogna agire seriamente*, Archimede, n. 5-6 (1968), pag. 275

[29] Bruno De Finetti, *Le proposte per la matematica nei nuovi licei: informazione, commenti critici, suggerimenti*, Periodico di matematiche, n. 2 (1967), pag. 75

[30] Claudio Gori Giorgi, Daniela Valenti, *Guida allo svolgimento dei temi di matematica per la maturità scientifica*, La Nuova Italia, Scandicci (Firenze) 1990

[31] Giuseppe Grillo, *Il nuovo mat mat*, Editrice La scuola, Brescia 2007

[32] Paolo Negrini, Maria Ragagni, *Mast. Formulario e temi di matematica per l'esame di Stato (edizione 2008)*, Clio, Milano 2008

[33] Paolo Negrini, Maria Ragagni, *Mast. Formulario e temi di matematica per l'esame di Stato (edizione 2011)*, Clio, Milano 2011

[34] A. Palatini, V. Reverberi Faggioli, *Elementi di algebra per licei scientifici*, volume secondo, Ghisetti & Corvi, Milano, 1968

Riferimenti tratti dalla rete

[35] Laura Giannini, *L'esame di stato. La prova di matematica. Liceo scientifico*, presentazione Mathesis 10 febbraio 2010 http://150.217.34.175/files/Giannini2009-10.pdf

[36] http://it.wikipedia.org/wiki/Esame_di_maturità(Italia)

[37] Ercole Suppa, *Esami di maturità*, 2007, http://www.lse.te.it/matematica/RaccoltaMaturita.pdf

[38] Lamberto Lamberti, *I compiti di maturità scientifica 2013*, 2013, http://www.matmedia.it/2013/maturita2013.pdf

[39] Antonio Maturo, *L'insegnamento del Calcolo delle Probabilità ed i quesiti agli Esami di Stato* http://www.matmedia.it/Joomla/Agerola%20%20-%20Maturo%20.pdf

[40] *Circolare Ministeriale 6 febbraio 1991, n. 24*
http://www.edscuola.it/archivio/norme/circolari/cm024_91.html

[41] *Circolare Ministeriale 27 settembre 1996, n. 615*
http://www.edscuola.it/archivio/norme/circolari/cm615_96.html

[42] *IL SYLLABUS DEL 2009 PER LA PROVA SCRITTA DI MATEMATICA, Intervista a Walter Maraschini*, 2010
http://www.treccani.it/scuola/maturita/seconda_prova/matematica/maraschini.html

[43] *La prova di matematica nell'esame di Stato, Raccolta materiali e analisi dei dati Sessione d'esame 2007 Gruppo di Lavoro U.M.I.-INVALSI*
http://www.invalsi.it/download/matematica_prova2007.pdf

[44] Aldo Morelli, *Sulle prove scritte degli esami di stato: ieri e oggi* [3], 2002
http://www.matmedia.it/Joomla/Agerola%20%20Morelli.pdf

[45] Michelangelo Di Stasio, *La prova scritta agli Esami di Stato: L'ANSIA DELLA PREPARAZIONE* [4], 2003
http://www.matmedia.it/Joomla/vicoequensedistasio.pdf

[46] *Syllabus per la prova scritta di Matematica agli Esami di Stato di Liceo Scientifico*
http://banner.orizzontescuola.it/syllabus_maturita_2009.pdf

[47] Luigi Lecci, *Esame di Stato 2003. La prova di matematica del PNI*[5], 2003
http://www.matmedia.it/Joomla/Vicoequenselecci.pdf

[48] Luciano Battaia, *Esaminiamo l'esame*, 2007
http://www.batmath.it/esame/esam_esame/esam_esame_scr.pdf

[49] Mariangela Chimetto, *Che cosa non vorrei trovare nello scritto di matematica*, 2007
http://www.treccani.it/scuola/maturita/seconda_prova/matematica/chimetto.html

[50] *Istruzioni e piani di studio 1944 Programmi di Matematica per il Liceo Scientifico*
http://www1.mat.uniroma1.it/ricerca/gruppi/education/programmiLS.htm

[3]articolo presentato al convegno sulla prova scritta di matematica agli esami di Stato svolto ad Agerola nel 2002

[4]articolo presentato al Congresso Mathesis di Vico Equense nel 2003

[5]articolo presentato al Congresso Mathesis di Vico Equense nel 2003

Ringraziamenti

Desidero ringraziare il professore Paolo Negrini per la disponibilità e l'attenzione con cui mi ha seguita in questi mesi durante la scrittura della tesi.

Desidero ringraziare il professore Valerio Fiumana per avermi permesso di svolgere insieme a lui il tirocinio al Liceo Scientifico Fulcieri Paulucci di Calboli di Forlì. Le sue lezioni mi hanno fornito suggerimenti per la stesura di questa tesi e mi hanno fatto riflettere sulla figura e sul ruolo dell'insegnante.

Ringrazio Paolo Zoli, amico di famiglia, per avermi prestato il suo libro di algebra.

Ringrazio i miei genitori per avermi dato la possibilità di laurearmi e per avermi insegnato ad avere fiducia in me stessa e nelle mie capacità.
Grazie a Matteo per avermi sopportata, supportata, incoraggiata e per aver sempre creduto in me.
Ringrazio i miei fratelli perchè anche loro hanno dovuto sopportare i miei momenti di follia prima di ogni esame.
E infine ringrazio tutti i miei parenti e tutti i miei amici che mi sono stati vicini fino ad ora.