ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

# REPLICAZIONE DI OPZIONI IN TEMPI DISCRETI CON COSTI DI TRANSAZIONE

**Tesi di Laurea in Finanza Matematica**

**Relatore:**
**Chiar.mo Prof.**
**Andrea Pascucci**

**Presentata da:**
**Alessandro De Gregorio**

**III Sessione**
**Anno Accademico 2012/2013**

*A mio fratello,*

# Introduzione

Nel modello binomiale nel caso in cui esista una ed unica misura martingala, e quindi il mercato risulta essere libero da arbitraggi, allora ogni derivato Europeo é replicabile, cioé esiste un portafoglio autofinanziante e predicibile che a maturitá valga esattamente quanto il derivato replicato. Questo é possibile assumendo che il mercato sia non frizionale, cioé privo di costi di transazione nella compravendita di titoli rischiosi e bond. Con la presenza di tali costi la replicazione di un derivato non é assicurata a prescindere e ai metodi di replicazione vanno apportate delle modifiche per includere i suddetti costi nella strategia.
Nella seguente tesi andremo a studiare come replicare un'opzione call Europea in un modello binomiale a tempi discreti (prima nel caso uniperiodale e poi estendendo ad un numero generico), assumendo siano presenti dei costi di transazioni proporzionali alla quantitá di titolo rischioso scambiato, ed assumiamo invece che gli scambi di titolo non rischioso siano esenti da tali costi.
In seguito vediamo come il costo di un'opzione call Europea possa essere visto come un valore atteso scontato, in modo analogo al caso non frizionale.

# Capitolo 1

# Replicazione e prezzo di una call Europea

## 1.1 Caso uniperiodale

Consideriamo un opzione call Europea con strike K, in un mercato binomiale con un titolo rischioso S ed un bond B. La dinamica del bond é deterministica, considerando il tasso di interesse su un periodo, $r$, costante e poniamo per semplicitá $R = 1 + r$. La dinamica del titolo rischioso é stocastica con le sole possibiltá di aumentare e diminuire il suo valore con tassi di crescita e decrescita costanti $u$ e $d$. Assumeremo come di consueto $d < R < u$. Saranno presenti costi di transazione proporzionali al titolo rischioso scambiato $c$.

Cerchiamo un portafoglio $(\alpha, \beta)$ che venduto dopo un periodo conferisca un guadagno uguale a quello della call. Dopo un periodo dovrá quindi valere:

$$\begin{cases} \alpha Su + \beta BR = Su - K + c\left|\alpha\right| Su \\ \alpha Sd + \beta BR = 0 + c\left|\alpha\right| Sd \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\alpha - c\left|\alpha\right|)Su + \beta BR = Su - K \\ (\alpha - c\left|\alpha\right|)Sd + \beta BR = 0 \end{cases}$$

Posto allora $\alpha - c\left|\alpha\right| = \overline{\alpha}$ segue

$$\begin{cases} \overline{\alpha} = \dfrac{Su - K}{Su - Sd} \\ \beta = \dfrac{K - Su}{Su - Sd}\dfrac{Sd}{BR} \end{cases}$$

Vale allora $\overline{\alpha} > 0$ e $\beta < 0$ da cui $\alpha > 0$ ed abbiamo un unica soluzione

$$\alpha = \frac{1}{1-c}\frac{Su-K}{Su-Sd} \qquad , \qquad \beta = \frac{K-Su}{Su-Sd}\frac{Sd}{BR}$$

Il portafoglio $(\alpha, \beta)$ in questo modo replica l'opzione presa in considerazione. Notiamo che acquistare tale strategia richiede un investimento di $c\alpha S$, allora sará oppurtuno attribuire alla call un costo pari a

$$C = \alpha S + \beta B + c\alpha S$$

al fine di coprire i costi per comprare la strategia replicante.

## 1.2 Caso multiperiodale

Supponiamo ora di trovarci in condizioni analoghe a quelle precedenti ma con $N$ periodi. Per costruire il portafoglio replicante, andiamo a vedere quale portafoglio possedere alla maturitá, che abbia un valore uguale a quello della call, e procedendo a ritroso ricaviamo il portafoglio iniziale. Consideriamo il grafo:

Conoscendo i portafogli $(\alpha_1, \beta_1)$ e $(\alpha_2, \beta_2)$ ci chiediamo come determinare il portafoglio $(\alpha, \beta)$. Introducendo i costi di transazione la condizione di autofinanziamento diventa:

$$\begin{cases} \alpha Su + \beta BR = \alpha_1 Su + \beta_1 BR + c\,|\alpha - \alpha_1|\, Su \\ \alpha Sd + \beta BR = \alpha_2 Sd + \beta_2 BR + c\,|\alpha - \alpha_2|\, Sd \end{cases} \tag{1.1}$$

Il problema esposto in questo modo risulta essere non lineare e puó condurre a piú soluzioni differenti. Abbiamo il seguente risultato particolare:

**Teorema 1.** *Nella replicazione di una call Europea le equazioni* (1.1) *hanno un'unica soluzione* $(\alpha, \beta)$ *e per tale soluzione vale la disuguaglianza:*

$$\alpha_2 < \alpha < \alpha_1$$

*Dimostrazione.* Procediamo per induzione. Assumiamo che sia $\alpha_4 < \alpha_1 < \alpha_3$ e $\alpha_5 < \alpha_2 < \alpha_4$, allora sará $\alpha_2 < \alpha_1$. Introduciamo la funzione $f(\alpha)$ ottenuta sottraendo alla prima equazione di (1.1) la seconda.

$$f(\alpha) := \alpha S(u-d) - \alpha_1 Su + \alpha_2 Sd - \beta_1 BR - \beta_2 BR - c\,|\alpha - \alpha_1|\, Su + c\,|\alpha - \alpha_2|\, Sd = 0$$

Tale funzione é continua e lineare a tratti, cioé lineare sugli intervalli $(-\infty, \alpha_2)$ , $(\alpha_2, \alpha_1)$, $(\alpha_1, \infty)$ con derivata costante su ciascun intervallo con valori: $[(1+c)u - (1+c)d]S$, $[(1+c)u - (1-c)d]S$, $[(1-c)u - (1-c)d]S$. Poiché sono numeri strettamente positivi, $f(\alpha)$ é una funzione monotona strettamente crescente, quindi ha uno zero unico. Per verificare che $\alpha_2 < \alpha < \alpha_1$ basta mostrare che $f(\alpha_2) \leq 0$ e$f(\alpha_1) \geq 0$. Abbiamo

$$f(\alpha_2) = (\alpha_2 - \alpha_1)Su(1+c) - \beta_1 BR + \beta_2 BR$$

$$f(\alpha_1) = (\alpha_2 - \alpha_1)Sd(1+c) - \beta_1 BR + \beta_2 BR$$

Avendo supposto $\alpha_4 < \alpha_1 < \alpha_3$ abbiamo che $\alpha_1$ é stato ricavato da un'equazione del tipo:

$$\alpha_1 Sud + \beta_1 BR^2 = \alpha_4 Sud + \beta_4 BR^2 + c(\alpha_1 - \alpha_4)Sud$$

Allo stesso modo poiché $\alpha_5 < \alpha_2 < \alpha_4$ abbiamo

$$\alpha_2 Sud + \beta_2 BR^2 = \alpha_4 Sud + \beta_4 BR^2 + c(\alpha_4 - \alpha_2)Sud$$

Sottraendo alla prima equazione la seconda e dividendo per $R$ oottteniamo:

$$\frac{(\alpha_2 - \alpha_1)Sud}{R} + \beta_2 BR - \beta_1 BR = \frac{c[(\alpha_4 - \alpha_2) - (\alpha_1 - \alpha_4)]Sud}{R}$$

Allora otteniamo

$$\begin{aligned} f(\alpha_2) &= (\alpha_2 - \alpha_1)Su(1+c) - \beta_1 BR + \beta_2 BR \\ &\leq \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)Sud}{R} + \beta_2 BR - \beta_1 BR = \frac{c[(\alpha_4 - \alpha_2) - (\alpha_1 - \alpha_4)]Sud}{R} \\ &= \frac{c[(\alpha_4 - \alpha_2) - (\alpha_1 - \alpha_4)]Sud}{R} + \frac{c(\alpha_2 - \alpha_1)Sud}{R} = \frac{2c(\alpha_4 - \alpha_1)Sud}{R} \leq 0 \end{aligned}$$

Allo stesso modo possiamo mostrare $f(\alpha_1) \geq 0$.
Per completare la dimostrazione dobbiamo verificare l'ipotesi iniziale dell'induzione. Alla maturitá vorremo poter acquistare due tipi di portafogli:
$\alpha = \dfrac{1}{1-c}$,$\beta = -\dfrac{K}{B_N}$ se il titolo é maggiore dello strike ($B_N$é il valore del bond all'$N$-simo periodo.
$\alpha = 0$ , $\beta = 0$ se il titolo é minore dello strike. Il periodo prima della maturitá avremo 3 casi allora:

**Caso I** $\alpha = \dfrac{1}{1-c}$,$\beta = -\dfrac{K}{B_N}$ $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$

$$\begin{cases} \alpha Su + \beta B_N = \alpha_1 Su + \beta_1 B_N + c\left|\alpha - \alpha_1\right| Su \\ \alpha Sd + \beta B_N = \alpha_2 Sd + \beta_2 B_N + c\left|\alpha - \alpha_2\right| Sd \end{cases}$$

$$\to \alpha(Su - Sd) = \frac{1}{1-c}(Su - Sd) + c\left|\alpha - \frac{1}{1-c}\right|(Su - Sd)$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{1-c} \qquad , \qquad \alpha_2 \leq \alpha \leq \alpha_1$$

**Caso II** $\alpha = 0 = \alpha_2$,$\beta = 0 = \beta_2$

$$\begin{cases} \alpha Su + \beta B_N = 0 + c\left|\alpha\right| Su \\ \alpha Sd + \beta B_N = 0 + c\left|\alpha\right| Sd \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = 0 \qquad , \qquad \alpha_2 \leq \alpha \leq \alpha_1$$

**Caso III** $\alpha = \dfrac{1}{1-c}$,$\beta = -\dfrac{K}{B_N}$ $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 0$

$$\begin{cases} \alpha Su + \beta B_N = \frac{1}{1-c} Su - K + c\left|\alpha - \frac{1}{1-c}\right| Su \\ \alpha Sd + \beta B_N = 0 + c\left|\alpha\right| Sd \end{cases}$$

$$\alpha(Su - Sd) = \frac{1}{1-c} Su - K + c\left|\alpha - \frac{1}{1-c}\right| Su - c\alpha Sd$$

Supponiamo per assurdo $\alpha \geq \frac{1}{1-c}$ allora

$$\alpha(Su - Sd)(1-c) = Su - K \Rightarrow \alpha = \frac{1}{1-c}\frac{Su - K}{Su - Sd} < \frac{1}{1-c}$$

Assurdo $\Rightarrow \alpha_2 < \alpha < \alpha_1$ con

$$\alpha = \frac{\frac{1}{1-c}S\overline{u} - K}{S\overline{u} - S\overline{d}}$$

dove $\overline{u} = u(1+c)$, $\overline{d} = d(1-c)$ □

Grazie al teorema il sistema da noi considerato inizialmente é lineare e puó essere riscritto nella forma seguente:

$$\begin{cases} \alpha S\overline{u} + \beta BR = \alpha_1 S\overline{u} + \beta_1 BR \\ \alpha S\overline{d} + \beta BR = \alpha_2 S\overline{d} + \beta_2 BR \end{cases} \tag{1.2}$$

dove $\overline{u} = u(1+c)$, $\overline{d} = d(1-c)$ come nel teorema.
Queste equazioni e il teorema ci forniscono una base per un algoritmo con cui costruire il portafoglio replicante di un'opzione call Europea.

## 1.3 Algoritmo per determinare il portafoglio replicante di una call Europea

Con $(\alpha_n^s, \beta_n^s)$ indichiamo il portafoglio che viene acquistato al periodo $n-1$ dopo che il titolo ha conseguito $s$ up e $n-1-s$ down. $0 \le s \le n-1$. Allora dal Teorema 1 abbiamo 3 casi per i portafogli $(\alpha_N^s, \beta_N^s)$. Nel seguito indichiamo con $S_k$ il termine $S_0 u^s d^{k-s}$ e con $B_k$ il termine $B_0 R^k$, dove $S_0$ e $B_0$ sono i valori iniziali del titolo richioso e del bond.
Avremo :

1. $\alpha_N^s = \dfrac{1}{1-c}$ , $\qquad \beta_N^s = -\dfrac{K}{B_N} \qquad$ se $S_{N-1}u > S_{N-1}d > K$
2. $\alpha_N^s = 0 = \beta_N^s \qquad$ se $K > S_{N-1}u > S_{N-1}d$
3. $\alpha_N^s = \dfrac{\frac{1}{1-c}S_{N-1}\overline{u} - K}{S_{N-1}\overline{u} - S_{N-1}\overline{d}}$ , $\qquad \beta_N^s = \dfrac{Sd\alpha_N^s(c-1)}{B_N} \qquad$ se $S_{N-1}d < K < S_{N-1}u$

Presi questi come dati iniziali, le equazioni (1.2) ci forniscono l'algoritmo:

$$\alpha_{n-1}^s = \frac{\alpha_n^{s+1} S_{n-1}\overline{u} - \alpha_n^s S_{n-1}\overline{d} + \beta_n^{s+1} B_n - \beta_n^s B_n}{S_{n-1}(\overline{u} - \overline{d}}$$

$$\beta_{n-1}^s = \frac{S_{n-1}\overline{u}(\alpha_n^{s+1} - \alpha_{n-1}^s) + \beta_n^{s+1} B_n}{B_n}$$

$$2 \leq n \leq N \qquad 0 \leq s \leq n-2$$

L'algoritmo ci porta ad una soluzione unica $(\alpha_1^0, \beta_1^0)$ che é il portafoglio che dovremo acquistare al tempo $t = 0$. Acquistare il portafoglio ci costerá $c\alpha_1^0 S_0$ (poiché $\alpha_1^0 \geq 0$) allora converrá attribuire alla call un prezzo pari a

$$\alpha_1^0 S_0 + \beta_1^0 B_0 + c\alpha_1^0 S_0$$

per coprire i costi necessari a comprare il portafoglio replicante.

# Capitolo 2

# Valore del portafoglio replicante come valore atteso scontato

Nel seguito non terremo conto del costo $c\alpha S_0$ per acuistare il portafoglio replicante.
In un modello a due periodi come quello schematizzato a pagina 2, sia $C$ il valore del portafoglio che replica una call Europea con costi di transazione. Varrá:

$$C = \alpha S + \beta B = \frac{p[(1+c)\alpha_1 Su + \beta_1 BR] + (1-p)[(1-c)\alpha_2 Sd + \beta_2 BR}{R}$$

Che puó essere ulteriormente ridotto a

$$C = [pp_u[(1+c)\alpha_3 Su^2 + \beta_3 BR^2] + p(1-p_u)[(1-c)\alpha_4 Sud + \beta_4 BR^2] + \\ +(1-p)p_d[(1+c)\alpha_4 Sud + \beta_4 BR^2] + (1-p)(1-p_d)[(1-c)\alpha_5 Sd^2 + \beta_5 BR^2]]/R^2$$

dove $p_u = \dfrac{R(1+c) - \overline{d}}{\overline{u} - \overline{d}}$ e $p_d = \dfrac{R(1-c) - \overline{d}}{\overline{u} - \overline{d}}$.
Possiamo vedere il lato destro dell'uguaglianza come il valore atteso scontato di un nuovo processo stocastico, differente sia dal porcesso del titolo rischioso che da quello del bond.
In questo processo la probabilitá che si verifichi un up o un down dipende da quanto si sia verificato nel periodo precedente: se al passo prima si é verificato un up la probabilitá che se ne verifichi un altro é $p_u$, se si é verificato un down, la probabilitá di ottenere un up é $p_d$. Notiamo che $0 < p_d < p_u < 1$ cioé

dopo un up é piú probabile che se ne verifichi un altro e altrettanto vale per il down.
Possiamo formalizzare il nuovo processo nel modo seguente:
sia $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una catena di Markov con due possibili valori $\log u$ e $\log d$.
La matrice di transizione associata sará:

$$\begin{pmatrix} p_u & p_d \\ 1-p_u & 1-pd \end{pmatrix}$$

dove la prima colonna rappresenta la distribuzione di probabilitá di $X_{j+1}$ sapendo che $X_j = \log u$, mentre la seconda sapendo che $X_j = \log d$. La distribuzione iniziale per $X_1$ é $\begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix}$.
Si puó dimostrare allora il seguente teorema:

**Teorema 2.** *Il costo per la costruzione di un'opzione call Europea con costi di transazione proporzionali al titolo rischioso é:*

$$C = \frac{E[(1+\overline{X}_N c)Se^Y - K)1_{Se^Y \geq K}]}{R^N} \tag{2.1}$$

*dove* $Y = \sum_{i=1}^N X_i$ *e* $\overline{X}_N = \begin{cases} 1 & se X_N = \log u \\ -1 & se X_N = \log d \end{cases}$ *e la misura é quella associata al nuovo processo.*

# Appendice A

# Modello di mercato binomiale discreto

Nell'elaborato prendiamo in considerazione un modello di mercato binomiale discreto, costruito su uno spazio di probabilitá $(\Omega, F, P)$ con $\Omega$ che ha un numero finito di elementi e in cui assumiamo che $P(\omega) > 0$ per ogni $\omega \in \Omega$. Fissato l'intervallo temporale $[0, T]$ supponiamo che le contrattazioni avvengano solo in alcune date fissate

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$$

dove é costante la differenza $t_i - t_{i-1}$.
Il mercato é costituito da due titoli $(S^0, S^1)$, dove $S_n^k$ é una variabile aleatoria non-negativa che indica il prezzo all'istante $t_n$ del $k-$esimo titolo, pertanto ciascun titolo $S^k = (S_n^k)_{n=0,\dots,N}$ é un provesso stocastico a tempo discreto in $(\Omega, F, P)$.
Poniamo come primo titolo $S^0$ il Bond $B$, cioé il titolo privo di rischio sull'intervallo $[0, N]$; se indichiamo con $r$ il tasso di interesse semplice nell'intervallo $[t_n, t_{n+1}]$, che assumeremo costante su tutti gli intervalli, allora la dinamica del bond é data da

$$B_{n+1} = B_n(1 + r), \qquad n = 0, 1, , \dots, N - 1$$

e quindi $B_n = B_0(1 + r)^n$. Assumiamo $B_0 > 0$.
Il titolo $S^1$ é invece un titolo rischioso per cui assumiamo una dinamica stocastica: nel passaggio dal tempo $t_n$ al tempo $t_{n+1}$ l'azione puó solo aumentare o diminuire il suo valore con tassi di crescita e decrescita costanti su tutti gli intervalli. La dinamica del titolo sará :

$$S_{n+1} = \xi_{n+1} S_n, \qquad n = 0, 1, \dots, N - 1$$

dove $\xi_1, \dots, \xi_N$ sono variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite sullo spazio di probabilitá $(\Omega, F, P)$, aventi come distribuzione una combinazione di Delta di Dirach:

$$\xi_n \sim p\delta_u + (1-p)\delta_d, \qquad n = 1, \dots, N$$

dove $p \in ]0,1[$, $u$ indica il tasso di crescita del titolo rischioso e $d$ il tasso di decrescita. Assumiamo $0 < d < u$.

**Definizione 1.** Un portafoglio (o strategia) é un processo stocastico in $\mathbb{R}^2$

$$\alpha = (\alpha_n^0, \alpha_n^1)_{n=0,\dots,N}$$

Nella definizione $\alpha_n^k$ rappresenta la quantitá del titolo $k-$esimo posseduta nel portafoglio all'istante $t_n$. Indichiamo allora il cvalore del portafoglio $\alpha$ all'istante $t_n$ con

$$V_n(\alpha) = \alpha_n^0 S^0 + \alpha_n^1 S^1$$

Il valore del portafoglio $V(\alpha) := (V_n(\alpha))_{n=0,\dots,N}$ é un processo stocastico reale a tempo discreto. Notiamo che é ammesso che $\alpha_n^k$ assuma valori negati, a rappresentare che sono ammessi ad esempio vendita allo scoperto di azioni o prestito di soldi alla banca.

**Definizione 2.** Un portafoglio é autofinanziante se vale la relazione

$$V_n(\alpha) = \alpha_{n+1} \cdot S_n \qquad perognin = 0, \dots, n-1$$

Per un portafoglio autofinanziante vale cioé l'ugualgianza

$$\alpha_n \cdot S_n = \alpha_{n+1} \cdot S_n$$

che si interpeta nel modo seguente: *al tempo $t_n$ abbiamo a disposizione il capitale $V_n(\alpha) = \alpha_n \cdot S_n$ e ribilianciamo il portafoglio con le nuove quantitá $\alpha_{n+1}$ in modo tale da non mutare il valore complessivo.*

**Definizione 3.** Un portafogllio $\alpha$ é predicibile se $\alpha_n$ é $F_{n-1}$-misurabile per ogni $n = 1, \dots, N$.

Indichiamo nel seguito con $\mathbb{A}$ la famiglia dei portafogli autofinanzianti e predicibili:

$$\mathbb{A} = \{\alpha = (\alpha_n^0, \alpha_n^1)_{n=1,\dots,N} | \alpha \quad \textit{é autofinanziante e predicibile}\}$$

**Definizione 4.** Diciamo che $\alpha \in \mathbb{A}$ é un portafoglio di arbitraggio (o semplicemente un arbitraggio) se il valore $V(\alpha)$ del portafoglio é tale che

1. $V_0(\alpha) = 0$
   ed esiste n tale che

2. $V_n(\alpha) \geq 0 \quad P - q.s.$

3. $P(V_n(\alpha) > 0) > 0$

Diciamo che il mercato é libero da arbitraggi se la famiglia $\mathbb{A}$ non contiene portafogli d'arbitraggio.

Un'arbitraggio cioé é una strategia in $\mathbb{A}$ che pur non richiedendo un investimento iniziale e non esponendo ad alcun rischio, ha la possibilitá di assumere un valore positivo.

**Definizione 5.** Una strategia $\alpha \in \mathbb{A}$ si dice ammissibile se

$$V_n(\alpha) \geq 0 \qquad \forall n \leq N$$

In merito agli arbitraggi abbiamo che

**Proposizione 1.** *Un mercato discreto é libero da arbitraggi se e solo se non esistono strategie d'arbitraggio ammissibili.*

Andiamo a vedere come vengono rappresentati i derivati in tale modello.

**Definizione 6.** Un derivato di tipo Europeo é una variabile aleratoria X su $(\Omega, F, P)$.

In sostanza $X$ rappresenta il valore finale di un'opzione con scadenza T. I problemi legati allo studio di un derivato X sono:

1. *la valutazione*, ossia la determinazione di un prezzo per il derivato che eviti di introdurre possibilitá di arbitraggio nel mercato;

2. *la replicazione*, ossia la determinazione di una strategia $\alpha \in \mathbb{A}$ cioé autofinanziante e predicibile che assuma a scadenza lo stesso valore del derivato
$$V_N(\alpha) = X \quad q.s.$$
   Se tale strategia esiste, $X$ si dice *replicabile* e $\alpha$ é detta *strategia replicante*

Il primo problema é risolubile in un mercato libero da arbitraggi, anche se non necessariamente in modo unico. Il secondo puó non essere risolubile anche in un mercato libero da arbitraggi. Nel caso in cui invece ogni derivato sia replicabile diremo che il mercato é *competo.* Abbiamo un importante teorema riguardo la completezza di un mercato:

**Teorema 3** (Secondo teorema fondamentale della valutazione)**.** *Un mercato libero da arbitraggi é completo se e solo se esiste un'unica misura martingala*

Si puó dimostrare che nel caso del modello binomiale, libero da arbitraggi e costi di transazione, quando per titolo rischioso e bond vale $d < 1 + r < u$ allora la misura martingala é unica e il mercato risulta completo. In queste condizioni i problemi di valutazione e replicazione sono risolubili e nel caso particoalare di un derivato Europeo *path-independent* (cioé in cui il payoff dipende solo dal valore $S_N$ assunto dal titolo rischioso e non dai valori precedenti) abbiamo un algoritmo che ci fornisce il prezzo del derivato e la strategia replicante.

### A.0.1 Algoritmo binomiale - caso *path-independent*

Al tempo $t_n$ il titolo rischioso vale $S_n = S_{n,k} := S_0 u^k d^{n-k}$ con $n = 0, \dots, N$ e $k = 0, \dots, n$. Definiamo il processo stocastico $H_n = V_n(\alpha)$ come il prezzo di arbitraggio del derivato $X$.
Usiamo nel seguito la notazione

$$H_n(k) := H_n(S_{n,k})$$

e analogamente

$$\alpha_n(k) = \alpha_n(S_{n-1,k}), \qquad b_n(k) = \beta_n(k) B_n = b_n(S_{n-1,k})$$

Ricaviamo la seguente formula iterativa per la determinazione del prezzo $(H_n)$:

$$H_N(k) = F(S_{N,k}) \qquad 0 \le k \le N$$

$$H_{n-1}(k) = \frac{1}{1+r}(q H_n(k+1) + (1-q) H_n(k)) \qquad 0 \le k \le n-1 \tag{A.1}$$

per $n = 1, \dots, N$ e $q = \frac{1+r-d}{u-d}$. Il prezzo iniziale del derivato sará $H_0(0)$. Una volta determinati i valori $H_n(k)$, la strategia di copertuta é data da :

$$\alpha_n(k) = \frac{H_n(k+1) - H_n(k)}{(u-d) S_{n-1,k}}$$

$$b_n(k) = \frac{u H_n(k) - d H_n(k+1)}{u-d}$$

per $1, \dots, N$ e $k = 0, \dots, n-1$.

Vediamo che possiamo interpretare il costo del derivato come un valore atteso scontato, infatti per definizione $H_{N-1} = V_{N-1}$ e affinché il portafoglio replicante sia autofinanziante deve valere:

$$V_{N-1} = \alpha_N(k) + b_N \frac{1}{1+r}$$

ricordando che abbiamo definito $q = \frac{1+r-d}{u-d}$ e svolgendo alcuni conti otteniamo $(A.1)$

$$H_{N-1} = \frac{1}{1+r}(qH_N(k+1) + (1-q)H_N(k))$$

se $S_{N_1}$ é un un prezzo osservabile, cioé un numero reale, allora $H_{N-1}$ é una funzione deterministica di $S_{N-1}$:

$$H_{N-1}(S_{N-1}) = \frac{1}{1+r} E^Q[H_N(S_N)]$$

mentre se $S_{N-1}$ é una variabile aleatoria allora anche $H_{N-1}$ lo é e vale:

$$H_{N-1}(S_{N-1}) = \frac{1}{1+r} E^Q[H_N(S_N)|F_{N-1}] = \frac{1}{1+r} E^Q[H_N(S_N)|S_{N-1}]$$

Iterando il procedimento otteniamo in generale

$$H_{N-n} = \frac{1}{(1+r)^n} E^Q[H_N(S_N)|F_{N-n}] \tag{A.2}$$

e in particolare il valore del derivato al tempo zero sará

$$H_0 = \frac{1}{(1+r)^N} E^Q[H_N(S_N)] \tag{A.3}$$

# Ringraziamenti