

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

**Polimeri diretti
in
ambiente aleatorio**

Tesi di Laurea Magistrale in Probabilità e statistica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Massimo Campanino

Presentata da:
Yesica Estevez

III Sessione
Anno Accademico
2012-2013

Alla memoria di mio padre...

Introduzione

DNA, cellulosa, materie plastiche, caucciù sono solo alcuni dei moltissimi esempi di polimeri che si possono fare e che riguardano molte delle attività importanti per l'uomo; non sorprende, perciò, che essi costituiscano ormai da diversi anni un argomento di grande interesse scientifico. Data la varietà, la loro indagine riguarda vari settori della scienza quali chimica, fisica, biologia e, ovviamente, la matematica.

In questo elaborato prendiamo in esame un modello probabilistico per lo studio del comportamento di un polimero, visto come oggetto aleatorio, in interazione con l'ambiente, anch'esso aleatorio; gli strumenti di cui ci serviremo per questa analisi saranno quelli della teoria delle probabilità.

Nel primo capitolo viene descritto il modello di passeggiata aleatoria semplice che modella la configurazione spaziale di un polimero costituito da monomeri idrofili, il quale si suppone che viva nel reticolo discreto \mathbb{Z}^d , in cui si trovano posizionate in modo aleatorio molecole idrofobe (*impurità* o *disordine*) le quali, a seconda del valore che assumono, attraggono oppure respingono i monomeri che compongono la catena. La nostra analisi si concentra sul comportamento asintotico del polimero al variare della temperatura e della dimensione in cui lo si considera; ciò che ne emerge è una *transizione tra due fasi* che si distinguono per il diverso peso che assume la presenza delle impurità.

Nel secondo capitolo ci addentriamo nello studio della prima delle suddette fasi, quella che verrà denominata *regime di disordine debole*, caratterizzata dal fatto che le impurità non producono effetti rilevanti sul comportamento

della catena, che, sommariamente, si comporta come una passeggiata aleatoria semplice (*comportamento diffusivo*). Diversamente, il terzo capitolo è dedicato all'analisi del *regime di disordine forte*, che, contrariamente al caso precedente, si contraddistingue per il drastico cambio di comportamento che la presenza delle impurità provoca sulle traiettorie del polimero.

Nel quarto capitolo l'analisi si sposta su una quantità fondamentale nello studio di sistemi disordinati, ovvero l'energia libera, in termini della quale si può descrivere la transizione di fase sopra introdotta.

Il quinto capitolo ha come obiettivo quello di fare una breve panoramica sul fenomeno della *superdiffusività* (da contrapporsi alla diffusività), nel caso di due modelli in particolare; esso costituisce un argomento interessante da studiare ma che, ad oggi, rimane, nella maggior parte dei casi, un problema aperto.

Per finire, viene inserita un'appendice sulle martingale a tempo discreto, in cui vengono riportati i principali risultati teorici utili alla trattazione degli argomenti.

Indice

Introduzione	i
1 Polimeri diretti in ambiente aleatorio	1
1.1 Polimeri e passeggiata aleatoria	1
1.2 Definizione del modello	3
1.3 Funzione di partizione normalizzata e transizione di fase	6
1.4 Disordine e sovrapposizioni di polimeri	12
2 Disordine debole	14
2.1 Esistenza del disordine debole	14
2.2 Diffusività delle traiettorie	17
2.2.1 Comportamento asintotico della misura μ_N	18
2.3 Delocalizzazione	23
3 Disordine forte	26
3.1 Localizzazione delle traiettorie	26
3.2 Metodo dei momenti frazionari	32
3.2.1 Limite inferiore e limite superiore della temperatura critica	37
4 Disordine in termini di energia libera	39
4.1 Esistenza dell'energia libera	39
4.2 Temperatura critica	44
4.3 Disordine molto forte a basse dimensioni	46

4.3.1	Caso $d = 1$	46
4.3.2	Caso $d = 2$	49
5	Superdiffusività: cenni	52
5.1	Introduzione	52
5.1.1	Congetture su esponenti critici	53
5.2	Modello di Peterman	54
5.3	Modello: polimero browniano in ambiente gaussiano	55
A	Martingale	59
A.1	Esempi di martingale	60
A.2	Convergenza	62
A.3	Uniforme integrabilità	64
A.4	Decomposizione di Doob	66
A.4.1	Martingale di quadrato integrabile	67
	Bibliografia	69

Capitolo 1

Polimeri diretti in ambiente aleatorio

1.1 Polimeri e passeggiata aleatoria

Un polimero (dal greco *poly-*, molte e *méros*, parte) é una grossa molecola costituita da moltissime molecole piú piccole uguali oppure diverse, che vengono chiamate monomeri, unite fra loro mediante legami chimici a formare una catena. Esempi di polimeri se ne trovano abbondantemente in natura: il DNA ne é una dei principali insieme alle proteine e alla cellulosa. Esistono anche polimeri artificiali, quali, per esempio, le materie plastiche; oppure quelli di tipo inorganico, tra i quali possiamo trovare i silicani. Data la loro importanza per l'uomo, essi costituiscono un importante argomento di ricerca in vari settori della scienza, quali la chimica, la fisica, la biologia e anche la matematica.

Immaginiamo di avere un polimero costituito da monomeri idrofili immerso in una soluzione acquosa, la quale contiene, posizionate in maniera aleatoria, molecole idrofobe (che chiameremo *impurita*), le quali tenderanno a respingere i monomeri. A causa delle fluttuazioni provocate da questa interazione, la configurazione spaziale del polimero può cambiare rapidamente, alterandone la forma a livello macroscopico. Diventa così ragionevole considerare

la catena polimerica come un oggetto aleatorio che può essere studiato con gli strumenti della teoria della probabilità. Il problema che ci si pone in questo particolare studio è quello di capire se la presenza di quelle che abbiamo chiamato impurità, ossia le molecole idrofobe, possano alterare o meno il comportamento della catena, modificandone globalmente la forma.

Chiaramente, per costruire un modello matematico che conservi le caratteristiche salienti della situazione reale sopra descritta e che, allo stesso tempo, la rendano trattabile rigorosamente, si rendono necessarie alcune semplificazioni:

- si suppone che il polimero e le impurità vivano nel reticolo discreto \mathbb{Z}^d e che la configurazione spaziale del polimero costituito da N monomeri sia rappresentato da un cammino di N passi;
- si esclude la possibilità che il polimero possa aggrovigliarsi su se stesso o sovrapporsi, perciò si assume che esso si muova in una direzione prefissata (per questo motivo si parla di *polimero diretto*).

I polimeri diretti, quindi, possono essere pensati come cammini di processi stocastici interagenti con un disordine, le impurità, dipendenti dallo spazio e dal tempo, le cui traiettorie servono a modellizzarne le configurazioni spaziali. Due processi che possiamo considerare per descrivere i polimeri in interazione con l'ambiente sono:

1. *la passeggiata aleatoria semplice*: $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ su \mathbb{Z}^d definita da

$$S_0 = 0 \quad , \quad S_n = \sum_{i=1}^n X_i \quad n \geq 1 \quad (1.1)$$

dove gli X_i sono variabili aleatorie i.i.d. tali che $P(X_i = \pm e_k) = \frac{1}{2d}$, $\forall k = 1, \dots, d$ dove $\{e_k\}_{k=1, \dots, d}$ indicano i versori coordinati.

2. *la passeggiata aleatoria auto-evitante*: in \mathbb{Z}^d , ovvero una passeggiata aleatoria semplice (S_n) vincolata a non visitare più di una volta lo stesso sito.

Considerate le semplificazioni di cui dobbiamo tener conto, risulterebbe naturale la scelta delle passeggiate aleatorie auto-evitanti come processi per modellizzare i polimeri, queste ultime però sono oggetti matematici molto difficili da studiare, e tuttora oggetto di ricerca; per tale motivo si preferisce lavorare con le passeggiate aleatorie semplici o dirette.

1.2 Definizione del modello

Definiamo ora il modello di passeggiata aleatoria per il polimero diretto in ambiente aleatorio che sarà l'oggetto di questo elaborato.

- *Passeggiata aleatoria:* sia $\{S_n\}_{n \geq 0}$ una passeggiata aleatoria semplice, simmetrica sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, dove

$$\Omega = \{S = (S_n)_{n \in [0, N]} \in (\mathbb{Z}^d)^{N+1} : S_0 = 0, \quad \forall n \in [1, N], \|S_n - S_{n-1}\| = 1\}$$

\mathcal{F} è la σ -algebra dei cilindri su Ω , mentre \mathbf{P} è la misura di probabilità della passeggiata aleatoria ed è tale che gli incrementi $S_1 - S_0, \dots, S_n - S_{n-1}$ sono indipendenti e

$$\mathbf{P}(S_0 = 0) = 1, \quad \mathbf{P}(S_n - S_{n-1} = \pm \delta_j) = \frac{1}{2d}, \quad j = 1, \dots, d$$

dove $\delta_j = (\delta_{kj})_{k=1}^d$ è il j -esimo vettore della base canonica di \mathbb{Z}^d . Nel seguito indicheremo con \mathbf{E} l'aspettazione rispetto alla misura \mathbf{P} .

- *Ambiente aleatorio:* l'insieme delle impurità $\omega = (\omega_{n,x})_{n \geq 0, x \in \mathbb{Z}^d}$ è una successione di v.a. i.i.d. di media zero e varianza unitaria definite su uno spazio di probabilità $(\mathbb{H}, \mathbb{G}, \mathbb{Q})$ aventi tutti i momenti esponenziale

$$\lambda(\beta) := \log \mathbb{E}[e^{\beta \omega_{1,0}}] < \infty \quad \forall \beta \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

La variabile $\omega_{n,x}$ descrive la presenza (o la forza di interazione) dell'impurità nel punto di coordinate (n, x) . Si assume, inoltre, che $\omega(n, x)$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Z}^d$ siano indipendenti dalla passeggiata aleatoria $(S_n)_{n \geq 0}$. Nel seguito \mathbb{E} indicherà l'aspettazione rispetto alla misura \mathbb{Q} .

Osservazione 1. Da notare che il disordine, ω , viene scelto inizialmente e rimarrà fissato per tutta l'analisi che faremo: in questo caso si parla di aleatorietà di tipo *quenched*.

- *Misura dei polimeri:* ad ogni cammino S di Ω si associa una energia data dalla Hamiltoniana

$$H_N^\omega(S) = \sum_{n=1}^N \omega_{n,S_n}. \quad (1.3)$$

dove $\beta = \frac{1}{T} > 0$ è l'inverso della temperatura e indica quanto fortemente la catena polimerica interagisce con l'ambiente.

Si definisce poi $\forall N > 0$ la misura di probabilità dei polimeri $\mu_N^{\beta,\omega}$ sullo spazio (Ω, \mathcal{F}) come la misura di Gibbs definita da

$$\mu_N^{\beta,\omega}(S) := \frac{1}{Z_N^{\beta,\omega}} e^{\beta H_N^\omega(S)} \mathbf{P}(S) \quad (1.4)$$

dove

$$Z_N^{\beta,\omega} = \mathbf{E} \left[e^{\beta \sum_{i=1}^N \omega_{i,S_i}} \right] = \sum_{S \in \Omega} (2d)^n e^{\beta H_n}, \quad (1.5)$$

si chiama *funzione di partizione* del sistema.

La catena polimerica, rappresentata dal processo $(i, S_i)_{1 \leq i \leq N}$, è attratta da punti dello spazio $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ in cui il disordine ω assume valori positivi e respinto da quelli in cui risulta negativo. Supponiamo, ad esempio, che $\omega_{i,x}$ assuma solo due valori: +1 se nel sito (i, x) è presente una molecola d'acqua e -1 se in (i, x) c'è una molecola idrofoba. In questo caso l'energia del polimero diminuisce di un fattore pari a β ogniqualvolta un monomero si trovi a contatto con una molecola idrofoba ($\omega_{i,S_i} = -1$). Pertanto, la tipica forma del polimero è quella che cerca di evitare il più possibile le impurità.

Il modello che abbiamo ora descritto venne introdotto originariamente in fisica nella seconda metà degli anni '80 da D. Huse e A. Henley ("*Pinning and roughening of domain walls in Ising systems due to random impurities*") per lo studio del modello di Ising bidimensionale soggetto a impurità random.

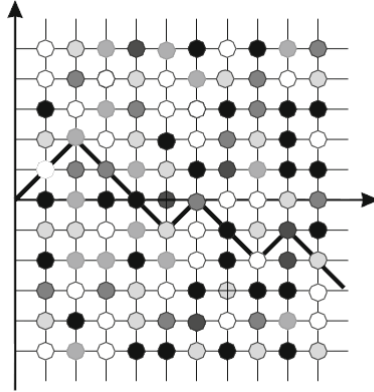


Figura 1.1: Polimero diretto in ambiente aleatorio. Le diverse sfumature delle palline indicano valori diversi dell'ambiente

Solo successivamente raggiunse la comunità matematica e venne formulato come sopra con [2] e J. Imbrie e T. Spencer in "Diffusion of directed polymer in random environment".

Due tipiche scelte della distribuzione del disordine sono:

Esempio 1.1. *Ambiente con distribuzione di Bernoulli.* In questo caso ω_{n,S_n} può assumere soltanto due valori, -1 e $+1$, con probabilità, rispettivamente, $p > 0$ e $q = 1 - p > 0$, perciò

$$\lambda(\beta) = \ln(pe^{-\beta} + (1 - p)e^{\beta})$$

Esempio 1.2. *Ambiente Gaussiano.* In questo caso ω ha distribuzione normale standard;

$$\mathbb{Q}(\omega_{n,x} \in dt) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dt.$$

Risulta

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{\beta\omega_{1,0}}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\beta x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\beta^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \sqrt{2} dy \\ &= e^{\frac{\beta^2}{2}}, \end{aligned}$$

da cui

$$\lambda(\beta) = \frac{\beta^2}{2}.$$

Diversi dei risultati che vedremo sono stati prima dedotti per questi due tipi di distribuzione del disordine e, successivamente, estesi al caso di un ambiente aleatorio più generale.

Osservazione 2. Se nella definizione della misura di probabilità (1.4) si prende $\beta = 0$, allora $\mu_N^{\beta,\omega}$ non è altro che la legge della passeggiata aleatoria semplice.

Siamo interessati al comportamento asintotico del polimero per $N \rightarrow +\infty$ rispetto alla misura $\mu_N^{\beta,\omega}$ e a capire sotto quali condizioni sulla dimensione d e la temperatura esso si differenzia dal comportamento asintotico della passeggiata aleatoria semplice. Fissata la successione ω , al variare di questi due parametri si osserva una transizione fra due diverse fasi:

1. se $d \geq 3$ e β abbastanza piccolo (alte temperature), le impurità non modificano la forma globale del polimero; in questo caso si parla di *disordine debole* (weak disorder phase).
2. se $d \leq 2$ e $\beta \neq 0$ oppure $d \geq 3$ e β abbastanza grande (basse temperature) le impurità cambiano drasticamente la forma globale del polimero, più precisamente, si osserva che esso tende a sistemare i propri monomeri lungo corridoi energeticamente più favorevoli; in questo caso si parla di *disordine forte* (strong disorder phase).

Notazione

Nel seguito ometteremo la dipendenza esplicita da β e/o ω delle quantità introdotte per alleggerire la notazione.

1.3 Funzione di partizione normalizzata e transizione di fase

Un ruolo fondamentale nello studio dei polimeri diretti è ricoperto dalla funzione di partizione normalizzata W_N , grazie alla quale possiamo fare una

prima caratterizzazione della transizione di fase.

Si definisce la funzione di partizione normalizzata come

$$W_N := \frac{Z_N^{\beta, \omega}}{\mathbf{E}[Z_N^{\beta, \omega}]} \quad (1.6)$$

Risulta

$$\mathbf{E}[Z_N^{\beta, \omega}] = \mathbf{E}\mathbf{E}[e^{\beta \sum_{n=1}^N \omega_{n, S_n}}] = e^{N\lambda(\beta)}$$

dove la prima uguaglianza si ottiene applicando il teorema di Fubini-Tonelli e la seconda segue dall'indipendenza di ω . Si ha

$$W_N = \mathbf{E}[e^{\sum_{n=1}^N (\beta \omega_{n, S_n} - \lambda(\beta))}] \quad (1.7)$$

Proposizione 1.3.1. *La successione $(W_N)_{N \geq 1}$ è una martingala rispetto alla filtrazione*

$$\mathcal{G}_N = \sigma((\omega_{n, x})_{n \leq N, x \in \mathbb{Z}^d}) \quad (1.8)$$

Quindi, esiste il limite

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} W_N =: W_\infty,$$

e risulta

$$\mathbb{Q}(W_\infty > 0) \in \{0, 1\}. \quad (1.9)$$

Dimostrazione. Innanzitutto, dimostriamo che la successione $(W_N)_{N \geq 1}$ è una martingala positiva sullo spazio $(\mathbb{H}, \mathbb{G}, \mathbb{Q})$. Poniamo

$$e(n, x) = e^{(\beta \omega_{n, x} - \lambda(\beta))}$$

$$e_{1, N} = \prod_{1 \leq j \leq N} e(j, S_j).$$

Osserviamo che $W_N = \mathbf{E}[e_{1, N}]$. Per ogni fissato $S \in \Omega$, $e_{1, N}$ è il prodotto di variabili aleatorie i.i.d con media unitaria, e, perciò, è una (\mathcal{G}_N) -martingala sullo spazio $(\mathbb{H}, \mathbb{G}, \mathbb{Q})$ (si veda nell'Appendice gli esempi di martingale). Di conseguenza, W_N è una martingala sullo spazio suddetto. Per il corollario (A.2.3) sulla convergenza delle martingale, il limite W_∞ esiste \mathbb{Q} -q.c ed è

non negativo. Ora, poiché $\{W_\infty = 0\}$ è un evento misurabile rispetto alla σ -algebra coda

$$\bigcap_{N \geq 1} \sigma(\omega(j, x); j \geq N, x \in \mathbb{Z}^d),$$

per la legge 0 – 1 di Kolmogorov, ogni evento nella σ -algebra coda ha probabilità 0 oppure 1, di conseguenza $\mathbb{Q}(W_\infty > 0) = 1$ oppure $\mathbb{Q}(W_\infty = 0) = 1$. \square

Diamo la seguente

Definizione 1.1. Si parla di

disordine debole quando $\mathbb{Q}(W_\infty > 0) = 1$

disordine forte quando $\mathbb{Q}(W_\infty = 0) = 1$

Vedremo che nel primo caso le traiettorie del polimero presentano un comportamento diffusivo (tipico della passeggiata aleatoria semplice simmetrica), ossia la catena ha la tendenza a disperdere i suoi monomeri lontano dall'origine, contrariamente, nel secondo caso il comportamento è superdiffusivo, nel senso che vi sono ristrette regioni dello spazio all'interno delle quali si collocano i monomeri. Come abbiamo già osservato, nel caso in cui $\beta = 0$ la catena polimerica non è altro che una passeggiata aleatoria semplice, la quale rientra nella fase di disordine debole in quanto $W_N = \frac{Z_N^{0, \omega}}{\mathbb{E}[Z_N^{0, \omega}]} = 1$.

Teorema 1.3.2 (Temperatura critica).

Esiste un valore critico della temperatura $\beta_c = \beta_c(d)$, che dipende dalla distribuzione di ω , tale che

- *il disordine debole si ha quando $\beta < \beta_c$,*
- *il disordine forte si ha quando $\beta > \beta_c$.*

Inoltre:

$$\begin{aligned} \beta_c(d) &= 0 \quad \text{quando } d = 1, 2 & (1.10) \\ \beta_c(d) &\in (0, \infty] \quad \text{quando } d \geq 3. \end{aligned}$$

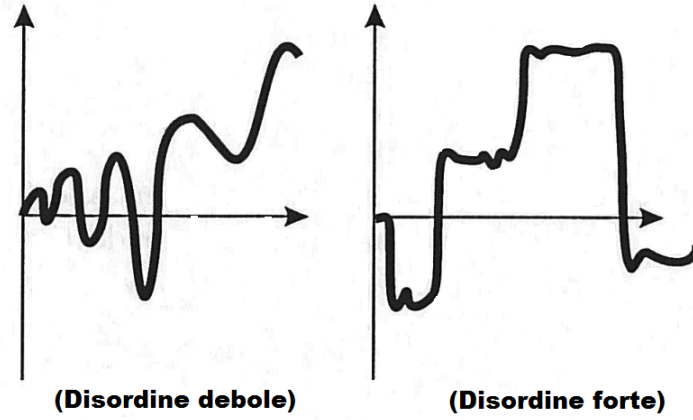


Figura 1.2: Andamento tipico delle traiettorie nelle due diverse fasi

Non si conosce ancora cosa avviene in corrispondenza del valore critico $\beta = \beta_c$.

Vedremo qui di seguito la dimostrazione dell'unicità di β_c , invece, per quel che riguarda la (1.10), la dimostrazione verrà data, rispettivamente, nel secondo e nel terzo capitolo. Innanzitutto, dimostriamo il seguente

Lemma 1.3.3. (a) *Assumiamo che $\phi : (0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ sia C^1 e che ci siano due costanti $C, p \in [1, \infty)$ tali che*

$$|\phi'(u)| \leq Cu^p + Cu^{-p}, \quad \forall u > 0.$$

Allora,

$$\phi(W_n), \quad \frac{\partial \phi(W_n)}{\partial \beta} \in L^1(\mathbb{Q}), \quad \mathbb{E}[\phi(W_n)] \in C^1$$

per $\beta \in \mathbb{R}$, e

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \mathbb{Q}[\phi(W_n)] = \mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \phi(W_n) \right]. \quad (1.11)$$

(b) *Supponiammo, inoltre, che ϕ sia una funzione concava su $(0, \infty)$. Allora,*

$$\mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \phi(W_n) \right] \leq 0 \quad \text{per } \beta \geq 0. \quad (1.12)$$

Dimostrazione. **(a)** Fissiamo β_1 , $0 < \beta_1 < \infty$, e poniamo $I = [0, \beta_1]$. Facciamo vedere che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $p \in [1, \infty)$,

$$\sup_{\beta \in I} W_n, \quad \sup_{\beta \in I} W_n^{-1}, \quad \sup_{\beta \in I} \left| \frac{\partial W_n}{\partial \beta} \right| \in L^p(\mathbb{Q}). \quad (1.13)$$

Usando il teorema di Fubini-Tonelli, si trova

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(W_n)^p] &= \mathbb{E}[(\mathbf{E}[e^{\beta \sum_{i=1}^n -n\lambda(\beta)}])^p] \\ &\leq \mathbb{E}[\mathbf{E}[(e^{\beta \sum_{i=1}^n -n\lambda(\beta)})^p]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{E}[e^{p\beta \sum_{i=1}^n -pn\lambda(\beta)}]] \\ &= \mathbf{E}[\mathbb{E}[e^{p\beta \sum_{i=1}^n -pn\lambda(\beta)}]] \\ &= e^{n[\lambda(p\beta) - p\lambda(\beta)]} < \infty, \end{aligned}$$

e, in modo analogo,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(W_n)^{-p}] &= \mathbb{E}[(\mathbf{E}[e^{\beta \sum_{i=1}^n -n\lambda(\beta)}])^{-p}] \\ &\leq \mathbb{E}[\mathbf{E}[(e^{\beta \sum_{i=1}^n -n\lambda(\beta)})^{-p}]] \\ &= e^{n[\lambda(-p\beta) + p\lambda(\beta)]} < \infty, \end{aligned}$$

entrambe queste quantità sono finite per l'ipotesi (1.2). Inoltre,

$$\frac{\partial}{\partial \beta} W_n = \frac{\partial}{\partial \beta} \mathbf{E}[e^{\beta \sum_{i=1}^n \omega_{i,S_i} - n\lambda(\beta)}] = \mathbf{E}[(\sum_{i=1}^n \omega_{i,S_i} - n\lambda'(\beta)) e^{\beta \sum_{i=1}^n \omega_{i,S_i} - n\lambda(\beta)}].$$

Ora,

$$\left| \frac{\partial \phi(W_n)}{\partial \beta} \right| = \left| \phi'(W_n) \frac{\partial W_n}{\partial \beta} \right| \leq (CW_n^p + CW_n^{-p}) \left| \frac{\partial W_n}{\partial \beta} \right| \in L^p.$$

Infine, osserviamo che, poiché $\phi(W_n)$ è di classe C^1 per β reale, possiamo scrivere

$$\phi(W_n(\beta_1)) = \phi(1) + \int_0^{\beta_1} \frac{\partial W_n}{\partial \beta} d\beta \quad \forall \beta \in \mathbb{R}.$$

che, insieme a (2.2) e al teorema di Fubini, ci permette di concludere la dimostrazione della parte **(a)** del lemma.

(b) Risulta

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \phi(W_n) \right] &= \mathbb{E} \left[\phi'(W_n) \frac{\partial W_n}{\partial \beta} \right] \\ &= \mathbf{E}[\mathbb{E}[\phi'(W_n) (\sum_{i=1}^n \omega_{i,S_i} - n\lambda'(\beta)) e^{\beta \sum_{i=1}^n \omega_{i,S_i} - n\lambda(\beta)}]]. \end{aligned}$$

Per un cammino S fissato, $e^{\beta \sum_{i=1}^n \omega_{i,S_i} - n\lambda(\beta)} \mathbb{Q}(d\omega)$ è una misura di probabilità. Poichè la funzione $\omega \mapsto (\sum_{i=1}^n \omega_{i,S_i} - n\lambda'(\beta))$ è crescente rispetto a ω , mentre $\phi'(W_n)$ è decrescente, in quanto ϕ è concava per ipotesi, allora per la disuguaglianza FKG

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[\phi'(W_n) (\sum_{i=1}^n \omega_{i,S_i} - n\lambda'(\beta)) e^{\beta \sum_{i=1}^n \omega_{i,S_i} - n\lambda(\beta)}] \\ & \leq \mathbb{E}[\phi'(W_n) e^{\beta \sum_{i=1}^n \omega_{i,S_i} - n\lambda(\beta)}] \mathbb{E}[(\sum_{i=1}^n \omega_{i,S_i} - n\lambda'(\beta)) e^{\beta \sum_{i=1}^n \omega_{i,S_i} - n\lambda(\beta)}] \end{aligned} \quad (1.14)$$

Ma, osserviamo che

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n \omega_{i,S_i} - n\lambda'(\beta) \right) e^{\beta \sum_{i=1}^n \omega_{i,S_i} - n\lambda(\beta)} \right] &= \mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} e^{\beta \sum_{i=1}^n \omega_{i,S_i} - n\lambda(\beta)} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta} \mathbb{E} [e^{\beta \sum_{i=1}^n \omega_{i,S_i} - n\lambda(\beta)}] = \frac{\partial}{\partial \beta} 1 = 0, \end{aligned} \quad (1.15)$$

così (1.12) segue da (1.14) e da (1.15). \square

Possiamo ora dimostrare il teorema.

Dimostrazione teorema. Il teorema è immediata conseguenza del lemma precedente, infatti basta prendere, per esempio, $\phi(x) = x^{\frac{1}{2}}$, funzione concava che verifica le ipotesi del lemma, così la $\sqrt{W_n}$ è non crescente per $\beta \in [0, \infty)$, di conseguenza esiste un β_c che soddisfa la prima affermazione di (1.3.2). \square

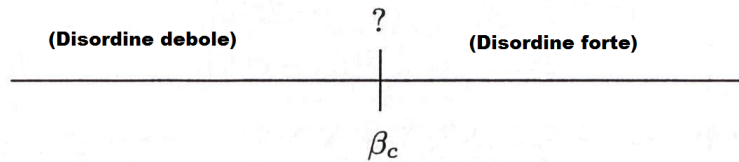


Figura 1.3: Dicotomia fra le due fasi

1.4 Disordine e sovrapposizioni di polimeri

La funzione di partizione normalizzata non è l'unico strumento che ci permette di descrivere la dicotomia tra disordine debole e disordine forte, si possono definire altre quantità, caratteristiche del modello, utile allo studio. Consideriamo lo spazio prodotto $(\Omega^{\otimes 2}, \mathcal{F}^{\otimes 2}) = (\Omega \times \Omega, \mathcal{F} \times \mathcal{F})$ e, ivi, la misura di probabilità prodotto $\mu_{n-1}^{\otimes 2}$. Definiamo

$$I_n := \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} (\mu_{n-1}(S_n = x))^2 = \mu_{n-1}^{\otimes 2}(S_n^{(1)} = S_n^{(2)}) \quad (1.16)$$

come la probabilità che le due copie indipendenti di polimeri, $S^{(1)}$ e $S^{(2)}$, si incontrino al tempo n . Invece,

$$\sum_{j=1}^n I_j$$

denota il numero di sovrapposizioni fino al tempo n di due polimeri indipendenti che vivono nel medesimo ambiente.

Legata a quest'ultima, vi è un'altra quantità che ci dá informazioni su quanto il polimero é localizzato al tempo n in un dato ambiente ω :

$$\max_n^{\beta, \omega} \mu_{n-1}(S_n = x), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.17)$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \max_{x \in \mathbb{Z}^d} \mu_{n-1}(S_n = x)^2 &\leq I_n \\ &\leq \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mu_{n-1}(S_n = x) \max_{x \in \mathbb{Z}^d} \mu_{n-1}(S_n = x) \\ &= \max_{x \in \mathbb{Z}^d} \mu_{n-1}(S_n = x), \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che $\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mu_{n-1}(S_n = x) = 1$. Di conseguenza, vale

$$\max_{x \in \mathbb{Z}^d} \mu_{n-1}(S_n = x)^2 \leq I_n \leq \max_{x \in \mathbb{Z}^d} \mu_{n-1}(S_n = x) \quad (1.18)$$

Quest'ultima relazione risulterà utile in quanto ci permetterà di trarre delle conclusioni riguardo la probabilità dei siti "favoriti" dal polimero, ossia i punti dello spazio $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ con maggiore probabilità di essere visitati, a partire

dalle informazioni sulla convergenza o meno della serie $\sum_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

Diamo la seguente

Definizione 1.2. Diciamo che il polimero è *localizzato* se

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \max_{x \in \mathbb{Z}^d} \mu_{t-1}(S_t = x) > 0 \quad \mathbb{Q} - q.c. \quad (1.19)$$

ed il polimero si dice *delocalizzato* se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \max_{x \in \mathbb{Z}^d} \mu_{t-1}(S_t = x) = 0 \quad \mathbb{Q} - q.c. \quad (1.20)$$

In poche parole, la localizzazione e la delocalizzazione corrispondono al fatto che la probabilità dei siti favoriti tenda a zero oppure no quando $n \rightarrow \infty$.

Capitolo 2

Disordine debole

2.1 Esistenza del disordine debole

In questo capitolo ci occuperemo dello studio del regime di disordine debole, in particolare, mostreremo come la presenza del disordine non produce sulla catena effetti rimarchevoli, infatti il comportamento del polimero non si discosta in maniera rilevante dal comportamento della passeggiata aleatoria semplice (che corrisponde al modello in assenza di disordine). La prima cosa faremo sarà mostrare che la fase di disordine debole esiste, ovvero che risulta $\beta_c > 0$ quando $d \geq 3$. A tale scopo applicheremo il metodo del secondo momento a $(W_N)_{N \geq 0}$, ovvero studieremo $\mathbb{E}[W_N^2]$, determinando la condizione affinché $W_\infty > 0$.

Prima di addentrarci nello studio sistematico dell'argomento, introduciamo alcune peculiarità sulla passeggiata aleatoria.

Carattere diffusivo della passeggiata aleatoria:

Sia $\{S_n\}_{n \geq 0}$ una passeggiata aleatoria come definita in (1.1). Per ogni $n \in \mathbb{N}^0$,

- $\mathbf{E}[S_n] = 0$
- $\mathbf{E}[\|S_n\|^2] = n$

- il processo di riscaldamento diffusivo converge in legge al moto browniano:

$$\left(\frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{n}}\right)_{0 \leq t \leq 1} \Longrightarrow (B_t)_{0 \leq t \leq 1} \quad \text{per } n \rightarrow \infty$$

Premettiamo, inoltre, la seguente notazione:

$$p_d = \mathbf{P}^{\otimes 2}(\exists n \geq 1 : S_n^{(1)} = S_n^{(2)})$$

denota la probabilità che due copie indipendenti di passeggiate aleatorie semplici si incontrino al tempo n . Poiché la differenza di due passeggiate aleatorie $S_n = S_n^{(1)} - S_n^{(2)}$ è ancora una passeggiata aleatoria, allora $p_d = \mathbf{P}(\exists n \in \mathbb{N} : S_n = 0)$ si riduce alla probabilità di ritorno all'origine di S_n al tempo n . Dalla teoria sulle passeggiate aleatorie semplici simmetriche sappiamo che $p_d = 1$ quando $d = 1, 2$, mentre $p_d < 1$ quando $d \geq 3$.

Proposizione 2.1.1. *Supponiamo che $d \geq 3$ e che β sia tale che*

$$\gamma_1(\beta) := \lambda(2\beta) - 2\lambda(\beta) < \ln\left(\frac{1}{p_d}\right) \quad (2.1)$$

allora $W_\infty > 0$ \mathbb{Q} -q.c., in particolare

$$\beta_c \geq \beta_c^1 := \sup\left\{\beta \in [0, \infty) : \gamma_1 < \ln\left(\frac{1}{p_d}\right)\right\}$$

Questa proposizione non solo ci dà una condizione sul parametro β per la sussistenza del regime di disordine debole, ma ci fornisce anche un limite inferiore per il valore della temperatura critica che separa le due fasi.

Dimostrazione. Se facciamo vedere che la condizione (2.1) su β è equivalente ad avere

$$\sup_{N \geq 0} \mathbb{E}[W_N^2] < \infty \quad (2.2)$$

ovvero che la martingala W_N è limitata in L^2 , allora avremo la tesi. Infatti, per il teorema (A.3.1) da (2.2) segue che W_N è uniformemente integrabile, quindi, poiché, $\mathbb{E}[W_n] = \mathbb{E}[W_0]$ (W_n è una martingala), passando al limite per $n \rightarrow \infty$ si trova $\mathbf{E}[W_\infty] = \mathbf{E}[W_0] = 1$. Ciò implica che $\mathbb{Q}(W_\infty > 0) > 0$.

Per (1.9), $W_\infty > 0$ \mathbb{Q} -q.c.

Facciamo vedere la (2.2):

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[W_N^2] &= \mathbb{E}\left[\mathbf{E}^{\otimes 2}\left[e^{\sum_{n=1}^N \beta(\omega_{n,S_n^{(1)}} + \omega_{n,S_n^{(2)}}) - 2\lambda(\beta)}\right]\right] \\
 &= \mathbf{E}^{\otimes 2}\left[\prod_{n=1}^N \mathbb{E}\left[e^{\sum_{n=1}^N \beta(\omega_{n,S_n^{(1)}} + \omega_{n,S_n^{(2)}}) - 2\lambda(\beta)}\right]\right] \\
 &= \mathbf{E}^{\otimes 2}\left[\prod_{n=1}^N \left[\mathbf{1}_{S_n^{(1)} \neq S_n^{(2)}} + e^{\lambda(2\beta) - 2\lambda(\beta)} \mathbf{1}_{S_n^{(1)} = S_n^{(2)}}\right]\right] \\
 &= \mathbf{E}^{\otimes 2}\left[e^{[\lambda(2\beta) - 2\lambda(\beta)] \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{S_n^{(1)} = S_n^{(2)}}}\right]
 \end{aligned}$$

la seconda uguaglianza si ricava applicando il teorema di Fubini-Tonelli e sfruttando l'indipendenza degli ω . La sommatoria nell'ultima riga ci dà il numero di sovrapposizioni delle due copie di polimeri indipendenti $S_n^{(1)}$ e $S_n^{(2)}$ fino al tempo n ; passando al limite per $n \rightarrow \infty$ si trova il numero di sovrapposizioni totali. Osserviamo che $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{S_n^{(1)} = S_n^{(2)}}$ è una variabile aleatoria con distribuzione geometrica di parametro p_d , perciò

$$\mathbf{P}^{\otimes 2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{S_n^{(1)} = S_n^{(2)}} = k\right) = (1 - p_d)p_d^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

inoltre

$$\lambda(2\beta) - 2\lambda(\beta) < \ln\left(\frac{1}{p_d}\right) \Leftrightarrow e^{\lambda(2\beta) - 2\lambda(\beta)} p_d < 1.$$

Per il teorema sulla convergenza dominata, si ha

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[W_N^2] = \mathbf{E}\left[e^{[\lambda(2\beta) - 2\lambda(\beta)] \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{S_n^{(1)} = S_n^{(2)}}}\right],$$

allora

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[W_N^2] < \infty \quad \Leftrightarrow \quad e^{\lambda(2\beta) - 2\lambda(\beta)} p_d < 1.$$

□

Osservazione 3. Osserviamo che la funzione $\beta \rightarrow \gamma_1(\beta)$ è crescente su $[0, \infty)$, in quanto $\gamma_1'(\beta) = 2(\lambda'(2\beta) - \lambda'(\beta))$ e λ è strettamente crescente; inoltre $\gamma_1(0) = 0$. Ora, poiché $p_d < 1$ per $d \geq 3$, la condizione (2.1) è valida quando β è piccolo.

Esempio 2.1. Consideriamo l'ambiente con distribuzione di Bernoulli. Abbiamo visto che in tal caso $\lambda(\beta) = \ln(pe^{-\beta} + (1-p)e^{\beta})$, perciò

$$\begin{aligned}\gamma_1(\beta) &= \ln(pe^{-2\beta} + (1-p)e^{2\beta}) - 2\ln(pe^{-\beta} + (1-p)e^{\beta}) \\ &= \ln[e^{2\beta}(pe^{-4\beta} + (1-p))] - 2\ln[e^{\beta}(pe^{-2\beta} + (1-p))] \\ &= 2\beta + \ln(pe^{-4\beta} + (1-p)) - 2\beta - 2\ln(pe^{-2\beta} + (1-p)),\end{aligned}$$

in definitiva

$$\lim_{\beta \nearrow \infty} \gamma_1 = -\ln(1-p).$$

Ne consegue che la condizione (2.1) è soddisfatta per tutti i $\beta \geq 0$ per cui $-\ln(1-p) < \ln(\frac{1}{p_d})$, cioè per $p < 1 - p_d$.

Esempio 2.2. Consideriamo l'ambiente con distribuzione normale standard. Risulta $\lambda(\beta) = \frac{1}{2}\beta^2$, quindi $\gamma_1(\beta) = \beta^2$. La condizione (2.1) è soddisfatta quando $\beta^2 < \ln(\frac{1}{p_d})$, cioè per $\beta < \sqrt{\ln(\frac{1}{p_d})}$.

2.2 Diffusività delle traiettorie

Enunciamo ora il principale risultato di questo capitolo, il quale afferma che nella fase di disordine debole, su larga scala, le traiettorie del polimero si comportano come le traiettorie del moto Browniano.

Teorema 2.2.1. *Quando $W_\infty > 0$, allora, per ogni realizzazione dell'ambiente ω , il processo di riscaldamento diffusivo*

$$S^{(n)} = \left(\frac{S_{[Nt]}}{\sqrt{N}} \right)_{t \in [0,1]} \quad (2.3)$$

rispetto alla misura μ_N , converge debolmente in legge alla legge \mathcal{P} del moto Browniano d -dimensionale $B_{t \in [0,1]}$ con matrice di covarianza $\frac{1}{d}I$, dove I è la matrice identità in \mathbb{Z}^d .

Per semplicità, il teorema non viene dimostrato direttamente per la misura dei polimeri $\mu_N^{\beta, \omega}$, bensì per una sua versione media, $\mathbb{E}\mu_N$, ottenuta dopo aver integrato su tutto l'ambiente; ma, soprattutto, la sua dimostrazione si ricava dal teorema di Donsker sulle passeggiate aleatorie semplici in \mathbb{Z}^d :

Teorema 2.2.2 (Teorema di Donsker).

Rispetto a \mathbf{P} , la successione di processi $S^{(n)}$ converge in legge alla legge \mathcal{P} del moto Browniano $B = (B_t)_{0 \leq t \leq 1}$ con matrice di covarianza $d^{-1}I$. Più precisamente, per ogni funzione continua e limitata $A \in \mathcal{C}([0, 1])$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[A(S^{(n)})] = \mathcal{E}[A(B)]$$

dove \mathcal{E} denota l'aspettazione rispetto alla legge di B .

2.2.1 Comportamento asintotico della misura μ_N

Vogliamo definire una misura di probabilità μ che descriva il comportamento asintotico della misura dei polimeri μ_N . Il modo più naturale di definire μ per ogni insieme $A \in \mathcal{F}$ sarebbe

$$\mu_\infty(A) := \lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N(A) = \frac{1}{W_\infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{E}[e^{\beta \sum_{n=1}^N \omega_{n,S_n} - N\lambda(\beta)} \mathbf{1}_{S \in A}]$$

Il problema di questa definizione risiede nel fatto che possiamo sì affermare che questo limite è ben definito grazie alla convergenza di W_N , ma non si può altresì affermare che μ_∞ è una misura di probabilità, in quanto non si riesce a far vedere la σ -additività nel passaggio al limite.

La misura μ viene quindi costruita nella maniera che segue.¹

Sia $x \in \mathbb{Z}^d$ e \mathbf{P}^x la legge della passeggiata aleatoria semplice in \mathbb{Z}^d che parte dal punto x . Definiamo l'operatore di traslazione $\theta_{n,x}$ come

$$\theta_{n,x} \omega_{t,y} = \omega_{n+t,x+y} \tag{2.4}$$

Dalla definizione di W_N , si ha inoltre

$$W_N \circ \theta_{0,x} = \mathbf{E}^x [e^{\beta \sum_{n=1}^N \omega_{n,S_n} - N\lambda(\beta)}]$$

da cui

$$W_N \circ \theta_{0,x} = \mathbf{E}^x [e^{\beta \omega_{1,S_1} - \lambda(\beta)} W_{N-1} \circ \theta_{1,S_1}]$$

¹Seguiamo la trattazione dell'argomento che è stata introdotta da Comets e Yoshida in [4]

e, passando al limite per $n \rightarrow \infty$,

$$W_\infty \circ \theta_{0,x} = \mathbf{E}^x [e^{\beta\omega_{1,S_1} - \lambda(\beta)} W_\infty \circ \theta_{1,S_1}].$$

La misura di probabilità μ_N risulta una catena di Markov con probabilità di transizione definite da

$$\mu_N(S_{i+1} = y | S_i = x) = \frac{e^{\beta\omega_{i+1,y} - \lambda(\beta)} W_{N-i-1} \circ \theta_{i+1,y} \mathbf{P}(S_1 = y | S_0 = x)}{W_{N-1} \circ \theta_{i,x}}$$

per $0 \leq i \leq N$, e $\mu_N(S_{i+1} = y | S_i = x) = \mathbf{P}(S_1 = y | S_0 = x)$ per $i \geq N$. Infatti, per ogni cammino $x_{[0,m]} = (x_0, \dots, x_m)$ che parte dall'origine e che é di lunghezza $m \leq N$, vale

$$\mu_N(S_{[0,m]} = x_{[0,m]}) = e^{\beta \sum_{n=1}^m \omega_{n,S_n} - m\lambda(\beta)} \frac{W_{N-m} \circ \theta_{m,x_m} \mathbf{P}(S_{[0,m]} = x_{[0,m]})}{W_N} \quad (2.5)$$

Nel regime di disordine debole si definisce μ come la misura di probabilità con probabilità di transizione

$$\mu(S_{i+1} = y | S_i = x) = \frac{e^{\beta\omega_{i+1,y} - \lambda(\beta)} W_\infty \circ \theta_{i+1,y} \mathbf{P}(S_1 = y | S_0 = x)}{W_\infty \circ \theta_{i,x}} \quad (2.6)$$

Osservazione 4. La misura μ appena introdotta costituisce un elemento caratterizzante esclusivamente il regime di disordine debole, non esiste un analogo per il disordine forte.

La seguente proposizione ci dice in che relazione stanno fra loro μ_∞ e μ .

Proposizione 2.2.3. *Assumiamo di essere nella fase di disordine debole.*

Allora

$$\mu(A) = \mu_\infty(A) \quad \mathbb{Q} - q.s. \quad \text{per } A \in \cup_{n \geq 1} \mathcal{F}_n. \quad (2.7)$$

Da cui segue

$$\mathbb{Q} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N = \mu \quad \text{debolmente} \right) = 1. \quad (2.8)$$

Inoltre,

$$\mathbb{E}\mu(A) = \mathbb{E}\mu_\infty(A), \quad \forall A \in \mathcal{F}_\infty \quad (2.9)$$

$$\mathbf{P} \ll \mathbb{E}\mu \ll \mathbf{P} \quad \text{su } \mathcal{F}_\infty. \quad (2.10)$$

Per dimostrare questa proposizione serve il seguente lemma

Lemma 2.2.4. *Sia $(A_{M,N})_{M,N \geq 1} \subset \mathcal{F}_\infty$ tale che $\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_N \mathbf{P}(A_{M,N}) = 0$.*

Allora

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sup_N \mathbb{E} \mu_N(A_{M,N}) = 0$$

In poche parole, il lemma ci dice che $\mathbb{E} \mu_N$ é assolutamente continua rispetto a \mathbf{P} ($\mathbb{E} \mu_N \ll \mathbf{P}$).

Dimostrazione. Sia $\delta > 0$, allora possiamo scrivere

$$\mathbb{E} \mu_N(A_{M,N}) \leq \mathbb{E}[\mu_N(A_{M,N}) \mathbf{1}_{W_N \geq \delta}] + \mathbb{E}[W_N \leq \delta]$$

Se facciamo vedere che entrambi gli addendi al secondo membro della disequazione si annullano, allora avremo la tesi.

Ora,

$$\begin{aligned} \sup_N \mathbb{E}[\mu_N(A_{M,N}) \mathbf{1}_{W_N \geq \delta}] &\leq \delta^{-1} \sup_N \mathbb{E}[W_N \mu_N(A_{M,N})] \\ &= \delta^{-1} \sup_N \mathbf{P}(A_{M,N}) \end{aligned}$$

Per l'ipotesi, $\sup_N \mathbf{P}(A_{M,N}) \rightarrow 0$ per $M \rightarrow \infty$. D'altra parte, per la convergenza di W_N a W_∞

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_N \mathbb{E}[W_N \leq \delta] = 0$$

il che conclude la nostra tesi. □

Passiamo alla dimostrazione della proposizione (2.2.3)

Dimostrazione. La (2.7) segue immediatamente da (2.5). La (2.8) a sua volta segue da (2.7).

Per quel che riguarda la (2.9), osserviamo che $\mathbb{E} \mu$ e $\mathbb{E} \mu_\infty$ coincidono su ogni \mathcal{F}_n , e quindi su \mathcal{F}_∞ .

Infine, con il lemma sopra abbiamo mostrato che $\mathbb{E} \mu \ll \mathbf{P}$, perciò rimane da far vedere il viceversa, ovvero che $\mathbf{P} \ll \mathbb{E} \mu$. Supponiamo che $\mathbb{E} \mu(A) = \mathbb{E} \mu_\infty(A) = 0$. Allora deve essere $\mu_\infty(A) = 0$ q.c. e $\mu_N(A) \rightarrow 0$ q.c. Da cui

$W_N \mu_N \rightarrow 0$ q.c. e, poiché W_N é uniformemente integrabile, anche $W_N \mu_N$ lo é. Inoltre, $W_N \mu_N(A)$ tende a zero in $L^1(\mathbb{Q})$, quindi

$$\mathbf{P}(A) = \mathbb{E}[W_N \mu_N(A)] \rightarrow 0.$$

□

Disponiamo ora delle nozioni e definizioni utili a dimostrare la diffusivit  delle traiettorie che ci eravamo posti come obiettivo.

Proposizione 2.2.5. *Il teorema di Donsker vale anche quando si sostituisce \mathbf{P} con \mathbf{P}' assolutamente continua rispetto a \mathbf{P} .*

Per dimostrare questa proposizione é utile la

Proposizione 2.2.6. *Sia $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie che risultano i.i.d rispetto alla misura di probabilit  $P = Q^{\otimes N}$ su $(\mathbb{R}^d)^N$. Sia poi P' una misura di probabilit  assolutamente continua rispetto a Q , e P_k e P'_k leggi di $(X_n)_{n \geq k}$. Allora la variazione totale della distanza fra le misure P_k e P'_k tende a zero.*

Ricordiamo la seguente:

Definizione 2.1. Si definisce variazione totale della distanza tra due misure di probabilit  P e P' sulla σ -algebra \mathcal{F}_n come

$$\|P - P'\|_{\mathcal{F}_n} := \sup_{A \in \mathcal{F}_n} |P(A) - P'(A)|$$

Dimostrazione. Dalla proposizione (2.2.6), P e P' possono esser dati tali che, dato ϵ , se k é abbastanza grande, $(S_n - S_k)_{n \geq k}$ e $(S'_n - S'_k)_{n \geq k}$ coincidono con probabilit  $1 - \epsilon$. Di conseguenza la probabilit  che $\|S^{(n)} - S'^{(n)}\|_{\infty} \geq \frac{k}{\sqrt{n}}$ é minore di ϵ . La convergenza di $S^{(n)}$ e l'arbitrariet  di ϵ danno la tesi. □

Proposizione 2.2.7. *Nella fase di disordine debole risulta*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_n \mathbb{E}[\|\mu_{n+k} - \mu\|_{\mathcal{F}_n}] = 0$$

Dimostrazione. Innanzitutto, poniamo $\zeta_n = e^{\beta \sum_{i=1}^n \omega_{i,S_i} - n\lambda(\beta)}$. Osserviamo che, preso $\delta > 0$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|\mu_{n+k} - \mu| | \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[|\mu_{n+k} - \mu| | \mathcal{F}_n (\mathbf{1}_{W_\infty > \delta} + \mathbf{1}_{W_\infty \leq \delta})] \\ &\leq \delta^{-1} \mathbb{E}[W_\infty | \mu_{n+k} - \mu | | \mathcal{F}_n] + 2\mathbb{E}[W_\infty \leq \delta]. \end{aligned}$$

Facciamo vedere che

$$\sup_n \mathbb{E}[W_\infty | \mu_{n+k} - \mu | | \mathcal{F}_n] \rightarrow 0 \quad \text{per } k \rightarrow \infty$$

Dalle definizioni di μ e μ_n , per $n, k \geq 0$, si ha

$$\begin{aligned} W_\infty | \mu_{n+k} - \mu | | \mathcal{F}_n &= W_\infty \mathbf{E} \left[\zeta_n \left| \frac{W_k \circ \theta_{n,S_n}}{W_{n+k}} - \frac{W_\infty \circ \theta_{n,S_n}}{W_\infty} \right| \right] \\ &= \frac{1}{W_{n+k}} \mathbf{E}[\zeta_n | W_\infty W_k \circ \theta_{n,S_n} - W_{n+k} W_\infty \circ \theta_{n,S_n}] \\ &\leq |W_\infty - W_{n+k}| + \mathbf{E}[\zeta_n | W_k \circ \theta_{n,S_n} - W_\infty \circ \theta_{n,S_n}]. \end{aligned}$$

Da cui

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbf{E}[\zeta_n | W_k \circ \theta_{n,S_n} - W_\infty \circ \theta_{n,S_n}]] &= \mathbb{E}[\mathbf{E}[\zeta_n | |W_k \circ \theta_{n,S_n} - W_\infty \circ \theta_{n,S_n}| | \mathbb{G}_n]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{E}[\zeta_n | |W_k - W_\infty| | L^1(Q)]] \\ &= ||W_k - W_\infty||_{L^1(Q)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

la prima uguaglianza si ottiene dalle proprietà dell'aspettazione condizionata rispetto alla σ -algebra \mathbb{G}_n , la seconda dall'invarianza del valor atteso rispetto alle traslazioni e l'ultima dalla convergenza in $L^1(Q)$ di W_k .

Infine, osserviamo che

$$\mathbb{E}[|W_\infty - W_{n+k}|] \rightarrow 0 \quad \text{per } k \rightarrow \infty,$$

il che conclude la tesi. □

Dalle proposizioni (2.2.3) e (2.2.5) si deduce che il polimero rispetto alla misura μ si comporta q.c. come una passeggiata aleatoria semplice, quindi in modo diffusivo.

2.3 Delocalizzazione

Finora abbiamo trattato l'aspetto della diffusività delle traiettorie delle catene polimeriche che caratterizza il regime di disordine debole, esso non é però l'unico aspetto che risulta rilevante in questa fase, si verifica infatti un fenomeno di delocalizzazione dei monomeri che compongono la catena.

Teorema 2.3.1. *Nella fase di disordine debole, $W_\infty > 0$, si ha*

$$\sum_{n=1}^{\infty} I_n < \infty, \quad \mathbb{Q} - q.c. \quad (2.11)$$

Vedremo la dimostrazione rigorosa di questo risultato nel prossimo capitolo; per il momento lo assumeremo come vero.

Proposizione 2.3.2. *Se $\mathbb{Q}(W_\infty > 0)$, allora*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0, \quad \mathbb{Q} - q.c. \quad (2.12)$$

Supponiamo che valga la condizione su β (2.1), ossia $\lambda(2\beta) - \lambda(\beta) < \ln(1 - p_d)$. Allora, esiste una costante $c > 0$ tale che

$$I_n = O(n^{-c}) \quad (2.13)$$

rispetto alla probabilità \mathbb{Q} .

Dimostrazione. La (2.12) segue immediatamente da (2.11). Dimostriamo quindi la seconda affermazione del teorema. Poiché abbiamo visto che la condizione su β equivale alla limitatezza in L^2 della martingala W_∞ , ci basta far vedere che

$$W_{n-1}^2 I_n = O(n^{-c})$$

rispetto alla probabilità \mathbb{Q} .

Risulta:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_{n-1}^2 I_n] &= \mathbb{E}[\mathbf{E}[e^{\sum_{j=1}^{n-1} \beta(\omega_{j,S_j^{(1)}} + \omega_{j,S_j^{(2)}}) - 2\lambda\beta} : S_n^{(1)} = S_n^{(2)}]] \\ &= \mathbf{E}^{\otimes 2}[\mathbb{E}[e^{\sum_{j=1}^{n-1} \beta(\omega_{j,S_j^{(1)}} + \omega_{j,S_j^{(2)}}) - 2\lambda\beta} : S_n^{(1)} = S_n^{(2)}]] \\ &= \mathbf{E}^{\otimes 2}[e^{\gamma \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{1}_{S_j^{(1)} = S_j^{(2)}}} : S_n^{(1)} = S_n^{(2)}] \\ &= \mathbf{E}^{\otimes 2}[e^{\alpha\gamma \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{1}_{S_j^{(1)} = S_j^{(2)}}}]^{\frac{1}{\alpha}} \mathbf{E}^{\otimes 2}[S_n^{(1)} = S_n^{(2)}]^{\frac{1}{\alpha}}, \end{aligned}$$

abbiamo usato il teorema di Fubini nella seconda uguaglianza, mentre nella diseuguaglianza finale abbiamo sfruttato la diseuguaglianza di Hölder con esponenti coniugati α e α' . Osserviamo che la sommatoria $\sum_{j \geq 1} \mathbf{1}_{S_j^{(1)}=S_j^{(2)}}$ é una v.a. con distribuzione geometrica di parametro p_d . Consideriamo i due termini a secondo membro della disequazione finale: il primo termine risulta limitato se l'esponente $\alpha\gamma < -\ln(1-p_d)$, per come sono stati scelti α e γ ; per quel che riguarda il secondo termine, per la proprietá della passeggiata aleatoria simmetrica, esso é $O(n^{\frac{d}{2\alpha'}})$. Di conseguenza, si ottiene la tesi scegliendo la costante positiva $c < -\frac{d}{2\alpha'}$, ovvero, dopo una serie di calcoli, $c < d[1 + \frac{\gamma}{\ln(1-p_d)}]/2$. \square

Per finire, enunciamo il seguente

Teorema 2.3.3. *Supponiamo che $d \geq 3$ e che β sia tale che valga la condizione (2.1). Allora*

$$\sum_{n \geq 1} \max_{x \in \mathbb{Z}^d} \mu_{n-1}(S_n = x)^2 < \infty, \quad \mathbb{Q} - q.c. \quad (2.14)$$

Inoltre,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{n-1}(S_n = x) = 0, \quad \mathbb{Q} - q.c. \quad (2.15)$$

Dimostrazione. La dimostrazione segue dal teorema precedente e dalla relazione (1.18). Poiché $W_\infty > 0$, è verificata l'unica ipotesi del teorema (2.3.1), ne consegue che

$$\sum_{n=1}^{\infty} I_n < \infty, \quad \mathbb{Q} - q.c.$$

Da (1.18) si deduce la (2.14), da cui a sua volta segue la (2.15). \square

Questo teorema ci dice che in caso di disordine debole non esistono punti dello spazio privilegiati, anzi la probabilità che il polimero raggiunga i siti con piú alta probabilità tende a zero per n che tende all'infinito. In particolare, dalla definizione (1.20) segue che nella fase di disordine debole il polimero è delocalizzato.

Osservazione 5. Ricordiamo che nel caso della passeggiata aleatoria semplice (caso $\beta = 0$) vale

$$\max_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbf{P}(S_n = x) = O(n^{-\frac{d}{2}}) \text{ per } n \rightarrow \infty$$

il che significa che la tipica posizione di S_n si trova su una palla in \mathbb{Z}^d di raggio $c\sqrt{n}$, dove c è una costante positiva.

Capitolo 3

Disordine forte

3.1 Localizzazione delle traiettorie

In questo capitolo analizziamo la fase di disordine forte, caratterizzato dalla convergenza $W_N \rightarrow 0$ per $N \rightarrow \infty$ rispetto alla misura di probabilità \mathbb{Q} .

Abbiamo visto che nel regime di disordine debole le traiettorie della catena polimerica hanno un comportamento diffusivo, perciò la presenza di molecole idrofobe non ne altera in modo rilevante l'andamento rispetto al caso in cui non siano presenti impurità. Al contrario, quando il disordine è forte si osserva un cambiamento drastico del comportamento della catena, caratterizzata da un fenomeno di localizzazione delle traiettorie e dal fatto che il polimero predilige i punti del reticolo maggiormente probabili.

Teorema 3.1.1. *Assumiamo $\beta \neq 0$. Allora,*

$$\{W_\infty = 0\} = \left\{ \sum_{n \geq 1} I_n = \infty \right\}, \quad \mathbb{Q} - q.c.. \quad (3.1)$$

Inoltre, in caso di disordine forte, ossia quando $\mathbb{Q}(W_\infty = 0) = 1$, esistono due costanti $c_1, c_2 \in (0, \infty)$ tali che

$$-c_1 \ln W_n \leq \sum_{1 \leq i \leq n} I_i \leq -c_2 \ln W_n \quad \mathbb{Q} - q.c. \quad (3.2)$$

per n abbastanza grande.

Di conseguenza, nel regime di disordine forte la media delle sovrapposizioni delle traiettorie di due polimeri diventa infinitamente grande, il che si traduce nella localizzazione dei cammini rispetto a μ_n .

Premettiamo un lemma che sarà utile alla dimostrazione:

Lemma 3.1.2. ¹ Sia X_i , $1 \leq i \leq m$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. non costanti e di quadrato integrabile sullo spazio di probabilità $(\mathbb{H}, \mathbb{G}, \mathbb{Q})$ tale che

$$\mathbb{E}[e^{X_1}] = 1, \quad \mathbb{E}[e^{4X_1}] < \infty.$$

Per una distribuzione di probabilità $\{\alpha_i\}_{1 \leq i \leq m}$ su $\{1, \dots, m\}$, definiamo una variabile aleatoria $U > -1$ da

$$U = \sum_{1 \leq i \leq m} \alpha_i e^{X_i} - 1$$

Allora, esiste una costante $c \in (0, \infty)$, indipendente da $\{\alpha_i\}_{1 \leq i \leq m}$ tale che

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \sum_{1 \leq i \leq m} \alpha_i^2 &\leq \mathbb{E} \left[\frac{U^2}{2+U} \right], \\ \frac{1}{c} \sum_{1 \leq i \leq m} \alpha_i^2 &\leq -\mathbb{E}[\ln(1+U)] \leq c \sum_{1 \leq i \leq m} \alpha_i^2, \\ \mathbb{E}[\ln^2(1+U)] &\leq c \sum_{1 \leq i \leq m} \alpha_i^2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Osservazione 6. Se X è una martingala di quadrato integrabile, allora il compensatore del processo $X^2 = \{(X_n)^2\}_{n \geq 0}$ è tale che

$$\Delta \langle X \rangle_n = \mathbb{E}_{n-1}^\omega [\Delta (X_n)^2].$$

Dimostrazione teorema. Innanzitutto, per una arbitraria successione $(a_n)_{n \geq 0}$, ne indichiamo l'incremento al tempo n con $\Delta a_n = a_n - a_{n-1}$ per $n \geq 1$. Ricordiamo che \mathcal{G}_n indica la σ -algebra generata dalle v.a. $\{\omega_{j,x} : 1 \leq j \leq n, x \in \mathbb{Z}^d\}$. Infine, denotiamo con \mathbb{E}_n^ω l'attesa condizionata rispetto alla σ -algebra \mathcal{G}_n .

¹Per la dimostrazione rimandiamo a [5].

La dimostrazione del teorema si basa sulla decomposizione di Doob (si veda il teorema (A.4.1) in Appendice) del processo stocastico $X_n = -\ln W_n = M_n + A_n$, dove A_n è tale che

$$\Delta A_n = \mathbb{E}_{n-1}^\omega[\Delta X_n], \quad n \geq 1.$$

Infatti:

$$\mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}_{n-1}] = \mathbb{E}[M_n | \mathcal{G}_{n-1}] + \mathbb{E}[A_n | \mathcal{G}_{n-1}] = M_{n-1} + A_n = X_{n-1} - A_{n-1} + A_n,$$

dove abbiamo prima usato la linearità dell'attesa condizionata e poi il fatto che M_n è una martingala e A_n è un processo prevedibile (A_n è \mathcal{G}_{n-1} -misurabile).

Risulta:

$$\begin{aligned} \frac{W_n}{W_{n-1}} &= e^{-\lambda(\beta)} \frac{Z_n}{Z_{n-1}} \\ &= \sum_{\omega:|\omega|=n} \frac{e^{\beta \sum_{i=1}^n \omega_i s_i - \lambda(\beta)}}{2d^n} \frac{1}{Z_{n-1}}. \\ &= \sum_{\omega:|\omega|=n} \frac{e^{\beta \omega_n s_n - \lambda(\beta)}}{2d} \frac{e^{\beta \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i s_i}}{(2d)^{n-1}} \frac{1}{Z_{n-1}}. \end{aligned}$$

Per la definizione della misura dei polimeri (1.4), si ha

$$\begin{aligned} \frac{W_n}{W_{n-1}} &= \sum_{\omega:|\omega|=n-1} e^{\beta \omega_n s_n - \lambda(\beta)} \mu_{n-1}(\omega) \\ &= \mathbf{E}_{\mu_{n-1}}[e^{\beta \omega_n s_n - \lambda(\beta)}]. \end{aligned}$$

dove $\mathbf{E}_{\mu_{n-1}}$ indica l'aspettazione rispetto alla misura dei polimeri (1.4).

Definiamo la v.a U_n in modo tale che

$$\frac{W_n}{W_{n-1}} = 1 + U_n \tag{3.4}$$

Ora,

$$-\ln W_n = -\ln W_{n-1} - \ln(1 + U_n)$$

da cui

$$\Delta A_n = \mathbb{E}_{n-1}^\omega[\Delta X_n] = \mathbb{E}_{n-1}^\omega[\ln(1 + U_n)]$$

e

$$\Delta M_n = -\ln W_n - \Delta A_n - \ln W_{n-1} = \ln(1 + U_n) - \mathbb{E}_{n-1}^\omega[\ln(1 + U_n)].$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \Delta \langle M \rangle_n &= \mathbb{E}[(M_n - M_{n-1})^2 | \mathcal{G}_{n-1}] \\ &= \mathbb{E}[(\ln(1 + U_n) - \mathbb{E}[\ln(1 + U_n) | \mathcal{G}_{n-1}])^2 | \mathcal{G}_{n-1}] \\ &= \mathbb{E}[\ln^2(1 + U_n) | \mathcal{G}_{n-1}] + (\mathbb{E}[\ln(1 + U_n) | \mathcal{G}_{n-1}])^2 - 2(\mathbb{E}[\ln(1 + U_n) | \mathcal{G}_{n-1}])^2 \\ &= \mathbb{E}[\ln^2(1 + U_n) | \mathcal{G}_{n-1}] - (\mathbb{E}[\ln(1 + U_n) | \mathcal{G}_{n-1}])^2 \\ &\leq \mathbb{E}[\ln^2(1 + U_n) | \mathcal{G}_{n-1}] \end{aligned}$$

Esiste una costante positiva $c \in (0, \infty)$ per cui valgono le seguenti due relazioni:

$$\frac{1}{c} I_n \leq \Delta A_n \leq c I_n \tag{3.5}$$

$$\Delta \langle M \rangle_n \leq I_n.$$

Infatti, preso $\{X_i\} = \{\beta\omega(z, n) - \lambda(\beta)\}_{|z| \leq n}$, $\{\alpha_i\} = \{\mu_{n-1}(S_n = z)\}_{|z| \leq n}$ e $\mathbb{E} = \mathbb{E}_{n-1}^\omega$ nel lemma (3.1.2) si trova

$$\Delta \langle M \rangle_n \leq \mathbb{E}_{n-1}^\omega \ln^2(1 + U_n) \leq c I_n$$

$$\frac{1}{c} I_n \leq \mathbb{E}_{n-1}^\omega [-\ln(1 + U_n)] \leq c I_n$$

Dalle due disequazioni appena dimostrate segue che

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{n \geq 1} I_n < \infty \right\} &= \{A_\infty < \infty\} \\ &\subset \{A_\infty < \infty, \langle M \rangle_\infty < \infty\} \\ &\subset \{A_\infty < \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} M_n \text{ esiste}\} \\ &\subset \{W_\infty > 0\} \end{aligned}$$

dove, nella seconda inclusione abbiamo usato il teorema (A.4.2). Abbiamo così dimostrato che

$$\{W_\infty = 0\} \subset \left\{ \sum_{n \geq 1} I_n = \infty \right\}, \quad \mathbb{Q} - q.c.$$

il che basta per concludere (3.1). Ora rimane da far vedere che vale (3.2); per far ciò basta dimostrare che esistono due costanti $c_1, c_2 \in (0, \infty)$ tali che

$$\left\{ \sum_{n \geq 1} I_n = \infty \right\} \subset \left\{ -c_1 \ln W_n \leq \sum_{1 \leq j \leq n} I_j \leq -c_2 \ln W_n \right\}, \quad (3.6)$$

per n abbastanza grande. Poiché $\left\{ \sum_{k \geq 1} I_k = \infty \right\} = \{A_\infty = \infty\}$, se facciamo vedere che

$$\{A_\infty = \infty\} \subset \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln W_n}{A_n} = 1 \right\}.$$

otterremo (3.6). Supponiamo che $A_\infty = \infty$. Se $\langle M \rangle_\infty < \infty$, allora, ancora per il teorema (A.4.2) in Appendice, esiste finito il limite di W_n al tendere di n all'infinito, quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln W_n}{A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{M_n}{A_n} + 1 \right\} = 1.$$

D'altra parte, se $\langle M \rangle_\infty = \infty$ possiamo scrivere

$$\frac{-\ln W_n}{A_n} = \frac{M_n}{\langle M \rangle_n} \frac{\langle M \rangle_n}{A_n} + 1.$$

Ora mostriamo che Per (3.5), si ha

$$\frac{\langle M \rangle_n}{M_n} \leq c^2,$$

mentre, per il teorema (A.4.3) in Appendice

$$\frac{M_n}{\langle M \rangle_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

quando $\langle M \rangle_\infty = \infty$, il che conclude la nostra dimostrazione. \square

Corollario 3.1.3. *Assumiamo $\beta \neq 0$. Sia a_n una arbitraria successione tale che $a_n \nearrow \infty$. Le seguenti affermazioni sono fra loro equivalenti e ciascuna di esse implica il disordine forte:*

(1) *Esiste una costante $\tau > 0$ tale che*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{a_n} \ln W_n \geq \tau, \quad \mathbb{Q} - q.c. \quad (3.7)$$

(2) Esiste una costante $\tau > 0$ tale che

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n I_k \geq \tau, \quad \mathbb{Q} - q.c. \quad (3.8)$$

Dimostrazione. Supponiamo che valga (3.7), allora $-\frac{1}{a_n} \ln W_n \geq \frac{\tau}{2}$ per n abbastanza grande. Quindi,

$$W_n \leq e^{-\frac{\tau}{2} a_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

cioè vale il disordine forte. Dalla relazione (3.2) si ottiene

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n I_k \geq -\frac{1}{c_1} \frac{1}{a_n} \ln W_n \geq \frac{\tau}{2c_1}$$

che non è altro che (3.8). Dimostriamo ora l'implicazione inversa. Supponiamo che valga (3.7), allora

$$\sum_{k=1}^n I_k \geq a_n \frac{1}{c_1} \frac{\tau}{2},$$

dall'ipotesi sulla successione a_n segue che $\sum_{k=1}^{\infty} I_k = \infty$, quindi di nuovo vale il disordine forte. Considerando di nuovo la relazione (3.2), si ha

$$-\frac{1}{a_n} \ln W_n \geq \frac{1}{a_n} c_2 \sum_{k=1}^n I_k \geq c_2 \tau$$

per n abbastanza grande, quindi vale (3.7). \square

Corollario 3.1.4. *Se assumiamo che valga la (3.8) del corollario precedente con successione $a_n = n$, allora*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} I_n \geq \tau > 0 \quad \mathbb{Q} - q.c.$$

Dimostrazione. Il corollario segue immediatamente da (3.8). \square

3.2 Metodo dei momenti frazionari

Per far vedere la convergenza $W_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, è possibile utilizzare il metodo dei *momenti frazionari* della funzione di partizione normalizzata, ossia mostrare che tende a zero $\mathbb{E}[W_n^\theta]$ per $0 < \theta < 1$.

Proposizione 3.2.1. *Supponiamo che esista una costante $c \in (0, \infty)$, un $\theta \in (0, 1)$ ed una successione $a_n \nearrow \infty$ tali che*

$$\mathbb{E}[W_n^\theta] \leq ce^{-a_n}, \quad n \geq 1 \quad (3.9)$$

Allora vale il regime di disordine forte. Inoltre, se a_n soddisfa

$$\sum_{n \geq 1} e^{-\delta a_n} < \infty$$

per qualche $\delta \in (0, 1)$, allora valgono entrambe le condizioni del corollario (3.1.3).

Dimostrazione. Assumiamo che valga la (3.9). Allora, per il Lemma di Fatou, abbiamo

$$\mathbb{E}[W_\infty^\theta] = \mathbb{E}[\liminf_{n \rightarrow \infty} W_n^\theta] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[W_n^\theta] \leq ae^{-a_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Perciò, $\mathbb{Q}(W_\infty^\theta = 0) = 1$, di conseguenza anche la $\mathbb{Q}(W_\infty = 0) = 1$, cioè abbiamo dimostrato che vale il disordine forte. Supponiamo che sia verificata anche la (3.2.1). Poniamo $A_n := \{-\frac{1}{a_n} \ln W_n < \tau\}$, dove τ è tale che $1 - \tau\theta > \delta$. Si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(A_n) &= \mathbb{Q}\left(-\frac{1}{a_n} \ln W_n < \tau\right) = \mathbb{Q}(W_n^\theta > e^{-\tau\theta a_n}) \leq \\ &\leq \frac{1}{e^{-\tau\theta a_n}} \mathbb{E}[W_n^\theta] \leq ae^{-\tau\theta a_n} e^{\delta a_n} \leq ae^{-\delta a_n}, \end{aligned}$$

dove nella prima disuguaglianza abbiamo applicato la disuguaglianza di Markov² sulle v.a. non negative, e nell'ultima l'ipotesi (3.9). Ora, grazie al Lemma di Borel Cantelli, da queste disequazioni segue che $\mathbb{Q}(\limsup_n A_n) = 0$, che non è altro che la condizione (3.7) del corollario (3.1.3). \square

²*Disuguaglianza di Markov:* Se X è una v.a. non negativa avente valore atteso $\mathbb{E}[X]$, allora per $k > 0$ vale $\mathbb{P}(X \geq k) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{k}$.

Nel primo capitolo avevamo detto che a basse dimensioni ($d = 1, 2$) e per qualsiasi valore della temperatura non nulla, non esiste una transizione di fase, cioè il valore della temperatura critica $\beta_c = 0$, perciò esiste soltanto la fase di disordine forte. Il prossimo risultato ci permette di provare tale affermazione.

Teorema 3.2.2. *In dimensione $d = 1, 2$, vale il regime di disordine forte per ogni $\beta > 0$. Più precisamente, vale la (3.9) con*

$$a_n = \begin{cases} c_1 n^{\frac{1}{3}} & \text{se } d = 1 \\ c_2 \sqrt{\ln n} & \text{se } d = 2 \end{cases} \quad (3.10)$$

dove $c_1, c_2 \in (0, \infty)$. In particolare, per \mathbb{Q} -q.c.,

$$W_n \begin{cases} = O\left(e^{-\frac{c_1}{2} n^{\frac{1}{3}}}\right) & \text{per } n \nearrow \infty \text{ se } d = 1 \\ \rightarrow 0 & \text{per } n \nearrow \infty \text{ se } d = 2 \end{cases}$$

Il lemma seguente sarà utile alla dimostrazione del teorema.

Lemma 3.2.3. *Per $\theta \in [0, 1]$ e $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$,*

$$\mathbb{E}[W_{n-1}^\theta I_n] \geq \frac{1}{|\Lambda|} \mathbb{E}[W_{n-1}^\theta] - \frac{2}{|\Lambda|} \mathbf{P}(S_n \notin \Lambda)^\theta. \quad (3.11)$$

Dimostrazione. Ricordando la definizione di I_n , si ha

$$\begin{aligned} I_n &\geq \sum_{x \in \Lambda} \mu_{n-1}(S_n = x)^2 \\ &\geq \frac{1}{|\Lambda|} \mu_{n-1}(S_n \in \Lambda)^2 \\ &= \frac{1}{|\Lambda|} ((1 - \mu_{n-1}(S_n \notin \Lambda))^2) \\ &\geq \frac{1}{|\Lambda|} (1 - 2\mu_{n-1}(S_n \notin \Lambda)) \\ &\geq \frac{1}{|\Lambda|} (1 - 2\mu_{n-1}(S_n \notin \Lambda)^\theta). \end{aligned}$$

Osserviamo inoltre:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[W_{n-1}^\theta \mu_{n-1}(S_n \notin \Lambda)^\theta] &\leq \mathbb{E}[W_{n-1} \mu_{n-1}(S_n \notin \Lambda)]^\theta \\
 &= \mathbb{E}\left[\frac{Z_{n-1}}{\mathbb{E}[Z_{n-1}]} \frac{e^{\beta \sum_{i=1}^{n-1} \omega_{i,S_i}}}{Z_{n-1}} \mathbf{P}(S_n \notin \Lambda)\right]^\theta \\
 &= \mathbb{E}[e^{\beta \sum_{i=1}^{n-1} \omega_{i,S_i} - (n-1)\lambda(\beta)}]^\theta \mathbf{P}(S_n \notin \Lambda)^\theta \\
 &= \mathbf{P}(S_n \notin \Lambda)^\theta.
 \end{aligned}$$

Ora, dalle ultime due relazioni segue che

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[W_{n-1}^\theta I_n] &\geq \frac{1}{|\Lambda|} \mathbb{E}[W_{n-1}^\theta] - \frac{2}{\Lambda} \mathbb{E}[W_{n-1} \mu_{n-1}(S_n \notin \Lambda)^\theta] \\
 &\geq \frac{1}{|\Lambda|} \mathbb{E}[W_{n-1}^\theta] - \frac{2}{|\Lambda|} \mathbf{P}(S_n \notin \Lambda)^\theta,
 \end{aligned}$$

il che conclude la tesi. \square

Vediamo quindi la dimostrazione del teorema (3.2.2).

Dimostrazione. Definiamo la funzione $f : (-1, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ come

$$f(u) = 1 + \theta u - (1 + u)^\theta.$$

Per come la abbiamo definito, f contiene tutti i termini del polinomio di Taylor di grado ≥ 2 della funzione $(1 + u)^\theta$ intorno allo zero, di conseguenza $f(u) = O(u^2)$. In particolare, esistono due costanti $c_1, c_2 \in (0, \infty)$, dipendenti da θ , tali che

$$\frac{c_1 u^2}{2 + u} \leq f(u) \leq c_2 u^2 \quad \forall u \in (-1, \infty). \quad (3.12)$$

Tenendo presente (3.4), (3.12) ed il lemma (3.1.2) si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\Delta W_n^\theta | \mathcal{G}_{n-1}] &= \mathbb{E}[W_n^\theta - W_{n-1}^\theta | \mathcal{G}_{n-1}] \\
 &= \mathbb{E}[W_n^\theta ((1 + U_n)^\theta - 1) | \mathcal{G}_{n-1}] \\
 &= W_{n-1}^\theta \mathbb{E}[(1 + U_n)^\theta - 1 | \mathcal{G}_{n-1}] \\
 &= W_{n-1}^\theta \mathbb{E}[\theta U_n - f(U_n) | \mathcal{G}_{n-1}] \\
 &= W_{n-1}^\theta \left(\theta \mathbb{E}\left[\frac{W_n}{W_{n-1}} - 1 | \mathcal{G}_{n-1}\right] - \mathbb{E}[f(U_n) | \mathcal{G}_{n-1}] \right) \\
 &= W_{n-1}^\theta \mathbb{E}[f(U_n) | \mathcal{G}_{n-1}] \\
 &\leq -c_3 W_{n-1}^\theta I_n.
 \end{aligned}$$

Dal lemma precedente segue che

$$\mathbb{E}[W_n^\theta] \leq \left(1 - \frac{-c_3}{|\Lambda|}\right) \mathbb{E}[W_{n-1}^\theta] - \frac{2c_3}{|\Lambda|} \mathbf{P}(S_n \notin \Lambda)^\theta. \quad (3.13)$$

Per $d = 1$, poniamo $\Lambda = (-n^{\frac{2}{3}}, n^{\frac{2}{3}}]$. Allora,

$$\mathbf{P}(S_n \notin \Lambda) = \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n^{\frac{1}{2}}}\right| \geq n^{\frac{1}{6}}\right) \leq 2e^{-\frac{1}{2}}$$

così la (3.13) diventa

$$\mathbb{E}[W_n^\theta] \leq \left(1 - \frac{c_3}{2n^{\frac{2}{3}}}\right) \mathbb{E}[W_{n-1}^\theta] + 4c_3 e^{-\frac{1}{2}}.$$

La (3.10) segue da quest'ultima disuguaglianza prendendo la successione $a_n = c_1 n^{\frac{1}{3}}$.

Per $d = 2$, poniamo

$$\Lambda = (-n^{\frac{1}{2}} \ln^{\frac{1}{4}} n, n^{\frac{1}{2}} \ln^{\frac{1}{4}} n]^2,$$

per ottenere (3.10) nel caso di $d = 2$ si procede in modo analogo al caso precedente. \square

Vediamo ora un teorema che, in modo analogo al caso di disordine debole, fornisce una condizione sul parametro β perché sussista il disordine forte, e per la cui dimostrazione ci serviremo del metodo dei momenti frazionari della funzione di partizione normalizzata appena introdotto.

Teorema 3.2.4. *Per $d \geq 1$ e β tale che*

$$\gamma_2(\beta) := \beta \lambda'(\beta) - \lambda(\beta) > \ln 2d, \quad (3.14)$$

vale il regime di disordine forte.

Dimostrazione. Dimostreremo che se è soddisfatta la condizione (3.14) su β allora vale la (3.9), in cui la successione $a_n = cn$, con $c \in (0, \infty)$, e quindi avremo la tesi. Prendiamo $\theta \in (0, 1)$. Dalla definizione della funzione di

partizione normalizzata, si ha

$$\begin{aligned}
(W_n)^\theta &= \left[\mathbf{E} \left[\prod_{i=1}^n e^{\beta\omega_{i,S_i} - \lambda(\beta)} \right] \right]^\theta \\
&= \left[\mathbf{E} [e^{\beta\omega_{1,x} - \lambda(\beta)}] \mathbf{E} \left[\prod_{j=1}^{n-1} e^{\beta\omega_{j+1,x+S_j} - \lambda(\beta)} \right] \right]^\theta \\
&= \left[\sum_{x \in \mathbb{Z}^d, |x|=1} \frac{1}{2d} e^{\beta\omega_{1,x} - \lambda(\beta)} \mathbf{E} \left[\prod_{j=1}^{n-1} e^{\beta\omega_{j+1,x+S_j} - \lambda(\beta)} \right] \right]^\theta \\
&\leq \sum_{x \in \mathbb{Z}^d, |x|=1} \left[\frac{1}{2d} e^{\beta\omega_{1,x} - \lambda(\beta)} \right]^\theta \left[\mathbf{E} \left[\prod_{j=1}^{n-1} e^{\beta\omega_{j+1,x+S_j} - \lambda(\beta)} \right] \right]^\theta
\end{aligned}$$

dove nell'ultima disequazione si è sfruttata la relazione $(u+v)^\gamma \leq u^\gamma + v^\gamma$, con $u, v \geq 0$ e $\gamma \in (0, 1)$. Calcolandone il valore atteso, si ottiene:

$$\mathbb{E}[(W_n)^\theta] \leq r(\theta) \mathbb{E}[(W_{n-1})^\theta],$$

dove

$$r(\theta) = (2d)^{1-\theta} \mathbb{E}[(e^{\beta\omega_{1,x} - \theta\lambda(\beta)})^\theta].$$

Osserviamo che $r(\theta)$ è una funzione continua e differenziabile e che $r(0) = 2d$, $r(1) = 1$. Ora, per la condizione (3.14),

$$\frac{dr(\theta)}{d\theta} = (2d)^{1-\theta} e^{\lambda(\theta\beta) - \theta\lambda(\beta)} (-\ln 2d + \beta\lambda'(\theta\beta) - \lambda(\beta)),$$

da cui

$$\frac{dr(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta=1} = -\ln 2d + \beta\lambda'(\beta) - \lambda(\beta) > 0$$

perciò in $\theta = 1$, la funzione r risulta strettamente crescente, allora esisterà un $\theta_0 \in (0, 1)$ tale che $r(\theta_0) < 1$.

Di conseguenza, per ogni $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}[W_n^{\theta_0}] \leq r(\theta_0)^n \equiv e^{-\alpha_0 n}.$$

La tesi segue applicando la (3.9). □

Osservazione 7. La funzione $\beta \rightarrow \gamma_2(\beta)$ risulta crescente su $[0, \infty)$, inoltre $\gamma_2(0) = 0$, allora la condizione (3.14) è verificata per β abbastanza grande se $\lim_{\beta \nearrow \infty} \gamma_2(\beta) > \ln(2d)$.

Esempio 3.1. Ambiente con distribuzione di Bernoulli. In questo caso si trova che

$$\begin{aligned}\gamma_2(\beta) &= \beta \frac{-pe^{-\beta} + (1-p)e^\beta}{pe^{-\beta} + (1-p)e^\beta} - \ln(pe^{-\beta} + (1-p)e^\beta) \\ &= \beta \left(\frac{-pe^{-2\beta} + (1-p)}{pe^{-2\beta} + (1-p)} - 1 \right) - \ln(pe^{-2\beta} + (1-p)),\end{aligned}$$

in definitiva

$$\lim_{\beta \nearrow \infty} \gamma_2(\beta) = -\ln(1-p) = \lim_{\beta \nearrow \infty} \gamma_1(\beta)$$

La condizione (3.14) è soddisfatta per β abbastanza grande se $-\ln(1-p) > \ln(2d)$, cioè se $p > 1 - \frac{1}{2d}$.

Esempio 3.2. Ambiente con distribuzione gaussiana. In questo caso $\gamma_2(\beta) = \frac{\beta^2}{2}$, perciò (3.14) vale se $\beta > \sqrt{2 \ln(2d)}$.

3.2.1 Limite inferiore e limite superiore della temperatura critica

Concludiamo questo capitolo prendendo nuovamente in esame la temperatura critica $\beta_c(d)$. Avevamo già accennato al fatto che non si conosce cosa avviene in corrispondenza di tale valore della temperatura, nel senso che non si sa se esso faccia parte del regime di disordine debole oppure di quello forte: è, tuttavia, possibile determinare un intervallo che lo contiene.

Osserviamo che possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}\gamma_1(\beta) &= \gamma_2(\beta) + \int_{\beta}^{2\beta} \lambda''(v)(2\beta - v)dv, \\ \gamma_2(\beta) &= \int_0^{\beta} \lambda''(v)v dv,\end{aligned}$$

infatti

$$\begin{aligned}\int_{\beta}^{2\beta} \lambda''(v)(2\beta - v)dv &= 2\beta[\lambda'(v)]_{\beta}^{2\beta} - \left\{ [\lambda'(v)v]_{\beta}^{2\beta} - \int_{\beta}^{2\beta} \lambda'(v)v' dv \right\} \\ &= -\beta\lambda'(\beta) + \lambda(2\beta) - \lambda(\beta),\end{aligned}$$

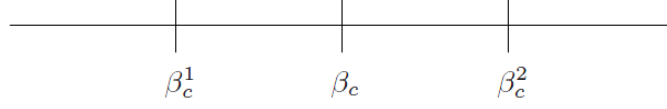


Figura 3.1: Limiti inferiore e superiore della temperatura critica per $d \geq 3$

e

$$\int_0^\beta \lambda''(v)v dv = [\lambda'(v)v]_0^\beta - \int_0^\beta \lambda'(v)v' dv = \beta\lambda'(\beta) - \lambda(\beta).$$

Poiché la funzione integranda del primo integrale risulta strettamente positiva, si deduce che

$$\gamma_1(\beta) > \gamma_2(\beta) \quad (3.15)$$

su $(0, \infty)$ e che $p_d > \frac{1}{2d}$. Ciò porta a concludere che per $d \geq 3$ le condizioni (2.1) e (3.14) sono fra loro incompatibili, e che, quindi, esiste una lacuna fra di esse. Di conseguenza, si possono considerare i seguenti due valori critici, il primo dei quali l'avevamo già introdotto nel secondo capitolo,

$$\begin{aligned} \beta_c^1 &= \sup \left\{ \beta \in [0, \infty) : \gamma_1(\beta) < \ln \left(\frac{1}{p_d} \right) \right\}, \\ \beta_c^2 &= \inf \{ \beta \in [0, \infty) : \gamma_2(\beta) > \ln(2d), \end{aligned}$$

tali che

$$\beta_c \in [\beta_c^1, \beta_c^2]. \quad (3.16)$$

A seconda della distribuzione del disordine può essere: $0 < \beta_c^1 < \beta_c^2 < \infty$ o $0 < \beta_c^1 < \beta_c^2 = \infty$ oppure $\beta_c^1 = \beta_c^2 = \infty$.

Capitolo 4

Disordine in termini di energia libera

4.1 Esistenza dell'energia libera

Finora abbiamo analizzato la dicotomia tra disordine debole e disordine forte esclusivamente in termini di martingale, approccio introdotto per la prima volta da Bolthausen in [2]; tuttavia, nella letteratura, si trova che esso non è l'unico strumento da cui è possibile attingere informazioni per capire la misura di Gibbs dei polimeri. Introduciamo quindi la nozione fondamentale di energia libera del modello:

Definizione 4.1. Si chiama *energia libera quenched* del polimero diretto il limite

$$p(\beta) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln Z_n. \quad (4.1)$$

Essa definisce il tasso di decadimento della funzione di partizione normalizzata.

Teorema 4.1.1 (Esistenza energia libera quenched). *Il limite che definisce l'energia libera quenched esiste e non è aleatorio. Più precisamente,*

$$p(\beta) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln Z_n = \sup_n \mathbb{E}[\ln Z_n]. \quad (4.2)$$

La dimostrazione del teorema sarà articolato in due fasi:

1. facciamo vedere che esiste il limite di $\mathbb{E}[\ln Z_n]$, sfruttandone la superadditività;
2. utilizzando un lemma di concentrazione, mostriamo che $X = \ln Z_n$ è concentrato attorno al suo valor medio.

Lemma 4.1.2 (Lemma di concentrazione). *Supponiamo che $X \in L^1(\mathbb{Q})$ sia \mathcal{G}_n -misurabile per qualche n e che esista $\delta \in (0, \infty)$, $A \in (0, \infty)$, $X_1, \dots, X_n \in L^1(\mathbb{Q})$ tali che*

$$\mathbb{E}[X_j | \mathcal{G}_{j-1}] = \mathbb{E}[X_j | \mathcal{G}_j], \quad e \quad \mathbb{E}[e^{\delta(X-X_j)} | \mathcal{G}_{j-1}] \leq A \quad (4.3)$$

per $j = 1, \dots, n$. Allora con $B = 2\sqrt{6} \frac{A^2}{\delta^2}$

$$\mathbb{Q}(X - \mathbb{E}[X] \geq \epsilon n) \leq 2e^{-\frac{\epsilon^2 n}{4B}} \quad \text{per tutti gli } \epsilon \in (0, B\delta). \quad (4.4)$$

Dimostrazione lemma. Consideriamo la successione $D_j = \mathbb{E}[X | \mathcal{G}_j] - \mathbb{E}[X | \mathcal{G}_{j-1}]$. Innanzitutto, facciamo vedere che

$$\mathbb{E}[e^{\delta |D_j|} | \mathcal{G}_{j-1}] \leq A^2, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.5)$$

Poiché per ipotesi $\mathbb{E}[X_j | \mathcal{G}_{j-1}] = \mathbb{E}[X_j | \mathcal{G}_j]$, si ha

$$\begin{aligned} D_j &\leq \mathbb{E}[X - X_j | \mathcal{G}_j] + \mathbb{E}[X - X_j | \mathcal{G}_{j-1}] \\ &= \mathbb{E}[Y_j | \mathcal{G}_j] + \mathbb{E}[Y_j | \mathcal{G}_{j-1}], \end{aligned}$$

dove $Y_j = X - X_j$. Dalla disuguaglianza di Jensen segue che

$$e^{\delta \mathbb{E}[Y_j | \mathcal{G}_{j-1}]} \leq \mathbb{E}[e^{\delta Y_j} | \mathcal{G}_{j-1}] \leq A.$$

In maniera analoga,

$$\mathbb{E}[e^{\delta \mathbb{E}[Y_j | \mathcal{G}_j]} | \mathcal{G}_{j-1}] \leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{\delta Y_j} | \mathcal{G}_j] | \mathcal{G}_{j-1}] = \mathbb{E}[e^{\delta Y_j} | \mathcal{G}_{j-1}] \leq A.$$

Di conseguenza

$$\mathbb{E}[e^{\delta |D_j|} | \mathcal{G}_{j-1}] \leq e^{\delta \mathbb{E}[Y_j | \mathcal{G}_{j-1}]} \mathbb{E}[e^{\delta \mathbb{E}[Y_j | \mathcal{G}_j]} | \mathcal{G}_{j-1}] \leq A^2,$$

che non è altro che la (4.5). Grazie all'ausilio della (4.5) adesso mostriamo che

$$\mathbb{E}[e^{\theta D_j} | \mathcal{G}_{j-1}] \leq e^{B\theta^2}, \quad \theta \in (-\delta/2, \delta/2), \quad j = 1, \dots, n \quad (4.6)$$

Osserviamo che

$$\frac{1}{4!} \mathbb{E}[D_j^4 | \mathcal{G}_{j-1}] = \frac{1}{4!} \mathbb{E}[\delta^4 D_j^4 | \mathcal{G}_{j-1}] / \delta^4 \leq \mathbb{E}[e^{\delta |D_j|} | \mathcal{G}_{j-1}] / \delta^4 \leq A^2 / \delta^4,$$

da cui

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[D_j^2 e^{\delta |D_j|/2} | \mathcal{G}_{j-1}] &\leq \mathbb{E}[D_j^4 | \mathcal{G}_{j-1}] \mathbb{E}[e^{\delta |D_j|} | \mathcal{G}_{j-1}]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{4!} A^2 / \delta^2 = 2\sqrt{6} A^2 \delta^2 = B. \end{aligned}$$

Notiamo che $e^x \leq 1 + x + x^2 e^{|x|}/2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{\theta D_j} | \mathcal{G}_{j-1}] &\leq 1 + \theta D_j + \frac{\theta^2}{2} \mathbb{E}[D_j^2 e^{|\theta D_j|} | \mathcal{G}_{j-1}] \\ &\leq 1 + \theta D_j + \frac{\theta^2}{2} B \\ &\leq 1 + \frac{\theta^2}{2} B \leq e^{B\theta^2} \end{aligned}$$

Inoltre, poichè $X - \mathbb{E}[X] = D_1 + D_2 + \dots + D_n$, dalla disuguaglianza precedente segue che

$$\mathbb{E}[e^{\theta(X - \mathbb{E}[X])}] = \mathbb{E}[e^{\sum_{j=1}^n \theta D_j}] \leq e^{B\theta^2 n}, \quad \theta \in \left[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right].$$

Per vedere la (4.4) prendiamo $\theta = \frac{\epsilon}{2B} \leq \frac{\delta}{2}$. Per la disuguaglianza di Chebychev, si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(X - \mathbb{E}[X] \geq \epsilon n) &= \mathbb{Q}(\theta(X - \mathbb{E}[X]) \geq \theta \epsilon n) \\ &\leq 2e^{B\theta^2 - \theta \epsilon n} = 2e^{-\epsilon^2 n / 4B} \end{aligned}$$

□

Dimostrazione teorema. Innanzitutto, consideriamo il valor medio e mostriamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\frac{1}{n} \ln Z_n\right] = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}\left[\frac{1}{n} \ln Z_n\right] \in \mathbb{R}.$$

Poiché $H_{n+m} = H_n + H_m \circ \theta_{n,x}$ ($\theta_{n,x}$ è l'operatore di traslazione definito in (2.4)), e per la proprietà di Markov della passeggiata aleatoria, si ha

$$\begin{aligned} Z_{n+m} &= \mathbf{E}[e^{\beta(H_n + H_m \circ \theta_{n,x})}] \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbf{E}[e^{\beta H_n} \mathbf{1}_{\{S_n=x\}} e^{\beta H_m \circ \omega_{n,x}}] \\ &= Z_n \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mu_n(S_n = x) Z_{n,m}^x, \end{aligned}$$

dove $Z_{n,m}^x = \mathbf{E}^x[e^{\beta \sum_{j=1}^m \omega_{n+j,S_j}}]$ è la funzione di partizione del polimero di lunghezza m che parte al tempo n dal punto x . Essa ha la stessa legge di Z_m poiché l'ambiente è invariante rispetto alle traslazioni. Dunque

$$\begin{aligned} Z_{n+m} &= Z_n \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mu_n(S_n = x) Z_{n,m}^x \\ &= Z_n \mathbf{E}_{\mu_n}[Z_{n,m}^x], \end{aligned}$$

dove \mathbf{E}_{μ_n} è l'attesa rispetto alla misura dei polimeri. Usando la disuguaglianza di Jensen per funzioni concave, si ottiene

$$\begin{aligned} \ln Z_{n+m} &\geq \ln Z_n + \mathbf{E}_{\mu_n}[\ln Z_{n,m}^x] \\ &= \ln Z_n + \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mu_n(S_n = x) \ln Z_{n,m}^x. \end{aligned}$$

Ora, calcolando il valore atteso di entrambi i membri e usando l'indipendenza degli ω

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\ln Z_{n+m}] &\geq \mathbb{E}[\ln Z_n] + \mathbb{E}\left[\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mu_n(S_n = x) \ln Z_{n,m}^x\right] \\ &= \mathbb{E}[\ln Z_n] + \mathbb{E}\left[\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mu_n(S_n = x)\right] \mathbb{E}[\ln(Z_{n,m}^x)] \\ &= \mathbb{E}[\ln Z_n] + \mathbb{E}[\ln Z_m], \end{aligned}$$

perciò $\mathbb{E}[\ln Z_n]$ è superadditiva. Ora, per il teorema sulle successioni superadditive (vedi Lemma 3.2.1 dell'Appendice in [6]), vale

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}[\ln Z_n] &= \sup_n \frac{1}{n} \mathbb{E}[\ln Z_n] \\ &= \sup_n \frac{1}{n} n \lambda(\beta) < \infty, \end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione della prima parte del teorema.

Rimane da far vedere la seconda parte. A tale scopo consideriamo $X = \ln Z_n$. Mostriamo che X soddisfa la (4.4) del lemma di concentrazione per un qualche $B \in (0, \infty)$ e un qualche δ positivo: per il lemma di Borel-Cantelli ciò implica che $\limsup_n |\ln Z_n - \mathbb{E}[\ln Z_n]| \leq \epsilon$ \mathbb{Q} -q.c., per tutti gli $\epsilon \leq B\delta$. Ne consegue che

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\ln Z_n - \mathbb{E}[\ln Z_n]| = 0 \quad \mathbb{Q} - q.c.$$

Introduciamo la misura di probabilità $\mu_{n,j}$ sullo spazio (Ω, \mathcal{F}) definita da

$$\mu_{n,j}(ds) = \frac{1}{Z_{n,j}} e^{\beta H_{n,j}} \mathbf{P}(ds)$$

dove $H_{n,j} = \sum_{1 \leq k \leq n, k \neq j} \omega_{k, S_k}$. Introduciamo, inoltre, la σ -algebra \mathcal{G}_j generata da $\omega_{t,x}, t \leq j$ e $x \in \mathbb{Z}^d$. Fissiamo un arbitrario n e mostriamo che vale la (4.3) per

$$X = \ln Z_n, \quad X_j = \ln Z_{n,j} \quad j = 1, \dots, n$$

dove $Z_{n,j}$ lo prendiamo indipendente dall'ambiente ω . Proprio grazie a tale indipendenza risulta $\mathbb{E}[X_j | \mathcal{G}_j] = \mathbb{E}[X_j | \mathcal{G}_{j-1}]$. D'altra parte, poiché la funzione $u \mapsto u^\delta$ è convessa per $\delta \in \mathbb{R} - (0, 1)$, si ha

$$\begin{aligned} e^{\delta(X - \mathbb{E}[X])} &= \left(\frac{Z_n}{Z_{n,j}} \right)^\delta = \mu_{n,j}(e^{\beta \omega_{j, S_j}})^\delta \\ &\leq \mu_{n,j}(e^{\beta \delta \omega_{j, S_j}}). \end{aligned}$$

Osserviamo che la misura $\mu_{n,j}$ è misurabile rispetto alla σ -algebra $\mathcal{G}'_j := \sigma(\omega_{k, \cdot}, k \neq j)$. Inoltre,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{\delta(X - X_j)} | \mathcal{G}'_j] &\leq \mathbb{E}[\mu_{n,j}(e^{\beta \delta \omega_{j, S_j}}) | \mathcal{G}'_j] \\ &= \mu_{n,j}(\mathbb{E}[e^{\beta \delta \omega_{j, S_j}} | \mathcal{G}'_j]) \\ &= \mu_{n,j}(e^{\lambda(\beta \delta)}) = e^{\lambda(\beta \delta)}. \end{aligned}$$

Ora, poiché $\mathcal{G}_{j-1} \subset \mathcal{G}'_j$, si ha

$$\mathbb{E}[e^{\delta(X - X_j)} | \mathcal{G}_{j-1}] \leq A := e^{\lambda(\beta)} + e^{\lambda(-\beta)}.$$

□

Osservazione 8. Per la disuguaglianza di Jensen, si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\frac{1}{n} \ln Z_n\right] &= \frac{1}{n} \mathbb{E}[\ln Z_n] \leq \frac{1}{n} \ln \mathbb{E}[Z_n] \\ &= \frac{1}{n} \ln e^{n\lambda(\beta)} = \lambda(\beta),\end{aligned}$$

perciò

$$p(\beta) \leq \lambda(\beta). \quad (4.7)$$

Definizione 4.2. Quando nella (4.7) vale il minore stretto si parla di *disordine molto forte*.

4.2 Temperatura critica

A questo punto potrebbe sorgere il dubbio che esista un'ulteriore transizione di fase oltre a quella descritta nei precedenti capitoli; la seguente proposizione ci fornisce un ausilio per poterlo sciogliere.

Proposizione 4.2.1 (Temperatura critica). *Sia β_c la temperatura critica introdotta in (1.3.2). Esiste un $\bar{\beta}_c \in [0, \infty]$, $\beta_c \leq \bar{\beta}_c$, tale che*

- se $\beta < \bar{\beta}_c$ allora $p(\beta) = \lambda(\beta)$,
- se $\beta > \bar{\beta}_c$ allora $p(\beta) < \lambda(\beta)$.

Il valore $\bar{\beta}_c$ viene chiamato *valore critico per $p(\beta)$* .

L'enunciato è conseguenza della proprietà di monotonia della funzione $\beta \mapsto p(\beta) - \lambda(\beta)$.

Dimostrazione. Basta far vedere che la funzione $\beta \mapsto p(\beta) - \lambda(\beta)$ è non decrescente in \mathbb{R}^+ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \beta} \mathbb{E}[\ln Z_n] &= \mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_n\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(Z_n)^{-1} \frac{\partial}{\partial \beta} \mathbf{E}[e^{\beta H_n}]\right] \\ &= \mathbf{E}[\mathbb{E}[(Z_n)^{-1} H_n e^{\beta H_n}]]\end{aligned}$$

Abbiamo già visto che, per ogni cammino fissato S , $e^{\beta H_n} e^{-n\lambda(\beta)} d\mathbb{Q}$ è una misura prodotto; inoltre, la funzione H_n è crescente in ω , mentre $(Z_n)^{-1}$ è decrescente per $\beta \geq 0$, allora gli ω verificano la disuguaglianza FKG. Di conseguenza

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(Z_n)^{-1} H_n e^{\beta H_n}] &= \mathbb{E}[(Z_n)^{-1} H_n e^{\beta H_n} e^{-n\lambda(\beta)} e^{n\lambda(\beta)}] \\ &\leq e^{-n\lambda} \mathbb{E}[(Z_n)^{-1} e^{\beta H_n}] \mathbb{E}[H_n e^{\beta H_n}] \\ &= \mathbb{E}[(Z_n)^{-1} e^{\beta H_n}] e^{-n\lambda(\beta)} n\lambda'(\beta) e^{n\lambda(\beta)} \\ &= \mathbb{E}[(Z_n)^{-1} e^{\beta H_n}] n\lambda'(\beta), \end{aligned}$$

essendo

$$\mathbb{E}[\omega_{i,s_i} e^{\beta \omega_{i,s_i}}] = \lambda'(\beta) e^{\lambda(\beta)} = \frac{\partial}{\partial \beta} \mathbb{E}[e^{\beta \omega_{i,s_i}}]$$

Ora, applicando il teorema di Fubini

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} \mathbb{E}[\ln Z_n] &\leq n\lambda'(\beta) \mathbf{E}[\mathbb{E}[(Z_n)^{-1} e^{\beta H_n}]] \\ &= n\lambda'(\beta) \mathbb{E}[(Z_n)^{-1} \mathbf{E}[e^{\beta H_n}]] \\ &= n\lambda'(\beta), \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{n} \mathbb{E}[\ln Z_n] - \lambda'(\beta) \leq 0.$$

il che implica la tesi, in quanto sia $p(\beta)$ sia $\lambda(\beta)$ si annullano quando $\beta = 0$. \square

Sorge spontanea la domanda:

$$\beta_c = \bar{\beta}_c?$$

I fisici credono che questi due valori coincidano e che, perciò, non esista una fase intermedia tra disordine forte e disordine molto forte. Vedremo nel prossimo paragrafo che ciò è stato dimostrato rigorosamente a basse dimensioni: quando $d = 1$ Comets lo ha fatto vedere in ambiente aleatorio in generale, quando $d = 2$ è stato dimostrato da Lacoïn in [14] in ambiente Gaussiano; invece, rimane tuttora una questione aperta il caso $d \geq 3$.

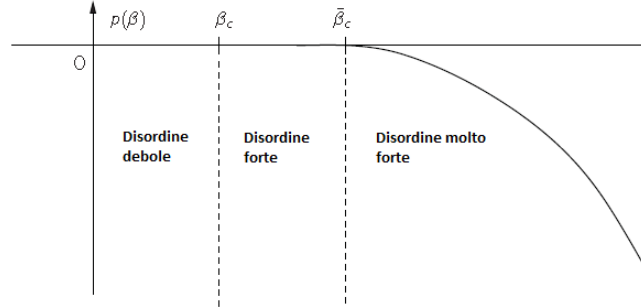


Figura 4.1: Transizione di fase in termini di energia libera.

Osservazione 9.

$$W_\infty > 0 \Rightarrow p(\beta) = \lambda(\beta).$$

Infatti

$$\begin{aligned} p(\beta) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln Z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{Z_n}{\mathbb{E}[Z_n]} \mathbb{E}[Z_n] \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \ln W_n + \frac{1}{n} \ln \mathbb{E}[Z_n] \right) \\ &= \lambda(\beta). \end{aligned}$$

Di conseguenza, certamente, $\beta_c \leq \bar{\beta}_c$.

4.3 Disordine molto forte a basse dimensioni

4.3.1 Caso $d = 1$

Teorema 4.3.1. *Assumiamo $d = 1$. Allora,*

$$\bar{\beta}_c = 0.$$

Equivalentemente, per ogni $\beta \neq 0$, $p(\beta) < \lambda(\beta)$.

Per la dimostrazione seguiremo la trattazione fatta da Comets in [6].

Notazione

Sia $k < n$ e siano $x, y \in \mathbb{Z}^d$,

$$W_{k,n}^x(y) = \mathbf{E}^x \left[e^{\beta \sum_{j=1}^{n-k} \omega_{k+j, S_j} - (n-k)\lambda(\beta)} \mathbf{1}_{\{S_{n-k} = y\}} \right],$$

dove \mathbf{E}^x è l'attesa rispetto alla misura \mathbf{P} della passeggiata aleatoria che parte al tempo 0 da x .

Per la proprietà di Markov della passeggiata aleatoria, si ha

$$W_n = \sum_{x, y \in \mathbb{Z}^d} W_k(x) W_{k,n}^x(y).$$

Ci servirà il seguente

Lemma 4.3.2. *In ogni dimensione $d \geq 1$ vale*

$$p(\beta) - \lambda(\beta) \leq \inf_{m \geq 1, 0 < \theta \leq 1} \frac{1}{m\theta} \ln \mathbb{E} \left[\sum_x W_m(x)^\theta \right]. \quad (4.8)$$

Dimostrazione lemma. Sia $\theta \in (0, 1)$ e m un intero positivo. Per ogni $n \geq 1$, si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\frac{1}{n} \ln W_{nm} \right] &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{n\theta} \ln W_{nm}^\theta \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{\theta n} \ln \left(\sum_{x_1, \dots, x_n} W_m(x_1) \dots W_{(n-1)m, nm}^{x_{n-1}}(x_n) \right) \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\frac{1}{\theta n} \ln \left(\sum_{x_1, \dots, x_n} W_m(x_1)^\theta \dots W_{(n-1)m, nm}^{x_{n-1}}(x_n)^\theta \right) \right] \\ &\leq \frac{1}{\theta n} \ln \mathbb{E} \left[\sum_{x_1, \dots, x_n} W_m(x_1)^\theta \dots W_{(n-1)m, nm}^{x_{n-1}}(x_n)^\theta \right] \\ &= \frac{1}{\theta n} \ln \sum_{x_1, \dots, x_{n-1}} \mathbb{E} [W_m(x_1)^\theta \dots W_{(n-2)m, nm}^{x_{n-2}}(x_{n-1})^\theta] \mathbb{E} \left[\sum_{x_n} W_{(n-1)m, nm}^{x_{n-1}}(x_n)^\theta \right] \\ &= \frac{1}{\theta n} \ln \left(\mathbb{E} \left[\sum_x W_m(x)^\theta \right] \right)^n \\ &= \frac{1}{\theta} \ln \mathbb{E} \left[\sum_x W_m(x)^\theta \right], \end{aligned}$$

dove nella prima disuguaglianza abbiamo sfruttato

$$(u + v)^\theta \leq u^\theta + v^\theta, \quad \text{per ogni } u, v \geq 0,$$

e nella seconda la disuguaglianza di Jensen.

Ora, poiché posso scrivere

$$p(\beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} \ln W_{nm} + \lambda(\beta)$$

da cui

$$p(\beta) - \lambda(\beta) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \mathbb{E} \left[\frac{1}{n} \ln W_{nm} \right] \leq \inf_{0 < \theta \leq 1, m \geq 1} \ln \mathbb{E} \left[\sum_x W_m(x)^\theta \right].$$

□

Dimostrazione teorema. Sia $\theta \in (0, 1)$ e $\beta > 0$. Per il teorema (3.2.2) del capitolo precedente quando $d = 1$ vale

$$\mathbb{E}[W_m^\theta] \leq ce^{-c_1 m^{\frac{1}{3}}} \quad m \geq 1.$$

Fissiamo un intero $m \geq 1$ e definiamo l'insieme dei punti $x \in \mathbb{Z}^d$ visitati dalla passeggiata aleatoria al tempo m :

$$L_m := \{x \in \mathbb{Z}^d : \mathbf{P}(S_m = x) > 0\}$$

Allora,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{x \in L_m} W_m(x)^\theta \right] &\leq L_m \mathbb{E}[W_m^\theta] \\ &\leq L_m ce^{-c_1 m^{\frac{1}{3}}} \end{aligned}$$

poiché $L_m = O(m)$, il secondo membro tende a 0 per $m \rightarrow \infty$. Esiste quindi un $m \geq 1$ tale che

$$\mathbb{E} \left[\sum_{x \in L_m} W_m(x)^\theta \right] < 1.$$

Di conseguenza,

$$\ln \mathbb{E} \left[\sum_{x \in L_m} W_m(x)^\theta \right] < 0$$

così, per il lemma precedente, $p(\beta) < \lambda(\beta)$.

□

4.3.2 Caso $d = 2$

Nel caso bidimensionale Lacoïn ha dimostrato in [14] che vale il seguente

Teorema 4.3.3. *Quando $d = 2$ e l'ambiente è gaussiano ($\omega_{i,x} \sim \mathcal{N}(0,1)$), esiste una costante c tale che per ogni $\beta \leq 1$*

$$p(\beta) - \lambda(\beta) \leq -e^{-\frac{c}{\beta^4}}.$$

Pertanto,

$$\bar{\beta}_c = 0. \quad (4.9)$$

Per la dimostrazione rigora di questo risultato si veda paragrafo 6 in [14], qui ci limiteremo a darne un'idea che permetta di capire il tipo di approccio utilizzato.

Idea della dimostrazione. Ricordiamo che nel caso di ambiente con distribuzione di Gauss si trova $\lambda(\beta) = \frac{\beta^2}{2}$, perciò la funzione di partizione normalizzata diventa

$$W_N = \mathbf{E}[e^{\beta \sum_{i=1}^N \omega_{i,S_i} - N \frac{\beta^2}{2}}].$$

Sia $\theta \in (0,1)$. Analogamente a quanto visto nel caso unidimensionale, usando la disuguaglianza di Jensen si trova

$$p(\beta) - \lambda(\beta) \leq \inf \frac{1}{\theta N} \ln \mathbf{E}[W_N^\theta],$$

che permette di ridurre il problema del calcolo del limite superiore a mostrare che $\mathbf{E}[W_N^\theta]$ decade esponenzialmente con N . Il passo successivo è quello di decomporre W_N in diversi contributi che corrispondono alle traiettorie della passeggiata aleatoria che si trovano all'interno di corridoi di ampiezza \sqrt{n} . Più precisamente, fissato un intero n , $N = nm$, ($m \rightarrow \infty$), scriviamo

$$W_N = \sum_{y_1, \dots, y_m \in \mathbb{Z}^2} W_{(y_1, \dots, y_m)},$$

dove

$$W_{(y_1, \dots, y_m)} := \frac{\sum_{\gamma \in \Gamma_{y_1, \dots, y_m}} e^{\beta H_N(\gamma)}}{\mathbf{E}[Z_N]},$$

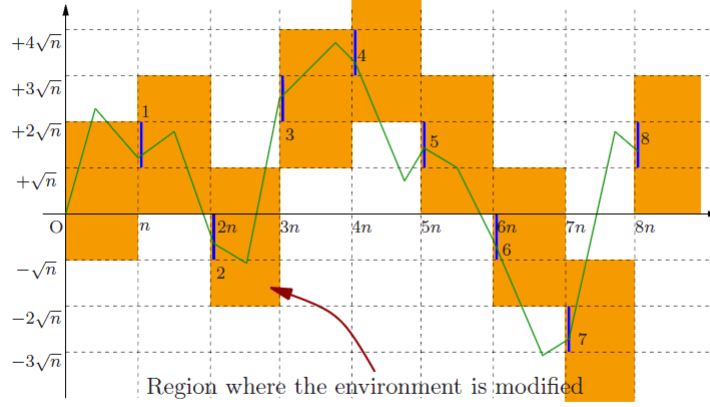


Figura 4.2: Corridoi lungo i quali l'ambiente viene modificato.

dove Γ_{y_1, \dots, y_m} è l'insieme dei cammini che giacciono sui corridoi suddetti.

Ora, sfruttando la disuguaglianza $(\sum a_i)^\theta \leq \sum a_i^\theta$, si ha

$$\mathbb{E}[W_N^\theta] \leq \sum_{y_1, \dots, y_m} \mathbb{E}[W_{(y_1, \dots, y_m)}^\theta]. \quad (4.10)$$

A questo punto, introduciamo il secondo elemento caratterizzante questa dimostrazione, ovvero un cambio della misura dell'ambiente, \mathbb{Q} , attorno ai corridoi, che consenta di stimare il termine a secondo membro di (4.10). In particolare, la nuova misura, $\tilde{\mathbb{Q}}$, definita in modo da essere assolutamente continua rispetto a \mathbb{Q} , modifica la funzione di covarianza dell'ambiente lungo i corridoi in cui dovrebbe giacere la passeggiata aleatoria introducendo qualche correlazione negativa. Usando la disuguaglianza di Hölder, si ottiene

$$\mathbb{Q}[W_{(y_1, \dots, y_m)}^\theta] \leq \left(\tilde{\mathbb{Q}} \left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\tilde{\mathbb{Q}}} \right)^{\frac{1}{1-\theta}} \right)^{1-\theta} (\tilde{\mathbb{Q}} W_{(y_1, \dots, y_m)})^\theta.$$

La misura $\tilde{\mathbb{Q}}$ viene scelta in modo tale da avere

$$\tilde{\mathbb{Q}}[W_{(y_1, \dots, y_m)}] \leq e^{-Km} \mathbb{Q}[W_{(y_1, \dots, y_m)}],$$

per un qualche K grande, e che, allo stesso tempo, renda sufficientemente piccolo il costo del cambio di misura, cioè

$$\left(\tilde{\mathbb{Q}}\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\tilde{\mathbb{Q}}}\right)^{\frac{1}{1-\theta}}\right)^{1-\theta} \leq e^{-\epsilon m} \quad \text{per un qualche } \epsilon \text{ piccolo.}$$

In conclusione, si ottiene

$$\mathbb{Q}[W_N^\theta] \leq e^{-m},$$

da cui

$$\begin{aligned} p(\beta) - \lambda(\beta) &\leq \inf \frac{1}{\theta N} \ln \mathbb{E}[W_N^\theta] \\ &\leq \inf \frac{1}{\theta n m} \ln e^{-m} \\ &= -\frac{m}{N} \end{aligned}$$

□

Capitolo 5

Superdiffusività: cenni

5.1 Introduzione

In quest'ultimo capitolo affronteremo un argomento che tuttora lascia molti quesiti irrisolti, il cosiddetto fenomeno di superdiffusività, che si verifica nel regime di disordine forte. Tale concetto è da contrapporsi a quello di diffusività (caratteristico del disordine debole): infatti, dire che un polimero presenta un comportamento superdiffusivo significa che esso tende ad allontanarsi dall'origine in maniera tale da raggiungere zone dello spazio in cui l'ambiente risulti maggiormente favorevole, più precisamente, si crede che la distanza tipica dell'ultimo monomero che compone una catena di lunghezza n raggiunga distanze dell'ordine di n^ξ , con $\xi > \frac{1}{2}$.

Sulla superdiffusività poco è stato dimostrato rigorosamente e molto è stato ipotizzato; in particolare, per il modello a tempo e spazio discreto che abbiamo analizzato nei primi quattro capitoli rimane un problema ancora aperto. E' anche per questa ragione che, recentemente, ci si è interessati a modelli semicontinui (a spazio o tempo discreto) o continui che, per esempio, prendano in considerazione il moto browniano anziché la passeggiata aleatoria semplice, in quanto in taluni casi si possono utilizzare tecniche del calcolo stocastico per la determinazione di nuovi risultati.

Noi qui ci concentremo su due modelli per polimeri diretti in ambiente gaus-

siano, il primo dei quali è stato introdotto da Peterman nella sua tesi non pubblicata¹ e, successivamente, studiato anche da Mejane [15], i quali hanno dimostrato che per $d = 1$ vale la superdiffusività; il secondo modello è stato originariamente introdotto da Rovira e Tindel [17] e poi preso nuovamente in esame da Lacoïn [12]. In entrambi i casi, ci concentreremo sui principali risultati teorici che riguardano proprio il fenomeno di superdiffusività ed i cosiddetti esponenti critici. Non ne riporteremo le dimostrazioni, per la consultazione delle quali rimandiamo alla relativa bibliografia.

Per iniziare diamo una definizione intuitiva ma non rigorosa² degli esponenti critici:

Definizione 5.1. Si definisce esponente critico per la fluttuazione trasversale di un cammino il numero positivo $\xi(d)$ tale che

$$\max_{0 \leq i \leq n} |S_i| \approx n^{\xi(d)} \quad \text{per } n \nearrow \infty \quad (5.1)$$

$\xi(d)$ viene anche detto *esponente di volume*.

L'esponente che misura la fluttuazione dell'energia libera, chiamato semplicemente *esponente di fluttuazione*, è il numero $\chi(d) > 0$ tale che

$$\ln Z_n - \mathbb{E}[\ln Z_n] \approx n^{\chi(d)} \quad \text{per } n \nearrow \infty \quad (5.2)$$

Definizione 5.2. Il polimero è detto *diffusivo* se $\xi(d) = \frac{1}{2}$ e *superdiffusivo* se $\xi(d) > \frac{1}{2}$.

5.1.1 Congetture su esponenti critici

I fisici ritengono che i due esponenti critici debbano soddisfare la relazione

$$\chi(d) = 2\xi(d) - 1, \quad d \geq 1 \quad (5.3)$$

e che nel caso unidimensionale il polimero sia superdiffusivo, in particolare:

$$\chi(d) = \frac{1}{3}, \quad \xi(d) = \frac{2}{3}.$$

¹"Superdiffusivity for directed polymers in random environment", Università di Zurigo (2000)

²Per una definizione rigorosa degli esponenti critici si veda [16].

per $d \geq 2$ non ci sono valori congetturati degli esponenti. Ad ogni modo, la superdiffusività rimane un problema aperto, infatti, nella maggior parte dei casi, l'esistenza stessa di ξ e χ non è stata dimostrata rigorosamente.

5.2 Modello di Peterman

Descrizione del modello:

- *Passeggiata aleatoria*: sia $(S_n)_{n \geq 0}$ una passeggiata aleatoria a tempo discreto in \mathbb{R}^d con incrementi i.i.d. con distribuzione normale standard, cioè in questo caso $\Omega = \{S = (S_n)_{n \geq 0} : S_n \in \mathbb{R}^d, n \geq 0\}$ e \mathbf{P} è l'unica misura di probabilità tale che $S_1 - S_0, \dots, S_n - S_{n-1}$ sono indipendenti e

$$\mathbf{P}(S_0 = 0) = 1, \mathbf{P}(S_n - S_{n-1} \in dx) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx$$

- *Ambiente aleatorio*: sia $(\omega_{i,x})_{i \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}^d}$ una successione di variabili aleatorie gaussiane fissate e invarianti per traslazione. Indicheremo con \mathbb{P} e \mathbb{Q} la misura di probabilità e l'attesa dell'ambiente, rispettivamente. La funzione di covarianza è data da

$$\mathbb{E}[\omega_{i,x} \omega_{j,y}] := \delta_{i,j} Q(x - y), \quad (5.4)$$

dove Q è una funzione non negativa con $Q(0) = 1$ e $Q(x) \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow \infty$, in particolare la correlazione esistente tra gli ω non coinvolge la direzione lungo cui è diretto il polimero.

- *Misura dei polimeri* la definizione è analoga al caso in ambiente discreto, infatti per un cammino S di lunghezza n e $\beta > 0$ fissato la derivata di Radon-Nikodym è data da

$$\frac{d\mu_n^{\beta,\omega}(S)}{d\mathbf{P}} = \frac{1}{Z_n^{\beta,\omega}} e^{\beta \sum_{i=1}^n \omega_{i,S_i}},$$

dove

$$Z_n^{\beta,\omega} := \mathbf{E}[e^{\beta \sum_{i=1}^n \omega_{i,S_i}}]$$

è la funzione di partizione del polimero.

Vediamo il risultato ottenuto da Peterman

Teorema 5.2.1. *Quando $d = 1$ e Q è a supporto compatto, per ogni $\beta > 0$ e $\alpha < \frac{3}{5}$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n^{\beta, \omega}(\max_{i \in [0, n]} \{|S_n| \geq n^\alpha\}) = 1 \quad (5.5)$$

Da cui si deduce che $\xi(d) > \frac{1}{2}$, ovvero la superdiffusività del polimero. Diversamente, il lavoro di Méjane fornisce un limite superiore all'esponente di volume a valido in ogni dimensione:

Teorema 5.2.2 (Méjane). *Per ogni $d \geq 1$ e per ogni $\alpha > \frac{3}{4}$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n^{\beta, \omega}(\max_{i \in [1, n]} \{|S_n| \geq n^\alpha\}) = 0 \quad (5.6)$$

Di conseguenza, $\xi(1) \leq \frac{3}{4}$.

Entrambi questi risultati sono compatibili con le congetture dei fisici.

5.3 Modello: polimero browniano in ambiente gaussiano

In questo caso la passeggiata aleatoria semplice viene sostituita da un moto browniano in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$, mentre l'ambiente è lo stesso del paragrafo precedente.

Vediamo, nello specifico, come è definito il modello.

- *Polimero browniano:* il polimero è modellizzato da un cammino browniano d -dimensionale, $(B_t)_{t \geq 0}$, definito su uno spazio di probabilità filtrato $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{P}}, \{\hat{\mathcal{F}}_t\}_{t \geq 0})$.
- *Ambiente aleatorio:* sia $((\omega_{t,x})_{t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^d})$ una successione di variabili aleatorie con distribuzione normale definite sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$, aventi funzione di covarianza definita come in (5.4), dove Q è, di nuovo, una funzione non negativa che tende a zero all'infinito.

- *Misura dei polimeri:* per ogni $t > 0$, l'energia di un dato cammino B su $[0, t]$ è definita come

$$H_{\omega,t}(B) = H_t(B) := \int_0^t \omega(ds, B_s)$$

Osserviamo che, per come è definita, H_t è, a sua volta, una variabile aleatoria gaussiana con matrice di covarianza

$$\mathbf{E}[H_t(B^{(1)})H_t(B^{(2)})] := \int_0^t Q(B_s^{(1)} - B_s^{(2)})ds$$

Definiamo la misura dei polimeri come segue:

$$d\mu_t^{\beta,\omega}(B) := \frac{1}{Z_t^{\beta,\omega}} e^{\beta H_t(B)} d\hat{\mathcal{P}}(B),$$

dove $Z_t^{\beta,\omega}$ è la funzione di partizione del modello

$$Z_t^{\beta,\omega} := \hat{\mathcal{E}}[e^{\beta H_t}].$$

Nello specifico, Lacoïn considera il caso in cui la funzione di correlazione sia della forma

$$Q(x) \asymp \|x\|^{-\theta} \quad \text{per } \|x\| \rightarrow \infty, \quad (5.7)$$

dove $\|\cdot\|$ indica la norma euclidea in \mathbb{R}^d .

Notazione

Date due funzioni f, g , la scrittura $f(x) \asymp g(x)$ per $\|x\| \rightarrow \infty$ significa che esistono due costanti positive R e c tali che

$$c^{-1}f(x) \leq g(x) \leq cf(x) \quad \forall x, \|x\| \rightarrow \infty.$$

Anche in questo caso l'obiettivo dello studio è quello di capire il comportamento del polimero diretto $(B_s)_{s \in [0,t]}$ rispetto alla misura $\mu_t^{\beta,\omega}$ quando t diventa grande per una tipica realizzazione dell'ambiente gaussiano ω .

Osserviamo che si dimostrano risultati analoghi a quelli visti per il polimero diretto in ambiente aleatorio a tempo e spazio discreti:

- la separazione tra disordine forte e disordine debole viene definita in termini del comportamento asintotico della funzione di partizione normalizzata, $W_t^{\beta,\omega}$ (si veda definizione (1.1));
- la dicotomia avviene in corrispondenza del valore critico della temperatura β_c ;
- si definisce l'energia libera del sistema ed il relativo valore critico, $\bar{\beta}_c$;

in questo caso però, tali risultati dipendono non solo dalla dimensione d ma anche dal numero positivo θ . Riassumiamo queste informazioni nel seguente

Teorema 5.3.1. *Vale la seguente caratterizzazione dei regimi di disordine debole/forte:*

- (i) se $d \geq 3$ e $\theta > 2$, allora $\bar{\beta}_c \geq \beta_c > 0$;
- (ii) se $d \geq 2$ e $\theta < 2$, allora $\beta_c = \bar{\beta}_c = 0$;
- (iii) quando $d = 1$, $\beta_c = \bar{\beta}_c = 0$ per ogni valore di θ .

In particolare, il teorema afferma che se $d \geq 3$ il comportamento del polimero browniano è diffusivo quando $\theta < 2$; al contrario, quando $\theta < 2$ si dimostra valere la superdiffusività per ogni valore della dimensione. Enunciamo i risultati rigorosi:

Teorema 5.3.2. *Quando $d \geq 2$ e $\theta < 2$ oppure quando $d = 1$ e $\theta < 1$, si ha*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{\mu_t^{\beta,\omega}} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} \|B_s\| \geq \epsilon t^{\frac{3}{4+\theta}} \right] = 1$$

Per $d = 1$, $Q \in L^1$, abbiamo

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{\mu_t^{\beta,\omega}} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} \|B_s\| \geq \epsilon t^{\frac{3}{5}} \right] = 1$$

dove \mathbf{E}_{μ_t} indica l'attesa rispetto alla misura dei polimeri.

D'altra parte, il limite superiore determinato per il modello di Peterman da Méjane si può estendere a questo modello:

Teorema 5.3.3. *Per ogni valore di β , d e una arbitraria Q e ogni $\alpha > \frac{3}{4}$, si ha*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\max_{s \in [0, t]} \|B_s\| \geq t^\alpha] = 0.$$

Osservazione 10. Da questi due teoremi si deduce che

$$\frac{3}{4 + (\theta \wedge d)} \leq \xi(d) \leq \frac{3}{4}$$

Di conseguenza, prendendo θ vicino allo zero, il limite superiore calcolato da Méjane diventa ottimale per ogni funzione di correlazione.

Per finire, vediamo un risultato che fornisce un limite inferiore alla varianza di $\ln Z_t$.

Teorema 5.3.4. *Per ogni valore di β , d e Q che verifica la (5.7), se α è tale che*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{\mu_t} [\max_{s \in [0, t]} \|B_s\| \geq t^\alpha] = 0,$$

allora esiste una costante c (che dipende da β, d e Q) tale

$$\text{Var}_{\mathbf{P}} \ln Z_t \geq ct^{1-(\theta \wedge d)\alpha}$$

In particolare, per ogni ϵ , possiamo trovare un c (dipendente da β, d, Q e ϵ) tale che

$$\text{Var}_{\mathbf{P}} \ln Z_t \geq ct^{1-(4-3\theta/4-\epsilon)\alpha}$$

Osservazione 11. L'idea alla base della dimostrazione di Lacoïn per la superdiffusività consiste nel confrontare fra loro il costo entropico ed il guadagno in termini di energia dovuto alla fluttuazione dell'ambiente da parte di un cammino browniano per raggiungere una distanza di t^α lontano dell'origine; infatti, è proprio questa sorta di competizione tra energia e costo entropico che permette alla superdiffusività di verificarsi. Lacoïn, quindi, dimostra che il costo entropico è inferiore rispetto al guadagno energetico, ne consegue il comportamento superdiffusivo del polimero.

Appendice A

Martingale

Questa appendice, basata sostanzialmente sul testo [18] di Williams, ha come obiettivo quello di raccogliere alcuni dei principali risultati teorici sulle martingale a tempo discreto che sono utili alla trattazione dei polimeri diretti in ambiente aleatorio fatta in questo elaborato. Iniziamo con alcune definizioni basilari:

Definizione A.1. Si chiama *spazio filtrato* la quaterna $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}, \mathbf{P})$, dove $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ è uno spazio di probabilità e $\{\mathcal{F}_n : n \geq 0\}$ è una filtrazione, ovvero una famiglia crescente di sotto σ -algebra di \mathcal{F} . Definiamo, inoltre, la σ -algebra

$$\mathcal{F}_\infty := \sigma\left(\bigcup_n \mathcal{F}_n\right).$$

Definizione A.2. Un processo stocastico $X = (X_n : n \geq 0)$ si dice *adattato* (alla filtrazione \mathcal{F}_n) se per ogni n , X_n è \mathcal{F}_n -misurabile.

Definizione A.3. Un processo stocastico adattato X con $\mathbf{E}[|X_n|] < \infty, \forall n$, si chiama

- *martingala* se

$$\mathbf{E}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1} \quad q.c. \quad (n \geq 1)$$

- *submartingala* se

$$\mathbf{E}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] \geq X_{n-1} \quad q.c. \quad (n \geq 1)$$

- *supermartingala* se

$$\mathbf{E}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] \leq X_{n-1} \quad q.c. \quad (n \geq 1)$$

Come si può dedurre dalla definizione, le proprietà di una martingala dipendono dalla filtrazione e dalla misura di probabilità considerata. Inoltre, osserviamo che X è una martingala se e soltanto se è allo stesso tempo una submartingala ed una supermartingala.

Supponiamo che X sia una martingala e $0 \leq k < n$, allora

$$\mathbf{E}[X_n | \mathcal{F}_k] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] | \mathcal{F}_k] = \mathbf{E}[X_{n-1} | \mathcal{F}_k] = \dots = X_k,$$

dove la prima uguaglianza segue dalle proprietà dell'attesa condizionata. Ne segue che per ogni n

$$\mathbf{E}[X_n] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[X_n | \mathcal{F}_0]] = \mathbf{E}[X_0],$$

pertanto le martingale hanno la caratteristica di essere costanti in media. Diversamente, una submartingala cresce in media, mentre una supermartingala decresce in media.

Osservazione 12. Se M è una martingala e ϕ è una funzione convessa su \mathbb{R} tale che $\phi(M)$ è integrabile, allora $\phi(M)$ è una submartingala. Infatti, per la disuguaglianza di Jensen

$$\mathbf{E}[\phi(M_{n+1}) | \mathcal{F}_n] \geq \phi(\mathbf{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n]) = \phi(M_n)$$

Ad esempio, se M è una martingala allora $|M|$ e M^2 sono martingale.

A.1 Esempi di martingale

Di seguito riportiamo alcuni casi particolari di famiglie di variabili aleatorie che sotto determinate condizioni risultano essere delle martingale.

1. Somma di v.a indipendenti e di media 0

Sia X_1, X_2, \dots una successione di variabili aleatorie indipendenti con $\mathbf{E}[|X_k|] < \infty, \forall k$, e tali che

$$\mathbf{E}[X_k] = 0, \quad \forall k$$

Definiamo la v.a.

$$S_n := X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

con $S_0 := 0$, e consideriamo la σ -algebra $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ con $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Allora S_n è una martingala rispetto alla σ -algebra \mathcal{F}_n .

Infatti,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S_n | \mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbf{E}[S_{n-1} + X_n | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= \mathbf{E}[S_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}] + \mathbf{E}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= S_{n-1} + \mathbf{E}[X_n] \\ &= S_{n-1}, \end{aligned}$$

dove, in particolare, la seconda uguaglianza si ottiene per la linearità dell'attesa condizionata e la terza perché S_{n-1} , per costruzione, è \mathcal{F}_{n-1} -misurabile, e per l'indipendenza di X_n da \mathcal{F}_{n-1} .

2. Prodotto di v.a. indipendenti non negative di media unitaria

Sia X_1, X_2, \dots una successione di variabili aleatorie indipendenti non negative con

$$\mathbf{E}[X_k] = 1, \forall k.$$

Definiamo

$$M_n := X_1 X_2 \dots X_n,$$

con $M_0 := 1$, e prendiamo \mathcal{F}_n definita come sopra. Allora, M è una martingala rispetto alla σ -algebra \mathcal{F}_n .

Infatti, si ha

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbf{E}[M_{n-1}X_n|\mathcal{F}_n] \\ &= M_{n-1}\mathbf{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] \\ &= M_{n-1}\mathbf{E}[X_n] \\ &= M_{n-1},\end{aligned}$$

dove, analogamente al caso precedente, abbiamo usato il fatto che M_{n-1} è \mathcal{F}_{n-1} -misurabile e l'indipendenza di X_n da \mathcal{F}_{n-1} .

3. Gioco equo- non equo

Pensiamo a $X_n - X_{n-1}$ come alla vincita netta di un giocatore all' n -esima partita in una successione di partite che iniziano al tempo $n = 1$. Allora, nel caso in cui X sia una martingala

$$\mathbf{E}[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] = 0 \quad (\text{gioco equo}),$$

nel caso in cui X sia una supermartingala

$$\mathbf{E}[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] \leq 0 \quad (\text{gioco non equo})$$

A.2 Convergenza

Definizione A.4. Un processo C si dice *prevedibile* rispetto alla σ -algebra $\{\mathcal{F}_n\}$ se $\forall n \geq 1$ C_n è \mathcal{F}_{n-1} misurabile.

Pensiamo a C_n come alla scommessa fatta da un giocatore alla partita n . La vincita dopo la n -esima partita è data da $C_n(X_n - X_{n-1})$, mentre la vincita complessiva fino al tempo n è

$$Y_n = \sum_{1 \leq k \leq n} C_k(X_k - X_{k-1})$$

Definizione A.5. Il numero $U_N[a, b]$ di upcrossings dell'intervallo $[a, b]$ del processo $n \mapsto X_n(\omega)$ fino al tempo N è definito come il più grande numero intero positivo k tale possiamo trovare

$$0 \leq s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \dots < s_k < t_k \leq N$$

con

$$X_{s_i}(\omega) < a, \quad X_{t_i}(\omega) < b \quad (1 \leq i \leq k).$$

Lemma A.2.1. *Sia X una supermartingala limitata in L^1 , ossia tale che*

$$\sup_n \mathbf{E}[|X_n|] < \infty.$$

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$. Allora, posto $U_\infty[a, b] := \lim_{N \uparrow \infty} U_N[a, b]$,

$$(b - a) \mathbf{E}[U_\infty[a, b]] \leq |a| \sup_n \mathbf{E}[|X_n|] < \infty \quad (\text{A.1})$$

così che

$$\mathbf{P}(U_\infty[a, b] = \infty) = 0$$

Teorema A.2.2 (Teorema di convergenza). *Sia X una supermartingala limitata in L^1 , cioè tale che $\sup_n \mathbf{E}[|X_n|] < \infty$. Allora, q.c esiste finito il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n := X_\infty$ ed esso risulta \mathcal{F}_∞ -misurabile.*

Dimostrazione. Poniamo

$$\Lambda := \{\omega : X_n(\omega) \text{ non converge in } [-\infty, +\infty]\}.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \Lambda &= \{\omega : \liminf X_n(\omega) < \limsup X_n(\omega)\} \\ &= \bigcup_{a, b \in \mathbb{Q}: a < b} \{\omega : \liminf X_n(\omega) < a < b < \limsup X_n(\omega)\} \\ &= \bigcup \Lambda_{a, b} \end{aligned}$$

Ma

$$\Lambda_{a, b} \subseteq \{\omega : U_\infty[a, b] = \infty\},$$

così per il lemma precedente, $\mathbf{P}(\Lambda_{a, b}) = 0$. Ora, poiché Λ è unione numerabile di insiemi $\Lambda_{a, b}$, $\mathbf{P}(\Lambda) = 0$, perciò

$$X_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n \in [-\infty, \infty].$$

Per il lemma di Fatou,

$$\mathbf{E}[|X_\infty|] = \mathbf{E}[\liminf_n |X_n|] \leq \liminf_n \mathbf{E}[|X_n|] < \infty,$$

pertanto

$$\mathbf{P}(X_\infty \text{ è finito}) = 1.$$

□

Corollario A.2.3. *Se X è una supermartingala non negativa, allora il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X_\infty$ esiste q.c.*

Dimostrazione. Per il teorema precedente, basta far vedere che X è limitata in L^1 . Si ha

$$\mathbf{E}[|X_n|] = \mathbf{E}[X_n] \leq \mathbf{E}[X_0]$$

□

A.3 Uniforme integrabilità

Definizione A.6. Una famiglia \mathcal{C} di variabili aleatorie si dice *uniformemente integrabile* se dato $\epsilon > 0$, esiste $K \in [0, \infty)$ tale che

$$\mathbf{E}[|X|; |X| > K] < \epsilon \quad \forall X \in \mathcal{C}. \quad (\text{A.2})$$

Osserviamo che per una tale famiglia \mathcal{C} , prendendo K_1 relativo a $\epsilon = 1$ per tutti gli $X \in \mathcal{C}$, si ha

$$\mathbf{E}[|X|] = \mathbf{E}[|X| : |X| > K_1] + \mathbf{E}[|X|; |X| \leq K_1] \leq 1 + K_1$$

ciò implica che una famiglia uniformemente integrabile è limitata in L^1 ; in generale, non vale il viceversa.

Esempio A.1. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = ([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], Leb)$. Poniamo

$$E_n = (0, n^{-1}), \quad X_n = nI_{E_n}.$$

Allora, $\mathbf{E}[|X_n|] = 1$ così che X_n è limitata in L^1 . Tuttavia, per ogni $K > 0$, si ha che per $n > K$,

$$\mathbf{E}[|X_n|; |X_n| > K] = n\mathbf{P}(E_n) = 1,$$

perciò X_n non è uniformemente integrabile.

Il seguente risultato ci dà una condizione sufficiente perchè valga la proprietà di uniforme integrabilità.

Teorema A.3.1. *Supponiamo che \mathcal{C} sia una famiglia di variabili aleatorie limitate in L^p per qualche $p > 1$, cioè, per qualche $A \in [0, \infty)$*

$$\mathbf{E}[|X|^p] < A, \quad \forall X \in \mathcal{C}.$$

Allora, \mathcal{C} è uniformemente integrabile.

Dimostrazione. Sia $v \geq K > 0$, allora $v \leq K^{1-p}v^p$. Perciò, per $K > 0$ e $X \in \mathcal{C}$, abbiamo

$$\mathbf{E}[|X|; |X| > K] \leq \mathbf{E}[|X|^p; |X| > K] \leq K^{1-p}A$$

□

Definizione A.7. Sia $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie, e sia X una variabile aleatoria. Diciamo che X_n converge a X in probabilità se per ogni $\epsilon > 0$,

$$\mathbf{P}(|X_n - X| > \epsilon) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Lemma A.3.2. *Se $X_n \rightarrow X$ q.c., allora $X_n \rightarrow X$ in probabilità.*

Dimostrazione. Supponiamo che $X_n \rightarrow X$ q.c. e che $\epsilon > 0$. Allora, per il lemma di Fatou si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} |X_n - X| > \epsilon\right) = \mathbf{P}(\limsup |X_n - X| > \epsilon) \\ &\geq \limsup_n \mathbf{P}(|X_n - X| > \epsilon), \end{aligned}$$

ne segue che $\mathbf{P}(|X_n - X| > \epsilon) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. □

Il prossimo teorema ci dà una condizione necessaria e sufficiente per la convergenza in L^1 di una variabile aleatoria.

Teorema A.3.3. *Sia (X_n) una successione in L^1 , e sia $X \in L^1$. Allora $X_n \rightarrow X$ in L^1 (cioè $\mathbf{E}[|X_n - X|] \rightarrow 0$), se e solo se sono soddisfatte le seguenti due condizioni:*

- (i) $X_n \rightarrow X$ in probabilità,
(ii) la successione (X_n) è uniformemente integrabile.

Applichiamo questo risultato nel caso di famiglia di martingale.

Teorema A.3.4. *Sia $M = (M_n, n \in \mathbb{Z}^+)$ una martingala uniformemente integrabile. Allora,*

$$M_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} M_n \quad \text{esiste q.c. e in } L^1$$

Dimostrazione. Poichè M è uniformemente integrabile per ipotesi, M è limitata in L^1 . Per il teorema (A.2.2) sulla convergenza delle martingale, esiste q.c. il limite $M_\infty = \lim M_n$.

Rimane da far vedere la convergenza in L^1 . Usiamo il teorema precedente, infatti abbiamo appena dimostrato che la successione converge q.c., allora per il lemma sopra converge in probabilità. Sono così soddisfatte le condizioni (i) e (ii) del teorema precedente; ciò equivale a dire che M_n converge in L^1 . \square

A.4 Decomposizione di Doob

Teorema A.4.1 (Teorema di decomposizione di Doob). *Ogni submartingala $X_n, n \geq 0$ si può scrivere in modo unico come*

$$X_n = M_n + A_n$$

dove M_n è una martingala e A_n è un processo prevedibile crescente con $A_0 = 0$.

Dimostrazione. Vogliamo che

$$X_n = M_n + A_n, \quad \mathbf{E}[M_n | \mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1}, \quad \text{e} \quad A_n \in \mathcal{F}_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Perciò, dobbiamo avere

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbf{E}[M_n | \mathcal{F}_{n-1}] + \mathbf{E}[A_n | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= M_{n-1} + A_n = X_{n-1} - A_{n-1} + A_n \end{aligned}$$

da cui

- $A_n - A_{n-1} = \mathbf{E}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] - X_{n-1}$
- $M_n = X_n - A_n$.

Per assunzione $A_0 = 0$ e $M_0 = X_0$, allora A_n e M_n sono definiti per ogni valore di n , e quindi abbiamo mostrato l'unicità.

Osserviamo che A_n è crescente, infatti $A_n - A_{n-1} \geq 0$ poichè X_n è una submartingala. Facciamo quindi vedere che $A_n \in \mathcal{F}_{n-1}$. Procediamo per induzione. Prendiamo $n = 1$, risulta $A_1 = A_0 + \mathbf{E}[X_1 | \mathcal{F}_{n-1}] - X_0 \in \mathcal{F}_0$. Supponiamo poi che A_n sia \mathcal{F}_{n-1} -misurabile e mostriamo che $A_{n+1} \in \mathcal{F}_n$, si ha

$$A_{n+1} = A_n - (X_n - \mathbf{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n])$$

in cui tutti i termini a secondo membro sono \mathcal{F}_n -misurabili, infatti $A_n \in \mathcal{F}_{n-1} \subseteq \mathcal{F}_n$ e $X_n \in \mathcal{F}_n$ poichè adattato. A questo punto rimane da far vedere che M_n è una martingala. Si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[M_n | \mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbf{E}[X_n - A_n | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= \mathbf{E}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] - \mathbf{E}[A_n | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= X_{n-1} - A_{n-1} = M_{n-1}. \end{aligned}$$

□

A.4.1 Martingale di quadrato integrabile

Vediamo ora un'applicazione del teorema precedente a martingale limitate in L^2 .

Sia M_n una martingala in L^2 ($\mathbf{E}[M_n^2] < \infty, \forall n$), con $M_0 = 0$. Per la disuguaglianza di Jensen, M_n^2 è una submartingala, di conseguenza, applicando il teorema di decomposizione di Doob, esiste una martingala N_n ed un processo prevedibile crescente A_n entrambi nulli in 0 tali che

$$M_n^2 = N_n + A_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

In generale, il processo A è detto compensatore di M e viene indicato con $\langle M \rangle$. Si definisce, inoltre,

$$\langle M \rangle_\infty := \lim_{n \uparrow \infty} \langle M \rangle_n.$$

I successivi due teoremi ci mostrano il comportamento asintotico della martingala M_n su $\{\langle M \rangle_\infty < \infty\}$ e $\{\langle M \rangle_\infty = \infty\}$, rispettivamente. Per la dimostrazione di entrambi si veda cap. 4 di [8].

Teorema A.4.2. *Il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n$ esiste finito q.c. su $\{\langle M \rangle_\infty < \infty\}$.*

Teorema A.4.3. *Sia $f \geq 1$ crescente con $\int_0^\infty f(t)^{-2} dt < \infty$. Allora, $M_n/f(\langle M \rangle_n) \rightarrow 0$ q.c. su $\{\langle M \rangle_\infty = \infty\}$.*

Bibliografia

- [1] F. Biagini, M. Campanino (2006), *Elementi di probabilità e statistica*, Springer, Milano.
- [2] E. Bolthausen (1989), *A note on diffusion of directed polymers in a random environment*, Commun. Maths. Phys **123**.
- [3] F. Caravenna, F. den Hollander, N. Pétrelis (2012), *Lectures on random polymers*.
- [4] F. Comets, N. Yoshida (2005), *Directed polymers in random environment are diffusive at weak disorder.*, Ann. Probab. **34**, 1746-1770
- [5] F. Comets, T. Shiga , N. Yoshida (2002), *Directed polymers in random environment: path localization and strong disorder.*, Bernoulli **9** 4, 705-723
- [6] F. Comets (2009), *Méthodes et modèles probabilistes en physique statistique*, ALEA.
- [7] F. Comets, T. Shiga, and N. Yoshida (2004), *Probabilistic Analysis of Directed Polymers in a Random Environment: a Review*, Adv. Stud. Pure Math. **39**, 115-142 .
- [8] R. Durrett (2005), *Probability theory and examples*, Thomson Brooks/Cole, terza edizione.
- [9] W. Feller (1968), *An introduction to probability theory and its applications*, Vol. I, Third edition, John Wiley and Sons.

- [10] F. den Hollander (2009), *Random polymers*, Lecture Notes in Mathematics 1974, Springer, Berlin.
- [11] H. Lacoïn (2009), *Désordre et phénomènes de localisation*, Phd Thesis.
- [12] H. Lacoïn (2010), *Influence of spacial correlation for directed polymers*, Ann. Probab. **39**, 139-175.
- [13] H. Lacoïn (2012), *Localization and diffusivity for a directed polymers in random environment*.
- [14] H. Lacoïn (2009), *New bounds for the free energy of directed polymer in dimension 1+1 and 1+2*, [http:// fr.arxiv.org/abs/0901.0699](http://fr.arxiv.org/abs/0901.0699)
- [15] O. Méjane (2004), *Upper bound of a volume exponent for directed polymers in a random environment*. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 40 299-308.
- [16] M.S.T. Piza (1997), *Directed polymers in a random environment: some results on fluctuations*. Journal of Statistical Physics, 89(3-4) 581-603.
- [17] C. Rovira, S. Tindel (2005), *On the Brownian-directed polymer in a Gaussian random environment.*, J. Funct. Anal. 222 178-201.
- [18] D. Williams (1991), *Probability with martingale.*, Cambridge mathematical textbooks.