Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Triennale in Matematica

TRIANGOLI ARITMETICI

Tesi di Laurea in Algebra

Relatore:
Chiar.mo Prof.
LIBERO VERARDI

Presentata da:
CRISTIAN ACCCOGLI

Anno Accademico 2013/14

Indice

Introduzione

Tratto questo argomento perchè da sempre, dai primi anni di scuola secondaria, questi ed altri triangoli hanno stuzzicato la voglia di conoscere un mondo a me sconosciuto e trovare nuove relazioni tra i vari coefficienti. Quindi in questa tesi di laurea tratto vari triangoli aritmetici cioè triangoli composti da numeri naturali. In particolare tratto il triangolo di **Tartaglia** il triangolo di **Stirling** il triangolo di **Eulero** ed il triangolo di **Leibniz** spiegando la loro costruzione il loro utilizzo nei vari argomenti ed il significato dei vari coefficienti da cui sono composti.
Per quanto riguarda il primo triangolo faccio prima una ricostruzione storica, elencando i vari matematici che hanno dato impropriamente il loro nome, seguita dalla sua costruzione tramite i coefficienti binomiali. Presento poi la costruzione dei coefficienti del triangolo tramite formula ricorsiva, ed il loro utilizzo. Inoltre, mostro come tramite i coefficienti binomiali si possano ottenere i coefficienti di Fibonacci e di Catalan.
Nel secondo triangolo parlo dei numeri di Bell ed i numeri di Stirling, partendo dalle relazioni di equivalenza e partizioni di un insieme. Qui presento la costruzione dei coefficienti del triangolo, tramite formula ricorsiva, ed il loro utilizzo.
Per il terzo triangolo spiego semplicemente a cosa si riferiscono i vari coefficienti che lo compongono: elencherò alcune relazioni tra i vari coefficienti. Anche qui faccio vedere la costruzione dei coefficienti del triangolo, tramite formula ricorsiva, ed il loro utilizzo.
Anche per il quarto, ed ultimo triangolo, spiego semplicemente a cosa si riferiscono i vari coefficienti che lo compongono le relazioni che ci sono tra loro, mostro le analogie che ci sono con il triangolo di Tartaglia ed infine faccio vedere che il triangolo può essere uno strumento per calcolare il valore di particolari serie aritmetiche.

Capitolo 1

Triangolo di Tartaglia

1.1 Cenno storico

Il *Triangolo di Tartaglia* (detto anche triangolo di Pascal o Khayyam o Yanghui) è una disposizione geometrica a forma di triangolo dei coefficienti binomiali, ossia dei coefficienti dello sviluppo del binomio (a+b) elevato ad una qualsiasi potenza n.
La costruzione del triangolo di Tartaglia era nota a matematici cinesi nel XIV secolo e forse anche in epoca anteriore.
In Italia prese il nome da **Tartaglia (Niccolò Fontana 1499-1557)**, che lo descrisse in un suo diffuso trattato dal titolo *General trattato di numeri et misure* nel 1556, ma in Francia e successivamente anche nel mondo anglosassone prende il nome da **Blaise Pascal (1623-1662)**, che un secolo dopo, nel 1654, ne fece grande uso nei suoi studi sulla probabilità e che lo caratterizzò con nuove proprietà fino ad allora sconosciute.
In Germania invece è comunemente attribuito a **Michael Stifel (1487-1567)**, che ne scrisse nel 1544.
In realtà il triangolo porta impropriamente questi nomi, infatti come avevo anticipato, era già conosciuto in Cina come *triangolo di Yang Hui* dal nome del matematico **Yang Hui (1238-1298)**, ma la prima illustrazione cinese esistente del " Triangolo di Pascal " noto come *triangolo di Jia Xian* risale intorno alla prima metà del XI secolo, circa sei secoli prima di Pascal. **Jia Xian (1010-1070)** lo ha usato come strumento per l'estrazione di quadrati e radici cubiche. Il libro originale di Jia Xian intitolato *Shi Suo Suan Shu* è andato perduto, tuttavia, il metodo di Jia è stato esposto in dettaglio da Yang Hui , che esplicitamente ha riconosciuto la sua fonte: "Il mio metodo di ricerca di radici quadrate e cubiche si è basata sul metodo Jia Xian Shi Suo Suan Shu". È apparso di nuovo in una pubblicazione di **Zhu Shijie**

(1270-1330) nel libro delle quattro incognite del 1303.
Invece, in Persia era conosciuto come *triangolo di Umar Khayyam.* **Umar Khayyam (1048-1131)** si rende conto che le equazioni cubiche possono avere soluzioni multiple, precedendo i lavori degli algebristi rinascimentali italiani. Egli si occupa anche del triangolo di Pascal e dei coefficienti binomiali.
In India conosciuto come *triangolo di Pingala.* **Pingala (IV-III secolo a.c.)** inventò un sistema binario, studiò quelli che in seguito verranno definiti come successione di Fibonacci e Triangolo di Pascal.

1.2 Numero delle funzioni tra due insiemi finiti

Siano A e B due insiemi finiti, con $|A| = m$ e $|B| = n$; vogliamo determinare il numero delle funzioni da A a B. Tali funzioni sono in corrispondenza biunivoca con le liste di lunghezza m in B; il nostro problema si limita a calcolare il numero delle liste di lunghezza data in un insieme finito B, di cardinalita n.
Il numero delle liste di lunghezza m in un insieme di cardinalità n è uguale ad n^m.

Proposizione.
Siano A e B due insiemi finiti, con $|A| = m$ e $|B| = n$. Il numero delle funzioni $f : A \to B$ è uguale ad n^m, cioè:

$$|B^A| = |B|^{|A|}$$

Osservazione.
Se A e B sono vuoti, c'è tra di essi la funzione vuota $\varnothing \times \varnothing$. Allora, in questo contesto:

$$0^0 = 1$$

Poiché poi questa funzione è biiettiva allora:

$$0! = 1$$

1.3 Numero di sottoinsiemi in un insieme finito

Sia A un insieme finito con $|A| = n$. Il numero dei sottoinsiemi di un insieme di cardinalità n è 2^n, cioé:

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$$

Esempio.
Consideriamo un insieme di cardinalità 3, $A = \{a, b, c\}$; i sottoinsiemi di A sono $2^3 = 8$ e precisamente:

$$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A$$

.

1.4 Le permutazioni. Il fattoriale

Vogliamo ora determinare il numero di funzioni biiettive tra due insiemi, con la stessa cardinalità; ancora una volta affrontiamo il problema relativo alle liste.
Sia dunque A un insieme finito, con $|A| = n$. Una *permutazione* di A è una lista senza ripetizioni in A di lunghezza pari alla cardinalità di A. Per il risultato già visto possiamo dire che il numero delle permutazioni di un insieme di cardinalità n è $n(n-1)(n-2)...1$
Tale numero si chiama *fattoriale di n* oppure *n fattoriale* e si indica con il simbolo:

$$n! = n(n-1)(n-2)...1$$

Se $n = 0$ allora $0! = 1$ come già osservato.

1.4.1 Funzioni biiettive tra due insiemi finiti

Siano A eB due insiemi finiti, sappiamo che esistono funzioni biiettive se e solo se $|A| = |B|$ e che ogni funzione iniettiva è suriettiva e viceversa.
Inoltre abbiamo che il numero di tali funzioni biiettive è $n!$

1.5 Numero di sottoinsiemi di cardinalità fissata di un insieme finito

Sia A un insieme finito, con $|A| = n$. Abbiamo calcolato il numero di sottoinsiemi che è 2^n, ora vogliamo calcolare il numero dei sottoinsiemi di cardinalità k. Indichiamo con $\binom{n}{k}$ il numero di tali sottoinsiemi. Tale numero è detto *coefficiente binomiale* di numeratore n e denominatore k.
Si noti che per $k = 0$ e $k = n$ tale numero è uguale a 1: infatti l'unico

sottoinsieme di cardinalità zero è l'insieme vuoto e l'unico di cardinalità n è A stesso. Abbiamo:

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$$

Supponiamo ora $n > 0$ e scegliamo un intero k tale che $1 \leq k \leq n$; per determinare il valore del coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$, osserviamo che una lista di lunghezza k in A senza ripetizioni si ottiene scegliendo prima k elementi distinti di A per poi determinare l'ordine di tali elementi (l'etichettamento), quindi: $(n)_k = \binom{n}{k}k!$ da cui:

$$\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Abbiamo visto che per convenzione $0! = 1$ e $(n)_0 = 1$ e quindi ritroviamo:

$$\binom{n}{0} = 1$$

1.6 Funzioni iniettive e suriettive tra insiemi finiti

Siano A e B due insiemi finiti. Vogliamo ora prendere in esame in particolare le funzioni iniettive e suriettive da A a B. Comunque se i due insiemi A e B hanno cardinalità diversa ed esiste una funzione iniettiva non può esistere una funzione suriettiva, e viceversa, se esiste una funzione suriettiva non può esistere una funzione iniettiva da A a B.
Se invece hanno lo stesso numero di elementi ogni funzione iniettiva è anche suriettiva e viceversa. Quindi abbiamo che:
1. se $|A| < |B|$, non esistono funzioni suriettive da A a B
2. se $|A| > |B|$, non esistono funzioni iniettive da A a B
3. se $|A| = |B|$, ogni funzione iniettiva è suriettiva da A a B e viceversa.

1.7 Liste senza ripetizione. Il fattoriale decrescente

Siano A e B due insiemi finiti e non vuoti, con $|A| = m$ e $|B| = n$; vogliamo calcolare il numero delle funzioni iniettive da A a B.
Sappiamo che esistono solo se $|A| \leq |B|$; Sia quindi $m \leq n$, affrontiamo il problema: ad ogni funzione da A a B corrisponde una lista di lunghezza m

in B. Cerchiamo di determinare il numero di liste di lunghezza m in B che non hanno ripetizioni.
Allora, il primo elemento può essere scelto in n modi, per il secondo restano $n-1$ scelte, e cosí via fino ad arrivare all'ultimo (m-esimo) che ha $n-m+1$ modi per essere scelto.
Per il principio della moltiplicazione abbiamo che il numero delle liste senza ripetizioni di lunghezza m in un insieme di cardinalità $n \geq m$ è:

$$n(n-1)...(n-m+1)$$

Tale numero viene detto *fattoriale decrescente* di n con indice m ed è denotato con i simboli:

$$D_{n,m} = (n)_m = n(n-1)...(n-m+1)$$

Notiamo che è un polinomio di grado m.

Osservazione.
Per convenzione poniamo:
1. se $n < m \qquad (n)_m = 0$
2. $\forall\ n > 0 \qquad (n)_0 = 1$
3. $\forall\ m > 0 \qquad (0)_m = 0 \qquad (0)_0 = 1$

Proposizione. *(Principio di moltiplicazione)*
Siano A_1,A_2...A_p *insiemi, liste o n-ple ordinate; abbiamo:*

$$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_p| = |A_1||A_2|...|A_p|$$

1.7.1 Funzioni iniettive tra due insiemi finiti

Per le considerazioni appena fatte. Siano A e B due insiemi finiti con $|A| = m \leq |B| = n$, il numero delle funzioni iniettive da A a B è:

$$(n)_m = m!\binom{n}{m}$$

1.8 Formula di convoluzione di Vandermonde

Fissati due insiemi A e B di cardinalità rispettivamente n e m, poniamo $C = A \cup B$. Il numero di sottoinsiemi di C di cardinalità k contenenti i elementi di A e $k-i$ elementi di B è $\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$.

Facendo variare l'intero i tra 0 e k otteniamo tutti i possibili sottoinsiemi di C di cardinalità k che sappiamo essere:

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$$

Una applicazione importante di questa formula si ottiene ponendo n=m=k e tenendo conto che $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ otteniamo:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Si noti che se n è un naturale minore di k, si ha che:

$$\binom{n}{k} = 0$$

1.9 Il triangolo di Tartaglia e di Pascal

La formula di Stifel che vedremo nelle prossime pagine, fornisce un metodo ricorsivo per calcolare i coefficienti binomiali.
Consideriamo una matrice infinita le cui righe e colonne siano etichettate con i numeri 0,1,2,3,4...; nella posizione (i, j) (incrocio i-esima riga e j-esima colonna) inseriamo il coefficiente binomiale $\binom{i}{j}$. Il primo elemento della 0-esima riga della matrice è uguale a 1, mentre i restanti della stessa riga sono nulli. Gli elementi della 0-esima colonna sono tutti 1; tutti gli altri si ricavano come già visto.
Le prime righe della matrice sono le seguenti (omettendo gli elementi uguali a zero):

$\binom{i}{j}$	j=0	1	2	3	4	5	6	7
i=0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Gli elementi non nulli della matrice vengono a formare un triangolo (infinito) che viene detto *triangolo di Tartaglia*, come già osservato nell'introduzione storica.
Lo stesso triangolo scritto da *Pascal* diventa:

$\binom{i}{j}$	j=0	1	2	3	4	5	6	7
i=0	$\binom{0}{0}$							
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$						
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$					
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$				
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$			
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$		
6	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$	
7	$\binom{7}{0}$	$\binom{7}{1}$	$\binom{7}{2}$	$\binom{7}{3}$	$\binom{7}{4}$	$\binom{7}{5}$	$\binom{7}{6}$	$\binom{7}{7}$

Blaise Pascal, nel 1654, scrisse un intero libro, "Le Triangle Aritmetique", dedicato a questo triangolo e alle sue proprietà, in particolare nel campo del calcolo combinatorio.
Nel suo libro, Pascal riporta una formula che consente di ricavare un termine qualsiasi del triangolo, data la sua posizione. Si conti il numero delle righe e delle colonne a partire da zero, cioè l'1 iniziale sia la riga zero, e la colonna di 1 sia la colonna zero.
Con questa convenzione se il termine appartiene alla riga r e alla colonna s, si ha:

$$n = \frac{r(r-1)(r-2)...(r-s+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ...s} = \binom{r}{s}$$

Si noti invece che il termine dell'ottava colonna e quinta riga non esiste (o è zero). Pascal osservò ancora che quando nella prima colonna del triangolo compare un numero primo, e solo in questo caso, tutti i termini della riga corrispondente, tranne il primo e l'ultimo, sono multipli di tale numero. Ad esempio, nella settima riga, a parte l'1 iniziale e quello finale, tutti i termini sono multipli di 7. Ma la proprietà più importante del triangolo, analizzata da Pascal, è legata ai suoi studi sulla teoria dei giochi e sul calcolo combinatorio. Egli ha infatti scoperto che i numeri del triangolo corrispondono alle diverse combinazioni possibili di un dato gruppo di oggetti.

Esempio.
Siano a, b, c, d, e 5 oggetti, questi si possono combinare a due a due in 10 modi diversi:
ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de

e come possiamo notare 10 è proprio il numero all'incrocio della quinta riga con la seconda colonna.

1.9.1 La ricorsione dei coefficienti binomiali

Sia A un insieme di cardinalità $n \geq 2$ e k intero positivo, $1 \leq k \leq n-1$. Scelto un elemento a dell'insieme A, i sottoinsiemi di cardinalità k di A si distinguono in due tipi: quelli che contengo l'elemento a e quelli che non lo contengono. Indichiamo con $\mathcal{N}$ quelli che non lo contengono e con $\mathcal{L}$ quelli che lo contengono.
Quindi avremo per il principio di somma:

$$\binom{n}{k} = \mathcal{N} + \mathcal{L}$$

- Gli elementi della famiglia $\mathcal{N}$ sono tutti e i soli sottoinsiemi di cardinalità k dell'insieme $A' = A - \{a\}$ per cui $|\mathcal{N}| = \binom{n-1}{k}$.

- Un sottoinsieme della famiglia $\mathcal{L}$ é individuato dai suoi $k-1$ elementi diversi da a; quindi esso si ottiene dall'unione dell'insieme $\{a\}$ e di un sottoinsieme di cardinalità $k-1$ dell'insieme A'. Quindi la cardinalità di $\mathcal{L}$ è uguale al numero di sottoinsiemi di cardinalità $k-1$ di A', cioé $\binom{n-1}{k-1}$.

In definitiva otteniamo la formula:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Questa formula é nota come formula di **Stifel (1487-1567)**; essa consente di calcolare $\binom{n}{k}$ una volta noti i valori dei coefficienti binomiali con numeratore $n-1$.

Proposizione. *(Principio di somma)*
Siano A_1,A_2...A_p insiemi finiti a due a due disgiunti; abbiamo:

$$|\bigcup_{i=1}^{p} A_i| = |A_1| + |A_2| + ... + |A_p|$$

1.9.2 Relazioni sui coefficienti

Il triangolo ha molte altre numerose proprietà, alcune dipendenti dal metodo di costruzione, altre dalle proprietà dei coefficienti binomiali (le due cose sono legate tra loro).

Condizione al contorno
Essendo:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

tutti i numeri lungo il contorno sono uguali a uno.

Formula ricorrente(Stiefel)
Come già visto, vale la proprietà dei binomiali per cui:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Esempio:

$$\binom{6}{5} = \binom{5}{5} + \binom{5}{4}$$

Questo porta ad una formula ricorrente per calcolare un numero del triangolo: se voglio conoscere il numero alla riga n al posto k , basta sommare i due numeri della fila precedente allo stesso posto e al posto precedente, cioè otteniamo proprio la formula di costruzione.

Simmetria del triangolo
Scrivendo il triangolo non come una matrice ma come un triangolo isoscele, questo é simmetrico rispetto all'altezza, cioè:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Esempio:

$$\binom{6}{4} = \binom{6}{2}$$

Somma sulle righe
Si può notare che:

$$1 = 1 = 2^0$$

$$1 \quad + \quad 1 = 2 = 2^1$$

$$1 \quad + \quad 2 \quad + \quad 1 = 4 = 2^2$$

$$1 \quad + \quad 3 \quad + \quad 3 \quad + \quad 1 = 8 = 2^3$$

$$1 \quad + \quad 4 \quad + \quad 6 \quad + \quad 4 \quad + \quad 1 = 16 = 2^4$$

Cioé la somma della n-esima riga è 2^n, infatti tale somma è il numero di sottoinsiemi di un insieme con n elementi, cioè 2^n; oppure, come vedremo dopo, ogni riga contiene i coefficienti dello sviluppo delle potenze di un binomio; volendo prendere il binomio $1 + 1$, il suo sviluppo consiste nei semplici coefficienti, cioè:

$$(1 + 1)^n = 2^n$$

oppure possiamo considerare un insieme X, con $|X| = n$, allora l'insieme delle parti è:

$$|P(X)| = 2^n$$

Scrivendo in termini di coefficienti binomiali otteniamo:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Somma delle diagonali

Prendiamo una porzione del triangolo.

Sommando i numeri su una diagonale (1+3+6+10) otteniamo il numero adiacente al prossimo sulla diagonale (20). Questa è un' identità molto utile nel campo della combinatoria, chiamata comunemente con il nome di *Identità della mazza da hockey*, per analogia con la forma assunta evidenzia gli addendi e il risultato in diagonale.

Scrivendo in termini di coefficienti binomiali otteniamo:

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$$

Esempio:

$$\binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} = \binom{7}{5}$$

1.9.3 Binomio di Newton

In algebra il teorema binomiale (o anche formula di Newton, binomio di Newton e sviluppo binomiale) esprime lo sviluppo della potenza n-esima di un binomio qualsiasi con la formula seguente:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

in cui il fattore rappresenta il coefficiente binomiale ed è sostituibile con

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Tali coefficienti sono peraltro gli stessi che si trovano nel triangolo di Tartaglia.
Lo sviluppo vale per ogni coppia di numeri reali o complessi, ma piu in generale vale in ogni anello commutativo.
Come esempio di applicazione della formula, riportiamo i casi con $n = 2$, $n = 3$ ed $n = 4$:

$$\begin{aligned}(x+y)^2 =& x^2 + 2xy + y^2\\ (x+y)^3 =& x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\\ (x+y)^4 =& x^4 + 4x^3 + 6x^2y2 + 4xy^3 + y^4\end{aligned}$$

Nel caso in cui n sia un numero reale o complesso, la somma finita è sostituita da una serie infinita. Questa formula generalizzata, nel caso di n reale positivo, fu realizzata da **Isaac Newton (1642-1727)** (da cui il nome).

1.10 I numeri di Fibonacci

Adesso facciamo vedere come con due procedimenti diversi otteniamo la stessa successione numerica. Nel primo procedimento i numeri di **Fibonacci** (Leonardo Pisano (1170-1240)) si ottengono definendo i primi due e poi tramite un algoritmo si ottiene ricorsivamente tutta la successione; il secondo procedimento è importante perché ci fa ricavare i numeri di Fibonacci dai coefficienti del triangolo di Tartaglia.

1.10.1 Ricorsione dei numeri di Fibonacci

La successione di Fibonacci è una successione in sequenza di numeri interi naturali ciascun numero della quale è il risultato della somma dei due precedenti. La successione si definisce matematicamente assegnando i valori dei due primi termini:

$$F_0 = 0$$

ed

$$F_1 = 1$$

e chiedendo che per ogni successivo sia:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Questa formula consente di calcolare progressivamente i numeri di Fibonacci, tenendo presente che i primi numeri sono $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$ Qui di seguito diamo i valori di F_n per $n = 0, 1, 2, ...$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
F$_n$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Osservazione.
La successione di Fibonacci è importante perchè spesso in natura ritroviamo tali numeri, tra i tanti esempi abbiamo:

1. *molti fiori presentano un numero di petali che è un numero di Fibonacci;*
2. *le foglie sui rami di numerose piante sono disposte in modo da presentare alcuni numeri della sequenza di Fibonacci;*
3. *il rapporto fra le lunghezze delle falangi di un dito di un uomo adulto formano una piccola serie di Fibonacci, e cosi via.*

1.10.2 Numeri di Fibonacci dal triangolo di Tartaglia

Fissiamo un intero $n > 1$; vogliamo sapere quanti sono i sottoinsiemi di cardinalità k dell'insieme $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$ che non contengono mai due numeri consecutivi. In altri termini vogliamo sapere il numero dei sottoinsiemi S di cardinalità k di A tali che, se $x \in S$, $x + 1 \notin S$ & $x - 1 \notin S$.
Per ogni sottoinsieme S di A , sia χ_s la funzione caratteristica di S: consideriamo la lista di lunghezza n in $\{0, 1\}$ che corrisponde a χ_s, rispetto all'etichettamento naturale di A. S è un sottoinsieme del tipo richiesto se e solo se soddisfa le due condizioni richieste:

- contiene esattamente k simboli uguali ad 1
- non contiene due simboli consecutivi uguali ad 1.

Il nostro problema si riconduce a contare le liste di lunghezza n in $\{0, 1\}$ che soddisfa le due condizioni 1 e 2. Per costruire una di queste liste, si può procedere nel modo seguente: si scrivono prima $n - k$ cifre uguali a 0, e poi si interpongono k cifre uguali a 1 in modo che non ci siano mai due cifre 1 consecutive. Le posizioni in cui si possono inserire le cifre 1 sono tante quanti gli spazi tra gli zeri, che sono $n-k-1$, più le due posizioni all'estrema destra e all'estrema sinistra. In totale, le k cifre uguali a 1 si possono inserire in $n - k + 1$ posizioni, e quindi ci sono $\binom{n-k+1}{k}$ inserimenti possibili, ciascuno dei quali fornisce una lista con le proprietà volute.

Esempio.
Per scrivere le liste di lunghezza 6 in $\{0, 1\}$ che contengono 3 cifre 1, di cui mai due consecutive, scriviamo prima una lista di 3 cifre 0:

0	0	0

poi inseriamo gli spazi vuoti:

	0		0		0	

quindi, scegliamo 3 dei 4 spazi in cui inserire la cifra 1; le scelte possibili sono, in questo caso, $\binom{4}{3} = 4$, e precisamente sono:

1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1

In generale abbiamo che i sottoinsiemi di cardinalità k dell'insieme $\{1, 2, 3, ..., n\}$ che non contengono due interi consecutivi sono:

$$\binom{n-k+1}{k}$$

Da questa formula, utilizzando il principio di somma, posssiamo ottenere facilmente il numero totale di sottoinsiemi di $\{1, 2, 3, ..., n\}$ che non contengono due interi consecutivi:

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n-k+1}{k}$$

Possiamo notare che l'indice di sommatoria varia solo apparentemente in tutto l'insieme dei naturali, in realta sappiamo che $\binom{n}{k} = 0$ per $k > n$, quindi gli addendi non sono nulli solo se $k \leq n - k + 1$
Per ogni intero positivo n, l'ennesimo *numero di Fibonacci* è per definizione l'intero $\sum_{k\geq 0}\binom{n-k+1}{k}$, e viene indicato di solito con il simbolo F_n. Si pone per convenzione $F_0 = 0$. Quindi:

$$F_0 = 0$$

$$F_n = \sum_{k\geq 0}\binom{n-k+1}{k} \quad n \geq 1$$

Con questa notazione abbiamo che il numero di sottoinsiemi dell'insieme $\{1, 2, 3, ..., n\}$ che non contengono due interi consecutivi è F_{n+2}.

Esempio.
I sottoinsiemi di $\{1, 2, 3, 4\}$ sono i seguenti:

$$\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\},$$
$$\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}$$

Tra questi, quelli che non contengono due interi successivi sono $F_6 = 8$ e precisamente:

$$\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}$$

.

Osserviamo che i numeri di Fibonacci sono ottenuti sommando gli elementi del triangolo di Tartaglia che sono disposti lungo le linee parallele alla diagonale secondaria; guardando il triangolo di Tartaglia:

$$\begin{array}{lllllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
\end{array}$$

abbiamo che:

$F_0 = 0$

$F_1 = 1$

$F_2 = 1$

$F_3 = 1 + 1 = 2$

$F_4 = 1 + 2 = 3$

$F_5 = 1 + 3 + 1 = 5$

$F_6 = 1 + 4 + 3 = 8$

1.11 I numeri di Catalan

Anche i numeri di **Charles Catalan (1814-1894)** sono collegati al triangolo di Tartaglia e quindi sono legati ai coefficienti binomiali dalla relazione:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

I numeri al centro nel triangolo di Tartaglia sono:
$1, 2, 6, 20, 70, 252, 924, 3432, 12870, 48620, ...$

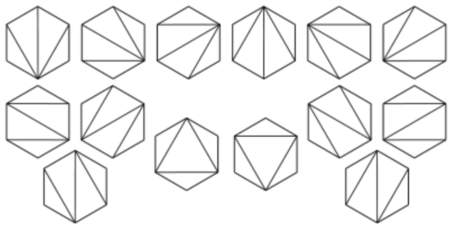
$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

e possono essere divisi per $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...$ ottenendo cosí i numeri:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C$_n$	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862

che sono appunto i *numeri di Catalan*. Ora vediamo perché sono interessanti. È sorprendente il numero di situazioni nelle quali compaiono i numeri di Catalan; ad esempio:

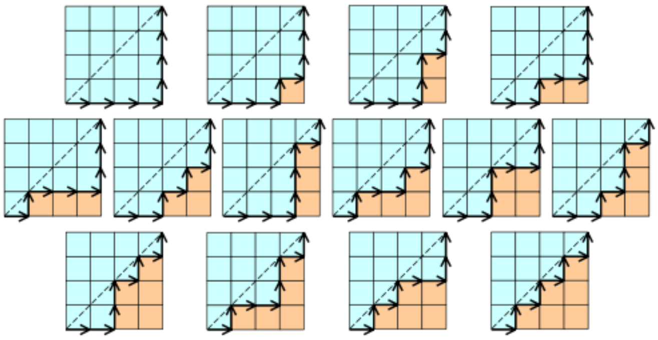
1. C_{n+1} è il numero di modi in cui un poligono convesso con $n+2$ lati può essere suddiviso in triangoli. Ad esempio:
   per $n = 3$ il poligono è un pentagono e i modi sono effettivamente $C_4 = 5$
   per $n = 4$ il poligono è un esagono e i modi sono effettivamente $C_5 = 14$, e cosi via.
   Ad esempio, per $n = 4$ si ottiene $C_5 = 14$:

2. C_{n+1} è il numero delle parole di **Dyck (1856-1934)** di lunghezza $2n$.
   Una parola di Dyck è composta di n lettere X e n lettere Y.
   Ad esempio, le parole di Dyck con 6 lettere sono effettivamente $C_4 = 5$:
   XXXYYY
   XYXXYY
   XYXYXY
   XXYYXY
   XXYXYY.

3. C_{n+1} è il numero di modi in cui e possibile inserire n coppie di parentesi in un prodotto di n+1 fattori.
   Ad esempio, per $n = 3$ si ottiene $C_4 = 5$:
   (a(b(cd)))
   (a((bc)d))
   ((a(bc))d)
   (((ab)c)d)
   ((ab)(cd))

4. C_{n+1} è il numero dei cammini in una griglia $n \times n$ che collegano due vertici opposti senza mai attraversare la diagonale.
   I cammini per $n = 4$ sono effettivamente $C_5 = 14$:



1.11.1 Ricorsione dei numeri di Catalan

I numeri di Catalan possono essere definiti in modo ricorsivo imponendo

$$C_0 = 0$$

e

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i} \quad \forall n > 1$$

La successione di questi numeri però già nel XVIII secolo era stata individuata dal matematico tedesco-ungherese **Jan Andrej Segner (1704-1777)** che nel 1758 notò per la prima volta la suddetta relazione di ricorrenza. In particolare, la relazione mostra che i numeri di Catalan sono effettivamente dei numeri interi.
Una espressione alternativa è la seguente:

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} \quad \forall n > 1$$

Capitolo 2

Triangolo di Stirling e numeri di Bell

2.1 Partizione di un insieme

Definizione.
Sia A un insieme non vuoto, una partizione di A *è un insieme π di sottoinsiemi non vuoti di A, tali che:*

- $\forall X, Y \in \pi,\ X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \varnothing$
- $A = \bigcup_{X \in \pi} X$

In altri termini, una partizione dell'insieme A è una famiglia di sottoinsiemi non vuoti di A tali che ogni elemento di A appartiene ad uno e ad uno solo di tali sottoinsiemi.
I sottoinsiemi $X \in \pi$ sono detti *blocchi della partizione.*

Esempio.
Sia X={a,b,c,d,e,f} un insieme.
Consideriamo i seguenti sottoinsiemi di A:
A={a,b,c}, B={e,f}, C={c,d,e,f}, D={d,e}, E={f}, abbiamo che:

1. La famiglia {A,C} non è una partizione di X, perché $A \cap C = \{c\} \neq \varnothing$
2. La famiglia {A,B} non è una partizione di X, perché $A \cup B = \{a, b, c, e, f\} \neq X$.
3. La famiglia {A,D,E} è una partizione di X.

2.2 Partizione di un insieme finito. Numeri di Bell

Siamo ora interessati a studiare in particolare le partizioni degli insiemi finiti. Indichiamo quindi con $\Pi(n)$ l'insieme delle partizioni di un qualunque insieme di cardinalità n.
Per ogni intero positivo n, il numero di partizioni di un insieme di cardinalità n è detto *n-esimo numero di Bell*, ed indicato con B_n:

$$B_n = |\Pi(n)|$$

Si pone per convenzione:

$$B_0 = 1$$

2.2.1 Ricorsione dei numeri di Bell

I numeri di **Bell (1883-1960)** possono essere calcolati ricorsivamente: infatti, fissato un intero positivo n, vogliamo calcolare il numero di partizioni di un insieme A di cardinalità $n+1$. Per far questo scegliamo un elemento $a \in A$; tale elemento appartiene ad un solo blocco di ogni partizione di A. Fissiamo un intero k tra 0 e n, e contiamo le partizioni di A in cui l'elemento a appartiene ad un blocco di cardinalità $k+1$. Per determinare una partizione così fatta, dobbiamo scegliere i k elementi di $A - \{a\}$ da collocare nello stesso blocco a cui appartiene a (e questo si può fare in $\binom{n}{k}$ modi), e, in corrispondenza di ciascuna di queste scelte, possiamo considerare una qualsiasi partizione dei restanti $n-k$ elementi di A (il numero di queste partizioni è B_{n-k}). Dunque, per il principio di moltiplicazione, ci sono esattamente $\binom{n}{k} B_{n-k}$ partizioni di a nelle quali l'elemento a appartiene ad un blocco di cardinalità $k+1$; facendo variare k da 0 ad n, otteniamo tutte le partizioni di A. Quindi, per il principio di somma, abbiamo:
$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}$
Ponendo $h = n-k$, e ricordando che $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, la formula la possiamo riscrivere così:

$$B_{n+1} = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} B_h$$

Tale formula, insieme con la condizione iniziale $B_0 = 1$, consente di calcolare il valore di B_n per ogni n.
Diamo qui di seguito i valori di B_n per $n = 1, 2, ..., 8$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
B_n	1	1	2	5	15	52	203	877	4140

Esempio.
Consideriamo un insieme di cardinalità 3, $A = \{a, b, c\}$. Le partizioni di A sono 5, e precisamente:
$\{\{a, b, c\}\}$, $\{\{a, b\}, \{c\}\}$, $\{\{a, c\}, \{b\}\}$, $\{\{b, c\}, \{a\}\}$, $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$.

Osservazione.
Possiamo ora mostrare un metodo pratico per ottenere i coefficienti di Bell: costruiamo una matrice triangolare(triangolo aritmetico). Il triangolo di Bell è un triangolo numerico ottenuto iniziando la prima riga con il numero uno, la seconda con l'ultimo numero della riga precedente, e riempiendo gli spazi restanti con la somma tra il numero che precede e quello posizionato sopra. Quindi i numeri di Bell sono quelli della diagonale:

$$\begin{array}{cccccccc}
1 \\
1 & 2 \\
2 & 3 & 5 \\
5 & 7 & 10 & 15 \\
15 & 20 & 27 & 37 & 52 \\
52 & 67 & 87 & 114 & 151 & 203 \\
203 & 255 & 322 & 409 & 523 & 674 & 877 \\
877 & 1080 & 1335 & 1657 & 2066 & 2589 & 3263 & 4140
\end{array}$$

2.3 Numeri di Stirling

2.3.1 Numeri di Stirling di seconda specie

Sia A un insieme di cardinalità ≥ 1. Il numero di partizioni di A che consistono di k blocchi è detto *numero di Stirling di seconda specie* di indici n, k ed indicato con il simbolo $S_{n,k}$:

$$S_{n,k} = |\{\pi \in \Pi(n) | \pi \text{ ha k blocchi}\}|$$

È evidente che se:

$$k > n \quad \Rightarrow \quad S_{n,k} = 0$$

Inoltre, si vede facilmente che:

$$S_{n,1} = 1 = S_{n,n}$$

Si pone poi per convenzione:

$$S_{0,0} = 1$$

$$S_{0,k} = 0 \quad \text{per ogni k}$$

$$S_{n,0} = 0 \quad \text{per ogni n}$$

2.3.2 Numeri di Stirling e funzioni suriettive

Vogliamo ora dimostrare come i numeri di **Stirling (1692-1770)** presentino una profonda analogia con i coefficienti binomiali. Per far questo, determiniamo innanzi tutto un legame tra il numero di funzioni suriettive tra due insiemi finiti ed i numeri di Stirling.
Siano dunque A e B due insiemi finiti, con $|A| = n \geq k = |B|$. Per determinare una funzione suriettiva $f : A \to B$ dobbiamo prima disporre gli n elementi di A in k sottoinsiemi cioè bisogna fare una partizione π di A, in k blocchi ($S_{n,k}$ scelte possibili); poi scegliamo, per ogni blocco π, l'elemento di B che è immagine attraverso f degli elementi di A che appartengono a quel blocco ($k!$ scelte). Per il principio di moltiplicazione, allora, le funzioni suriettive da A a B sono in tutto $k!S_{n,k}$.

Teorema.
Siano A e B due insiemi finiti, con $|A| = n \geq k = |B|$.
Il numero di funzioni suriettive da A a B è:

$$k!S_{n,k}$$

Osservazione.
Si noti che la relazione tra il numero di funzioni suriettive da A a B e i numeri di Stirling è analoga a quella che intercorre tra il numero di funzioni iniettive da A a B ed i coefficienti binomiali: infatti, se A e B sono due insiemi finiti il numero di funzioni iniettive da A a B è:

$$(n)_k = k!\binom{n}{k}$$

(si dimostra usando la stessa linea di ragionamento, nel paragrafo 1.5.1).

2.3.3 La ricorsione dei numeri di Stirling

Come i coefficienti binomiali e i numeri di Bell anche i coefficienti di Stirling possono essere calcolati ricorsivamente. Infatti, fissato un intero positivo n vogliamo calcolare il numero di partizioni di un insieme A di cardinalità n in k blocchi.
Per far questo, scegliamo un elemento $a \in A$; le partizioni di A in k blocchi si possono suddividere in quelle in cui uno dei k blocchi è $\{a\}$ e quelle in cui a appartiene ad un blocco di cardinalità ≥ 2:

- Le partizioni del primo tipo sono tante quante le partizioni di $A - \{a\}$ in $k-1$ blocchi, cioé $S_{n-1,k-1}$.
- Ciascuna partizione del secondo tipo si può ottenere da una partizione di $A - \{a\}$ in k blocchi ($S_{n-1,k}$ partizioni) aggiungendo l'elemento a ad uno dei blocchi (e questo si puo fare in k modi).
  Dunque, le partizioni del secondo tipo sono in tutto $kS_{n-1,k}$

Per il principio della somma abbiamo:

$$S_{n,k} = kS_{n-1,k} + S_{n-1,k-1}$$

Diamo qui di seguito i primi valori di $S_{n,k}$, disposti in una matrice in cui nella posizione (n,k) inseriamo il numero $S_{n,k}$ (omettendo i valori nulli):

$S_{n,k}$	k=0	1	2	3	4	5	6	7	8
n=0	1								
1	0	1							
2	0	1	1						
3	0	1	3	1					
4	0	1	7	6	1				
5	0	1	15	25	10	1			
6	0	1	31	90	65	15	1		
7	0	1	63	301	350	140	21	1	
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1

2.4 Relazione tra i numeri di Stirling ed i numeri di Bell

Sia n un intero positivo; i numeri di Stirling $S_{n,k}$ contano le partizioni in k blocchi di un insieme con n elementi; il numero di Bell B_n conta tutte le partizioni con n elementi. Per il principio di somma abbiamo che:

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} S_{n,k}$$

Si noti che la relazione tra i numeri di Stirling ed i numeri di Bell è la stessa che intercorre tra i coefficienti binomiali e le potenze del 2.

2.5 Congruenza di Touchard

Proposizione.
La congruenza di ***Touchard (1885-1968)*** *asserisce che se p è primo allora*

$$B_{p+k} \equiv B_k + B_{k+1} \pmod{p} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

(Enunciato trovato su Wikipedia, privo di dimostrazione)

Facciamo qualche esempio:

Esempio.

1. Siano $p = 7$, $k = 1$ allora abbiamo $B_8 = 4140$, $B_1 = 1$, $B_2 = 2$
   vale:
   $4140 \equiv 1 + 2 \pmod{7}$
   infatti:
   (4140-3)=591$\cdot$7 $+ 0$
2. Siano $p = 5$, $k = 3$ allora abbiamo $B_8 = 4140$, $B_3 = 5$, $B_4 = 15$
   vale:
   $4140 \equiv 3 + 5 \pmod{5}$
   infatti:
   (4140-20)=824$\cdot$5 $+ 0$
3. Siano $p = 3$, $k = 5$ allora abbiamo $B_8 = 4140$, $B_5 = 52$, $B_6 = 203$
   vale:
   $4140 \equiv 52 + 203 \pmod{3}$
   infatti:
   (4140-255)=1295$\cdot$3 $+ 0$
4. Siano $p = 2$, $k = 6$ allora abbiamo $B_8 = 4140$, $B_6 = 203$, $B_7 = 877$
   vale:
   $4140 \equiv 203 + 877 \pmod{2}$
   infatti:
   (4140-1080)=1530$\cdot$2 $+ 0$

Capitolo 3

Triangolo dei numeri euleriani

3.1 Numeri euleriani

Definizione.
Sia $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ...n \\ x_1 & x_2 & x_3 & ...x_n \end{pmatrix}$ *una permutazione in* S_n*, si dice che* i *è una* discesa *di* σ *se* $x_i > x_{i+1}$ *analogamente si dice che* i *è una* salita *di* σ *se* $x_i < x_{i+1}$

Definizione.
L'insieme delle discese *di* σ *è indicato con* $Des(\sigma)$*, mentre la cardinalità di* $Des(\sigma)$ *è indicata con* $d(\sigma)$*. Notiamo che, se* $d(\sigma) = k$*,* σ *è l'unione di* $k+1$ *sottosequenze crescenti costituite da elementi consecutivi. Queste sono dette le* parti crescenti *di* σ*.*
Notiamo che le discese(salite) sono le posizioni e non gli elementi di σ*.*
Vediamo l'esempio:

Esempio.
Sia $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 7 & 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}$
Le discese di σ sono le posizioni 2 e 6.
Le parti crescenti sono: 3 4, 1 5 7 8, 2 6.

Definizione.
Siano

$$A(n,k) = \{\sigma \in S_n; d(\sigma) = k\}$$

il numero di permutazioni di n elementi che hanno esattamente k discese, gli interi $A(n,k)$ *sono detti* numeri euleriani *o numeri di* ***Euler (1707-1783)****.*
I numeri euleriani si indicano anche con $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$*.*

3.1.1 Ricorsione dei numeri euleriani

I numeri euleriani soddisfano la seguente ricorrenza:

$$A(n,k) = (k+1)A(n-1,k) + (n-k)A(n-1,k-1)$$

oppure scritta anche:

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = (k+1)\left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle + (n-k)\left\langle {n-1 \atop k-1} \right\rangle$$

Dimostrazione.
Ci sono due modi per ottenere una permutazione σ di S_n con k discese da una permutazione σ' di S_{n-1} inserendo in σ' il simbolo n:

- σ' ha k discese, e l'inserimento di n non crea una nuova discesa. In questo caso, n può essere inserito alla fine di σ' oppure tra due elementi che formano una delle k discese di σ'. In tutto abbiamo $k+1$ scelte per la posizione in cui inserire n.
- σ' ha $k-1$ discese, e l'inserimento di n crea una nuova discesa. In questo caso, possiamo mettere n all'inizio di σ' oppure tra due elementi che formano una delle $(n-2)-(k-1)$ salite di σ'. In tutto abbiamo $n-k$ scelte per la posizione in cui inserire n, quindi in tutto sono $(n-k)$.

Per il principio della somma abbiamo:

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = (k+1)\left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle + (n-k)\left\langle {n-1 \atop k-1} \right\rangle$$

□

Introduciamo ora la matrice triangolare dei coefficienti euleriani:

A(n,k)	k=0	1	2	3	4	5	6	
n=0	1							
1	1	0						
2	1	1	0					
3	1	4	1	0				
4	1	11	11	1	0			
5	1	26	66	26	1	0		
6	1	57	302	302	57	1	0	
7	1	120	1191	2416	1191	120	1	0

3.1.2 Relazione tra i coefficienti euleriani ed il fattoriale

Sia n un intero positivo; i coefficienti euleriani $A(n,k)$ contano il numero di permutazioni di n elementi con k discese. Al variare di k abbiamo la tutte le permutazioni, per il principio di somma abbiamo che:

$$n! = \sum_{K=0}^{n} A(n,k) = \sum_{k=0}^{n} \left\langle {n \atop k} \right\rangle$$

Si noti che la relazione tra i numeri euleriani ed il fattoriale è la stessa che intercorre tra i coefficienti binomiali e le potenze del 2 e tra i numeri di Stirling e quelli di Bell.

Esempio.
Consideriamo il gruppo di permutazioni con 3 elementi abbiamo in tutto $3! = 6$ permutazioni, di cui:

1. Il coefficiente $A(3,0) = \left\langle {3 \atop 0} \right\rangle = 1$ indica che c'è 1 permutazione di 3 elementi con 0 discese ed è 123;
2. Il coefficiente $A(3,1) = \left\langle {3 \atop 1} \right\rangle = 4$ indica che ci sono 4 permutazioni di 3 elementi con 1 discesa e sono 132, 213, 312, 231;
3. Il coefficiente $A(3,2) = \left\langle {3 \atop 2} \right\rangle = 1$ indica che c'è 1 permutazione di 3 elementi con 2 discese ed e 321;
4. Il coefficiente $A(3,3) = \left\langle {3 \atop 3} \right\rangle = 0$ indica che non ci sono permutazioni di 3 elementi con 3 discese.

3.2 Proprietà dei numeri euleriani

I numeri euleriani hanno la seguente simmetria:
$\forall n, k$ naturali con $0 \leq k \leq n-1$ vale:

$$A(n,k) = A(n, n-1-k)$$

scritta come

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \left\langle {n \atop n-1-k} \right\rangle$$

Dimostrazione.
Sia $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n-1 & n \\ x_1 & x_2 & ... & x_{n-1} & x_n \end{pmatrix}$ chiamiamo la sua ribaltata $\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n-1 & n \\ x_n & x_{n-1} & ... & x_2 & x_1 \end{pmatrix}$
Ovviamente la permutazione ribaltata è diversa dalla permutazione inversa.
Se la permutazione σ ha k discese, la sua *ribaltata* σ' ha k salite e quindi

$n - 1 - k$ discese. Visto che la funzione $\sigma \longrightarrow \sigma'$ è una biiezione, la tesi è provata. $\square$

Capitolo 4

Triangolo armonico di Leibniz

Nel 1676 **Leibniz (1646-1716)** visitò Londra per la seconda volta. **Huygens (1629-1695)** gli aveva proposto il problema di trovare la somma dei reciproci dei numeri triangolari:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{i(i+1)} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + ...$$

Utilizzando un trucchetto Leibniz scrisse ciascun termine come somma di due frazioni:

$$\frac{2}{i(i+1)} = \frac{A}{i} + \frac{B}{(i+1)} = \frac{Ai + A + Bi}{i(i+1)}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A = 2 \end{cases} \Rightarrow A = 2 \text{ e } B = -2$$

$$\frac{2}{i(i+1)} = \frac{2}{i} + \frac{-2}{(i+1)} = 2(\frac{1}{i} - \frac{1}{(i+1)})$$

Quindi abbiamo:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{\infty} 2(\frac{1}{i} - \frac{1}{(i+1)}) = 2(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + ... - \frac{1}{n+1}) = 2$$

I termini in mezzo se ne vanno (perchè opposti) e quindi per n che tende all'infinito rimane $1 - 0 = 1$, che moltiplica 2 ci da il risultato, quindi 2 è la somma infinita della serie.
Questo successo lo indusse a credere ingenuamente che sarebbe stato in grado di trovare la somma di qualsiasi serie infinita. La somma di serie fece poi di nuovo la sua comparsa a proposito del triangolo armonico, le cui analogie con il triangolo aritmetico di Pascal affascinavano Leibniz.

4.1 Triangolo armonico

Mettiamo a confronto il triangolo di Tartaglia:

$\binom{i}{j}$	j=0	1	2	3	4	5	6	7
i=0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	

con il triangolo armonico di Leibniz:

$L_{r,c}$	c=0	1	2	3	4	5	
r=0	1						
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$					
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$				
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$			
4	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$		
5	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{6}$	
6	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{140}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{7}$

Facciamo vedere come i due triangoli si comportano in modo opposto:

- Nel triangolo di Tartaglia ciascun elemento (tranne quelli che si trovano nella prima colonna) è uguale alla differenza tra il termine immediatamente al di sotto di esso e quello alla sua sinistra; Cioè:

$$\binom{i}{j} = \binom{i+1}{j} - \binom{i}{j-1}$$

Esempio.

6=10-4

2=3-1

10=15-5

10=20-10

Nel triangolo armonico ciascun termine è uguale alla differenza tra il termine immediatamente al di sopra di esso e il termine alla sua destra; Cioè:

$$L_{r,c} = L_{r-1,c} - L_{r,c+1}$$

Esempio.

$\frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$

$\frac{1}{12} = \frac{1}{6} - \frac{1}{12}$

$\frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

- Inoltre nel triangolo di Tartaglia ciascun elemento $\binom{i}{j}$ (tranne quelli che si trovano nella prima colonna) è uguale alla somma di tutti i termini, andando verso l'alto, della colonna (j-1)-esima a partire dall'elemento $\binom{i-1}{j-1}$; Cioè:

$$\binom{i}{j} = \sum_{k=0}^{i-j} \binom{i-1-k}{j-1}$$

Esempio.

6=3+2+1

20=10+6+3+1

15=5+4+3+2+1

Nel triangolo armonico ciascun elemento $L_{r,c}$ è uguale alla somma di tutti i termini, andando verso il basso, della colonna (c+1)-esima a partire dall'elemento $L_{r+1,c+1}$; Cioè:

$$L_{r,c} = \sum_{k=0}^{+\infty} L_{r+1+k,c+1}$$

Esempio.

$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + ...$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + ...$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} + ...$

$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{60} + \frac{1}{140} + ...$

$\frac{1}{3} = \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + ...$

Poiché in quest'ultimo caso il numero dei termini è infinito, Leibniz ebbe modo di esercitarsi nel calcolare somme di serie infinite. In particolare possiamo notare che:
La serie della prima colonna è la serie armonica, che diverge; su tutte le altre righe la serie converge;
I numeri della seconda colonna sono la metà dei reciproci dei numeri triangolari, e Leibniz sapeva che la somma di questa serie è uguale a 1;
I numeri della terza colonna sono un terzo dei reciproci dei numeri piramidali ed il triangolo armonico mostra che la somma di questa serie è uguale a 1/2;
I numeri della quarta colonna sono un quarto dei reciproci dei numeri quadridimensionale del triangolo di Tartaglia, e la loro somma è uguale a 1/3 ;
I numeri della n-esima colonna di questo triangolo sono i reciproci dei numeri, (n+1)-topici, della corrispondente (n+1)-esima colonna del triangolo di Tartaglia divisi per n.

4.2 Relazione tra i coefficienti dei 2 triangoli

Confrontando i 2 triangoli possiamo definire i coefficienti del triangolo di Leibniz in funzione di quelli di Tartaglia:

$$L_{i,j} = (i+1)^{-1} \binom{i}{j}^{-1}$$

Quindi possiamo scrivere:

$$\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} L_{i,j} = 1 \qquad \forall i$$

Dimostrazione.
Infatti sostituendo otteniamo:

$$\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (i+1)^{-1} \binom{i}{j}^{-1} = \frac{1}{i+1}(i+1) = 1$$

□

Esempio.
$1 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{12} + 3 \cdot \frac{1}{12} + 1 \cdot \frac{1}{4} = 1$

Bibliografia

[1] M.Barnabei-F.Bonetti, 'Matematica discreta elementare', Pitagora Editrice Bologna, (pp 39-53, 59-60, 89-100)

[2] A.Vistoli, 'Note di Algebra'

[3] http://www.amolamatematica.it/appunti/Tartaglia.pdf

[4] Wikipedia (http://it.wikipedia.org/wiki/Numero_di_Catalan)

[5] Wikipedia (http://it.wikipedia.org/wiki/Numeri_di_Bell)

[6] http://www.dm.unibo.it/dottorato/didaXXV/barnabei2.pdf (pp 59-69)

[7] http://digilander.libero.it/scienza_in_gioco/Leibniz%20e%20il%20triangolo%20armonico.htm