

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Funzioni di Schur, jeu de taquin e regola di Littlewood-Richardson

Tesi di Laurea in Algebra

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Andrea Brini

Correlatore:
Dott.
Francesco Regonati

Presentata da:
Giovanni Cattarina

Sessione terza
Anno Accademico
2012/2013

Indice

Introduzione	2
1 Composizioni e partizioni	4
2 Funzioni quasisimmetriche	6
3 Funzioni simmetriche	8
4 Diagrammi di Ferrers e reversion tableaux	11
5 Funzioni di Schur e funzioni quasisimmetriche	13
6 Invarianza delle composizioni associate a standard tableaux e standard reversion tableaux	24
7 Jeu de taquin	27
8 Regola di Littlewood-Richardson	30
9 Rappresentazioni lineari e caratteri	36
A Alcune note biografiche	44
Bibliografia	48

Introduzione

Lo studio delle *funzioni (polinomi) simmetriche* è stato, da Newton in poi, uno dei temi fondamentali della Matematica e delle sue applicazioni, ed è tuttora uno dei temi centrali della ricerca; ogni generazione ne ha rielaborato la teoria, scoprendo nuove connessioni concettuali, risultati sorprendenti ed inaspettate applicazioni.

Una *base lineare* fondamentale per lo spazio vettoriale delle funzioni simmetriche in N variabili ($N \in \mathbb{Z}^+$) è fornita dall'insieme delle *funzioni di Schur*; l'importanza di questa classe di funzioni simmetriche fu intuito e provato già da Jacobi, che dedicò ad esse una fondamentale memoria [7], 1841, ove si dimostrano alcuni rilevanti risultati, poi sviluppati in particolare da Matematici italiani (Trudi, Giambelli, Pieri et al.).

Nella celebre *Dissertazione* del 1901 [15], Issai Schur dimostrò che queste funzioni sono i *caratteri* delle *rappresentazioni polinomiali irriducibili* dei gruppi generali lineari $GL(N, \mathbb{C})$, nella stessa memoria costruite e classificate; per questa ragione, da allora le funzioni simmetriche studiate da Jacobi sono appunto dette *funzioni di Schur*.

L'obiettivo principale di questa Tesi è quello di descrivere una dimostrazione di quello che è forse il principale risultato “classico” nella teoria delle funzioni di Schur: la *regola di Littlewood-Richardson* [9], 1934.

Nella sua forma originale, la regola di Littlewood-Richardson descrive i coefficienti dell'espansione del prodotto di due funzioni di Schur in combinazione lineare di funzioni di Schur; in virtù di note proprietà dei caratteri, questi coefficienti (interi non negativi) sono le *molteplicità* delle rappresen-

tazioni polinomiali irriducibili che compaiono nella *decomposizione completa* del *prodotto tensoriale* di due rappresentazioni polinomiali irriducibili.

Nel 1987, Gordon James scrive: “ *Unfortunately the Littlewood-Richardson rule is much harder to prove than it was at first suspected. The author was once told that the Littlewood-Richardson rule helped to get men on the moon but was not proved until after they got there.*”

Per oltre quattro decenni, sono state pubblicate dimostrazioni che si sono rivelate, a partire da quella originale di Littlewood e Richardson, errate o gravemente incomplete; la prima dimostrazione rigorosa fu fornita da Schützenberger nel 1977, [17]. Questa dimostrazione, come sostanzialmente tutte le altre successivamente pubblicate, è basata sulla teoria del *jeu de taquin* sviluppata nel medesimo lavoro.

La dimostrazione della regola di Littlewood-Richardson discussa in questa Tesi è quella proposta da Fomin in [2], 1997; questa dimostrazione si fonda su una elegante combinazione del *jeu de taquin* con la caratterizzazione delle funzioni simmetriche di Schur in termini di funzioni quasisimmetriche fondamentali (Stanley, [18], 1997).

Nella presente esposizione, il simbolo \mathbb{K} indicherà un campo qualsiasi di caratteristica zero, sebbene molti dei risultati e delle definizioni sussistano anche assumendo che i coefficienti siano elementi dell’anello degli interi \mathbb{Z} .

Inoltre la teoria è, per semplicità e senza perdita di generalità, presentata nel caso di un numero finito N di variabili.

I riferimenti bibliografici tecnici sono distribuiti all’inizio delle varie sezioni.

Capitolo 1

Composizioni e partizioni

Definizione 1.1. Una **Composizione debole** $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)$ di n , che si scrive $\gamma \vDash n$, è un elenco di interi non negativi la cui somma è n .

γ_i sono le parti di γ e n è la dimensione di γ , denotata $|\gamma|$. Il *sostegno* di γ è l'insieme

$$\mathcal{F}(\gamma) = \{i \text{ t.c. } \gamma_i > 0\}$$

Se tutte le parti di γ sono positive γ è detta **composizione** e $k := l(\gamma)$ la lunghezza di γ . Una **partizione** è una composizione γ di n in cui $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_k$ denotata con $\gamma \vdash n$. Si osserva che a ogni composizione γ corrisponde una partizione indicata con $\lambda(\gamma)$.

Esempio 1.1.

$$\gamma = (0, 1, 5, 3, 0, 3); \quad \mathcal{F}(\gamma) = \{2, 3, 4, 6\}; \quad \lambda(\gamma) = (5, 3, 3, 1)$$

Date due composizioni α, β si dice che α è un *coraffinamento* di β (o β è un *raffinamento* di α), denotato $\alpha \succeq \beta$, se è possibile ottenere α sommando parti adiacenti di β .

A ogni composizione $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k) \vDash n$ di lunghezza k corrisponde un sottoinsieme (crescente) $S(\beta) \subseteq [n-1] \stackrel{def}{=} \{1, 2, \dots, n-1\}$ dato da:

$$S(\beta) = \{\beta_1, \beta_1 + \beta_2, \dots, \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{k-1}\} = \{i_1 < i_2 < \dots < i_{k-1}\}$$

Viceversa, ad un qualsiasi $S = \{i_1 < i_2 < \dots < i_{k-1}\} \subseteq [n-1]$ corrisponde una composizione $\beta(S)$ data da:

$$\beta(S) = (\beta_1 = i_1, \beta_2 = i_2 - i_1, \dots, \beta_k = n - i_{k-1}) \vDash n$$

Si noti che, fissato n ,

$$\beta(S(\beta)) = \beta, \quad S(\beta(S)) = S$$

Analogamente, ad ogni composizione $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k) \vDash n$ corrisponde un sottoinsieme (decescente) $S^* \subseteq [n-1]$ in questo modo:

$$S^*(\beta) = \{\beta_2 + \dots + \beta_k, \beta_3 + \dots + \beta_k, \dots, \beta_k\} = \{j_1 > j_2 > \dots > j_{k-1}\} \subseteq [n-1]$$

Viceversa a un qualsiasi $S^* = \{j_1 > j_2 > \dots > j_{k-1}\} \subseteq [n-1]$ corrisponde una composizione β data da:

$$\beta(S^*) = (n - j_1, j_1 - j_2, \dots, j_{k-2} - j_{k-1}, j_{k-1}) \vDash n$$

Si noti che, fissato n ,

$$\beta(S^*(\beta)) = \beta, \quad S^*(\beta(S^*)) = S^*$$

Osservazione 1. Si noti che

$$\beta(S(\beta)) = \beta = \beta(S^*(\beta))$$

Esempio 1.2. $n = 7, \quad \beta = (1, 3, 1, 2)$

$$S(\beta) = \{1, 4, 5\} \quad S^*(\beta) = \{6, 3, 2\}$$

$$\beta(S(\beta)) = (1, 3, 1, 2) = \beta(S^*(\beta)) = (1, 3, 1, 2)$$

Capitolo 2

Funzioni quasisimmetriche

La storia delle funzioni quasisimmetriche ha inizio nel 1972 con la Tesi di Dottorato di R. P. Stanley [19], seguita dalla definizione formale della relativa algebra di Hopf (Gessel [5], 1984).

In questo capitolo, si farà riferimento al recente lavoro [6].

Definizione 2.1. Sia $\mathcal{Qsym}_N \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_N]$ il \mathbb{K} -sottospazio vettoriale dei polinomi $p(x_1, \dots, x_N)$ lasciati invarianti dall'azione delle trasposizioni $(i, i+1)$, $i = \{1, 2, \dots, N-1\}$ così definita: la trasposizione $(i, i+1)$ agisce, per scambio di indici, solo sui monomi di $p(x_1, \dots, x_N)$ che non contengano entrambe le variabili x_i, x_{i+1} .

Equivalentemente, \mathcal{Qsym}_N è il \mathbb{K} -sottospazio vettoriale dei polinomi che soddisfano la seguente proprietà: per ogni composizione

$$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k), \quad k \leq N,$$

e per ogni coppia

$$i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N, \quad j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq N,$$

i monomi

$$x_{i_1}^{\gamma_1} x_{i_2}^{\gamma_2} \dots x_{i_k}^{\gamma_k}, \quad x_{j_1}^{\gamma_1} x_{j_2}^{\gamma_2} \dots x_{j_k}^{\gamma_k}$$

hanno uguale coefficiente in $p(x_1, \dots, x_N)$.

Definizione 2.2. Funzioni quasisimmetriche monomiali

Data una composizione $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, $k \leq N$, si definisce la funzione (polinomio) quasisimmetrica *monomiale* M_α come segue:

$$M_\alpha = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N} x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \dots x_{i_k}^{\alpha_k}.$$

Per definizione, si pone $M_0 = 1$.

Teorema 2.0.1.

1. La famiglia delle funzioni quasisimmetriche monomiali è \mathbb{K} -base di \mathcal{Qsym}_N .
2. \mathcal{Qsym}_N è \mathbb{K} -sottoalgebra di $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_N]$.

Definizione 2.3. Funzioni quasisimmetriche fondamentali

Data una composizione $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, $k \leq N$, si definisce la funzione (polinomio) quasisimmetrica *fondamentale* F_α come segue:

$$F_\alpha = \sum_{\alpha \succeq \beta} M_\beta.$$

Per definizione, si pone $F_0 = 1$.

Teorema 2.0.2. La famiglia delle funzioni quasisimmetriche fondamentali è \mathbb{K} -base di \mathcal{Qsym}_N .

Esempio 2.1. Due esempi di funzioni fondamentali in $N = 3$ variabili $\{x_1, x_2, x_3\}$:

$$F_{(1,2)} = M_{(1,2)} + M_{(1,1,1)} = x_1 x_2^2 + x_2 x_3^2 + x_1 x_3^2 + x_1 x_2 x_3$$

$$F_{(3)} = M_{(3)} + M_{(1,2)} + M_{(2,1)} + M_{(1,1,1)} = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1 x_2^2 + x_2 x_3^2 + x_1 x_3^2 + x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2 x_3$$

Capitolo 3

Funzioni simmetriche

In questo capitolo, si farà riferimento alle monografie [11, 13].

Definizione 3.1. L'algebra delle funzioni simmetriche $\mathcal{S}ym_N$ è la \mathbb{K} -sottoalgebra dell'algebra delle funzioni quasisimmetriche $\mathcal{Q}sym_N$ lasciate invarianti dall'azione, per permutazione di indici, del gruppo simmetrico \mathcal{S}_N .

Definizione 3.2. Funzioni simmetriche monomiali

Data una partizione $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, $k \leq N$, si definisce la funzione (polinomio) simmetrica *monomiale* m_λ come segue:

$$m_\lambda = \sum_{\alpha: \lambda(\alpha)=\lambda} M_\alpha, \quad \lambda \vdash n > 0$$

Per definizione, si pone $m_0 = 1$.

Esempio 3.1. Sia $N = 3$.

$$m_{(2,1)} = M_{(2,1)} + M_{(1,2)} = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + x_2 x_3^2 + x_1 x_2^2$$

Teorema 3.0.3. La famiglia delle funzioni simmetriche monomiali è \mathbb{K} -base di $\mathcal{S}ym_N$.

Definizione 3.3. Funzioni simmetriche elementari

Fissato $k \leq N$, la k -esima *funzione simmetrica elementare* e_k è la somma di tutti i prodotti di k variabili distinte. Concretamente $e_0 = 1$ e per $0 <$

$k \leq N$

$$e_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} x_{i_1} \cdot \dots \cdot x_{i_k}.$$

Teorema 3.0.4. (Teorema fondamentale delle funzioni simmetriche)

Le funzioni simmetriche elementari $\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$ sono algebricamente indipendenti e generano l'anello Sym_N delle funzioni simmetriche; perciò ogni funzione simmetrica si esprime in modo unico come polinomio nelle funzioni e_k , $k = 1, 2, \dots, N$. In simboli:

$$\text{Sym}_N = \mathbb{K}[e_1, e_2, \dots, e_N].$$

Osservazione 2. Sia $N \in \mathbb{Z}^+$. Ogni monomio

$$e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_r}, \quad i_s \in \{1, \dots, N\} \quad (\dagger)$$

è identificato ed identifica la partizione $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ ove

$$\lambda_t = |\{s; i_s \geq t\}|$$

in al più N parti.

Scrivendo, secondo la precedente “codifica” e_λ in luogo di (\dagger) si può riformulare il “Teorema fondamentale”:

Corollario 3.0.5. *L'insieme*

$$\{e_\lambda; \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k), k \leq N\}$$

è \mathbb{K} -base di Sym_N .

Definizione 3.4. Funzioni simmetriche complete

Per ogni $k \in \mathbb{N}$, la k -esima funzione simmetrica completa h_k è la somma di tutti i monomi di grado totale k , cioè

$$h_k = \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_k \leq N} x_{i_1} \cdot \dots \cdot x_{i_k}.$$

Tenuto conto che le $\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$ sono un sistema di generatori algebricamente indipendenti di $\mathcal{S}ym_N$, ha senso definire un omomorfismo di anelli

$$\omega : \mathcal{S}ym_N \rightarrow \mathcal{S}ym_N \quad t.c. \quad \omega(e_k) = h_k \quad \forall k = 1, 2, \dots, N.$$

È possibile dimostrare che ω è una involuzione (cioè $\omega \circ \omega$ è la mappa identica), e, quindi, anche la famiglia delle funzioni simmetriche complete $\{h_1, h_2, \dots, h_N\}$ è un sistema di generatori algebricamente indipendenti di $\mathcal{S}ym_N$.

In simboli:

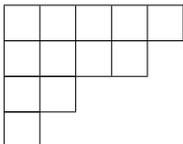
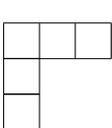
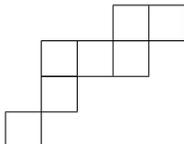
$$\mathcal{S}ym_N = \mathbb{K}[h_1, h_2, \dots, h_N].$$

Capitolo 4

Diagrammi di Ferrers e reversetableaux

Definizione 4.1. Data una partizione λ il suo corrispondente **diagramma di Ferrers** è la tabella con celle giustificate a sinistra, con λ_i celle alla i -esima riga. Dati due diagrammi λ, μ , si dice che $\mu \subseteq \lambda$ se $\mu_i \leq \lambda_i \forall i : 1 \leq i \leq l(\mu)$. Se $\mu \subseteq \lambda$ il **diagramma skew** λ/μ è la tabella con le celle contenute in λ ma non in μ .

$$\lambda/\mu = \{(i, j) | (i, j) \in \lambda, (i, j) \notin \mu\}.$$

Esempio 4.1. $\lambda =$  , $\mu =$  , $\lambda/\mu =$ 

Definizione 4.2. Dato un diagramma skew λ/μ si definisce un **reversetableau** (o *reverse semistandard Young tableau*), T , della forma λ/μ , un diagramma nelle cui celle sono inseriti degli interi positivi tali che:

- i valori nelle righe di T decrescono debolmente (o non crescono) leggendoli da sinistra a destra.
- i valori nelle colonne di T decrescono strettamente leggendoli dall'alto al basso.

Se il tableau T di forma λ/μ possiede n celle e i numeri $\{1, 2, \dots, n\}$ compaiono una ed una sola volta, diremo che T è **standard reversiontableau**.

Fissato un qualsiasi $k \in \mathbb{Z}^+$, si definisce inoltre **contenuto** di un (**semi-standard**) **reversiontableau** T nei numeri $\{1, 2, \dots, k\}$, denotato $con(T)$, la *composizione debole* $\omega = (\omega_1(T), \dots, \omega_k(T))$ dove $\omega_i(T)$ è il numero delle volte che i compare in T .

Considerate le variabili x_1, x_2, \dots, x_k , il monomio associato ad un reversiontableau è, per definizione:

$$x^T = x_1^{\omega_1(T)} x_2^{\omega_2(T)} \dots x_k^{\omega_k(T)}.$$

Dato uno standard reversiontableau T , il suo *ascent set* $A(T)$ è l'insieme degli i tali che $i + 1$ appare in una riga superiore.

Esempio 4.2. Siano $k = 9$, $n = 8$.

$$T = \begin{array}{c} & & & 9 & 7 \\ & 6 & 5 & 5 & \\ & 4 & 2 & & \\ 1 & & & & \end{array} \quad T' = \begin{array}{c} & & & 8 & 7 \\ & 6 & 5 & 4 & \\ & 3 & 2 & & \\ 1 & & & & \end{array}$$

Si nota che nel caso di T si tratta di un *semistandard reversiontableau* mentre nel caso di T' si tratta di uno *standard reversiontableau*.

L'*ascent set* di T' è $A(T') = \{1, 3, 6\}$

Capitolo 5

Funzioni di Schur e funzioni quasisimmetriche

Esistono diversi modi di definire le funzioni di Schur, ad esempio definendole come *funzioni generatrici* dei *reversetableaux*.

Definizione 5.1. Dato $N \in \mathbb{Z}^+$, e data una partizione λ in al più N parti, la *funzione di Schur* ad essa associata, denotata s_λ , è il polinomio nelle variabili x_1, x_2, \dots, x_N :

$$s_\lambda = \sum_T x^T,$$

ove la somma è sui *reversetableaux* T di forma λ .

Osservazione 3. Da questa definizione non è assolutamente ovvio che le s_λ siano simmetriche.

Di fatto si ha:

Teorema 5.0.6.

1. *Le funzioni di Schur sono funzioni simmetriche.*

2. *L'insieme*

$$\{s_\lambda; \lambda = (\lambda_1; \lambda_2, \dots, \lambda_k), \quad k \leq N\}$$

è \mathbb{K} -base dello spazio Sym_N .

Per una dimostrazione di 1) in termini di Teoria delle rappresentazioni, cfr. Cap. 9. Per una dimostrazione di 2) in termini di regola di Littlewood-Richardson, cfr. Cap. 8.

Osservazione 4. Se la partizione λ è la partizione riga ($\lambda = (k)$) allora la funzione di Schur s_λ è una funzione simmetrica completa h_k ; nel caso in cui la partizione λ sia una partizione colonna ($\lambda = (1, 1, \dots, 1) \vdash n$), la funzione di Schur s_λ è la funzione simmetrica elementare e_n .

Esempio 5.1. Sia $N = 3$ e $\lambda = (2, 1) \vdash n = 3$; i reversetableaux sono:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 3 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$$

$$s_{(2,1)} = (x_1x_2x_3 + x_1x_2x_3) + (x_1x_2^2 + x_2x_3^2 + x_1x_3^2 + x_1^2x_3 + x_1^2x_2 + x_2^2x_3) = \\ 2m_{(1,1,1)} + m_{(2,1)}$$

Esempio 5.2. Sia $N = 4$ e $\lambda = (3, 1) \vdash n = 4$; i reversetableaux sono:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 4 & 4 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 4 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 4 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 3 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 3 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array},$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 1 & 1 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 2 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 3 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 2 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 1 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}$$

$$\rightarrow x_1x_4^3 + x_2x_4^3 + x_3x_4^3 + x_1x_3^3 + x_2x_3^3 + x_1x_2^3 + x_1^3x_4 + x_2^3x_4 + x_3^3x_4 + x_2^3x_3 + x_1^3x_3 + x_1^3x_2 = m_{(3,1)};$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 4 & 3 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 4 & 2 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 4 & 1 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 2 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 1 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}$$

$$\rightarrow x_3^2x_4^2 + x_2^2x_4^2 + x_1^2x_4^2 + x_2^2x_3^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^2x_2^2 = m_{(2,2)};$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 4 & 3 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 4 & 2 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 3 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 2 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 2 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 2 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 4 & 3 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 4 & 1 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array},$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 3 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 1 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 4 & 2 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 4 & 1 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 2 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 1 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 2 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 1 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array},$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 2 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 1 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 1 & 1 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 1 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 1 & 1 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 1 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}$$

$$\rightarrow 2(x_2x_3x_4^2 + x_2x_3^2x_4 + x_2^2x_3x_4 + x_1x_3x_4^2)$$

$$\begin{aligned}
& x_1x_3^2x_4 + x_1x_2x_4^2 + x_1x_2x_3^2 + x_1x_2^2x_4 \\
& x_1x_2^2x_3 + x_1^2x_3x_4 + x_1^2x_2x_4 + x_1^2x_2x_3) = \\
& = 2m_{(2,1,1)}; \\
& \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 2 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 1 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 1 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \rightarrow 3x_1x_2x_3x_4 = 3m_{(1,1,1,1)}; \\
& \Rightarrow s_{(3,1)} = m_{(3,1)} + m_{(2,2)} + 2m_{(2,1,1)} + 3m_{(1,1,1,1)}
\end{aligned}$$

Osservazione 5. Si nota che per ogni composizione debole γ tale che $\lambda(\gamma) = \mu$ fissata, il numero di *reversetableaux* di forma assegnata e contenuto la composizione γ è sempre lo stesso; come si vede nell'ultimo esempio:

Analizzando tutte le composizioni γ tali che $\lambda(\gamma) = \mu = (2, 1, 1)$:

$$\begin{aligned}
\gamma = (0, 1, 1, 2) & \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 4 & 3 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 4 & 2 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \\
\gamma = (0, 1, 2, 1) & \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 3 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 2 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} \\
\gamma = (0, 2, 1, 1) & \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 2 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 2 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \\
\gamma = (1, 0, 1, 2) & \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 4 & 3 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 4 & 1 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \\
\gamma = (1, 0, 2, 1) & \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 3 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 1 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \\
\gamma = (1, 1, 0, 2) & \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 4 & 2 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 4 & 1 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} \\
\gamma = (1, 1, 2, 0) & \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 2 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 1 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} \\
\gamma = (1, 2, 0, 1) & \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 2 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 1 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} \\
\gamma = (1, 2, 1, 0) & \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 2 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} \\
\gamma = (2, 0, 1, 1) & \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 1 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 1 & 1 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \\
\gamma = (2, 1, 0, 1) & \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 1 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 1 & 1 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}
\end{aligned}$$

$$\gamma = (2, 1, 1, 0) \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 1 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}$$

il numero di *reversetableaux* con contenuto tali composizioni è sempre 2.

Analizzando tutte le composizioni γ tali che $\lambda(\gamma) = \mu = (3, 1)$:

$$\gamma = (0, 0, 1, 3) \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 4 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$$

$$\gamma = (0, 1, 0, 3) \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 4 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}$$

$$\gamma = (0, 1, 3, 0) \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 3 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}$$

$$\gamma = (0, 3, 0, 1) \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 2 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}$$

$$\gamma = (0, 0, 3, 1) \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 3 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$$

$$\gamma = (0, 3, 1, 0) \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 2 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}$$

$$\gamma = (1, 0, 0, 3) \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 4 & 4 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}$$

$$\gamma = (1, 0, 3, 0) \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 3 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}$$

$$\gamma = (1, 3, 0, 0) \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}$$

$$\gamma = (3, 0, 0, 1) \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 1 & 1 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}$$

$$\gamma = (3, 0, 1, 0) \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 1 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}$$

$$\gamma = (3, 1, 0, 0) \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}$$

il numero di *reversetableaux* con contenuto tali composizioni è sempre 1.

Analizzando tutte le composizioni γ tali che $\lambda(\gamma) = \mu = (2, 2)$:

$$\gamma = (0, 0, 2, 2) \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 4 & 3 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$$

$$\gamma = (0, 2, 0, 2) \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 4 & 2 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}$$

$$\gamma = (0, 2, 2, 0) \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 2 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}$$

$$\gamma = (2, 0, 0, 2) \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 4 & 1 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}$$

$$\gamma = (2, 0, 2, 0) \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 1 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}$$

$$\gamma = (2, 2, 0, 0) \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}$$

Il numero di *reversetableaux* con contenuto tali composizioni è sempre 1. Analizzando tutte le composizioni γ tali che $\lambda(\gamma) = \mu = (1, 1, 1, 1)$:

$$\gamma = (1, 1, 1, 1) \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 2 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 1 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 1 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$$

Il numero di *standard reversetableaux* (equivalentemente, di contenuto $\gamma = (1, 1, 1, 1)$) è 3, come confermato dalla *Hook Length Formula*¹, che in questo caso si calcola:

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod_{(i,j) \in T} h_\lambda(i,j)} = \frac{4!}{4 \cdot 2} = 3$$

Vista la *Osservazione 5*, raggruppando i monomi in funzioni simmetriche monomiali si possono esprimere le *funzioni di Schur* in questo modo:

¹**Hook Length Formula:** Dato uno *diagramma* T , di forma λ , si possono etichettare le caselle del diagramma, chiamando la casella appartenente alla i -esima riga e j -esima colonna (i,j) . L'**hook** $H_\lambda(i,j)$ è l'insieme delle caselle (a,b) tali che $a = i$ e $b \geq j$ o $b = j$ e $a \geq i$. Il numero delle caselle appartenenti all'insieme $H_\lambda(i,j)$ viene indicato con $h_\lambda(i,j)$. La *hook length formula* permette di calcolare il numero di *standard reversetableaux* di forma λ , denotato d_λ , e si esprime:

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod_{(i,j) \in T} h_\lambda(i,j)}$$

Teorema 5.0.7. *Sia λ, μ due partizioni. La funzione di Schur s_λ si esprime*

$$s_\lambda = \sum_{\mu} K_{\lambda\mu} m_\mu$$

dove $K_{\lambda\mu}$ è il numero di revesetableaux di forma λ e contenuto μ , mentre m_μ è la funzione monomiale simmetrica associata alla partizione μ .

Esempio 5.3. Sia $N = 3$ e $\lambda = (2, 1) \vdash n = 3$

$$\begin{aligned} \mu = (1, 1, 1) &\rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}; \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \Rightarrow K_{(2,1)(1,1,1)} = 2 \\ \mu = (2, 1) &\rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}; \Rightarrow K_{(2,1)(2,1)} = 1 \\ s_{(2,1)} &= m_{(2,1)} + 2m_{(1,1,1)} \end{aligned}$$

Esempio 5.4. Sia $N = 4$ e $\lambda = (3, 1) \vdash n = 4$

$$\begin{aligned} \mu = (3, 1) &\rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array} \Rightarrow K_{(3,1)(3,1)} = 1 \\ \mu = (2, 2) &\rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array} \Rightarrow K_{(3,1)(2,2)} = 1 \\ \mu = (2, 1, 1) &\rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}; \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 1 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} \Rightarrow K_{(3,1)(2,1,1)} = 2 \\ \mu = (1, 1, 1, 1) &\rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 2 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}; \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 1 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}; \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 1 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \Rightarrow K_{(3,1)(1,1,1,1)} = 2 \\ s_{(3,1)} &= m_{(3,1)} + m_{(2,2)} + 2m_{(2,1,1)} + 3m_{(1,1,1,1)} \end{aligned}$$

Teorema 5.0.8. (*Stanley* [18], *Thm. 7.19.7, pag. 361*)

Sia λ una partizione, la funzione di Schur s_λ si può esprimere

$$s_\lambda = \sum_T F_{\beta(A(T))},$$

ove la somma è su tutti gli standard revesetableaux T , di forma λ .

Equivalentemente,

$$s_\lambda = \sum_{\beta} a_{\lambda\beta} F_{\beta},$$

ove $a_{\lambda\beta}$ è il numero degli standard reversion tableaux T , di forma λ tali che $\beta(A(T)) = \beta$.

Esempio 5.5. Si mostra ora un esempio del *teorema di Stanley* appena enunciato dato $N = 4$ e $\lambda = (3, 1) \vdash n = 4$. Si determinano i 3 *standard reversion tableaux* di forma $(3, 1)$ in 4 variabili, come previsto dalla *hook length formula* $\rightarrow d_\lambda = \frac{4!}{4 \cdot 2} = 3$. Essi sono:

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 2 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}; \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 1 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}; \quad T_3 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 1 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$$

Si ottengono i rispettivi *ascent set*:

$$A(T_1) = \{1\}; \quad A(T_2) = \{2\}; \quad A(T_3) = \{3\}$$

Dall'*ascent set* si ricava la composizione β secondo il procedimento definito nel Cap. 1.

$$\begin{aligned} \beta(A(T_1)) &= (1, 3); & \beta(A(T_2)) &= (2, 2); & \beta(A(T_3)) &= (3, 1) \\ \Rightarrow s_{(3,1)} &= F_{(1,3)} + F_{(2,2)} + F_{(3,1)} = \\ &= (M_{(3,1)} + M_{(1,3)}) + 2(M_{(2,1,1)} + M_{(1,2,1)} + M_{(1,1,2)}) + 3(M_{(1,1,1,1)}) = \\ &= m_{(3,1)} + 2m_{(2,1,1)} + 3m_{(1,1,1,1)} \end{aligned}$$

Altri esempi:

Esempio 5.6. Sia $N = 3$ e $\lambda = (2, 1) \vdash n = 3$

utilizzando *hook length formula* si calcola quanti sono $\rightarrow d_\lambda = \frac{3!}{3} = 2$;

e sono:

$$\begin{aligned} T_1 &= \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}; & T_2 &= \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \\ A(T_1) &= \{1\}; & A(T_2) &= \{2\} \\ \beta(A(T_1)) &= (1, 2); & \beta(A(T_2)) &= (2, 1) \\ \Rightarrow s_{(2,1)} &= F_{(2,1)} + F_{(1,2)} = \\ &= (M_{(2,1)} + M_{(1,2)}) + 2(M_{(1,1,1,1)}) = \\ &= m_{(2,1)} + m_{(2,2)} \end{aligned}$$

Esempio 5.7. Sia $N = 4$ e $\lambda = (2, 2) \vdash n = 4$

utilizzando la *hook length formula* si calcola quanti sono $\rightarrow d_\lambda = \frac{4!}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 2$; e sono:

$$\begin{aligned} T_1 &= \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 3 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array}; & T_2 &= \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 2 \\ \hline 3 & 1 \\ \hline \end{array} \\ A(T_1) &= \{2\}; & A(T_2) &= \{1, 3\} \\ \beta(A(T_1)) &= (2, 2); & \beta(A(T_2)) &= (1, 2, 1) \\ &\Rightarrow s_{(2,2)} = F_{(2,2)} + F_{(1,2,1)} = \\ &(M_{(2,1,1)} + M_{(1,2,1)} + M_{(1,1,2)}) + M_{(2,2)} + 2(M_{(1,1,1,1)}) = \\ &= m_{(2,1,1)} + m_{(2,2)} + 2m_{(1,1,1,1)} \end{aligned}$$

Esempio 5.8. Si analizzano ora due casi particolari, il primo è il caso della partizione $\lambda = (4)$ e il secondo quello della partizione $\lambda = (1, 1, 1, 1)$.

Caso $\lambda = (4) \vdash n = 4$ con $N = 4$ variabili: si calcola la funzione di Schur prima come combinazione lineare di *funzioni simmetriche monomiali*, e poi come combinazione lineare dell *base fondamentale* dello spazio vettoriale delle funzioni quasisimmetriche.

(*funzioni quasisimmetriche fondamentali*???) Primo metodo:

$$\begin{aligned} \mu = (4) &\longrightarrow \boxed{1 \ 1 \ 1 \ 1} \Rightarrow K_{(4)(4)} = 1 \\ \mu = (3, 1) &\longrightarrow \boxed{2 \ 1 \ 1 \ 1} \Rightarrow K_{(4)(3,1)} = 1 \\ \mu = (2, 2) &\longrightarrow \boxed{2 \ 2 \ 1 \ 1} \Rightarrow K_{(4)(2,2)} = 1 \\ \mu = (2, 1, 1) &\longrightarrow \boxed{3 \ 2 \ 1 \ 1} \Rightarrow K_{(4)(2,1,1)} = 1 \\ \mu = (1, 1, 1, 1) &\longrightarrow \boxed{4 \ 3 \ 2 \ 1} \Rightarrow K_{(4)(1,1,1,1)} = 1 \\ \Rightarrow s_{(4)} &= m_{(4)} + m_{(3,1)} + m_{(2,2)} + m_{(2,1,1)} + m_{(1,1,1,1)} \end{aligned}$$

Secondo Metodo:

$$\begin{aligned} T &= \boxed{4 \ 3 \ 2 \ 1} \rightarrow A(T) = \emptyset \rightarrow \beta A(T) = (4) \\ \Rightarrow s_{(4)} &= F_{(4)} + F_{(3,1)} + F_{(2,2)} + F_{(2,1,1)} + F_{(1,1,1,1)} = \end{aligned}$$

$$= M_{(4)} + M_{(3,1)} + M_{1,3} + M_{(2,2)} + M_{(2,1,1)} + M_{(1,2,1)} + M_{(1,1,2)} + M_{(1,1,1,1)} =$$

$$m_{(4)} + m_{(3,1)} + m_{(2,2)} + m_{(2,1,1)} + m_{(1,1,1,1)}$$

Da questo risultato si nota che alla forma riga di lunghezza n corrisponde una *funzione simmetrica completa* h_n .

Caso $N = 4$ e $\lambda = (1, 1, 1, 1) \vdash n = 4$: Primo metodo:

$$\mu = (1, 1, 1, 1) \longrightarrow \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow s_{(1,1,1,1)} = m_{(1,1,1,1)}$$

Secondo metodo:

$$T = \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow A(T) = \{1, 2, 3\} \rightarrow \beta(A(T)) = (1, 1, 1, 1)$$

$$\Rightarrow s_{(1,1,1,1)} = F_{(1,1,1,1)} = m_{(1,1,1,1)}$$

Da questo risultato si nota invece che alla forma colonna di lunghezza n corrisponde la *funzione simmetrica elementare* e_n .

Si prendono ora degli esempi che mostrano il fatto che tutto quanto esposto sulle *funzioni di Schur* associate a “forme partizione” si estende in modo naturale alle forme *skew*:

Definizione 5.2.

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_T x^T$$

dove la somma è sui reversiontableaux T di forma λ/μ .

Esempio 5.9. Sia T lo *skew-tableau* della forma $(2, 2)/(1)$, si calcola la funzione di Schur $s_{(2,2)/(1)}$:

i semistandard tableaux possibili della forma-skew $(2, 2)/(1)$ con tre variabili sono:

$$\begin{array}{cccccccc} \begin{array}{|c|c|} \hline 2 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 2 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 2 \\ \hline 3 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 3 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 3 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 3 \\ \hline 3 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 3 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 3 \\ \hline 3 & 2 \\ \hline \end{array} \\ s_{(2,2)/(1)} = (x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2) + 2x_1x_2x_3 = \\ = m_{(2,1)} + 2m_{(1,1,1)} = F_{(2,1)} + F_{(1,2)} \end{array}$$

Teorema 5.0.9. *Per ogni forma skew λ/μ*

- $s_{\lambda/\mu}$ è funzione simmetrica.
- Inoltre

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_{\nu} K_{\lambda/\mu, \nu} m_{\nu},$$

dove $K_{\lambda/\mu, \nu}$ è il numero dei reveset tableaux di forma skew λ/μ e di contenuto ν e m_{ν} è la funzione monomiale simmetrica rispetto alla partizione ν .

Esempio 5.10. Sia T lo skew-tableau della forma $(2, 2)/(1)$ e si calcola la funzione di Schur $s_{(2,2)/(1)}$:

i semistandard tableaux possibili della forma-skew $(2, 2)/(1)$ con tre variabili con pesi ν diversi sono:

$$\begin{array}{l} \nu = (2, 1) \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 2 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}; \quad \nu = (1, 1, 1) \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 3 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array}; \begin{array}{|c|c|} \hline 2 \\ \hline 3 & 1 \\ \hline \end{array} \\ \Rightarrow s_{(2,2)/(1)} = m_{2,1} + 2m_{1,1,1} \end{array}$$

Teorema 5.0.10. (*Stanley* [18], *Thm. 7.19.7, pag. 361*)

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_T F_{\beta(A(T))},$$

dove le somme sono sugli standard tableaux T di forma λ/μ ; equivalentemente:

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_{\beta} a_{\lambda/\mu, \beta} F_{\beta}$$

dove $a_{\lambda/\mu, \beta}$ è il numero degli standard reversion tableaux T di forma skew λ/μ tali che $\beta(A(T)) = \beta$

Esempio 5.11. Sia T lo skew-tableau della forma $(2, 2)/(1)$ e si calcola la funzione di Schur $s_{(2,2)/(1)}$:

Si guardano tutti i tableaux standard di forma-skew $(2, 2)/(1)$ con tre variabili:

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array}; \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 3 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$A(T_1) = \{2\}; \quad A(T_2) = \{1\}$$

$$\beta(A(T_1)) = (2, 1); \quad \beta(A(T_2)) = (1, 2)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow s_{(2,2)/(1)} &= F_{(2,1)} + F_{(1,2)} = M_{2,1} + 2M_{(1,1,1)} + M_{(1,2)} = \\ &= (x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3) + 2x_1 x_2 x_3 + (x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3^2) \end{aligned}$$

Capitolo 6

Invarianza delle composizioni associate a standard tableaux e standard reversion tableaux

Definizione 6.1. Dato un diagramma skew λ/μ si definisce un **semistandard tableau**, T , della forma λ/μ , il diagramma nelle cui celle sono inseriti degli interi positivi tali che:

- i valori nelle righe di T crescono debolmente (o non decrescono) leggendoli da sinistra a destra.
- i valori nelle colonne di T crescono strettamente leggendoli dall'alto al basso.

Se il diagramma $T = \lambda/\mu$ possiede n celle e i numeri da 1 ad n compaiono una ed una sola volta, diremo che T è uno **standard Young tableau**. Dato uno standard tableau T , il suo *descent set* $D(T)$ è l'insieme degli i tali che $i + 1$ appare in una riga inferiore.

Fissata $\lambda/\mu \vdash n$ e la permutazione δ nel seguente modo:

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Preso un tableau T , riempito coi simboli $1, 2, \dots, n$, di forma λ/μ , a questo corrisponde il tableau T^* della stessa forma, ottenuto sostituendo a ogni valore i in T , il valore $\delta(i)$, per ogni $i = 1, 2, \dots, n$

Si ha che:

$$T \text{ reverse - standard} \iff T^* \text{ standard}$$

In generale, si ha che:

$$i \in A(T) \iff n - i \in D(T^*); \forall i$$

dunque se:

$$A(T) = \{i_1 < i_2 < \dots < i_k\}; \quad D(T^*) = \{j_1 > j_2 > \dots > j_k\},$$

dunque se

$$i_1 = n - j_1, \dots, i_k = j_k \iff j_1 = n - i_1, j_2 = n - i_2, \dots, j_k = n - i_k$$

$$\beta(A(T)) = (i_1, i_2 - i_1, \dots, n - i_k) \vDash n$$

$$\beta(D(T^*)) = (n - j_1, j_1 - j_2, \dots, j_{k-1} - j_k, j_k) = (i_1, i_2 - i_1, \dots, n - i_k) \vDash n$$

Perciò

$$\beta(A(T)) = \beta(D(T^*))$$

Esempio 6.1. Fissata la forma $(5, 4, 3, 1)/(3, 1, 1)$, presi i tableaux

$$T = \begin{array}{cccc} & & 1 & 2 \\ & & 3 & 4 & 5 \\ & & 6 & 7 \\ 8 & & & & \end{array} \longleftrightarrow T^* = \begin{array}{cccc} & & & 8 & 7 \\ & & 6 & 5 & 4 \\ & & 3 & 2 \\ 1 & & & & \end{array}$$

si calcolano i rispettivi *descent set* e *ascent set*

$$D(T) = \{7, 5, 2\}; \quad A(T) = \{6, 3, 1\}$$

si ottengono le rispettive composizioni associate:

$$\beta(D(T)) = (1, 2, 3) = \beta(A(T))$$

Osservazione 6. Grazie alle biiezioni precedenti il *Teorema di Stanley* ha doppia formulazione.

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_{T; sh(T)=\lambda/\mu} F_{\beta(A(T))} = \tag{6.1}$$

$$= \sum_{S; sh(S)=\lambda/\mu} F_{\beta(D(S))}, \tag{6.2}$$

dove in (6.1) T è un standard reverse tableau e in (6.2) S è uno standard tableau.

Di fatto (6.1) e (6.2) sono *la stessa espressione*, grazie alla *biiezione* $T \longleftrightarrow T^*$, ed alla corrispondenza $\beta(A(T)) = \beta(D(T^*))$.

Capitolo 7

Jeu de taquin

Jeu de taquin è un particolare insieme di regole per trasformare uno skew-tableau T trattando i valori come parti separate che si possono muovere nella tavola delle coordinate piane. Queste regole sono pensate in modo tale che le proprietà del tableau siano conservate, in particolare mantenendo la standardità e lasciando invariato il *descent set* del tableau su cui vengono applicate.

La teoria del jeu de taquin fu sviluppata da Schützenberger [17], 1977, avendo in origine l'obiettivo di estendere ed approfondire la teoria della corrispondenza di Robinson-Knuth-Schensted (cfr. ad es. [14]) e di fornire la prima dimostrazione rigorosa della regola di Littlewood-Richardson per le funzioni di Schur.

La teoria del jeu de taquin è una teoria vasta e ramificata, ed ha avuto sviluppi ed applicazioni nei più diversi ambiti (cfr. ad es. [13], *Cap.12*, [14], *Cap.3*). In questo capitolo, ci si limita a richiamare solo alcuni fatti essenziali alla comprensione del capitolo successivo.

Definizione 7.1. Sia λ/μ una forma skew. Si considerino le celle b che si possono aggiungere a λ/μ , tali che $b \cup \lambda/\mu$ sia una valida forma skew. Ci sono due tipi di celle che si possono scegliere: quelle “superiori”, denotate con \bullet , e quelle “inferiori”, denotate con \circ .

Esempio 7.1. $\lambda = (5, 4, 2, 1)$; $\mu = (3, 1)$

“rettificato”). Con $jdt(T) = P$ si intende che P è l'unico standard tableau rettificato nella classe jeu de taquin di T .

Teorema 7.0.12. *Il numero*

$$C_{\mu P}^{\lambda} = \#\{T; \quad T \text{ standard tableau, } sh(T) = \lambda/\mu : jdt(T) = P\}$$

dipende solo dalla forma λ/μ e dalla forma ν di P , dove ν è una partizione (cioè P è rettificato), ma non dal tableau P . Quindi in luogo di $C_{\mu P}^{\lambda}$ si può scrivere $C_{\mu\nu}^{\lambda}$, dove ν (partizione) è la forma di P .

Esempio 7.3. Si analizza ora un esempio di questa osservazione:

sia $\lambda = (4, 4, 2, 1)$, $\mu = (2, 1)$, e $\nu = (4, 3, 1)$, si consideri il tableau P di forma ν

$$P = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & \\ \hline 8 & & & \\ \hline \end{array}$$

Esistono esattamente due standard tableaux T di forma λ/μ tali che $jdt(T) = P$ e sono

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline 2 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 8 \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline 2 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 5 \\ \hline 8 & \\ \hline \end{array}$$

Questo non dipende da altro se non dalla forma skew fissata e dalla forma $\nu = (4, 3, 1)$ di P ; cioè se si sostituisce il tableau P con un altro tableau standard della stessa forma, questo avrebbe comunque due tableaux jeu de taquin-equivalenti della forma skew fissata.

Osservazione 7. Si può facilmente notare che il procedimento dello *jeu de taquin* non altera le posizioni relative del valore i e del valore $i + 1$, dunque applicare lo *jeu de taquin* ad un tableau non altera il suo *descent set*. Cioè se due tableaux T e T' sono jeu de taquin-equivalenti allora $D(T) = D(T')$.

Capitolo 8

Regola di Littlewood-Richardson

Consideriamo l'espansione:

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_{\nu} c_{\mu\nu}^{\lambda} s_{\nu}.$$

Teorema 8.0.13. Regola di Littlewood-Richardson (versione dello jeu de taquin)

Il coefficiente di Littlewood-Richardson $c_{\mu\nu}^{\lambda}$ è uguale al numero $C_{\mu\nu}^{\lambda}$ degli standard tableaux di forma λ/μ jeu de taquin-equivalenti a un particolare standard tableau di forma ν .

Dimostrazione. Si richiami l'espressione delle funzioni di Schur secondo il teorema di Stanley (cfr. Osservazione 6):

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_T F_{\beta(D(T))}, \quad (8.1)$$

ove T varia nell'insieme di tutti gli standard tableaux di forma λ/μ .

Per il *Teorema fondamentale dello jeu de taquin* si possono classificare i tableaux T attraverso il loro rappresentante rettificato, da cui (8.1) si può riscrivere nella forma:

$$\sum_P \sum_{T: jdt(T)=P} F_{\beta(D(T))}, \quad (8.2)$$

ove P varia nell'insieme di tutti gli standard tableaux (rettificati) la cui forma è una partizione.

Per la *Osservazione 7*, la (8.2) si può riscrivere nella forma:

$$\sum_P \sum_{T: jdt(T)=P} F_{\beta(D(P))} = \sum_P C_{\mu P}^\lambda F_{\beta(D(P))}; \quad (8.3)$$

Classificando i tableaux per la loro forma ν , in virtù del *Teorema 7.0.12* la (8.3) si può riscrivere come segue:

$$\sum_\nu \left(\sum_{P: sh(P)=\nu} C_{\mu P}^\lambda F_{\beta(D(P))} \right) = \sum_\nu C_{\mu \nu}^\lambda \left(\sum_{P: sh(P)=\nu} F_{\beta(D(P))} \right)$$

La seconda sommatoria per il *Teorema di Stanley* è l'espressione della funzione di Schur s_ν :

$$\sum_{\nu \vdash n} C_{\mu \nu}^\lambda s_\nu.$$

□

Definizione 8.1. Data una partizione $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r) \vdash n$, sia C_ν il tableau "canonico" standard di forma ν riempito coi simboli $1, 2, \dots, n$, in ordine crescente da sinistra verso destra e dall'alto verso il basso.

Esempio 8.1.

$$\nu = (3, 3, 2, 1) \longrightarrow C_\nu = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & \\ \hline 9 & & \\ \hline \end{array}$$

Definizione 8.2. Date $\lambda/\mu \vdash n$ e $\nu \vdash n$, considero i tableaux semistandard T di forma λ/μ con contenuto ν , cioè ν_1 occorrenze dell'1, ν_2 occorrenze del 2, etc. Ad ognuno di questi tableaux T associo una parola, composta dai valori del tableau partendo da destra e andando verso sinistra e dall'alto verso il basso. Questa parola si dice di *Yamanouchi* se leggendola da sinistra verso destra il valore i compare un numero maggiore o uguale del valore $i + 1$, per ogni i .

Esempio 8.2. $\lambda = (432)$, $\mu = (2, 1)$, $\nu = (3, 1, 1)$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline \end{array} \longrightarrow (112132)$$

In questo caso la parola associata al tableau è di *Yamanouchi*.

Definizione 8.3. Un tableau T di contenuto ν *semistandard* e con parola associata di *Yamanouchi* viene detto un tableau *Littlewood-Richardson* di forma λ/μ con contenuto ν .

Dato un tableau *Littlewood-Richardson* T si può ottenere un tableau standard di forma λ/μ sostituendo i valori (con molteplicità) di T da sinistra verso destra nel seguente modo:

$$1 \longrightarrow 1, 2, \dots, \nu_1$$

$$2 \longrightarrow \nu_1 + 1, \dots, \nu_1 + \nu_2$$

$$3 \longrightarrow \nu_1 + \nu_2 + 1, \dots, \nu_1 + \nu_2 + \nu_3,$$

eccetera.

Il tableau risultante viene detto il tableau *standardizzato* di T , indicato con $s(T)$.

Esempio 8.3.

$$T = \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline \end{array} \longrightarrow s(T) = \begin{array}{|c|c|} \hline & 2 & 3 \\ \hline 1 & 5 & \\ \hline 4 & 6 & \\ \hline \end{array}$$

Siano date $\lambda/\mu \vdash n$ e una $\nu \vdash n$, si ha il seguente fatto:
 un tableau P standard di forma λ/μ è *jeu de taquin equivalente* a un $C_\nu \Leftrightarrow P$ è il tableau standardizzato di un *Littlewood-Richardson tableau* su forma λ/μ e contenuto ν .

Data la precedente argomentazione, si giunge a enunciare il seguente teorema:

Teorema 8.0.14. Regola di Littlewood-Richardson (versione classica)

Il coefficiente di Littlewood-Richardson $c_{\mu\nu}^{\lambda} = C_{\mu\nu}^{\lambda}$ è uguale al numero dei Littlewood-Richardson tableau semistandard di forma λ/μ e di contenuto ν .

Osservazione 8. Chiaramente, il teorema precedente si specializza al caso dell'espansione del prodotto di funzioni di Schur associate a partizioni.

Di più, sussiste la rimarchevole dualità:

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_{\nu} C_{\mu\nu}^{\lambda} s_{\nu}$$

se e solo se

$$s_{\mu} s_{\nu} = \sum_{\lambda} C_{\mu\nu}^{\lambda} s_{\lambda}.$$

(cfr. ad es. [18], sez. 7.15, pag. 338)

Osservazione 9. Sia $N \in \mathbb{Z}^+$, e si considerino le funzioni simmetriche elementari (in N variabili):

$$e_1, e_2, \dots, e_k, \dots, e_N.$$

Poiché le funzioni simmetriche elementari e_k sono funzioni di Schur (associate alle forme “colonna” con k caselle), in virtù del Teorema fondamentale delle funzioni simmetriche, ed iterando l'osservazione precedente sul prodotto (ci si trova qui nel caso speciale delle “Formule di Pieri” [8]) risulta che l'insieme

$$\{s_{\lambda}; \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k), k \leq N\}$$

è sistema di generatori lineari per $\mathcal{S}ym_N$.

Per ragioni di equicardinalità (cfr. Corollario 3.0.5, Cap. 5), si deduce che l'insieme

$$\{s_{\lambda}; \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k), k \leq N\}$$

è \mathbb{K} -base di $\mathcal{S}ym_N$.

Esempi

Esempio 8.4. $\lambda = (3, 2, 1)$, $\mu = (1)$, $\lambda/\mu \vdash 5$ $\nu \vdash 5$

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_{\nu \vdash n} C_{\mu\nu}^{\lambda} s_{\nu}$$

si calcolano i coefficienti di Littlewood-Richardson nel modo in appena esposto, cioè si contano i *Littlewood-Richardson tableaux* di forma λ/μ con contenuto ν , con $\nu \vdash 5$:

$$\nu = (1, 1, 1, 1, 1) \longrightarrow 0 \tag{8.4}$$

$$\nu = (2, 1, 1, 1) \longrightarrow 0 \tag{8.5}$$

$$\nu = (2, 2, 1) \longrightarrow 1 \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \tag{8.6}$$

$$\nu = (3, 1, 1) \longrightarrow 1 \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \tag{8.7}$$

$$\nu = (3, 2) \longrightarrow 1 \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \tag{8.8}$$

$$\nu = (4, 1) \longrightarrow 0 \tag{8.9}$$

$$\nu = (5) \longrightarrow 0 \tag{8.10}$$

$$\implies s_{(3,2,1)/(1)} = s_{(2,2,1)} + s_{(3,1)} + s_{(3,2)}$$

Esempio 8.5. $\lambda = (4, 3, 2, 2)$, $\mu = (3, 1)$, $\lambda/\mu \vdash 7$ $\nu \vdash 7$

$$\nu = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \longrightarrow 0 \quad (8.11)$$

$$\nu = (2, 1, 1, 1, 1, 1) \longrightarrow 0 \quad (8.12)$$

$$\nu = (2, 2, 1, 1, 1) \longrightarrow 0 \quad (8.13)$$

$$\nu = (2, 2, 2, 1) \longrightarrow 1 \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad (8.14)$$

$$\nu = (3, 1, 1, 1, 1) \longrightarrow 0 \quad (8.15)$$

$$\nu = (3, 2, 1, 1) \longrightarrow 1 \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & 2 \\ \hline 1 & 3 & \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad (8.16)$$

$$\nu = (3, 2, 2) \longrightarrow 2 \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & \\ \hline 3 & 3 & \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} ; \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & \\ \hline 3 & 3 & \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad (8.17)$$

$$\nu = (3, 3, 1) \longrightarrow 1 \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad (8.18)$$

$$\nu = (4, 1, 1, 1, 1) \longrightarrow 0 \quad (8.19)$$

$$\nu = (4, 2, 1) \longrightarrow 1 \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad (8.20)$$

$$\nu = (4, 3) \longrightarrow 0 \quad (8.21)$$

$$\nu = (5, 1, 1) \longrightarrow 0 \quad (8.22)$$

$$\nu = (5, 2) \longrightarrow 0 \quad (8.23)$$

$$\nu = (6, 1) \longrightarrow 0 \quad (8.24)$$

$$\nu = (7) \longrightarrow 0 \quad (8.25)$$

$$\Rightarrow s_{(4,3,2,2)/(3,1)} = s_{(2,2,2,1)} + s_{(3,2,1,1)} + 2s_{(3,2,2)} + s_{(3,3,1)} + s_{(4,2,1)}$$

Capitolo 9

Rappresentazioni lineari e caratteri

In questo capitolo, si farà riferimento alle monografie [1, 4, 13].

Definizione 9.1. Rappresentazioni lineari

Una *rappresentazione lineare* di un gruppo G su uno spazio vettoriale V di dimensione m su un campo \mathbb{K} è un omomorfismo di gruppi

$$\rho : G \longrightarrow GL(V) \cong GL(m, \mathbb{K})$$

dove $GL(V)$ è il gruppo degli automorfismi di V , cioè le trasformazioni lineari invertibili da V in se stesso, e $GL(m, \mathbb{K})$ è il gruppo delle matrici $m \times m$ invertibili su V .

Due rappresentazioni lineari di G

$$\rho : G \longrightarrow GL(V); \quad \rho' : G \longrightarrow GL(W)$$

si dicono *equivalenti* se e solo se esiste una $\varphi : V \rightarrow W$ lineare e invertibile, tale che

$$\rho' = \varphi \circ \rho \circ \varphi^{-1}$$

In termini matriciali, fissata una base, esiste una $M \in GL(m, \mathbb{K})$, dove m è la dimensione di V e di W tale che

$$\rho'(g) = M \times \rho(g) \times M^{-1} \quad \forall g \in G.$$

Date due rappresentazioni α e β di G , si definisce la *somma diretta* rappresentazione $\alpha \oplus \beta$ come segue:

$$(\alpha \oplus \beta)(g) := \begin{pmatrix} \alpha(g) & 0 \\ 0 & \beta(g) \end{pmatrix} \quad \forall g \in G$$

Una rappresentazione lineare γ di G si dice *riducibile* se esistono due rappresentazioni α e β tali che γ è equivalente a $\alpha \oplus \beta$; altrimenti γ è detta *irriducibile*.

Se una rappresentazione γ di G è riducibile, chiaramente esiste almeno un sottospazio proprio invariante, ma in generale non vale il viceversa.

In particolare sono di nostro interesse le rappresentazioni dei gruppi generali lineari, cioè i morfismi del tipo

$$\rho : GL(N, \mathbb{K}) \longrightarrow GL(m, \mathbb{K})$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \xrightarrow{\rho} \begin{pmatrix} \alpha_{11}(a_{ij}) & \dots & \alpha_{1m}(a_{ij}) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1}(a_{ij}) & \dots & \alpha_{mm}(a_{ij}) \end{pmatrix}$$

Nel caso in cui gli elementi α_{ij} sono polinomi nelle variabili a_{ij} , allora la rappresentazione ρ viene detta *rappresentazione polinomiale* di $GL(N, \mathbb{K})$. È un fatto elementare verificare che ogni rappresentazione polinomiale può essere espressa come somma diretta di rappresentazioni polinomiali omogenee, vale a dire gli $\alpha_{hk}(a_{ij})$ sono polinomi omogenei del medesimo grado n (detto grado della rappresentazione).

Definizione 9.2. Caratteri

Sia V uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{K} e sia $\rho : G \rightarrow GL(V)$ una rappresentazione del gruppo G su V . Il *carattere* della rappresentazione ρ è, per

definizione, la funzione χ_ρ che manda $g \in G$ nella traccia dell'automorfismo $\rho(g)$:

$$\begin{aligned}\chi_\rho : G &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \chi_\rho(g) &= \text{Tr}(\rho(g)).\end{aligned}$$

Da note proprietà della traccia si ricava che:

- Il carattere è invariante per equivalenza di rappresentazioni.

Infatti:

date due rappresentazioni equivalenti ρ e ρ' del gruppo G , essendo

$$\rho'(g) = M \times \rho(g) \times M^{-1} \quad \forall g \in G$$

segue

$$\begin{aligned}\chi_{\rho'}(g) &= \text{Tr}(\rho'(g)) = \text{Tr}(M \times \rho(g) \times M^{-1}) = \\ &= \text{Tr}(M \times M^{-1} \times \rho(g)) = \text{Tr}(\rho(g)) = \chi_\rho(g) \quad \forall g \in G\end{aligned}$$

- La funzione carattere è costante sulle classi di coniugio di G .

Infatti:

siano $g, g' \in G$ t.c. $g' = hgh^{-1}$, $h \in G$

$$\begin{aligned}\chi_\rho(g') &= \text{Tr}(\rho(hgh^{-1})) = \text{Tr}(\rho(h)\rho(g)\rho(h^{-1})) = \\ &= \text{Tr}(\rho(g)\rho(h)\rho(h^{-1})) = \text{Tr}(\rho(g)) = \chi_\rho(g)\end{aligned}$$

Teorema 9.0.15. *Sia $N \in \mathbb{Z}^+$ e si consideri il gruppo generale lineare $GL(N, \mathbb{C})$.*

- *Ogni rappresentazione polinomiale di $GL(N, \mathbb{C})$ si decompone in somma diretta di rappresentazioni polinomiali irriducibili.*
- *Le classi di equivalenza di rappresentazioni polinomiali irriducibili di $GL(N, \mathbb{C})$ sono in biiezione con le partizioni $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k)$ in $k \leq N$ parti.*

Nel seguito, indicheremo con $[\lambda; N]$ la classe di equivalenza delle rappresentazioni polinomiali irriducibili di $GL(N, \mathbb{C})$ parametrizzata dalla partizione λ in al più N parti.

Data una rappresentazione polinomiale

$$\rho_\lambda : GL(N, \mathbb{C}) \rightarrow GL(V_\lambda) \text{ in } [\lambda; N],$$

si ricordino alcuni fatti fondamentali di natura algebrico/combinatoria:

- Lo spazio vettoriale V_λ ha una \mathbb{K} -base (detta “base semistandard”) in biiezione con l’insieme dei semistandard reverse tableaux T di forma $[\lambda]$ riempiti con i numeri $1, 2, \dots, N$.
- Sia $Diag(x_1, x_2, \dots, x_N)$ la “generica” matrice diagonale $N \times N$, con x_1, x_2, \dots, x_N ordinatamente sulla diagonale.

Allora

$$Tr(\rho_\lambda(Diag(x_1, x_2, \dots, x_N))) = \sum_T x^T,$$

ove la somma varia sull’insieme dei semistandard reverse T di forma λ riempiti con i numeri $1, 2, \dots, N$.

Perciò

$$Tr(\rho_\lambda(Diag(x_1, x_2, \dots, x_N))) = s_\lambda(x_1, \dots, x_N),$$

la funzione di Schur s_λ associata alla forma λ nelle variabili x_1, x_2, \dots, x_N .

Poiché, data una qualsiasi permutazione $\sigma \in \mathcal{S}_N$, le matrici

$$Diag(x_1, x_2, \dots, x_N), Diag(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(N)}) \in GL(N, \mathbb{C})$$

sono coniugate, si ha

Teorema 9.0.16.

$$\begin{aligned} s_\lambda(x_1, \dots, x_N) &= Tr(\rho_\lambda(Diag(x_1, x_2, \dots, x_N))) = \\ &= Tr(\rho_\lambda(Diag(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(N)}))) = s_\lambda(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(N)}), \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}_N, \end{aligned}$$

cioè la funzione di Schur s_λ è simmetrica (nelle variabili x_1, x_2, \dots, x_N).

Poiché le matrici di $GL(N, \mathbb{C})$ *diagonalizzabili* sono coniugate di matrici diagonali, e poiché la classe delle matrici diagonalizzabili è densa in $GL(N, \mathbb{C})$, il precedente risultato si generalizza come segue.

Teorema 9.0.17. *Si consideri il gruppo $GL(N, \mathbb{C})$, e una sua rappresentazione polinomiale*

$$\rho_\lambda : GL(N, \mathbb{C}) \rightarrow GL(V_\lambda) \text{ in } [\lambda; N].$$

Sia χ_{ρ_λ} la sua funzione carattere. Allora, per ogni $M \in GL(N, \mathbb{C})$ si ha:

$$\chi_{\rho_\lambda}(M) = s_\lambda(a_1, a_2, \dots, a_N),$$

ove $s_\lambda(a_1, a_2, \dots, a_N)$ denota la valutazione della funzione simmetrica di Schur $s_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_N)$ sugli autovalori a_1, a_2, \dots, a_N della matrice $M \in GL(N, \mathbb{C})$.

Esempi

Si mostrano ora degli esempi concreti del teorema enunciato sopra.

Esempio 9.1. Si vuole rappresentare ora lo spazio $GL(2)$ sullo spazio $\mathcal{S}_{(2)}$, cioè lo spazio che ha per base i *semistandard tableaux* di forma (2) con due simboli. Quest'ultimo spazio lo si esprime come spazio vettoriale dei polinomi omogenei di secondo grado nelle variabili y_1 e y_2 , in simboli $\mathbb{K}_2[y_1, y_2]$. La base del nostro spazio di rappresentazione è data da:

$$\text{Base} \longrightarrow \boxed{1 \ 1} \leftrightarrow y_1^2; \quad \boxed{2 \ 1} \leftrightarrow (y_1 y_2); \quad \boxed{2 \ 2} \leftrightarrow y_2^2,$$

si prende un operatore lineare $T \in GL(2)$, con matrice associata

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_n(2)$$

e si definisce

$$\text{Aut}(\mathbb{K}_2[y_1, y_2]) \ni \rho(T) : y_1^2 \longrightarrow (ay_1 + cy_2)^2 \tag{9.1}$$

$$y_1 y_2 \longrightarrow (ay_1 + cy_2)(by_1 + dy_2) \tag{9.2}$$

$$y_2^2 \longrightarrow (by_1 + dy_2)^2 \tag{9.3}$$

da cui

$$\rho(T)(y_1^2) = a^2y_1^2 + 2acy_1y_2 + c^2y_2^2 \quad (9.4)$$

$$\rho(T)(y_1y_2) = aby_1^2 + ady_1y_2 + cby_1y_2 + cdy_2^2 \quad (9.5)$$

$$\rho(T)(y_2^2) = b^2y_1^2 + 2bdy_1y_2 + d^2y_2^2 \quad (9.6)$$

da cui si deduce la matrice associata a $\rho(T)$, rispetto alla base ordinata y_1^2, y_1y_2, y_2^2 di $\mathcal{S}_{(2)} = \mathbb{K}_2[y_1, y_2]$:

$$\begin{pmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2ac & ad + bc & 2bd \\ c^2 & cd & d^2 \end{pmatrix}$$

Da cui si ottiene il carattere di T rispetto alla rappresentazione ρ

$$\chi(T) = \text{Tr}(\rho(T)) = a^2 + (ad + bc) + d^2$$

Presa la funzione di Schur $s_{(2)} = x_1 + x_1x_2 + x_2^2$.

Ora si calcolano gli autovalori di T e si valuta $s_{(2)}$ rispetto a questi: il polinomio caratteristico $P(T)$ è

$$P(T) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$$

Perciò le radici λ_1, λ_2 sono:

$$\lambda_1 = X + Y; \quad \lambda_2 = X - Y$$

dove

$$X = \frac{1}{2}(a + d); \quad Y = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + d^2 - 2ad + 4bc}$$

Si valuta $s_{(2)}$ sugli autovalori trovati:

$$s_{(2)} = x_1 + x_1x_2 + x_2^2 \rightarrow \lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 = (X+Y)^2 + (X+Y)(X-Y) + (X-Y)^2 =$$

$$X^2 + 2XY + Y^2 + X^2 - Y^2 + X^2 - 2XY + Y^2 = 3X^2 + Y^2$$

$$3\frac{a^2 + 2ad + d^2}{4} + \frac{a^2 + d^2 - 2ad + 4bc}{4} =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}(3a^2 + 6ad + 3d^2 + a^2 + d^2 - 2ad + 4bc) = \\ & \frac{1}{4}(4a^2 + 4d^2 + 4ad + 4bc) = \\ & a^2 + d^2 + (ad + bc) = \text{Tr} \begin{pmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2ac & ad + bc & 2bd \\ c^2 & cd & d^2 \end{pmatrix} = \text{Tr}(\rho(T)) = \chi_{\rho\lambda}(T) \end{aligned}$$

In questo esempio si è verificato concretamente che la *funzione di Schur* $s_{(2)}$ di forma $\lambda = (2)$ valutata sugli autovalori della matrice rappresentata è il caratteri della matrice rappresentante sulla rappresentazione polinomiale irriducibile determinata dalla partizione $\lambda = (2)$.

Esempio 9.2. Si fornisce un ulteriore esempio analogo ma in questo caso si vuole rappresentare $GL(2)$ su $\mathcal{S}_{(2,1)}$, cioè lo spazio che ha per basi i *semistandard tableaux* di forma $(2,1)$ in due variabili. Lo spazio $\mathcal{S}_{(2)}$ si descrive attraverso le variabili $(1|1), (1|2), (2|1), (2|2)$ che sono anticommutative, cioè: $(a|b)(b|c) = -(b|c)(a|b)$

Quindi la base di $\mathcal{S}_{(2,1)}$ è composta dai seguenti tableaux, descritti attraverso le variabili suddette:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \longrightarrow (1|1)(2|2)(2|1) = T_1$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \longrightarrow 2(1|1)(1|2)(2|1) = T_2$$

Presa

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2)$$

e costruito un morfismo $\rho(T)$ che agisce sulla base di $\mathcal{S}_{(2,1)}$ in questo modo:

$$\begin{aligned} GL(\mathcal{S}_{(2,1)}) \ni \rho(M)(T_1) &= (a1 + c2|1)(b1 + d2|2)(b1 + d2|1) = \\ & (a(1|1) + b(2|1))(b(1|2) + d(2|2))(b(1|1) + d(2|1)) = \\ b^2c(2|1)(1|2)(1|1) + bcd(2|1)(2|2)(1|1) + abd(1|1)(1|2)(2|1) + ad^2(1|1)(2|2)(2|1) &= \\ (ad^2 - bcd)T_1 + \left(\frac{abd}{2} - \frac{b^2c}{2}\right)T_2 &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
GL(\mathcal{S}_{(2,1)}) \ni \rho(M)(T_2) &= 2(a1 + c2|1)(a1 + c2|2)(b1 + d2|1) = \\
&= 2(a(1|1) + c(2|1))(a(1|2) + c(2|2))(b(1|1) + d(2|1)) = \\
2[abc(2|1)(1|2)(1|1) + bc^2(2|1)(2|2)(1|1) + a^2d(1|1)(1|2)(2|1) + acd(1|1)(2|2)(2|1)] &= \\
&= (2acd - 2bc^2)T_1 + (a^2d - abc)T_2
\end{aligned}$$

da cui si ricava la matrice $\rho(M) \in GL(2)$:

$$\rho(M) = \begin{pmatrix} ad^2 - bcd & 2acd - 2bc^2 \\ \frac{abd - b^2c}{2} & a^2d - abc \end{pmatrix}$$

Per cui il carattere della matrice M secondo la rappresentazione ρ è

$$\chi_\rho(M) = ad^2 - bcd + a^2d - abc$$

Ora $s_{(2,1)} = x_1^2x_2 + x_1x_2^2$; gli autovalori di $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sono:

$$\lambda_1 = X + Y; \quad \lambda_2 = X - Y$$

con

$$X = \frac{1}{2}(a + d); \quad Y = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + d^2 - 2ad + 4bc}.$$

Sostituisco gli autovalori in $s_{(2)}$:

$$(X + Y)^2(X - Y) + (X + Y)(X - Y)^2 =$$

$$2X^3 - 2XY^2 =$$

$$a^2d + ad^2 - abc - bcd = \chi_\rho(M)$$

Appendice A

Alcune note biografiche

ISSAI SCHUR (1875 Mogilev - 1941 Tel Aviv)



Già Allievo di Frobenius, fu il principale artefice dell'evoluzione della *Teoria dei Caratteri dei Gruppi* nella moderna *Teoria delle Rappresentazioni*, ed uno dei protagonisti della nascita dell'Algebra Moderna.

Nella celebre Dissertazione del 1901 [15], studiò le rappresentazioni polinomiali/razionali di $GL(N, \mathbb{C})$, dimostrò il Teorema di Lineare riduttività, ottenne la classificazione/costruzione di tutte le rappresentazioni irriducibili (a meno di equivalenza) che risultano associate biettivamente alle partizioni $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k)$ in al più $k \leq N$ parti e ne determinò i carat-

teri, che risultano essere le funzioni simmetriche (negli N autovalori) che da allora portano il suo nome. Nel 1927, informato da Hermann Weyl a proposito della teoria delle rappresentazioni del gruppo simmetrico sviluppata da

A. Young nella sostanziale indifferenza del mondo accademico del tempo, riscrisse il suo lavoro basandolo sulla teoria di Young e su teoremi di “doppio centralizzatore” [16].

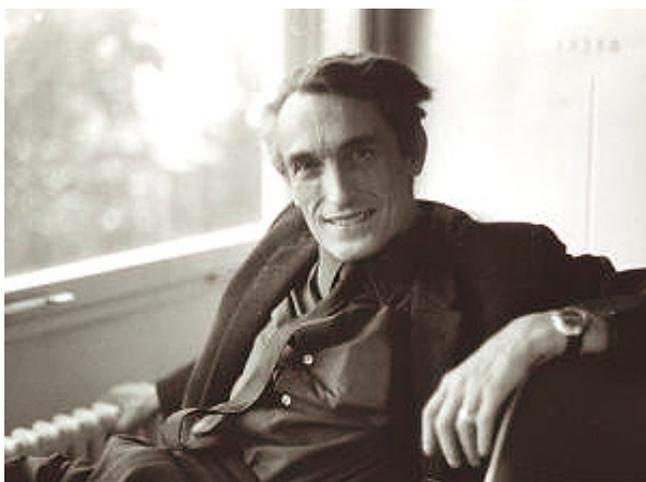
Questo punto di vista (spesso detto *dualità Schur/Weyl*), che correla la teoria di \mathcal{S}_n alla teoria di $GL(N, \mathbb{C})$, è attualmente il punto di vista “standard” (cfr. ad es. [20]) ed ha prodotto innumerevoli importanti varianti ad altre coppie di gruppi ed algebre.

Oltre che grande Studioso, Schur fu un altrettanto grande Maestro, guida della scuola di Algebra berlinese negli anni dal 1919 (anno in cui fu nominato Professore Ordinario a Berlino) fino al 1935 (anno in cui fu rimosso da tutte le sue cariche a causa delle leggi razziali naziste); tra i suoi allievi di Dottorato ricordiamo Richard Brauer, Alfred Brauer (fratello di Richard), Bernhard Neumann, Richard Rado e Helmut Wielandt. Tra gli altri che lavorarono sotto la guida di Schur ricordiamo Walter Lederman, Hanna Neumann e Menahem Max Schiffer.

W.Ledermann descrive anche le straordinarie qualità di Schur come insegnante: *“Schur was a superb lecturer. His lectures were meticulously prepared and were exceedingly popular. I remember attending his algebra course which was held in a lecture theatre filled with about 400 students. Sometimes, when I had to be content with a seat at the back of the lecture theatre, I used a pair of opera glasses to get at least a glimpse of the speaker.”*

Schur lasciò la Germania per recarsi in Palestina nel 1939, spezzato nella mente e nel fisico, subendo l’umiliazione finale di dovere trovare aiuti finanziari per pagare la “tassa di emigrazione dal Reich”. Essendo privo di mezzi sufficienti per vivere in Palestina, fu obbligato a vendere la sua amata collezione di libri accademici all’Institute for Advanced Study di Princeton. Morì due anni dopo in occasione del suo sessantaseiesimo compleanno.

MARCEL PAUL “MARCO” SCHÜTZENBERGER (1920 Parigi - 1996 Parigi)



Laureato in Medicina nel 1948, prestò servizio all'Istituto Nazionale di Igiene dal 1948 al 1953; fu tra i primi a rendersi conto della fondamentale importanza dell'uso di sofisticati strumenti Matematici e Statistici in Genetica ed Epidemiologia.

Jacques Besson ricorda:

“Il Prof. Raymond Turpin, convinto dell'avvenire e dell'importanza della applicazione alla biologia delle regole della statistica matematica, gli affidò il compito di dirigere le tesi di dottorato in medicina di Deroche, Pronque-Levinet e di Jérôme Lejeune; quest'ultimo doveva qualche tempo dopo scoprire la causa della sindrome di Down nella aberrazione cromosomica oggi nota come Trisomia 21”.

Nel 1953 gli fu assegnato il titolo di Dottore in Matematica per il suo lavoro sulla Teoria Matematica dell'Informazione, nel quale aveva fornito fondamentali sviluppi della teoria di Shannon. Contemporaneamente al suo lavoro di Coordinatore delle campagne di vaccinazione (svolte prevalentemente in Amazzonia e Sud-Est asiatico) per conto dell'OMS, mantenne stretta e feconda collaborazione con i Gruppi di Ricerca di C. Shannon e di N. Chomsky al MIT; fu tra i fondatori della teoria delle grammatiche *Context-Free*.

Dall'inizio degli anni '60 i suoi interessi si rivolsero principalmente alla Combinatoria, all'Algebra (semigrupperi, automi, codici, linguaggi formali) ed all'Informatica Teorica.

Ebbe numerosi e illustri allievi, tra i quali Dominique Perrin, Maurice

Nivat (laureato ad honorem nel 1997 presso l'“Alma Mater Studiorum”) ed Alain Lascoux.

I suoi contributi alla Combinatoria, all'Algebra e alla Geometria Algebrica sono di eccezionale importanza; per restringersi ad argomenti menzionati in questa tesi, a Schützenberger si deve la fondamentale Teoria dello *Jeu de Taquin*, del *Monoide Plactique* e dei *Polinomi di Schubert* (Lascoux e Schützenberger - 1982).

D. Perrin così conclude il suo ritratto di “Marco”: *“Une grande partie du travail de Marco en mathématiques est, comme nous l'avons vu, relié avec les automates, les mots ou les codes. Il serait certainement très difficile de dire si Marco Schützenberger a appliqué les mathématiques à l'informatique, ou si c'est plutôt l'inverse. Il m'a dit il y a longtemps qu'il considérait que son rôle était d'utiliser ses intuitions sur le traitement des données pour contribuer à enrichir les mathématiques d'objets et de propriétés nouvelles. Plaisantait-il?”*

Bibliografia

- [1] J. Dieudonné and J. Carrel, *Invariant Theory, Old and New*, Academic Press, New York, 1971.
- [2] S. Fomin, Appendix 1 to Chapter 7 in: R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics, vol 2*, Cambridge University Press, 1997.
- [3] J.S. Frame, G. de B. Robinson and R.M. Thrall, The hook graphs of S_n , *Canad. J. Math.* **6** (1954), 316-324.
- [4] W. Fulton and J. Harris, *Representation Theory*, Graduate Texts in Mathematics **129**, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1991.
- [5] I. Gessel, Multipartite P-partitions and inner products of skew Schur functions, *Combinatorics and algebra* (Boulder, Colo., 1983), 289-317, *Contemp. Math.*, 34, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984.
- [6] J. Haglund, K. Luoto, S. Mason, S. van Willigenburg, S. Quasisymmetric Schur functions, *J. Combin. Theory Ser. A*, **118**, (2011), 463-490.
- [7] K.G.J. Jacobi, De functionibus alternantibus earumque divisione per productum e differentiis elementorum conflatum, *J. Reine Angew Math.* (=Crelle's J.) **22** (1841), 360-371; *Werke* **3**, 439-452. Una traduzione tedesca fu data da G. Stäckel, in *Über die Bildung und die Eigenschaften der Determinanten*, Leipzig, 1896, 73 pp.

-
- [8] G.D. James and A.Kerber, *The representation Theory of the Symmetric Group*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **16**, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1981.
- [9] D.E. Littlewood and A.R. Richardson, Group characters and algebra, *Phil. Trans. Roy. Soc. A (London)* **233** (1934), 99-141.
- [10] D.E. Littlewood, *The Theory of Group Characters and Matrix Representations of Groups*, second edition, Oxford University Press, London, 1950; reprinted 1958.
- [11] I.G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford University Press, Oxford, 1979.
- [12] M.Pieri, Sul problema degli spazi secanti. Nota 1^a, *Rend. Ist. Lombardo (2)* **26** (1893), 534-546.
- [13] C. Procesi, *Lie groups. An approach through invariants and representations*, Universitext. Springer, New York, 2007.
- [14] B. E. Sagan, *The Symmetric Group. Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions*, Wadsworth & Brooks/Cole, Pacific Grove, California, 1991.
- [15] I. Schur, Über eine Klasse von Matrizen die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen, Inaugural-Dissertation, Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin, 1901; *Ges. Abhandlungen*, vol. 1, pp 1-72.
- [16] I. Schur, Über die rationalen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wissenschaften* **10** (1927) 58-75; *Ges. Abhandlungen*, vol. 3, pp. 68-85.
- [17] M.P. Schützenberger, La correspondance de Robinson, in *Combinatoire et Représentation du Groupe Symétrique* (D. Foata, ed.), Lecture notes in Math. **579**, 1977, pp. 59-135.

- [18] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics, vol 2*, Cambridge University Press, 1997.
- [19] R. P. Stanley, *Ordered structures and partitions*, Memoirs of the American Mathematical Society, No. 119, American Mathematical Society, 1972.
- [20] H. Weyl, *The Classical Groups*, second edition, Princeton University Press, Princeton New Jersey, 1946.