ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

La Formula di Eulero per i poliedri fra storia e didattica

Tesi di Laurea in Storia della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Piero Plazzi

Presentata da:
Laura Zanoni

Sessione terza
Anno Accademico
2012/2013

Alla mia famiglia,
babbo, mamma, Luca e Andrea,
che mi ha sempre sostenuto e amato.

Introduzione

Questa tesi riguarda la *Formula di Eulero* per i poliedri:

$$F - S + V = 2$$

dove F indica il numero di facce, S il numero di spigoli e V quello dei vertici di un poliedro.
Nel primo capitolo tratteremo i risultati ottenuti da Cartesio: egli fu il primo a considerare non solo le caratteristiche geometriche ma anche metriche di un solido. Partendo dall'analogia con le figure piane, riuscì a ricavare importanti relazioni nei solidi convessi, riguardanti il numero e la misura degli angoli piani, degli angoli solidi e delle facce. Egli non arrivò mai alla formulazione conosciuta oggi ma ne intuì le caratteristiche topologiche, che però non dimostrò mai.
Nel secondo capitolo invece ci occuperemo di ciò che scoprì Eulero. Il manoscritto contenente i risultati di Cartesio era scomparso e quindi questi non erano più conosciuti dai matematici; Eulero, in accordo con quanto avviene per i poligoni, desiderava ottenere un metodo di classificazione per i poliedri e si mise a studiare le loro proprietà. Oltre alla sua formula, in un primo articolo ricavò importanti relazioni, e in un secondo lavoro ne propose una dimostrazione. Riportiamo in breve anche un confronto tra il lavoro di Cartesio e quello di Eulero.
Il terzo capitolo invece riguarda il metodo e il rigore nella formulazione di teoremi e dimostrazioni: I. Lakatos ne fa un esame critico in [9], simulando una lezione dove a tema compaiono la Formula di Eulero e le sue dimostrazioni. Noi cercheremo di analizzare questo suo lavoro.

Su questi tre autori e i loro lavororiportiamo alcune considerazioni biografiche e storiche che possono offrire interessanti spunti didattici: infatti nel quarto e ultimo capitolo ci occuperemo di alcune considerazioni didattiche a proposito della Formula. La struttura sarà quella di un'ipotetica lezione a studenti di Scuola Media Inferiore e utilizzeremo i risultati ottenuti nei precedenti capitoli e una personale esperienza di tirocinio.

Indice

1 La storia: Cartesio **5**

1.1 Cartesio e il suo manoscritto 6

1.2 Struttura del manoscritto 9

1.3 Risultati di Cartesio 11

1.4 Come derivare la Formula di Eulero dagli appunti di Cartesio . 17

2 La storia: Eulero **19**

2.1 Leonhard Euler 20

2.2 I sui lavori sui poliedri 21

2.3 La 'Elementa Doctrinae Solidorum' 23

2.4 La 'Demonstratio nonullarum insignium proprietatum' 28

2.5 Cartesio versus Eulero 35

3 Il metodo e il rigore: Lakatos **37**

3.1 Imre Lakatos 37

3.2 Dimostrazioni e Confutazioni 40

4 La didattica **56**

4.1 Un'ipotetica lezione 57

Bibliografia e Sitografia **66**

Capitolo 1

La storia: Cartesio

La formula che oggi noi conosciamo come Formula di Eulero venne scoperta da Cartesio (1596 - 1650) e inclusa in un suo manoscritto in latino intitolato ″Progymnasmata De Solidorum Elementis‶, ricopiato poi da Leibniz nel 1860. Dopo una breve digressione riguardante la vita dell'autore, in questo capitolo vogliamo analizzare la storia di tale manoscritto e in particolare come Cartesio arrivò a ricavare tale formula.
In tale manoscritto partendo dalla definizione di angolo solido, Cartesio studia le principali proprietà riguardanti i solidi geometrici, da lui mai chiamati poliedri, ma sempre corpi solidi o solo solidi. Egli ricavò varie relazioni interne riguardanti il numero e la misura degli angoli piani, degli angoli solidi e il numero di facce partendo sempre da analogie con le figure piane e le relazioni esistenti in essi, che già si conoscevano fin dagli ″Elementi‶di Euclide.
È importante ricordare che quando Cartesio parla di solidi, tratta sempre e solo i corpi convessi, anche se mai viene specificato; non si sa se questo è dovuto però ad errori nella ricopiatura del testo da parte di Leibniz.
Cartesio non intuì l'importanza in un solido dell'elemento 'spigolo', ma riuscì comunque a capire che ritroviamo sempre un numero doppio di lati delle facce rispetto al numero degli angoli piani; probabilmente per questo non arrivò a ricavare la versione finale della Formula di Eulero, ma solo varie relazioni, fino al passaggio in cui il numero degli angoli piani aumentato di 4 è pari

alla somma tra il doppio del numero delle facce e il doppio del numero degli angoli solidi.
Per analizzare il ″De Solidorum Elementis‟ci avvaliamo degli studi di Federico in [1].

1.1 Cartesio e il suo manoscritto

Figura 1.1: René Descartes. Fonte Internet

Prima di parlare del manoscritto di Cartesio, il ″De Solidorum Elementis‟, ricordiamo alcune importanti date ed eventi della vita dell'autore e della storia del manoscritto; questo perchè la storia e la biografia di un personaggio possona dare interessanti spunti didattici.
René Descartes (conosciuto in Italia con il nome latinizzato di Cartesio) nasce il 31 marzo del 1596 a La Haye in Turenna, terzo figlio di Joachim Descartes, avvocato e consigliere al Parlamento di Bretagna a Rennes e di Jeanne Brochard. La famiglia, che possiede rendite e terre, conta numerosi magistrati, medici e funzionari delle imposte ed è di rango nobile. Alla morte della madre per parto, René è affidato alla nonna materna. Di salute delicata, impara a leggere ed a scrivere in casa, sotto la guida di un precettore. Compie gli studi canonici nel collegio gesuita di La Fléche, dove resterà circa nove anni seguendo i corsi di grammatica, retorica e filosofia, che comprendevano insegnamenti di logica, dottrine umanistiche, fisica, metafisica e matematica,

con elementi di teoria musicale. Uscito dal collegio, ubbidendo ai desideri del padre, si reca a Poitiers dove, nel 1616, riceve la laurea in Legge. Una volta maggiorenne, decide di entrare come volontario nell'esercito. La sua straordinaria intelligenza, però, lo porta addirittura ad interessarsi di arte delle fortificazioni, nonché di prospettiva e di lingua fiamminga. Incontra Isaac Beeckman, scienziato olandese, che lo incoraggia alla ricerca nel campo delle applicazioni della matematica alla fisica. A Beeckman dedica il "Compendium musicae", dove sono indagati i rapporti matematici che regolano le consonanze, le tonalità e le dissonanze. Nell'Europa agitata dal grande conflitto della Guerra dei Trent'Anni, Cartesio compie lunghi viaggi; si reca anche in Italia, soggiornando a Venezia, Roma e Firenze, tornando poi in Francia quando ritiene di aver viaggiato a sufficienza. Entra in contatto con eminenti studiosi come il matematico Claude Mydorge e il teologo Marin Mersenne. In collaborazione con Mydorge si dedica a studi matematici in relazione a problemi di fisica e di ottica. La vita a Parigi non gli consente tuttavia la concentrazione necessaria per le sue ricerche, si ritira allora, durante l'inverno del 1628, in campagna. Con lo scienziato Reneri, invece, cui è legato da una profonda amicizia, si applica a studi sui fenomeni fisici che preannunciano gli esperimenti di Torricelli. Nel 1637 pubblica il "Discours de la méthode", che include anche le "Géométrie", ma quest'opera non suscita grande interesse. Inizia per Cartesio un periodo doloroso: muoiono il padre, la sorella maggiore e la figlia di 5 anni, e sul piano culturale viene duramente attaccato e criticato. Nel 1649 viene invitato dalla Regina Cristina di Svezia, perchè le impartisca lezioni di filosofia; la Regina desidera essere istruita nelle prime ore del mattino, quando il freddo è più pungente, così questo, unito al clima ostile della Svezia, gli causa una forte polmonite. Cartesio muore l'11 febbraio 1650.

L'ambasciatore francese a Stoccolma e amico intimo di Cartesio, Chanut, si prese cura dei suoi averi e dei suoi scritti. Egli fece un inventario di tutti i manoscritti, nel quale alla voce M si può leggere: "M. Environ seize feuillets

in octavo soubs ce titre [Circa sedici pagine formato in ottavo sotto questo titolo]: Progymnasmata de solidorum elementis". Nel 1653 tutte le opere di Cartesio furono mandate per nave da Rouen a Parigi all'amico Clerselier, ma vi fu un naufragio e la scatola contenente tutti i testi cadde nel fiume e fu recuperata solo tre giorni dopo il disastro. Negli anni successivi Clerselier pubblicò solo alcuni degli articoli di Cartesio, mentre rese disponibili gli altri al pubblico e li citò in alcuni suoi lavori. Clerselier morì nel 1684.
Il matematico e filosofo Leibniz (Lipsia 1646 - Hannover 1716), durante il suo impiego come consigliere e bibliotecario del duca di Hannover, si trovò a Parigi negli anni 1675-1676 e in quel periodo riscrisse copie di alcuni manoscritti nelle mani di Clerselier non ancora pubblicati, e tra questi anche il "De Solidorum Elementis".
In seguito il manoscritto di Cartesio e la copia di Leibniz scomparvero, ma mentre l'originale non fu mai più trovato, l'altro testo fu rinvenuto 20 anni dopo da Foucher de Careil in una collezione non catalogata di articoli di Leibniz nella Libreria Reale di Hannover, e da lui pubblicato nel 1860. Non si sa niente riguardo al manoscritto originale, eccetto che il titolo e la forma, ma sembra che la riscrittura di Leibniz non sia completa: sono evidenti possibili emissioni di parole e anche frasi, e tavole ripetute. Ciononostante non possiamo negare l'importanza del lavoro che egli fece.
Trent'anni dopo, il vice ammiraglio Ernest de Jonquières pubblicò un'opera contenente il testo latino, così come fu edito da de Careil, aggiungendo una traduzione in francese, note e ampi commenti. Una traduzione italiana fu invece pubblicata da A. Natucci nel 1908: "Il "De Solidorum Elementis"di Cartesio".
Un importante studio fatto su questo testo è P.J. Federico in [1, 1980], in cui viene presentata la storia del manoscritto e della copia riscritta da Leibniz, un'accurata traduzione in inglese e dettagliati commenti matematici.

Purtroppo non si sa nulla riguardo alla data del manoscritto. Alcuni studiosi [2, pp. 1-18, 77-90] lo ritengono degli anni 1619-1620 in quanto

fu allora che Cartesio incontrò Faulhaber; infatti questi aveva studiato assiduamente i numeri figurati e pubblicato nel 1614 uno scritto che trattava questo argomento e nel manoscritto di Cartesio troviamo una parte dedicata a questi particolari numeri, dove vi sono alcuni termini comuni, come 'pondus' e 'radix'. Ma questo non elimina il fatto che può averlo scritto anni dopo.
Altri invece ritengono che non può averlo redatto prima del 1629, questo deriva dal fatto che vi troviamo tre simboli x, ξ e π che rappresentano una quantità incognita, il suo quadrato e il suo cubo rispettivamente. Nella prima metà del XVII secolo vi fu un forte lavoro di introduzione di simboli ad indicare quantità incognite, soprattutto ad opera di Clavius e Viète. Notiamo però che già nella "Géométrie"di Cartesio del 1637 vi è un ulteriore miglioramento nell'utilizzo di nuove notazioni rispetto a quelle utilizzate nel "De Solidorum Elementis": utilizza a^2 per indicare il quadrato di una quantità a e a^3 per il suo cubo. Questo ci indica che probabilmente il manoscritto che stiamo studiando è anteriore alla "Géométrie". Cartesio afferma di aver imparato questo tipo di notazione dall'amico Beeckman in Olanda, e i due si incontrarono in due periodi, nel 1618 e nel 1629. Vi è inoltre un articolo di Beeckman nel suo giornale che riporta una lettera di Cartesio riguardante alcuni argomenti di algebra, e lì è ancora utilizzata la precedente notazione. Questo ci porta a concludere che Cartesio deve aver redatto il "De Solidorum Elementis"non prima del 1629 e probabilmente non dopo il 1637.

1.2 Struttura del manoscritto

Anche se la copia di Leibniz non è ripartita, possiamo suddividere il "De Solidorum Elementis"in due parti, come suggerisce Federico in [1, p. 3]; la prima riguarda la geometria solida e la seconda i numeri geometrici, che sono i numeri figurati piani e solidi. Noi ci occuperemo della prima parte, in quanto vi sono le osservazioni e i risultati che conducono alla 'Formula di Eulero'. Dando uno sguardo generale a questa parte, come prima impressione essa

sembra una svariata raccolta di note disorganizzate, ed addirittura alcune sembrano non essere collegate tra loro in alcun modo. Ci sono però alcuni paragrafi del testo (in tutto sono 17) che seguono una struttura logica, questi secondo la suddivisione di Federico sono $\S1, \S2, \S3, \S4, \S7, \S10, \S11, \S13$ e $\S16$.
I restanti sembrano introdurre il disordine: non sono collegati con le affermazioni del primo gruppo, cioè non sono una loro conseguenza e non servono per derivare nessuna di queste.
Gli argomenti che vengono trattati nel secondo gruppo di affermazioni riguardano:

- Considerazioni generali sulla inscrivibilità dei poliedri in una sfera, in particolare del romboide e della piramide;
- Proporzione tra la superficie laterale del cono e l'area della base;
- Poliedri circoscrivibili ad una sfera;
- L'uguagliaza negli angoli solidi, che conduce ad un'analogia tra problemi isoperimetrici per poligoni piani e per solidi.

Sono tutte questioni geometriche e l'unico uso che viene fatto dell'algebra è per calcolare l'area del cono. È però in questo gruppo che sono contenuti i maggiori errori del manoscritto, a volte dovuti - si pensa - ad una non attenta copiatura del testo da parte di Leibniz. Inoltre questi paragrafi non aggiungono nulla di nuovo alle conoscenze geometriche del tempo.

Al contrario del precedente, il primo gruppo di affermazioni è omogeneo e sostanzialmente ben ordinato e contiene una sola affermazione sbagliata. Un'altra importante differenza è che dopo la prima proposizione presentata, tutte le restanti sono deducibili con il solo utilizzo dell'algebra. Inoltre i risultati ottenuti qui rappresentano un notevole distacco dal pensiero del tempo sui poliedri.
È necessario specificare che in tutto il manoscritto quando Cartesio parla di figure solide è evidente che sta considerando solo i solidi convessi.

1.3 Risultati di Cartesio

Il manoscritto incomincia con una definizione di cosa sia l'angolo solido retto; l'angolo solido è gia definito negli "Elementi"di Euclide, XI, 11[1] e sembra che Cartesio già presupponga questo concetto. Egli definisce l'angolo solido retto come l'ottava parte della sfera, anche se non necessariamente formato da tre angoli retti piani, e afferma che la somma degli angoli piani dai quali è circondato forma tre angoli retti. Ha così espresso l'unità di misura degli angoli solidi: l'angolo solido retto. Segue poi la **Proposizione 1.**[2]:
'Come in una figura piana tutti gli angoli esterni, presi insieme, sono uguali a quattro angoli retti, così in un corpo solido tutti gli angoli solidi esterni, presi insieme, sono uguali ad otto angoli solidi retti.'
Poi Cartesio specifica che cosa intende come angolo esterno: la "reciproca inclinazione dei piani", misurata grazie agli angoli piani che formano l'angolo solido. È importante sottolineare che di questa proposizione Cartesio non fornisce una dimostrazione; Federico in [1, pp. 44,45] ritiene che il motivo era la così stretta analogia con le figure piane. Esistono dimostrazioni di questo fatto di vari matematici posteriori: Prohuet, De Jonquières, Coxeter in [3], Pólya in [4, pp.57,226].
Introduciamo ora una serie di notazioni, riprese dal lavoro di Federico in [1, p.46], per semplificare il lavoro che segue. Poniamo in un solido:

- S : numero totale degli angoli solidi;
- P : numero totale di angoli piani;
- F : numero totale di facce;
- Σ : somma delle misure degli angoli piani;

[1] "Un angolo solido è l'inclinazione rispetto a tutte le rette compresa da più che due rette che si toccano tra loro e non sono nella stessa superficie, cioè, un angolo solido è quello che è compreso da più di due angoli piani che non sono nello stesso piano e costruiti su un solo punto."

[2] Traduzione mia dall'inglese, come nei casi seguenti

- Δ : misura di un angolo retto piano, cioè $\frac{\pi}{2}$ modernamente in radianti.

Dalla prima proposizione poi Cartesio deriva la seconda, anch'essa non dimostrata, in cui afferma che togliendo 8 angoli retti piani dal prodotto tra il numero degli angoli solidi e 4 angoli retti piani, si ottiene la somma delle misure degli angoli piani, cioè

Proposizione 2. [1, p. 46]

$$\Sigma = (4S - 8)\Delta$$

Nel manoscritto vengono poi trovate delle relazioni nei poliedri tra il numero di facce F e il numero di angoli solidi S, da cui è possibile estrarre la terza proposizione:

Proposizione 3.

a)

$$F \leq 2(S - 2)$$

b)

$$\begin{cases} \frac{S}{2} + 2 \leq F & \text{S pari} \\ \frac{(S+1)}{2} + 2 \leq F & \text{S dispari} \end{cases}$$

Non ritroviamo alcuna dimostrazione di ciò, ma secondo Federico in [1, pp. 48,49], Cartesio ricava queste disuguaglianze dalla precedente proposizione e da un risultato che mostrerà in seguito, nel paragrafo 11; infatti per quanto riguarda la prima disuguaglianza, per il fatto che ogni faccia contiene almeno tre angoli piani, la somma totale degli angoli di una faccia deve essere almeno 2Δ, dato che questa è la somma delle misure degli angoli interni di un triangolo. Essendo F il numero totale di facce del poliedro, allora la somma totale degli angoli piani di tutte le facce del poliedro è maggiore di $2F\Delta$: $\Sigma \geq 2F\Delta$. Ma sostituendo questo valore nella Prop. 2 otteniamo $(4S - 8)\Delta \geq 2F\Delta$, cioè effettuando le opportune semplificazioni, $2S - 4 \geq F$.
Come già detto, per la Prop. 2b) Cartesio utilizza un risultato successivo:

$(4F - \frac{\Sigma}{\Delta})/2 = P$; egli si può permettere di anticiparla in una dimostrazione in quanto sono slegate, nel senso che per ricavare il risultato del §11 non utilizza la Prop. 2 o sue conseguenze. Quindi, pochè ogni angolo solido è formato da almeno 3 angoli piani, $P \geq 3S$, e sostiteundo questo nel risultato del §11, $6S \leq 4F + \frac{\Sigma}{\Delta}$, e per la Prop. 2 con opportune semplificazioni, otteniamo $S \geq 2F - 4$.
Non seguiamo l'ordine con cui Cartesio espone le proposizioni, ma per poter capire meglio tralasciamo per un momento i paragrafi del secondo gruppo.
Nel paragrafo 7 - **Proposizione 4** - Cartesio accenna una dimostrazione per provare che esistono al più 5 solidi regolari, infatti in questi è possibile dividere $\frac{2S-4}{F}$ e $\frac{2F-4}{S}$ ottenendo degli interi come risultati, e questo avviene solo per le coppie (S, F) seguenti: (4,4), (6,8), (8,6), (12,20), (20,12), che generano quindi 5 solidi regolari. Possiamo notare che queste due 'formule' derivano anch'esse dalla seconda proposizione: come sappiamo, in un solido regolare tutte le facce hanno lo stesso numero n di angoli, e la loro somma è data da $2(n-2)\Delta$, quindi per tutte le F facce la somma totale degli angoli piani è data da $2(n-2)F\Delta = \Sigma$ $(= (4S-8)\Delta)$, cioè $\frac{2S-4}{F} = n - 2 =: a$, che è quindi sempre un intero. Inoltre in un solido regolare ogni angolo ha lo stesso numero di angoli piani m, quindi in totale sarà $P = mS$; andando poi a sostituire nella già citata equazione di §11 abbiamo $4F + \frac{\Sigma}{\Delta} = 2mS$ e $\frac{\Sigma}{\Delta} = 4S - 8$, allora $\frac{2F-4}{S} = m - 2 =: b$, che è proprio un intero. Federico in [1, pp. 50,51] inoltre ci spiega perchè le uniche coppie possibili sono le 5 sopra presentate. Le due equazioni sono lineari in S e F e possono essere risolte rispetto ad a e b: $S = \frac{8+4a}{4-ab}$ e $F = \frac{8+4b}{4-ab}$. Quindi per quanto ci viene dal denominatore, ab deve essere minore di 4, e le uniche coppie possibili sono (1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), che sostituite ci danno quelle richieste per le facce e gli angoli solidi.
Cartesio ci mostra come possiamo ricavare il numero degli angoli piani conoscendo la somma degli angoli piani e il numero di facce:
Proposizione 5.

$$P = (4F + \frac{\Sigma}{\Delta})/2$$

e ci descrive un esempio di un solido con 12 facce e somma degli angoli piani pari a 72Δ, il cui numero di angoli piani sarà quindi 60. Federico in [1, p. 53] afferma che probabilmente la figura che utilizzò Cartesio nell'esempio è un dodecaedro regolare, infatti dalla seconda proposizione ricaviamo che tale corpo ha 20 angoli solidi, come in effetti il dodecaedro. Bisogna far notare che quando Cartesio parla di somma di angoli piani la intende sempre misurata in angoli retti.
Come ottenne Cartesio questa relazione? Come sappiamo, la somma degli angoli interni di una faccia con n lati è $2n\Delta - 4\Delta$, allora in un solido con F facce la somma degli angoli interni è $\Sigma = F(2n\Delta - 4\Delta) = 2nF\Delta - 4F\Delta$. Quindi $4F + \frac{\Sigma}{\Delta} = 2nF, \implies (4F + \frac{\Sigma}{\Delta})/2 = nF = P.$
Molto importante è l'affermazione del paragrafo 12: 'il numero di angoli piani è sempre il doppio rispetto ai lati sulla superficie di un solido; un lato è sempre comune a due facce'. Questo paragrafo non verrà mai ripreso in questa parte del manoscritto, ma in seguito vedremo come senza questa restrizione non si potrebbe ottenere la Formula di Eulero.
Nel paragrafo 13 Cartesio ci mostra attraverso un esempio come ricavare il numero di angoli piani per faccia conoscendone il totale nella figura e sapendo il numero di facce. Ciò deriva dal fatto che se tutte le facce contengono lo stesso numero di angoli piani, allora il numero totale di angoli può essere diviso per numero di facce senza ottenere frazioni, cioè in interi, e il quoziente sarà il numero di angoli di ogni faccia. Riportiamo in breve l'esempio che lui propone: se consideriamo un solido con 15 facce e 18 angoli piani vi possono essere tre possibilità: un solido con due facce triangolari e tre quadrate, oppure tre triangolari, una quadrata e una pentagonale, o infine quattro triangolari e una esagonale. Poichè noi sappiamo che vi sono $2(n-2)\Delta$ angoli interni in ogni faccia, si vede che in ognuno dei tre possibili solidi la somma degli angoli piani è sempre 16Δ e dalla Proposizione 2 ricaviamo che vi devono essere 6 angoli solidi. E questa condizione è soddisfatta solo dalla terza figura considerata.
Ritroviamo poi alcune considerazioni sui solidi aventi tutte le facce triango-

lari, in questi si ha:

$$F = 2S - 4 \qquad \text{e} \qquad P = 6S - 12$$

Questo perchè la somma degli angoli interni di un triangolo è 2Δ, quindi $\Sigma = 2F\Delta$ e per la Proposizione 2 $F = 2S - 4$. Inoltre ogni triangolo ha tre angoli piani e la misura media di ognuno è $\frac{2}{3}\Delta$, allora $P = \frac{3\Sigma}{2\Delta}$, e andando a sostituire $\frac{\Sigma}{\Delta}$ nella Proposizione 2 si ha $\frac{2}{3}P = 4S - 8$, che è equivalente a quello richiesto.
Infine dal paragrafo 16 possiamo estrarre la **Proposizione 6:**

'Il numero di angoli piani è $P = 2F + 2S - 4$, che non può essere maggiore di $6S - 12$, ma se è minore la differenza sarà $4S - 8 - 2F$.'

Questo segue semplicemente da due proposizioni precedenti: $\Sigma = (4S - 8)\Delta$ (Prop. 2) e $P = (4F + \frac{\Sigma}{\Delta})/2$ (Prop. 5).

Per dare un quadro più completo analizziamo per argomento anche i risultati presentati da Cartesio nel secondo gruppo di proposizioni, nonostante questi non ci siano utili ai fini di ricavare la Formula di Eulero.
Egli afferma che tutte le piramidi equilatere (§5) e tutti i romboidi non equilateri (§17) sono inscrivibili in una sfera; inoltre se in un solido ogni faccia può essere inscritta in un cerchio, allora il solido può essere inscritto in una sfera (§9). Questo perchè, continua, se tre angoli di una faccia sono ugualmente distanti dal centro della sfera, allora anche gli altri appartenenti alla stessa faccia saranno ugualmente distanti, di conseguenza anche tutti gli angoli appartenenti alle facce adiacenti che si incontrano con quelli della faccia di partenza nello stesso angolo solido. La seconda condizione però non è sufficiente, infatti se prendiamo ad esempio una bipiramide, ogni sua faccia è un triangolo, quindi inscrivibile in un cerchio, ma non è detto che qualsiasi bipiramide sia inscrivibile in una sfera. Federico in [1, pp. 52, 53] ritiene che Cartesio abbia generalizzato il caso delle piramidi e dei prismi, dove la

condizione è sia necessaria che sufficiente, ma questo è uno dei casi in cui l'intuizione fallisce.
Il paragrafo 6 tratta di una relazione tra le misure di un particolare cono rettangolare, in cui l'altezza è pari al raggio della base: in questa figura la superficie convessa sta alla base, come $\sqrt{2}$ sta a 1. Quindi conoscendo il raggio possiamo ricavare la superficie di tale cono, che è pari a $\sqrt{2}\pi r^2$.
Per quanto riguarda la circoscrivibilità, Cartesio afferma (§8) che tutti i romboidi e le piramidi possono essere circoscritti ad una sfera; in realtà questo per le piramidi non è sempre vero, quindi può essere che lui intendesse le equilatere ma non lo scrisse, o tale parola fu perduta nella copiatura del manoscritto. Già precedentemente abbiamo parlato di romboidi, non si è certi di cosa lui intendesse con questo nome e vi sono più interpretazioni: Federico in [1, p. 51] ritiene che segua l'idea di Keplero nel suo "Harmonice Mundi", un trattato sulle analogie tra forme geometriche e armonia musicale, in cui si riferisce al *dodecaedro rombico*, 12 facce romboidali, e al *triacontaedro rombico*, 30 facce romboidali, a cui avrebbe aggiunto il *romboedro*, di sole 6 facce. Prouhet in [5, pp. 484-487] invece pensa si riferisca alle *bipiramidi regolari* come estensione del termine usato da Archimede nel suo "On the Sphere and Cylinder", in cui si riferisce ad un rombo solido (romboide) come a due coni retti uniti nella base circolare, che deve essere congruente, e sono chiamati romboidi perchè la sezione di ogni piano passante per gli assi è un rombo. Cartesio estenderebbe poi il termine alle bipiramidi formate dall'unione di due piramidi regolari, che sono circoscrivibili ad una sfera, ma non necessariamente aventi stessa altezza.
Infine Cartesio nella proposizione 14 presenta una tripla uguaglianza (o disuguagliaza) negli angoli solidi, cioè sono detti uguali:

a) quelli che hanno lo stesso numero di angoli piani (**uguaglianza aritmetica**);

b) queli che hanno la stessa inclinazione (**uguali angoli esterni** o **uguali inclinazioni**);

c) quelli che intercettano la stessa porzione di sfera (**uguali in capacità**).

E tra gli angoli solidi con la stessa inclinazione, il maggiore in capacità è quello che eccede aritmeticamente (§15).
Le tre uguaglianze precedenti possono essere interpretate secondo Federico in termini dei poligoni sferici intercettati sulla sfera:

a) uguaglianza nel numero dei lati;

b) uguale perimetro;

c) uguale area.

Cartesio per inclinazione di un angolo solido intende la somma delle misure degli angoli piani che lo formano; allora poichè la misura di un angolo esterno solido è 4Δ meno la somma degli angoli piani che compongono quello solido (cioè l'inclinazione), se le inclinazioni sono uguali lo sono anche gli angoli esterni. In analogia con i poligoni, tra gli angoli solidi con lo stesso perimetro, quello con area maggiore è quello col maggior numero di lati.

1.4 Come derivare la Formula di Eulero dagli appunti di Cartesio

Cartesio non ricava direttamente il risultato che ci interessa; egli si ferma solo al punto in cui siamo arrivati noi nel precedente paragrafo. Per vedere come ottenerla dalle affermazioni del manoscritto riepiloghiamo in breve le 6 proposizioni che possiamo estrarre.

- **Prop. 1.** La somma degli angoli esterni solidi di un corpo solido è uguale ad 8 angoli retti solidi (§2)
- **Prop. 2.** $\Sigma = (4S - 8)\Delta$ (§3)
- **Prop. 3.** Due disuguaglianze riguardanti la relazione tra S e F:
  $S \geq \frac{F}{2} + 2$ e $F \geq \frac{S}{2} + 2$ (§4)

- **Prop. 4.** Esistono al più cinque solidi regolari (§7)
- **Prop. 5.** Una connessione tra P, F e Σ:
  $P = (4F + \frac{\Sigma}{\Delta})/2$ o $\Sigma = (2P - 4F)\Delta$ (§11)
- **Prop. 6.** Una connessione tra P, F e S: $P = 2F + 2S - 4$ (§16)

Assieme a queste, per le quali abbiamo già indicato precedentemente come poterle ricavare, Cartesio aggiunge il fatto che il numero di angoli piani è sempre il doppio del numero dei lati, dove per lati sono intesi quelli dei poligoni che formano le facce; infatti è sottointeso che in ogni lato, che noi ora chiamiamo spigolo, concorrono esattamente due facce.

Indichiamo con α il numero degli spigoli di un solido, allora $P = 2\alpha$. Ovviamente ad ogni angolo solido corrisponde un vertice della figura.

Allora dalla Prop. 6:

$$P = 2F + 2S - 4 \implies 2\alpha = 2F + 2S - 4 \implies \alpha = F + S - 2$$

che è la 'Formula di Eulero'.

Capitolo 2

La storia: Eulero

Alla metà del Settecento Eulero (1707 - 1783) scoprì la sua Formula per i poliedri, pubblicandola in due articoli, assieme ai relativi studi e ad una dimostrazione non molto precisa. Diversamente da Cartesio, il suo studio si basa su una specie di induzione empirica, cioè partendo da proprietà osservate in alcuni solidi specifici, le generalizzò anche ad un intera famiglia di solidi, solo convessi però.
Nuovo elemento chiave introdotto fu lo 'spigolo', da lui battezzato latinamente *acies*, in quanto nella letteratura non aveva mai riscontrato tale concetto. Oltre alla cosiddetta Formula di Eulero, un altro risultato importante che si ritrova nei due articoli è una formula riguardante la somma degli angoli piani in un solido. Nel primo articolo presenta i suoi studi e le formule appena citate, ammettendo però di non essere stato in grado di trovare una dimostrazione per esse, cosa che tentò poi nel successivo scritto.
In questo capitolo, riferendoci ai lavori di Richeson in [8], e di Francese e Richeson in [10], analizzeremo i due articoli redatti precisamente nel 1751 e 1752, e brevemente una precedente lettera all'amico Goldbach in cui preannuncia i suoi studi; proporremo infine un confronto tra il lavoro di Eulero e quello di Cartesio.

2.1 Leonhard Euler

Figura 2.1: Leonhard Euler. Fonte Internet

Leonhard Euler (latinizzato in Eulero) nacque a Basilea, Svizzera, il 15 aprile del 1707. Egli era il primo figlio di Paul Euler, ministro della chiesa evangelica riformata, e di Margaretha Bruckner. Già da bambino si rivelò un eccellente matematico, infatti nella sua autobiografia ricorda di aver risolto già a 8 anni i primi 434 problemi del "Coss"di Rudolff, riguardanti equazioni di primo e secondo grado. Nel 1720, Euler si iscrisse alla facoltà di Filosofia dell'Università di Basilea, "la scuola di base delle arti e delle scienze", [18]. A 14 anni Euler teneva già una lezione dal titolo "Declamatio: De Arithmetica et Geometria", vantando la superiorità della geometria rispetto alle altre branche della matematica. Nell'ottobre del 1723, il padre di Leonhard gli chiese di iscriversi a teologia, per prepararsi a diventare pastore; per fortuna il curriculum di teologia gli permetteva comunque di studiare matematica. Egli aveva già cominciato a farsi seguire da Johann Bernoulli e, passando la maggior parte del tempo sulla matematica, fece pochi progressi nelle altre materie. Il lavoro che fece con Bernoulli consisteva nello studiare alcuni testi complessi di matematica e altre scienze, poi una volta a settimana i due si incontravano e il maestro spiegava a Leonhard come superare i problemi incontrati. Dopo essersi laureato, nel 1727 si recò a San Pietroburgo per lavorare come matematico nell'Illustre Accademia delle Scienze, dovè potè lavorare con Daniel Bernoulli, figlio del maestro. Nel 1733 Euler succedette all'amico nel posto di professore di matematica. La vista di Euler peggiorò molto durante la sua vita: tre anni dopo la sofferenza di una febbre celebrale, nel 1735 diventò quasi cieco nel suo occhio destro, ciònonostante la sua malattia non gli impedì di continuare i suoi studi con profitto. I continui tumulti in Russia avevano stancato Euler che amava una vita più tranquilla. Gli fu offerto un posto all'Accademia di Berlino da Federico il Grande di Prussia, egli accettò e partì nel 1741, e visse lì per i successivi 25 anni. In quel periodo pubblicò ben 380 articoli, oltre che alle sue due opere principali: "Introductio in analysin infinitorum", del 1748 e "Institutiones calculi differentialis"(1765). Fu in quegli anni, e precisamente nel 1750, che Euler in una lettera all'amico Christian Goldbach (1961-1764) menzionò per la prima volta la cosiddetta Formula di Eulero per i poliedri, ripresa più avanti in due articoli più dettagliati. Nonostante Euler arrecasse un'enorme prestigio all'Accademia, dovette allontanarsi da Berlino per un conflitto col re. In Russia Caterina la Grande nel 1766 invitò Euler a San Pietroburgo, egli accettò e rimase lì fino alla morte. Nel 1771 mentre lavorava nel suo studio, per San Pietroburgo si propagò un incendio; Euler praticamente cieco non se ne accorse fino a quando il suo ufficio non fu completamente avvolto dalle fiamme. Riuscirono a salvarlo insieme a gran parte della sua biblioteca, ma tutti i suoi appunti vennero perduti. Nel 1783 morì a causa di una improvvisa emorragia cerebrale.

2.2 I sui lavori sui poliedri

In questo paragrafo ci basiamo prevalentemente su [1].

Riguardo alla teoria generale sui poliedri, Eulero scrisse due articoli: il primo il 25 novembre 1750 intitolato "Elementa Doctrinae Solidorum"(Elementi della dottrina dei solidi), e il seguente il 9 settembre 1751 dal titolo "Demonstratio nonullarum insignium proprietatum quibus solida hedris planis inclusis sunt praedita"(Dimostrazione di alcune proprietà dei solidi racchiusi da

piani).
Entrambi furono inclusi nel verbale dell'Accademia di San Pietroburgo nell'anno accademico 1752-1753, ma vennero pubblicati solo nel 1758 a causa dei lunghi tempi burocratici dell'epoca.
Iniziò quello che sarebbe stato uno studio sui fondamenti dei poliedri, o ″stereometria‶, come la chiamò lui. All'epoca di Eulero la teoria dei poliedri aveva più di duemila anni, ma era puramente geometrica. I matematici si concentravano esclusivamente sulle proprietà elementari dei poliedri: trovare la lunghezza dei lati e delle diagonali, calcolare le aree delle facce, misurare gli angoli piani e determinare i volumi, mentre Eulero sperava di scoprire un modo per raggruppare, o classificare, tutti i poliedri 'contando' le loro caratteristiche.
Eulero fu il primo a sviluppare alcune nozioni di topologia, branca da lui denominata 'geometria situs', tradotto con geometria di posizione, derivandola da un'affermazione di Leibniz di cui probabilmente aveva travisato il senso. La topologia infatti ha come oggetto lo studio delle proprietà delle figure geometriche, che persistono anche quando queste sono sottoposte a deformazioni così profonde da perdere tutte le loro proprietà metriche o proiettive. Il suo lavoro e la relativa dimostrazione riguarderebbero oggi questa branca della matematica, ma essi furono presentati al pubblico come uno studio riguardante la geometria solida, forse perchè argomento tradizionale all'epoca.
Il primo articolo fu preceduto di poche settimane, precisamente il 14 novembre, da una lettera all'amico Goldbach in cui riassunse i principali risultati che espliciterà poco dopo; in essa si può leggere, come riportato da Wilson in [6, p. 44], *"Recentemente mi è venuto in mente di determinare le proprietà generali dei solidi delimitate da facce piane, dato che non ci sono dubbi che possono essere trovati teoremi generali riguardo ad essi"*. E continua: *"Mi sorprende che quelle proprietà generali sulla geometria dei solidi, per quanto ne sappia, non siano state osservate da nessun altro"*.
Qui Eulero anticipa il teorema, infatti ritroviamo: *"In ogni solido chiuso da*

facce piane la somma dei numeri delle facce ed il numero di angoli solidi eccede di due il numero degli spigoli, $H + S = A + 2$*"*. Eulero usava le lettere H, A ed S per denotare il numero delle facce (hedrae), degli spigoli (acies) e dei vertici (anguli solidi).
Bisogna sottolineare che oggi noi guardiamo ai poliedri come a delle superfici. Egli non li vedeva però in questo modo, assunse che fossero solidi. Questo si vede nell'uso delle parole 'solido' e 'racchiuso' utilizzate nelle descrizioni che egli ne fa; inoltre le sue dimostrazioni fanno strettamente affidamento sul fatto di togliere dal corpo dei solidi, che sono le piramidi triangolari [vedi 2.4]. Nonostante questo, Eulero contribuì in modo determinante a spostare l'attenzione da un solido in quanto struttura tridimensionale, alla sua superficie in quanto bi-, uno-, zero-dimensionale.

Andiamo ora ad analizzare nel dettaglio i due articoli.

2.3 La 'Elementa Doctrinae Solidorum'

L'oggetto del primo articolo è uno studio generale riguardo ai poliedri; come già detto, una delle cose a cui Eulero era particolarmente interessato era una loro classificazione, in modo da introdurre un qualche ordine nella massa dei diversi solidi in base alle loro caratteristiche. Del resto, noi classifichiamo i poligoni convessi proprio in base al numero di lati o, equivalentemente, di angoli: tutti i poligoni con tre lati sono triangoli, con quattro sono quadrilateri, e così via. Ma questo non può essere fatto con i solidi, dove incontriamo, ad esempio, alcuni con lo stesso numero di facce, ma diverso numero di angoli solidi, come la piramide a base quadrata e il prisma triangolare: essi hanno entrambi 5 facce ma mentre il primo ha 5 vertici, il secondo invece ne ha 6.
La prima brillante intuizione di Eulero fu notare che la superficie di un poliedro è composta da componenti a zero-, uno- e due-dimensioni, cioè vertici (o angoli solidi, come li chiamava), spigoli e facce: per classificare un solido era necessario sapere e tenere in conto tutte queste caratteristiche. Vediamo

cosa scrisse nei paragrafi 5, 6 e 7, riportati da Richeson in [8] (traduzione dall'inglese del testo latino):

"5. *I corpi solidi devono essere considerati in base al loro confine; quando si conosce il confine che racchiude il solido in tutte le parti, allora si conosce il solido, così come avviene con le figure piane, definite in base al loro perimetro.*

6. *Ma il confine di un corpo solido racchiuso da figure piane comprende:*
Primo: le stesse figure piane che costituiscono il confine, chiamate "facce" (hedrae);
Secondo: l'incontro di due facce lungo i loro lati, che formano le linee di confine dei solidi: siccome non trovo particolari nomi negli scritti di stereometria, li chiamerò "spigoli" (acies);
Terzo: i punti in cui tre o più facce si incontrano; tali punti sono chiamati "angoli solidi".

7. *Perciò in ogni corpo solido si devono considerare tre tipi di confine, ovvero:*
1) punti, 2) linee, e 3) superfici
con i nomi specificatamente utilizzati per questo proposito:
1) angoli solidi, 2) vertici, e 3) facce.
Questi tre tipi di confine definiscono totalmente il solido. Ma una figura piana ha solo due tipi di confine, chiamati 1) punti o angoli, 2) linee o lati."

Eulero si rese conto che nei solidi vi è un elemento per cui non riscontriamo il corrispettivo nel piano: lo "spigolo", cioè l'incontro di due facce adiacenti lungo il lato comune. Egli, scrivendo in latino, usò la parola *"acies"* per indicare lo spigolo; nel latino comune tale parola era usata per la parte tagliente di un'arma, un raggio di luce, o per un esercito allineato per la battaglia. Pólya in [7] sottolinea che "Eulero fu il primo a introdurre il concetto di spigolo in un poliedro, e a dargli un nome". Come già anticipato, forse il motivo per cui Cartesio non arrivò ad una formalizzazione della Formula di Eulero così come la conosciamo ora, fu proprio che non riconobbe l'importanza di questo elemento.

Per le facce di un poliedro Eulero usò il termine *"hedra"*, la cui traduzione letterale è base. Eulero poi si riferiva al vertice di un poliedro come ad un *"angolus solidus"*, o angolo solido. Essi, prima che Eulero scrivesse riguardo ai poliedri erano entità tridimensionali definite dalle facce che si uniscono in un punto; un angolo solido di un cubo è diverso da un angolo solido di un tetraedro, si distinguono dalla geometria dell'area che racchiudono. Prendendo in considerazione la descrizione data sopra, in cui Eulero associava un angolo solido ad un punto, è possibile notare come egli considerasse gli angoli solidi zero-dimensionali, intendendo quindi la punta di un angolo solido e non invece la parte di spazio che le facce del poliedro racchiudono. La distinzione è sottile, ma come ci fa notare Richeson in [8, pp.63-74], il fatto che gli angoli solidi possano essere visti come punti singoli è stato cruciale per il suo teorema. Ciononostante, Eulero perse un'opportunità non dando loro un nuovo nome, infatti il vertice di un poliedro è diverso dall'angolo solido in cui esso si trova.

Lakatos in [9] esalta l'innovazione di Eulero così:
"La chiave della soluzione di Eulero fu proprio l'invenzione dei concetti di vertice *e* spigolo: *fu lui che per la prima volta fece notare che, oltre al numero delle facce, il numero di* punti *e* linee *sulla superficie del poliedro determina il suo carattere (topologico). È interessante osservare che da una parte egli tenne molto a sottolineare la novità del suo quadro concettuale e che dovette inventare il termine "acies"(spigolo) al posto del vecchio "latus"(lato), perchè* latus *era un concetto poligonale mentre egli ne voleva uno poliedrico; dall'altra conservò ancora il termine "angolus solidus"(angolo solido) per i suoi vertici puntiformi."*

Una volta perfezionati i tre concetti chiave, Eulero enuncia il suo principale teorema, nella **Proposizione IV**:

In ogni corpo solido limitato da facce piane la somma tra il numero di angoli solidi e il numero di facce eccede il numero di spigoli di due.

Quindi, utilizzando le stesse notazioni della lettera a Goldbach esprime il teorema con la formula:

(*) $$S + H = A + 2$$

Eulero afferma poi di non essere in grado di dare una dimostrazione definitiva, ma che la sua verità sarà riconosciuta vera per ogni solido che considera.

Poichè l'analogia con le figure piane è risultata infruttuosa, Eulero probabilmente deduce la relazione per induzione empirica. Pólya in [4, pp. 12-15, 35-38, 90-102] più volte utilizza Eulero come esempio di induzione pre-matematica.

Analizziamo ora brevemente le altre proposizioni che si trovano in questo articolo, mantenendo la simbologia utilizzata da Eulero.

1. *"Il numero di spigoli è pari alla metà del numero totale dei lati delle facce, poichè due lati si incontrano in un unico spigolo; dato che in ogni faccia il numero dei lati è uguale al numero degli angoli piani, il totale di questi in un poliedro sarà anch'esso il doppio del numero di spigoli. Siccome il numero di spigoli non è "frazionale"*[cioè è intero]*, il numero totale dei lati, e quindi di angoli piani, deve essere pari; segue che il numero di facce con numero dispari di lati deve essere pari."*

2. $$2A \geq 3H$$

Se ogni faccia di un poliedro è triangolare, il numero totale di lati sarà 3H e il numero totale di spigoli $\frac{3}{2}$H [per la 1.]. Se alcune facce hanno più di tre lati il numero totale di questi sarà maggiore di 3H e quindi il numero totale di spigoli sarà maggiore di $\frac{3}{2}$H.

3. $$2A \geq 3S$$

Analogamente alla 2.

5. $2S \geq H + 4$ e $3S \geq A + 6$

Eulero ricava queste due relazioni combinando la 2. e la 4. nel seguente modo: per la Prop. 4, $A = S + H - 2$, perciò dalla Prop. 2 si ha $2(S + H - 2) \geq 3H$ e quindi $2S \geq H + 4$. Sempre dalla Prop. 4 abbiamo invece che $H = A + 2 - S$, allora $2A \geq 3(A + 2 - S)$, che conduce a $3S \geq A + 6$.

6. $2H \geq S + 4$ e $3H \geq A + 6$

Come sopra, combinando però la 3. e la 4.

7. *"Non esiste un solido in cui ogni faccia abbia più di sei lati, o ogni angolo solido sia formato da più di sei angoli piani."*

Supponiamo che ogni faccia abbia sei o più lati: allora il numero totale dei lati sarà maggiore o uguale a 6H, quindi $2A \geq 6H$, o $A \geq 3H$, che combinata con la seconda di 6., da $3H - 6 \geq A \geq 3H$, ma ciò è assurdo. Analogamente con gli angoli solidi.

Le proposizioni 8 e 9 riguardano due diverse formule per la somma degli angoli piani di tutte le facce poligonali di un poliedro, espresse sia a parole che in forma di equazione, la prima in termini di spigoli e facce e la seconda di angoli solidi. Assumiamo che la somma degli angoli piani sia pari a R angoli retti.

8. $$R = 4(A - H)$$

La somma di tutti gli angoli piani di un solido è uguale a 4 angoli retti moltiplicati per la differenza tra il numero di spigoli e il numero di facce. Vediamo come Eulero dimostra tale formula: la somma degli angoli piani di una faccia con n_i lati è $2(n_i - 2)\Delta$, dove Δ è la misura di un angolo retto, ma le facce sono H quindi di tali somme ve ne sono H, cioè $2(\Sigma n_i - 2H)\Delta$. Ma $\Sigma n_i = 2A$ e quindi $R = 4(A - H)$.

9. $$R = 4(S - 2)$$

La somma di tutti gli angoli piani in un solido è uguale a 4 angoli retti per ciascun angolo solido, meno 8.
Tale proposizione non viene dimostrata in questo articolo, perchè molto probabilmente egli la deriva facilmente sostituendo la (*) nella 8. Certo è che capisce l'importanza di tale scoperta, ma allo stesso tempo ammette di non essere ancora in grado di dare una dimostrazione soddisfacente per la congettura fondamentale (*).

L'ultima parte di questo articolo riguarda il suo obiettivo iniziale, cioè elencare i vari generi a cui un poliedro può essere riferito e dare loro un nome. Combinando le proposizioni 2, 3 e 6, dato un certo A possiamo ricavare l'intervallo entro cui S e H possono cadere, cioè

$$\frac{2A}{3} \geq (H, S) \geq \frac{A+6}{3}$$

sviluppando così una classificazione 'topologica' dei poliedri.

2.4 La 'Demonstratio nonullarum insignium proprietatum'

In questo secondo articolo Eulero propone una dimostrazione del teorema esposto nella precedente Proposizione 4: $S + H = A + 2$. Apre il suo scritto richiamando due risultati, questo e la sua considerazione (Prop. 9) sulla somma degli angoli piani in un poliedro. Il titolo completo, "Demonstratio nonullarum insignium proprietatum quibus solida hedris planis inclusis sunt praedita", mostra che non sta considerando qualsiasi figura solida, ma solo quelle racchiuse da figure piane, quindi ad esempio non una sfera, il toro, ecc.; sarà comunque evidente che sta trattando solo i poliedri convessi.
Eulero usò un metodo di <u>riduzione</u>: partendo da un poliedro convesso qualsiasi è possibile ridurlo sistematicamente sezionandolo fino ad ottenere un poliedro molto più semplice, una piramide. Egli suggerì di rimuovere i verti-

ci dal poliedro uno alla volta, sezionandolo in piramidi triangolari[1] ed eliminandone ogni volta una o più fino a quando non rimangono soltanto quattro vertici; dunque si ottiene una piramide triangolare, per il quale ovviamente vale la Formula di Eulero. Tenendo sotto controllo il numero dei vertici, degli spigoli e delle facce ad ogni stadio, e usando le proprietà della piramide triangolare, egli fu in grado di concludere che S - A + H = 2 per il poliedro originale. La chiave nella dimostrazione di Eulero è la sua acuta osservazione sul fatto che la differenza tra il numero degli spigoli e il numero delle facce diminuisca tutte le volte che viene eliminato un vertice. Aiutati da [10] ripercorriamo i passi di Eulero.

Nella **Proposizione 1** presenta il primo problema che si pone:
"Dato un solido racchiuso ovunque da facce piane, tagliare un angolo solido dato in modo che nella figura risultante il numero di angoli solidi sia minore di uno."

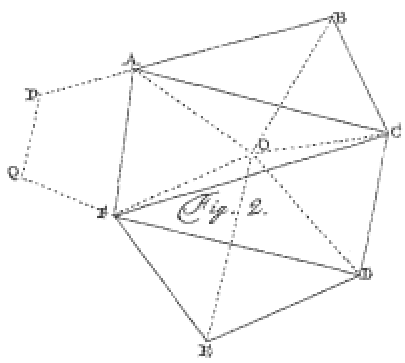

Figura 2.2: Da [11], dove è ripreso da 'Demonstratio nonullarum insignium proprietatum'

Come vedremo, è nella soluzione a questo problema che il teorema di Eulero fallisce. Non fornisce un algoritmo generale, ma spiega come eliminare un vertice in uno specifico poliedro: rimuove consecutivamente (ma una alla volta) le piramidi triangolari per le quali uno dei vertici è quello preso in

[1] Tetraedri, in terminologia moderna

considerazione, ad esempio O in Figura 2.2. In tal modo si possono rimuovere tutti i vertici del poliedro, fino ad avere un tetraedro. In un corollario seguente poi spiega che non importa quanti angoli solidi possieda il corpo, dato che con questo metodo il loro numero diminuisce sempre di uno; alla fine ci si preoccuperà che rimangano solo quattro angoli solidi, cioè per forza una piramide triangolare, e quindi l'intera figura sarà divisa in tetraedri (lui non userà mai questo termine, ma sempre "piramidi triangolari").

A questo punto, nella **Proposizione 2**, Eulero si domanda il numero di facce e spigoli rimanenti durante questo processo di successive eliminazioni, ma lo pone sotto forma di problema.
"Se ogni angolo solido è rimosso dal corpo nel modo precedentemente proposto, e così il numero di angoli solidi è diminuito di uno, determinare sia il numero di facce che di spigoli nel solido rimanente; allo stesso modo determinare la somma degli angoli piani."

(1) Prima di tutto Eulero studia la somma degli angoli piani. Sia O il vertice che vogliamo rimuovere. Se in O si incontrano n facce triangolari **(a)**, e quindi n lati, allora le eliminiamo tutte, ognuna delle quali racchiude due angoli retti piani. Prosegue:
"Considera un poligono delimitato da n lati, sarà subito evidente che se questa figura è sezionata in triangoli da linee diagonali, il numero di questi triangoli sarà $n-2$ e il numero di diagonali disegnate sarà $n-3$."

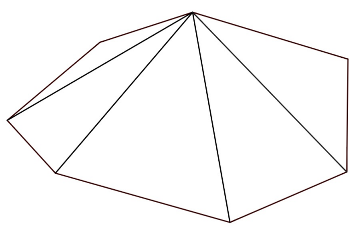

Figura 2.3: Ettagono piano sezionato in 5 triangoli da 4 diagonali

In questo caso le basi triangolari delle piramidi rimosse aggiungono $n-2$ facce al poliedro su cui stiamo lavorando, ognuna delle quali accresce di due angoli retti la somma degli angoli piani. Sia R sempre il numero di angoli retti del poliedro d'origine:
"È evidente che togliendo O, la somma degli angoli piani R verrà inizialmente diminuita di 2n angoli retti [dove n sono le facce che si incontrano in O]*, poi aumentata di 2n-4 angoli retti. Allora la riduzione totale sarà di 4 angoli retti. Quindi nel solido risultante la somma degli angoli piani sarà R-4 angoli retti. In questo modo, ogni volta che viene tolto un angolo solido la somma degli angoli piani viene diminuita di 4 angoli retti."*
Ora Eulero esamina come varia il numero di facce del poliedro rimuovendo un vertice, in tutti i casi possibili.

Assumiamo che tutte le n facce che si incontrano in O siano triangolari, come in Figura 2.4.

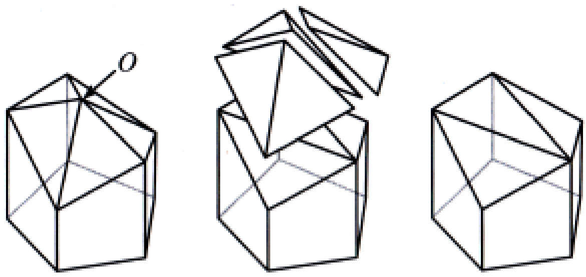

Figura 2.4: Da [11]

Eliminiamo il vertice O rimuovendo queste n facce; sotto le $n-2$ piramidi tagliate via possiamo trovare $n-2$ nuove facce triangolari. Assumendo che tutte queste nuove facce triangolari appartengano a piani diversi **(b)**, il numero delle facce nel poliedro ottenuto è

$$H - n + (n-2) = H - 2$$

dove H è il numero originale delle facce. Durante questo processo rimuoviamo anche gli n spigoli che si incontrano nel vertice O, ma aggiungiamo $n-3$

spigoli che si trovano tra le $n-2$ nuove facce triangolari. Così il numero degli spigoli del nuovo poliedro è

$$A - n + (n-3) = A - 3$$

dove A è il numero originale degli spigoli.

(2a) Supponiamo che una delle facce che si incontrano in O non sia triangolare.

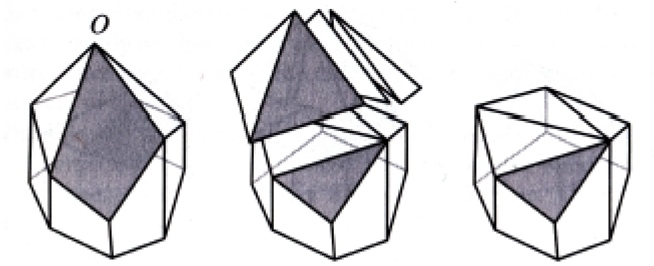

Figura 2.5: Da [11]

Quando la piramide triangolare che condivide questa faccia viene rimossa, la faccia non sparisce completamente dal poliedro. Inoltre, si aggiunge un nuovo bordo dove la faccia è tagliata in due, come in Figura 2.5. Perciò, il numero di facce e spigoli nel nuovo poliedro è in entrambi i casi maggiore di uno rispetto a quanto accade precedentemente.
In generale, se il poliedro originale ha s facce non triangolari che si incontrano nel punto O, allora il numero delle facce e degli spigoli sarà s volte più grande di quanto calcolato precedentemente. Quindi il numero di facce risulta essere

$$H - 2 + s$$

e il numero di spigoli

$$A - 3 + s.$$

(2b) Una volta avvenuta la riduzione, come nei casi (1) e (2a) già esaminati, può presentarsi il caso in cui due facce, situate l'una vicino all'altra, si trovino sullo stesso piano. In questo caso non abbiamo due facce distinte nel poliedro risultante ma una singola faccia, e pertanto ci sarà una faccia in meno di quanto previsto. Poichè non vi è nessuno spigolo tra queste due facce, ci sarà anche uno spigolo in meno. Più in generale, se ho t facce situate l'una vicino all'altra posizionate sullo stesso piano, allora il numero delle facce risulta essere

$$H - 2 + s - t$$

e il numero di spigoli

$$A - 3 + s - t.$$

(3) Nel seguito Eulero mette in luce che durante il processo di rimozione di un vertice, il numero sia di facce che di spigoli può aumentare. Comunque nel nuovo poliedro la differenza tra il numero di spigoli e il numero di facce risulta essere minore di uno rispetto alla stessa differenza nel poliedro di partenza. Cioè

$$(A - 3 - s + t) - (H - 2 - s + t) = A - H - 1$$

A questo punto Eulero è pronto per dimostrare i due principali teoremi presentati nel precedente articolo. Prima di tutto nella **Proposizione 3** procede alla dimostrazione della formula della somma degli angoli piani (vedi Prop. 9, p. 27). Assume che il poliedro abbia S angoli solidi e la somma degli angoli piani sia pari a R angoli retti. Usando le conseguenze del secondo problema arriva alla seguente conclusione, che dimostra il teorema:

"Quando, da queste continue eliminazioni di parti, arriviamo a S-n angoli solidi, la somma degli angoli retti sarà uguale a R-4n. Ma in questo modo abbiamo così 4 angoli solidi, e l'unico corpo fatto in tal modo è una piramide triangolare, per la quale sappiamo avere la somma degli angoli piani pari a 8 angoli retti. Cioè se S-n=4 allora R-4n=8, e sostituendo otteniamo

$$R = 4S - 8.$$

Con la **Proposizione 4** si arriva finalmente alla dimostrazione della Formula di Eulero. Partendo da un poliedro con S angoli solidi, A spigoli e H

facce ed utilizzando i risultati del problema 2, Eulero deduce che dopo aver rimosso n angoli solidi dal poliedro, il numero di spigoli supera il numero di facce di una quantità pari a $A - H - n$ e conclude dicendo:
"Arriviamo così ad una piramide triangolare in cui il numero di angoli solidi è uguale a 4 e il numero di spigoli a 6, quindi la differenza tra il numero di spigoli e il numero di angoli solidi è 2. È evidente che $S - n = 4$*, allora* $A - H - n = 2$*. Visto che* $n = S - 4$*, e* $n = A - H - 2$*. Si conclude che* $S - 4 = A - H - 2$*, o,* $H + S = A + 2$*".*

È necessario però un commento riguardo alla validità della dimostrazione, vedi [10].

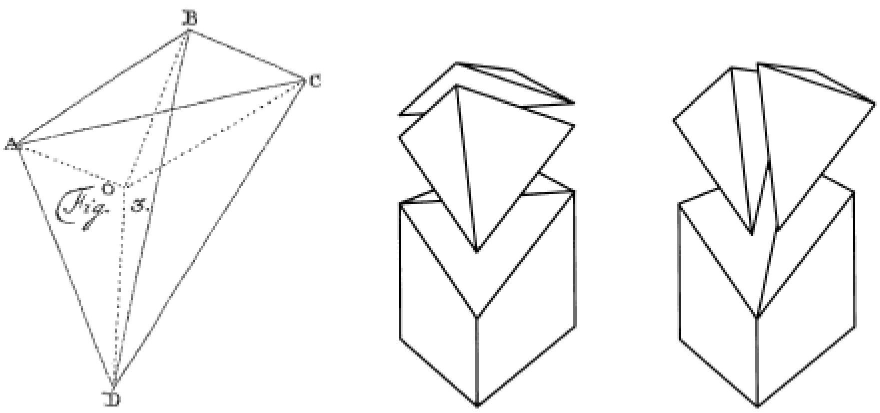

Figura 2.6: Da [11]. La Fig. 3 è qulla di 'Demonstratio nonullarum insignium proprietatum'

Eulero non fornisce una dimostrazione rigorosa riguardo alla sua formula relativa ai poliedri convessi. Ciò accade in quanto egli non presta sufficiente attenzione al mantenimento della convessità durante il processo di scomposizione del solido. È infatti possibile rimuovere un vertice eliminando delle piramidi e ottenere un poliedro non convesso, come vediamo dalla Figura 2.6. Eulero non definisce un algoritmo preciso che spieghi come rimuovere un vertice in maniera da garantire come risultato ad ogni passo un poliedro convesso. Invece di una dimostrazione completa propone un esempio, tuttavia quello scelto non è sufficientemente generale per poterne dedurre un

algoritmo. La difficoltà nasce dal fatto che lui prevede solo proiezioni di un segmento del poliedro su un piano, e in questo modo si possono produrre errori dovuti alla prospettiva.
Per mostrare come questo metodo possa indurre all'errore, prendiamo l'esempio proposto da Eulero stesso (vedi Fig. 3 di 2.6). Consideriamo un poliedro, il cui vertice che deve essere rimosso, O, ha quattro vertici adiacenti, A, B, C e D. A proposito della rimozione del vertice O, Eulero scrive:
"*Ciò può essere fatto in due modi: due piramidi saranno tagliate via, siano OABC e OACD o OABD e OBCD. E se i punti A, B, C, e D non sono nello stesso piano, il solido risultante avrà di conseguenza una forma diversa.*"
Non è difficile notare che se A, B, C e D non sono complanari, allora solo uno dei due solidi sarà convesso, Eulero però non riconosce che solo una scomposizione è accettabile, mentre l'altra non lo è.

2.5 Cartesio versus Eulero

Vogliamo ora guardare le principali analogie e differenze tra i due studi affrontati precedentemente: il manoscritto di Cartesio e gli articoli di Eulero. Innanzitutto notiamo che i due matematici hanno avuto un approccio completamente diverso: mentre Cartesio utilizza sempre un'analogia con le figure piane, Eulero lavora, come abbiamo già detto, con una induzione prematematica, cioè partendo dall'analisi di vari corpi di forme e strutture molto diversi generalizza il suo teorema a tutti i poliedri convessi; per questo motivo non parla neanche mai di angolo esterno. Anche gli elementi centrali degli studi sono diversi: nel "De Solidorum Elementis" vi è al centro l'angolo piano, oggetto di tutte le proposizioni e affermazioni, mentre i due articoli di Eulero ruotano attorno al nuovo elemento da lui introdotto, lo spigolo. A questo proposito, è da notare che nel 1750 vi erano maggiori conoscenze matematiche rispetto al 1630, e già iniziavano a farsi strada le prime nozioni di topologia. Come già accennato, Cartesio non mostra la Formula definitiva, ma è così semplice ricavarla dai risultati del manoscritto che molti critici

nel tempo hanno sostenuto che in realtà lui ne fosse a conoscenza. Tuttavia Federico in [1, p. 73] ci fa notare che possiamo solo dare ipotesi a questo proposito, perchè possiamo affermare con certezza che lui fosse a conoscenza solo di ciò che ha scritto. Dobbiamo aggiungere inoltre che non riconosce lo spigolo come un nuovo elemento di un solido, e quindi non riesce a collegare il numero doppio degli angoli piani al numero degli spigoli.
Ritroviamo comunque elementi comuni nei due studi: la somma degli angoli piani in termini di angoli solidi di un poliedro viene trattata da Cartesio nella proposizione 2 e da Eulero nella 9, e le due disuguaglianze relative al numero di facce e di angoli solidi della proposizione 3 di Cartesio si possono ritrovare nelle 5 e 6 di Eulero. La proposizione 5 del matematico francese, che ci fornisce la somma degli angoli piani in base al loro numero e a quello delle facce, ritrova la sua controparte nella 8 di Eulero, riguardante la stessa somma, in termini però di numero di spigoli e di facce. Infine nel manoscritto alla proposizione 6 ritroviamo una relazione tra il numero di angoli piani, di facce e di angoli solidi, equivalente al teorema della proposizione 8 dell'"Elementa Doctrinae Solidorum".

Capitolo 3

Il metodo e il rigore: Lakatos

"La dimostrazione (o meglio le dimostrazioni) di un teorema al centro di un dialogo quasi "platonico", alla scoperta della verità o, almeno, allo smascheramento dell'errore: è quel che propone Imre Lakatos in questa "ricostruzione razionale"dei tentativi intrapresi per dimostrare una celebre congettura matematica, il teorema di Euler.", Giorello in [9, p. 7]
In questo capitolo cercheremo di analizzare la logica di "Dimostrazioni e Confutazioni", che utilizza la Formula di Eulero per studiare come si evolvono i concetti, le congetture, i teoremi e le dimostrazioni in matematica.
In questo capitolo ci serviremo della notazione utilizzata nella traduzione italiana del testo, per cui indicheremo con V il numero di vertici, con F quello delle facce e con S quello degli spigoli di un poliedro.

3.1 Imre Lakatos

Imre Lakatos (il cui vero nome è Imre Lipshitz) nasce nel novembre 1922 a Debrecen in Ungheria, da una famiglia ebrea. Il padre è un commerciante poliglotta di notevole cultura. Studia al Real Gymnasium e poi all'Università di Debrecen, dove frequenta i seminari di filologia greca e latina e di storia della matematica. Conosce Eva Ravesz, che più tardi sposerà. Gli studi e la propaganda marxista che Lakatos aveva organizzato illegalmente insieme ad

Figura 3.1: Imre Lakatos. Fonte Internet

un gruppo di studenti negli anni dell'Università sono interrotti dalla guerra e dall'occupazione nazista dell'Ungheria. La madre, la nonna e lo zio di Lakatos, vittime delle deportazioni naziste, moriranno ad Auschwitz, mentre Imre e il padre riescono a fuggire. Lakatos scappa con Eva sotto falso nome (Tibo Molnár) e vive con i documenti che si era procurato grazie all'aiuto di famiglie non ebree dalle quali è ospitato. Entra a far parte della resistenza antinazista ed è leader di una cellula comunista. È di questo periodo il presunto episodio che sei anni più tardi costerà a Lakatos i lavori forzati. In circostanze mai chiarite, Lakatos fa valere il suo ascendente e influenza la decisione di convincere al suicidio Eva Iszack, una giovane ebrea rumena e attivista antifascista, la quale, se catturata, avrebbe rischiato di mettere a repentaglio la vita degli altri tredici membri del gruppo. Nel 1944 Lakatos si laurea in matematica, fisica e filosofia all'Università di Debrecen. Cambia nuovamente nome e sceglie quello di Imre Lakatos (cognome molto diffuso nella classe lavoratrice ungherese). Per qualche tempo è ricercatore all'Università dove frequenta i seminari di estetica di Lukács, rientrato in quel periodo dal suo esilio moscovita insieme ad altri intellettuali comunisti ungheresi. Dal 1947 è alto funzionario del ministero della Cultura e dell'Educazione e si dedica al progetto della riforma scolastica. La forza delle sue idee e le sue qualità intellettuali gli consentono di esercitare un ruolo guida nei ristretti circoli dell'élite comunista. Lo stesso anno ottiene il suo primo dottorato in filosofia, fisica e matematica con una tesi dal titolo "Sulla formazione dei concetti scientifici". Segretario del Comitato della Scienza del partito, Lakatos è coinvolto in un piano di riforma universitaria di impostazione stalinista. La partenza di Lakatos per Mosca segna la fine della sua influenza sulla vita politica e l'inizio dei suoi guai: a causa del suo carattere irriverente e della sua libertà di pensiero si fa non pochi nemici. Ritorna a Budapest e nel frattempo continuano gli interrogatori da parte del Comitato Centrale di Controllo del Partito Comunista, a questi fanno seguito le torture e sei settimane di isolamento. Nella primavera del 1950 Lakatos è arrestato e, senza processo regolare, imprigionato per tre anni nel campo di lavoro di Recsk. Prigioniero politico, senza il permesso di leggere e di scrivere, Lakatos racconterà di aver mantenuto la sua integrità mentale raccontandosi una barzelletta al giorno e ricostruendo una a una tutte le dimostrazioni matematiche che conosceva. Nel 1953, all'approssimarsi della morte di Stalin, la pressione sovietica si allenta. Gli ideali comunisti di Lakatos, sopravvissuti all'esperienza della prigione, entrano in crisi con la lettura dei pensatori liberali, in particolare Popper e von Hayek. Nel 1955 conosce Eva Pap e si sposa per la seconda volta. Nel 1956 ritorna all'attività politica all'interno del Circolo Petöfi. Durante l'insurrezione dell'ottobre-novembre, appena prima di lasciare il suo paese, è coautore della 'Dichiarazione del Comitato Nazionale dell'Accademia Ungherese delle Scienze'; poi Imre fugge a Vienna con la moglie Eva prima di essere nuovamente arrestato, e da lì si trasferisce a Cambridge. Nel frattempo incontra Popper e partecipa ai suoi seminari alla London School of Economics dove trascorrerà l'intera carriera accademica, eccezion fatta per una breve parentesi, nei primi anni sessanta, all'Università della California. Il governo britannico, per motivi ufficialmente ignoti, non gli concederà mai la cittadinanza, e per il resto della vita Lakatos sarà un senza patria. A Londra diventa amico di Paul Feyerabend, anch'egli allievo e futuro critico di Popper. I suoi interessi slittano verso la filosofia delle scienze fisiche. Il 2 febbraio 1974, a 51 anni, Imre Lakatos muore improvvisamente di infarto. Le opere più importanti sono: ″La falsificazione e la metodologia dei programmi di ricerca scientifica‷(1970), ″Dimostrazioni e confutazioni - La logica della scoperta matematica‷(pubblicato postumo nel 1976), ″Matematica, scienza e epistemologia‷(1978 postumo).

3.2 Dimostrazioni e Confutazioni

″Dimostrazioni e confutazioni - La logica della scoperta matematica‷riguarda la storia dei tentativi di stabilire la definitività della congettura di Eulero, $V - S + F = 2$. Il testo di Imre Lakatos inizialmente arrivò al pubblico come articolo sul″British Journal for the Philosophy of Science‷; basato in parte sulla sua tesi di dottorato, ″Essays in the Logic of Mathematical Discovery‷, fu pubblicato in quattro parti tra il 1963 e il 1964. Nel corso della sua vita Lakatos desiderava scrivere un libro sulla filosofia della matematica ma, distratto dagli sviluppi della filosofia della scienza e turbato negli ultimi anni dalla sua salute malata, non riuscì mai a elaborare un testo definitivo. Dopo la sua morte, John Worrall ed Elie Zahar si preoccuparono di raccogliere il materiale necessario al fine di pubblicarlo in un unico libro; riunirono varie documentazioni tratte dall'articolo originale uscito sul British Journal ed estratti della sua tesi di dottorato, uscendo nel 1976 in un unico testo: ″Proofs and Refutations - The Logic of Mathematical Discovery‷. Nella loro introduzione gli editori espressero la speranza che i nuovi capitoli potessero soddisfare l'obiettivo del lavoro di Lakatos. L'edizione italiana, venne pubblicata per la prima volta nel 1979 con traduzione di Daniela Benelli e curata da Giulio Giorello, filosofo, matematico ed epistemologo italiano, il quale inserì una sua introduzione.
Per studiare questo testo ci serviamo delle analisi effettuate da Isaacson in [11] e da Giorello, uniti ad alcuni commenti di Villani in [13].
La forma del suo sviluppo è una discussione in classe tra un insegnante e sedici studenti, accompagnata da una vasta gamma di note a piè di pagina che riportano in dettaglio le attribuzioni storiche dei punti di vista matematici e

filosofici espressi dalla classe; queste note mostrano approfondite conoscenze nel campo. Isaacson in [11] fa notare che mentre in alcuni, pochi, membri della classe si possono riconoscere specifi personaggi (Cauchy, Hessel, Jonquières, Gergonne, L'Huilier, Poincaré), altri sono portati in vita dalle note. Come sottolinea Larvor in [12, p. 8], Worrall e Zahar aggiunsero dei commenti in nota agli scritti di Lakatos: alcuni sono semplici chiarimenti, altri (specialmente alle pagine 95-96, 165-166, 138 e 166) indicano cosa, secondo loro, Lakatos avrebbe dovuto o voluto dire se fosse vissuto tanto a lungo da approfondire la sua visione.

Ritornando alla forma, il dialogo avviene tra un professore e i suoi (ideali) studenti, e il tema è la congettura di Eulero e le sue dimostrazioni; dico 'ideali' poichè anche se si intuisce che sono universitari, vengono trattati argomenti molto elevati e sembra più una discussione fra matematici professionisti, con alle spalle anni di studi e profonde conoscenze in materia. Sebbene gli argomenti siano di difficile comprensione, questa forma agevola la lettura, in quanto risulta più avvincente e di facile immedesimazione. Con il più classico degli artifici della divulgazione filosofica, Lakatos mette in bocca agli studenti le idee dei matematici che nel diciannovesimo secolo si sono occupati di questo problema, ed articola la sua teoria sulla logica sottostante alla scoperta matematica.
La storia della Formula di Eulero inizia con i tentativi di Cartesio per terminare con la riuscita generalizzazione di Poincaré (che qui non trattiamo). "Ma per Lakatos occorre guardare alla struttura fine di tutti quei "tentativi ed errori"che collegano l'originale congettura euleriana alla versione datane da Poincaré [...]. Oggi diamo per scontato sia il fatto che il teorema di Eulero si applica ai poliedri"sferoidi"[...], sia il fatto che, se queste condizioni non sono soddisfatte, si costruiscono facilmente dei controesempi. Spesso dimentichiamo però quella vasta gamma di tentativi - da Legendre, Cauchy, Lhuilier, von Staudt, ecc. fino a Möbius, Listing, Jordan, ecc. - che mirava a "stabilire"il teorema dandone *condizioni di validità* espresse non nel quadro topologico che oggi ci è familiare, ma con clausole atte a impedire

la costruzione di controesempi (considerati spesso come ″mostri‶da eliminare[...])", Giorello in [9, p. 9]. In questo testo vengono presentati molti interrogativi, ma vedremo che non a tutti sono proposte delle soluzioni, molte domande rimangono aperte (*"È una domanda intelligente; la metteremo all'ordine del giorno di domani"* [9, p.52]).

Centrale nel suo lavoro è il tema che la matematica è essenzialmente informale e ″quasi empirica‶; "non si sviluppa attraverso un monotono aumento del numero di teoremi stabiliti in modo indubitabile, ma attraverso il continuo miglioramento delle congetture, ottenuto mediante la riflessione e la critica, con la logica delle dimostrazioni e confutazioni", Worrall e Zahar in [9, p. 43]. Il principale obiettivo polemico di Lakatos è il formalismo, secondo lui colpevole di incoraggiare la concezione dogmatica per cui la matematica è "autorevole, infallibile, inconfutabile", Worrall e Zahar in [9, p. 43]. Lakatos rifiuta l'idea autoritaria di dimostrazione a favore di una sua analisi: "La dimostrazione è solo una fase del lavoro del matematico cui debbono seguire sia l'analisi della dimostrazione sia le confutazioni e che deve concludersi con il teorema rigoroso"[9, p. 93]. Per questo ogni tentativo di dimostrare una congettura, e non solo *la* dimostrazione che viene alla fine accettata ufficialmente, acquista una rilevante importanza. Dai casi storici comprendiamo che "le dimostrazioni anche se talvolta non *dimostrano*, di sicuro aiutano a *migliorare* la nostra congettura"[9, p. 76]. "Questo è il senso di uno degli slogan preferiti da Lakatos, *migliorare dimostrando*: ed è per questa via che si realizza ″una intrinseca unità di 'logica della scoperta' e di 'logica della giustificazione'″", Giorello in [9, p. 14]. Una dimostrazione così vista è un "esperimento mentale che suggerisce una scomposizione della congettura originale in sottocongetture o lemmi"[9, p. 49], e piuttosto che costituire una garanzia di certe verità, è un invito a ricercare controesempi. Lontani dal costituire disastri, come invece sono concepiti dal programma euclideo, i controesempi sono un ingrediente essenziale nel processo dell'analisi della dimostrazione.

Ci inseriamo nella discussione quando la classe si sta ponendo un problema: "esiste una relazione tra il numero dei vertici V, il numero degli spigoli S e il numero delle facce F di un poliedro - in particolare di un *poliedro regolare* - analoga alla relazione banale che intercorre tra il numero dei vertici V e i lati S di un *poligono*, cioè che vi sono tanti lati quanti vertici: V=S? Quest'ultima relazione ci permette di classificare i *poligoni* secondo il numero dei lati [...]. Una relazione analoga ci permetterebbe di classificare i *poliedri*"[9, p. 45]. La classe giunge all'osservazione che per i poliedri regolari vale la relazione $V - S + F = 2$. Il professore propone una dimostrazione di tale congettura, che è quella presentata da Cauchy nel 1813, e qui si accende il dibattito in quanto gli studenti individuano all'interno della dimostrazione tre lemmi, di nessuno dei quali riconoscono la veridicità. La dimostrazione di Cauchy, già suddivisa nei tre lemmi, si presenta così:

I Consideriamo un poliedro cavo[1], togliamo una faccia e stendiamo la superficie su un piano; in questa operazione gli elementi vengono deformati ma non cambia il numero. Allora, $V - S + F = 1$ nella rete piana se e soltanto se $V - S + F = 2$ nel poliedro di partenza.

II Triangoliamo la carta: tracciamo le diagonali in quei poligoni che non sono ancora triangoli; per ogni diagonale aumentano di 1 sia S che F, così che il totale di $V - S + F$ non viene modificato.

III Asportiamo uno ad uno i triangoli, possiamo avere due possibilità: o eliminiamo una faccia ed uno spigolo, o una faccia, due spigoli e un vertice, in ogni caso $V - S + F$ non cambia. Alla fine di tale operazione rimaniamo con un solo triangolo, per cui $V - S + F = 1$, e quindi anche nel poliedro originale in cui abbiamo rimosso una faccia.

La dimostrazione viene sottoposta ad una serie di controesempi (due cubi uno dentro l'altro, una coppia di tetraedri con uno spigolo o un vertice

[1] Cioè ridotto alla sua superficie

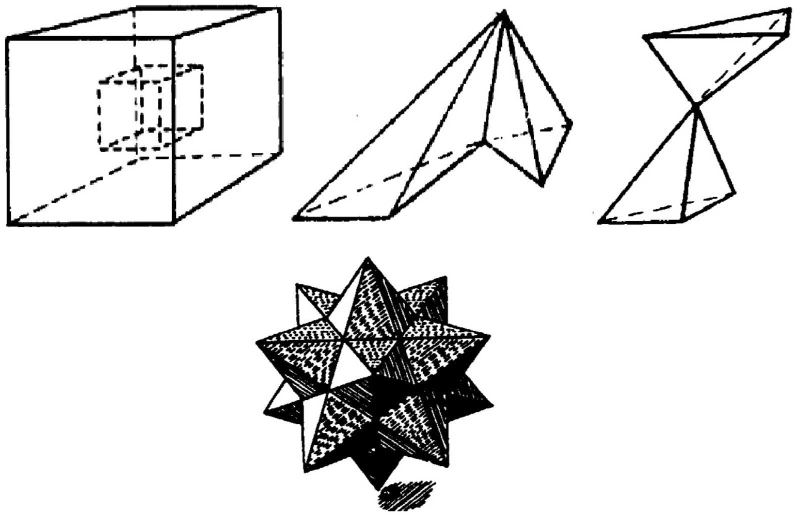

Figura 3.2: Da [9]

in comune, il poliedro-stella , un cubo attraversato da un tunnel -cornice-, e molti altri) di diverso tipo: locale, che confuta un lemma; globale, che riguarda la congettura principale; locale e globale, su entrambi. Per ognuno di questi vediamo svilupparsi con destrezza una serie di metodi di analisi della dimostrazione.
È possibile trovare controesempi locali ad ognuno dei tre lemmi, specifichiamo che essi non confutano la validità della congettura originale; Lakatos in [9, p. 52] propone di migliorare la dimostrazione in modo che resista alla critica: *"Tuttavia posso facilmente rielaborare e migliorare la dimostrazione, sostituendo il lemma falso con uno leggermente modificato che non può essere confutato dal nostro controesempio"*. Ad esempio, è molto facile confutare il terzo lemma, infatti asportando un triangolo dalla regione più interna, diminuisce il numero di facce ma non quello di V o S, e così tale lemma è falso per tutti i poliedri eccetto il tetraedro, nella cui rete piana tutti i triangoli sono triangoli del contorno. Questo però è un controsempio solo al terzo lemma e non alla congettura principale, e quindi si può sostituire il lemma falso con uno leggermente modificato non confutato dal controesempio: "a ogni stadio di tale operazione, la rimozione di ogni triangolo del contorno avviene

in uno di questi due modi"[9, p. 51], che equivale a dire che si asportano uno ad uno i triangoli *del contorno*.

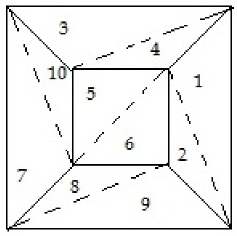

Figura 3.3: Da [9, p. 50]

Ma questa precisazione, non trascurabile, risulta comunque non sufficiente, poichè asportando i triangoli nell'ordine dato dalla Figura 3.3, quando viene tolto l'ottavo, che sarà a quel punto un triangolo del contorno, verranno eliminati due spigoli e nessun vertice, modificando così $V - S + F$. E le precisazioni continuano.

Se ci imbattiamo invece in un controesempio che è globale ma non locale, cioè una critica alla congettura ma non necessariamente alla dimostrazione, possiamo confrontarci con tre diversi metodi: nel primo, il **metodo dell'eliminazione di mostruosità**, si cancellano tutti i controesempi alla congettura originale attraverso una ridefinizione ad hoc dei termini in questione: in effetti nel testo vi è una accesa discussione su cosa siano un poliedro, un poligono o uno spigolo, però è bene specificare che la confutazione mediante controesempi dipende dal significato dei termini in questione, "se un controesempio deve essere una critica oggettiva dobbiamo accordarci sul loro significato"[9, p. 56]. Per raggiungere tale accordo è quindi necessario definire i termini critici, in questo caso prima di tutto quello di poliedro; le definizioni vengono infatti spesso proposte e discusse quando si introducono dei controesempi. Nel testo viene presentata una coppia di cubi l'uno messo dentro l'altro ma non a contatto (vedi I poliedro di Fig. 3.2), per essa vale $V - S + F = 4$, ma è un poliedro? Secondo la prima definizione proposta, *"Def. 1: Un poliedro è un solido la cui superficie è costituita da facce polig-*

onali" [9, p. 54], lo è, ma non ugualmente per la *"Def. 2: Un poliedro è una superficie* [connessa] *costituita da un sistema di poligoni"* [9, p. 54]. I controesempi che ci costringono a dare una nuova definizione sono due coppie di tetraedri (II e III immagine di Fig. 3.2), una con uno spigolo e una con un vertice in comune, essi sono poliedri per la seconda definizione ma per entrambe $V - S + F = 3$; allora *"Def. 3: Per poliedro intendevo un sistema di poligoni messi in modo che (1) esattamente due poligoni si incontrano ad ogni spigolo e (2) è possibile andare dall'interno di un poligono all'interno di un altro qualsiasi seguendo un percorso che non incontra mai uno spigolo in un vertice."* [9, p. 55]. Questo è solo un esempio, ma tale tipo di discussione avviene anche per altri concetti.
Con **l'eliminazione di eccezioni** (secondo metodo) si accetta il metodo dell'eliminazione di mostruosità solo se "serve per determinare il dominio di validità della congettura originale"[9, p. 66], ma non se diventa un trucco per 'salvare' eleganti teoremi; in questo modo "il retrocedere pezzo a pezzo è stato sostituito da una ritirata strategica in un dominio che egli spera sia una fortezza per la congettura."[9, p. 68], cioè non vi è mai la certezza di aver controllato tutte le eccezioni o invece aver "scartato"dalla congettura poliedri euleriani (per cui vale la Formula di Eulero), e comunque non si tiene in conto in alcun modo della dimostrazione in riferimento al sorgere di nuove eccezioni.
Infine attraverso il **metodo della incorporazione del lemma**, a differenza di prima, viene corretta la congettura originale, si inseriscono in essa proprio i lemmi confutati dai controesempi, così si è costretti ad individuarli e a riformularli in modo preciso sulla base di un'attenta analisi della dimostrazione. Questo metodo migliora dimostrando, ed è il suo aspetto più importante; esso inoltre mantiene la dimostrazione ma restringe il dominio della congettura principale al dominio reale del lemma colpevole; vediamone un esempio.

Consideriamo una cornice (I immagine di Fig. 3.4), essa confuta il I lemma in quanto asportando una faccia non riusciamo a distenderlo su un piano,

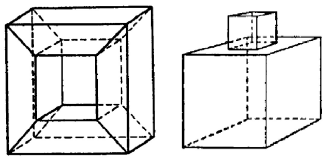

Figura 3.4: Solidi non euleriani. Da [9, pp. 59, 74]

quindi abbandoniamo subito la congettura nella sua forma originale e ne diamo una versione ristretta modificata: “la congettura di Descartes-Euler va bene per poliedri ″semplici‶, cioè poliedri che, dopo che si è asportata una faccia, possono essere stesi su un piano”, o equivalentemente “*La caratteristica di Euler di un poliedro semplice è 2*”[9, pp. 73, 74]. Ma questo non basta, perchè un cubo sormontato da un cubo più piccolo (II immagine di Fig. 3.4) è un poliedro ed è semplice ma *non* è euleriano; dove crolla quindi la dimostrazione? Se osserviamo la rete piana di questo poliedro (in cui abbiamo come sempre eliminato una faccia) incontriamo una faccia ad anello, nella quale nessuno spigolo diagonale aumenterà il numero delle facce, falsificando il secondo lemma; andiamo quindi a inserire nella congettura il lemma confutato, e cioè “*Per un poliedro semplice, con tutte le facce semplicemente connesse* - per il quale ogni faccia attraversata da uno spigolo diagonale si divide in due parti - $V - S + F = 2$”[9, p. 76].

Ma ci chiediamo verso quale obiettivo tende questo processo, e la risposta ci viene dal **Principio della Ritrasmissione della Falsità**, che pretende che controesempi globali siano anche locali; in tal caso “una analisi della dimostrazione è ″rigorosa‶o ″valida‶e il corrispondente teorema matematico vero”[9, p. 87]. Questo principio viene chiamato così perchè richiede che “la falsità venga ritrasmessa dalla congettura ingenua ai lemmi, dal conseguente del teorema al suo antecedente”[9, p.87]. Se un controesempio globale che non è locale viola questo principio, restauriamo il principio aggiungendo un lemma opportuno all'analisi della dimostrazione. In questo modo non esistono controesempi che sono globali ma non locali. Se osserviamo il cilindro, esso è un autentico controesempio al teorema; allora inventiamo un nuovo lemma

che verrà confutato da esso e aggiungiamo il lemma all'elenco originale. Tale lemma però non lo nascondiamo, ma lo dichiariamo pubblicamente.
Questa è un'altra questione affrontata da Lakatos. Attraverso il metodo della incorporazione del lemma miglioriamo la congettura: in essa ineseriamo lemmi trasformandoli in essa inseriamo lemmi trasformandoli in condizioni; ci chiediamo però a che punto possiamo arrestare tale processo. Nel nostro esempio sono stati inseriti il primo e il secondo lemma, ma come mai non anche il terzo? In effetti questo è una conseguenza diretta del primo e sembra essere sicuramente vero, non ci aspettiamo un controesempio che lo possa confutare. "Noi trasformiamo in condizioni quei lemmi che possono essere dimostrati a partire da principi banalmente veri. E nemmeno incorporiamo quei lemmi che si possono dimostrare - eventualmente con l'aiuto di tali principi banalmente veri - a partire dai lemmi specificati precedentemente"[9, p. 80]. Non è però sempre facile determinare fino a che punto è possibile sottointendere certe condizioni. Assumiamo che il cilindro sia un poliedro, esso è un controesempio globale dato che $V - S + F = 1$ ($V = 0$, $S = 3$, $F = 2$), e apparentemente sembra non essere locale. Il primo lemma chiede che il poliedro sia semplice, cioè dopo aver asportato una faccia è possibile distenderlo su un piano, ma eliminando la superficie laterale esso ″cadrebbe in due pezzi‶. Quindi affichè il cilindro non sia un controesempio dovrebbe soddisfare un *lemma aggiuntivo*: "cioè che anche *la rete piana risultante sia connessa.* Ma chi ha mai enunciato *questo* lemma?"[9, p. 83]. Osservando la dimostrazione, essa si basa sull'assunzione che il risultato dell'operazione di stesura sia una rete connessa, altrimenti per la rete triangolata $V - S + F$ non sarebbe uguale a 1; abbiamo accettato che fosse "enunciato *implicitamente*"[9, p. 83]. Il cilindro poi potrebbe non soddisfare neanche il secondo lemma, cioè che ogni faccia tagliata da una diagonale si divide in due parti: è impossibile triangolare un cerchio o la superficie laterale, dato che non è possibile tracciare diagonali. Tuttavia questo fatto non falsifica quest'ultimo lemma, il problema effettivo è un altro: non potendo tracciare le diagonali non si triangola e quindi non si riesce a portare a termine la dimostrazione,

deve esserci una "clausola esistenziale"nel lemma. "L'interpretazione corretta della connessione semplice di una faccia deve essere: *"per ogni x, se x è una diagonale, allora x taglia la faccia in due; e c'è almeno una x che è una diagonale.* " Nella formulazione precedente non era chiaro, ma c'era come un'*assunzione nascosta*. Essa non rappresenta un errore, è solo una opportuna stenografia che rimanda alla "conoscenza di sfondo"."[9, p. 84]

Ma come si sviluppa una analisi della dimostrazione? Nel caso ci siano controesempi globali, essi appaiono come non locali e tutti i lemmi partono come nascosti (cioè impliciti, che rimandano alla nostra conoscenza di sfondo). Essi ci conducono ad una graduale costruzione dell'analisi della dimostrazione e si trasformano uno alla volta in globali e locali. Se invece abbiamo già dei sospetti e ci aspettiamo delle confutazioni, possiamo arrivare ad una dettagliata analisi della dimostrazione senza controesempi. In questo caso o confutiamo i lemmi con controesempi locali che possono poi rivelarsi globali, o non esistono controesempi locali ai lemmi sospetti, e quindi la dimostrazione è comunemente accettata e i lemmi scacciano ogni sospetto. "Tutto questo mostra che non si possono mettere dimostrazione e confutazione in compartimenti stagni."[9, p. 89]
Il **metodo di dimostrazioni e confutazioni** è sintetizzato in cinque "regole euristiche"[9, pp. 89, 90, 98, 117]:

1. *"Se hai una congettura preparati a dimostrarala e a confutarla. Esamina attentamente la dimostrazione e fai un elenco di lemmi non banali (analisi della dimostrazione); trova controesempi sia alla congettura (controesempi globali) sia ai lemmi sospetti (controesempi locali).*

2. *Se hai un controesempio globale scarta la tua congettura, aggiungi alla tua analisi della dimostrazione un conveniente lemma che verrà confutato dal controesempio e sostituisci la congettura scartata con una congettura migliorata che incorpori quel lemma come una condizione. Non permettere che una confutazione venga liquidata come una mostruosità. Cerca di rendere espliciti tutti i lemmi nascosti.*

3. *Se hai un controesempio locale, fai un controllo per vedere se non è anche globale. Se lo è, puoi facilmente applicare la Regola 2.*

4. *Se hai un controesempio che è locale ma non globale, cerca di migliorare la tua analisi della dimostrazione sostituendo il lemma confutato con uno non falsificato.*

5. *Se hai un controesempio di qualsiasi tipo, cerca di trovare mediante un tirare-a-indovinare deduttivo un teorema più profondo per il quale essi non siano più controesempi."*

Due sono le possibili interpretazioni della quarta regola: che sia solo un aggiustamento locale interno alla struttura della dimostrazione originale, o addirittura che si possa sostituire il lemma cercando di mantenere la maggior quantità di contenuto possibile, eventualmente inventando una dimostrazione più 'profonda', completamente differente. A questo proposito vengono mostrate due dimostrazioni alla congettura di Eulero, quella di Gergonne [9, pp. 99-100] e quella di Legendre [9, pp. 100-101], entrambe meno profonde di quella di Cauchy, e che quindi la precedono nello sviluppo del metodo di dimostrazioni e confutazioni. "Suppongo che il Professore conoscesse la dimostrazione di Gergonne, l'abbia trovata insoddisfacente per via di qualche controesempio locale ma non globale e abbia sostituito il lemma ottico, la fotografia, con il più ampio lemma topologico, la stesura. Perciò egli è giunto alla *più profonda* dimostrazione di Cauchy non attraverso una "attenta analisi della dimostrazione"seguita da una lieve modificazione, ma attraverso una radicale innovazione creativa textquotedblright [9, p. 100].
Comunque, la forza e il fascino del libro di Lakatos giacciono non tanto in queste formulazioni astratte delle sue idee, ma piuttosto nel loro sviluppo e nelle loro illustrazioni attraverso lo studio dettagliato e minuzioso di una grande quantità di materiale procedente dalla storia della matematica.

Emerge chiaramente in questo testo il problema del rigore in una dimostrazione matematica, in rapporto alla sua articolazione linguistica. Se

il cuore della matematica è l'esperienza mentale (la dimostrazione), la sua articolazione linguistica (analisi della dimostrazione) è necessaria o anche rilevante? È raggiungibile un rigore assoluto nell'analisi della dimostrazione? E nella dimostrazione stessa? Se il linguaggio è impreciso, il pensiero può raggiungere il rigore assoluto? E la verità assoluta? Ma che cos'è la verità matematica? Possiamo conoscerla? Si impongono tutte queste domande, che sono le stesse che si sono posti i grandi matematici, da Pascal a Brouwer, passando per Poincaré e Lebesgue, alle quali però Lakatos non propone una risposta chiara e decisa.
Ma l'analisi della dimostrazione sebbene aumenti la certezza, fa diminuire il contenuto: ogni nuovo lemma nell'analisi della dimostrazione e ogni nuova condizione corrispondente nel teorema, ne restringono il dominio. Ed è a questo che serve la regola 4 del metodo di dimostrazioni e confutazioni, specialmente nella seconda interpretazione più radicale. Lakatos poi in risposta a questo problema propone di cercare una nuova, più profonda e generale congettura ingenua; "Rispondere a molte domande può essere più agevole che dare la risposta ad una sola. Il nuovo problema, più ambizioso del primo, può essere dominato facilmente da quest'ultimo"(Polya chiama ciò il "paradosso dell'inventore"; da Polya in Lakatos [9, p. 108]). In effetti, il problema iniziale non era determinare per quali poliedri è valida la relazione $V - S + F = 2$, ma stabilire una connessione tra V, S, F per un qualsiasi poliedro. Ci si è imbattuti per caso con i poliedri per cui vale tale formula, ma un indagine critica su di essi ha mostrato che esistono molti più poliedri non-euleriani che euleriani.
Ma come fare a determinare la relazione tra V, S, F per ogni poliedro? Abbiamo già visto che con pochi poliedri il metodo induttivo - dall'osservazione di alcuni solidi alla formazione della congettura - non ha portato ad una soluzione, non possiamo pretendere che succeda con un numero maggiore di elementi, anzi porterebbe solo al caos. Allora, se non serve partire da una congettura ingenua ci chiediamo da dove poter cominciare. Quando si scopre un problema vi è già un'idea di fondo inclusa e ogni dato è inutile, il prob-

lema non cade mai dal cielo ma è sempre relativo alla nostra conoscenza di sfondo; allora è necessario capire come è nato partendo da essa. "Invece di raccoglierne i dati io seguo le tracce di come il problema è sorto dalla nostra conoscenza di sfondo. Ovvero: qual era la formula che ci aspettavamo e che, confutata, ha fatto nascere il problema?"[9, p. 111]. Avendo in mente il problema, ci costruiamo sopra (e questo diventerà la nostra dimostrazione) fino ad arrivare alla congettura, senza aver fatto osservazioni; poi si procede da qui con le confutazioni, l'analisi della dimostrazione e la formazione del teorema (senza escogitare però una dimostrazione formale). Quindi non sono le osservazioni, ma la dimostrazione a precedere la congettura. "Per la logica di dimostrazioni e confutazioni non c'è bisogno di nessuna congettura ingenua, di alcun punto di partenza induttivista"[9, p. 114]; si può giungere a congetture induttive ingenue solo per caso. Ma esistono famose congetture che non sono state precedute da dimostrazioni, allora in questo caso le congetture ingenue induttive vengono prima: "Il tirare-a-indovinare deduttivo è migliore, ma il tirare-a-indovinare ingenuo è meglio che non tirare a indovinare affatto. Tuttavia il tirare-a-indovinare ingenuo non è induzione: non esiste nulla di simile a una congettura induttiva!"[9, p. 114].
I fatti non suggeriscono congetture e neppure le rafforzano! Partiamo con alcune ipotesi di congetture e una alla volta verranno confutate: queste hanno suggerito i fatti (controesempi), e non viceversa. Le congetture ingenue non sono congetture induttive: arriviamo ad esse per tentativi ed errori, mediante controesempi e confutazioni. Allora la congettura ingenua non era la prima congettura mai suggerita dai fatti bruti, non congetturali: era preceduta da molte congetture e confutazioni preingenue.

La formazione dei concetti è un altro dei temi sviluppati da Lakatos in questo trattazione epistemologica. Trovare nuove definizioni non è compito però solo di chi elimina le mostruosità, che tende a conservare i concetti così come sono, ma anche da chi pratica l'inclusione di mostruosità e la tensione del concetto, che, in questo caso, viene ampliato. L'impatto del metodo di

dimostrazioni e confutazioni sui concetti è molto rivoluzionario: esso "*cancella* completamente i concetti ingenui cruciali e li *sostituisce* con concetti generati-dalla-dimostrazione"[9, p. 131]. Ritorniamo al teorema costruito precedentemente, "tutti i poliedri semplici con facce semplicemente connesse sono euleriani"(vedi qui, p. 47), possiamo notare che questa interpretazione potrebbe essere fuorviante perché suggerisce che i poliedri con tali caratteristiche siano una sottoclasse della più ampia classe dei poliedri. Incorporando il lemma sulla connessione semplice è stato invece aumentato il contenuto: è infatti possibile applicare la dimostrazione di Cauchy anche ad oggetti che non appartengono alla classe dei poliedri. Vediamone un esempio ripreso da [9, p. 130]:
"- Un globo con disegnata sopra una mappa politica era un elemento dell'originale classe dei poliedri?
- No , certo.
- Ma lo è diventato dopo la dimostrazione di Cauchy. Infatti gli puoi applicare la dimostrazione di Cauchy senza la minima difficoltà - basta che non vi siano paesia forma d'anello o mari.
- È giusto! Gonfiare il poliedro in una sfera e deformare spigoli e facce non ci disturba minimamente nell'eseguire la dimostrazione - fin tanto che la deformazione non altera il *numero* di vertici, spigoli e facce."

"Dunque il "poliedro semplice"generato dalla dimostrazione non è solo una restrizione, una specificazione, ma anche una *generalizzazione*, un'*espansione* del "poliedro"ingenuo"[9, p. 130]. A questo punto si dovrebbe scrivere "Tutti gli *oggetti* semplici con facce semplicemente connesse sono euleriani", o meglio ancora "Tutti gli oggetti di Cauchy sono euleriani"[9, pp. 129, 132]. "*Le congetture e i concetti ingenui vengono sostituiti da congetture migliorate (teoremi) e concetti (concetti generati-dalla-dimostrazione o teorici) cresciuti col metodo delle dimostrazioni e confutazioni.* E come le idee e i concetti teorici sostituiscono le idee e i concetti ingenui, il linguaggio teorico sostituisce il linguaggio ingenuo"[9, p. 133].

Se nel primo capitolo di ″Dimostrazioni e confutazioni‵molti degli argomenti li ritroviamo nella tesi di dottorato di Lakatos e nel suo articolo pubblicato sul British Journal, nel capitolo successivo vegono introdotti contenuti nuovi, mai resi noti al pubblico. Qui si guarda al tentativo di Poincaré di produrre una dimostrazione alla congettura di Eulero che soddisfi gli standard euclidei nel traslare tutte le nozioni geometriche coinvolte in termini della teoria degli spazi vettoriali. È importante ricordare che "mentre l'analisi della dimostrazione *termina* con un teorema, la dimostrazione euclidea *comincia da* un teorema. Nella metodologia euclidea non vi sono congetture, ma solo teoremi", Worrall e Zahar in Lakatos in [9, p. 148]. Viene ora trattato il tema di come tradurre dei concetti noti in un nuovo linguaggio, in questo caso in concetti dell'algebra lineare. È necessario usare dei concetti che siano i più chiari possibili, e separare ciò che ci interessa da altri concetti superflui: partendo da termini ″primitivi‵perfettamente nuovi, si definiscono tutti i termini che siano minimamente oscuri.

Villani in [13, pp. 263, 264] ci aiuta a comprendere che una tesi di fondo sostenuta da Lakatos è una critica serrata allo stile (e non ai contenuti) dell'insegnamento che tuttora prevale nelle scuole; in ″Dimostrazioni e confutazioni‵tale critica è esplicitata nell'Appendice II alle pp. 185-187:
"La metodologia euclidea ha sviluppato un certo stile di presentazione obbligatorio. Vi farò riferimento come allo ″stile deduttivista‵. Questo tipo di presentazione comincia con un elenco, formulato con cura, di assiomi, lemmi e/o definizioni. Gli assiomi e le definizioni appaiono spesso artificiali e complicati in modo mistificante. Nè viene mai detto come nascono queste complicazioni. All'elenco degli assiomi e delle definizioni seguono poi i teoremi formulati con altrettanta cura. Questi ultimi sono gravati di pesanti condizioni; sembra impossibile che qualcuno possa mai averli escogitati. A ciascun teorema segue la sua dimostrazione.
Lo studente di matematica è costretto a seguire questo giuoco di prestigio, senza fare domande nè sui precedenti nè su come questo giuoco vine eseguito.

Se per caso scopre che alcune delle sconvenienti definizioni sono generate dalla dimostrazione, se si chiede semplicemente come queste defiizioni, lemmi e il teorema possano mai precedere la dimostrazione, il prestigiatore lo metterà al bando per questa prova di immaturità matematica.
Nello stile deduttivista tutte le proposizioni sono vere e tutte le inferenze sono valide. La matematica è presentata come un insieme sempre in crescita di verità eterne e immutabili. Controesempi, confutazioni, critica non vi possono mai entrare. Un tono automatico è garantito alla materia proprio dal fatto che si comincia con dissimulate eliminazioni di mostruosità, con definizioni generate dalla dimostrazione e con il teorema in veste definitiva mentre sono eliminate la congettura primitiva, le confutazioni e la critica della dimostrazione. *Lo stile deduttivista occulta la lotta, occulta l'avventura.*"

Capitolo 4

La didattica

Lo studio dei solidi, dei suoi elementi costituenti, e delle relazioni interne ad essi è uno degli argomenti trattati in Geometria nelle Scuole Medie Inferiori, in particolare nella classe III. Le *"Indicazioni nazionali per i Piani di studio personalizzati nella Scuola Secondaria di 1^o grado"* uscite nel 2004, alla voce Obiettivi specifici di apprendimento per la classe terza, richiedono:

- *Visualizzare oggetti tridimensionali a partire da una rappresentazione bidimensionale e viceversa, rappresentare su un piano una figura solida.*
- *Ripresa dei solidi, calcolo dei volumi dei principali solidi e calcolo delle aree delle loro superfici (cubo, parallelepipedo, piramide, cono, cilindro, sfera).*
- *Calcolare i volumi e le aree delle superfici delle principali figure solide.*

Già nella classe seconda tali argomenti vengono solitamente affrontati durante le ore di Tecnologia, nell'apprendimento del disegno tecnico, applicando le regole delle proiezioni ortogonali e forme elementari di assonometria; spesso viene anche insegnato come costruire modellini tridimensionali dei principali solidi studiati, sia poliedri (regolari e non), che solidi di rotazione. Per questo si prevede che in terza gli studenti abbiano già confidenza con varie tipologie di solidi geometrici e si siano già formati delle immagini rappresentative di essi.

Io ho svolto il tirocinio curriculare in una Scuola Media di Bologna, affiancando un professore di Matematica; durante tale attività mi è stata data la possibilità di spiegare in una classe terza le nozioni introduttive sui solidi geometrici più semplici, fino alla verifica della Formula di Eulero per alcuni poliedri. Seguendo lo stile proposto da Lakatos in [9], proviamo ora ad impostare un'ipotetica lezione in una terza media riguardante i solidi e la Formula di Eulero, alla luce della mia personale esperienza durante il tirocinio curriculare e degli studi eseguiti nei precedenti capitoli di questo lavoro di tesi. Ci aiutiamo con le considerazioni riportate da Villani in [13] e alcuni libri di testo proposti attualmente nella Scuola Media Inferiore da A. Mondadori Scuola in [14] e Zanichelli in [15].

4.1 Un'ipotetica lezione

Supponiamo che in classe siano già stati affrontati gli argomenti relativi alla geometria piana e che quindi i ragazzi abbiano familiarità con le nozioni di punto, retta, piano, angolo e poligono (lati e vertici). Supponiamo inoltre che nelle ultime lezioni siano state affrontate le proprietà fondamentali dello spazio, importanti al fine di capire le future osservazioni riguardanti i solidi geometrici.

Il problema della geometria dello spazio è costituito dalla difficoltà che tutti abbiamo a rappresentare sia mentalmente, sia figurativamente gli oggetti a tre dimensioni. Ciò che possiamo disegnare su un foglio è solamente una proiezione della realtà spaziale e ciò pone un doppio problema: primo, per il disegnatore, trovare una proiezione che non nasconda, ma anzi metta in evidenza i punti nevralgici di una situazione tridimensionale; secondo, per il lettore, interpretare correttamente ciò che è stato disegnato. Ancora più difficile è possedere e/o sviluppare un'appropriata intuizione spaziale per poter affrontare e risolvere problemi tridimensionali.

Per aiutarci possiamo utilizzare modellini tridimensionali di poliedri di

Figura 4.1: Modellini dei solidi. Fonte Internet

varie forme e con differenti caratteristiche come quelli in Figura 4.1, e far vedere attraverso la lavagna interattiva multimediale (ormai presente in tutte le scuole) alcuni esempi di solidi ricreati con software multimediali come "Cabri 3D", "Rhino", ecc., facendoli ruotare per poterli osservare da vari punti di vista. A differenza delle figure piane, cambiando angolazione cambia la parte di solido visibile, e non riusciamo a cogliere contemporaneamente ogni punto del corpo; se consideriamo ad esempio un cilindro, osservandolo dall'alto vediamo un cerchio, se invece lo guardiamo da un lato, cioè poniamo il viso parallelo ad esso ed alla medesima altezza, vediamo una figura simile ad un rettangolo. È molto importante far capire questo agli studenti, per aiutarli a ricrearsi poi nella loro immaginazione un qualsiasi oggetto solido e a comprendere più in profondità come sono costruiti; per questo i software menzionati possono essere molto utili.

Su uno stesso foglio disegniamo un poligono e contemporaneamente appoggiamo uno qualsiasi dei modellini precedentemente descritti, chiediamo agli studenti che differenza c'è tra le due figure, ed avviamo una discussione pilotata in merito. Probabilmente alcune considerazioni saranno:

- "*La prima figura è un poligono e la seconda è un solido.*"
- "*Mentre uno sta tutto dentro al foglio, l'altro fuoriesce.*"
- "*Il primo ha due dimensioni e il secondo invece tre.*"

Tutte considerazioni corrette ma non esaurienti, comunque importanti. In effetti ciò che ci interessa far notare, e a cui in parte le loro conoscenze intuitive li hanno condotti, è che la seconda figura geometrica occupa una porzione dello spazio, ed è definibile da tre grandezze: altezza, lunghezza e profondità; questa è la caratteristica fondamentale di ogni corpo solido.
A questo punto sottoponiamo loro diversi oggetti presi dalla classe, come ad esempio un astuccio, un diario, un gessetto della lavagna, un pennarello ed un banco e chiediamo di suddividerli in due categorie, in base alle caratteristiche che secondo loro li differenziano maggiormente. Sempre guidando la discussione vogliamo far notare che vi sono corpi delimitati solo da poligoni - che sono i **poliedri** - ed altri da superfici almeno in parte di altro tipo, i **solidi rotondi**. Tutto questo lavoro che sembra a primo impatto pesante e soprattutto inutile è però necessario, in quanto permette agli studenti di imparare ad osservare e ad ordinare le considerazioni ottenute. Queste riflessioni permettono di capovolgere la tradizionale sequenza:

definizioni - enunciati dei teoremi - loro dimostrazioni - esempi

individuando preliminarmente le tematiche che si intendono affrontare.
È di dovere spiegare che sebbene la definizione corrente di poliedro sia di un solido, per poter svolgere il lavoro che inizieremo da questo momento è necessario parlare di poliedri come superfici. Introduciamo gli elementi da cui è formato un poliedro:

- avendolo definito (da ora) come superficie delimitata da poligoni, i primi elementi sono proprio tali poligoni, chiamati facce;

- due facce si incontrano sempre lungo due lati, essi sovrapponendosi formano lo spigolo del poliedro,

- i punti in cui almeno tre facce si incontrano sono i vertici.

Un approccio attraverso i modellini permette agli studenti di vedere e capire tali proprietà.
Sarebbe interessante, come propone Lakatos, discutere sulla nozione di poliedro,

e prima ancora di poligono, proponendo esempi, ma dobbiamo ricordarci che stiamo lavorando con ragazzi di 12 anni ad un livello scolastico relativamente basso (anche se cercheremo ad invogliarli ad approfondire i ragionamenti e le osservazioni). Proprio per questo un certo rigore e delle definizioni chiare sono per loro importanti: certo è utile partire da esempi, ma nel corso della lezione bisogna fornire definizioni ed enunciati di teoremi.
A questo proposito soffermiamoci un momento su un tema già considerato, centrale nella trattazione di Lakatos, ma che merita un'ulteriore sottolineatura. È molto difficile, se non impossibile, codificare la nozione di poliedro mediante una definizione appropriata a tutte le circostanze nelle quali tale termine viene usato. Sarebbe inopportuno dare definizioni troppo generali di "poliedro"(o di qualsiasi altro ente matematico) se si prevede di farne uso solo in casi molto particolari; sarebbe altrettanto inopportuno limitarsi a darne definizioni troppo restrittive se si prevede di avere a che fare con casi che non rientrerebbero nelle definizioni date. Ricorrendo a due metafore utilizzate da Villani in [13, p. 244], nel primo caso sarebbe come usare un cannone per ammazzare una mosca, nel secondo caso come usare un cucchiaino per prosciugare il mare.
Ritornando alla lezione, dopo aver introdotto la nozione di poliedro, enunciamo loro la nozione di poliedro "regolare":

- Tutte le facce devono essere poligoni regolari;
- tutte le facce sono congruenti tra loro;
- in ogni vertice concorre lo stesso numero di facce.

Tutte e tre le condizioni sono necessarie in quanto, omettendone anche una sola, si trovano ulteriori tipi di poliedri che non vengono chiamati regolari. È il caso visualizzato in Figura 4.1, immagine n) che pur avendo come facce dei triangoli equilateri tutti uguali tra loro, ha vertici nei quali concorrono a volte quattro facce e a volte tre, e quindi abbiamo si un poliedro, ma "irregolare". Invece i poliedri f), g), h), i), l) e m) di Figura 4.2 hanno facce regolari e concorrenti in egual numero in tutti i vertici, ma che sono di due o più tipi.

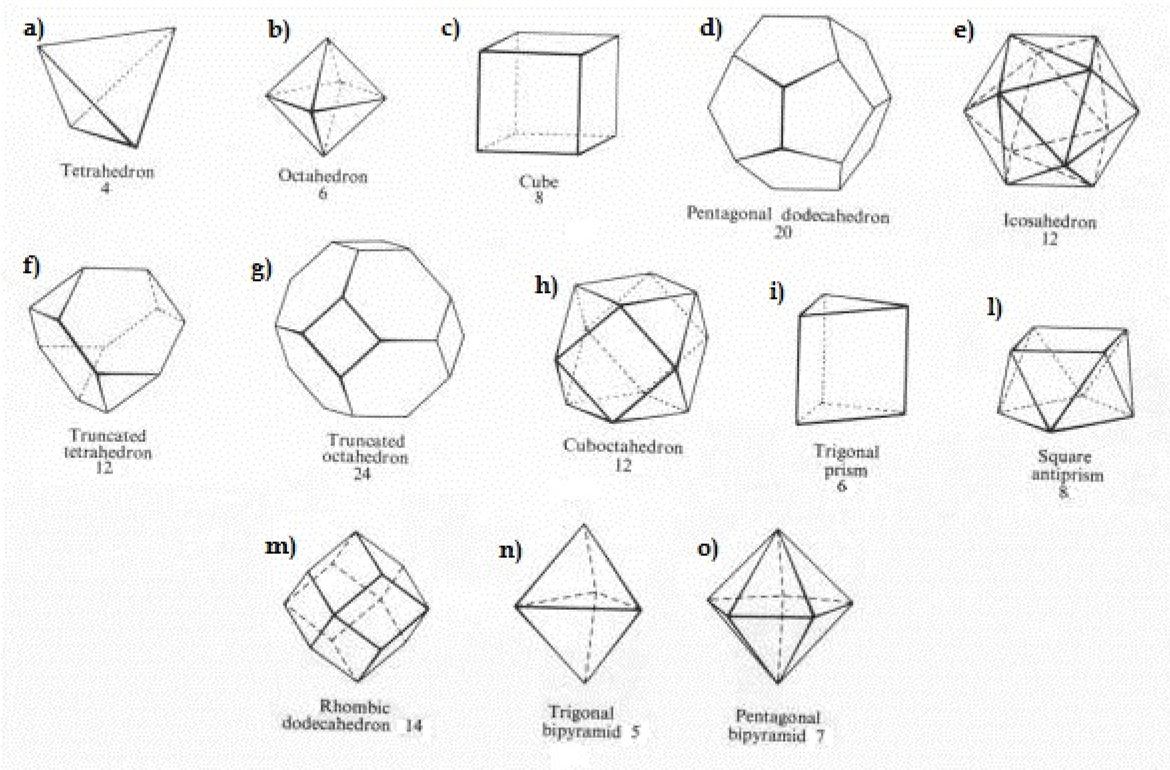

Figura 4.2: Diversi solidi. Fonte Internet

Nell'immagine 4.2, sotto ad ogni figura viene specificato il rispettivo nome e il numero dei vertici.

Infine la Figura 4.3 ha facce tutte uguali e concorrenti nello stesso numero in tutti i vertici, ma che non sono poligoni regolari.

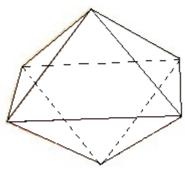

Figura 4.3: Ottaedro 'irregolare'

Esistono solo cinque poliedri regolari (sarebbe il caso di specificare convessi), che sono:

- **tetraedro**, formato da 4 facce triangolari;
- **cubo**, 6 facce quadrate;
- **ottaedro**, 8 facce triangolari;
- **dodecaedro**, 12 facce pentagonali;
- **icosaedro**, 20 facce triangolari.

Li possiamo osservare nei primi cinque poliedri di Figura 4.2.

Bello e utile sarebbe far vedere gli sviluppi piani di queste figure: sarebbe così più facile notare che rispettano tutte le caratteristiche richieste per un poliedro regolare. A partire da questi sviluppi si può ricostruire il poliedro ″incollando‟tra loro i lati delle coppie di facce che in tale ricostruzione danno luogo ad un unico spigolo del poliedro.

Facciamo osservare alcuni modellini, sia regolari che non, e chiediamo di contare il numero di facce, spigoli e vertici dei poliedri, catalogandoli in una tabella del tipo:

POLIEDRO	N. FACCE	N. VERTICI	N. SPIGOLI
cubo	6	8	12
ottaedro	10	16	24
tetraedro	5	6	9
prisma pentagonale	7	10	15
piramide base quadrata	5	5	8
piramide base ottagonale	9	9	18

Dopo i primi tre esempi chiediamo se esiste una relazione che lega il numero di facce (che indicheremo con **F**), di spigoli (**S**) e di vertici (**V**) in ognuno di essi. Probabilmente verranno osservate inizialmente relazioni del tipo $2F = V - 4$, quindi vediamo se si verificano negli altri casi della tabella. Nella lezione che ho effettivamente tenuto, gli studenti sono riusciti a notare la Formula di Eulero dopo che era stata loro presentata la piramide a base ottagonale; ma comunque, bisogna cercare di condurre la discussione in modo che siano loro a trovare tale formula, e non noi insegnanti a mostrargliela.

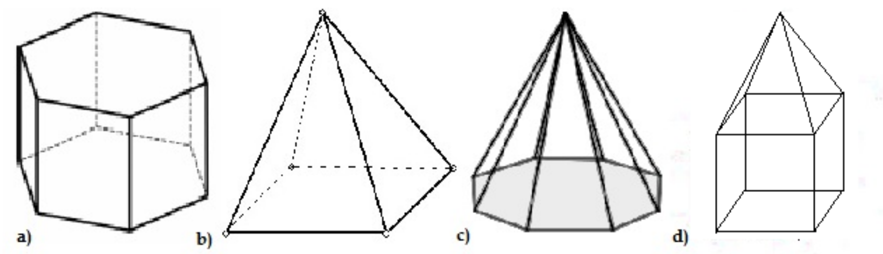

Figura 4.4: a)Prisma pentagonale, b)Piramide base quadrata, c)Piramide base ottagonale, d)Cubo sormontato da piramide. Fonte Internet

A questo punto possiamo mostrare ulteriori esempi in cui vale tale relazione:

POLIEDRO	N. FACCE	N. VERTICI	N. SPIGOLI
cubo sormontato da piramide	9	9	16
dodecaedro	12	20	30
icosaedro	20	12	30

Poi bisogna far capire che non basta che una relazione valga per qualche esempio affinchè sia verificata in generale; a tal fine presentiamo poliedri ″non euleriani‟, come quelli in Figura 3.4, in modo da far vedere che esistono dei casi in cui la formula non vale.

POLIEDRO	N. FACCE	N. VERTICI	N. SPIGOLI
Fig. 3.4 a)	16	16	32
Fig. 3.4 b)	11	16	24

Perchè per tali poliedri non vale la relazione di Eulero?
Si introduce una nuova problematica sulla quale vale la pena far riflettere gli studenti, di qualunque classe. Se infatti uscissero dalla scuola media avendo acquisito tale concezione sarebbe una grande conquista, maggiore di tante nozioni e proprietà imparate a memoria nel corso dei tre anni. Tale prob-

lematica è proprio che uno, due, cento esempi non bastano ad affermare che una relazione, un teorema o una proposizione sono veri sempre, occorre una dimostrazione che affermi la veridicità di quanto espresso dagli esempi, e che ci consenta di determinare il dominio di validità della congettura.
Quindi chiediamo a loro di suggerire per quali solidi tale formula sarà verificata e per quali no. Dando loro la nozione di "poliedro convesso", per il quale cioè ogni piano passante per una faccia ha in comune con esso solo i punti appartenenti a quella faccia, li si informa che per ognuno di questi particolari corpi la relazione di Eulero è verificata: si forniscono ulteriori esempi per i quali la formula risulta vera senza dare una dimostrazione.
Lasciamo poi il dubbio se esistono altri poliedri per i quali la relazione vale.

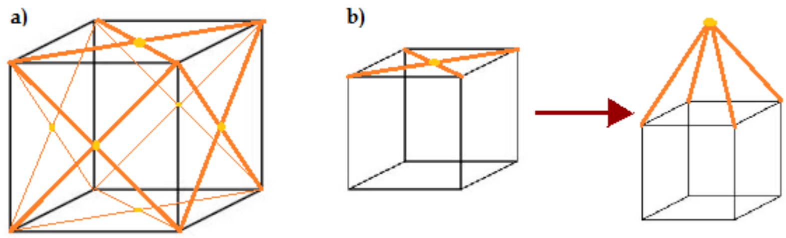

Figura 4.5

Possiamo proporre agli studenti un piccolo gioco: tracciamo le diagonali in ognuna delle facce di un cubo come in Figura 4.5 a), e contiamo di nuovo il numero di spigoli, di vertici e di facce. Si nota che nuovamente è verificata la Formula di Eulero, concludendo che quindi ciò che conta ai nostri fini è proprio la struttura della superficie poliedrica, cioè le relazioni reciproche di facce, spigoli e vertici.
Invece un cubo con solo la faccia superiore diagonalizzata (vedi Figura 4.5 b)) ha la stessa struttura di un cubo sormontato da una piramide: se "alziamo" il punto di incontro delle diagonali, queste "salgono" e creiamo la nuova figura.

Ci lasciamo con una riflessione di Villani in [13, pp. 279, 280]:
"Il teorema di Eulero è un bell'esempio di come un intero settore della ma-

tematica - in questo caso la topologia - è nato e si è sviluppato passando attraverso le varie fasi descritte e analizzate con grande efficacia da Lakatos: tutto inizia con l'osservazione di una relazione a prima vista insignificante fra le terne di numeri interi F, S, V associati a cinque particolari poliedri; ciò stimola un grande matematico alla formulazione di una congettura di portata più ampia. Un'analisi critica dei primi tentativi di dimostrazione della congettura mette in luce l'esistenza di controesempi con conseguente confutazione della congettura stessa. Ciò induce a precisare meglio i termini del problema (in primo luogo le definizioni) e ad articolare diversamente la congettura affinando nel contempo le tecniche dimostrative. Il prezzo da pagare è un inevitabile aumento del rigore formale a scapito dell'immediatezza intuitiva della formulazione iniziale."

Tutte queste considerazioni avrebbero scarso interesse se si riferissero solo al caso specifico della nascita della topologia a partire dalla Formula di Eulero per i poliedri. Invece Villani, sempre in [13] citando diversi esempi, suggerisce che si tratta di un percorso comune a tutti i settori della matematica: la probabilità nasce da un problema di giochi d'azzardo, e viene assiomatizzata solo dopo tre secoli, il calcolo infinitesimale nasce nel Seicento con l'obiettivo abbastanza circoscritto di determinare la misura di lunghezze, aree e volumi di particolari figure geometriche, mentre la nozione di limite (posta oggi a fondamento dell'intera teoria) viene formalizzata appena nell'Ottocento. La stessa geometria euclidea è una sistemazione organica di risultati geometrici in buona parte già noti ai matematici dei due secoli precedenti, e la revisione critica moderna della geometria euclidea ha avuto luogo solo dopo duemila anni.

Bibliografia

[1] Federico, P.J. *Descartes on Polyhedra, a Study of the De Solidorum Elementis*, 1982, Springer-Verlag

[2] Milhaud, G. "L'oeuvre de Descartes pendant l'hiver 1619-1620", *Scientia*, Vol. 23, (1918), pp. 1-8, 77-90

[3] Coxeter, H.S.M. *Introduction to Geometry*, 1969, John Wiley & Sons, Inc.

[4] Pólya, G. *Induction and Analogy in Mathematics*, 1954, Princeton University Press

[5] Prouhet, E. "Notice sur la partie mathématiques des Oeuvres inédites de Descartes", *Revue de l'Instruction Publique*, (1860), pp. 484-487

[6] Wilson, R.J. *Four Colors Suffice: How the Map Problem was Solved*, 2005, Princeton Paperbacks

[7] Pólya, G. "Guessing and Prooving", in *The Two-Year College Mathematics Journal*, Vol. 9, No. 1,(Jan. 1978), pp. 21-27, anche in http://www.jstor.org/stable/3026553

[8] Richeson D. *Euler's Gem: The Polyhedron Formula And The Birth Of Topology*, 2008, Princeton University Press

[9] Lakatos I. *Dimostrazioni e Confutazioni*, 1979, Feltrinelli Editore

[10] Francese, C. and Richeson, D. "The Flaw in Euler's Proof of His Polyhedral Formula", in *The American Mathematical Monthly*, Vol. 114, No. 4, (Apr. 2007), pp. 286-296, anche in http://www.jstor.org/stable/27642192

[11] Isaacson, D. "Proofs and Refutations: the Logic of Mathematical Discovery. By IMRE LAKATOS", in *The Philosophical Quarterly*, Vol. 28, No. 111, (Apr. 1978), pp. 169-171, anche in http://www.jstor.org/stable/2219364

[12] Larvor, B. *Lakatos: An Introduction*, 2004, Routledge

[13] Villani, V. *Cominciamo dal punto - Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perchè della Matematica (Geometria)*, 2006, Pitagora Editrice Bologna

[14] Rossi, G. *Con la Matematica - Geometria 3*, Edizione Digit, 2010, A. Mondadori Scuola

[15] Arpinati, A.M. and Musiani, M. *Matematica in azione - Geometria F*, Seconda edizione, 2011, Zanichelli

[16] *Enciclopedia Treccani*, voce Leibniz in http://www.treccani.it/enciclopedia/gottfried-wilhelm-von-leibniz/#loperamatematica-1

[17] *René Descartes. Pensare, quindi essere*, in http://www.biografieonline.it/biografia.htm?BioID=107&biografia=Ren%E9+Descartes

[18] Clinger R. *Leonhard Euler: vita e pensiero*, in http://matematica.unibocconi.it/articoli/leonhard-euler-vita-e-pensiero

[19] Magnanimo, A. *Imre Lakatos*, in http://www.filosofico.net/lakatos.htm

[20] *Obiettivi specifici per l'apprendimento* in http://archivio.pubblica.istruzione.it/ministro/comunicati/2004/allegati/all_c.pdf

Ringraziamenti

Desidero rigraziare il Prof. **Piero Plazzi** per l'aiuto ricevuto in questo lavoro di tesi, per la pazienza e la disponibilitá dimostrate. Inoltre desidero ringraziarla per i consigli e suggerimenti sempre molto utili.