Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Triennale in Matematica

GRUPPI TOPOLOGICI E LORO RIVESTIMENTI

Tesi di Laurea in Topologia Algebrica

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Rita Fioresi

Presentata da:
Emmanuel Gozzi

II Sessione
Anno Accademico 2012-2013

Introduzione

La tesi si compone di due capitoli. Nel primo vengono definiti i concetti principali della topologia algebrica: si danno le definizioni di spazio topologico, di funzione continua tra spazi topologici e di omeomorfismo. Si fa poi una analisi accurata del concetto di connessione in tutti suoi aspetti, comprendendo connessione per archi, connessione locale e l'idea di componente connessa. Il capitolo tocca poi gli argomenti centrali della topologia algebrica ovvero omotopia, gruppo fondamentale, rivestimenti e rivestimento universale, concludendosi con lo studio del rivestimento universale della circonferenza.
La trattazione prevede numerosi esempi, sempre molto utili per una migliore comprensione degli argomenti esposti.

Il secondo capitolo rappresenta il nocciolo di questo lavoro.
Comincia infatti con la definizione e lo studio delle principali proprietà dei gruppi topologici, per poi affrontare lo studio del rivestimento di un gruppo topologico: in particolare, si osserva che tale rivestimento è a sua volta un gruppo topologico e che ogni gruppo rivestito da un dato gruppo G è della forma G/N, ove N è un sottogruppo normale centrale di G.
Tutto ciò, unito ad altri risultati di notevole interesse porterà alla definizione del *gruppo di rivestimento universale*.
Nell'ultima sezione, infine, andremo ad applicare le conoscenze acquisite, analizzando nel dettaglio il legame tra il *gruppo speciale unitario* $SU(2)$ ed il *gruppo speciale ortogonale* $SO(3, \mathbb{R})$. Dimostreremo infatti che, dotato dell'opportuna mappa di rivestimento, $SU(2)$ è il gruppo di rivestimento

universale di $SO(3,\mathbb{R})$, risultato di straordinaria importanza anche al di fuori della matematica pura.

Indice

Elenco delle figure

Capitolo 1

Spazi topologici: connessione e rivestimento

Il concetto di spazio topologico nasce dallo studio delle proprietà della retta reale e dalla necessità di formalizzare il concetto di funzione continua, tuttavia la definizione come noi la conosciamo è stata formulata solo all'inizio del '900, grazie al lavoro di matematici come Fréchet, Hausdorff, Kuratowski e tanti altri. La loro opera ha portato alla seguente formulazione, fondata sul concetto di *topologia*.

Definizione ed esempi

Definizione 1.1. Dato un insieme X, si dice *topologia* su X la famiglia T di sottoinsiemi di X per cui valgono le seguenti proprietà:

- $\emptyset$ e $X \in T$
- l'intersezione finita elementi di T appartiene a T
- l'unione (anche infinita) di elementi della famiglia appartiene a T.

Gli insiemi appartenenti ad una tale famiglia si dicono *aperti.* In un modo simile, si può definire la topologia partendo dai complementari degli aperti,

ovvero i *chiusi*.
Alcuni esempi di topologie spesso portati sono la topologia discreta, in cui ogni possibile sottoinsieme è aperto; la topologia banale (o concreta) in cui gli unici aperti sono l'insieme stesso e quello vuoto; o ancora la topologia dei complementari finiti, data da X, da $\emptyset$ e da tutti quei sottoinsiemi il cui complementare è finito.
Definiamo uno *spazio topologico* come la coppia (X, T) in cui X è l'insieme di supporto e T la topologia che ne determina gli aperti.
Di notevole importanza sono gli spazi topologici definiti a partire da uno spazio metrico (ovvero spazi su cui è definita una *funzione distanza*): in tal caso la topologia si dice *metrica* e lo spazio topologico viene detto *metrizzabile*.
Un esempio fondamentale è senza dubbio la coppia formata da $\mathbb{R}^n$ e dalla metrica euclidea.

Prossimo passo nello studio degli spazi topologici sarà andare a vedere come essi si relazionano fra loro e, di conseguenza, come definire le funzioni continue e gli *omeomorfismi*, ovvero quelle funzioni che formalizzano il concetto di deformazione senza strappi.

Definizione 1.2. Una funzione $f : X \to Y$ fra due spazi topologici si dice *continua* se la preimmagine di ogni aperto di Y è aperta in X.

Osservazione 1.3. Similmente, possiamo caratterizzare una funzione come continua se la preimmagine di ogni chiuso è chiusa.

Definizione 1.4. Siano X e Y due spazi topologici; essi sono *omeomorfi* se esiste una funzione da X a Y continua, biettiva, con inversa continua. Tale funzione è detta *omeomorfismo*.

Connessione e connessione per archi

Dalla definizione di omeomorfismo si evince che se due spazi X e Y sono omeomorfi tramite la mappa f, allora un sottoinsieme U di X è aperto se

e solo se $f(U)$ è aperto in Y. Ciò significa che qualsiasi proprietà espressa unicamente in termini della topologia (ovvero in termini di insiemi aperti) si riflette automaticamente in ogni spazio topologico omeomorfo.
Questo tipo di proprietà sono dette *proprietà topologiche*. Tra queste proprietà, dette anche *invarianti topologici*, andremo a studiarne due in particolare, ovvero *connessione* e *connessione per archi*, entrambe fondamentali anche in altri ambiti della matematica come l'analisi o la geometria algebrica (classico l'esempio del teorema del valore intermedio, basato sulla connessione degli intervalli reali) e che ci saranno molto utili in seguito.

Definizione 1.5. Uno spazio topologico X si dice *connesso* se i soli sottoinsiemi di X simultaneamente aperti e chiusi sono $\emptyset$ e X.

Dalla definizione appena data si ricava abbastanza velocemente il seguente teorema. Invitiamo il lettore a consultare [K, cap.9] per maggiori dettagli.

Teorema 1.6. *Uno spazio X è connesso se e solo se X non è unione di due aperti disgiunti non vuoti.*

Esempio 1.7. L'intervallo $[a, b] \in \mathbb{R}$ è connesso. Intuitivamente, possiamo cogliere come non sia possibile rappresentarlo come unione di aperti disgiunti ma rimandiamo al [K, teorema 9.3] per una dimostrazione completa.

Esempio 1.8. $S^0 = \{\pm 1\} \in \mathbb{R}$ con la topologia indotta dalla topologia naturale di $\mathbb{R}$ (ma anche con la topologia discreta) non è connesso perchè $\{-1\}$ è un sottoinsieme aperto e chiuso di S^0 o in quanto S^0 è unione disgiunta dei sottoinsiemi aperti $\{-1\}$ e $\{1\}$.

Esempio 1.9. Il sottospazio $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}$ non è connesso. Anzi, è *totalmente sconnesso*: al suo interno, infatti, gli unici sottoinsiemi connessi sono quelli formati da un solo punto. Se consideriamo un sottospazio Y di $\mathbb{Q}$ contenente i punti p e q, è possibile scegliere un irrazionale a giacente tra p e q e scrivere Y come l'unione dei due aperti:

$$Y \cap (-\infty, a) \quad \text{e} \quad Y \cap (a, +\infty)$$

Teorema 1.10. *L'immagine di uno spazio connesso tramite un'applicazione continua è connessa.*

Dimostrazione. Supponiamo che X sia connesso e che $f\colon X \to Y$ sia continua e suriettiva. Se un sottoinsieme U di Y fosse simultaneamente aperto e chiuso, allora $f^{-1}(U)$ sarebbe aperto e chiuso in X in quanto f è continua. Avremmo allora che $f^{-1}(U) = \emptyset$ oppure $f^{-1}(U) = X$ essendo X connesso. Ne seguirebbe che, data la suriettività di f, $U = \emptyset$ oppure $U = Y$; ciò implica che Y è connesso. □

Corollario 1.11. *Siano X e Y due spazi topologici omeomorfi, allora X è connesso se e solo se Y è connesso.*

Esempio 1.12. Grazie al teorema sopra esposto si deduce che la circonferenza S^1 è connessa in quanto immagine dell'intervallo connesso $[0, 1]$ tramite l'applicazione continua $f(t) = e^{2\pi it}$.

Teorema 1.13. *L'unione di una famiglia di sottospazi connessi di X che abbiano almeno un punto in comune è connessa.*

Dimostrazione. Siano $\{Y_j \mid j \in J\}$ tale famiglia ed $Y = \bigcup_{j\in J} Y_j$. Sia poi U un sottoinsieme non vuoto di Y simultaneamente aperto e chiuso. Si avrà allora $U \cap Y_i \neq \emptyset$ per qualche $i \in J$ e $U \cap Y_i$ è simultaneamente aperto e chiuso in Y_i; ma Y_i è connesso e quindi $U \cap Y_i = Y_i$, ossia $Y_i \subseteq U$. Poichè l'insieme Y_i interseca ogni altro Y_j, anche U intersecherà ogni altro Y_j e, ripetendo il ragionamento, si deduce che U contiene ogni Y_j, e quindi $U = Y$. □

Andiamo ad analizzare ora la nozione di *connessione per archi*. Definiamo prima di tutto il concetto di arco o cammino.

Definizione 1.14. Dati X spazio topologico, $x, y \in X$ ed $[a, b]$ intervallo di $\mathbb{R}$, si dice *arco* con punto iniziale x e punto finale y è un'applicazione continua $f\colon [a, b] \to X$ tale che $f(a) = x$ e $f(b) = y$. Generalmente si utilizza l'intervallo $[0, 1] \in \mathbb{R}$.

Lemma 1.15. *Due archi possono essere incollati se il punto finale di uno coincide col punto iniziale dell'altro ed il prodotto finale risulta essere sempre un arco.*

Definizione 1.16. Uno spazio X si dice *connesso per archi* se, comunque dati due punti x e y in X, esiste un arco in X da x a y.

Esempio 1.17. $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea è connesso per archi: infatti, data una coppia di punti $a, b \in \mathbb{R}^n$, la funzione $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ definita da $f(t) = tb + (1-t)a$ è un arco in $\mathbb{R}^n$ che connette a e b.

Come nel caso della connessione, anche per gli spazi connessi per archi valgono alcuni teoremi analoghi a 1.10, 1.11, 1.13, la cui dimostrazione ricalca quella vista.

Teorema 1.18. *L'immagine di uno spazio connesso per archi tramite una funzione continua è connessa per archi.*

Corollario 1.19. *Siano X e Y due spazi omeomorfi, allora X è connesso per archi se e solo se Y è connesso per archi.*

Teorema 1.20. *L'unione di una famiglia di sottoinsiemi connessi per archi con intersezione non vuota è connessa per archi.*

Ci chiediamo a questo punto, come spesso accade in matematica quando si introducono nozioni simili, se la connessione per archi sia equivalente alla connessione.
La risposta è negativa, tuttavia abbiamo senz'altro una implicazione.

Teorema 1.21. *Ogni spazio connesso per archi è connesso.*

Dimostrazione. Supponiamo che X (connesso per archi) sia formato dall'unione di due aperti non vuoti U e V; essendo X connesso per archi, esiste una arco $f\colon [0,1] \to X$ tale che $f(0) \in U$ e $f(1) \in V$. Poichè $[0,1]$ è connesso, anche $f([0,1])$ deve esserlo e quindi $f([0,1]) \cap U$ e $f([0,1]) \cap V$ non possono essere disgiunti; ma allora nemmeno U e V sono disgiunti e quindi X è connesso. $\square$

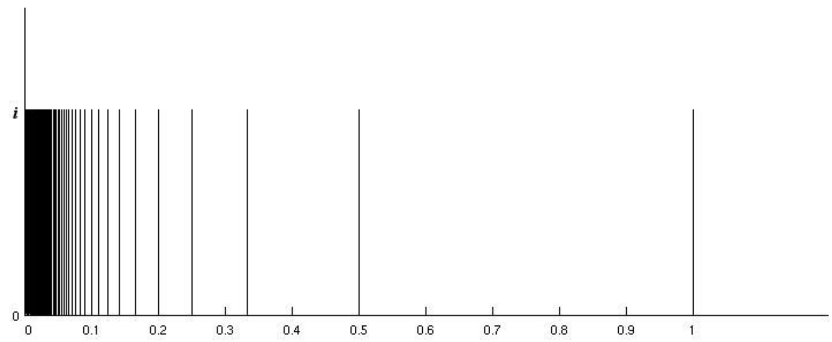

Figura 1.1: pulce e pettine

L'implicazione contraria non vale e vi sono diversi controesempi che lo provano. Ne citiamo due tra i più conosciuti.

Esempio 1.22. Noto come *la pulce e il pettine*, il seguente sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{C}$ è definito da $A \cup B$ dove:

- $A = \{i\}$
- $B = [0,1] \cup \{1/n + yi \mid n \in \mathbb{N}, 0 \leq y \leq 1\}$

X è connesso in quanto contenuto nella chiusura di B che è connessa essendo B connesso. Tuttavia non è connesso per archi e ciò è dimostrabile provando che l'unico arco in X con punto iniziale i è l'arco costante.

Esempio 1.23. Il seguente caso, detto anche *seno del topologo*, considera il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ dato dalla chiusura di $S = \{x \times \sin(1/x) \mid 0 < x \leq 1\}$, ovvero dall'unione tra S ed il segmento verticale $0 \times [-1,1]$ (vedi figura 1.2). In un modo non dissimile dall'esempio 1.22, si prova che tale insieme è connesso ma non connesso per archi.

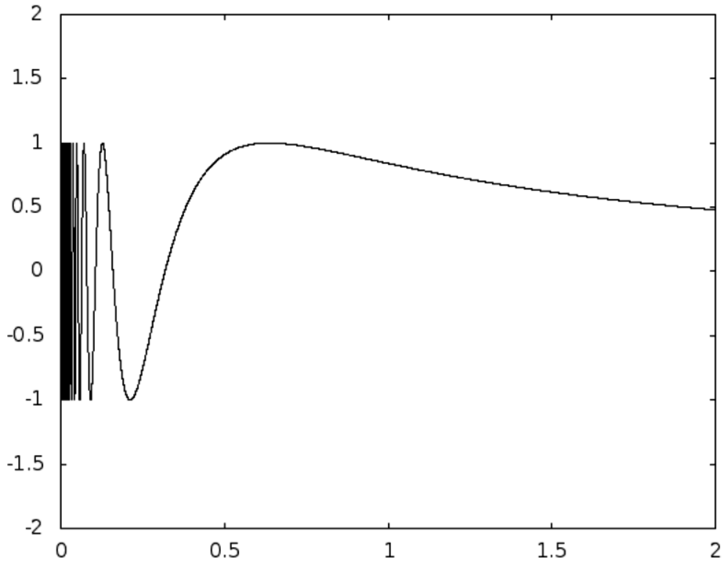

Figura 1.2: seno del topologo

Componenti e locale connessione

Le proprietà viste finora sono fondamentali nello studio di uno spazio topologico, ma a volte risulta più importante che uno spazio le soddisfi a livello locale. Analizziamo quindi i concetti di *componente* e di spazi *localmente connessi*.

Definizione 1.24. Dato un punto x in uno spazio topologico X, la *componente connessa* di x è il più grande sottoinsieme connesso di X contenente x. In particolare X è connesso se e solo se presenta una sola componente connessa.

Osservazione 1.25. Il concetto di componente è decisivo: due spazi omeomorfi, infatti, devono presentare lo stesso numero di componenti connesse e tale osservazione può essere sfruttata nel determinare l'eventuale esistenza di omeomorfismi tra due spazi.

Vediamo alcuni esempi di componenti connesse.

Esempio 1.26. Consideriamo $X = \mathbb{R} \setminus \{a\}$, $a \in \mathbb{R}$: questo spazio presenta due componenti connesse: $(-\infty, a)$ e $(a, +\infty)$.

Esempio 1.27. In $\mathbb{Q}$ le uniche componenti connesse sono i punti.

Definizione 1.28. Uno spazio X si dice *localmente connesso* in x se, per ogni intorno U di x, esiste un intorno connesso V di x contenuto in U. Se X è localmente connesso in ognuno dei suoi punti, è detto localmente connesso.

In modo analogo si definiscono le componenti connesse per archi e gli spazi localmente connessi per archi.

Teorema 1.29. *Uno spazio X è localmente connesso se e solo se per ogni aperto U di X, ciascuna componente connessa di U è un aperto di X.*

Dimostrazione. Supponiamo che X sia localmente connesso. Siano poi U un aperto di X e C una componente connessa di U. Se x è un punto di C, possiamo scegliere un intorno V di x tale che $V \subset U$. Essendo V connesso, esso deve giacere interamente nella componente C di U. Ne segue che C è aperto in X.
Al contrario, supponiamo che le componenti connesse degli aperti di X siano aperte. Dato un punto $x \in X$ ed un intorno U di x, sia C la componente di U contenente x. Ora, C è connessa ed essendo aperta in X per ipotesi, X è localmente connesso in x. □

Teorema 1.30. *Se X è uno spazio topologico, ogni componente connessa per archi di X è inclusa in una componente connessa. Inoltre, se X è localmente connesso per archi, le due tipologie di componenti diventano identiche.*

Gli esempi di seguito mostrano come non valga l'implicazione connesso $\Rightarrow$ localmente connesso.

Esempio 1.31. Consideriamo $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1],\ y = f(x)\}$, dove

$$f(x) = \begin{cases} sin(\frac{1}{x}) & \text{se } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

È chiaro che X è connesso in quanto incluso nella chiusura di $Y = X \setminus \{(0,0)\}$, che è connesso. Tuttavia non è localmente connesso in quanto, per ϵ piccolo ad arbitrio, l'intorno di $(0,0)$ di raggio ϵ risulta sconnesso.

Omotopia, gruppo fondamentale e semplice connessione

Prima di passare ai rivestimenti e successivamente ad una loro applicazione ai gruppi topologici, punto focale di questo lavoro, forniremo una breve panoramica sulla teoria del gruppo fondamentale, partendo dal concetto di omotopia per arrivare a quello di semplice connessione, che ci tornerà utilissimo nel secondo capitolo. Non entreremo nei dettagli della trattazione, che potrà essere approfondita su [K, cap.13, 14, 15] e [M, cap.9].

Definizione 1.32. Consideriamo due mappe continue f e g dallo spazio X in Y e $I = [0,1]$. Diciamo che f è *omotopa* a g se esiste una mappa continua $F\colon X \times I \to Y$ tale che

$$F(x,0) = f(0) \quad \text{e} \quad F(x,1) = g(1)$$

per ogni $x \in X$. La mappa F è detta *omotopia* tra f e g e si scrive $f \simeq g$.

Dalla definizione possiamo quindi cogliere come l'omotopia altro non sia che una deformazione continua da una mappa all'altra. Il nostro obiettivo sarà però studiare una relazione più forte dell'omotopia, ovvero l'omotopia relativa ad un sottospazio, definita come un'omotopia che mantiene fissi gli elementi di un determinato sottospazio. In particolare, studieremo solo i casi in cui $X = I$, ovvero il caso in cui le funzioni siano archi con dominio l'intervallo $[0,1]$, punto iniziale x_0 e punto finale x_1 e in cui le omotopie manterranno fissi gli elementi di $\{0,1\} \subset I$. In tal modo, punto iniziale e finale degli archi rimarranno fissi (fig. 1.2). Segue una definizione formale.

Definizione 1.33. Due cammini f e g continui, da I in X, sono omotopi relativamente all'insieme $\{0,1\}$ se esiste una funzione $F\colon I \times I \to X$ tale per cui

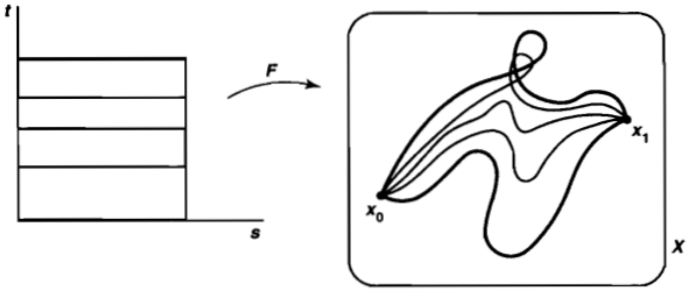

Figura 1.3: omotopia tra due cammini

$$F(s,0) = f(s) \quad \text{e} \quad F(s,1) = g(s),$$
$$F(0,t) = x_0 \quad \text{e} \quad F(1,t) = x_1.$$

Si prova che la relazione descritta è una relazione di equivalenza e che questa induce una relazione di equivalenza fra spazi topologici: due spazi sono detti *omotopicamente equivalenti* se esistono due funzioni continue $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to X$ tali che

$$gf \simeq 1, \qquad fg \simeq 1.$$

In tal caso le applicazioni f e g sono chiamate equivalenze omotopiche. Gli spazi che risultano omotopicamente equivalenti ad un punto sono detti *contraibili.*

Tra due cammini f e g, in uno spazio X è possibile anche definire un prodotto che sia compatibile con la relazione di omotopica equivalenza. Grazie anche al lemma di incollamento, è sufficiente che $f(1) = x_1 = g(0)$ ed il loro prodotto $h = f * g$ potrà essere definito come:

$$h(t) = (f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{se } 0 \le t \le 1/2, \\ g(2t-1) & \text{se } 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

Questa operazione sui cammini induce un prodotto sulle classi di equivalenza omotopica. Si prova infatti che $[f] * [g] = [f * g]$.
Il prodotto sulle classi così definito possiede ottime proprietà: è associativo ed esiste sempre un arco che possa dare come risultato l'identità destra o

sinistra (un elemento neutro):

$$[\epsilon_{x_0}] * [f] = [f] \qquad [f] * [\epsilon_{x_1}] = [f]$$

dove ϵ_{x_i} altro non è che l'arco costante nel punto x_i. Inoltre è possibile verificare che, considerando l'arco percorso in senso inverso $\bar{f}(t) = f(1-t)$, si ha:

$$[f] * [\bar{f}] = [\epsilon_{x_0}] \qquad [\bar{f}] * [f] = [\epsilon_{x_1}].$$

Quindi la classe di $[\bar{f}]$ rappresenta l'elemento inverso di $[f]$.

L'insieme delle classi di equivalenza degli archi di uno spazio (dove la relazione di equivalenza è l'omotopia relativa a $\{0, 1\}$) sembra soddisfare gli assiomi di gruppo. Tuttavia ciò non accade in quanto il prodotto tra classi non sempre è definito e l'elemento neutro non è lo stesso per tutte le classi. Per ovviare a questi ostacoli restringiamo l'insieme alle sole classi i cui elementi sono archi chiusi (lacci) con punto base $x \in X$.
Si prova che l'insieme delle classi di equivalenza degli archi chiusi di base il punto $x \in X$ con l'operazione sopra definita è un gruppo, detto *gruppo fondamentale* o *primo gruppo di omotopia* di X con punto base x e denotato con $\pi_1(X, x)$.

Nella topologia algebrica, il passaggio da uno spazio topologico al suo gruppo fondamentale è cruciale in quanto permette di associare oggetti topologicamente equivalenti (spazi omeomorfi) ad oggetti algebricamente equivalenti (gruppi isomorfi) e quindi dedurre risultati di interesse topologico a partire da conoscenze tipicamente algebriche. Vale infatti il seguente teorema, la cui dimostrazione si può trovare in [K, cap.15].

Teorema 1.34. *Dati X e Y spazi topologici omeomorfi dove $\varphi : X \to Y$ è un omeomorfismo tra i due spazi, allora*

$$\varphi_* \colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, \varphi(x))$$

$$\varphi_*[f] = [\varphi f]$$

è un isomorfismo di gruppi.

Importantissimo per l'utilizzabilità del gruppo fondamentale è inoltre la seguente implicazione: se due punti x_1 e x_2 appartenenti allo stesso spazio X sono collegabili tramite un arco, allora i i gruppi $\pi_1(X, x_1)$ e $\pi_1(X, x_2)$ sono isomorfi. Ciò significa che in uno spazio connesso per archi il gruppo fondamentale è unico a meno di isomorfismi. Tuttavia, tali isomorfismi sono indipendenti dall'arco solo nel caso in cui il gruppo fondamentale sia abeliano.

Terminiamo questa parentesi su omotopia e gruppo fondamentale dando un'importante definizione.

Definizione 1.35. Uno spazio topologico si dice *semplicemente connesso* se è connesso per archi e se $\pi_1(X, x) = \{1\}$ per qualche (e quindi per ogni) $x \in X$.

Osservazione 1.36. Il gruppo fondamentale di uno spazio contraibile è il gruppo banale, quindi ogni spazio contraibile è semplicemente connesso, ma non vale il viceversa.

Rivestimenti

Uno degli strumenti più potenti nell'ambito della topologia algebrica è sicuramente la teoria dei rivestimenti. Essa svolge un ruolo molto importante nello studio delle superifici di Riemann e delle varietà complesse, ma a noi interessa in relazione con il gruppo fondamentale di uno spazio, soprattutto nel caso di gruppi topologici. Ne studieremo quindi definizione e principali proprietà, per poi andare ad analizzare uno degli esempi più importanti: il rivestimento della circonferenza.

Definizione 1.37. Sia $p\colon \widetilde{X} \to X$ un'applicazione continua e suriettiva. Si dice che un aperto U di X è *uniformemente rivestito* da p se $p^{-1}(U)$ è unione disgiunta di sottoinsiemi aperti di $\widetilde{X}$, ognuno dei quali è omeomorfo ad U tramite p. Si dice che $p\colon \widetilde{X} \to X$ è un *rivestimento* se, per ogni $x \in X$, esiste un intorno aperto di x uniformemente rivestito da p; l'applicazione p viene detta *proiezione*, X *spazio base* e $\widetilde{X}$ *spazio totale*.

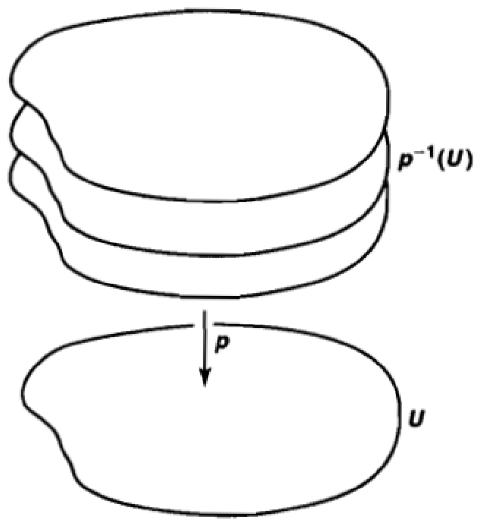

Figura 1.4: rivestimento di un aperto

Osservazione 1.38. Si noti che se $p\colon \widetilde{X} \to X$ è un rivestimento, allora per ogni $x \in X$ il sottospazio $p^{-1}(x)$ di $\widetilde{X}$ ha la topologia discreta. Infatti, ogni aperto di $\widetilde{X}$ interseca $p^{-1}(x)$ in un singolo punto, che quindi risulta essere aperto.

Teorema 1.39. *Se $p : \widetilde{X} \to X$ è un rivestimento, allora p è un'applicazione aperta e X ha la topologia quoziente relativa a p.*

Dimostrazione. Sia U un sottoinsieme aperto di $\widetilde{X}$, x un punto di $p(U)$ e V un intorno aperto di x uniformemente rivestito da p. Sia poi $\tilde{x}$ un punto di U tale che $x = p(\tilde{x})$, allora $\tilde{x} \in p^{-1}(V) = \bigcup_{j\in J} V_j$, e quindi $\tilde{x} \in V_j \cap U$ per qualche $j \in J$. Poichè $V_j \cap U$ è aperto in V_j e $p_{|V_j} : V_j \to V$ è un omeomorfismo, $p(V_j \cap U)$ è aperto in V e quindi in X. Inoltre $x = p(\tilde{x}) \in p(V_j \cap U) \subseteq p(U)$; abbiamo così trovato un intorno aperto di x contenuto interamente in $p(U)$, il che implica che $p(U)$ è aperto. Per quanto riguarda la seconda parte del teorema, poichè p è una suriezione continua e aperta, un sottoinsieme V di X è aperto in X se e solo se $p^{-1}(V)$ è aperto in $\widetilde{X}$. $\square$

Notazione 1.40. Per comodità di scrittura d'ora in avanti per indicare il rivestimento di X useremo la coppia $(\widetilde{X}, p)$.

Definizione 1.41. Dato uno spazio topologico X, un suo rivestimento $(\widetilde{X}, p)$ ed una funzione continua $f\colon Y \to X$. Si dice *sollevamento* di f una funzione continua $\widetilde{f}\colon Y \to \widetilde{X}$ tale che $p \circ \widetilde{f} = f$.
Nel caso in cui la funzione sia un cammino (arco) $f\colon I \to X$, diremo che $\widetilde{f}$ è un *sollevamento di cammini.*

Teorema 1.42 (Teorema di unicità del sollevamento)**.** *Sia* $(\widetilde{X}, p)$ *un rivestimento, e siano* $\widetilde{f}, \widetilde{f}'\colon Y \to \widetilde{X}$ *due sollevamenti di* $f\colon Y \to X$*. Se* Y *è connesso e* $\widetilde{f}'(y_0) = \widetilde{f}(y_0)$ *per un generico* $y_0 \in Y$*, allora* $\widetilde{f}(y) = \widetilde{f}'(y)\ \ \forall y \in Y$*.*

Dimostrazione. Sia Y' l'insieme dei punti sui quali $\widetilde{f}$ e $\widetilde{f}'$ coincidono, ovvero

$$Y' = \{y \in Y \mid \widetilde{f}(y) = \widetilde{f}'(y)\}.$$

Per ipotesi tale insieme è non vuoto in quanto y_0 gli appartiene. Essendo Y connesso, se dimostreremo che Y' è al contempo aperto e chiuso, dedurremo che $Y' = Y$ e quindi la tesi.

Siano $y \in Y$ e V un intorno aperto di $f(y)$ uniformemente rivestito da p; scriviamo $p^{-1}(V)$ come unione disgiunta $\bigcup_{j\in J} V_j$ dove V_j è aperto in $\widetilde{X}$ e $p_{|V_j}\colon V_j \to V$ è un omeomorfismo.
Se y appartiene a Y', il punto $\widetilde{x} = \widetilde{f}(y) = \widetilde{f}'(y)$ appartiene a V_k per qualche $k \in J$, quindi $\widetilde{f}^{-1}(V_k) \cap (\widetilde{f}')^{-1}(V_k)$ è un intorno aperto di y in quanto $\widetilde{f}^{-1}(V_k)$ e $(\widetilde{f}')^{-1}(V_k)$ sono aperti essendo preimmagine di aperti tramite una funzione continua. Vediamo ora che tale intorno è interamente contenuto in Y'.
Se $z \in \widetilde{f}^{-1}(V_k) \cap (\widetilde{f}')^{-1}(V_k)$, $\widetilde{f}(z)$ e $\widetilde{f}'(z)$ sono due punti di V_k, entrambi mandati in $f(y)$ da p; poiché $p_{|V_k}$ è iniettiva, ne segue che $\widetilde{f}(z) = \widetilde{f}'(z)$ ossia che $z \in Y'$. Ciò dimostra che Y' è aperto.

D'altro canto, se $y \notin Y'$, ragionando in modo analogo si deduce che $\widetilde{f}(y) \in V_k$ e che $\widetilde{f}'(y) \in V_l$, con $k \neq l$; di conseguenza $\widetilde{f}^{-1}(V_k) \cap (\widetilde{f}')^{-1}(V_l)$ è un intorno aperto di y, chiaramente contenuto nel complementare di Y'. Ciò dimostra che $Y \setminus Y'$ è aperto e quindi che Y' è chiuso. $\square$

Teorema 1.43. *Sia $(\widetilde{X}, p)$ rivestimento di X con $\widetilde{X}$ semplicemente connesso. Allora l'insieme $p^{-1}(x)$ è in corrispondenza biunivoca con il gruppo fondamentale di X.*

Dimostrazione. Sia $\widetilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)$ e definiamo $\varphi\colon \pi_1(X, x_0) \to p^{-1}(x_0)$ come $\varphi([f]) = \widetilde{f}(1)$, dove $\widetilde{f}$ è un sollevamento di f con $\widetilde{f}(0) = \widetilde{x_0}$. L'inversa $\psi\colon p^{-1}(x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ è definita come $\psi(\widetilde{x}) = [p \circ h]$ dove h è un arco in $\widetilde{X}$ da $\widetilde{x_0}$ a $\widetilde{x}$. ψ è ben definita, infatti due archi h e h' in $\widetilde{X}$ da $\widetilde{x_0}$ a $\widetilde{x}$ sono necessariamente equivalenti (essendo $\widetilde{X}$ semplicemente connesso), e quindi $p \circ h$ è equivalente a $p \circ h'$. $\square$

Definizione 1.44. Siano X spazio topologico e $(\widetilde{X}, p)$ un suo rivestimento. Se p riveste anche tutti gli altri possibili rivestimenti di X, viene detto *rivestimento universale* di X.

Teorema 1.45. *Se $\widetilde{X}$ è semplicemente connesso e ricopre X, allora $\widetilde{X}$ è il rivestimento universale di X.*

Dimostrazione. Se $\widetilde{X}$ è semplicemente connesso, il suo gruppo fondamentale sarà $\pi_1(\widetilde{X}, x_0) = \{1\}$, $x_0 \in \widetilde{X}$. Quindi, se esistesse un rivestimento di $\widetilde{X}$, questi gli sarebbe omeomorfo. Denominiamo con Y l'ipotetico spazio totale di $\widetilde{X}$ e con p il rivestimento. Dalla definizione di rivestimento e dai teoremi precedenti, sappiamo che p è suriettiva, aperta e che $p^{-1}(x_0)$ è in corrispondenza biunivoca con $\pi_1(\widetilde{X}, x_0)$. Ma $\pi_1(\widetilde{X}, x_0) = \{1\}$. Ciò significa che $p^{-1}(x_0)$ ha un solo elemento e quindi che p è iniettiva. Ne segue che il rivestimento ipotizzato è continuo, biettivo e aperto e quindi che è un omeomorfismo. $\square$

Osservazione 1.46. Condizione necessaria affinchè X abbia un rivestimento universale è che sia *localmente semplicemente connesso*, ovvero che ogni punto $x \in X$ sia contenuto in un aperto V tale per cui ogni laccio di base x contenuto in V è omotopo al laccio costante ϵ_x.

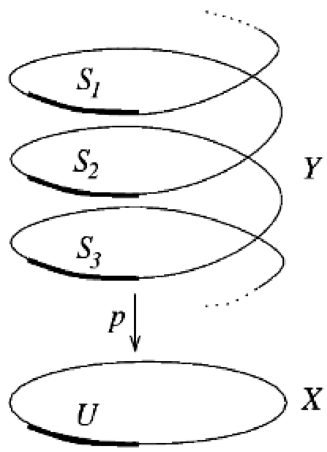

Figura 1.5: rivestimento della circonferenza

Si dimostra che uno spazio connesso per archi, localmente connesso per archi e localmente semplicemente connesso possiede un rivestimento universale.

Uno degli esempi più significativi nel quadro della teoria dei rivestimenti è senz'altro il calcolo del rivestimento universale della circonferenza, che esaminiamo nel seguente esempio.

Esempio 1.47. Consideriamo la mappa $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ definita da

$$p(x) = (cos(2\pi x), sin(2\pi x))$$

A livello intuitivo è possibile immaginare questa funzione come un avvolgimento della retta reale attorno alla circonferenza in cui ciascun intervallo $[n, n+1]$ viene mappato su S^1. Grazie alle proprietà delle funzioni seno e coseno, si dimostra che questa mappa è un rivestimento della circonferenza.

Dimostrazione. Per provarlo, consideriamo il sottoinsieme U di S^1 formato dai punti con prima coordinata positiva. Allora l'insieme $p^{-1}(U)$ consiste di tutti i punti x tali per cui $cos(2\pi x)$ è positivo, ovvero l'unione degli intervalli del tipo

$$V_n = (n - \tfrac{1}{4}, n + \tfrac{1}{4}), \text{ per ogni } n \in \mathbb{Z}.$$

Ora, restringendoci ad uno qualsiasi degli intervalli chiusi $\overline{V}_n$, notiamo che la mappa p è iniettiva, essendo il seno monotono in un intervallo di tale tipo. Inoltre, p manda $\overline{V}_n$ su $\overline{U}$ suriettivamente e V_n su U, per il teorema del valore intermedio. Essendo poi $\overline{V}_n$ un compatto, ne viene che p ristretta ad esso risulta essere un omeomorfismo. Ciò implica, in particolare, che V_n ed U siano omeomorfi. Simili argomentazioni possono essere applicate alle semicirconferenze aperte superiore, inferiore e sinistra. Questi aperti ricoprono S^1 ed ognuno di essi è completamente rivestito da p.
Essendo $\mathbb{R}$ contraibile e quindi semplicemente connesso, otteniamo che

$$(\mathbb{R}, p) \text{ è il rivestimento universale di } S^1.$$

$\square$

Capitolo 2

Gruppi topologici

I *gruppi topologici* sono un ottimo esempio di convivenza tra topologia ed algebra: essi presentano infatti al contempo due strutture, quella di spazio topologico e quella di gruppo, che interagiscono in modi non banali. Nella prima sezione andremo a vedere definizione, principali proprietà nonché alcuni esempi più importanti. Nella seconda andremo invece a studiare il rivestimento. Ci affideremo in particolare alle argomentazioni dei matematici Pontryagin e Varadarajan.

Definizione e proprietà

Definizione 2.1. Un gruppo topologico G è un gruppo dotato di una struttura di spazio topologico tale per cui la *moltiplicazione* tra due elementi e la mappa che ad elemento ne associa l'inverso, sono funzioni continue. Ovvero, è continua la funzione:

$$f\colon G \times G \to G, \quad f(x, y) = xy^{-1} \quad x, y \in G.$$

La topologia che consente la continuità delle operazioni definite sul gruppo topologico viene detta *topologia gruppale*. Possiamo quindi alternativamente definire un gruppo topologico come la coppia (G, τ) formata da un gruppo e da una topologia gruppale.

Osservazione 2.2. Dati due elementi x e y di G, la continuità dell'operazione di gruppo e della mappa che ad un elemento associa il suo inverso possono essere espresse anche mostrando che per ogni intorno W di xy^{-1}, esistono un intorno U di x ed un intorno V di y tali per cui $UV^{-1} \subset W$.

Molti sono gli esempi di gruppi topologici. In particolare, si prova che qualsiasi gruppo munito della topologia discreta (*gruppo discreto*) o di quella banale è un gruppo topologico. Altri esempi sono $(S^1, \cdot) \subset \mathbb{C}$, $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$ muniti dell'usuale topologia o ancora $GL_n(\mathbb{R})$ munito della topologia indotta da $\mathbb{R}^{n^2}$.

Elencheremo ora, senza dimostrare, alcune proprietà dei gruppi topologici e dei loro sottoinsiemi, per poi andare a studiare il comportamento di sottogruppi e gruppi quoziente. Per le dimostrazioni, si veda [P, cap.3].

- Fissato un elemento a di G gruppo topologico, le moltiplicazioni destra e sinistra di un elemento qualsiasi x per a, così come l'inversione, sono omeomorfismi da G in G.

- Dati due qualsiasi elementi x e y di G, esiste sempre un omeomorfismo $f\colon G \to G$ tale che $f(x) = y$. É infatti sufficiente prendere in considerazione l'elemento $a = x^{-1}y$ e otterremo $f(x) = xa = xx^{-1}y = y$. Questa proprietà viene detta di *omogeneità* e permette di verificare le proprietà locali in un singolo punto dell'insieme.

- Sia f un morfismo di gruppi topologici. f è continua (aperta) se e solo se f è continua (aperta) in 1.

- Per ogni intorno U di 1 esiste un intorno aperto V di 1 tale per cui $VV^{-1} \subset U$.

- H è un sottogruppo topologico di G se è un sottogruppo del gruppo G ed un sottoinsieme chiuso di G come spazio topologico.

- La componente connessa dell'identità è un sottogruppo chiuso e normale.

Proposizione 2.3. *Sia G un gruppo topologico. Allora:*

(a) Ogni sottogruppo aperto H di G è anche chiuso.

(b) Un suo sottogruppo H è a sua volta un gruppo topologico rispetto alla topologia indotta.

(c) Un sottoinsieme H è aperto se e solo se G/H è discreto.

Dimostrazione. (a) Se H è aperto, allora anche xH lo è per ogni $x \in G$, essendo la moltiplicazione un omeomorfismo. Quindi lo è anche l'unione di tutti gli xH con $x \in G \setminus H$. Ma dalla teoria dei gruppi sappiamo che tale unione corrisponde al complementare di H in G. Ne segue che H sarà anche chiuso.
(b) Sia $xy^{-1} = w$. Essendo H dotato della topologia indotta da G, si ha che ogni intorno W_1 di w in H può essere scritto come intersezione tra H ed un qualche intorno W di G. Ma G è un gruppo topologico, quindi esistono due intorni U e V di x e y in G tali per cui $UV^{-1} \subset W$. Ne segue che $U_1 = U \cap H$ e $V_1 = V \cap H$ sono intorni in H rispettivamente di x e di y per i quali valgono $U_1V_1^{-1} \subset W$ e $U_1V_1^{-1} \subset H$ e quindi anche $U_1V_1^{-1} \subset (W \cap H) = W_1$. Quindi l'operazione è continua ed H è un gruppo topologico.
(c) G/H è discreto se e solo se $\{aH\}$ è aperto in G/H $\forall a \in G$, cioè se e solo se aH è aperto in G, la qual cosa si verifica se e solo se H è aperto. □

Definizione 2.4. Un morfismo di gruppi topologici è un morfismo di gruppi continuo.

Definizione 2.5. Un isomorfismo di gruppi topologici è un omeomorfismo di spazi topologici ed un isomorfismo di gruppi.

Proposizione 2.6. *Siano G gruppo topologico ed N sottogruppo normale. Allora G/N, munito della topologia quoziente, è un gruppo topologico.*

Dimostrazione. Siano A e B due elementi di G/N e $C = AB^{-1}$. Sia inoltre W_1 un intorno arbitrario di C. Allora W_1 sarà dato da tutti gli elementi della forma Nz, con $z \in W$ intorno di C in G. Siccome $C \in W_1$, esiste un elemento $c \in W$ tale che $C = Nc$. Siano b un elemento di B e sia $a = cb$, allora $a \in A$. Poiché G è un gruppo topologico, esistono degli intorni U e V, rispettivamente di a e b, tali per cui $UV^{-1} \subset W$. Detti U_1 e V_1 gli intorni rispettivamente di A (dato quindi da tutti i laterali del tipo Nx, $x \in U$) e B (della forma Ny con $y \in V$) in G/N, avremo allora che:

$$Nx(Ny)^{-1} = Nxy^{-1}N^{-1} = NN^{-1}xy^{-1} = Nxy^{-1}\ W_1.$$

ovvero che $U_1V_1^{-1} \subset W_1$ il che implica che le operazioni di gruppo sono continue. □

Diamo ora un importante risultato che estende il primo teorema di omomorfismo di gruppi astratti.

Teorema 2.7. *Siano G e G' due gruppi topologici e sia $f \colon G \to G'$ un morfismo* aperto *con* $\ker(f) = N$. *Allora N è un sottogruppo normale di G e l'applicazione da G/N a G' è un omeomorfismo di gruppi topologici, ovvero un isomorfismo come gruppi algebrici e un omeomorfismo di spazi topologici.*

Come si sarà potuto intuire, nei gruppi topologici un grande importanza viene rivestita dall'elemento neutro. Oltre alle proprietà precedentemente esposte che lo riguardano, vale infatti la seguente proposizione.

Proposizione 2.8. *Sia G un gruppo topologico ed N la componente connessa dell'identità. Allora N è un sottogruppo normale di G.*

Dimostrazione. N è un sottogruppo di G in quanto contiene l'identità e dati due elementi a e b in N si ha che $aN^{-1} \subset N$ e quindi $ab^{-1} \in N$. Inoltre, essendo le componenti connesse chiuse, si avrà che N è sottogruppo topologico. In modo simile si prova che è normale in G: infatti, preso un qualsiasi elemento $g \in G$, si ha che gNg^{-1} è connesso e contiene l'identità. Sarà quindi incluso nella componente connessa $N \Rightarrow gNg^{-1} \subseteq N$, $\forall g \in G$, che è la definizione di sottogruppo normale. □

Prima di passare allo studio del rivestimento di un gruppo topologico, diamo un'ultima definizione molto importante.

Definizione 2.9. Un elemento c di un gruppo G, si dice *centrale* se commuta con ogni altro elemento di G. L'insieme C di tutti gli elementi centrali è detto *centro.*

Osservazione 2.10. É facilmente provabile verificando le definizioni che il centro di un gruppo è un sottogruppo e che ogni sottogruppo del centro (compreso il centro stesso) è normale in G.

Rivestimento di un gruppo topologico

Ci occuperemo in questo caso solo di gruppi topologici *ammissibili*, ovvero che siano connessi per archi, localmente connessi per archi, semplicemente connessi e localmente semplicemente connessi. Citeremo per prima cosa alcuni risultati, dovuti formalmente a Schreier ed H. Weyl, che caratterizzano i rivestimenti di un gruppo topologico, per poi vederne l'applicazione in un caso particolare di notevole interesse. Se si desiderasse approfondirne la trattazione è consigliata la lettura di [P, sez.49-50] e [V, cap.2.6], di cui seguiremo l'impostazione.

Teorema 2.11. *Sia G gruppo topologico ammissibile e $(\widetilde{G}, \omega)$ un suo rivestimento. È possibile allora introdurre una moltiplicazione sullo spazio totale $\widetilde{G}$, che assume tutte le proprietà di gruppo topologico. La proiezione ω diventa a sua volta un morfismo continuo con nucleo discreto.*

Teorema 2.12. *Siano $\widetilde{G}$ un gruppo topologico ammissibile, N un sottogruppo normale discreto, $G = \widetilde{G}/N$ e ω il morfismo naturale di $\widetilde{G}$ su G. Allora G è ammissibile, N è contenuto nel centro di $\widetilde{G}$ e $(\widetilde{G}, \omega)$ è un rivestimento di G.*

Questi risultati ci permettono di introdurre i seguenti concetti.

Definizione 2.13. Un gruppo ammissibile $\widetilde{G}$ è detto *gruppo di rivestimento* di G se esiste un morfismo continuo ω da $\widetilde{G}$ in G con nucleo discreto. L'omomorfismo ω è allora detto *morfismo di rivestimento.*

Proposizione 2.14. *Se $\widetilde{G}$ è un gruppo di rivestimento di G, allora $\widetilde{G}$ e G sono gli unici gruppi topologici localmente isomorfi a $\widetilde{G}$.*

Definizione 2.15. Sia $\widetilde{G}$ un gruppo di rivestimento di G. Se $\widetilde{G}$ è semplicemente connesso è detto *gruppo di rivestimento universale* di G.

Proposizione 2.16. *Dato un qualsiasi gruppo ammissibile G, è sempre possibile determinare (a meno di isomorfismi) un gruppo di rivestimento universale.*

Teorema 2.17. *Siano $\widetilde{G}$ un gruppo topologico ammissibile, N un suo sottogruppo normale discreto e $\omega\colon \widetilde{G} \to \widetilde{G}/N = G$ omomorfismo di rivestimento. Allora $\ker(\omega) = N \cong \pi_1(G, 1)$, con $1 \in G$, elemento neutro.*

Applicazione: il rivestimento $p\colon SU(2) \to SO(3, \mathbb{R})$

Possiamo finalmente applicare le conoscenze acquisite. Dimostreremo infatti che il *gruppo speciale unitario* $SU(2)$, munito della giusta applicazione, funge da rivestimento universale al *gruppo speciale ortogonale* $SO(3, \mathbb{R})$. Grazie alla coincidenza tra il centro C di $SU(2)$ e $\mathbb{Z}_2$, avremo come corollario che $\pi_1(SO(3, \mathbb{R}))$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_2$.
Data l'importanza dei gruppi di matrici che entrano in gioco, questo particolare esempio ha tantissime applicazioni oltre la matematica pura. Il gruppo $SU(2)$ è molto importante in fisica, le matrici di Pauli sono infatti generatori della sua algebra di Lie e vengono sfruttate nella descrizione dello *spin*. Inoltre in informatica, la conoscenza della relazione tra $SU(2)$ ed $SO(3)$ è fondamentale negli algoritmi di cui fanno uso i programmi di rendering per la grafica 3D, largamente utilizzati nella creazione di videogiochi e nel cinema.

Diamo prima di tutto una definizione dei due gruppi.

Definizione 2.18. Si dice gruppo speciale unitario il seguente gruppo:

$$SU(2) = \left\{ A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = \det(A) = 1 \right\}$$

Si noti che il gruppo definito è un sottogruppo di $GL(2, \mathbb{C})$. Si dice gruppo speciale ortogonale il seguente gruppo, sottogruppo di $GL(3, \mathbb{R})$:

$$SO(3, \mathbb{R}) = \left\{ A \in GL(3, \mathbb{R}), \quad AA^t = A^t A = I \right\}$$

Osservazione 2.19. Entambi gli insiemi appena definiti, sono gruppi topologici in quanto sottogruppi di $GL(2, \mathbb{C})$ o di $GL(3, \mathbb{R})$.

Se vogliamo che il gruppo speciale unitario funga da spazio totale in un rivestimento universale, è necessario mostrare che è semplicemente connesso. Lo faremo nel seguente teorema.

Teorema 2.20. *$SU(2)$ è semplicemente connesso.*

Dimostrazione. Per dimostrare la tesi, mostreremo come $SU(2)$ sia omeomorfo a $S^3 \subset \mathbb{R}^4$, la sfera in $\mathbb{R}^4$, che è semplicemente connessa. Siccome gli omeomorfismi conservano la proprietà di semplice connessione, la tesi risulterà provata. Essendo $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ potremo considerare $SU(2)$ come sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$ e costruire quindi la funzione che candideremo al ruolo di omeomorfismo identificando prima di tutto le coppie di $\mathbb{C}^2$ con le quaterne di $\mathbb{R}^4$.
Consideriamo dunque la coppia in $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ con $\alpha = \alpha_0 + i\alpha_1$ e $\beta = \beta_0 + i\beta_1$, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 + i\alpha_1 & \beta_0 + i\beta_1 \\ -\beta_0 + i\beta_1 & \alpha_0 - i\alpha_1 \end{pmatrix}$$

e la funzione

$$f \colon SU(2) \to \mathbb{R}^4 \quad \text{tale per cui} \quad A \mapsto (\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1).$$

Essendo $A \in SU(2)$, $1 = \det(A) = \alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} = |\alpha|^2 + |\beta|^2$, vale la relazione $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \beta_0^2 + \beta_1^2 = 1$. Abbiamo quindi che $f(A) \in S^3$ ovvero che $f \colon SU(2) \to S^3$. A questo punto ci basta mostrare che, se considerata sulla sua immagine, f è invertibile, continua e con inversa continua.

Per dimostrare l'invertibilità, mostriamo come la funzione sia iniettiva e suriettiva.
Iniettività di f. Siano:

$$\alpha = \alpha_0 + i\alpha_1, \quad \alpha' = \alpha'_0 + i\alpha'_0, \quad \beta = \beta_0 + i\beta_1, \quad \beta' = \beta'_0 + i\beta'_1;$$
$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ -\overline{\beta'} & \overline{\alpha'} \end{pmatrix}.$$

Siano poi x e $y \in S^3$ con:

$$x = f(A) = (\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1) \quad \text{e} \quad y = f(A') = (\alpha'_0, \alpha'_1, \beta'_0, \beta'_1).$$

Allora,

$$x = y \iff \begin{cases} \alpha_0 = \alpha'_0, & \alpha_1 = \alpha'_1 \\ \beta_0 = \beta'_0, & \beta_1 = \beta'_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \alpha' \\ \beta = \beta' \end{cases} \iff A = A'.$$

Suriettività di f. Dobbiamo provare che ogni elemento di S^3 ha per preimmagine un elemento di $SU(2)$. Un elemento qualsiasi $x \in S^3$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ soddisfa la relazione $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$. Essendo $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, identifichiamo le prime due componenti di x con parte reale e parte immaginaria di un elemento $a = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$ e le seconde due con le parti di un altro elemento $b = x_3 + ix_4 \in \mathbb{C}$. Prendiamo poi la matrice A costruita con gli elementi a e b: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$. Affinchè A appartenga a $SU(2)$ dovrà essere $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Ma grazie all'identificazione precedente sappiamo che ciò implica che $|x_1 + ix_2|^2 + |x_3 + ix_4|^2 = (x_1^2 + x_2^2) + (x_3^2 + x_4^2) = 1$. Quest'ultima uguaglianza vale per ogni elemento di S^3, che quindi ha per preimmagine tramite f proprio un elemento di $SU(2)$.
Le due dimostrazioni precedenti provano che f è invertibile e che l'inversa può essere costruita associando ad un elemento di $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3$ la matrice $A = \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & x_3 + ix_4 \\ -x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix}$, che, grazie alle proprietà degli elementi

della 3-sfera, abbiamo dimostrato essere appartenente a $SU(2)$.

Ci rimangono quindi da dimostrare la continuità di f e quella di f^{-1}.
Continuità di f. L'applicazione è continua in quanto composizione di due funzioni continue: l'inclusione che associa agli elementi di $SU(2) \subset \mathbb{C}^2$ quelli di $\mathbb{R}^4$ e la proiezione che associa al punto di $\mathbb{R}^4$ una sua componente.

Continuità di f^{-1}. Dopo aver associato in modo continuo grazie all'omeomorfismo tra $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{C}^2$, l'elemento $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3$ con la coppia $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, con $\alpha = x_1 + ix_2$ e $\beta = x_3 + ix_4$, la continuità della funzione inversa si ottiene dalla continuità delle singole funzioni necessarie alla costruzione della matrice di $A \in SU(2)$, ovvero l'identità e la funzione coniugio.

Abbiamo quindi provato che $SU(2) \cong S^3$ e quindi che $SU(2)$ è semplicemente connesso. $\square$

Il prossimo passo sarà cercare di calcolare il centro C di $SU(2)$, il quale ci permetterà in seguito di dimostrare che $SU(2)/C \cong SO(3, \mathbb{R})$.

Teorema 2.21. *Il centro di $SU(2)$ è il sottogruppo* $\left(\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \cdot\right)$

Dimostrazione. Per provare la tesi andremo a verificare la definizione e quindi a calcolare quali matrici commutano con una generica matrice $A \in SU(2)$.
Sia dunque $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$.

Consideriamo poi la matrice variabile $X = \begin{pmatrix} x & y \\ -\overline{y} & \overline{x} \end{pmatrix}$. Affinché X sia centrale, è necessario che commuti con A, ovvero che $XA = AX$. Andiamo quindi ad esplicitare tale prodotto di matrici.

$$XA = \begin{pmatrix} x & y \\ -\overline{y} & \overline{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - \overline{b}y & bx + \overline{a}y \\ -(\overline{b}\overline{x} + a\overline{y}) & \overline{a}\overline{x} - b\overline{y} \end{pmatrix}$$

$$AX = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ -\overline{y} & \overline{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - b\overline{y} & ay + b\overline{x} \\ -(\overline{a}\overline{y} + \overline{b}x) & \overline{a}\overline{x} - \overline{b}y \end{pmatrix}$$

Quindi,

$$XA = AX \iff \begin{pmatrix} ax - \overline{b}y & bx + \overline{a}y \\ -(\overline{b}\overline{x} + a\overline{y}) & \overline{a}\overline{x} - b\overline{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - b\overline{y} & ay + b\overline{x} \\ -(\overline{a}\overline{y} + \overline{b}x) & \overline{a}\overline{x} - \overline{b}y \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} ax - \overline{b}y = ax - b\overline{y} \\ bx + \overline{a}y = ay + b\overline{x} \\ -(\overline{b}\overline{x} + a\overline{y}) = -(\overline{a}\overline{y} + \overline{b}x) \\ \overline{a}\overline{x} - b\overline{y} = \overline{a}\overline{x} - \overline{b}y \end{cases}$$

Poniamo ora:

- $x = x_1 + ix_2, \qquad y = y_1 + iy_2;$
- $a = a_1 + ia_2, \qquad b = b_1 + ib_2.$

Sostituendo ed effettuando un piccolo calcolo, il sistema precedente diventerà un sistema a 3 equazioni essendo la prima e l'ultima equivalenti.

$$\begin{cases} (b_1 - ib_2)(y_1 + iy_2) = (b_1 + ib_2)(y_1 - iy_2) \\ 2ix_2(b_1 + ib_2) = 2ia_2(y_1 + iy_2) \\ 2ix_2(b_1 - ib_2) = 2ia_2(y_1 - iy_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1y_2 = b_2y_1 \\ b_1x_2 + ib_2x_2 = a_2y_1 + ia_2y_2 \\ b_1x_2 - ib_2x_2 = a_2y_1 - ia_2y_2 \end{cases}$$

Riducendo ancora, avremo:

$$\begin{cases} b_1y_2 = b_2y_1 \\ b_1x_2 + ib_2x_2 = a_2y_1 + ia_2y_2 \\ b_2x_2 = a_2y_2 \Rightarrow x_2 = \frac{a_2y_2}{b_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1y_2 = b_2y_1 \\ b_1\frac{a_2y_2}{b_2} = a_2y_1 \\ x_2 = \frac{a_2y_2}{b_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{b_1}{b_2}y_2 \\ x_2 = \frac{a_2}{b_2}y_2 \end{cases}$$

Tutto ciò deve valere per ogni coppia $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, in quanto la matrice deve essere centrale. In particolare, per semplificare i calcoli, possiamo porre $a_2 = b_1 = 0$. Così facendo otteniamo la seguente matrice variabile $X = \begin{pmatrix} x_1 & iy_2 \\ iy_2 & x_1 \end{pmatrix}$. Per lo stesso motivo, tale matrice dovrà commutare anche con $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. Facendo i calcoli otteniamo:

- $\begin{pmatrix} x_1 & iy_2 \\ iy_2 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ix_1 & y_2 \\ -y_2 & -ix_1 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & iy_2 \\ iy_2 & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ix_1 & -y_2 \\ y_2 & -ix_1 \end{pmatrix}$

Ciò significa che dovrà essere $y_2 = -y_2 \Rightarrow y_2 = 0 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} ix_1 & 0 \\ 0 & -ix_1 \end{pmatrix}$. Infine, la condizione di unitarietà del determinante ci costringerà ad imporre

$$1 = \det(X) = ix_1(-ix_1) = x_1^2 \Longrightarrow x_1 = \pm 1$$

Abbiamo così ottenuto che le uniche matrici centrali di $SU(2)$ sono $\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e quindi che

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

□

Provato ciò, sappiamo che $SU(2)$ e $SU(2)/C$ sono gli unici gruppi ammissibili localmente isomorfi a $SU(2)$ ed hanno quindi lo stesso rivestimento universale. La nostra strategia sarà quindi andare a costruire direttamente l'applicazione p che possa fungere da rivestimento e che abbia come ker proprio il centro C. Ne conseguirà che $SU(2)/C \cong SO(3, \mathbb{R})$, confermando che $(SU(2), p)$ è il rivestimento universale di $SO(3, \mathbb{R})$.

Andiamo per prima cosa ad associare alle terne di $\mathbb{R}^3$ le matrici dello spazio vettoriale V formato dalle matrici hermitiane 2×2 con traccia nulla.

Proposizione 2.22. *La mappa*

$$v \colon \mathbb{R}^3 \to V, \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix}$$

è un isomorfismo lineare di gruppi.

Dimostrazione. (a) v è iniettiva. Consideriamo due matrici di V:

$$v(x) = X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix} \text{ e } v(x') = X' = \begin{pmatrix} x_1' & x_2' + ix_3' \\ x_2' - ix_3' & -x_1' \end{pmatrix}$$

Si trova con un rapido calcolo che $X = X' \iff \begin{cases} x_1 = x_1' \\ x_2 = x_2' \\ x_3 = x_3' \end{cases}$ ovvero se $x = (x_1, x_2, x_3) = (x_1', x_2', x_3') = x'$.

(b) v è suriettiva. Si mostra infatti che, considerata una matrice

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & -a \end{pmatrix}$$

in V, esiste sempre un elemento $x \in \mathbb{R}^3$ tale che $v(x) = X$. Tale elemento può essere identificato nella terna

$$x = (a, \frac{b + \overline{b}}{2}, \frac{b - \overline{b}}{2i})$$

che risponde ai requisiti richiesti.

(c) v è lineare. Siano $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $x' = (x_1', x_2', x_3')$ due elementi di $\mathbb{R}^3$ e $k, k' \in \mathbb{R}$. Allora:

$$v(kx + k'x') = v(kx_1 + k'x_1', kx_2 + k'x_2', kx_3 + k'x_3')$$

$$=$$

$$\begin{pmatrix} kx_1 + k'x_1' & kx_2 + k'x_2' + i(kx_3 + k'x_3') \\ kx_2 + k'x_2' - i(kx_3 + k'x_3') & -kx_1 - k'x_1' \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{pmatrix} kx_1 + k'x_1' & k(x_2 + ix_3) + k'(x_2' + ix_3') \\ k(x_2 - ix_3) + k'(x_2' - ix_3') & -kx_1 + (-k'x_1') \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$k \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix} + k' \begin{pmatrix} x_1' & x_2' + ix_3' \\ x_2' - ix_3' & -x_1' \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$kv(x) + k'v(x')$$

il ché prova che v è lineare. $\square$

Consideriamo ora un elemento $g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in SU(2)$ con $a = a_1 + ia_2$ e $b = b_1 + ib_2$ e definiamo la mappa $p'_g \colon V \to M(2, \mathbb{R})$ tale che $X \mapsto gXg^{-1}$.

Proposizione 2.23. *La mappa p'_g è un automorfismo lineare ortogonale in V.*

Dimostrazione. Mostriamo che $p'_g(X) \in V$. Sia $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix}$, calcoliamo gXg^{-1}, sapendo che g è una matrice unitaria e quindi che la sua inversa è uguale alla trasposta coniugata.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a} & -b \\ \overline{b} & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ax_1 + b(x_2 - ix_3) & a(x_2 + ix_3) - bx_1 \\ \overline{a}(x_2 - ix_3) - \overline{b}x_1 & -(\overline{b}(x_2 + ix_3) + \overline{a}x_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a} & -b \\ \overline{b} & a \end{pmatrix}$$

Quest'ultima moltiplicazione darà come prodotto una matrice $\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ i cui elementi saranno:

$$\begin{cases} c = \overline{a}[ax_1 + b(x_2 - ix_3)] + \overline{b}[a(x_2 + ix_3) - bx_1] \\ d = a[a(x_2 + ix_3) - bx_1] - b[ax_1 + b(x_2 - ix_3)] \\ e = \overline{a}[\overline{a}(x_2 - ix_3) - \overline{b}x_1] - \overline{b}[\overline{a}x_1 + \overline{b}(x_2 + ix_3)] \\ f = -b[\overline{a}(x_2 - ix_3) - \overline{b}x_1] - a[\overline{a}x_1 + \overline{b}(x_2 + ix_3)] \end{cases}$$

Affinché tale matrice appartenga a V è necessario che $c = -f$, entrambi con parte immaginaria nulla e che $\overline{d} = e$. Sarà necessario verificare tali condizioni svolgendo i calcoli.

Per quanto riguarda la prima condizione, avremo:

$$\begin{cases} c = x_1(\overline{a}a - b\overline{b}) + x_2(\overline{a}b + a\overline{b}) + x_3 i(a\overline{b} - \overline{a}b) \\ f = -[x_1(\overline{a}a - b\overline{b}) + x_2(\overline{a}b + a\overline{b}) + x_3 i(a\overline{b} - \overline{a}b)] \end{cases}$$

il ché conferma una delle ipotesi, resta da verificare che per entrambi la parte immaginaria sia nulla. Analizziamo caso per caso:

- $\overline{a}a - b\overline{b} = |a|^2 - |b|^2$;
- $\overline{a}b + a\overline{b} = 2(a_1b_1 + a_2b_2)$;
- $i(a\overline{b} - \overline{a}b) = i[(2i(a_2b_1 - a_1b_2)] = 2(a_1b_2 - a_2b_1)$.

In tutti e 3 i casi abbiamo come risultato dei numeri reali e quindi la condizione è soddisfatta nella sua interezza.
Verifichiamo ora la seconda condizione, ovvero $\overline{d} = e$.
Si ha che:

$$\overline{d} = \overline{a[a(x_2 + ix_3) - bx_1] - b[ax_1 + b(x_2 - ix_3)]}$$

tuttavia, grazie alle proprietà della coniugazione complessa ciò equivale a scrivere:

$$\overline{d} = \overline{a}[\overline{a}(\overline{x_2 + ix_3}) - \overline{b}\overline{x}_1] - \overline{b}[\overline{ax}_1 + \overline{b}(\overline{x_2 - ix_3})] =$$

$$= \overline{a}[\overline{a}(x_2 - ix_3) - \overline{b}x_1] - \overline{b}[\overline{a}x_1 + \overline{b}(x_2 + ix_3)] = e.$$

Ciò prova che la matrice appartiene allo spazio vettoriale V e quindi che $p'_g(V) \subseteq V$. Mostriamo quindi che p'_g è anche biettiva e lineare.

(a) p'_g è iniettiva, infatti, presi $X, X' \in V$, si ha che:

$$p'_g(X) = p'_g(X') \iff gXg^{-1} = gX'g^{-1} \iff X = X'.$$

(b) p'_g è suriettiva. Per dimostrarlo mostriamo che per ogni elemento A di V, esiste una matrice X di V tale che $p'_g(X) = A$. Si vede facilmente che $(p'_g)^{-1}(A) = g^{-1}Ag$, il nostro obiettivo sarà andare a verificare che

$(p'_g)^{-1}(A) \in V$. Per farlo, calcoleremo direttamente i prodotti:

$$\begin{pmatrix} \overline{a} & -b \\ \overline{b} & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$$

per poi verificare le condizioni di appartenenza. Il prodotto è una matrice $\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ tale per cui:

$$\begin{cases} c = a[\overline{a}x_1 - b(x_2 - ix_3)] - \overline{b}[\overline{a}(x_2 + ix_3) + bx_1] \\ d = \overline{a}[\overline{a}(x_2 + ix_3) + bx_1] + b[\overline{a}x_1 - b(x_2 - ix_3)] \\ e = a[a(x_2 - ix_3) + \overline{b}x_1] + \overline{b}[ax_1 - \overline{b}(x_2 + ix_3)] \\ f = \overline{a}[\overline{b}(x_2 + ix_3) - ax_1] + b[a(x_2 - ix_3) + \overline{b}x_1] \end{cases}.$$

Come nella precedente sezione della dimostrazione, verifichiamo che c ed f siano a valori in $\mathbb{R}$ e che $c = -f$.
Raccogliendo x_1, x_2, x_3 si ottengono, per c ed f:

$$\begin{cases} c = x_1(a\overline{a} - b\overline{b}) - x_2(ab + \overline{a}\overline{b}) + x_3 i(ab - \overline{a}\overline{b}) \\ f = -x_1(a\overline{a} - b\overline{b}) + x_2(ab + \overline{a}\overline{b}) - x_3 i(ab - \overline{a}\overline{b}) \end{cases}$$

Si vede subito che $c = -f$. Con un'ulteriore analisi si deduce che sono entrambi reali. Vale infatti:

- $a\overline{a} - b\overline{b} = |a|^2 - |b|^2 \in \mathbb{R}$;
- $ab + \overline{a}\overline{b} = 2\,\mathrm{Re}(ab) \in \mathbb{R}$;
- $i(ab - \overline{a}\overline{b}) = i2i\,\mathrm{Im}(ab) = -2\,\mathrm{Im}(ab) \in \mathbb{R}$.

Sempre per grazie alle proprietà della coniugazione complessa, si vede inoltre che $\overline{d} = e$, la qual cosa pone fine alla dimostrazione della suriettività.

(c) linearità. Grazie alle proprietà del prodotto matriciale, per $g \in SU(2)$, $X, X' \in V$ e $k, k' \in \mathbb{R}$, si ha che:

$p'_g(kX+k'X') = g(kX+k'X')g^{-1} = (gkX+gk'X')g^{-1} = gkXg^{-1}+gk'X'g^{-1} =$

$$= kgXg^{-1} + k'gX'g^{-1} = kp'_g(X) + k'p'_g(X')$$

ovvero p'_g è lineare.

(d) p'_g è ortogonale. Consideriamo infatti la seguente forma bilineare:

$$\mu \colon V \times V \to \mathbb{R} \mid (X, Y) \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{tr}(XY)$$

Con un rapido calcolo si può notare che essa corrisponde al prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^3$. Inoltre, essendo:

$$\mathrm{tr}(gABg^{-1}) = \mathrm{tr}(AB),$$

possiamo concludere che l'applicazione p'_g preserva il prodotto scalare di $\mathbb{R}^3 \cong V$ e quindi che è ortogonale.
Dai punti esaminati segue che p'_g è un automorfismo lineare ortogonale. $\square$

Con i prossimi due passaggi definiamo la mappa che fungerà poi da proiezione nel rivestimento oggetto di questa trattazione.
Sia $g \in SU(2)$, costruiamo l'applicazione $p_g \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ come la mappa che corrisponde a p'_g una volta identificati gli elementi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ con le matrici $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix} \in V$ grazie all'isomorfismo v.

Proposizione 2.24. *La mappa p_g è un automorfismo lineare ortogonale.*

Dimostrazione. p_g si traduce di fatto nella composizione delle applicazioni v, p'_g e v^{-1}. Da ciò si deduce che è un automorfismo lineare in quanto composizione di un automorfismo e di isomorfismi lineari opportunamente composti. Risulta essere anche ortogonale, in quanto lascia invariata la forma bilineare descritta precedentemente:

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \xrightarrow{v} V \times V \xrightarrow{\mu} \mathbb{R},$$

$$((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \mapsto x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

ovvero sia il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^3$. $\square$

Dalla proposizione precedente, segue che $p_g \in O(3,\mathbb{R})\,\forall g \in SU(2)$. Possiamo quindi dire che $p_{SU(2)} \subseteq O(3,\mathbb{R})$. A questo punto definiamo la proiezione vera e propria, che chiameremo p:

$$p\colon SU(2) \to O(3,\mathbb{R})$$

$$g \mapsto \left\{V \mapsto gVg^{-1}\right\}.$$

Essa associa alla matrice g, l'automorfismo lineare ortogonale $p_g \in O(3,\mathbb{R})$. Inoltre, essendo p un omomorfismo (e quindi, topologicamente, una funzione continua), si ha che $p(SU(2))$ è connesso in quanto $SU(2)$ è connesso. La sua immagine sarà dunque inclusa in una delle due componenti connesse di $O(3,\mathbb{R})$. Sarà dunque necessario studiare il determinante della matrice associata ad un qualsiasi p_g per verificare l'appartenenza all'una o all'altra componente.

Proposizione 2.25. $p(SU(2)) \subseteq SO(3,\mathbb{R})$

Dimostrazione. Per l'occasione, sfruttiamo l'esempio più semplice possibile e andiamo quindi a dimostrare la tesi applicando p alla matrice identica $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Consideriamo poi come base di $\mathbb{R}^3$ l'usuale base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$. Allora,

- $gv(e_1)g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = v(e_1)$,

- $gv(e_2)g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = v(e_2)$,

- $gv(e_3)g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = v(e_3)$, la qual cosa significa che $p(I_2) = \begin{cases} (1,0,0) \mapsto (1,0,0) \\ (0,1,0) \mapsto (0,1,0) \\ (0,0,1) \mapsto (0,0,1) \end{cases}$, e quindi che la matrice associata alla trasformazione lineare p_{I_2} è la matrice identità I_3 che ha determinante pari a 1, il che prova la tesi. □

Siamo quindi arrivati a costruire una applicazione $p\colon SU(2) \to SO(3,\mathbb{R})$. Per concludere dobbiamo mostrare che è un rivestimento e che il suo nucleo è $C = \pm I_2$.

Proposizione 2.26. *La mappa $p\colon SU(2) \to SO(3,\mathbb{R})$ è suriettiva.*

Dimostrazione. Sappiamo che un insieme di generatori di $SO(3,\mathbb{R})$ come gruppo algebrico è costituito dalle seguenti matrici, che permettono di descrivere qualsiasi rotazione in $\mathbb{R}^3$.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} B_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B_3 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Il nostro scopo sarà quello di verificare che ognuna di queste matrici può essere ottenuta come $p(g_t)$ con $g_t \in SU(2)$, $t \in \mathbb{R}$. Troveremo che le matrici g_t saranno le seguenti:

$$G_1 = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad G_3 = \begin{pmatrix} \cos t & i\sin t \\ i\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Siano quindi $G_i = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in SU(2)$, $i \in \{1,2,3\}$ ed X l'identificazione tramite v di una terna di $\mathbb{R}^3$.
Sia poi $X_i' = v(x_i')$, con $x_i' = B_i(x_1,x_2,x_3)^t$. Dovremo trovare G_i tale per cui:

$$G_i X G_i^{-1} = \begin{pmatrix} c & d \\ \overline{d} & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ \overline{f} & -e \end{pmatrix} = X_i'.$$

Cominciamo con il trovare G_1, ovvero una matrice tale che $p(G_1) = B_1$. Abbiamo che:

$$B_1(x_1, x_2, x_3)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1, x_2\cos\alpha - x_3\sin\alpha, x_2\sin\alpha + x_3\cos\alpha) = x_1'$$

Posto $X_1' = v(x_1')$, dobbiamo quindi determinare $G_1 \mid G_1XG_1^{-1} = X_1'$. Ci bastano gli elementi della prima riga per determinare la matrice $G_1XG_1^{-1}$, che sappiamo essere:

- $c = x_1(|a|^2 - |b|^2) + x_2(\overline{a}b + a\overline{b}) + x_3i(a\overline{b} - \overline{a}b)$;

- $d = -2abx_1 + x_2(a^2 - b^2) + x_3i(a^2 + b^2)$;

mentre gli elementi di X_1' saranno determinabili a partire da:

- $e = x_1$;

- $f = x_2(\cos\alpha + i\sin\alpha) + x_3i(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Affinché valga l'uguaglianza, dovremo avere allora che:

$$e = c \Leftrightarrow \begin{cases} |a|^2 - |b|^2 = 1 \\ \overline{a}b + a\overline{b} = 0 \\ a\overline{b} - \overline{a}b = 0 \end{cases} \quad \text{ed } f = d \Leftrightarrow \begin{cases} 2ab = 0 \\ a^2 - b^2 = e^{i\alpha} \\ i(a^2 + b^2) = ie^{i\alpha} \end{cases}$$

Per semplicità, sfruttiamo le ultime due equazioni del secondo sistema, ottenendo:

$$\begin{cases} 2a^2 = 2e^{i\alpha} \Rightarrow a = \pm e^{i\frac{\alpha}{2}} \\ b = 0 \end{cases},$$

ci è sufficiente il caso positivo, che restituisce come matrice di partenza $G_1 = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}$, $t = \frac{\alpha}{2}$.

Vediamo ora il secondo caso, con $B_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ripetendo il procedimento precedente, otteniamo la terna:

$$B_2(x_1, x_2, x_3)^t = (x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha, x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha, x_3) = x'_2,$$

che identificheremo a sua volta con la matrice $X'_2 = \begin{pmatrix} e & f \\ \overline{f} & -e \end{pmatrix}$ in cui

- $e = x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha$;

- $f = x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha + ix_3$.

Cerchiamo dunque la matrice $G_2 \mid G_2 X G_2^{-1} = X'_2$. Dovranno essere:

$$e = c \Leftrightarrow \begin{cases} |a|^2 - |b|^2 = \cos\alpha \\ \overline{a}b + a\overline{b} = -\sin\alpha \\ a\overline{b} - \overline{a}b = 0 \end{cases} \quad \text{ed } f = d \Leftrightarrow \begin{cases} 2ab = -\sin\alpha \\ a^2 - b^2 = \cos\alpha \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} .$$

Sempre sfruttando le ultime due equazioni del secondo sistema, otteniamo:

- $a^2 = \frac{1+\cos\alpha}{2} \Rightarrow a = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \pm\cos\frac{\alpha}{2}$;

- $b^2 = \frac{1-\cos\alpha}{2} \Rightarrow b = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \pm\sin\frac{\alpha}{2}$;

in cui l'ultima uguaglianza deriva dalle formule di bisezione. Ne viene una matrice $G_2 = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$, dove $t = \frac{\alpha}{2}$.
Ci rimane l'ultimo caso: B_3. La terna di partenza sarà:

$$x'_3 = (x_1 \cos\alpha - x_3 \sin\alpha, x_2, x_1 \sin\alpha + x_3 \cos\alpha).$$

Gli elementi di X'_3 saranno dati da:

- $e = x_1 \cos\alpha - x_3 \sin\alpha$;

- $f = x_2 + i(x_1 \sin\alpha + x_3 \cos\alpha)$;

a cui dovranno corrispondere i generici c e d utilizzati anche nei casi precedenti. Avremo quindi:

$$e = c \Leftrightarrow \begin{cases} |a|^2 - |b|^2 = \cos\alpha \\ \overline{a}b + a\overline{b} = 0 \\ a\overline{b} - \overline{a}b = -\sin\alpha \end{cases} \quad \text{ed } f = d \Leftrightarrow \begin{cases} 2ab = -i\sin\alpha \\ a^2 - b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 = \cos\alpha \end{cases}$$

Come sopra, ricaviamo a e b dalle ultime due equazioni, che ci forniscono:

- $a^2 = \frac{1+\cos\alpha}{2} \Rightarrow a = \pm\cos\frac{\alpha}{2}$;

- $b^2 = \frac{\cos\alpha - 1}{2} = -\left(\frac{1-\cos\alpha}{2}\right) \Rightarrow b = \pm i \sin\frac{\alpha}{2}$;

sempre per le formule di bisezione. Tutte le altre condizioni sono parimenti rispettate, abbiamo quindi ottenuto anche $G_3 = \begin{pmatrix} \cos t & i\sin t \\ i\sin t & \cos t \end{pmatrix}$ e la dimostrazione è conclusa. □

Abbiamo dimostrato che $p(SU(2)) = SO(3, \mathbb{R})$. Per arrivare al nostro obiettivo non ci resta che trovare il nucleo di p.

Proposizione 2.27. *Il nucleo della mappa p coincide con il centro C di $SU(2)$:*

$$\ker p = \pm I_2.$$

Dimostrazione. Avevamo già visto nella proposizione 2.25 che $p(I_2) = I_3$. Gli altri elementi del nucleo verranno trovati andando a calcolare direttamente la preimmagine di I_3. Ricordiamo che essa corrisponde alla matrice associata alla trasformazione che lascia invariata la generica matrice $X = v(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ nel momento in cui andiamo ad applicarle p. Cerchiamo dunque quelle matrici g che hanno I_3 come matrice associata a $p(g)$.
Il metodo con cui le cercheremo e troveremo sarà lo stesso usato precedentemente per gli elementi della base di $SO(3, \mathbb{R})$. Abbiamo:

$$I_3(x_1, x_2, x_3)^t = (x_1, x_2, x_3)^t = x',$$

ovvero la terna che andremo ad identificare con la matrice

$$X' = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix}.$$

Cerchiamo dunque $g \mid gXg^{-1} = X'$. Come nella proposizione precedente, la matrice sarà formata dagli elementi c e d opportunamente combinati, con:

- $c = x_1(|a|^2 - |b|^2) + x_2(\overline{a}b + a\overline{b}) + x_3 i(a\overline{b} - \overline{a}b)$;

- $d = -2abx_1 + x_2(a^2 - b^2) + x_3 i(a^2 + b^2)$.

Ne segue che:

$$x_1 = c \Leftrightarrow \begin{cases} |a|^2 - |b|^2 = 1 \\ \overline{a}b + a\overline{b} = 0 \\ a\overline{b} - \overline{a}b = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad (x_2 + ix_3) = d \Leftrightarrow \begin{cases} 2ab = 0 \\ a^2 - b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}.$$

Dalle ultime due equazioni del secondo sistema, ricavo:

- $a = \pm 1$;

- $b = 0$;

e quindi le matrici $g_{1,2} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} = \pm I_2$. □

Teorema 2.28. *$p\colon SU(2) \to SO(3, \mathbb{R})$ è un rivestimento.*

Dimostrazione. La tesi è una diretta conseguenza del teorema 2.12. Infatti, per tale teorema, esiste sempre una mappa rivestimento da $SU(2)$ su $SU(2)/C$. Tuttavia, si ha anche che $SU(2)/\ker p \cong SO(3, \mathbb{R})$ e quindi che $SU(2)/C \cong SO(3, \mathbb{R})$, ovvero sia che $(SU(2), p)$ riveste $SO(3, \mathbb{R})$. □

Osservazione 2.29. Grazie al teorema 2.17, segue immediatamente che:

$$\pi_1(SO(3, \mathbb{R})) \cong \ker p \cong \mathbb{Z}_2.$$

Bibliografia

[K] Kosniowsky, Czes, *Introduzione alla topologia algebrica*, Zanichelli, 1988.

[M] Massey, William S., *A basic course in algebraic topology*, Springer-Verlag, 1991.

[Mu] Munkres, James Raymond, *Topology*, Prentice Hall, 2000.

[P] Pontryagin, Lev Semenovič, *Topological groups*, Gordon and Breach, 1966.

[V] Varadarajan, V. S., *Lie groups, Lie algebras, and their representations*, Springer-Verlag, 1984.