

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

**METODI
DI APPROSSIMAZIONE
SADDLEPOINT
ED APPLICAZIONI FINANZIARIE**

Tesi di Laurea in Equazioni Differenziali Stocastiche

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Andrea Pascucci

Presentata da:
Rosita Zanetti

Terza Sessione
Anno Accademico 2012-2013

Indice

Indice	i
Introduzione	iii
1 Nozioni preliminari	1
1.1 Funzioni generatrici	1
1.2 Approssimazione di Laplace	5
2 Metodi saddlepoint	8
2.1 Densità saddlepoint del primo ordine	8
2.1.1 Invarianza per trasformazioni lineari	12
2.2 Famiglia esponenziale	12
2.2.1 Famiglie esponenziali s -tilting	17
2.3 Espansioni di Edgeworth	21
2.3.1 Polinomi di Hermite	21
2.3.2 Serie di Gram-Charlier di tipo A	23
2.3.3 Serie di Edgeworth	25
2.4 Densità saddlepoint del secondo ordine	29
3 Probabilità di coda saddlepoint	32
3.1 Formula di Lugannani-Rice	33
3.2 Formula di Lugannani-Rice secondo Daniels	38
3.3 Formula generalizzata di Lugannani-Rice	45
4 Applicazioni finanziarie	53
4.1 Processi stocastici a tempo continuo	53
4.2 Polizza assicurativa	55
4.3 Prezzi di opzioni call	59
4.3.1 Scelta della base per Lugannani-Rice generalizzato	63
4.3.2 Modello Black-Scholes	68
4.3.3 Modelli con salti: Merton e CGMY	76
A Distribuzione gaussiana standard	85

B	Teorema del limite centrale	87
C	Approssimazioni asintotiche di integrali	90
	C.1 Espansione asintotica uniforme	92
D	Processi stocastici di Itô	98
E	Cambio di numeraire	104
	Bibliografia	107

Introduzione

L'intento di questa tesi è presentare i metodi di approssimazione saddlepoint per stimare la densità di una variabile aleatoria di cui si conosce solo la funzione generatrice dei cumulanti e utilizzarla per il calcolo della probabilità di coda.

Particolare attenzione verrà data alle variabili aleatorie che sono somme o medie di n variabili aleatorie i.i.d. e alla stima dell'errore rispetto alla densità esatta in relazione a n .

La strada allo studio dei metodi saddlepoint è stata aperta da Esscher (1934), Daniels (1954), Lugannani e Rice (1980), e rielaborata in seguito da Field e Ronchetti (1990), Kolassa (1994) e Jensen (1995), i quali hanno basato le loro trattazioni su forti argomenti di analisi complessa. Più recentemente (2007) Ronald W. Butler ha riformulato le vecchie trattazioni in chiave applicativa¹, aprendo la strada a Carr e Madan (2009) per l'utilizzo dei metodi saddlepoint in ambito finanziario, in particolare nella valutazione dei prezzi di opzioni call. Vedremo come in questo ambito diventa importante riuscire a calcolare la probabilità di coda di distribuzioni complicate, dove i calcoli effettuati con i metodi classici (FFT) potrebbero risultare, su larga scala, numericamente molto costosi; infatti, l'implementazione mediante il software Mathematica del metodo saddlepoint per il calcolo di opzioni call prevede la risoluzione numerica di due equazioni, mentre quella del metodo FFT richiede un'integrazione numerica.² Le uniche informazioni su una variabile aleatoria X che servono per stimare la densità $f(x)$ sono:

- la funzione generatrice dei cumulanti, $K(s)$;
- la soluzione dell'equazione saddlepoint $K'(\hat{s}) = x$.

Per capire la semplicità che i metodi saddlepoint offrono come alternativa ai metodi classici, riportiamo l'esempio seguente.

Esempio 0.1. Consideriamo la variabile aleatoria $X = X_1 + X_2$ somma di $X_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ e $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ indipendenti tra loro, e siano f_{X_1} e f_{X_2}

¹Si fa riferimento a [2].

²Per il confronto tra i metodi si veda la Sezione 4.3.

le loro rispettive densità. È noto che la densità della somma di due variabili aleatorie indipendenti è la convoluzione di queste, cioè

$$f_{X_1+X_2}^{\text{exact}} = f_{X_1} * f_{X_2}.$$

I metodi saddlepoint permettono di stimare la densità semplicemente conoscendo la funzione generatrice dei cumulanti e risolvendo l'equazione saddlepoint. In questo esempio, risulta:

$$K_{X_1}(s) = \frac{1}{2}s^2, \quad K_{X_2}(s) = \ln \frac{1}{1+s^2} = -\ln(1+s^2).$$

Risultati che saranno dimostrati nella Sezione 1.1 permettono di affermare che:

$$K(s) := K_{X_1+X_2}(s) = K_{X_1}(s) + K_{X_2}(s) = \frac{1}{2}s^2 - \ln(1+s^2), \quad s \in (-1, 1).$$

L'equazione saddlepoint $K'(\hat{s}) = x$ risulta quindi essere:

$$\hat{s} \left(1 - \frac{2}{1+\hat{s}^2} \right) = x.$$

La soluzione $\hat{s} = \hat{s}(x)$ è una radice di un polinomio cubico che ammette una radice reale e una coppia di radici coniugate. La soluzione reale può essere calcolata per via numerica e la sua espressione esplicita risulta essere

$$\begin{aligned} \hat{s} = & \frac{x}{3} + \frac{3+x^2}{3(18x+x^3+3\sqrt{3}\sqrt{-1+11x^2+x^4})^{1/3}} \\ & + \frac{1}{3}(18x+x^3+3\sqrt{3}\sqrt{-1+11x^2+x^4})^{1/3} \end{aligned}$$

e il metodo saddlepoint è applicabile.

I metodi saddlepoint si distinguono in:

- metodi del primo ordine: si vedrà una prima approssimazione della densità esatta per una variabile aleatoria e per la media semplice di n variabili aleatorie i.i.d. e si stimerà l'errore commesso come $O(\frac{1}{n})$;
- metodi del secondo ordine: si cercherà di dare una stima dell'errore precedentemente enunciato riducendolo a un $O(\frac{1}{n^2})$ per arrivare alla formula di Daniels (1954) attraverso il procedimento di espansione di Edgeworth della densità.

Utilizzeremo la densità saddlepoint per stimare la probabilità di coda e ricaveremo:

- la formula di Lugannani-Rice (1980) proposta in [7];
- la formula di Lugannani-Rice riformulata da Daniels (1987) in [5];
- la formula generalizzata di Lugannani-Rice (1993) elaborata da Wood, Booth e Butler in [10].

Capitolo 1

Nozioni preliminari

1.1 Funzioni generatrici

Riportiamo alcune definizioni che saranno fondamentali in seguito.

Definizione 1.1. Sia X una variabile aleatoria continua con densità $f(x)$ definita per tutti i valori reali di x . La *funzione generatrice dei momenti* $M(s)$ di X è il valore atteso di $\exp(sX)$ definito per tutti i valori di s per cui l'integrale converge; supponiamo che ciò venga verificato per $s \in (a, b)$:

$$M(s) := \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(sx)f(x)dx, \quad s \in (a, b).$$

Osservazione 1. Per valori reali di s la convergenza dell'integrale precedente è sicuramente verificata se (a, b) è un intorno dell'origine. Supporremo quindi che l'intervallo di convergenza contenga sempre l'origine e che (a, b) sia il più grande tra gli intorni di convergenza.

Proposizione 1.1. Se $E[X^k] < \infty$ allora la derivata k -esima di M valutata in $s = 0$ è il momento k -esimo di X , cioè:

$$M^{(k)}(0) = E[X^k] =: \mu_k.$$

Dimostrazione. Sviluppando l'esponenziale in serie di potenze intorno all'origine e scambiando il segno di integrale con quello di serie si ha:

$$M(s) = E[\exp(sX)] = E\left[\sum_{r=0}^{+\infty} \frac{s^r X^r}{r!}\right] = \sum_{r=0}^{+\infty} E\left[\frac{s^r X^r}{r!}\right] = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{\mu_r s^r}{r!},$$

da cui, derivando termine a termine, risulta:

$$M'(s) = \frac{d}{ds} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\mu_i s^i}{i!} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{d}{ds} \frac{\mu_i s^i}{i!} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\mu_i i s^{i-1}}{i!} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mu_i i s^{i-1}}{i!}.$$

Iterando la derivazione si ottiene la formula ricorsiva

$$M^{(r)}(s) = \sum_{i=r}^{+\infty} \frac{\mu_i i(i-1) \dots (i-r+1) s^{i-r}}{i!}.$$

Valutando la precedente in $s = 0$ resta solo il termine r -esimo della sommatoria, pertanto

$$M^{(r)}(0) = \frac{\mu_r r!}{r!} = \mu_r.$$

In particolare, per $r = k$, si ha $M^{(k)}(0) = \mu_k$. \square

Definizione 1.2. Si definisce *funzione generatrice dei cumulanti* di X il logaritmo della funzione generatrice dei momenti:

$$K(s) := \log M(s), \quad s \in (a, b).$$

Si dicono *cumulanti* i coefficienti k_r dell'espansione di Taylor di $K(s)$ intorno all'origine.

Riportiamo alcuni risultati sulle proprietà dei cumulanti.

Proposizione 1.2. *La derivata r -esima di $K(s)$ calcolata nell'origine equivale al r -esimo cumulante.*

Dimostrazione. Sviluppando $K(s)$ in serie di Taylor intorno all'origine si ha:

$$K(s) = \log(M(s)) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{k_i s^i}{i!}. \quad (1.1)$$

Derivando termine a termine, si può scrivere

$$K'(s) = \frac{d}{ds} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{k_i s^i}{i!} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{d}{ds} \frac{k_i s^i}{i!} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{k_i i s^{i-1}}{i!} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{k_i i s^{i-1}}{i!},$$

e iterando la derivazione si ottiene la formula ricorsiva

$$K^{(r)}(s) = \sum_{i=r}^{+\infty} \frac{k_i i(i-1) \dots (i-r+1) s^{i-r}}{i!}. \quad (1.2)$$

Valutando la derivata in $s = 0$ rimane solo il termine r -esimo della sommatoria e si ottiene:

$$K^{(r)}(0) = \frac{k_r r!}{r!} = k_r.$$

\square

Proposizione 1.3. *I primi cumulanti e momenti sono legati dalle seguenti relazioni:*

- $k_0 = 0$;
- $k_1 = \mu_1$;
- $k_2 = \mu_2 - \mu_1^2$;
- $k_3 = \mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3$;
- $k_4 = \mu_4 - 4\mu_3\mu_1 - 3\mu_2^2 + 12\mu_2\mu_1^2 - 6\mu_1^4$;
- $k_5 = \mu_5 - 5\mu_4\mu_1 - 10\mu_3\mu_2^2 + 20\mu_3\mu_1^2 + 30\mu_2^2\mu_1 - 60\mu_2\mu_1^3 + 24\mu_1^5$;
- $k_6 = \mu_6 - 6\mu_5\mu_1 - 15\mu_4\mu_2 + 30\mu_4\mu_1^2 - 10\mu_3^2 + 120\mu_3\mu_2\mu_1 - 120\mu_3\mu_1^3 + 30\mu_2^3 - 270\mu_2^2\mu_1^2 + 360\mu_2\mu_1^4 - 120\mu_1^6$.

Dimostrazione. Le relazioni precedenti derivano dal confronto tra i coefficienti delle espansioni in serie di $M(s)$ e $K(s)$.

Consideriamo le seguenti espansioni:

$$K(s) = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{k_r s^r}{r!}, \quad M(s) = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{\mu_r s^r}{r!}.$$

Poiché

$$M(s) = E[\exp(sX)] = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{\mu_r s^r}{r!} = 1 + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{\mu_r s^r}{r!},$$

segue:

$$1 - E[\exp(sX)] = - \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{\mu_r s^r}{r!}. \quad (1.3)$$

Sviluppiamo ora $K(s)$ in serie di potenza logaritmica:

$$K(s) = \log(E[\exp(sX)]) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (1 - E[\exp(sX)])^n.$$

Applicando la (1.3) alla relazione precedente si ottiene:

$$K(s) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(- \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{\mu_r s^r}{r!} \right)^n = \mu_1 s + (\mu_2 - \mu_1^2) \frac{s^2}{2!} + (\mu_3 - 3\mu_2\mu_1 + 2\mu_1^3) \frac{s^3}{3!} + \dots \quad (1.4)$$

Eguagliando i coefficienti della (1.4) con quelli della (1.1) l'enunciato risulta provato. \square

Osservazione 2. Si noti che:

- $k_0 = 0$, poiché $\mu_0 = E[X^0] = 1$;
- $k_1 = E[X]$;
- $k_2 = \text{Var}[X]$;

Proposizione 1.4. *Sia X_1, \dots, X_n una sequenza di variabili aleatorie indipendenti ciascuna con funzione generatrice dei momenti $M_i(s)$ e dei cumulanti $K_i(s)$ definite su (a_i, b_i) , $i = 1, \dots, n$. Sia $X = \sum_{i=1}^n X_i$ la somma di tali variabili e sia $\bar{X} = \frac{X}{n}$ la media. Allora le funzioni generatrici di X e \bar{X} sono definite per $s \in (\max_i a_i, \min_i b_i)$ e sono rispettivamente:*

$$K_X(s) = \sum_{i=1}^n K_{X_i}(s) \quad e \quad K_{\bar{X}}(s) = \sum_{i=1}^n K_{X_i}\left(\frac{s}{n}\right).$$

Dimostrazione. Per la definizione di $K(s)$ e per l'indipendenza si ha:

- $K_X(s) = \log(E[\exp(s \sum_{i=1}^n X_i)]) = \log(E[\exp(\sum_{i=1}^n sX_i)]) =$
 $= \log(E[\prod_{i=1}^n \exp(sX_i)]) = \log(\prod_{i=1}^n E[\exp(sX_i)]) =$
 $= \sum_{i=1}^n \log(E[\exp(sX_i)]) = \sum_{i=1}^n K_{X_i}(s)$
- $K_{\bar{X}}(s) = \log(E[\exp(s \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n})]) = \log(E[\exp(\sum_{i=1}^n \frac{sX_i}{n})]) =$
 $= \log(E[\prod_{i=1}^n \exp(\frac{sX_i}{n})]) = \log(\prod_{i=1}^n E[\exp(\frac{sX_i}{n})]) =$
 $= \sum_{i=1}^n \log(E[\exp(\frac{sX_i}{n})]) = \sum_{i=1}^n K_{X_i}(\frac{s}{n})$

□

Corollario 1.5. *Se X_1, \dots, X_n è una sequenza di variabili aleatorie i.i.d. con funzione generatrice dei momenti $M(s)$ e dei cumulanti $K(s)$ definite su (a, b) , definite X e \bar{X} la somma e la media rispettivamente, allora vale:*

$$K_X(s) = nK(s) \quad e \quad K_{\bar{X}}(s) = nK\left(\frac{s}{n}\right).$$

Dimostrazione. Dalla Proposizione 1.4 e sfruttando l'ipotesi che le variabili aleatorie hanno le stesse funzioni generatrici poiché i.i.d. segue che

$$K_X(s) = \sum_{i=1}^n K(s) = nK(s) \quad e \quad K_{\bar{X}}(s) = \sum_{i=1}^n K\left(\frac{s}{n}\right) = nK\left(\frac{s}{n}\right).$$

□

1.2 Approssimazione di Laplace

Il metodo di approssimazione di Laplace verrà utilizzato nel corso della trattazione per espandere integrali del tipo:

$$\int_c^d \exp(-ng(x))dx,$$

dove:

- g è una funzione C^∞ con minimo locale $\hat{x} \in (c, d)$;
- gli estremi di integrazione c e d possono anche essere $\pm\infty$;
- $n \in \mathbb{N}$.

Sotto queste ipotesi, vale il teorema seguente.

Teorema 1.6.

$$\int_c^d \exp(-ng(x))dx = \frac{\sqrt{2\pi} \exp(-ng(\hat{x}))}{\sqrt{ng''(\hat{x})}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (1.5)$$

In particolare:

$$O\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \left(\frac{5}{24} \hat{k}_3^2 - \frac{1}{8} \hat{k}_4\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

dove $\hat{k}_3 = \frac{g^{(3)}(\hat{x})}{g''(\hat{x})^{3/2}}$ e $\hat{k}_4 = \frac{g^{(4)}(\hat{x})}{g''(\hat{x})^2}$.

Dimostrazione. Sviluppiamo g attorno al punto \hat{x} attraverso il teorema di espansione di Taylor:

$$g(x) = g(\hat{x}) + g'(\hat{x})(x - \hat{x}) + \frac{1}{2}g''(\hat{x})(x - \hat{x})^2 + \sum_{i=3}^{\infty} \frac{g^{(i)}(\hat{x})}{i!}(x - \hat{x})^i.$$

Poiché \hat{x} è un punto di minimo si ha che $g'(\hat{x}) = 0$ e $g''(\hat{x}) > 0$.

Moltiplichiamo per n e applichiamo l'esponenziale a entrambi i membri della relazione ottenendo

$$\exp(-ng(x)) = \exp\left(-ng(\hat{x}) - \frac{1}{2}ng''(\hat{x})(x - \hat{x})^2 - n \sum_{i=3}^{\infty} \frac{g^{(i)}(\hat{x})}{i!}(x - \hat{x})^i\right),$$

e usando le proprietà dell'esponenziale possiamo scrivere

$$\exp(-ng(x)) = \exp(-ng(\hat{x})) \exp\left(-\frac{1}{2}ng''(\hat{x})(x - \hat{x})^2\right) \exp\left(-n \sum_{i=3}^{\infty} \frac{g^{(i)}(\hat{x})}{i!}(x - \hat{x})^i\right). \quad (1.6)$$

Integriamo la (1.6), assumendo che gli estremi d'integrazione siano $-\infty$ e $+\infty$ poiché l'esponenziale decade molto velocemente lontano da \hat{x} . Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ng(x)) dx = \\ & = \exp(-ng(\hat{x})) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}ng''(\hat{x})(x-\hat{x})^2\right) \exp\left(-n \sum_{i=3}^{\infty} \frac{g^{(i)}(\hat{x})}{i!} (x-\hat{x})^i\right) dx. \end{aligned}$$

Operando la sostituzione $z = \sqrt{ng''(\hat{x})}(x-\hat{x})$, il secondo membro dell'equazione precedente diventa:

$$\frac{\exp(-ng(\hat{x}))}{\sqrt{ng''(\hat{x})}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) \exp\left(-\sum_{i=3}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}(i-2)} \frac{\hat{k}_i z^i}{i!}\right) dz, \quad (1.7)$$

dove

$$\hat{k}_i := \frac{g^{(i)}(\hat{x})}{(g''(\hat{x}))^{i/2}}, \quad i = 3, 4, \dots$$

Posto $Y = -\sum_{i=3}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}(i-2)} \frac{\hat{k}_i z^i}{i!}$, espandiamo $\exp(-Y)$:

$$\exp(-Y) = 1 - Y + \frac{1}{2}Y^2 + O(Y^3).$$

Sia ora ϕ la densità di una variabile aleatoria con distribuzione normale standard³. La (1.7) diventa:

$$\sqrt{\frac{2\pi}{ng''(\hat{x})}} \exp(-ng(\hat{x})) \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(z) \left(1 - Y + \frac{1}{2}Y^2 + O(Y^3)\right) dz. \quad (1.8)$$

L'integrale nella (1.8) può essere calcolato termine a termine come segue.

- Il primo termine $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(z) dz$ è uguale a 1 e sarà il termine dominante dell'espansione.
- Il secondo termine $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(z)(-Y) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(z) \left(-\sum_{i=3}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}(i-2)} \frac{\hat{k}_i z^i}{i!}\right) dz$ contribuisce con le sole potenze pari poiché le potenze dispari sono i momenti dispari di una variabile aleatoria con distribuzione normale standard e perciò sono nulli⁴. L'unico contributo di ordine più piccolo di $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ è quello dato dal termine corrispondente a $i = 4$.

³Si veda l'Appendice A.

⁴Si veda il punto 3 dell'Appendice A.

- Il terzo termine $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(z) \left(\frac{1}{2} Y^2\right) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(z) \frac{1}{2} \left(\sum_{i=3}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}(i-2)} \frac{\hat{k}_i z^i}{i!}\right)^2 dz$ contribuisce con le sole potenze pari poiché le potenze dispari sono i momenti dispari di una variabile aleatoria con distribuzione normale standard e perciò sono nulli. L'unico contributo di ordine più piccolo di $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ è quello dato dal quadrato del termine corrispondente a $i = 3$.

Riassumendo, l'equazione (1.8) diventa

$$\sqrt{\frac{2\pi}{ng''(\hat{x})}} \exp(-ng(\hat{x})) \left[1 + \frac{1}{n} \left(-\frac{\hat{k}_4}{4!} \mathbb{E}[Z^4] + \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{k}_3}{3!}\right)^2 \mathbb{E}[Z^6] \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right],$$

dove $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Per una variabile aleatoria con distribuzione normale standard⁵ si ha che $\mathbb{E}[Z^4] = 3$ e $\mathbb{E}[Z^6] = 15$. Sostituendo nella relazione precedente, si prova l'enunciato:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{2\pi}{ng''(\hat{x})}} \exp(-ng(\hat{x})) \left[1 + \frac{1}{n} \left(-\frac{3\hat{k}_4}{24} + \frac{15}{36} \cdot \frac{1}{2} \hat{k}_3^2 \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] = \\ & = \sqrt{\frac{2\pi}{ng''(\hat{x})}} \exp(-ng(\hat{x})) \left[1 + \frac{1}{n} \left(-\frac{1\hat{k}_4}{8} + \frac{5}{24} \hat{k}_3^2 \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]. \end{aligned}$$

□

⁵Si veda il punto 3 dell'Appendice A.

Capitolo 2

Metodi saddlepoint

2.1 Densità saddlepoint del primo ordine

Sia X_1, \dots, X_n una successione di variabili aleatorie continue i.i.d. con comune funzione generatrice dei cumulanti K . Sia $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ la media e sia $f_{\bar{X}}$ la densità incognita. Sotto queste ipotesi, vale il teorema seguente.

Teorema 2.1. *La densità saddlepoint $\hat{f}_{\bar{X}}$ che approssima $f_{\bar{X}}$ nel punto \bar{x} è data da:*

$$\hat{f}_{\bar{X}}(\bar{x}) = \sqrt{\frac{n}{2\pi K''(\hat{s})}} \exp(nK(\hat{s}) - n\hat{s}\bar{x}), \quad (2.1)$$

dove il punto $\hat{s} = \hat{s}(\bar{x})$ è la soluzione dell'equazione saddlepoint:

$$K'(\hat{s}) = \bar{x}.$$

Inoltre, per $n \rightarrow \infty$, la densità in (2.1) è il termine dominante dell'espansione asintotica di $f_{\bar{X}}$ dove l'errore relativo è un $O\left(\frac{1}{n}\right)$:

$$f_{\bar{X}}(\bar{x}) = \hat{f}_{\bar{X}}(\bar{x}) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Dimostrazione. Se $X = \sum_{i=1}^n X_i$ allora $X = n\bar{X}$. Dal Corollario 1.5 si ha che $K_{n\bar{X}}(s) = K_X(s) = nK(s)$. Allora risulta

$$\exp(nK(s)) = \exp(K_{n\bar{X}}(s)) = \exp(\log(\mathbb{E}[\exp(ns\bar{X})])) = \mathbb{E}[\exp(ns\bar{X})].$$

Continuando la catena di uguaglianze e applicando la definizione di valore atteso all'ultima si ha:

$$\exp(nK(s)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ns\bar{x}) f_{\bar{X}}(\bar{x}) d\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ns\bar{x} + \log(f_{\bar{X}}(\bar{x}))) d\bar{x}. \quad (2.2)$$

Per s fissato, posto $g_s(\bar{x}) = -ns\bar{x} - \log(f_{\bar{X}}(\bar{x}))$, la (2.2) diventa:

$$\exp(nK(s)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-g_s(\bar{x})) d\bar{x}. \quad (2.3)$$

L'integrale precedente può essere approssimato con il metodo di Laplace: per poter applicare il Teorema 1.6 occorre trovare un \bar{x}_s che sia punto di minimo della funzione g_s :

- $0 = -g'_s(\bar{x}_s) = ns + \frac{\partial \ln(f_{\bar{X}}(\bar{x}_s))}{\partial \bar{x}_s}$.

Di conseguenza:

- $s = -\frac{1}{n} \frac{\partial \ln(f_{\bar{X}}(\bar{x}_s))}{\partial \bar{x}_s}$;

- $-\frac{\partial s}{\partial \bar{x}_s} = -\frac{1}{n} \frac{\partial^2 \ln(f_{\bar{X}}(\bar{x}_s))}{\partial^2 \bar{x}_s} > 0$.

- $\frac{\partial^2 g_s(\bar{x}_s)}{\partial \bar{x}_s^2} = -\frac{\partial^2 \ln(f_{\bar{X}}(\bar{x}_s))}{\partial \bar{x}_s^2} > 0$.

Attraverso l'approssimazione di Laplace, la (2.3) diventa:

$$\exp(nK(s)) \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{g''_s(\bar{x}_s)}} \exp(sn\bar{x}_s) f_{\bar{X}}(\bar{x}_s). \quad (2.4)$$

Dalla (2.4) è possibile ricavare $f_{\bar{X}}(\bar{x}_s)$:

$$f_{\bar{X}}(\bar{x}_s) \simeq \sqrt{\frac{g''_s(\bar{x}_s)}{2\pi}} \frac{\exp(nK(s))}{\exp(sn\bar{x}_s)} \simeq \sqrt{\frac{-\frac{\partial^2 \ln(f_{\bar{X}}(\bar{x}_s))}{\partial \bar{x}_s^2}}{2\pi}} \exp(nK(s) - sn\bar{x}_s).$$

Applicando la funzione logaritmo alla precedente relazione, risulta

$$\log(f_{\bar{X}}(\bar{x}_s)) \simeq nK(s) - sn\bar{x}_s - \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{2\pi}{-\frac{\partial^2 \ln(f_{\bar{X}}(\bar{x}_s))}{\partial \bar{x}_s^2}} \right) \right],$$

e, derivando rispetto a \bar{x}_s , si ottiene

$$\frac{\partial \ln(f_{\bar{X}}(\bar{x}_s))}{\partial \bar{x}_s} \simeq n(K'(s) - \bar{x}_s) \frac{\partial s}{\partial \bar{x}_s} - ns.$$

Ricordando che $ns + \frac{\partial \ln(f_{\bar{X}}(\bar{x}_s))}{\partial \bar{x}_s} = 0$ e utilizzando la precedente stima per il secondo addendo, si ottiene:

$$ns + n(K'(s) - \bar{x}_s) \frac{\partial s}{\partial \bar{x}_s} - ns = 0 \Leftrightarrow n(K'(s) - \bar{x}_s) \frac{\partial s}{\partial \bar{x}_s} = 0$$

$$\Leftrightarrow s \text{ risolve l'equazione saddlepoint } K'(s) = \bar{x}_s.$$

Derivando l'equazione saddlepoint si ha $K''(s) = \frac{\partial \bar{x}_s}{\partial s}$.
Infine, stimiamo il termine $g_s''(\bar{x}_s)$ dell'equazione (2.4):

$$\frac{\partial^2 g_s(\bar{x}_s)}{\partial \bar{x}_s^2} = -\frac{\partial^2 \ln(f_{\bar{X}}(\bar{x}_s))}{\partial \bar{x}_s^2} = n \frac{\partial s}{\partial \bar{x}_s} = n \left(\frac{\partial \bar{x}_s}{\partial s} \right)^{-1} = n (K''(s))^{-1}.$$

La (2.4) diventa quindi:

$$\exp(nK(s)) \simeq \sqrt{\frac{2\pi K''(s)}{n}} \exp(sn\bar{x}_s) f_{\bar{X}}(\bar{x}_s),$$

ovvero:

$$f_{\bar{X}}(\bar{x}_s) \simeq \sqrt{\frac{n}{2\pi K''(s)}} \exp(nK(s) - ns\bar{x}_s). \quad (2.5)$$

Il secondo membro della (2.5) stima la $f_{\bar{X}}$ nel punto \bar{x}_s e rappresenta la densità saddlepoint $\hat{f}_{\bar{X}}$. L'errore è quello commesso dall'approssimazione di Laplace nel calcolo dell'integrale ed è un $O\left(\frac{1}{n}\right)$, come dimostrato nel Teorema 1.6. Pertanto:

$$f_{\bar{X}}(\bar{x}_s) = \hat{f}_{\bar{X}}(\bar{x}_s) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

□

Corollario 2.2. *Sia X una variabile aleatoria con funzione generatrice dei cumulanti K e densità incognita f . La sua densità saddlepoint è data da:*

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi K''(\hat{s})}} \exp(K(\hat{s}) - \hat{s}x) \quad (2.6)$$

dove $K'(\hat{s}) = x$.

Dimostrazione. Il risultato segue banalmente dalla formula (2.1) ponendo $n = 1$. □

Proposizione 2.3. *Le equazioni (2.1) e (2.6) sono equivalenti.*

Dimostrazione. Per dimostrare l'implicazione (2.1) \Rightarrow (2.6) basta utilizzare il Corollario 2.2.

L'implicazione (2.6) \Rightarrow (2.1) si dimostra applicando la (2.6) alla variabile aleatoria $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ dove X_1, \dots, X_n sono variabili aleatorie i.i.d. con funzione generatrice dei cumulanti comune $K(s)$.

Per la (2.6) vale:

$$\hat{f}_{\bar{X}}(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi K_{\bar{X}}''(\hat{s})}} \exp(K_{\bar{X}}(\hat{s}) - \hat{s}\bar{x}).$$

La funzione generatrice di \bar{X} è $K_{\bar{X}}(s) = nK\left(\frac{s}{n}\right)$. Le derivate prime e seconde di $K_{\bar{X}}(s)$ sono:

- $K'_{\bar{X}}(\hat{s}) = (nK(\frac{\hat{s}}{n}))' = nK'(\frac{\hat{s}}{n}) \frac{1}{n} = K'(\frac{\hat{s}}{n});$
- $K''_{\bar{X}}(\hat{s}) = (K'(\frac{\hat{s}}{n}))' = \frac{1}{n}K''(\frac{\hat{s}}{n}).$

La (2.6) diventa quindi:

$$\begin{aligned}\hat{f}_{\bar{X}}(\bar{x}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{1}{n}K''(\frac{\hat{s}}{n})}} \exp\left(nK\left(\frac{\hat{s}}{n}\right) - \hat{s}\bar{x}\right) \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi K''(\frac{\hat{s}}{n})}} \exp\left(nK\left(\frac{\hat{s}}{n}\right) - \hat{s}\bar{x}\right).\end{aligned}\quad (2.7)$$

Chiamiamo $\tilde{s} = \frac{\hat{s}}{n}$; allora \tilde{s} risolve l'equazione saddlepoint $K'(\tilde{s}) = \bar{x}$ in quanto

$$K'(\tilde{s}) = K'\left(\frac{\hat{s}}{n}\right) = K'_{\bar{X}}(\hat{s}) = \bar{x}.$$

Sostituendo nella (2.7) si ottiene

$$\hat{f}_{\bar{X}}(\bar{x}) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi K''(\tilde{s})}} \exp(nK(\tilde{s}) - n\tilde{s}\bar{x}),$$

e questo prova l'implicazione. \square

Osservazione 3. Sia $\Psi := \{x : \hat{f}(x) > 0\}$. La (2.6) e la (2.1) vengono dette *densità saddlepoint*, anche se in generale potrebbe essere che

$$\int_{\Psi} \hat{f}(x) dx =: c \neq 1.$$

In questi casi occorre normalizzare \hat{f} e considerare come densità saddlepoint quella normalizzata:

$$\tilde{f}(x) = c^{-1}\hat{f}(x), \quad x \in \Psi.$$

Esempio 2.1. Verifichiamo che la densità saddlepoint (2.6) approssima esattamente la densità ϕ di una variabile aleatoria $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ⁶.

Una distribuzione normale standard ha come funzione generatrice dei cumulanti⁷ $K(s) = \frac{s^2}{2}$ definita per $x \in (-\infty, +\infty)$, e le cui derivate prima e seconda sono $K'(s) = s$ e $K''(s) = 1$. L'equazione saddlepoint relativa al punto x in cui si vuole calcolare la densità è quindi $\hat{s} = x$. Pertanto l'equazione (2.6) diventa:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(K(x) - x^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{x^2}{2} - x^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \phi(x).$$

⁶Si veda l'Appendice A.

⁷Si veda il punto 2 dell'Appendice A.

2.1.1 Invarianza per trasformazioni lineari

Proposizione 2.4. *Sia X una variabile aleatoria con funzione generatrice dei cumulanti $K(s)$, e sia $Y = \sigma X + \mu$, con $\sigma \neq 0$, una sua trasformazione lineare. Allora le densità saddlepoint delle due variabili aleatorie sono equivalenti.*

Dimostrazione. Poiché X ha K come funzione generatrice dei cumulanti, allora quella di Y risulta essere:

$$K_Y(s) = \mu s + K(\sigma s), \quad (2.8)$$

infatti:

$$\begin{aligned} K_Y(s) &= \log(\mathbb{E}[\exp(sY)]) = \log(\mathbb{E}[\exp(s(\sigma X + \mu))]) = \log(\mathbb{E}[\exp(s\sigma X) \exp(s\mu)]) \\ &= \log(\exp(s\mu) \mathbb{E}[\exp(s\sigma X)]) = \log(\exp(s\mu) M(s\sigma)) \\ &= s\mu + K(s\sigma). \end{aligned}$$

Procediamo con il calcolo della densità saddlepoint $\hat{f}_Y(y)$. Sia \hat{s}_y la soluzione dell'equazione saddlepoint $K'_Y(\hat{s}_y) = y$. Derivando l'espressione (2.8), si ha $\mu + \sigma K'(\sigma \hat{s}_y) = y$, da cui $K'(\sigma \hat{s}_y) = \frac{y - \mu}{\sigma} = x$. Sia ora \hat{s}_x la soluzione dell'equazione saddlepoint $K'(\hat{s}_x) = x$. Poiché entrambe le equazioni saddlepoint si riferiscono al punto x , per l'unicità delle soluzioni deve valere $\hat{s}_x = \sigma \hat{s}_y$. Allora la densità saddlepoint di Y valutata nel punto y risulta essere:

$$\begin{aligned} \hat{f}_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi K''_Y(\hat{s}_y)}} \exp(K_Y(\hat{s}_y) - \hat{s}_y y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi K''(\sigma \hat{s}_y) \sigma^2}} \exp(\mu \hat{s}_y + K(\sigma \hat{s}_y) - \hat{s}_y (\sigma x + \mu)) \\ &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi K''(\hat{s}_x)}} \exp(K(\hat{s}_x) - \hat{s}_x x) \\ &= \frac{\hat{f}_X(x)}{\sigma}. \end{aligned}$$

In questo modo si è mostrato che, a meno di una costante, X e la sua trasformazione lineare Y hanno la stessa densità. \square

2.2 Famiglia esponenziale

I nuovi concetti che verranno introdotti in seguito offrono un metodo alternativo per ricavare la densità saddlepoint del secondo ordine spiegando perché i metodi saddlepoint sono così accurati.

Definizione 2.1. Una *famiglia esponenziale uniparametrica* \mathfrak{F} è una famiglia di densità di probabilità della forma:

$$\mathfrak{F} = \{f_s(x) = h(x) \exp(T(x)s - \phi(s))\} \quad (2.9)$$

dove:

- s è un parametro reale fissato ;
- $h(x)$ è una funzione misurabile secondo Lebesgue;
- $T(x)$ è una funzione continua;
- $\phi(s)$ è la funzione normalizzatrice, quella che rende la (2.9) una famiglia di vere densità, cioè con integrale 1.

Osservazione 4. Sia X una variabile aleatoria con densità $h(x)$. Allora la normalizzatrice di (2.9) è la funzione generatrice dei cumulanti di $T(X)$ ovvero:

$$\phi(s) = K_{T(X)}(s).$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_s(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \exp(T(x)s) \exp(-\phi(s)) dx \\ &= \exp(-\phi(s)) \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \exp(T(x)s) dx. \end{aligned}$$

Allora:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_s(x) dx = 1 &\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \exp(T(x)s) dx = \exp(\phi(s)) \\ &\Leftrightarrow \phi(s) = \log\left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \exp(T(x)s) dx\right) \\ &\Leftrightarrow \phi(s) = \log(\mathbb{E}[\exp(sT(X))]) = K_{T(X)}(s) \end{aligned}$$

□

Osservazione 5. $\phi(s)$ è ben definita su

$$\Phi = \{s \in \mathbb{R} : \phi(s) < \infty\}$$

Osservazione 6. Gli elementi della famiglia (2.9) diventano:

$$f_t(x) = f_0(x) \exp(T(x)s - \phi(s))$$

Dimostrazione. Per l'Osservazione 4:

$$\begin{aligned}\phi(s) = K_{T(X)}(s) &\Rightarrow \phi(0) = \log(\mathbb{E}[1]) = 0 \\ &\Rightarrow \exp(-\phi(0)) = (\exp(\phi(0)))^{-1} = (\exp(0))^{-1} = 1.\end{aligned}$$

Segue che:

$$f_0(x) = h(x) \exp(-\phi(0)) = h(x).$$

Sostituendo $h(x)$ con $f_0(x)$ nella (2.9) si prova la tesi. \square

Proposizione 2.5. *Sia X una variabile aleatoria definita come sopra con funzione generatrice dei cumulanti $K(s)$. Valgono le seguenti relazioni ⁸:*

1. $\phi'(s) = \mathbb{E}_s[T(X)];$

2. $\phi''(s) = \text{Var}_s[T(X)].$

Dimostrazione. Per le Osservazioni 4 e 6 risulta:

$$\phi(s) = K_{T(X)}(s) = \log\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x) \exp(T(x)s) dx\right).$$

Calcoliamo le derivate prime e seconde ricordando che:

$$\exp(-\phi(s)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x) \exp(T(x)s) dx.$$

1.

$$\begin{aligned}\phi'(s) &= \frac{d}{ds} \log\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x) \exp(T(x)s) dx\right) \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} T(x) f_0(x) \exp(T(x)s) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x) \exp(T(x)s) dx} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} T(x) f_0(x) \exp(T(x)s - \phi(s)) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} T(x) f_s(x) dx = \mathbb{E}_s[T(X)];\end{aligned}$$

⁸Il pedice s evidenzia che il valore atteso e la varianza sono riferiti alla densità di probabilità f_s .

2.

$$\begin{aligned}
\phi''(s) &= \frac{d^2}{ds^2} \log\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x) \exp(T(x)s) dx\right) \\
&= \frac{d}{ds} \int_{-\infty}^{+\infty} T(x) f_0(x) \exp(T(x)s - \phi(s)) dx \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} T^2(x) f_0(x) \exp(T(x)s) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x) \exp(T(x)s) dx} - E_s[T(X)]^2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} T^2(x) f_0(x) \exp(T(x)s - \phi(s)) dx - E_s[T(X)]^2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} T^2(x) f_s(x) dx - E_s[T(X)]^2 \\
&= E_s[T^2(X)] - E_s[T(X)]^2 = \text{Var}_s[T(X)].
\end{aligned}$$

□

Definizione 2.2. Sia \mathfrak{F} una famiglia esponenziale di densità f_s . Si definisce *insieme parametrico naturale* di \mathfrak{F} l'insieme

$$\Gamma = \left\{ s \in \mathbb{R} : \exp(\phi(s)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(sT(x)) h(x) dx < \infty \right\}.$$

Osservazione 7. Γ descrive l'insieme di valori di s per i quali la densità f_s è ben definita.

Dimostrazione. f_s è ben definita se:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f_s(x) dx = 1 &\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(sT(x) - \phi(s)) h(x) dx = 1 \\
&\Leftrightarrow \exp(\phi(s)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(sT(x)) h(x) dx < +\infty
\end{aligned}$$

□

Definizione 2.3. Una famiglia esponenziale \mathfrak{F} si dice *regolare* se l'insieme parametrico naturale Γ è un aperto di \mathbb{R} che coincide con Φ definito nell'Osservazione 5.

Gli esempi che seguono mostrano come molti dei modelli parametrici noti siano famiglie esponenziali del tipo (2.9):

Esempio 2.2. La *densità di bernoulli* di parametro α è una famiglia esponenziale di parametro $s = \log\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)$.

Sia $p(x)$ la densità di una variabile aleatoria distribuita secondo Bernoulli:

$$p(x) = \alpha^x (1 - \alpha)^{1-x}.$$

Cerchiamo di scriverla nella forma (2.9):

$$\begin{aligned} p(x) &= \alpha^x (1 - \alpha)^{1-x} = \exp(\log(\alpha^x (1 - \alpha)^{1-x})) \\ &= \exp(x \log \alpha + (1 - x) \log(1 - \alpha)) = \exp(x \log\left(\frac{\alpha}{1 - \alpha}\right) + \log(1 - \alpha)) \\ &= \exp(xs - \log(1 + \exp(s))) = h(x) \exp(T(x)s - \phi(s)) \end{aligned}$$

dove:

- $h(x) = 1$;
- $T(x) = x$;
- $s = \log\left(\frac{\alpha}{1 - \alpha}\right)$;
- $\phi(s) = \log(1 + \exp(s))$.

L'ultima uguaglianza è giustificata dal fatto che:

$$\begin{aligned} \log(1 - \alpha) &= \log\left(\frac{1}{\frac{1}{1 - \alpha}}\right) = \log\left(\frac{1}{1 + \frac{\alpha}{1 - \alpha}}\right) = \log\left(\frac{1}{1 + \exp(\log(\frac{\alpha}{1 - \alpha}))}\right) \\ &= \log\left(\frac{1}{1 + \exp(s)}\right) = -\log(1 + \exp(s)) \end{aligned}$$

Esempio 2.3. La *densità esponenziale negativa* di parametro $\lambda > 0$ è una famiglia esponenziale di parametro $s = -\lambda$.

Sia $f(x)$ la densità di una variabile aleatoria distribuita secondo una distribuzione esponenziale negativa:

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x).$$

Cerchiamo di scriverla nella forma (2.9):

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda \exp(-\lambda x) = \exp(\log(\lambda)) \exp(-\lambda x) = \exp(\log(\lambda) - \lambda x) \\ &= h(x) \exp(T(x)s - \phi(s)) \end{aligned}$$

dove:

- $h(x) = 1$;
- $T(x) = x$;
- $s = -\lambda$;
- $\phi(s) = -\log(\lambda)$.

Esempio 2.4. La *densità di Poisson* di parametro $\lambda > 0$ è una famiglia esponenziale di parametro $s = \log(\lambda)$.

Sia $f(x)$ la densità di una variabile aleatoria distribuita secondo una distribuzione di Poisson:

$$f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \exp(-\lambda).$$

Cerchiamo di scriverla nella forma (2.9):

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\lambda^x}{x!} \exp(-\lambda) = \frac{1}{x!} \exp(\log(\lambda^x)) \exp(-\lambda) \\ &= \frac{1}{x!} \exp(x \log(\lambda) - \lambda) = h(x) \exp(T(x)s - \phi(s)) \end{aligned}$$

dove:

- $h(x) = \frac{1}{x!}$;
- $T(x) = x$;
- $s = \log(\lambda)$;
- $\phi(s) = \lambda$.

2.2.1 Famiglie esponenziali s -tilting

I metodi saddlepoint attribuiti a Daniels (1954) sviluppano i primi concetti di Esscher (1932) il cui metodo prevedeva di trovare un modo per creare una famiglia esponenziale regolare \mathfrak{F} detta *famiglia esponenziale s -tilting* partendo da una distribuzione la cui funzione generatrice dei cumulanti convergesse regolarmente ossia nel modo spiegato nell'Osservazione 1.1 per poi applicare alle densità appartenenti a \mathfrak{F} l'espansione di Edgeworth che svilupperemo in seguito.

Proposizione 2.6. *La famiglia*

$$\mathfrak{F} = \{f_s(x), \quad s \in \Gamma\} \quad \text{con} \quad f_s(x) = \exp(sx - K(s))f(x) \quad (2.10)$$

è una famiglia esponenziale regolare dove $f_s(x)$ è detta densità s -tilting.

Dimostrazione. Sia $K(s) = \log(M(s))$ la funzione generatrice dei cumulanti e supponiamo ancora vera l'ipotesi di convergenza dell'Osservazione 1; applicando l'esponenziale ad entrambi i membri si ha:

$$\exp(K(s)) = M(s) = E[\exp(sX)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(sx) f(x) dx.$$

Dividendo tutto per $\exp(K(s))$ si ottiene:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(sx - K(s))f(x)dx.$$

Sia $f_s(x) := \exp(sx - K(s))f(x)$; poiché f_s ha integrale 1 è una densità; al variare di s otteniamo una famiglia esponenziale dove:

- $h(x) = f(x)$;
- $T(x) = x$;
- $\phi(s) = K(s)$;
- $s \in \Phi = \Gamma$ cioè $\mathfrak{F} = \{f_s(x), \quad s \in \Gamma\}$ è regolare.

Infatti, poiché per l'Osservazione 4 vale che $\phi(s) = K_{T(X)}(s)$ e in questo caso $T(X) = \text{Id}_X$, si ha che $\phi(s) = K(s)$.

Calcoliamo ora l'insieme Γ :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{s \in \mathbb{R} : \exp(\phi(s)) < \infty\} = \{s \in \mathbb{R} : \exp(K(s)) < \infty\} \\ &= \{s \in \mathbb{R} : M(s) < \infty\}. \end{aligned}$$

Ricordando che la funzione generatrice dei momenti e dei cumulanti hanno lo stesso dominio poiché $M(s) > 0 \Rightarrow K(s) = \log(M(s))$ è ben definito, calcoliamo l'insieme Φ :

$$\begin{aligned} \Phi &= \{s \in \mathbb{R} : \phi(s) < \infty\} = \{s \in \mathbb{R} : K(s) < \infty\} \\ &= \{s \in \mathbb{R} : M(s) < \infty\} \end{aligned}$$

□

Osservazione 8. Si osservi che la densità vera per X tra quelle definite nella (2.10) si ottiene fissando il parametro $s = 0$.

Osservazione 9. $f_s(x)$ è detta *densità s -tilting* poiché si ottiene moltiplicando la densità originale $f(x)$ per $\exp(sx)$ per poi normalizzare moltiplicando per $\phi(s)$. Per quanto affermato nell'equazione (2.9) essa risulta essere la normalizzatrice, in questo caso equivalente a $K(s)$.

Per questo motivo sarebbe più appropriato l'uso dell'appellativo *tilted approximation* anziché *saddlepoint approximation* ma per ragioni storiche è quest'ultimo il termine più diffuso in letteratura.

Proposizione 2.7. *Sia X la variabile aleatoria definita sopra con densità $f(x)$ e funzione generatrice dei cumulanti $K(s)$, $s \in \Gamma$.*

Denotiamo con X_s la variabile aleatoria con densità s -tilting f_s , s fissato. Allora:

- $E[X_s] = K'(s)$;
- $\text{Var}[X_s] = K''(s)$.

Dimostrazione. Per la Proposizione 2.5 si ha:

$$\phi'(s) = E_s[T(X)]$$

$$\phi''(s) = \text{Var}_s[T(X)].$$

Nella densità s -tilting $T(X) = \text{Id}_X$ e $\phi(s) = K(s)$; da qui segue che

$$K'(s) = E_s[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_s(s) dx = E[X_s];$$

$$K''(s) = \text{Var}_s[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_s(s) dx - E[X_s]^2 = \text{Var}[X_s].$$

□

Sia X_1, \dots, X_n una successione di variabili aleatorie continue i.i.d. con comune funzione generatrice dei cumulanti K . Sia $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ la media e sia $f_{\bar{X}}$ la densità della media.

Proposizione 2.8. *Sotto le ipotesi precedenti la famiglia*

$$\mathfrak{F} = \{f_s(x), \quad s \in \Gamma\} \quad \text{con} \quad f_s(x) = \exp(nsx - nK(s))f_{\bar{X}}(x) \quad (2.11)$$

è una famiglia esponenziale regolare.

Dimostrazione. Per verificare che \mathfrak{F} è una famiglia esponenziale regolare dobbiamo verificare che:

- $\forall s$ f_s ha integrale 1;
- f_s è della forma espressa nell'equazione (2.9).

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_s dx = 1 &\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(nsx - nK(s))f_{\bar{X}}(x) dx = 1 \\ &\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\tilde{s}x - nK\left(\frac{\tilde{s}}{n}\right)\right) f_{\bar{X}}(x) dx = 1 \\ &\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} (\exp(\tilde{s}x)) \cdot \left(\exp\left(-nK\left(\frac{\tilde{s}}{n}\right)\right)\right) f_{\bar{X}}(x) dx = 1 \end{aligned}$$

dove $\tilde{s} = s \cdot n$.

Dal Corollario 1.5 per il quale $K_{\bar{X}}(\tilde{s}) = nK\left(\frac{\tilde{s}}{n}\right)$ segue che:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f_s dx = 1 &\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} (\exp(\tilde{s}x)) \cdot (\exp(-K_{\bar{X}}(\tilde{s}))) f_{\bar{X}}(x) dx = 1 \\
&\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} (\exp(\tilde{s}x) \cdot (\exp(-\log(\mathbb{E}[\exp(\tilde{s}x)])))) f_{\bar{X}}(x) dx = 1 \\
&\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} (\exp(\tilde{s}x) \cdot (\exp(\log(\mathbb{E}[\exp(\tilde{s}x)]))^{-1})) f_{\bar{X}}(x) dx = 1 \\
&\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} (\exp(\tilde{s}x) \cdot (\mathbb{E}[\exp(\tilde{s}x)]^{-1})) f_{\bar{X}}(x) dx = 1 \\
&\Leftrightarrow \mathbb{E}[\exp(\tilde{s}x)] \cdot (\mathbb{E}[\exp(\tilde{s}x)]^{-1}) = 1 \\
&\Leftrightarrow \mathbb{E}[\exp(\tilde{s}x)] = \mathbb{E}[\exp(\tilde{s}x)]
\end{aligned}$$

Poiché f_s ha integrale 1 è una densità; al variare di s otteniamo una famiglia esponenziale dove:

- $h(x) = f_{\bar{X}}(x)$;
- $T(x) = nx$;
- $\phi(s) = nK(s)$;
- $s \in \Phi = \Gamma$ cioè $\mathfrak{F} = \{f_s(x), \quad s \in \Gamma\}$ è regolare.

Infatti:

siccome per l'Osservazione 4 $\phi(s) = K_{T(X)}(s)$ e in questo caso $T(X) = n\text{Id}_X$ si ha che $\phi(s) = K_{nX}(s) = K_{\sum_{i=1}^n X_i}(s) = nK(s)$ per il Corollario 2.9.

Calcoliamo ora l'insieme Γ :

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \{s \in \mathbb{R} : \exp(\phi(s)) < \infty\} = \{s \in \mathbb{R} : \exp(nK(s)) < \infty\} \\
&= \{s \in \mathbb{R} : \exp(n \log(\mathbb{E}[\exp(sx)])) < \infty\} \\
&= \{s \in \mathbb{R} : \mathbb{E}[\exp(sx)]^n < \infty\} \\
&= \{s \in \mathbb{R} : nM(s) < \infty\}.
\end{aligned}$$

Ricordando che la funzione generatrice dei momenti e dei cumulanti hanno lo stesso dominio poiché $M(s) > 0 \Rightarrow K(s) = \log(M(s))$ è ben definito, calcoliamo l'insieme Φ :

$$\begin{aligned}
\Phi &= \{s \in \mathbb{R} : \phi(s) < \infty\} = \{s \in \mathbb{R} : nK(s) < \infty\} \\
&= \{s \in \mathbb{R} : \log(\mathbb{E}[\exp(sx)]^n) < \infty\} \\
&= \{s \in \mathbb{R} : \mathbb{E}[\exp(sx)]^n < \infty\} \\
&= \{s \in \mathbb{R} : nM(s) < \infty\}
\end{aligned}$$

□

2.3 Espansioni di Edgeworth

Le espansioni di Edgeworth sono serie formali che approssimano una distribuzione di probabilità a partire dai suoi cumulanti. Questa serie asintotica si rivelerà molto utile per offrire uno sviluppo alternativo della densità saddlepoint che motivi l'accuratezza di questi metodi.

2.3.1 Polinomi di Hermite

Sia $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ e sia $\phi(z)$ la sua densità⁹. Se si deriva ricorsivamente ϕ si può notare il termine $\phi(z)$ che rimane in ciascuna derivazione moltiplicato per un polinomio diverso a seconda dell'ordine di derivazione; questi polinomi $\{H_k(z)\}_{k \geq 0}$ prendono il nome di *polinomi di Hermite*:

$$\begin{aligned} (\phi(z))^0 &= \left(\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\right) && \Rightarrow H_0(z) = 1 \\ (\phi(z))' &= \left(\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\right)' = \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)(-1)z && \Rightarrow H_1(z) = z \\ (\phi(z))'' &= \left(\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)(-1)z\right)' \\ &= -1\left[\left(\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)(-z^2) + \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\right)\right] \\ &= (-1)^2 \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)(z^2 - 1) && \Rightarrow H_2(z) = z^2 - 1 \end{aligned}$$

Iterando le derivazioni si ottiene:

$$\phi^{(k)}(z) = (-1)^k \phi(z) H_k(z).$$

Riportiamo le espressioni dei primi 7 polinomi di Hermite:

$$\begin{aligned} H_0(z) &= 1, \\ H_1(z) &= z, \\ H_2(z) &= z^2 - 1, \\ H_3(z) &= z^3 - 3z, \\ H_4(z) &= z^4 - 6z^2 + 3, \\ H_5(z) &= z^5 - 10z^3 + 15z, \\ H_6(z) &= z^6 - 15z^4 + 45z^2 - 15. \end{aligned}$$

⁹Si veda l'Appendice A.

Osservazione 10. I polinomi di Hermite godono di due proprietà che risulteranno essere fondamentali nella trattazione dei metodi saddlepoint che vedremo in seguito:

1. $H_i(0) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \text{ è dispari,} \\ 1, & \text{se } i \text{ è pari.} \end{cases}$
2. I polinomi di Hermite costituiscono una successione di polinomi ortogonali sull'intera retta reale rispetto alla funzione peso $\phi(z)$, cioè:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_i(z)H_j(z)\phi(z)dz = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j, \\ i!, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Questo equivale a dire che sono ortogonali rispetto alla distribuzione normale di probabilità. L'insieme $\{H_i(z)\phi(z)\}_{i \geq 0}$ costituisce una base ortogonale dello spazio di Hilbert delle funzioni a valori complessi $f(z)$ a quadrato sommabile sull'intera retta reale¹⁰, ovvero

$$f(z) = \sum_{i=0}^{+\infty} c_i H_i(z)\phi(z), \quad (2.12)$$

dove i c_i sono le coordinate di f nella base enunciata.

Osservazione 11. Si osservi che i coefficienti dell'espressione (2.12) sono:

$$c_i = \frac{1}{i!} \int_{-\infty}^{+\infty} H_i(z)f(z)dz. \quad (2.13)$$

Dimostrazione. Sostituendo la (2.12) nella (2.13) si ottiene:

$$c_i = \frac{1}{i!} \int_{-\infty}^{+\infty} H_i(z) \sum_{k=0}^{+\infty} c_k H_k(z)\phi(z)dz.$$

Della sommatoria rimane solo il termine i -esimo per la proprietà di ortogonalità dei polinomi di Hermite, per cui la formula precedente diventa:

$$c_i = \frac{1}{i!} \int_{-\infty}^{+\infty} H_i(z)c_i H_i(z)\phi(z)dz = \frac{1}{i!} i! c_i = c_i.$$

□

¹⁰Si tratta di funzioni che soddisfano la seguente ipotesi: $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(z)|^2 \phi(z)dz < \infty$.

2.3.2 Serie di Gram-Charlier di tipo A

Introduciamo le *serie asintotiche di Gram-Charlier di tipo A per densità standardizzate*¹¹ con media $\mu = 0$ e varianza $\sigma^2 = 1$. La particolarità di queste serie sono i coefficienti c_i espressi in termini dei momenti μ_i ¹². Vediamo i primi 7 coefficienti lavorando sulla (2.13):

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{0!} \int_{-\infty}^{+\infty} H_0(z) f(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz = 1; \\
c_1 &= \frac{1}{1!} \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(z) f(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} z f(z) dz = \mathbf{E}[Z] = \mu = 0; \\
c_2 &= \frac{1}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} H_2(z) f(z) dz = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (z^2 - 1) f(z) dz \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f(z) dz - \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz \right) = \frac{1}{2} (\sigma^2 - 1) = 0; \\
c_3 &= \frac{1}{3!} \int_{-\infty}^{+\infty} H_3(z) f(z) dz = \frac{1}{6} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} z^3 f(z) dz - 3 \int_{-\infty}^{+\infty} z f(z) dz \right) \\
&= \frac{1}{6} (\mu_3 - 3\mu) = \frac{1}{6} \mu_3; \\
c_4 &= \frac{1}{4!} \int_{-\infty}^{+\infty} H_4(z) f(z) dz = \frac{1}{24} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} z^4 f(z) dz - 6 \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f(z) dz + 3 \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz \right) \\
&= \frac{1}{24} (\mu_4 - 6 + 3) = \frac{1}{24} (\mu_4 - 3); \\
c_5 &= \frac{1}{5!} \int_{-\infty}^{+\infty} H_5(z) f(z) dz = \frac{1}{120} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} z^5 f(z) dz - 10 \int_{-\infty}^{+\infty} z^3 f(z) dz + 15 \int_{-\infty}^{+\infty} z f(z) dz \right) \\
&= \frac{1}{120} (\mu_5 - 10\mu_3 + 15\mu) = \frac{1}{120} (\mu_5 - 10\mu_3); \\
c_6 &= \frac{1}{6!} \int_{-\infty}^{+\infty} H_6(z) f(z) dz \\
&= \frac{1}{720} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} z^6 f(z) dz - 15 \int_{-\infty}^{+\infty} z^4 f(z) dz + 45 \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f(z) dz - 15 \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz \right) \\
&= \frac{1}{720} (\mu_6 - 15\mu_4 + 45\sigma^2 - 15) = \frac{1}{720} (\mu_6 - 15\mu_4 + 30).
\end{aligned}$$

Lo sviluppo in serie (2.12) della densità f secondo Gram-Charlier risulta essere:

$$f(z) = \phi(z) \left(1 + \frac{1}{6} \mu_3 H_3(z) + \frac{1}{24} (\mu_4 - 3) H_4(z) + \frac{1}{120} (\mu_5 - 10\mu_3) H_5(z) + \dots \right).$$

¹¹Le densità di probabilità sono a quadrato sommabile, quindi per esse vale la (2.12).

¹²Si veda l'Osservazione 1.1.

Le serie asintotiche di Gram-Charlier di tipo A possono essere applicate anche a densità non standardizzare f con media μ e varianza σ^2 . A tale scopo, è fondamentale dimostrare il lemma seguente.

Lemma 2.9. *Sia X una variabile aleatoria con densità $f_X(x)$, media μ e varianza σ^2 . Sia $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, $\forall \mu, \sigma \in \mathbb{R}, \mu \neq 0$. Allora:*

$$f_X(x(z)) = \frac{1}{\sigma} f_Z(z),$$

dove $f_Z(z)$ risulta essere una densità standardizzata.

Dimostrazione. Sia $F_Z(t) = \int_{-\infty}^t f_Z(z) dz$ la funzione di ripartizione di Z , cioè

$$F_Z(t) = P(Z < t) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < t\right) = \int_{\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-\mu}{\sigma} < t\}} f_X(x) dx.$$

Con il cambio di variabile $z(x) = \frac{x-\mu}{\sigma}$ si ottiene

$$F_Z(t) = \int_{\{x \in \mathbb{R} \mid z < t\}} f_X(\sigma z + \mu) \sigma dz = \int_{-\infty}^t f_X(x(z)) \sigma dz.$$

Da ciò segue che $f_Z(z) = f_X(x(z)) \sigma$, cioè $f_X(x(z)) = \frac{1}{\sigma} f_Z(z)$. Inoltre la densità f_Z è standardizzata in quanto:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z] &= \mathbb{E}\left[\frac{X - \mu}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma}(\mathbb{E}[X] - \mu) = \frac{1}{\sigma}(\mu - \mu) = 0; \\ \text{Var}[Z] &= \text{Var}\left[\frac{X - \mu}{\sigma}\right] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[\frac{X - \mu}{\sigma}\right]^2 \\ &= \frac{1}{\sigma^2} (\mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[\mu^2] - 2\mu\mathbb{E}[X]) = \frac{1}{\sigma^2} (\mathbb{E}[X^2] + \mu^2 - 2\mu^2) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} (\sigma^2 + \mu^2 + \mu^2 - 2\mu^2) = \frac{1}{\sigma^2} \sigma^2 = 1. \end{aligned}$$

□

Lemma 2.10. *Sia $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, dove X_i sono variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite con media μ , varianza σ^2 e funzione generatrice dei cumulanti K . Sia $Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$, $\forall \mu, \sigma \in \mathbb{R}, \mu \neq 0$. Allora:*

$$f_{\bar{X}}(\bar{x}(z)) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} f_Z(z),$$

dove $f_Z(z)$ risulta essere una densità standardizzata.

Dimostrazione. Sia $F_Z(t) = \int_{-\infty}^t f_Z(z)dz$ la funzione di ripartizione di Z , cioè:

$$F_Z(t) = P(Z < t) = P\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} < t\right) = \int_{\{\bar{x} \in \mathbb{R} \mid \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{\sigma} < t\}} f_{\bar{X}}(x)dx.$$

Con il cambio di variabile $z(\bar{x}) = \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{\sigma}$, si ottiene:

$$F_Z(t) = \int_{\{\bar{x} \in \mathbb{R} \mid z < t\}} f_{\bar{X}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z + \mu\right) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}dz = \int_{-\infty}^t f_{\bar{X}}(\bar{x}(z)) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}dz.$$

Da ciò segue che $f_Z(z) = f_{\bar{X}}(\bar{x}(z)) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, cioè $f_{\bar{X}}(\bar{x}(z)) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} f_Z(z)$. \square

È possibile sviluppare la serie di Gram-Charlier di tipo A per densità non standardizzate di variabile aleatorie X sfruttando il Lemma 2.9 e lo sviluppo di Gram-Charlier già visto:

$$f_X(x(z)) = \frac{1}{\sigma} f_Z(z) = \frac{1}{\sigma} \phi(z) \left(1 + \frac{1}{6} \mu_3 H_3(z) + \frac{1}{24} (\mu_4 - 3) H_4(z) + \frac{1}{120} (\mu_5 - 10\mu_3) H_5(z) + \dots \right),$$

dove i μ_i sono ora i momenti standardizzati di $X \sim f$, cioè:

$$\mu_i = \mathbb{E} \left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)^i \right].$$

2.3.3 Serie di Edgeworth

L'espansione di Edgeworth di una densità f esprime i coefficienti c_i dell'equazione (2.12) in termini dei cumulanti della variabile aleatoria $X \sim f$. La serie troncata al termine $i = 6$ ci darà la densità saddlepoint del secondo ordine come vedremo in seguito.

Per esprimere i coefficienti c_i attraverso i cumulanti occorre ricordare la relazione espressa nella Proposizione 1.3 e utilizzarla nell'espansione di Gram-Charlier.

Osservazione 12. Le relazioni tra momenti e cumulanti espressa nella Proposizione 1.3 per densità standardizzate f con media $\mu = 0$ e varianza $\sigma^2 = 1$

diventano:

$$\begin{aligned}
k_0 &= 0 \\
k_1 &= \mu_1 = 0 \\
k_2 &= \mu_2 - \mu_1^2 = \sigma^2 = 1 && \Rightarrow \mu_2 = 1 \\
k_3 &= \mu_3 \\
k_4 &= \mu_4 - 3\mu_2^2 = \mu_4 - 3 && \Rightarrow \mu_4 = k_4 + 3 \\
k_5 &= \mu_5 - 10\mu_3\mu_2^2 = \mu_5 - 10\mu_3 && \Rightarrow \mu_5 = k_5 + 10k_3 \\
k_6 &= \mu_6 - 15\mu_4\mu_2 - 10\mu_3^2 + 30\mu_2^3 \\
&= \mu_6 - 15(k_4 + 3) - 10k_3^2 + 30 \\
&= \mu_6 - 15k_4 - 10k_3^2 - 15 && \Rightarrow \mu_6 = k_6 + 15k_4 + 10k_3^2 + 15.
\end{aligned}$$

Riprendiamo ora i coefficienti ricavati in precedenza per l'espansione in serie di Gram-Charlier ed esprimiamoli in funzione dei cumulanti k_i :

$$\begin{aligned}
c_0 &= 1 \\
c_1 &= 0 \\
c_2 &= 0 \\
c_3 &= \frac{1}{6}\mu_3 && \Rightarrow c_3 = \frac{1}{6}k_3 \\
c_4 &= \frac{1}{24}(\mu_4 - 3) && \Rightarrow c_4 = \frac{1}{24}k_4 \\
c_5 &= \frac{1}{120}(\mu_5 - 10\mu_3) && \Rightarrow c_5 = \frac{1}{120}(k_5 + 10k_3 - 10k_3) = \frac{1}{120}k_5 \\
c_6 &= \frac{1}{720}(\mu_6 - 15\mu_4 + 30) && \Rightarrow c_6 = \frac{1}{720}(k_6 + 10k_3^2).
\end{aligned}$$

Lo sviluppo in serie (2.12) secondo Edgeworth della densità standardizzata f di una variabile aleatoria Z risulta essere:

$$f(z) = \phi(z) \left(1 + \frac{1}{6}k_3H_3(z) + \frac{1}{24}k_4H_4(z) + \frac{1}{120}k_5H_5(z) + \dots \right).$$

Le *serie asintotiche di Edgeworth* possono essere applicate anche a variabili aleatorie X con densità non standardizzata f_X con media μ e varianza σ^2 utilizzando il Lemma 2.9:

$$f_X(x(z)) = \frac{1}{\sigma}f_Z(z) = \frac{1}{\sigma}\phi(z) \left(1 + \frac{1}{6}\hat{k}_3H_3(z) + \frac{1}{24}\hat{k}_4H_4(z) + \frac{1}{120}\hat{k}_5H_5(z) + \dots \right)$$

dove i \hat{k}_i sono ora i cumulanti standardizzati di $X \sim f$ ovvero:

$$\hat{k}_i = \frac{K^{(i)}(0)}{\sigma^i}$$

e $K^{(i)}(0)$ è l' i -esimo cumulante di $X \sim f$.

Poiché la varianza σ^2 equivale per l'Osservazione 2 al secondo cumulante $k_2 = K''(0)$, i cumulanti standardizzati assumeranno la seguente forma:

$$\hat{k}_i = \frac{k_i}{k_2^{i/2}} = \frac{k_i}{K''(0)^{i/2}}. \quad (2.14)$$

Supponiamo di voler calcolare l'espansione di Edgeworth di $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ dove X_i sono variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite con media μ , varianza σ^2 e funzione generatrice dei cumulanti K . Per la Proposizione 1.4 la funzione generatrice dei cumulanti di \bar{X} risulta essere:

$$K_{\bar{X}}(s) = \sum_{i=1}^n K_{X_i} \left(\frac{s}{n} \right) = nK \left(\frac{s}{n} \right).$$

Per calcolare i cumulanti standardizzati di \bar{X} è necessario conoscere le derivate di $K_{\bar{X}}(s)$:

$$K'_{\bar{X}}(s) = nK' \left(\frac{s}{n} \right) \frac{1}{n} = K' \left(\frac{s}{n} \right);$$

$$K''_{\bar{X}}(s) = K'' \left(\frac{s}{n} \right) \frac{1}{n} \Rightarrow k_2 = K''_{\bar{X}}(0) = K''(0)n^{-1}.$$

Iterando il procedimento si ottiene la seguente formula per la derivata i -esima:

$$K^{(i)}_{\bar{X}}(s) = K^{(i)} \left(\frac{s}{n} \right) \frac{1}{n^{i-1}} = n^{1-i} K^{(i)} \left(\frac{s}{n} \right).$$

Valutando la precedente nel punto $s = 0$ e utilizzando la (2.14), i cumulanti standardizzati di \bar{X} risultano i seguenti:

$$\hat{k}_i^{(\bar{X})} = \frac{K^{(i)}_{\bar{X}}(0)}{K''_{\bar{X}}(0)^{i/2}} = \frac{n^{1-i} K^{(i)}(0)}{(K''(0)n^{-1})^{i/2}} = \frac{n^{1-i}}{n^{-i/2}} \frac{K^{(i)}(0)}{(K''(0))^{i/2}} = n^{1-i/2} \hat{k}_i. \quad (2.15)$$

I coefficienti dell'espansione di Edgeworth relativa a \bar{X} sono quindi:

$$c_0 = 1$$

$$c_1 = 0$$

$$c_2 = 0$$

$$c_3 = \frac{1}{6} \hat{k}_3^{(\bar{X})} = \frac{1}{6} n^{1-\frac{3}{2}} \hat{k}_3 = \frac{\hat{k}_3}{6\sqrt{n}}$$

$$c_4 = \frac{1}{24} \hat{k}_4^{(\bar{X})} = \frac{1}{24} n^{1-\frac{4}{2}} \hat{k}_4 = \frac{\hat{k}_4}{24n}$$

$$c_5 = \frac{1}{120} \hat{k}_5^{(\bar{X})} = \frac{1}{120} n^{1-\frac{5}{2}} \hat{k}_5 = \frac{\hat{k}_5}{120n^{3/2}}$$

$$c_6 = \frac{1}{720} (\hat{k}_6^{(\bar{X})} + 10(\hat{k}_3^{(\bar{X})})^2) = \frac{1}{720} \left(n^{1-\frac{6}{2}} \hat{k}_6 + 10(n^{1-\frac{3}{2}} \hat{k}_3)^2 \right) = \frac{\hat{k}_6}{720n^2} + \frac{\hat{k}_3^2}{72n}.$$

Lo sviluppo in serie (2.12) secondo Edgeworth di $f_{\bar{X}}$ nel punto \bar{x} in termini di $z = \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{\sigma}$, sfruttando il Lemma 2.10, diventa:

$$f_{\bar{X}}(\bar{x}) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} f_Z(z) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \phi(z) \left[1 + \frac{\hat{k}_3}{6\sqrt{n}} H_3(z) + \frac{1}{n} \left(\frac{\hat{k}_4}{24} H_4(z) + \frac{\hat{k}_3^2}{72} H_6(z) \right) + \frac{1}{n^{3/2}} \left(\frac{\hat{k}_5}{120} H_5(z) + \frac{\hat{k}_4 \hat{k}_3}{144} H_7(z) \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]. \quad (2.16)$$

Osservazione 13. Analizziamo la formula (2.16):

- Il termine principale dell'equazione corrisponde al teorema del limite centrale¹³ secondo cui la distribuzione di \bar{X} è uguale alla distribuzione normale asintotica di ordine $O(\frac{1}{\sqrt{n}})$; infatti per il Lemma 2.10

$$F_{\bar{X}}(\bar{x}) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} F_Z(z)$$

dove $Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$.

Osserviamo che:

$$\begin{aligned} F_{\bar{X}}(\bar{x}) &= P(\bar{X} < \bar{x}) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} < \bar{x}\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \mu < \bar{x} - \mu\right) \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\sigma} P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - \mu n}{n} < (\bar{x} - \mu) \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\sigma} F_Z\left((\bar{x} - \mu) \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \Phi\left((\bar{x} - \mu) \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \Phi(z) \end{aligned}$$

- Se $\bar{x} = \mu \Rightarrow z = 0$ e i polinomi di Hermite di grado dispari sono nulli¹⁴, mentre quelli presenti nella (2.16) di grado pari valgono

$$H_4(0) = 3 \text{ e } H_6(0) = -15.$$

L'espansione (2.16) diventa la seguente:

$$f_{\bar{X}}(\mu) = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \left\{ 1 + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{8} \hat{k}_4 - \frac{5}{24} \hat{k}_3^2 \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\}; \quad (2.17)$$

- Se $\bar{x} = \mu$ allora l'espansione raggiunge un'accuratezza massima dell'ordine di $O\left(\frac{1}{n}\right)$;
- Se $\bar{x} \neq \mu$ allora l'espansione raggiunge un'accuratezza massima dell'ordine di $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

¹³Si veda l'Appendice B.

¹⁴Si veda l'Osservazione 10.

2.4 Densità saddlepoint del secondo ordine

Per poter ricavare i metodi saddlepoint del secondo ordine che approssimino la densità ignota f di una variabile aleatoria X di cui si conosce solo la funzione generatrice dei cumulanti K , basta applicare l'espansione di Edgeworth alle densità introdotte dalla formula (2.10): il metodo, noto in letteratura come *Esscher tilting method* (1932) è suddiviso in due passi, già citati all'inizio della Sezione 2.2.1:

- partendo da una distribuzione la cui funzione generatrice dei cumulanti converge regolarmente ossia nel modo spiegato nell'Osservazione 1.1, si crea una famiglia esponenziale \mathfrak{F} di parametro s come illustrato nella Sezione 2.2.1 e si scrive f in termine delle densità appartenenti a \mathfrak{F} ;
- si sceglie il parametro s in modo tale che l'espansione di Edgeworth della densità relativa al parametro scelto sia la più accurata possibile.

Teorema 2.11. *Sia X una variabile aleatoria con funzione generatrice dei cumulanti K e densità incognita f . La sua densità saddlepoint del secondo ordine è data da:*

$$f(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi K''(\hat{s})}} \exp(K(\hat{s}) - \hat{s}x) \left\{ 1 + \left(\frac{1}{8} \hat{k}_4 - \frac{5}{24} \hat{k}_3^2 \right) \right\} \quad (2.18)$$

dove \hat{s} è la soluzione dell'equazione saddlepoint $K'(\hat{s}) = x$ e $\hat{k}_i = \frac{k_i(\hat{s})}{K''(\hat{s})}$ dove i k_i sono i cumulanti di X .

Dimostrazione. Sia \mathfrak{F} la famiglia esponenziale definita dall'equazione (2.10) ovvero :

$$\mathfrak{F} = \{f_s(x), \quad s \in \Gamma\} \quad \text{con} \quad f_s(x) = \exp(sx - K(s))f(x). \quad (2.19)$$

Da qui è possibile ricavare f in funzione della densità s -tilting f_s :

$$f(x) = \exp(K(s) - sx)f_s(x), \quad s \in \Gamma. \quad (2.20)$$

Per l' Osservazione 13 è noto che l'espansione di Edgeworth più accurata per $f_s(x)$ si ha nella media; per la Proposizione 2.7 la media relativa alla densità f_s corrisponde a $K'(s)$.

Quindi se si vuole calcolare f_s nel punto $x = K'(s)$ occorre scegliere $s = \hat{s}$ in modo tale che risolva l'equazione *saddlepoint* :

$$x = K'(\hat{s}).$$

Applicando la formula (2.17) a $f_{\hat{s}}(x)$ ponendo $n = 1$ e $z = 0$ si ha:

$$f_{\hat{s}}(x) \simeq \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{8} \hat{k}_4 - \frac{5}{24} \hat{k}_3^2 \right) \right\} \quad (2.21)$$

dove:

- σ^2 è la varianza della variabile aleatoria $X_{\hat{s}} \sim f_{\hat{s}}$ la quale, per la Proposizione 2.7, equivale a $K''(\hat{s})$;
- i $\hat{k}_i = \frac{k_i(\hat{s})}{K''(\hat{s})}$ sono i cumulanti standardizzati della variabile aleatoria $X_{\hat{s}} \sim f_{\hat{s}}$.

La (2.21) diventa allora:

$$f_{\hat{s}}(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi K''(\hat{s})}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{8} \hat{k}_4 - \frac{5}{24} \hat{k}_3^2 \right) \right\}. \quad (2.22)$$

Sostituendo nella (2.20) l'espressione (2.22) si ottiene la densità saddlepoint del secondo ordine:

$$f(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi K''(\hat{s})}} \exp(K(\hat{s}) - sx) \left\{ 1 + \left(\frac{1}{8} \hat{k}_4 - \frac{5}{24} \hat{k}_3^2 \right) \right\}. \quad (2.23)$$

□

Sia X_1, \dots, X_n una successione di variabili aleatorie continue i.i.d. con comune funzione generatrice dei cumulanti K . Sia $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ la media e sia $f_{\bar{X}}$ la densità incognita. Sotto queste ipotesi:

Teorema 2.12. *La densità saddlepoint del secondo ordine $\hat{f}_{\bar{X}}$ che approssima $f_{\bar{X}}$ nel punto x è data da:*

$$\hat{f}_{\bar{X}}(x) = \sqrt{\frac{n}{2\pi K''(\hat{s})}} \exp(nK(\hat{s}) - n\hat{s}x) \left(1 + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{8} \hat{k}_4 - \frac{5}{24} \hat{k}_3^2 \right) \right). \quad (2.24)$$

Il punto $\hat{s} = \hat{s}(x)$ è la soluzione dell'equazione saddlepoint:

$$K'(\hat{s}) = x$$

$$\text{e } \hat{k}_i = \frac{k_i(\hat{s})}{K''(\hat{s})^{i/2}}.$$

Inoltre, per $n \rightarrow \infty$, la densità (2.24) è il termine dominante dell'espansione asintotica di $f_{\bar{X}}$ dove l'errore relativo è un $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$:

$$f_{\bar{X}}(x) = \hat{f}_{\bar{X}}(x) \left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$$

Dimostrazione. Come per il caso $n = 1$ si cerca di costruire una famiglia esponenziale di densità dentro la quale scegliere quella di parametro ottimale a cui applicare l'espansione di Edgeworth attraverso cui esprimere poi la f . La famiglia $\mathfrak{F} = \{f_s(\bar{x}), s \in \Gamma\}$ con $f_s(\bar{x}) = \exp(ns\bar{x} - nK(s))f(\bar{x})$ è

una famiglia esponenziale regolare¹⁵.

Da qui è possibile ricavare $f_{\bar{X}}$ in funzione della densità s -tilting f_s :

$$f_{\bar{X}}(x) = \exp(nK(s) - snx)f_s(x), \quad s \in \Gamma. \quad (2.25)$$

Per l' Osservazione 13 è noto che l'espansione di Edgeworth più accurata per $f_s(x)$ si ha nella media; per la Proposizione 2.7 la media relativa alla densità f_s corrisponde a $K'(s)$.

Quindi se si vuole calcolare f_s nel punto $x = K'(s)$ occorre scegliere $s = \hat{s}$ in modo tale che risolva l'equazione saddlepoint :

$$x = K'(\hat{s}).$$

Applicando la formula (2.17) a $f_{\hat{s}}(x)$ ponendo $z = 0$ si ha:

$$f_{\hat{s}}(x) = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \left\{ 1 + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{8} \hat{k}_4 - \frac{5}{24} \hat{k}_3^2 \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\};$$

dove:

- σ^2 è la varianza relativa a $\bar{X}_{\hat{s}} \sim f_{\hat{s}}$; per la Proposizione 2.7 essa equivale a $K''(\hat{s})$;
- $n^{1-i/2} \hat{k}_i$ sono i cumulanti standardizzati di $\bar{X}_{\hat{s}} \sim f_{\hat{s}}$ già introdotti dalla formula (2.15) dove $\hat{k}_i = \frac{K^{(i)}(\hat{s})}{K''(\hat{s})^{i/2}}$.

La precedente diventa allora:

$$f_{\hat{s}}(x) = \sqrt{\frac{n}{2\pi K''(\hat{s})}} \left\{ 1 + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{8} \hat{k}_4 - \frac{5}{24} \hat{k}_3^2 \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\}. \quad (2.26)$$

Sostituendo nella (2.25) l'espressione (2.26) si ottiene la densità saddlepoint del secondo ordine $\hat{f}_{\bar{X}}(x)$ che approssima la densità esatta di \bar{X} con un errore pari a $O = \left(\frac{1}{n^2}\right)$. Infatti:

$$\hat{f}_{\bar{X}}(x) = \sqrt{\frac{n}{2\pi K''(\hat{s})}} \exp(nK(\hat{s}) - n\hat{s}x) \left\{ 1 + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{8} \hat{k}_4 - \frac{5}{24} \hat{k}_3^2 \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\}. \quad (2.27)$$

Posto $\hat{f}_{\bar{X}}(x) = \sqrt{\frac{n}{2\pi K''(\hat{s})}} \exp(nK(\hat{s}) - n\hat{s}x) \left(1 + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{8} \hat{k}_4 - \frac{5}{24} \hat{k}_3^2 \right) \right)$ la tesi è verificata. \square

¹⁵Si veda la Proposizione 2.8.

Capitolo 3

Probabilità di coda saddlepoint

Scopo di questo capitolo è ricavare formule per approssimare le probabilità di coda di variabili aleatorie con densità incognita ma di cui si può calcolare la densità saddlepoint come studiato nei capitoli precedenti.

Definizione 3.1. Sia X una variabile aleatoria definita su uno spazio di probabilità Ω con densità f .

Si definisce *probabilità di coda* la probabilità che la variabile aleatoria X superi un valore x :

$$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq x\}) := \int_x^{+\infty} f(y)dy.$$

Se non si conosce la densità esatta, si può ricorrere alla densità saddlepoint e integrare quest'ultima.

Vedremo le formule per approssimare la probabilità di coda della somma di n variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite e stimeremo gli errori commessi approssimando la probabilità di coda della Definizione 3.1 con quella saddlepoint.

Riporteremo i seguenti risultati:

- 1980: Lugannani e Rice pubblicano l'articolo *Saddlepoint approximations for the distribution of the sum of independent random variables*; nella trattazione essi hanno ricavato la formula nota in letteratura come *Lugannani-Rice formula* integrando la formula saddlepoint (2.27) del secondo ordine attraverso l'espansione asintotica uniforme di integrali del tipo

$$\int_{\eta}^{T_{\alpha}} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}t^2\right) q_{\alpha}(t)dt;$$

- 1987: Daniels riporta la prima formula originale di Lugannani e Rice, più leggibile e semplice della precedente per stimare la probabilità di coda

di una variabile aleatoria X procedendo all'integrazione della densità saddlepoint (2.18) attraverso semplici cambi di variabile d'integrazione.

- 1993: Wood, Booth e Butler pubblicano l'articolo *Saddlepoint approximations to the CDF of Some Statistics with Nonnormal Limit Distributions*. Nelle formule precedenti la distribuzione normale gioca un ruolo fondamentale; in questo articolo si è analizzato cosa accade quando la base normale viene sostituita da una distribuzione generica: riporteremo quindi una versione generalizzata della formula di Lugannani-Rice per il caso di una singola variabile aleatoria.

3.1 Formula di Lugannani-Rice

Come accennato ricaviamo la formula di Lugannani e Rice integrando la formula saddlepoint (2.27) del secondo ordine attraverso l'espansione asintotica uniforme di integrali¹⁶ come suggerito nel Capitolo 3 di [6];

La formula (2.27) rappresenta la densità saddlepoint di una variabile aleatoria \bar{X} che è somma di n variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite con funzione generatrice dei cumulanti K . Sotto queste ipotesi si può dimostrare che:

Teorema 3.1.

$$P(\bar{X} \geq x) = (1 - \Phi(r)) \left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) + \phi(r) \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{r} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \right) \quad (3.1)$$

dove:

- Φ e ϕ rappresentano rispettivamente la funzione di ripartizione e la densità normale;
- $r = r(x) = \sqrt{nh(x)}$ dove $h(x) = \sqrt{2(\hat{s}x - K(\hat{s}))}$ e \hat{s} è la soluzione dell'equazione saddlepoint;
- $\lambda = \hat{s} \sqrt{nK''(\hat{s})}$.

Trascurando gli errori, la formula (3.1) è nota come Lugannani-Rice formula.

Dimostrazione. Integriamo la (2.27):

$$P(\bar{X} \geq x) = \int_x^\infty \sqrt{\frac{n}{2\pi K''(\hat{s}(y))}} \exp(nK(\hat{s}(y)) - n(\hat{s}(y))y) \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{8} \hat{k}_4 - \frac{5}{24} \hat{k}_3^2 \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\} dy \quad (3.2)$$

¹⁶Si veda la Sezione C.1 dell'Appendice C.

dove $\hat{s}(y)$ è la soluzione dell'equazione saddlepoint $K'(\hat{s}(y)) = y$.

Per potere approssimare questo integrale con un'espansione asintotica uniforme occorre scriverlo nella forma¹⁷:

$$\int_{\eta}^{T_{\alpha}} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}t^2\right) q_{\alpha}(t) dt.$$

Definiamo quindi:

$$h(y)^2 = 2(\hat{s}(y)y - K(\hat{s}(y))), \quad \text{sgn } h(y) = \text{sgn } \hat{s}(y), \quad (3.3)$$

$$r(y) = \sqrt{n}h(y). \quad (3.4)$$

Osservazione 14. Si osservi che:

1.

$$\begin{aligned} h(y)^2 = 2(\hat{s}(y)y - K(\hat{s}(y))) &\Rightarrow h(y) = \sqrt{2(\hat{s}(y)y - K(\hat{s}(y)))} \\ &\Rightarrow h'(y) = \frac{1}{\sqrt{2(\hat{s}(y)y - K(\hat{s}(y)))}} 2\hat{s}(y) \\ &\Rightarrow h'(y) = \frac{1}{h(y)} \hat{s}(y); \end{aligned} \quad (3.5)$$

2.

$$h(y)^2 = 2(\hat{s}(y)y - K(\hat{s}(y))) \Rightarrow K(\hat{s}(y)) = \hat{s}(y)y - \frac{h^2(y)}{2}. \quad (3.6)$$

Per semplicità useremo h omettendo la dipendenza da y ; per esprimere l'integrale (3.2) in dh occorre osservare che:

$$dh = h'dy \Rightarrow dy = (h')^{-1}dh.$$

Con il cambio di variabile scelto l'integrale (3.2) diventa:

$$\begin{aligned} &\int_{h(x)}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{2\pi K''(\hat{s}(y))}} \exp\left(n\left(\hat{s}(y)y - \frac{h^2(y)}{2}\right) - n\hat{s}(y)y\right) \\ &\quad \cdot \left\{1 + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{8}\hat{k}_4(0) - \frac{5}{24}\hat{k}_3^2(0)\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\} (h')^{-1} dh \\ &= \int_{h(x)}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \exp\left(-n\frac{h^2(y)}{2}\right) \left(h'(y)\sqrt{K''(\hat{s}(y))}\right)^{-1} \\ &\quad \cdot \left\{1 + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{8}\hat{k}_4(0) - \frac{5}{24}\hat{k}_3^2(0)\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\} dh. \end{aligned}$$

¹⁷Si veda la Sezione C.1 dell'Appendice C.

Questo integrale è della forma

$$\int_{\eta}^{T_{\alpha}} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}h^2\right) q_{\alpha}(h) dh$$

moltiplicato per una costante $c = \left\{1 + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{8}\hat{k}_4(0) - \frac{5}{24}\hat{k}_3^2(0)\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}$ che non dipende da h con

- $q(h) = \left(h'(y)\sqrt{K''(\hat{s}(y))}\right)^{-1}$;
- $\alpha = n$;
- $\eta = h(x)$;
- $T_{\alpha} = \infty$.

Per il Teorema C.4 dell'Appendice C si ha:

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \geq x) &= (1 - \Phi(\sqrt{nh}(x))) \left\{ q(0) \left[1 + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{8}\hat{k}_4(0) - \frac{5}{24}\hat{k}_3^2(0) \right) \right] + \frac{1}{n} \frac{q''(0)}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\} \\ &+ \frac{\exp\left(-\frac{n}{2}h^2(x)\right)}{\sqrt{2\pi n}} \left\{ \frac{q(h(x)) - q(0)}{h(x)} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Posto $r = r(x) = \sqrt{nh}(x)$ si ottiene:

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \geq x) &= (1 - \Phi(r)) \left\{ q(0) \left[1 + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{8}\hat{k}_4(0) - \frac{5}{24}\hat{k}_3^2(0) \right) \right] + \frac{1}{n} \frac{q''(0)}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\} \\ &+ \frac{\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi n}} \left\{ \frac{q(h(x)) - q(0)}{h(x)} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Lemma 3.2.

$$q(0) = 1,$$

$$q''(0) = -2 \left(\frac{1}{8}\hat{k}_4(0) - \frac{5}{24}\hat{k}_3^2(0) \right).$$

Dimostrazione. Sia $\hat{s} = \hat{s}(y)$ determinato dall'equazione saddlepoint $K'(\hat{s}(y)) = y$. Allora:

$$h^2 = 2(\hat{s}y - K(\hat{s})) = 2(\hat{s}K'(\hat{s}) - K(\hat{s}));$$

per l'equazione (1.1) vale:

$$K(s) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{k_i s^i}{i!} \quad \text{e} \quad K'(s) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{k_i i s^{i-1}}{i!}.$$

Segue che:

$$\begin{aligned} h^2 &= 2 \left(\hat{s} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{k_i i \hat{s}^{i-1}}{i!} - \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{k_i \hat{s}^i}{i!} \right) \\ &= 2\hat{s} \left(k_1 + 2\frac{k_2 \hat{s}}{2} + 3\frac{k_3 \hat{s}^2}{3!} + 4\frac{k_4 \hat{s}^3}{4!} + O(\hat{s}^4) \right) - 2 \left(k_1 \hat{s} + \frac{k_2 \hat{s}^2}{2} + \frac{k_3 \hat{s}^3}{3!} + O(\hat{s}^4) \right) \\ &= 2\hat{s}k_1 + 2\hat{s}^2 k_2 + k_3 \hat{s}^3 + \frac{k_4 \hat{s}^4}{3} - 2k_1 \hat{s} - k_2 \hat{s}^2 - \frac{k_3 \hat{s}^3}{3} + O(\hat{s}^4). \end{aligned}$$

Poiché $\frac{k_4 \hat{s}^4}{3}$ è un $O(\hat{s}^4)$ si ottiene:

$$h^2 = k_2 \hat{s}^2 + \frac{2}{3} k_3 \hat{s}^3 + O(\hat{s}^4). \quad (3.8)$$

Se scriviamo $\hat{s} = a_1 h + a_2 h^2 + O(|h|^3)$ e sostituiamo questo nella (3.8), troviamo

$$\hat{s} = \frac{1}{\sqrt{k_2}} \left(h - \frac{1}{3} \hat{k}(0) h^2 + O(|h|^3) \right). \quad (3.9)$$

Procediamo al calcolo di $q(h)^2$ ricordando che :

- $q(h) = \left(h' \sqrt{K''(\hat{s})} \right)^{-1}$;
- $h' = \frac{1}{h} \hat{s}$ per il punto 1 dell'Osservazione 14;
- $K^{(r)}(s) = \left(\sum_{i=r}^{+\infty} \frac{k_i i(i-1)\dots(i-r+1) s^{i-r}}{i!} \right)$ per la formula ricorsiva (1.2).

$$\begin{aligned} q(h)^2 &= \left(h' \sqrt{K''(\hat{s})} \right)^{-2} = \left(\frac{1}{h} \hat{s} \sqrt{K''(\hat{s})} \right)^{-2} \\ &= \left(\frac{h}{\hat{s} \sqrt{K''(\hat{s})}} \right)^2 = \frac{h^2}{\hat{s}^2 K''(\hat{s})} \\ &= \frac{k_2 \hat{s}^2 + \frac{2}{3} k_3 \hat{s}^3 + \frac{1}{4} k_4 \hat{s}^4 + O(|\hat{s}|^5)}{\hat{s}^2} \cdot \frac{1}{k_2 + k_3 \hat{s} + \frac{1}{2} k_4 \hat{s}^2 + O(|\hat{s}|^3)} \\ &= \frac{k_2 + \frac{2}{3} k_3 \hat{s} + \frac{1}{4} k_4 \hat{s}^2 + O(|\hat{s}|^3)}{k_2 + k_3 \hat{s} + \frac{1}{2} k_4 \hat{s}^2 + O(|\hat{s}|^3)} \\ &= 1 - \frac{1}{3} \hat{k}_3(0) \sqrt{k_2} \hat{s} + \left[\frac{1}{3} \hat{k}_3(0)^2 - \frac{1}{4} \hat{k}_4(0) \right] k_2 \hat{s}^2 + O(|\hat{s}|^3) \end{aligned}$$

Segue che:

$$q(h) = 1 - \frac{1}{6}\hat{k}_3(0)\sqrt{k_2\hat{s}} + \left[\frac{11}{72}\hat{k}_3(0)^2 - \frac{1}{8}\hat{k}_4(0) \right] k_2\hat{s}^2 + O(|\hat{s}|^3).$$

Inserendo la (3.9) nella precedente otteniamo:

$$q(h) = 1 - \frac{1}{6}\hat{k}_3(0)h + \left[\frac{5}{24}\hat{k}_3(0)^2 - \frac{1}{8}\hat{k}_4(0) \right] h^2 + O(|\hat{s}|^3).$$

Si prova il Lemma valutando la precedente e la derivata seconda in 0; infatti:

$$q(0) = 1;$$

$$q'(h) = -\frac{1}{6}\hat{k}_3(0) + 2h \left[\frac{5}{24}\hat{k}_3(0)^2 - \frac{1}{8}\hat{k}_4(0) \right] + O(|\hat{s}|^3) \Rightarrow$$

$$q''(h) = 2 \left[\frac{5}{24}\hat{k}_3(0)^2 - \frac{1}{8}\hat{k}_4(0) \right] + O(|\hat{s}|^3) \Rightarrow q''(0) = -2 \left(\frac{1}{8}\hat{k}_4(0) - \frac{5}{24}\hat{k}_3^2(0) \right).$$

□

Per il Lemma 3.2, l'approssimazione (3.7) si riduce a:

$$P(\bar{X} \geq x)$$

$$\begin{aligned} &= (1 - \Phi(r)) \left\{ q(0) \left[1 + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{8}\hat{k}_4(0) - \frac{5}{24}\hat{k}_3^2(0) \right) \right] + \frac{1}{n} \frac{q''(0)}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\} \\ &\quad + \frac{\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi n}} \left\{ \frac{q(h(x)) - q(0)}{h(x)} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} \\ &= (1 - \Phi(r)) \left\{ \left[1 + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{8}\hat{k}_4(0) - \frac{5}{24}\hat{k}_3^2(0) \right) \right] - \frac{1}{n} \left(\frac{1}{8}\hat{k}_4(0) - \frac{5}{24}\hat{k}_3^2(0) \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{n}}\phi(r) \left\{ \frac{q(h(x))}{h(x)} - \frac{1}{h(x)} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\}. \end{aligned}$$

$$\text{Poiché } q(h(x)) = \left(\frac{h(x)}{\hat{s}\sqrt{K''(\hat{s})}} \right) \quad \text{e} \quad r = r(x) = \sqrt{nh(x)}:$$

$$P(\bar{X} \geq x)$$

$$\begin{aligned} &= (1 - \Phi(r)) \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\} + \frac{1}{\sqrt{n}}\phi(r) \left\{ \frac{\left(\frac{h(x)}{\hat{s}\sqrt{K''(\hat{s})}} \right)}{h(x)} - \frac{\sqrt{n}}{r} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} \\ &= (1 - \Phi(r)) \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\} + \frac{1}{\sqrt{n}}\phi(r) \left\{ \frac{1}{\hat{s}\sqrt{K''(\hat{s})}} - \frac{\sqrt{n}}{r} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} \\ &= (1 - \Phi(r)) \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\} + \phi(r) \left\{ \frac{1}{\hat{s}\sqrt{nK''(\hat{s})}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{n}}{r} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} \\ &= (1 - \Phi(r)) \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\} + \phi(r) \left\{ \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{r} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \right\} \end{aligned}$$

dove

- Φ e ϕ rappresentano rispettivamente la funzione di ripartizione e la densità normale;
- $r = r(x) = \sqrt{nh(x)}$ dove $h(x) = \sqrt{2(\hat{s}x - K(\hat{s}))}$ e s soluzione dell'equazione saddlepoint;
- $\lambda = \hat{s}\sqrt{nK''(\hat{s})}$.

□

Trascurando gli errori si ottiene la *formula di Lugannani-Rice* che approssima $P(\bar{X} \geq x)$:

$$\tilde{P}(\bar{X} \geq x) = (1 - \Phi(r)) + \phi(r) \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{r} \right).$$

Osservazione 15. Il termine principale della (3.1) è $(1 - \Phi(r))$, il quale è dell'ordine di $(1+r)^{-1} \exp(-\frac{1}{2}r^2)$ per $r > 0$. L'errore relativo nella (3.1) è quindi $O(\frac{1}{n^{3/2}})$ per r limitato e $O(\frac{1}{n})$ quando r è dell'ordine di \sqrt{n} . Più in generale si può scrivere l'errore come $O(\frac{(1+r)}{\sqrt{n^3}})$.

3.2 Formula di Lugannani-Rice secondo Daniels

Si consideri una variabile aleatoria X con densità incognita f e funzione generatrice dei cumulanti K . Daniels ottiene l'approssimazione della probabilità di coda nel 1987 attraverso l'integrazione della densità saddlepoint (2.18). Ricaviamo la formula riportata in [5] analizzata nel Capitolo 3 di [6].

Teorema 3.3.

$$P(X \geq x) \simeq 1 - \Phi(\hat{w}) + \phi(\hat{w}) \left(\frac{1}{\hat{u}} - \frac{1}{\hat{w}} \right) \quad (3.10)$$

dove:

- Φ e ϕ rappresentano rispettivamente la funzione di ripartizione e la densità normale;
- $\hat{w} = \text{sgn}(\hat{s})\sqrt{2(\hat{s}x - K(\hat{s}))}$ dove \hat{s} è la soluzione dell'equazione saddlepoint $K'(\hat{s}) = x$;
- $\hat{u} = \hat{s}\sqrt{K''(\hat{s})}$.

Dimostrazione. Integriamo la (2.18):

$$\begin{aligned}
P(X \geq x) &= \int_x^\infty f(y) dy \\
&\simeq \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi K''(s)}} \exp(K(s) - sy) \left\{ 1 + \left(\frac{1}{8} \hat{k}_4 - \frac{5}{24} \hat{k}_3^2 \right) \right\} dy \\
&= \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi K''(s)}} \exp(K(s) - sy) dy \\
&\quad + \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi K''(s)}} \exp(K(s) - sy) \left(\frac{1}{8} \hat{k}_4 - \frac{5}{24} \hat{k}_3^2 \right) dy \quad (3.11)
\end{aligned}$$

dove $s = s(y)$ è tale che $K'(s) = y$ e $\hat{k}_i = \frac{k_i(s)}{K''(s)}$ con k_i i cumulanti di X .

Poiché s varia con y all'interno dell'integrale, possiamo sfruttare il cambio di variabile dato dall'equazione saddlepoint $K'(s) = y \Rightarrow dy = K''(s) ds$; la (3.11) diventa:

$$\begin{aligned}
P(X \geq x) &\simeq \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi K''(s)}} \exp(K(s) - sy) dy \\
&\quad + \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi K''(s)}} \exp(K(s) - sy) \left(\frac{1}{8} \hat{k}_4 - \frac{5}{24} \hat{k}_3^2 \right) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\hat{s}}^\infty \frac{1}{\sqrt{K''(s)}} \exp(K(s) - sK'(s)) K''(s) ds \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\hat{s}}^\infty \frac{1}{\sqrt{K''(s)}} \exp(K(s) - sK''(s)) \left(\frac{1}{8} \hat{k}_4 - \frac{5}{24} \hat{k}_3^2 \right) K''(s) ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\hat{s}}^\infty \sqrt{K''(s)} \exp(K(s) - sK'(s)) ds \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\hat{s}}^\infty \sqrt{K''(s)} \exp(K(s) - sK''(s)) \left(\frac{1}{8} \hat{k}_4 - \frac{5}{24} \hat{k}_3^2 \right) ds. \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Procediamo al calcolo del primo integrale della (3.12) utilizzando il seguente cambio di variabile:

$$w = \sqrt{2(sy - K(s))} = \sqrt{2(sK'(s) - K(s))}.$$

Allora:

- $\frac{w^2}{2} = sK'(s) - K(s)$;
- $dw = \frac{1}{2\sqrt{2(sK'(s) - K(s))}} \cdot 2(K'(s) + sK''(s) - K'(s)) ds = \frac{1}{w} \cdot sK''(s) ds$.

Scriviamo $\sqrt{K''(s)}$ nel modo seguente:

$$\sqrt{K''(s)} = sK''(s) \left(\frac{1}{w} - \frac{1}{w} + \frac{1}{s\sqrt{K''(s)}} \right).$$

Allora il primo integrale della (3.12) diventa:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\hat{s}}^{\infty} \left[sK''(s) \left(\frac{1}{w} - \frac{1}{w} + \frac{1}{s\sqrt{K''(s)}} \right) \right] \exp(K(s) - sK'(s)) ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\hat{s}}^{\infty} \left(sK''(s) \frac{1}{w} \right) \exp(K(s) - sK'(s)) ds \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\hat{s}}^{\infty} \left(sK''(s) \left(\frac{1}{s\sqrt{K''(s)}} - \frac{1}{w} \right) \right) \exp(K(s) - sK'(s)) ds. \quad (3.13) \end{aligned}$$

Calcoliamo i due integrali della (3.13):

1. Posto $\hat{w} = \sqrt{2(\hat{s}x - K(\hat{s}))}$ segue che:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\hat{s}}^{\infty} \left(sK''(s) \frac{1}{w} \right) \exp(K(s) - sK'(s)) ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\hat{w}}^{\infty} \exp\left(-\frac{w^2}{2}\right) dw \\ &= 1 - \Phi(\hat{w}); \end{aligned}$$

2. Calcoliamo il secondo integrale per parti introducendo le seguente variabili:

$$V(s) = -\exp(K(s) - sK'(s)) \Rightarrow V'(s) = sK''(s) \exp(K(s) - sK'(s)),$$

$$U(s) = \frac{1}{s\sqrt{K''(s)}} - \frac{1}{w}.$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\hat{s}}^{\infty} \left(sK''(s) \left(\frac{1}{s\sqrt{K''(s)}} - \frac{1}{w} \right) \right) \exp(K(s) - sK'(s)) ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\hat{s}}^{\infty} U(s)V'(s) ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left([U(s)V(s)]_{\hat{s}}^{\infty} - \int_{\hat{s}}^{\infty} V(s)U'(s) ds \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\left(\frac{1}{s\sqrt{K''(s)}} - \frac{1}{w} \right) \cdot (-\exp(K(s) - sK'(s))) \right]_{\hat{s}}^{\infty} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{U(\hat{s})}^{\infty} \exp(K(s) - sK'(s)) dU \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\left(\frac{1}{\hat{s}\sqrt{K''(\hat{s})}} - \frac{1}{\hat{w}} \right) \cdot (\exp(K(\hat{s}) - \hat{s}K'(\hat{s}))) \right] \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{U(\hat{s})}^{\infty} \exp(K(s) - sK'(s)) dU \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\left(\frac{1}{\hat{u}} - \frac{1}{\hat{w}} \right) \cdot \exp\left(-\frac{\hat{w}^2}{2}\right) \right] + E \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\hat{w}^2}{2}\right) \left(\frac{1}{\hat{u}} - \frac{1}{\hat{w}} \right) + E \\ &= \phi(\hat{w}) \left(\frac{1}{\hat{u}} - \frac{1}{\hat{w}} \right) + E \end{aligned}$$

dove

$$E = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{U(\hat{s})}^{\infty} \exp(K(s) - sK'(s)) dU, \quad (3.14)$$

$$\hat{u} = \frac{1}{\hat{s}\sqrt{K''(\hat{s})}}.$$

I calcoli effettuati nella (3.13) danno che:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\hat{s}}^{\infty} \sqrt{K''(s)} \exp(K(s) - sK'(s)) ds \\ &= 1 - \Phi(\hat{w}) + \phi(\hat{w}) \left(\frac{1}{\hat{u}} - \frac{1}{\hat{w}} \right) + E \end{aligned} \quad (3.15)$$

Vogliamo ora dimostrare che E è uguale ed opposto al secondo integrale della (3.12).

Sviluppo in serie di Taylor K :

$$\begin{aligned}
0 &= K(0) \\
&= K(s) + K'(s)(0-s) + \frac{K''(s)}{2!}(0-s)^2 + \frac{K^{(3)}(s)}{3!}(0-s)^3 \\
&\quad + \frac{K^{(4)}(s)}{4!}(0-s)^4 + O(|s|^5) \\
&= K(s) - K'(s)s + \frac{K''(s)}{2}s^2 - \frac{K^{(3)}(s)}{6}s^3 + \frac{K^{(4)}(s)}{24}s^4 + O(|s|^5) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$K'(s)s - K(s) = \frac{K''(s)}{2}s^2 - \frac{K^{(3)}(s)}{6}s^3 + \frac{K^{(4)}(s)}{24}s^4 + O(|s|^5).$$

Segue che:

$$\begin{aligned}
w^2 &= 2(sK'(s) - K(s)) \\
&= 2 \left(\frac{K''(s)}{2}s^2 - \frac{K^{(3)}(s)}{6}s^3 + \frac{K^{(4)}(s)}{24}s^4 + O(|s|^5) \right) \\
&= K''(s)s^2 - \frac{K^{(3)}(s)}{3}s^3 + \frac{K^{(4)}(s)}{12}s^4 + O(|s|^5) \\
&= K''(s)s^2 \left(1 - \frac{K^{(3)}(s)}{K''(s)} \frac{s}{3} + \frac{K^{(4)}(s)}{K''(s)} \frac{s^2}{12} + O(|s|^3) \right).
\end{aligned}$$

Di conseguenza:

$$\begin{aligned}
w &= \sqrt{K''(s)}s \left(1 - \frac{K^{(3)}(s)}{K''(s)} \frac{s}{3} + \frac{K^{(4)}(s)}{K''(s)} \frac{s^2}{12} + O(|s|^3) \right)^{1/2} \Rightarrow \\
\frac{1}{w} &= \frac{1}{\sqrt{K''(s)}s} \left(1 - \frac{K^{(3)}(s)}{K''(s)} \frac{s}{3} + \frac{K^{(4)}(s)}{K''(s)} \frac{s^2}{12} + O(|s|^3) \right)^{-1/2} \Rightarrow \\
U &= \frac{1}{s\sqrt{K''(s)}} - \frac{1}{w} \\
&= \frac{1}{s\sqrt{K''(s)}} - \frac{1}{\sqrt{K''(s)}s} \left(1 - \frac{K^{(3)}(s)}{K''(s)} \frac{s}{3} + \frac{K^{(4)}(s)}{K''(s)} \frac{s^2}{12} + O(|s|^3) \right)^{-1/2}.
\end{aligned}$$

Posto $z = -\frac{K^{(3)}(s)}{K''(s)} \frac{s}{3} + \frac{K^{(4)}(s)}{K''(s)} \frac{s^2}{12} + O(|s|^3)$ e $\alpha = -\frac{1}{2}$, è possibile applicare lo sviluppo binomiale $(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \dots + \binom{n}{k}z^k + o(z^k)$ troncato ai primi tre termini facendo rientrare parte di z^2 in $O(|s|^3)$.

Allora:

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{K^{(3)}(s)s}{K''(s)3} + \frac{K^{(4)}(s)s^2}{K''(s)12} + O(|s|^3) \right)^{-1/2} \\
&= 1 - \frac{1}{2} \left(-\frac{K^{(3)}(s)s}{K''(s)3} + \frac{K^{(4)}(s)s^2}{K''(s)12} + O(|s|^3) \right) + \frac{3}{8} \frac{(K^{(3)}(s))^2 s^2}{(K''(s))^2 9} + O(|s|^3) \\
&= 1 + \frac{K^{(3)}(s)s}{K''(s)6} - \frac{K^{(4)}(s)s^2}{K''(s)24} + \frac{(K^{(3)}(s))^2 s^2}{(K''(s))^2 24} + O(|s|^3);
\end{aligned}$$

ne segue:

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{s\sqrt{K''(s)}} - \frac{1}{\sqrt{K''(s)}s} \\
&\cdot \left[1 + \frac{K^{(3)}(s)s}{K''(s)6} - \frac{K^{(4)}(s)s^2}{K''(s)24} + \frac{(K^{(3)}(s))^2 s^2}{(K''(s))^2 24} + O(|s|^3) \right] \\
&= -\frac{1}{\sqrt{K''(s)}s} \left(\frac{K^{(3)}(s)s}{K''(s)6} - \frac{K^{(4)}(s)s^2}{K''(s)24} + \frac{(K^{(3)}(s))^2 s^2}{(K''(s))^2 24} + O(|s|^3) \right) \\
&= \left(-\frac{1}{6} \frac{K^{(3)}(s)}{(K''(s))^{3/2}} + \frac{s}{24} \frac{K^{(4)}(s)}{(K''(s))^{3/2}} - \frac{s}{24} \frac{(K^{(3)}(s))^2}{(K''(s))^{5/2}} + O(|s|^2) \right).
\end{aligned}$$

Deriviamo U in ds derivando a blocchi la precedente:

(a)

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{ds} \left(-\frac{1}{6} \frac{K^{(3)}(s)}{(K''(s))^{3/2}} \right) \\
&= -\frac{1}{6} \left(\frac{K^{(4)}(s)K''(s)^{3/2} - \frac{3}{2}K''(s)^{3/2-1}(K^{(3)}(s))^2}{(K''(s))^3} \right) \\
&= -\frac{1}{6} (K^{(4)}(s)K''(s)^{3/2-3}) + \frac{1}{4} \frac{(K^{(3)}(s))^2}{(K''(s))^{3-1/2}} \\
&= -\frac{1}{6} \left(\frac{K^{(4)}(s)}{K''(s)^{3/2}} \right) + \frac{1}{4} \frac{(K^{(3)}(s))^2}{(K''(s))^{5/2}};
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{ds} \left(\frac{s}{24} \frac{K^{(4)}(s)}{(K''(s))^{3/2}} \right) \\
&= \frac{1}{24} \left(\frac{(sK^{(4)}(s))'(K''(s))^{3/2} - sK^{(4)}(s)\frac{3}{2}K''(s)^{3/2-1}K^{(3)}(s)}{K''(s)^3} \right) \\
&= \frac{1}{24} \frac{K^{(4)}(s) + sK^{(5)}(s)}{K''(s)^{3-3/2}} - \frac{1}{16} \frac{sK^{(4)}(s)K^{(3)}(s)}{K''(s)^{3-1/2}} \\
&= \frac{1}{24} \frac{K^{(4)}(s)}{K''(s)^{3/2}} + \frac{1}{24} \frac{sK^{(5)}(s)}{K''(s)^{3/2}} - \frac{1}{16} \frac{sK^{(4)}(s)K^{(3)}(s)}{K''(s)^{5/2}};
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{ds} \left(-\frac{s}{24} \frac{(K^{(3)}(s))^2}{(K''(s))^{5/2}} + O(|s|^2) \right) \\
&= -\frac{1}{24} \left(\frac{(sK^{(3)}(s)^2)'K''(s)^{5/2} - s(K^{(3)}(s))^2 \frac{5}{2} K''(s)^{5/2-1} K^{(3)}(s)}{K''(s)^5} \right) \\
&= -\frac{1}{24} \frac{K^{(3)}(s)^2 + 2sK^{(3)}(s)K^{(4)}(s)}{K''(s)^{5-5/2}} + \frac{5}{48} \frac{sK^{(3)}(s)^2 K^{(3)}(s)}{K''(s)^{5-3/2}} \\
&= -\frac{1}{24} \frac{K^{(3)}(s)^2 + 2sK^{(3)}(s)K^{(4)}(s)}{K''(s)^{5/2}} + \frac{5}{48} \frac{sK^{(3)}(s)^2 K^{(3)}(s)}{K''(s)^{7/2}} \\
&= -\frac{1}{24} \frac{K^{(3)}(s)^2}{K''(s)^{5/2}} - \frac{1}{24} \frac{2sK^{(3)}(s)K^{(4)}(s)}{K''(s)^{5/2}} + \frac{5}{48} \frac{sK^{(3)}(s)^2 K^{(3)}(s)}{K''(s)^{7/2}}.
\end{aligned}$$

Per ottenere $\frac{dU}{ds}$ basta sommare i risultati (2a), (2b), (2c) osservando che, se l'errore in U era un $O(|s|^2)$, allora l'errore di $\frac{dU}{ds}$ sarà un $O(|s|)$:

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{ds} &= -\frac{1}{6} \frac{K^{(4)}(s)}{K''(s)^{3/2}} + \frac{1}{4} \frac{(K^{(3)}(s))^2}{(K''(s))^{5/2}} \\
&\quad + \frac{1}{24} \frac{K^{(4)}(s)}{K''(s)^{3/2}} - \frac{1}{24} \frac{K^{(3)}(s)^2}{K''(s)^{5/2}} + O(|s|) \\
&= -\frac{1}{8} \frac{K^{(4)}(s)}{K''(s)^{3/2}} + \frac{5}{24} \frac{K^{(3)}(s)^2}{K''(s)^{5/2}} + O(|s|).
\end{aligned}$$

Possiamo ora calcolare l'integrale (3.14) usando il cambio di variabile $\frac{dU}{ds}$ e trascurando $O(|s|)$:

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{U(\hat{s})}^{\infty} \exp(K(s) - sK'(s)) dU \\
&\simeq -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\hat{s}}^{\infty} \exp(K(s) - sK'(s)) \left[\frac{1}{8} \frac{K^{(4)}(s)}{K''(s)^{3/2}} - \frac{5}{24} \frac{K^{(3)}(s)^2}{K''(s)^{5/2}} \right] ds \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\hat{s}}^{\infty} \sqrt{K''(s)} \exp(K(s) - sK'(s)) \left[\frac{1}{8} \frac{K^{(4)}(s)}{K''(s)^2} - \frac{5}{24} \frac{K^{(3)}(s)^2}{K''(s)^3} \right] ds \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\hat{s}}^{\infty} \sqrt{K''(s)} \exp(K(s) - sK'(s)) \left[\frac{1}{8} \hat{k}_4 - \frac{5}{24} \hat{k}_3^2 \right] ds
\end{aligned}$$

Si può osservare che E è uguale e opposto al secondo integrale della (3.12); la (3.12) diventa allora:

$$\begin{aligned}
P(X \geq x) &\simeq 1 - \Phi(\hat{w}) + \phi(\hat{w}) \left(\frac{1}{\hat{u}} - \frac{1}{\hat{w}} \right) + E - E \\
&= 1 - \Phi(\hat{w}) + \phi(\hat{w}) \left(\frac{1}{\hat{u}} - \frac{1}{\hat{w}} \right).
\end{aligned}$$

□

3.3 Formula generalizzata di Lugannani-Rice

Wood, Booth e Butler nel 1993 propongono una formula generalizzata per la probabilità di coda di una variabile aleatoria X con funzione di ripartizione $F(x)$, densità $f(x)$ e funzione generatrice dei cumulanti $K(s)$ partendo dallo studio dell'equazione (3.10) della Sezione 3.2:

$$P(X \geq x) \simeq 1 - \Phi(\hat{w}) + \phi(\hat{w}) \left(\frac{1}{\hat{u}} - \frac{1}{\hat{w}} \right)$$

dove:

- Φ e ϕ rappresentano rispettivamente la funzione di ripartizione e la densità normale;
- $\hat{w} = \text{sgn}(\hat{s})\sqrt{2(\hat{s}x - K(\hat{s}))}$ dove \hat{s} è la soluzione dell'equazione saddlepoint $K'(\hat{s}) = x$;
- $\hat{u} = \hat{s}\sqrt{K''(\hat{s})}$.

Essi osservano che l'approccio di Lugannani e Rice è il seguente: dati x e la funzione generatrice dei momenti $K(s)$ e posto $w = \sqrt{2(sx - K(s))}$, la trasformazione da s a w è data da

$$\frac{1}{2}w^2 - \hat{w}w = K(\hat{s}) - x\hat{s} \quad (3.16)$$

dove \hat{w} è scelto in modo tale che il minimo del membro sinistro della (3.16) sia uguale al minimo del membro destro della (3.16). Il \hat{w} che verifica questa richiesta è infatti quello scelto da Lugannani e Rice ovvero $\hat{w} = \sqrt{2(\hat{s}x - K(\hat{s}))}$. La forma (3.16) spiega inoltre perché la funzione di ripartizione e la densità normale appaiono in (3.10): $\frac{w^2}{2}$ è la funzione generatrice dei cumulanti di una distribuzione normale standard¹⁸.

Wood, Booth e Butler osservano che non c'è nessuna regione per cui si deve avere $\frac{w^2}{2}$ nella (3.16); ogni funzione generatrice dei cumulanti che sia analitica nell'origine va bene e dimostrano come approssimare la probabilità di coda $P(X \geq x) = 1 - F(x)$ sfruttando una distribuzione di base non gaussiana (contrariamente alla formula (3.10)).

Sia Z una variabile aleatoria con distribuzione generica, di densità $\gamma(z)$, funzione di ripartizione $\Gamma(z)$ e funzione generatrice dei cumulanti G . Siano $\hat{f}(x)$ e $\hat{\gamma}(z)$ le approssimazioni saddlepoint delle due densità. Allora:

$$\frac{\hat{f}(x)}{f(x)} \simeq 1 \simeq \frac{\hat{\gamma}(z)}{\gamma(z)} \Rightarrow f(z) \simeq \gamma(z) \frac{\hat{f}(x)}{\hat{\gamma}(z)}$$

¹⁸Si veda il punto 2 dell'Appendice A.

per ogni x, z appartenenti al supporto di ciascuna densità. Affinché sia possibile approssimare in modo accurato $f(x)$ con $\gamma(z)$ occorre che il termine dominante di $\hat{f}(x)$ sia uguale al termine dominante di $\hat{\gamma}(z)$.

Nelle densità saddlepoint

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{K''(\hat{s}_x)}} \exp(K(\hat{s}_x) - \hat{s}_x x) \quad \text{e} \quad \hat{\gamma}(z) = \frac{1}{\sqrt{G''(\check{\xi}_z)}} \exp(G(\check{\xi}_z) - \check{\xi}_z z),$$

dove \hat{s}_x e $\check{\xi}_z$ sono rispettivamente le soluzioni delle equazioni saddlepoint

$$K'(\hat{s}_x) = x \quad \text{e} \quad G'(\check{\xi}_z) = z,$$

i termini dominanti sono quelli relativi all'esponenziale; affinché coincidano occorre scegliere $\hat{z} = \hat{z}_x$ in modo tale che risolva l'equazione

$$G(\check{\xi}_z) - \check{\xi}_z \hat{z} = K(\hat{s}_x) - \hat{s}_x x.$$

Posto allora $\hat{\xi} = \check{\xi}(\hat{z})$ l'equazione diventa:

$$G(\hat{\xi}) - \hat{\xi} \hat{z} = K(\hat{s}_x) - \hat{s}_x x. \quad (3.17)$$

La (3.17) è la generalizzazione cercata della (3.16). In questo modo la miglior approssimazione saddlepoint per la densità $f(x)$ che sfrutti la base non normale $\gamma(z)$ è data da

$$f(x) \simeq \gamma(\hat{z}) \sqrt{\frac{G''(\hat{\xi})}{K''(\hat{s})}} \quad (3.18)$$

Osserviamo che $-G(\check{\xi}) + \check{\xi} z$ è la trasformata di Legendre di G , perciò $G(\check{\xi}) - \check{\xi} z$, cioè il primo membro della (3.17), è una funzione concava di z ; di conseguenza, fissato x , si possono avere al più due soluzioni \hat{z} :

- se $x = K'(0) = \mu$ dove $\mu = E[X]$ allora si ha un'unica soluzione

$$\hat{z} = G'(0);$$

- altrimenti ci sono esattamente due soluzioni $\hat{z}_- = \hat{z}_-(x) < G'(0) < \hat{z}_+ = \hat{z}_+(x)$:

$$\begin{aligned} \hat{z}_- &= \hat{z}_-(x) & \text{se} & \quad x < K'(0) \\ \hat{z}_+ &= \hat{z}_+(x) & \text{se} & \quad x > K'(0) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Osservazione 16. Se $f(x) = \gamma(x)$, cioè la densità da approssimare è uguale alla densità di base, allora la densità saddlepoint (3.18) è esatta.

Teorema 3.4. *Sia X una variabile aleatoria con densità incognita $f(x)$ e funzione generatrice dei cumulanti $K(s)$. Allora l'approssimazione saddlepoint della probabilità di coda secondo Wood, Booth e Butler è la seguente:*

$$P(X \geq x) \simeq 1 - \Gamma(\hat{z}) + \gamma(\hat{z}) \left(\frac{1}{\hat{u}_{\hat{z}}} - \frac{1}{\hat{\xi}} \right) \quad (3.20)$$

dove:

- Γ e γ rappresentano rispettivamente la funzione di ripartizione e la densità base;
- \hat{z} è la radice dell'equazione (3.17) scelta con il criterio (3.19);
- $\hat{\xi}$ è la soluzione dell'equazione saddlepoint $G'(\hat{\xi}) = \hat{z}$;
- $\hat{u}_{\hat{z}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{G''(\hat{\xi})}}$ dove $\hat{u} = \hat{s} \sqrt{K''(\hat{s})}$ e \hat{s} è la soluzione dell'equazione saddlepoint $K'(\hat{s}) = x$.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} P(X \geq x) &= \int_x^\infty f(y) dy \\ &\simeq \int_x^\infty \gamma(z) \sqrt{\frac{G''(\xi)}{K''(s)}} dy. \end{aligned}$$

All'interno dell'integrale $s = s(y)$ varia con y poiché $K'(s) = y$ e $\xi = \xi(z)$ varia con z poiché $z = z(y)$ e $G'(\xi) = z$.

Utilizziamo il cambio di variabile dato dall'equazione (3.17):

$$y = \frac{K(s) - G(\xi) + \xi z}{s} \Rightarrow dy = \frac{\xi}{s} dz;$$

allora:

$$P(X \geq x) = \int_{\hat{z}}^\infty \gamma(z) \frac{\xi}{s} \sqrt{\frac{G''(\xi)}{K''(s)}} dz.$$

Aggiungo e tolgo 1:

$$\begin{aligned} P(X \geq x) &= \int_{\hat{z}}^\infty \gamma(z) \left[1 - 1 + \frac{\xi}{s} \sqrt{\frac{G''(\xi)}{K''(s)}} \right] dz \\ &= \int_{\hat{z}}^\infty \gamma(z) dz + \int_{\hat{z}}^\infty \gamma(z) \left[\frac{\xi}{s} \sqrt{\frac{G''(\xi)}{K''(s)}} - 1 \right] dz \\ &= 1 - \Gamma(\hat{z}) + \int_{\hat{z}}^\infty \gamma(z) \xi \left[\frac{1}{s} \sqrt{\frac{G''(\xi)}{K''(s)}} - \frac{1}{\xi} \right] dz \quad (3.21) \end{aligned}$$

Allo scopo di approssimare il secondo termine di (3.21) supponiamo che la densità $\gamma(z)$ coincida con la sua approssimazione saddlepoint del primo ordine $\hat{\gamma}(z)$ a meno di una costante:

$$\gamma(z) = c\hat{\gamma}(z) = \frac{c}{\sqrt{2\pi G''(\xi)}} \exp(G(\xi) - \xi z). \quad (3.22)$$

Osserviamo inoltre che

$$\frac{\partial}{\partial z} \exp(G(\xi) - \xi z) = \exp(G(\xi) - \xi z) (-\xi).$$

Allora il secondo termine della (3.21) diventa:

$$\begin{aligned} & \int_{\hat{z}}^{\infty} \gamma(z) \xi \left[\frac{1}{s} \sqrt{\frac{G''(\xi)}{K''(s)}} - \frac{1}{\xi} \right] dz \\ &= \int_{\hat{z}}^{\infty} \frac{c}{\sqrt{2\pi G''(\xi)}} \exp(G(\xi) - \xi z) \xi \left[\frac{1}{s} \sqrt{\frac{G''(\xi)}{K''(s)}} - \frac{1}{\xi} \right] dz \\ &= - \int_{\hat{z}}^{\infty} \frac{c}{\sqrt{2\pi G''(\xi)}} \left[\frac{1}{s} \sqrt{\frac{G''(\xi)}{K''(s)}} - \frac{1}{\xi} \right] \frac{\partial}{\partial z} \exp(G(\xi) - \xi z) dz. \end{aligned}$$

Integrando per parti:

$$\begin{aligned} & \int_{\hat{z}}^{\infty} \gamma(z) \xi \left[\frac{1}{s} \sqrt{\frac{G''(\xi)}{K''(s)}} - \frac{1}{\xi} \right] dz \\ &= - \left[\frac{c}{\sqrt{2\pi G''(\xi)}} \left[\frac{1}{s} \sqrt{\frac{G''(\xi)}{K''(s)}} - \frac{1}{\xi} \right] \exp(G(\xi) - \xi z) \right]_{\hat{z}}^{\infty} \\ & \quad + \int_{\hat{z}}^{\infty} \frac{d}{dz} \left(\frac{c}{\sqrt{2\pi G''(\xi)}} \left[\frac{1}{s} \sqrt{\frac{G''(\xi)}{K''(s)}} - \frac{1}{\xi} \right] \right) \exp(G(\xi) - \xi z) dz \\ &= \frac{c}{\sqrt{2\pi G''(\hat{\xi})}} \left[\frac{1}{\hat{s}} \sqrt{\frac{G''(\hat{\xi})}{K''(\hat{s})}} - \frac{1}{\hat{\xi}} \right] \exp(G(\hat{\xi}) - \hat{\xi} \hat{z}) \\ &= \gamma(\hat{z}) \left[\frac{1}{\hat{s}} \sqrt{\frac{G''(\hat{\xi})}{K''(\hat{s})}} - \frac{1}{\hat{\xi}} \right] \\ &= \gamma(\hat{z}) \left(\frac{1}{\hat{u}_{\hat{z}}} - \frac{1}{\hat{\xi}} \right) \end{aligned}$$

$$\text{dove } \hat{u}_{\hat{z}} = \frac{1}{\frac{1}{\hat{s}} \sqrt{\frac{G''(\hat{\xi})}{K''(\hat{s})}}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{G''(\hat{\xi})}}.$$

Dopo aver calcolato il secondo membro, è possibile ricomporre la (3.21):

$$P(X \geq x) \simeq 1 - \Gamma(\hat{z}) + \gamma(\hat{z}) \left(\frac{1}{\hat{u}_{\hat{z}}} - \frac{1}{\hat{\xi}} \right).$$

Osservazione 17. L'ipotesi fatta in (3.22) non sempre è verificata poiché la densità saddlepoint $\hat{\gamma}$ potrebbe non essere esatta; in questo caso sono necessarie approssimazioni aggiuntive per arrivare allo stesso risultato (3.20) considerando

$$\gamma(z) = c\hat{\gamma}(z)(1 + e(z))$$

dove $e(z)$ è l'errore. □

Corollario 3.5. *Se $\gamma = \phi$, cioè se la distribuzione base è normale, allora la (3.20) coincide con la formula di Lugannani-Rice (3.10).*

Dimostrazione. Osserviamo che:

- $G(\check{\xi}) = \frac{\check{\xi}^2}{2}$; ¹⁹
- $\check{\xi}(z) = z$ poiché $\check{\xi}(z)$ è la soluzione dell'equazione saddlepoint

$$G'(\check{\xi}) = z \Rightarrow 2\frac{\check{\xi}}{2} = z \Rightarrow \check{\xi} = z;$$

- $G''(\check{\xi}) = 1$.

La (3.17) diventa quindi

$$\frac{\hat{\xi}^2}{2} - \xi^2 = K(\hat{s}) - \hat{s}x.$$

Per la (3.16) segue che $\hat{w} = \hat{\xi} = \hat{z}$.

La (3.20) diventa allora la seguente:

$$P(X \geq x) \simeq 1 - \Phi(\hat{w}) + \Phi(\hat{w}) \left(\frac{1}{\hat{u}} - \frac{1}{\hat{w}} \right).$$

□

Proposizione 3.6. *Sia $Z \sim \Gamma$ e sia $\tilde{Z} = bZ + a \sim \Gamma_{a,b}$ una traslazione e una scala di Z con $b > 0$ dove $\Gamma_{a,b}(z) = \Gamma(\frac{z-a}{b})$. Allora la formula (3.20) con distribuzione base Γ è la stessa che si avrebbe utilizzando come distribuzione base $\Gamma_{a,b}$.*

Dimostrazione. Siano $\gamma_{a,b}$ e $G_{a,b}$ la densità e la funzione generatrice dei cumulanti di \tilde{Z} ; osserviamo che:

¹⁹Si veda il punto 2 dell'Appendice A.

- $G_{a,b}(\xi) = a\xi + G(\xi b)$. Infatti:

$$\begin{aligned} G_{a,b}(\xi) &= \log \left(\mathbb{E}[\exp(\xi \tilde{Z})] \right) = \log \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\xi z) \gamma_{a,b}(z) dz \right) \\ &= \log \left(\frac{1}{b} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\xi z) \gamma \left(\frac{z-a}{b} \right) dz \right) \end{aligned}$$

Sfruttiamo il seguente cambio di variabile:

$$x = \frac{z-a}{b} \Rightarrow z = bx + a \Rightarrow dz = bdx;$$

segue che:

$$\begin{aligned} G_{a,b}(\xi) &= \log \left(\frac{1}{b} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\xi(bx+a)) \gamma(x) bdx \right) \\ &= \log \left(\exp(\xi a) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\xi bx) \gamma(x) dx \right) \\ &= \log(\exp(\xi a)) + \log \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\xi bx) \gamma(x) dx \right) \\ &= \log(\exp(\xi a)) + \log(\mathbb{E}[\exp(\xi bZ)]) \\ &= \xi a + G(\xi b) \end{aligned}$$

- $G'_{a,b}(\xi) = \frac{d}{d\xi}(\xi a + G(\xi b)) = a + G'(\xi b)b$
- $G''_{a,b}(\xi) = G''(\xi b)b^2$

Allora:

$$\begin{aligned} G_{a,b}(\xi) - \xi G'_{a,b}(\xi) &= \xi a + G(\xi b) - \xi(a + G'(\xi b)b) \\ &= G(\xi b) - \xi b G'(\xi b). \end{aligned}$$

Posto $\bar{\xi} = b\xi$:

$$G_{a,b}(\xi) - \xi G'_{a,b}(\xi) = G(\bar{\xi}) - \bar{\xi} G'(\bar{\xi}). \quad (3.23)$$

Per z e \tilde{z} fissati supponiamo che $\check{\xi}$ e $\check{\xi}$ siano le soluzioni delle equazioni saddlepoint

$$\begin{aligned} G'(\check{\xi}) &= z, \\ G'_{a,b}(\check{\xi}) &= \tilde{z}. \end{aligned}$$

Siano ora \hat{z} e $\hat{\tilde{z}}$ le soluzioni della (3.17) e $\hat{\xi} = \hat{\xi}(\hat{z})$ e $\hat{\check{\xi}} = \hat{\check{\xi}}(\hat{z})$:

$$G(\hat{\xi}) - \hat{\xi} \hat{z} = K(\hat{s}) - \hat{s}x,$$

$$G_{a,b}(\hat{\xi}) - \hat{\xi}\hat{z} = K(\hat{s}) - \hat{s}x.$$

Uguagliando i primi membri, ricordando che $G'(\hat{\xi}) = \hat{z}$, $G'_{a,b}(\hat{\xi}) = \hat{z}$ e utilizzando la (3.23) si ottiene:

$$\begin{aligned} G(\hat{\xi}) - \hat{\xi}G'(\hat{\xi}) &= G_{a,b}(\hat{\xi}) - \hat{\xi}G'_{a,b}(\hat{\xi}) \\ &= G(\hat{\xi}b) - b\hat{\xi}G'(\hat{\xi}b). \end{aligned}$$

Segue che:

$$\hat{\xi} = \hat{\xi}b.$$

Poiché $\tilde{z} = a + zb \Rightarrow \hat{z} = a + \hat{z}b$.

Utilizzando tutte le osservazioni fatte e applicandole alla formula (3.20) con distribuzione di base $\Gamma_{a,b}$ si prova l'enunciato; infatti:

$$\begin{aligned} P_{a,b}(X \geq x) &\simeq 1 - \Gamma_{a,b}(\hat{z}) + \gamma_{a,b}(\hat{z}) \left(\frac{1}{\hat{u}_{\hat{z}}} - \frac{1}{\hat{\xi}} \right) \\ &= 1 - \Gamma_{a,b}(a + \hat{z}b) + \gamma_{a,b}(a + \hat{z}b) \left(\frac{\sqrt{G''_{a,b}(\hat{\xi})}}{\hat{u}} - \frac{1}{\frac{1}{b}\hat{\xi}} \right) \\ &= 1 - \Gamma_{a,b}(a + \hat{z}b) + \gamma_{a,b}(a + \hat{z}b) \left(\frac{\sqrt{G''_{a,b}(\frac{1}{b}\hat{\xi})}}{\hat{u}} - \frac{1}{\frac{1}{b}\hat{\xi}} \right). \quad (3.24) \end{aligned}$$

Ricordando il Lemma 2.9 per il quale $\gamma_{a,b}(z) = \frac{1}{b}\gamma\left(\frac{z-a}{b}\right)$, osserviamo che:

1.

$$\Gamma_{a,b}(a + \hat{z}b) = \int_{-\infty}^{a+\hat{z}b} \gamma_{a,b}(x) dx = \int_{-\infty}^{a+\hat{z}b} \frac{1}{b} \gamma\left(\frac{x-a}{b}\right) dx$$

Sfruttiamo il seguente cambio di variabile:

$$y = \frac{x-a}{b} \Rightarrow x = a + by \Rightarrow dx = bdy;$$

segue che:

$$\begin{aligned} \Gamma_{a,b}(a + \hat{z}b) &= \int_{-\infty}^{\hat{z}} \frac{1}{b} \gamma(y) b dy \\ &= \Gamma(\hat{z}); \end{aligned}$$

2.

$$\gamma_{a,b}(a + \hat{z}b) = \frac{1}{b} \gamma\left(\frac{a + \hat{z}b - a}{b}\right) = \frac{1}{b} \gamma(\hat{z});$$

3.

$$G''_{a,b}\left(\frac{1}{b}\hat{\xi}\right) = G''\left(b\frac{1}{b}\hat{\xi}\right)b^2 = G''(\hat{\xi})b^2.$$

La (3.24) diventa:

$$\begin{aligned} P_{a,b}(X \geq x) &\simeq 1 - \Gamma(\hat{z}) + \frac{1}{b}\gamma(\hat{z}) \left(\frac{b\sqrt{G''(\hat{\xi})}}{\hat{u}} - \frac{b}{\hat{\xi}} \right) \\ &= 1 - \Gamma(\hat{z}) + \gamma(\hat{z}) \left(\frac{\sqrt{G''(\hat{\xi})}}{\hat{u}} - \frac{1}{\hat{\xi}} \right) \\ &= 1 - \Gamma(\hat{z}) + \gamma(\hat{z}) \left(\frac{1}{\hat{u}_{\hat{z}}} - \frac{1}{\hat{\xi}} \right) \\ &\simeq P(X \geq x) \end{aligned}$$

□

Osservazione 18. La Proposizione 3.6 non considera il caso $b < 0$; in questo caso la funzione generatrice dei cumulanti $G(\xi)$ relativa alla distribuzione di base è sostituita da $G(-\xi)$ e le radici $z_-(x)$ e $z_+(x)$ appaiono invertite nel mapping $x \rightarrow \hat{z}$. Allora le probabilità di coda sono le stesse quando la distribuzione di base è simmetrica, come il caso normale, mentre sono differenti quando la distribuzione di base è asimmetrica.

Capitolo 4

Applicazioni finanziarie

Per applicare i metodi saddlepoint in ambito finanziario è necessario introdurre i processi stocastici: i prezzi di un'azione o il costo complessivo dei sinistri relativo al portafoglio di una polizza assicurativa sono processi stocastici a tempo continuo.

4.1 Processi stocastici a tempo continuo

Definizione 4.1. Si definisce *processo stocastico a tempo continuo* una funzione

$$\begin{aligned} X : I \times \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ (t, \omega) &\rightarrow X_t(\omega) \end{aligned}$$

dove

- $I = [0, T[$ oppure $I = [0, \infty[$;
- $(\Omega, \mathfrak{F}, P, (\mathfrak{F})_{t \in I})$ spazio di probabilità con filtrazione²⁰.

Se si fissa t allora X_t è una variabile aleatoria.

Se si fissa ω allora X_t è una funzione detta *traiettoria del processo*.

Definizione 4.2. Si definisce *moto browniano 1-dim* $(W_t)_{t \geq 0}$ un processo stocastico su $(\Omega, \mathfrak{F}, P, (\mathfrak{F})_{t \in I})$ tale che:

- $W_0 = 0$;
- W è continuo e adattato cioè tutte le traiettorie di X sono continue e $\forall t \geq 0$ X_t è \mathfrak{F}_t -misurabile;

²⁰Filtrazione: Sia \mathfrak{F} una σ -algebra relativa ad un dato spazio di probabilità $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$; si definisce filtrazione una famiglia crescente di sotto- σ -algebre di \mathfrak{F} .

- $\forall t \geq 0, h > 0$ si ha che ogni incremento browniano $W_{t+h} - W_t$ ha distribuzione normale di parametri $(0, h)$ indipendenti da \mathfrak{F}_t .

Osservazione 19. W_t ha distribuzione normale di media 0 e varianza t .

Definizione 4.3. Si definisce *processo di Poisson di parametro λ* un processo stocastico $(N_t)_{t \geq 0}$ su $(\Omega, \mathfrak{F}, P, (\mathfrak{F})_{t \in I})$ tale che:

- $N(0) = 0$;
- $\forall t \geq 0, h > 0$ si ha che ogni incremento $N_{t+h} - N_t$ è indipendente e ha distribuzione di Poisson di parametro λh ovvero

$$P(N_{t+h} - N_t = m) = \exp(-\lambda h) \frac{(\lambda h)^m}{m!}$$

Osservazione 20. - N_t ha distribuzione di Poisson di parametro λt ;

- il processo di Poisson è un processo di conteggio cioè conta quante volte si verifica un evento.

Definizione 4.4. Si definisce *processo di Poisson composto* un processo stocastico $(X_t)_{t \geq 0}$ su $(\Omega, \mathfrak{F}, P, (\mathfrak{F})_{t \in I})$ tale che:

$$X_t = \sum_{n=1}^{N_t} Z_n$$

dove:

- $N = (N_t)_{t \geq 0}$ è un processo di Poisson;
- $(Z_n)_{n \geq 1}$ è una successione di variabili aleatorie indipendenti, identicamente distribuite e indipendenti da N .

Definizione 4.5. Si definisce *processo di Levy* un processo stocastico adattato $(X_t)_{t \geq 0}$ su $(\Omega, \mathfrak{F}, P, (\mathfrak{F})_{t \in I})$ tale che:

- ha incrementi indipendenti e stazionari ovvero $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < t_1 < t_2 < \dots < \infty$ si ha che:
 - $(X_{t_{j+1}} - X_{t_j})_{1 \leq j \leq n}$ sono variabili aleatorie indipendenti,
 - $X_{t_{j+1}} - X_{t_j} = X_{t_{j+1}-t_j} - X_0$;
- $X_0 = 0$ quasi certamente;
- è continuo ovvero $\forall a > 0$ e $\forall s \geq 0$

$$\lim_{t \rightarrow s} P(|X_t - X_s| > a) = 0;$$

4.2 Polizza assicurativa

Supponiamo di lavorare con una polizza assicurativa che ha accumulato fino al tempo t un numero N_t di sinistri ciascuno di costo Z_i con $i = 1, \dots, N_t$.

Lo scopo è stimare la probabilità che il costo totale dei sinistri non superi una certa quota fissata $x \geq 0$. Il costo complessivo che l'assicurazione è tenuta a risarcire è dato da

$$X_t = \sum_{n=1}^{N_t} Z_n.$$

Si vuole quindi stimare la probabilità di coda $P(X_t \leq x)$ utilizzando i metodi saddlepoint visti.

Si suppone che:

- i costi Z_i siano indipendenti e identicamente distribuiti, ciascuno con distribuzione esponenziale di parametro β ; la densità di ciascuna Z_i è data da:

$$f_{Z_i}(x) = \beta \exp(-\beta x), \quad \text{per } x \geq 0;$$

- i costi Z_i non dipendano dal numero di sinistri N_t .

Nella pratica, sotto queste ipotesi, se si suppone che il numero di sinistri segua una distribuzione di Poisson di parametro λ allora, per definizione, segue che X è un processo di Poisson composto.

La densità esatta di X_t , a livello teorico, è la seguente:

$$f_{X_t}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{Z_i}^{*n}(x) P(N_t = n)$$

dove $f_{Z_i}^{*n}$ è la convoluzione di n volte la densità esponenziale di ciascun Z_i .

Se si vuole calcolare l'approssimazione saddlepoint di questa, basta ricavarsi la funzione generatrice dei cumulanti di X_t ; partiamo con il ricavare la funzione generatrice dei momenti:

$$M_{X_t}(s) = \mathbb{E} \left[\exp \left(s \sum_{n=1}^{N_t} Z_n \right) \right].$$

Applichiamo il valore atteso condizionato:

$$\begin{aligned} M_{X_t}(s) &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\exp \left(s \sum_{n=1}^{N_t} Z_n \right) \mid N_t = k \right] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\exp \left(s \sum_{n=1}^k Z_n \right) \right] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\exp(s Z_n)^k \right] \right]. \end{aligned}$$

Sfruttando l'indipendenza si ottiene:

$$\begin{aligned}
 M_{X_t}(s) &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} [\exp(sZ_n)]^k \right] \\
 &= \mathbb{E} [(M_{Z_n}(s))^k] \\
 &= \mathbb{E} [\exp(\log(M_{Z_n}(s))^k)] \\
 &= \mathbb{E} [\exp(k \log(M_{Z_n}(s)))] \\
 &= \mathbb{E} [\exp(kK_{Z_n}(s))] \\
 &= M_{N_t}(K_{Z_n}(s)).
 \end{aligned}$$

Allora la funzione generatrice dei cumulanti di X_t è

$$K_{X_t}(s) = \log(M_{X_t}(s)) = \log(M_{N_t}(K_{Z_n}(s))) = K_{N_t}(K_{Z_n}(s)). \quad (4.1)$$

Calcoliamo la funzione generatrice dei momenti di una variabile aleatoria Z_n che ha distribuzione esponenziale di parametro β e successivamente quella dei cumulanti:

$$\begin{aligned}
 M_{Z_n}(s) &= \mathbb{E}[\exp(sZ_n)] = \int_0^\infty \exp(sz)\beta \exp(-\beta z) dz \\
 &= -\frac{\beta}{\beta-s} \int_0^\infty -(\beta-s) \exp(-z(\beta-s)) dz \\
 &= -\frac{\beta}{\beta-s} [\exp(-z(\beta-s))]_0^\infty \\
 &= \frac{\beta}{\beta-s}.
 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Allora

$$K_{Z_n}(s) = \log \left(\frac{\beta}{\beta-s} \right)$$

con $s < \beta$. La funzione generatrice dei momenti di una variabile aleatoria N_t che ha distribuzione di Poisson di parametro λ è invece la seguente:

$$\begin{aligned}
 M_{N_t}(s) &= \mathbb{E}[\exp(sN_t)] = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(sn) \exp(-\lambda t) \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\
 &= \exp(-\lambda t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\exp(s)\lambda t)^n}{n!} \\
 &= \exp(-\lambda t) \exp(\lambda t \exp(s)) \\
 &= \exp(-\lambda t) (\exp(\lambda t))^{\exp(s)}.
 \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned}
 K_{N_t}(s) &= \log(\exp(-\lambda t)(\exp(\lambda t))^{\exp(s)}) \\
 &= \log(\exp(-\lambda t)) + \exp(s) \log(\exp(\lambda t)) \\
 &= -\lambda t + \exp(s)\lambda t \\
 &= \lambda t(\exp(s) - 1).
 \end{aligned}$$

Componendo le due funzioni generatrici dei cumulanti la (4.1) diventa:

$$\begin{aligned}
 K_{X_t}(s) &= K_{N_t}(K_{Z_n}(s)) = \lambda t \left[\exp\left(\log\left(\frac{\beta}{\beta-s}\right)\right) - 1 \right] \\
 &= \lambda t \left[\left(\frac{\beta}{\beta-s}\right) - 1 \right] \\
 &\quad \text{con } s \neq \beta.
 \end{aligned}$$

L'equazione saddlepoint $K'_{X_t}(\hat{s}) = x$ relativa alla quota fissata $x \geq 0$ è quindi:

$$\begin{aligned}
 \lambda t \left(\frac{\beta}{(\beta - \hat{s})^2} \right) &= x \\
 \frac{\lambda t \beta}{(\beta - \hat{s})^2} &= x \\
 \lambda t \beta &= x(\beta - \hat{s})^2 \\
 \lambda t \beta &= x(\beta^2 + \hat{s}^2 - 2\beta\hat{s}) \\
 \hat{s}^2 x + \hat{s}(-2x\beta) + \beta^2 x - \lambda t \beta &= 0 \\
 s &= \frac{2x\beta \pm \sqrt{4x^2\beta^2 - 4x(\beta^2 x - \lambda t \beta)}}{2x} \\
 &= \frac{2x\beta \pm \sqrt{4x\lambda t \beta}}{2x} \\
 &= \frac{2x\beta(1 \pm \sqrt{\frac{\lambda t}{x\beta}})}{2x} \\
 &= \beta(1 \pm \sqrt{\frac{\lambda t}{x\beta}}).
 \end{aligned}$$

Poiché $s < \beta$, l'unica soluzione saddlepoint è

$$\hat{s} = \beta(1 - \sqrt{\frac{\lambda t}{x\beta}}).$$

Calcoliamo ora la derivata seconda della funzione generatrice dei cumulanti e ricostruiamo la densità saddlepoint:

$$K''_{X_t}(s) = \frac{2\lambda t \beta (\beta - s)}{(\beta - s)^4} = \frac{2\lambda t \beta}{(\beta - s)^3}.$$

L'approssimazione saddlepoint (2.6) del primo ordine è data da:

$$\begin{aligned}
\hat{f}_{X_t}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi K''_{X_t}(\hat{s})}} \exp(K_{X_t}(\hat{s}) - \hat{s}x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{2\lambda t\beta}{(\beta-\hat{s})^3}}} \exp\left(\lambda t \left(\frac{\beta}{\beta-\hat{s}} - 1\right) - \hat{s}x\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{2\lambda t\beta}{(\beta-(\beta(1-\sqrt{\frac{\lambda t}{x\beta}})))^3}}} \\
&\quad \cdot \exp\left[\lambda t \left(\frac{\beta}{\beta-\beta(1-\sqrt{\frac{\lambda t}{x\beta}})} - 1\right) - \beta x \left(1 - \sqrt{\frac{\lambda t}{x\beta}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{2\lambda t\beta}{(\beta\sqrt{\frac{\lambda t}{x\beta}})^3}}} \\
&\quad \cdot \exp\left[\lambda t \left(\frac{\beta}{\beta\sqrt{\frac{\lambda t}{x\beta}}} - 1\right) - \beta x \left(1 - \sqrt{\frac{\lambda t}{x\beta}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{2\lambda t}{\beta^2 \frac{\lambda t}{x\beta} \sqrt{\frac{\lambda t}{x\beta}}}}} \\
&\quad \cdot \exp\left[\lambda t \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda t}{x\beta}}} - 1\right) - \beta x \left(1 - \sqrt{\frac{\lambda t}{x\beta}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{2x}{\beta\sqrt{\frac{\lambda t}{x\beta}}}}} \\
&\quad \cdot \exp\left[\lambda t \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda t}{x\beta}}} - 1\right) - \beta x \left(1 - \sqrt{\frac{\lambda t}{x\beta}}\right)\right].
\end{aligned}$$

Calcoliamo la probabilità di coda (3.10)

$$P(X \geq x) \simeq 1 - \Phi(\hat{w}) + \phi(\hat{w}) \left(\frac{1}{\hat{u}} - \frac{1}{\hat{w}}\right). \quad (4.3)$$

dove:

- $\hat{w} = \text{sgn}(\hat{s}) \sqrt{2 \left(\hat{s}x - \lambda t \left[\frac{\beta}{\beta-\hat{s}} - 1 \right] \right)}$ dove \hat{s} è la soluzione saddlepoint $\hat{s} = \beta(1 - \sqrt{\frac{\lambda t}{x\beta}})$;

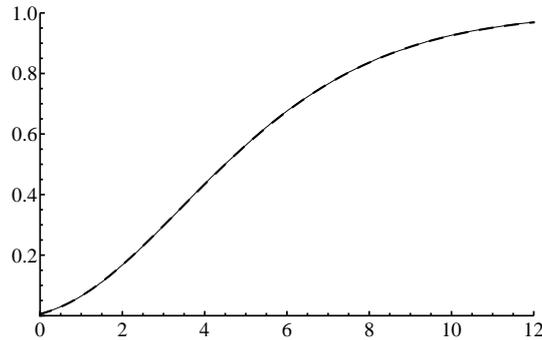


Figura 4.1: Distribuzione esatta (linea continua) e approssimazione saddlepoint (linea tratteggiata).

$$\bullet \hat{u} = \hat{s} \sqrt{\left[\frac{2\lambda t \beta}{(\beta - \hat{s})^3} \right]}.$$

La Figura 4.1 è stata ottenuta fissando i parametri come suggerito in [1] e implementando le formule saddlepoint attraverso l'utilizzo del software Mathematica.

I parametri scelti sono i seguenti:

- $\lambda = 5$;
- $t = 1$;
- $\beta = 1$.

4.3 Prezzi di opzioni call

Un'*opzione* è un titolo basato sul valore di mercato di uno o più beni (tassi d'interesse, valute, indici finanziari); un'*opzione call* offre all'acquirente il diritto ma non l'obbligo di acquistare un titolo detto *sottostante* a un dato prezzo d'esercizio prefissato K (*strike*) in una data futura T . L'acquirente si garantisce questo diritto pagando l'opzione a un prezzo iniziale fissato.

In altre parole, se il sottostante al tempo T vale $S_T > K$, l'acquirente, esercitando il diritto offertogli dall'opzione, potrà comprare il titolo al prezzo K guadagnando $S_T - K$; se invece $S_T < K$ all'acquirente non converrà esercitare il diritto e il guadagno risulterà nullo.

Definizione 4.6. Sia $(S_t)_{t \geq 0}$ il processo stocastico a tempo continuo dei prezzi del sottostante, K lo strike e T il tempo di scadenza dell'opzione; si definisce *payoff* il guadagno $F(S_T)$ che si ottiene esercitando l'opzione:

$$F(S_T) = \max\{0, S_T - K\} = (S_T - K)^+.$$

Il problema che si dovrà affrontare è calcolare il prezzo iniziale dell'opzione call $C(T, S_0, K, r)$ che dipenderà dalla scadenza del contratto, dal prezzo iniziale del sottostante, dallo strike e dal tasso d'interesse privo di rischio r . Tanti sono stati i metodi sviluppati negli anni per calcolare $C(T, S_0, K, r)$ attraverso l'inversione della trasformata di Fourier, la formula di Black e Scholes (1973); ci occuperemo del metodo più recente, elaborato nel 2008 da Madan, Roynette e Yor e riportato da Carr e Madan in [4] nel quale viene illustrato come calcolare il prezzo di un'opzione call attraverso la formula generalizzata di Lugannani-Rice con distribuzione di base non gaussiana data dalla densità di una variabile aleatoria che è differenza di una con distribuzione normale e di una con distribuzione esponenziale indipendente.

Per calcolare il prezzo di un'opzione call $C(T, S_0, K, r)$ basta calcolare il valore atteso del payoff $F(S_T)$ scontato ad oggi del fattore $\exp(-rT)$. Chiamiamo $k = \log(K)$ il logaritmo dello strike e sia f la densità per il logaritmo del titolo $X_T = \log(S_T)$.

$$\begin{aligned} C(T, S_0, k, r) &= \exp(-rT)E[F(S_T)] = \exp(-rT)E[(S_T - K)^+] \\ &= \exp(-rT)E[(\exp(X_T) - \exp(k))^+] \\ &= \exp(-rT) \int_{\{x \mid \exp(x) - \exp(k) > 0\}} (\exp(x) - \exp(k))f(x)dx \\ &= \exp(-rT) \int_{\{x > k\}} (\exp(x) - \exp(k))f(x)dx \\ &= \exp(-rT) \int_k^{\infty} (\exp(x) - \exp(k))f(x)dx. \end{aligned}$$

Dividiamo il prezzo della call per il prezzo attuale del titolo S_0 : esso equivale al valore atteso del prezzo del titolo S_T scontato ad oggi:

$$\begin{aligned} S_0 &= \exp(-rT)E[S_T] \\ &= \exp(-rT)E[\exp(X_T)] \\ &= \exp(-rT) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(x)f(x)dx. \end{aligned}$$

Allora:

$$\begin{aligned} \tilde{C}(T, S_0, k, r) &:= \frac{C(T, S_0, k, r)}{S_0} \\ &= \frac{\exp(-rT) \int_k^{\infty} (\exp(x) - \exp(k))f(x)dx}{\exp(-rT) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(x)f(x)dx} \\ &= \frac{\int_k^{\infty} (\exp(x) - \exp(k))f(x)dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(x)f(x)dx} \end{aligned}$$

Noto che $k \in [0, \infty)$, osserviamo che:

- $\tilde{C}(T, S_0, k, r) \rightarrow 0$ per $k \rightarrow +\infty$;
- $\tilde{C}(T, S_0, k, r) \rightarrow 1$ per $k \rightarrow 0$.

$\Rightarrow \tilde{C}(T, S_0, k, r)$ è una probabilità di coda.

Proposizione 4.1. $\tilde{C}(T, S_0, k, r)$ è la probabilità di coda $Q(L \geq k)$ della variabile aleatoria

$$L = X_T - Y$$

dove

- Q è la misura martingala relativa al numeraire S_T equivalente alla misura di probabilità P neutrale al rischio (relativa al numeraire bond)²¹;
- $X_T = \log(S_T)$;
- $-Y$ è una variabile aleatoria con distribuzione esponenziale di parametro 1.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \tilde{C}(T, S_0, k, r) &= \frac{C(T, S_0, k, r)}{S_0} \\ &= \frac{\mathbb{E}[(S_T - K)^+]}{\mathbb{E}[S_T]} \\ &= \mathbb{E}[(S_T - K)^+] \frac{1}{\mathbb{E}[S_T]} \\ &= \mathbb{E}^Q \left[(S_T - K)^+ \frac{B_T S_0}{S_T B_0} \right] \frac{1}{\mathbb{E}[S_T]} \\ &= \begin{cases} \mathbb{E}^Q \left[(S_T - K) \frac{B_T S_0}{S_T B_0} \right] \frac{1}{\mathbb{E}[S_T]} & \text{se } S_T > K \\ 0 & \text{se } S_T < K \end{cases} \\ &= \begin{cases} \left(\mathbb{E}^Q \left[S_T \frac{B_T S_0}{S_T B_0} \right] - \mathbb{E}^Q \left[K \frac{B_T S_0}{S_T B_0} \right] \right) \frac{1}{\mathbb{E}[S_T]} & \text{se } S_T > K \\ 0 & \text{se } S_T < K \end{cases} \\ &= \begin{cases} \left(\mathbb{E}^Q \left[\exp(rT) \frac{S_0}{B_0} \right] - \mathbb{E}^Q \left[K \frac{\exp(rT) S_0}{S_T B_0} \right] \right) \frac{1}{S_0 \exp(rT)} & \text{se } S_T > K \\ 0 & \text{se } S_T < K \end{cases} \end{aligned}$$

²¹Si veda l'Appendice E.

Poiché $B_0 = 1$:

$$\begin{aligned}
\tilde{C}(T, S_0, k, r) &= \begin{cases} \exp(rT) \left(\mathbb{E}^Q [S_0] - \mathbb{E}^Q \left[\frac{K}{S_T} S_0 \right] \right) \frac{1}{S_0 \exp(rT)} & \text{se } S_T > K \\ 0 & \text{se } S_T < K \end{cases} \\
&= \begin{cases} \exp(rT) S_0 \left(1 - \mathbb{E}^Q \left[\frac{K}{S_T} \right] \right) \frac{1}{S_0 \exp(rT)} & \text{se } S_T > K \\ 0 & \text{se } S_T < K \end{cases} \\
&= \begin{cases} \left(1 - \mathbb{E}^Q \left[\frac{K}{S_T} \right] \right) & \text{se } S_T > K \\ 0 & \text{se } S_T < K \end{cases} \\
&= \mathbb{E}^Q \left[\left(1 - \frac{K}{S_T} \right)^+ \right]
\end{aligned}$$

dove Q è la share measure relativa al numeraire S^{22} .

Definiamo ora $Y = X_T - K$. Allora si ha:

$$\frac{K}{S_T} = \frac{\exp(k)}{\exp(X_T)} = \exp(k - X_T) = \exp(-Y)$$

e chiamiamo $f(y)$ la densità di Y sotto la share measure con corrispondente funzione di ripartizione $F(y)$. Allora

$$\tilde{C}(T, S_0, k, r) = \mathbb{E}^Q \left[\left(1 - \frac{K}{S_T} \right)^+ \right]$$

diventa:

$$\begin{aligned}
\tilde{C}(T, S_0, k, r) &= \int_0^\infty (1 - \exp(y)) f(y) dy \\
&= \int_0^\infty (1 - \exp(y)) F'(y) dy.
\end{aligned}$$

Integrando per parti si ottiene:

$$\begin{aligned}
\tilde{C}(T, S_0, k, r) &= [1 - \exp(-y)F(y)]_0^\infty - \int_0^\infty \exp(y)F(y)dy \\
&= 1 - \int_0^\infty \exp(y)F(y)dy \\
&= \int_0^\infty (1 - F(y)) \exp(-y)dy.
\end{aligned}$$

²²Si veda il Corollario E.2 dell'Appendice E.

Siccome $\exp(-y)$ è la densità di una variabile aleatoria esponenziale di parametro 1 si può concludere che:

$$\tilde{C}(T, S_0, k, r) = Q(X_T - \log(K) > Y) = Q(X_T - Y > k).$$

Abbiamo dimostrato che $\tilde{C}(T, S_0, k, r)$ cioè il prezzo di un'opzione call normalizzata si trova calcolando la probabilità che la variabile X_T sotto la share measure superi il logaritmo dello strike k di una variabile aleatoria esponenziale Y ovvero calcolando una probabilità di coda.

4.3.1 Scelta della base per Lugannani-Rice generalizzata

Come osservato nella Proposizione 4.1 il prezzo di un'opzione call può essere calcolato come probabilità di coda; come visto nel capitolo precedente è possibile applicare la formula di Lugannani-Rice (generalizzata) per questo calcolo. Per utilizzare la formula di Lugannani-Rice generalizzata occorre scegliere un'opportuna distribuzione di base; la base proposta da Carr e Madan in [4] è la distribuzione di una variabile aleatoria

$$Z + \frac{1}{\lambda} - Y$$

dove $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ e $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Calcoliamo la funzione generatrice dei cumulanti di $Z + \frac{1}{\lambda} - Y$ ricordando che, per la Proposizione 1.4 vale:

$$\begin{aligned} G(s) &= K_{Z + \frac{1}{\lambda} - Y}(s) \\ &= K_{Z + \frac{1}{\lambda}}(s) + K_{-Y}(s). \end{aligned}$$

Segue che:

$$\begin{aligned} G(s) &= \log \left(\mathbb{E} \left[\exp \left(s \left(Z + \frac{1}{\lambda} \right) \right) \right] \right) + \log (\mathbb{E}[\exp(s(-Y))]) \\ &= \log \left(\mathbb{E} \left[\exp(sZ) \exp \left(s \frac{1}{\lambda} \right) \right] \right) + \log (\mathbb{E}[\exp(-sY)]) \\ &= \log \left(\exp \left(\frac{s}{\lambda} \right) \mathbb{E}[\exp(sZ)] \right) + \log (\mathbb{E}[\exp(-sY)]). \end{aligned}$$

Poiché $E[\exp(sZ)] = \exp\left(\frac{s^2}{2}\right)^{23}$ e $E[\exp(-sY)] = \frac{\lambda}{\lambda - (-s)}^{24}$ si ha:

$$\begin{aligned} G(s) &= \log\left(\exp\left(\frac{s}{\lambda}\right) \exp\left(\frac{s^2}{2}\right)\right) + \log\left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right) \\ &= \log\left(\exp\left(\frac{s}{\lambda}\right)\right) + \log\left(\exp\left(\frac{s^2}{2}\right)\right) + \log(\lambda) - \log(\lambda + s) \\ &= \frac{s}{\lambda} + \frac{s^2}{2} + \log(\lambda) - \log(\lambda + s). \end{aligned}$$

Le derivate prime e seconde sono:

- $G'(s) = \frac{1}{\lambda} + s - \frac{1}{\lambda + s}$;
- $G''(s) = 1 + \left(\frac{1}{\lambda + s}\right)^2$.

Calcoliamo ora la funzione di ripartizione e la densità relativa a questa distribuzione di base:

$$\begin{aligned} \Gamma(a) &= P\left(Z + \frac{1}{\lambda} - Y > a\right) \\ &= P\left(Z - Y > a - \frac{1}{\lambda}\right) \\ &= \int_{a - \frac{1}{\lambda}}^{\infty} f_{Z+(-Y)}(x) dx \\ &= \int_{a - \frac{1}{\lambda}}^{\infty} (f_Z * f_{-Y})(x) dx \\ &= \int_{a - \frac{1}{\lambda}}^{\infty} \int_0^{\infty} f_Z(z) f_{-Y}(z - x) dz dx \\ &= \int_0^{\infty} f_Z(z) \int_{a - \frac{1}{\lambda}}^{\infty} f_{-Y}(z - x) dx dz. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Calcoliamo ora l'integrale in dx operando il seguente cambio di variabile:

$$w = x - z \Rightarrow x = w + z \Rightarrow dx = dw.$$

$$\begin{aligned} \int_{a - \frac{1}{\lambda}}^{\infty} f_{-Y}(z - x) dx &= \int_{a - \frac{1}{\lambda} - z}^{\infty} f_{-Y}(w) dw \\ &= F\left(-Y > -z + \left(a - \frac{1}{\lambda}\right)\right) \\ &= F\left(Y < z - \left(a - \frac{1}{\lambda}\right)\right). \end{aligned}$$

²³Si veda il punto 1 dell'Appendice A.

²⁴Si veda l'equazione (4.2).

Poiché $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$ si può concludere che:

$$\int_{a-\frac{1}{\lambda}}^{\infty} f_{-Y}(z-x)dx = 1 - \exp\left(-\lambda\left(z - \left(a - \frac{1}{\lambda}\right)\right)\right).$$

L'equazione (4.4) diventa quindi:

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} f_Z(z) \left\{ 1 - \exp\left[-\lambda\left(z - \left(a - \frac{1}{\lambda}\right)\right)\right] \right\} dz.$$

Poiché $1 - \exp\left[-\lambda\left(z - \left(a - \frac{1}{\lambda}\right)\right)\right] \neq 0$ se $z > a - \frac{1}{\lambda}$ è possibile cambiare il primo estremo d'integrazione della precedente:

$$\begin{aligned} \Gamma(a) &= \int_{a-\frac{1}{\lambda}}^{\infty} f_Z(z) \left\{ 1 - \exp\left[-\lambda\left(z - \left(a - \frac{1}{\lambda}\right)\right)\right] \right\} dz \\ &= \int_{a-\frac{1}{\lambda}}^{\infty} f_Z(z) dz - \int_{a-\frac{1}{\lambda}}^{\infty} f_Z(z) \exp\left[-\lambda\left(z - \left(a - \frac{1}{\lambda}\right)\right)\right] dz \\ &= 1 - \Phi\left(a - \frac{1}{\lambda}\right) - \int_{a-\frac{1}{\lambda}}^{\infty} f_Z(z) \exp(-\lambda z) \exp\left(\lambda\left(a - \frac{1}{\lambda}\right)\right) dz. \end{aligned}$$

Poiché per simmetria: $1 - \Phi\left(a - \frac{1}{\lambda}\right) = \Phi\left(\frac{1}{\lambda} - a\right)$ si ha:

$$\Gamma(a) = \Phi\left(\frac{1}{\lambda} - a\right) - \exp\left(\lambda\left(a - \frac{1}{\lambda}\right)\right) \int_{a-\frac{1}{\lambda}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2} - \lambda z\right) dz.$$

Completiamo il quadrato:

$$\begin{aligned} -\frac{z^2}{2} - \lambda z &= -\frac{1}{2}(z^2 + 2\lambda z) \\ &= -\frac{1}{2}(z^2 + 2\lambda z + \lambda^2 - \lambda^2) \\ &= -\frac{1}{2}(z^2 + 2\lambda z + \lambda^2) + \frac{1}{2}\lambda^2 \\ &= -\frac{1}{2}(z + \lambda)^2 + \frac{1}{2}\lambda^2. \end{aligned}$$

Allora:

$$\begin{aligned} \Gamma(a) &= \Phi\left(\frac{1}{\lambda} - a\right) - \exp\left(\lambda\left(a - \frac{1}{\lambda}\right)\right) \int_{a-\frac{1}{\lambda}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2} - \lambda z\right) dz \\ &= \Phi\left(\frac{1}{\lambda} - a\right) - \exp\left(\lambda\left(a - \frac{1}{\lambda}\right)\right) \int_{a-\frac{1}{\lambda}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z + \lambda)^2 + \frac{1}{2}\lambda^2\right) dz \\ &= \Phi\left(\frac{1}{\lambda} - a\right) - \exp\left(\lambda\left(a - \frac{1}{\lambda}\right)\right) \exp\left(\frac{1}{2}\lambda^2\right) \int_{a-\frac{1}{\lambda}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z + \lambda)^2\right) dz. \end{aligned}$$

Sfruttiamo il seguente cambio di variabile:

$$w = z + \lambda \Rightarrow z = w - \lambda \Rightarrow dz = dw.$$

Allora:

$$\begin{aligned} \Gamma(a) &= \Phi\left(\frac{1}{\lambda} - a\right) - \exp\left(\lambda\left(a - \frac{1}{\lambda}\right)\right) \exp\left(\frac{1}{2}\lambda^2\right) \int_{a - \frac{1}{\lambda} + \lambda}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(w)^2\right) dw \\ &= \Phi\left(\frac{1}{\lambda} - a\right) - \exp\left(\lambda\left(a - \frac{1}{\lambda}\right)\right) \exp\left(\frac{1}{2}\lambda^2\right) \left[1 - \Phi\left(a - \frac{1}{\lambda} + \lambda\right)\right]. \end{aligned}$$

Poiché per simmetria: $1 - \Phi\left(a - \frac{1}{\lambda} + \lambda\right) = \Phi\left(\frac{1}{\lambda} - \lambda - a\right)$ segue che:

$$\Gamma(a) = \Phi\left(\frac{1}{\lambda} - a\right) - \exp\left(\lambda\left(a - \frac{1}{\lambda}\right) + \frac{1}{2}\lambda^2\right) \Phi\left(\frac{1}{\lambda} - \lambda - a\right).$$

Di conseguenza la densità $\gamma(a)$ della distribuzione di base è la derivata della precedente:

$$\begin{aligned} \gamma(a) &= \Gamma'(a) \\ &= \phi\left(\frac{1}{\lambda} - a\right) + \lambda \exp\left(\lambda\left(a - \frac{1}{\lambda}\right) + \frac{1}{2}\lambda^2\right) \Phi\left(\frac{1}{\lambda} - \lambda - a\right) \\ &\quad - \exp\left(\lambda\left(a - \frac{1}{\lambda}\right) + \frac{1}{2}\lambda^2\right) \phi\left(\frac{1}{\lambda} - \lambda - a\right) \\ &= \phi\left(\frac{1}{\lambda} - a\right) + \lambda \exp\left(\lambda a - 1 + \frac{1}{2}\lambda^2\right) \Phi\left(\frac{1}{\lambda} - \lambda - a\right) \\ &\quad - \exp\left(\lambda a - 1 + \frac{1}{2}\lambda^2\right) \phi\left(\frac{1}{\lambda} - \lambda - a\right). \end{aligned}$$

Per applicare la formula (3.20) di Lugannani-Rice generalizzata con distribuzione di base relativa a Γ e γ occorre determinare:

- le radici dell'equazione (3.17) scegliendo \hat{z}_- o \hat{z}_+ secondo la modalità espressa nella (3.19);
- la soluzione $\hat{\xi}$ dell'equazione saddlepoint $G'(\hat{\xi}) = \hat{z}$;
- $\hat{u}_z = \frac{\hat{u}}{\sqrt{G''(\hat{\xi})}}$ dove $\hat{u} = \hat{s}\sqrt{K''(\hat{s})}$ e \hat{s} è la soluzione dell'equazione saddlepoint $K'(\hat{s}) = k$, con k il logaritmo dello strike.
 K è la funzione generatrice dei cumulanti della variabile aleatoria $X_T - \tilde{Y}$ definita nella Proposizione 4.1 secondo cui:

$$- X_T = \log(S_T) \text{ sotto la share measure;}$$

– $-\tilde{Y}$ è una variabile aleatoria con distribuzione esponenziale di parametro 1.

Sia \hat{z} la soluzione dell'equazione (3.17); allora la soluzione $\hat{\xi}$ dell'equazione saddlepoint relativa a \hat{z} è data da

$$\begin{aligned}
G'(\hat{\xi}) = \hat{z} &\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} + \hat{\xi} - \frac{1}{\lambda + \hat{\xi}} = \hat{z} \\
&\Leftrightarrow \frac{\lambda + \hat{\xi} + \lambda\hat{\xi}(\lambda + \hat{\xi}) - \lambda}{\lambda(\lambda + \hat{\xi})} = \frac{\hat{z}\lambda(\lambda + \hat{\xi})}{\lambda(\lambda + \hat{\xi})} \\
&\Leftrightarrow \lambda + \hat{\xi} + \hat{\xi}\lambda^2 + \hat{\xi}^2\lambda - \lambda = \hat{z}\lambda^2 + \hat{z}\lambda\hat{\xi} \\
&\Leftrightarrow \hat{\xi}^2\lambda + \hat{\xi}(\lambda^2 + 1 - \hat{z}\lambda) - \hat{z}\lambda^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \hat{\xi} = \frac{-(\lambda^2 + 1 - \hat{z}\lambda) \pm \sqrt{(\lambda^2 + 1 - \hat{z}\lambda)^2 - 4\lambda(-\hat{z}\lambda^2)}}{2\lambda} \\
&\Leftrightarrow \hat{\xi} = \frac{-(\lambda^2 + 1 - \hat{z}\lambda) \pm \sqrt{\lambda^4 + 1 + \hat{z}^2\lambda^2 + 2\lambda^2 - 2\lambda^3\hat{z} - 2\hat{z}\lambda + 4\hat{z}\lambda^3}}{2\lambda} \\
&\Leftrightarrow \hat{\xi} = \frac{-(\lambda^2 + 1 - \hat{z}\lambda) \pm \sqrt{\lambda^4 + 1 + \hat{z}^2\lambda^2 + 2\lambda^2 + 2\lambda^3\hat{z} - 2\hat{z}\lambda}}{2\lambda} \\
&\Leftrightarrow \hat{\xi} = -\lambda + \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} + 1} \\
&\text{dove } c = \hat{z} - \frac{1}{\lambda} + \lambda
\end{aligned}$$

L'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che

$$\begin{aligned}
-\lambda + \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} + 1} &= -\lambda + \frac{\hat{z} - \frac{1}{\lambda} + \lambda}{2} \pm \sqrt{\frac{(\hat{z} - \frac{1}{\lambda} + \lambda)^2}{4} + 1} \\
&= \frac{-2\lambda + \hat{z} - \frac{1}{\lambda} + \lambda}{2} \pm \sqrt{\frac{(\frac{\lambda\hat{z} - 1 + \lambda^2}{\lambda})^2}{4} + 1} \\
&= \frac{-\lambda^2 + \hat{z}\lambda - 1}{2\lambda} \pm \sqrt{\frac{(\lambda\hat{z} - 1 + \lambda^2)^2}{4\lambda^2} + 1} \\
&= \frac{-\lambda^2 + \hat{z}\lambda - 1}{2\lambda} \pm \sqrt{\frac{(\lambda\hat{z} - 1 + \lambda^2)^2 + 4\lambda^2}{4\lambda^2}} \\
&= \frac{-\lambda^2 + \hat{z}\lambda - 1 \pm \sqrt{(\lambda\hat{z} - 1 + \lambda^2)^2 + 4\lambda^2}}{2\lambda} \\
&= \frac{-(\lambda^2 - \hat{z}\lambda + 1) \pm \sqrt{\lambda^2\hat{z}^2 + 1 + \lambda^4 - 2\hat{z}\lambda + 2\hat{z}\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda^2}}{2\lambda} \\
&= \frac{-(\lambda^2 - \hat{z}\lambda + 1) \pm \sqrt{\lambda^2\hat{z}^2 + 1 + \lambda^4 - 2\hat{z}\lambda + 2\hat{z}\lambda^3 + 2\lambda^2}}{2\lambda}
\end{aligned}$$

Poiché la funzione generatrice dei cumulanti $G(s)$ è definita per $s > -\lambda$, l'unica soluzione saddlepoint dell'equazione $G'(\hat{\xi}) = \hat{z}$ è

$$\hat{\xi} = -\lambda + \frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + 1}.$$

□

4.3.2 Modello Black-Scholes

Nel modello Black-Scholes, si ipotizza che il sottostante segua un processo di Itô²⁵ del tipo:

$$dS_t = u_t dt + v_t dW_t$$

dove

- $u_t = rS_t$;
- $v_t = \sigma S_t$;
- (W_t) è un processo browniano;
- r è il tasso d'interesse costante e rappresenta il drift percentuale istantaneo;
- σ è una costante e rappresenta la volatilità percentuale istantanea.

Più formalmente:

$$S_t = S_0 + \int_0^t u_s ds + \int_0^t v_s dW_s \quad (4.5)$$

dove

- $\int_0^t u_s ds$ integrale deterministico;
- $\int_0^t v(s) dW_s$ integrale stocastico.

Proposizione 4.2. *Sia $(X_t)_{t \geq 0}$ il processo definito da*

$$X_t = \log(S_t).$$

Allora

$$dX_t = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t \quad (4.6)$$

ovvero

$$X_t = X_0 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma \sqrt{t} Z$$

dove Z è una variabile aleatoria con distribuzione normale standard.

²⁵Si veda l'Appendice D

Dimostrazione. $X_t = F(S_t)$. Applichiamo la formula di Itô²⁶ osservando che X_t non dipende esplicitamente da t e che quindi le derivate parziali rispetto a t sono nulle:

$$\begin{aligned}
X_t = F(S_t) &= F(S_0) + \int_0^t (\partial_x F)(S_s) u_s ds \\
&\quad + \int_0^t (\partial_x F)(S_s) v_s dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t (\partial_{xx} F)(S_s) v_s^2 ds \\
&= \log(S_0) + \int_0^t \frac{1}{S_s} r S_s ds \\
&\quad + \int_0^t \frac{1}{S_s} \sigma S_s dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t -\frac{1}{S_s^2} \sigma^2 S_s^2 ds \\
&= X_0 + rt + \sigma W_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t \\
&= X_0 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t.
\end{aligned}$$

Siccome $W_t \sim \mathcal{N}_{0,t}$ allora $Z = \frac{W_t - 0}{\sqrt{t}} \sim \mathcal{N}_{0,1}$; si ottiene quindi:

$$X_t = X_0 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma \sqrt{t} Z.$$

□

Si può provare che $\tilde{C}(T, S_0, k, r)$ calcolato nella Proposizione 4.1, considerando $X_T = \log(S_T)$ con S_T relativo alla share measure Q corrisponde al risultato dato dalla formula di Black e Scholes.

Vediamo come esprimere S_T nella nuova misura Q : la share measure relativa al numeraire S è tale che i nuovi termini del mercato normalizzati rispetto a S siano delle martingale ovvero

$$\tilde{S}_t = \frac{S_t}{S_t} = 1,$$

$$\tilde{B}_t = \frac{B_t}{S_t},$$

devono avere drift nullo. Utilizziamo la formula di Itô (D.3) per calcolare il differenziale stocastico di \tilde{B}_t e il Teorema di Girsanov²⁷:

$$\begin{aligned}
d\tilde{B}_t &= \frac{1}{S_t} dB_t - \frac{B_t}{S_t^2} dS_t + \frac{B_t}{S_t^3} d\langle S \rangle_t \\
&= \frac{1}{S_t} dB_t - \frac{B_t}{S_t^2} dS_t + \frac{B_t}{S_t^3} \sigma^2 S_t^2 dt.
\end{aligned}$$

²⁶Si veda il Teorema D.3 dell'Appendice D.

²⁷Si veda il Teorema D.5 dell'Appendice D.

Poiché $B_t = \exp(rt)$ la precedente diventa:

$$\begin{aligned} d\tilde{B}_t &= \frac{1}{S_t} r B_t dt - \frac{B_t}{S_t} \frac{1}{S_t} (r S_t dt + \sigma S_t dW_t) + \frac{B_t}{S_t} \frac{1}{S_t^2} \sigma^2 S_t^2 dt \\ &= r \tilde{B}_t dt - \tilde{B}_t (r dt + \sigma dW_t) + \tilde{B}_t \sigma^2 dt \\ &= \tilde{B}_t ((r - r + \sigma^2) dt - \sigma dW_t). \end{aligned}$$

Per il Teorema di Girsanov $\exists(\lambda_t) \in \mathbb{L}_{loc}^2$ tale che (\tilde{W}_t) definito da $d\tilde{W}_t = dW_t - \lambda_t dt$ è un moto browniano nella nuova misura Q . Segue che:

$$\begin{aligned} d\tilde{B}_t &= \tilde{B}_t \left(\sigma^2 dt - \sigma(d\tilde{W}_t + \lambda_t dt) \right) \\ &= \tilde{B}_t \left((\sigma^2 - \sigma \lambda_t) dt - \sigma d\tilde{W}_t \right). \end{aligned}$$

Poiché \tilde{B}_t è una martingala se il termine di drift è nullo si deve scegliere λ_t in modo tale che:

$$\sigma^2 - \sigma \lambda_t = 0 \Rightarrow \lambda_t = \sigma.$$

Allora X_T della Proposizione 4.2 sotto la share measure diventa:

$$\begin{aligned} dX_t &= \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t \\ &= \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma(d\tilde{W}_t + \lambda_t dt) \\ &= \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma d\tilde{W}_t + \sigma \lambda_t dt. \end{aligned}$$

Poiché si è scelto $\lambda_t = \sigma, \forall t$ segue che:

$$\begin{aligned} dX_t &= \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma d\tilde{W}_t + \sigma^2 dt \\ &= \left(r - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma^2 \right) dt + \sigma d\tilde{W}_t \\ &= \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma d\tilde{W}_t. \end{aligned}$$

Siccome $\tilde{W}_t \sim \mathcal{N}_{0,t} \Rightarrow Z = \frac{\tilde{W}_t - 0}{\sqrt{t}} \sim \mathcal{N}_{0,1}$ si ottiene:

$$dX_t = X_0 + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma \sqrt{t} Z. \quad (4.7)$$

Teorema 4.3. $\tilde{C}(T, S_0, k, r)$ calcolato nella Proposizione 4.1, considerando X_T la variabile aleatoria appartenente al processo di Itô (4.7), corrisponde al risultato dato dalla formula di Black e Scholes²⁸

$$\tilde{C}(T, S_0, k, r) = \Phi(d_1) - \frac{K}{S_0} \exp(-rT) \Phi(d_2) \quad (4.8)$$

dove

- Φ è la funzione di ripartizione normale;

- $d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)}{\sigma\sqrt{T}};$

- $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)}{\sigma\sqrt{T}}.$

Dimostrazione. Per la Proposizione 4.1: $\tilde{C}(T, S_0, k, r) = Q(X_T > \log(K) + Y)$ e per la (4.7): $X_T = \log(S_0) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}Z$ con $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Segue quindi che:

$$\begin{aligned} \tilde{C}(T, S_0, k, r) &= Q\left(\log(S_0) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}Z > \log(K) + Y\right) \\ &= Q\left(\sigma\sqrt{T}Z > -\log(S_0) - \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \log(K) + Y\right) \\ &= Q\left(Z > \frac{\log\left(\frac{K}{S_0}\right) - \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T + Y}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{K}{S_0}\right) - \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T + Y}{\sigma\sqrt{T}}\right). \end{aligned}$$

²⁸Per i dettagli consultare il Capitolo 7 di [8].

Poiché Φ è simmetrica:

$$\begin{aligned}
\tilde{C}(T, S_0, k, r) &= \Phi \left(-\frac{\log \left(\frac{K}{S_0} \right) - \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) T + Y}{\sigma \sqrt{T}} \right) \\
&= \Phi \left(\frac{\log \left(\frac{S_0}{K} \right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) T - Y}{\sigma \sqrt{T}} \right) \\
&= \Phi \left(\frac{\log \left(\frac{S_0}{K} \right)}{\sigma \sqrt{T}} + \left(\frac{r + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma \sqrt{T}} \right) T - \frac{Y}{\sigma \sqrt{T}} \right) \\
&= \Phi \left(\frac{\log \left(\frac{S_0}{K} \right)}{\sigma \sqrt{T}} + \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2} \right) \sqrt{T} - \frac{Y}{\sigma \sqrt{T}} \right) \\
&= \int_0^\infty dy \exp(-y) \Phi \left(\frac{\log \left(\frac{S_0}{K} \right)}{\sigma \sqrt{T}} + \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2} \right) \sqrt{T} - \frac{y}{\sigma \sqrt{T}} \right).
\end{aligned}$$

Integriamo per parti il precedente integrale; segue che:

$$\begin{aligned}
\tilde{C}(T, S_0, k, r) &= - \left[\exp(-y) \Phi \left(\frac{\log \left(\frac{S_0}{K} \right)}{\sigma \sqrt{T}} + \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2} \right) \sqrt{T} - \frac{y}{\sigma \sqrt{T}} \right) \right]_0^\infty \\
&\quad - \int_0^\infty \exp(-y) \phi \left(\frac{\log \left(\frac{S_0}{K} \right)}{\sigma \sqrt{T}} + \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2} \right) \sqrt{T} - \frac{y}{\sigma \sqrt{T}} \right) \frac{1}{\sigma \sqrt{T}} dy \\
&= \Phi \left(\frac{\log \left(\frac{S_0}{K} \right)}{\sigma \sqrt{T}} + \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2} \right) \sqrt{T} \right) \\
&\quad - \int_0^\infty \exp(-y) \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma \sqrt{T}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\log \left(\frac{S_0}{K} \right)}{\sigma \sqrt{T}} + \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2} \right) \sqrt{T} - \frac{y}{\sigma \sqrt{T}} \right)^2 \right] dy
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Calcoliamo l'integrale dell'equazione (4.9) utilizzando il seguente cambio di variabile:

$$\begin{aligned}
z &= +\frac{\log \left(\frac{S_0}{K} \right)}{\sigma \sqrt{T}} + \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2} \right) \sqrt{T} - \frac{y}{\sigma \sqrt{T}} \Rightarrow y = \sigma \sqrt{T} \left[\frac{\log \left(\frac{S_0}{K} \right)}{\sigma \sqrt{T}} + \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2} \right) \sqrt{T} - z \right] \\
&\Rightarrow dy = -\sigma \sqrt{T} dz.
\end{aligned}$$

Allora l'integrale della (4.9) diventa:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \exp(-y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T} - \frac{y}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2\right] dy \\
&= - \int_{\left\{\frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T}\right\}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T}} \exp\left[-\frac{1}{2}z^2\right] \\
&\quad \exp\left(-\sigma\sqrt{T}\left[\frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T} - z\right]\right) \sigma\sqrt{T} dz \\
&= \int_{\left\{\frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T}\right\}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}z^2 - \sigma\sqrt{T}\left[\frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T} - z\right]\right] dz \\
&= \int_{\left\{\frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T}\right\}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}z^2 + \sigma\sqrt{T}z - \log\left(\frac{S_0}{K}\right) - \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right] dz \\
&= \exp\left(-\log\left(\frac{S_0}{K}\right) - \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) \int_{\left\{\frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T}\right\}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}z^2 + \sigma\sqrt{T}z\right] dz \\
&= \frac{K}{S_0} \exp\left(-\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) \int_{\left\{\frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T}\right\}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}z^2 + \sigma\sqrt{T}z\right] dz \\
&= \frac{K}{S_0} \exp(-rT) \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}T\right) \int_{\left\{\frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T}\right\}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}z^2 + \sigma\sqrt{T}z\right] dz.
\end{aligned}$$

Completiamo il quadrato:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}z^2 + \sigma\sqrt{T}z &= -\frac{1}{2}\left(z^2 - 2\sigma\sqrt{T}z\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(z^2 - 2\sigma\sqrt{T}z + \sigma^2T - \sigma^2T\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(z^2 - 2\sigma\sqrt{T}z + \sigma^2T\right) + \frac{1}{2}\sigma^2T \\
&= -\frac{1}{2}\left(z - \sigma\sqrt{T}\right)^2 + \frac{1}{2}\sigma^2T.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{K}{S_0} \exp(-rT) \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}T\right) \int_{\left\{\frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T}\right\}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(z - \sigma\sqrt{T}\right)^2 + \frac{1}{2}\sigma^2T\right] dz \\
&= \frac{K}{S_0} \exp(-rT) \int_{\left\{\frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T}\right\}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(z - \sigma\sqrt{T}\right)^2\right] dz.
\end{aligned}$$

Operiamo l'ultimo cambio di variabile $w = z - \sigma\sqrt{T} \Rightarrow z = w + \sigma\sqrt{T}$:

$$\begin{aligned} &= \frac{K}{S_0} \exp(-rT) \int_{\left\{ \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \left(\frac{r-\sigma}{2}\right)\sqrt{T} \right\}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}w^2\right] dw \\ &= \frac{K}{S_0} \exp(-rT) \Phi\left\{ \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T} \right\}. \end{aligned}$$

La formula (4.9) per il calcolo del prezzo di un'opzione call normalizzata da S_0 diventa allora:

$$\begin{aligned} \tilde{C}(T, S_0, k, r) &= \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T} \right) \\ &\quad - \frac{K}{S_0} \exp(-rT) \Phi\left\{ \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T} \right\} \\ &= \Phi(d_1) - \frac{K}{S_0} \exp(-rT) \Phi(d_2) \end{aligned}$$

□

Calcoliamo ora la funzione generatrice dei cumulanti della variabile aleatoria $X_T - \tilde{Y}$ definita nella Proposizione 4.1 dove X_T segue il modello Black-Scholes sotto la share measure secondo la (4.7) ricordando che:

- per la Proposizione D.4 dell'Appendice D:
 $X_T \sim \mathcal{N}\left(X_0 + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right) \Rightarrow K_{X_T}(s) = X_0 s + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)Ts + \frac{\sigma^2 T s^2}{2};$
- $-\tilde{Y} \sim \text{Exp}(1) \Rightarrow K_{-\tilde{Y}}(s) = \log\left(\frac{1}{1+s}\right).$

Segue che:

$$\begin{aligned} K_{X_T - \tilde{Y}}(s) &= K_{X_T}(s) + K_{-\tilde{Y}}(s) \\ &= X_0 s + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)Ts + \frac{\sigma^2 T s^2}{2} + \log\left(\frac{1}{1+s}\right) \\ &= X_0 s + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)Ts + \frac{\sigma^2 T s^2}{2} - \log(1+s). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Si osservi che $K_{X_T - \tilde{Y}}(s)$ è ben definita per $s > -1$.

Calcoliamo le derivate prime e seconde per poter applicare la (3.20):

$$K'(s) = X_0 + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma^2 T s - \frac{1}{1+s};$$

$$K''(s) = \sigma^2 T + \frac{1}{(1+s)^2}.$$

E' possibile allora applicare la formula (3.20):

$$P(X \geq x) \simeq 1 - \Gamma(\hat{z}) + \gamma(\hat{z}) \left(\frac{1}{\hat{u}_{\hat{z}}} - \frac{1}{\hat{\xi}} \right)$$

dove:

- Γ e γ individuano la distribuzione di base descritta nella Sezione 4.3.1;
- \hat{z} è una delle due radici ricavate risolvendo l'equazione (3.17) scelta secondo il criterio (3.19);
- $\hat{\xi} = -\lambda + \frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + 1}$ con $c = \hat{z} - \frac{1}{\lambda} + \lambda$;
- $\hat{u}_{\hat{z}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\lambda + \hat{\xi}}\right)^2}}$ dove $\hat{u} = \hat{s} \sqrt{\sigma^2 T + \frac{1}{(1 + \hat{s})^2}}$ e \hat{s} è la soluzione dell'equazione saddlepoint $K'(\hat{s}) = k$.

Per dimostrare che la base suggerita da Carr e Madan è esatta nel modello Black-Scholes, si deve osservare che si può ricostruire la funzione generatrice K con un cambio di scala di G ; scegliendo in modo opportuno i parametri a , b e λ ciò è provato.

Si scelga $b = \sigma\sqrt{T}$, $\lambda = \sigma\sqrt{T}$; allora:

$$\begin{aligned} as + G(bs) &= as + \frac{(bs)^2}{2} + \frac{bs}{\lambda} - \log(\lambda + bs) + \log(\lambda) \\ &= as + \frac{(\sigma\sqrt{T}s)^2}{2} + \frac{\sigma\sqrt{T}s}{\lambda} - \log(\lambda + \sigma\sqrt{T}s) + \log(\lambda) \\ &= as + \frac{\sigma^2 T s^2}{2} + \frac{\sigma\sqrt{T}s}{\lambda} + \log\left(\frac{\lambda}{\lambda + \sigma\sqrt{T}s}\right) \\ &= as + \frac{\sigma^2 T s^2}{2} + \frac{\sigma\sqrt{T}s}{\sigma\sqrt{T}} + \log\left(\frac{\sigma\sqrt{T}}{\sigma\sqrt{T} + \sigma\sqrt{T}s}\right) \\ &= as + \frac{\sigma^2 T s^2}{2} + s + \log\left(\frac{\sigma\sqrt{T}}{\sigma\sqrt{T}(1+s)}\right) \\ &= s(a+1) + \frac{\sigma^2 T s^2}{2} - \log(1+s). \end{aligned}$$

Allora:

$$\begin{aligned} as + G(bs) = K(s) &\Leftrightarrow a + 1 = X_0 + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T \\ &\Leftrightarrow a = X_0 + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T - 1. \end{aligned}$$

Strike K	Maturità T	LR	BS
36.78	0.5	63.7676	63.7676
60.65	0.5	40.26	40.26
81.87	0.5	20.2077	20.2077
90.48	0.5	13.4513	13.4513
110.52	1	7.08109	7.08109
122.14	1	4.00481	4.00481
174.87	1	0.200559	0.200559
271.82	1	0.000487387	0.000487387

Tabella 4.1: Prezzi di opzioni call.

I risultati riportati sono stati ottenuti implementando la formula di Lugannani-Rice con distribuzione di base (γ, Γ) e di Black and Scholes attraverso il software Mathematica utilizzando i seguenti parametri:

- maturità $T \in \{0.5, 1\}$;
- tasso d'interesse annuo $r = 0.03$;
- volatilità implicita $\sigma = 0.25$;
- $\lambda = \sigma\sqrt{T}$;
- prezzo iniziale del sottostante $S_0 = 100$.

Confrontando i valori della tabella 4.1 è evidente il fatto che la formula di Lugannani-Rice riproduce i risultati di Black-Scholes in modo esatto come già dimostrato formalmente dal Teorema 4.3.

4.3.3 Modelli con salti: Merton e CGMY

Nel modello Black-Scholes presentato nella Sezione 4.3.2 si prevede:

- volatilità costante;
- prezzi con traiettoria continua;
- prezzi logaritmici con distribuzione normale.

Il calcolo dei prezzi dei derivati secondo l'articolo di Black and Scholes del 1973 non tiene conto dei possibili crolli di valutazione che si possono avere e nemmeno del fatto che i prezzi logaritmici osservati non hanno in generale distribuzione normale; per questo tra la fine degli anni '80 e i primi anni '90 si sono introdotti i *modelli con salti* rimuovendo l'ipotesi di continuità

della traiettoria e ipotizzando che i prezzi logaritmici seguano un processo ad incrementi stazionari ed indipendenti, con distribuzione più generica rispetto alla normale. Questi modelli si basano sui processi di Levy del tipo *jump-diffusion* o *pure-jump*: i processi della prima classe sono caratterizzati da un processo diffusivo che viene interrotto da salti in tempi aleatori, invece quelli della seconda presentano un numero infinito di salti in ogni intervallo e per questo vengono detti processi ad attività infinita.

Analizzeremo il modello di Merton, uno dei più importanti modelli con salti di tipo jump-diffusion, e il modello CGMY a 4 parametri che prende il nome dagli ideatori Carr, Geman, Madan e Yor.

Secondo i modelli con salti l'andamento del sottostante $(S_t)_{t \in [0, T]}$ è del tipo

$$S_t = S_0 \exp(H_t) \quad (4.11)$$

dove $H = (H_t)_{t \in [0, T]}$ è un processo di Levy²⁹.

In analogia con la Sezione 4.3.2 cerchiamo di calcolare il prezzo di un'opzione call applicando la formula di Lugannani-Rice conoscendo l'andamento del sottostante (4.11) e supponendo di conoscere la funzione caratteristica φ_H della variabile aleatoria H_t .

Sia S_0 il valore iniziale del sottostante, K lo strike, T la scadenza e r il tasso di interesse annuale. Per calcolare il prezzo di un'opzione call $C(T, S_0, K, r)$ basta calcolare il valore atteso del payoff scontato ad oggi del fattore $\exp(-rT)$. Chiamiamo $k = \log(K)$ il logaritmo dello strike, $X_0 = \log(S_0)$ il logaritmo del prezzo iniziale del titolo e f_H la densità della variabile aleatoria H_T .

$$\begin{aligned} C(T, S_0, k, r) &= \exp(-rT) \mathbb{E}[(S_T - K)^+] \\ &= \exp(-rT) \mathbb{E}[(S_0 \exp(H_T) - \exp(k))^+] \\ &= \exp(-rT) S_0 \mathbb{E} \left[\left(\exp(H_T) - \frac{\exp(k)}{S_0} \right)^+ \right] \\ &= \exp(-rT) S_0 \mathbb{E} \left[\left(\exp(H_T) - \frac{\exp(k)}{\exp(X_0)} \right)^+ \right] \\ &= \exp(-rT) S_0 \int_{\{x | x > k - X_0\}} \left(\exp(x) - \frac{\exp(k)}{\exp(X_0)} \right) f_H(x) dx \\ &= \frac{S_0 \int_{k - X_0}^{\infty} \left(\exp(x) - \frac{\exp(k)}{\exp(X_0)} \right) f_H(x) dx}{\exp(rT)}. \end{aligned}$$

²⁹Si veda la Definizione 4.5.

Osserviamo che

$$\begin{aligned} S_0 = \exp(-rT)E[S_T] &\Rightarrow 1 = \exp(-rT)E\left[\frac{S_T}{S_0}\right] \\ &\Rightarrow 1 = \exp(-rT)E[\exp(H_T)] \\ &\Rightarrow \exp(rT) = E[\exp(H_T)]. \end{aligned}$$

Allora:

$$\begin{aligned} C(T, S_0, k, r) &= \frac{S_0 \int_{k-X_0}^{\infty} \left(\exp(x) - \frac{\exp(k)}{\exp(X_0)} \right) f_H(x) dx}{E[\exp(H_T)]} \\ &= \frac{S_0 \int_{k-X_0}^{\infty} \left(\exp(x) - \frac{\exp(k)}{\exp(X_0)} \right) f_H(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(x) f_H(x) dx} \end{aligned}$$

Allora:

$$\begin{aligned} \tilde{C}(T, S_0, k, r) &:= \frac{C(T, S_0, k, r)}{S_0} \\ &= \frac{\int_{k-X_0}^{\infty} \left(\exp(x) - \frac{\exp(k)}{\exp(X_0)} \right) f_H(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(x) f_H(x) dx}. \end{aligned}$$

Noto che $k \in [0, \infty)$, osserviamo che:

- $\tilde{C}(T, S_0, k, r) \rightarrow 0$ per $k \rightarrow +\infty$;
- $\tilde{C}(T, S_0, k, r) \rightarrow 1$ per $k \rightarrow 0$.

$\Rightarrow \tilde{C}(T, S_0, k, r)$ è una probabilità di coda.

$\Rightarrow -\tilde{C}'(T, S_0, k, r)$ è una densità.

Vedremo che la funzione caratteristica della densità $-\tilde{C}'(T, S_0, k, r)$ ci dirà di quale variabile aleatoria $-\tilde{C}'(T, S_0, k, r)$ è la densità; sarà questa la variabile aleatoria a cui applicare la formula di Lugannani-Rice per calcolare $\tilde{C}(T, S_0, k, r)$.

$$\begin{aligned} -\tilde{C}'(T, S_0, k, r) &= \frac{\int_{k-X_0}^{\infty} \frac{\exp(k)}{\exp(X_0)} f_H(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(x) f_H(x) dx} \\ &= \frac{\frac{\exp(k)}{\exp(X_0)} (1 - F_H(k - X_0))}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(x) f_H(x) dx}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Posto $g(k) = \frac{\exp(k)}{\exp(X_0)} (1 - F_H(k - X_0))$ calcoliamone la trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned}\hat{g}(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iuk) \frac{\exp(k)}{\exp(X_0)} (1 - F_H(k - X_0)) dk \\ &= \frac{1}{S_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(k(iu + 1)) (1 - F_H(k - X_0)) dk.\end{aligned}$$

Integrando per parti si ottiene:

$$\begin{aligned}\hat{g}(u) &= \frac{1}{S_0(1 + iu)} \left(- \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(k(iu + 1)) (-f_H(k - X_0)) \right) dk \\ &= \frac{1}{S_0(1 + iu)} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(k(iu + 1)) f_H(k - X_0) \right) dk.\end{aligned}$$

Utilizziamo il seguente cambio di variabile:

$$w = k - X_0 \Rightarrow dk = dw;$$

$$\begin{aligned}\hat{g}(u) &= \frac{1}{S_0(1 + iu)} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp((w + X_0)(iu + 1)) f_H(w) \right) dw \\ &= \frac{1}{S_0(1 + iu)} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(w(iu + 1) + X_0(iu + 1)) f_H(w) \right) dw \\ &= \frac{1}{S_0(1 + iu)} \left(\exp(X_0(iu + 1)) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(w(iu + 1)) f_H(w) \right) dw \\ &= \frac{1}{S_0(1 + iu)} \left(\exp(\log(S_0)(iu + 1)) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(w(iu + 1)) f_H(w) \right) dw \\ &= \frac{1}{S_0(1 + iu)} \left(S_0^{(iu+1)} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(w(iu + 1)) f_H(w) \right) dw \\ &= \frac{1}{1 + iu} \left(S_0^{iu} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(w(iu + 1)) f_H(w) \right) dw \\ &= \frac{1}{1 + iu} S_0^{iu} \varphi_H(u - i)\end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che $\varphi_H(u - i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(w(iu + 1)) f_H(w) dw$.

Infatti, detta $\varphi_H(u) = E[\exp(iuH_T)]$ la funzione caratteristica della variabile aleatoria H_T , si ottiene:

$$\begin{aligned}\varphi_H(u - i) &= E[\exp(i(u - i)H_T)] \\ &= E[\exp((iu - i^2)H_T)] \\ &= E[\exp((iu + 1)H_T)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(w(iu + 1)) f_H(w) dw.\end{aligned}$$

Allora la funzione caratteristica della densità (4.12) è data da

$$\phi\phi(u) = \frac{S_0^{iu} \varphi_H(u-i)}{\varphi_H(-i)(1+iu)} \quad (4.13)$$

dove si è usato il fatto che il denominatore della (4.12) è $\varphi_H(-i)$; infatti:

$$\begin{aligned} \varphi_H(-i) &= E[\exp(-i^2 H_T)] \\ &= E[\exp(H_T)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(x) f_H(x) dx. \end{aligned}$$

Osservazione 21. E' possibile osservare che la funzione caratteristica (4.13) è il prodotto di due funzioni caratteristiche:

- $\frac{1}{1+iu}$ è la funzione caratteristica di una variabile aleatoria $-\tilde{Y} \sim \text{Exp}(1)$;
- $\frac{S_0^{iu} \varphi_H(u-i)}{\varphi_H(-i)}$ è la funzione caratteristica di X_T definito come il logaritmo di S_T sotto la share measure³⁰.

Dall'analisi è noto che se la funzione caratteristica della densità $-\tilde{C}'(T, S_0, k, r)$ è il prodotto delle funzioni caratteristiche di due variabili aleatorie $-\tilde{Y}$ e X_T allora $-\tilde{C}'(T, S_0, k, r)$ è la densità della variabile aleatoria $X_T - \tilde{Y}$.

E' possibile perciò applicare la formula di Lugannani-Rice per il calcolo dell'opzione call ricavando la funzione generatrice dei cumulanti $K(s)$ dalla funzione caratteristica $\phi\phi$ poiché

$$K(s) = \log(\phi\phi(-is)).$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \log(\phi\phi(-is)) &= \log(E[\exp(-i is(X_T - \tilde{Y}))]) \\ &= \log(E[\exp(s(X_T - \tilde{Y}))]) \\ &= K(s). \end{aligned}$$

Ricordando l'espressione (4.13) la funzione generatrice dei cumulanti è della seguente formula:

$$\begin{aligned} K(s) &= \log(\phi\phi(-is)) \\ &= \log\left(\frac{S_0^{i(-is)} \varphi_H((-is)-i)}{\varphi_H(-i)(1+i(-is))}\right) \\ &= \log(S_0^{i(-is)}) + \log\left(\frac{\varphi_H((-is)-i)}{\varphi_H(-i)}\right) - \log(1+i(-is)) \\ &= s \log(S_0) + \log\left(\frac{\varphi_H(-i(s+1))}{\varphi_H(-i)}\right) - \log(1+s) \end{aligned} \quad (4.14)$$

³⁰Lo verificheremo solo per il caso Black-Scholes ma si può provare per tutti i modelli.

Verifichiamo ora che la (4.14) coincide con la (4.10) nel modello Black and Scholes:

Osservazione 22. L'andamento del sottostante nel modello Black-Scholes è dato da

$$S_t = S_0 \exp(H_t)$$

dove $H_t = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_t$ ha distribuzione normale di parametri $\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T$, $\sigma^2 T$ e σ rappresenta la volatilità implicita costante del modello e W_t appartiene ad un processo Browniano.

Come noto la funzione caratteristica $\varphi(u)$ di una variabile aleatoria con distribuzione normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ è del tipo $\exp(\mu i u - \frac{\sigma^2 u^2}{2})$.

Segue che

$$\varphi_H(u) = \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T i u - \frac{\sigma^2 u^2 T}{2}\right). \quad (4.15)$$

Applichiamo la (4.15) alla (4.14):

$$\begin{aligned} K(s) &= s \log(S_0) + \log\left(\frac{\varphi_H(-i(s+1))}{\varphi_H(-i)}\right) - \log(1+s) \\ &= s \log(S_0) + \log\left(\frac{\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T i(-i(s+1)) - \frac{\sigma^2(-i(s+1))^2 T}{2}\right)}{\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T i(-i) - \frac{\sigma^2(-i)^2 T}{2}\right)}\right) - \log(1+s) \\ &= sX_0 + \log\left(\frac{\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T(s+1) + \frac{\sigma^2(s+1)^2 T}{2}\right)}{\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \frac{\sigma^2 T}{2}\right)}\right) - \log(1+s) \\ &= sX_0 + \log\left(\frac{\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)Ts + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \frac{\sigma^2 s^2 T}{2} + \frac{\sigma^2 T}{2} + \sigma^2 sT\right)}{\exp\left(rT - \frac{\sigma^2 T}{2} + \frac{\sigma^2 T}{2}\right)}\right) - \log(1+s) \\ &= sX_0 + \log\left(\frac{\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma^2\right)Ts + rT - \frac{\sigma^2 T}{2} + \frac{\sigma^2 s^2 T}{2} + \frac{\sigma^2 T}{2}\right)}{\exp(rT)}\right) - \log(1+s) \\ &= sX_0 + \log\left(\frac{\exp\left(\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)Ts + rT + \frac{\sigma^2 s^2 T}{2}\right)}{\exp(rT)}\right) - \log(1+s) \\ &= sX_0 + \log\left(\exp\left(\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)Ts + rT + \frac{\sigma^2 s^2 T}{2}\right)\right) - \log(\exp(rT)) - \log(1+s) \\ &= sX_0 + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)Ts + rT + \frac{\sigma^2 s^2 T}{2} - rT - \log(1+s) \\ &= sX_0 + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)Ts + \frac{\sigma^2 s^2 T}{2} - \log(1+s). \end{aligned}$$

Ciò prova che la (4.14) coincide con la (4.10) e che, come annunciato, si lavora con la share measure.

Come osservato nella Sezione 4.3.2 la formula di Lugannani-Rice riproduce esattamente i risultati di Black and Scholes; vediamo come si comporta il metodo saddlepoint applicato ad altri modelli.

Modello Merton Il modello Merton è un modello a salti di tipo jump-diffusion secondo il quale

$$S_t = S_0 \exp(H_t)$$

dove $(H_t)_{t \in [0, T]}$ è un processo di Levy del tipo

$$H_t = \mu t + \sigma W_t + \sum_{n=1}^{N_t} Z_n$$

cioè somma di un moto Browniano e di un processo di Poisson composto³¹. Assumendo che le variabili aleatorie Z_n abbiano distribuzione $\mathcal{N}(m, \delta^2)$ il coefficiente di drift è della forma

$$\mu = r - \frac{\sigma^2}{2} + \lambda_0 \left(1 - \exp \left(m + \frac{\delta^2}{2} \right) \right)$$

e la funzione caratteristica di H_T è

$$\varphi_H(u) = \exp \left(\mu T i u - \frac{\sigma^2 u^2 T}{2} + \lambda_0 T \left(\exp \left(i m u - \frac{\delta^2 u^2}{2} \right) - 1 \right) \right).$$

Osservazione 23. Si osservi che il modello Merton con $\lambda_0 = 0$ equivale al modello Black-Scholes.

Avendo a disposizione la funzione caratteristica $\varphi_H(u)$ è possibile applicare la formula di Lugannani-Rice per il calcolo di $\tilde{C}(T, S_0, k, r)$ calcolando la funzione generatrice dei cumulanti con la formula (4.14) e utilizzando come distribuzione base quella scelta nella Sezione 4.3.1 con parametro $\lambda = \sqrt{K''}(\hat{s} + 1)$ come suggerito in [4].

Per fare questo si è implementato il metodo Lugannani-Rice utilizzando il software Mathematica e fissando i parametri del modello:

- tasso d'interesse $r = 0.03$;
- prezzo iniziale del sottostante $S_0 = 100$;
- scadenza $T = 0.5$

³¹Si veda la Definizione 4.4.

Strike K	LR	FFT
60	39.2437	40.9641
70	30.5619	31.6191
80	23.421	23.4686
90	17.8178	17.069
100	13.5222	12.376
110	10.2616	9.00952
120	7.79937	6.59331
130	5.94567	4.85477
140	4.55159	3.60274
150	3.50224	2.6984

Tabella 4.2: Prezzi di opzioni call nel modello Merton.

- volatilità $\sigma = 0.25$;
- intensità del salto $\lambda_0 = 1$;
- misura media del salto $m = 0.3$;
- volatilità della misura del salto $\delta = 0.1$.

Si sono poi confrontati i risultati ottenuti mediante il metodo saddlepoint con quelli ottenuti attraverso la FFT al variare dello strike K come riportato nella Tabella 4.2.

Modello CGMY Il modello CGMY³² è un modello a salti a 4 parametri secondo il quale

$$S_t = S_0 \exp(H_t)$$

dove $(H_t)_{t \in [0, T]}$ è un processo di Levy con drift

$$\begin{aligned} \mu = r + CC\Gamma(-YY)(GG^{YY} - (1 + GG)^{YY} + MM^{YY} - (MM - 1)^{YY} \\ + YY(GG^{(-1+YY)} - MM^{(-1+YY)})), \end{aligned}$$

dove Γ è la funzione gamma di Eulero, con esponente caratteristico

$$\begin{aligned} \Psi(u) = iu\mu + CC((MM - iu)^{YY} - MM^{YY} + (GG + iu)^{YY} - GG^{YY} \\ + iYYu(MM^{(YY-1)} - GG^{(YY-1)}))\Gamma(-YY), \end{aligned}$$

e con funzione caratteristica di H_T

$$\varphi_H(u) = \exp(T\Psi(u)).$$

I parametri devono soddisfare le seguenti condizioni:

³²Per i dettagli consultare [3].

Strike K	LR	FFT
60	41.5923	41.7307
70	32.5744	32.9873
80	24.5002	25.0979
90	17.7394	18.3271
100	12.4531	12.8456
110	8.55896	8.67657
120	5.81299	5.69188
130	3.9283	3.662777
140	2.65333	2.33504
150	1.79665	1.48672

Tabella 4.3: Prezzi di opzioni call nel modello CGMY.

- $CC > 0$;
- $GG > 0$;
- $MM > 1$;
- $YY < 2$.

Poiché è possibile ricavare la funzione generatrice dei cumulanti con la formula (4.14), si può applicare il metodo saddlepoint di Lugannani-Rice per il calcolo di $\tilde{C}(T, S_0, k, r)$.

Come per il modello Merton, si è implementato il metodo Lugannani-Rice utilizzando il software Mathematica e fissando i parametri del modello:

- tasso d'interesse $r = 0.03$;
- prezzo iniziale del sottostante $S_0 = 100$;
- scadenza $T = 0.5$
- $CC = 2$;
- $GG = 5$;
- $MM = 10$;
- $YY = 0.5$.

Si sono poi confrontati i risultati ottenuti mediante il metodo saddlepoint con quelli ottenuti attraverso la FFT al variare dello strike K come riportato nella Tabella 4.3.

Appendice A

Distribuzione gaussiana standard

Nel corso della trattazione si sono usate alcune proprietà della distribuzione gaussiana standard per dimostrare teoremi o per testare le formule saddlepoint che si sono espresse. Riteniamo utile riportare tali proprietà e dimostrare la loro validità.

Definizione A.1. Una variabile aleatoria X ha *distribuzione normale standard* se ha densità

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right), \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Riportiamo alcuni risultati utili.

1. **Funzione generatrice dei momenti:** $M(s) = \exp(\frac{1}{2}s^2)$, $s \in (-\infty, +\infty)$.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} M(s) &= \mathbb{E}[\exp(sX)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(sx)\phi(x)dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(sx) \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(sx - \frac{1}{2}x^2\right)dx. \end{aligned}$$

Completando il quadrato, scriviamo:

$$\begin{aligned} M(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 - 2sx + s^2 - s^2)\right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - s)^2 - s^2\right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - s)^2\right) \exp\left(\frac{1}{2}s^2\right) dx. \end{aligned}$$

Operando il cambio di variabile $z = x - s$, otteniamo:

$$M(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{1}{2}s^2\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz = \exp\left(\frac{1}{2}s^2\right).$$

□

2. **Funzione generatrice dei cumulanti:** $K(s) = \frac{1}{2}s^2, s \in (-\infty, +\infty)$.

Dimostrazione. Dal risultato del punto 1, $K(s) = \log(M(s)) = \frac{1}{2}s^2$. □

3. **Calcolo dei momenti:**

- $\mu_i := E[X^i] = 0$ se i è dispari;
- $\mu_i := E[X^i] \neq 0$ se i è pari, in particolare:
 - $\mu_2 = 1$;
 - $\mu_4 = 3$;
 - $\mu_6 = 15$.

Dimostrazione. Dall'Osservazione 1.1, è noto che $\mu_i = M^{(i)}(0)$. Procediamo quindi con il calcolo delle derivate di $M(s)$, determinata nel precedente punto 1, e valutiamole in $s = 0$.

- $M'(s) = \exp\left(\frac{1}{2}s^2\right) s$, quindi $M'(0) = 0$;
- $M''(s) = \exp\left(\frac{1}{2}s^2\right) s^2 + \exp\left(\frac{1}{2}s^2\right)$, quindi $M''(0) = 1$;
- $M^{(3)}(s) = \exp\left(\frac{1}{2}s^2\right) s^3 + 2s \exp\left(\frac{1}{2}s^2\right) + s \exp\left(\frac{1}{2}s^2\right)$, quindi $M^{(3)}(0) = 0$;
- $M^{(4)}(s) = \exp\left(\frac{1}{2}s^2\right) s^4 + 3s^2 \exp\left(\frac{1}{2}s^2\right) + 2\left(\exp\left(\frac{1}{2}s^2\right) + s^2 \exp\left(\frac{1}{2}s^2\right)\right) + \exp\left(\frac{1}{2}s^2\right) s^2 + \exp\left(\frac{1}{2}s^2\right) = \exp\left(\frac{1}{2}s^2\right) (s^4 + 6s^2 + 3)$, quindi $M^{(4)}(0) = 3$;
- $M^{(5)}(s) = \exp\left(\frac{1}{2}s^2\right) (10s^3 + 15s + s^5)$, quindi $M^{(5)}(0) = 0$;
- $M^{(6)}(s) = \exp\left(\frac{1}{2}s^2\right) (30s^2 + 15) + s \exp\left(\frac{1}{2}s^2\right) (10s^3 + 15s + s^5)$, quindi $M^{(6)}(0) = 15$.

Proseguendo con le derivate, si verifica che per i dispari $\mu_i = 0$ e per i pari $\mu_i \neq 0$. □

Appendice B

Teorema del limite centrale

Per dimostrare il teorema del limite centrale occorre prima provare la proposizione seguente.

La trattazione segue la linea guida del Capitolo 2 di [9].

Proposizione B.1. *Variabili aleatorie con la stessa funzione generatrice dei momenti hanno la stessa distribuzione di probabilità.*

Dimostrazione. Supponiamo di avere due variabili aleatorie X_1 e X_2 , rispettivamente con funzioni generatrici dei momenti $M_1(s)$ e $M_2(s)$ e densità f_1 e f_2 . Supponiamo inoltre che valga $M_1(s) = M_2(s)$ e per assurdo sia $f_1 \neq f_2$. Per quanto visto nella Sezione 1.1, una funzione generatrice dei momenti si può esprimere come

$$\sum_{r=0}^{+\infty} \frac{\mu_r s^r}{r!},$$

dove $\mu_r = M^{(k)}(0) = E[X^k]$. Quindi $M_1(s) = M_2(s)$ se e solo se $\mu_r^{(1)} = \mu_r^{(2)}$. Lo sviluppo della funzione differenza $f_1(x) - f_2(x)$ è dato da

$$f_1(x) - f_2(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n + \dots$$

In particolare:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} (f_1(x) - f_2(x))^2 dx \\ &= c_0 \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) - f_2(x) dx + \dots + c_n \int_{-\infty}^{+\infty} x^n (f_1(x) - f_2(x)) dx + \dots \\ &= c_0 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x) dx \right) + \dots + c_n \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_1(x) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_2(x) dx \right) \\ &= c_0(1 - 1) + c_1 \left(\mu_1^{(1)} - \mu_1^{(2)} \right) + \dots + c_n \left(\mu_n^{(1)} - \mu_n^{(2)} \right) + \dots \end{aligned}$$

Per ipotesi $M_1(s) = M_2(s)$, cioè $\mu_r^{(1)} = \mu_r^{(2)}$ per ogni r , quindi la precedente espressione $\int_{-\infty}^{+\infty} (f_1(x) - f_2(x))^2 dx$ risulta nulla. Da questo segue che $f_1 = f_2$, contraddicendo l'ipotesi fatta e portando ad un assurdo. Ciò prova che due (o più) variabili aleatorie con stesse funzioni generatrici dei momenti hanno la stessa densità di probabilità e quindi la stessa distribuzione. \square

Teorema B.2 (Teorema del limite centrale). *Sia $(X_n)_{n>0}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti identicamente distribuite ciascuna con media μ e varianza σ^2 . Allora per $n \rightarrow \infty$ la distribuzione di*

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

tende a una normale standard, cioè:

$$P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq a\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^a \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

Dimostrazione. Proponiamo una dimostrazione euristica del teorema. Supponiamo dapprima che le variabili aleatorie X_i abbiano media 0 e varianza 1 e denotiamo con $M(s) = E[\exp(sX)]$ la funzione generatrice dei momenti comune a ciascuna. Allora, sfruttando l'indipendenza delle variabili aleatorie, la funzione generatrice dei momenti di $\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}$ è

$$E\left[\exp\left(s\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}\right)\right] = \left(E\left[\exp\left(s\frac{X}{\sqrt{n}}\right)\right]\right)^n.$$

Per $n \rightarrow \infty$ possiamo calcolare l'espansione di Taylor di $\exp\left(s\frac{X}{\sqrt{n}}\right)$:

$$\exp\left(s\frac{X}{\sqrt{n}}\right) \approx 1 + s\frac{X}{\sqrt{n}} + s^2\frac{X^2}{2n}.$$

Considerandone il valore atteso e ricordando che $E[X] = 0$ e $E[X^2] = 1$, otteniamo

$$E\left[\exp\left(s\frac{X}{\sqrt{n}}\right)\right] \approx 1 + s\frac{E[X]}{\sqrt{n}} + s^2\frac{E[X^2]}{2n} = 1 + s^2\frac{1}{2n}.$$

Per n grande otteniamo:

$$E\left[\exp\left(s\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}\right)\right] \approx \left(1 + s^2\frac{1}{2n}\right)^n,$$

e passando al limite risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\left[\exp\left(s\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}\right)\right] = \exp\left(\frac{s^2}{2}\right).$$

Questo significa che la funzione generatrice dei momenti di $\frac{X_1+\dots+X_n}{\sqrt{n}}$ converge alla funzione generatrice dei momenti di una normale standard³³. Per la Proposizione B.1 ciò prova che la distribuzione di $\frac{X_1+\dots+X_n}{\sqrt{n}}$ tende alla distribuzione normale standard Φ .

Quando le variabili aleatorie X_i hanno media μ e varianza σ^2 , le variabili aleatorie $\frac{X_i-\mu}{\sigma}$ hanno media 0 e varianza 1. È quindi possibile applicare a tali variabili il risultato ottenuto nella prima parte della dimostrazione:

$$P\left(\frac{X_1 - \mu + X_2 - \mu + \dots + X_n - \mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq a\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(a),$$

cioè

$$P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq a\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^a \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

□

³³Si veda il punto 1 dell'Appendice A.

Appendice C

Approssimazioni asintotiche di integrali

Riportiamo alcuni teoremi tratti dal Capitolo 3 di [6] riguardo alle espansioni asintotiche di integrali che sono sfruttati nel Capitolo 3.

Proposizione C.1. *L'espansione di un integrale del tipo*

$$\int_0^{\infty} \exp(-\alpha t) q(t) dt,$$

dipendente da α , nel limite per $\alpha \rightarrow \infty$, è della forma

$$\frac{1}{\alpha} q(0) + \frac{1}{\alpha^2} q'(0) + \dots + \frac{1}{\alpha^k} q^{(k-1)}(0) + O\left(\frac{1}{\alpha^{k+1}}\right).$$

Dimostrazione. Integriamo per parti l'integrale:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \exp(-\alpha t) q(t) dt &= \left[-\frac{1}{\alpha} \exp(-\alpha t) q(t) \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha} \exp(-\alpha t) q'(t) dt \\ &= \frac{1}{\alpha} q(0) + \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} \exp(-\alpha t) q'(t) dt \\ &= \frac{1}{\alpha} q(0) + \frac{1}{\alpha^2} q'(0) + \frac{1}{\alpha^2} \int_0^{\infty} \exp(-\alpha t) q''(t) dt \\ &= \dots = \frac{1}{\alpha} q(0) + \frac{1}{\alpha^2} q'(0) + \dots + \frac{1}{\alpha^k} q^{(k-1)}(0) + \frac{1}{\alpha^k} \int_0^{\infty} \exp(-\alpha t) q^{(k)}(t) dt \\ &= \frac{1}{\alpha} q(0) + \frac{1}{\alpha^2} q'(0) + \dots + \frac{1}{\alpha^k} q^{(k-1)}(0) + O\left(\frac{1}{\alpha^{k+1}}\right). \end{aligned}$$

□

Teorema C.2. *Si assuma che esistano delle costanti c_1, \dots, c_6 con $c_1 > 0$ e $c_6 > 0$, e delle costanti $q_{\alpha}^{(0)}, \dots, q_{\alpha}^{(k)}$ tali che:*

- $T_\alpha \geq c_1$,
- $\int_0^{T_\alpha} \exp(-c_2 t) |q_\alpha(t)| dt \leq c_3$,
- $|q_\alpha^{(j)}| \leq c_4$ per $j = 0, \dots, k$,
- $|q_\alpha(t) - \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} q_\alpha^{(j)} t^j| \leq c_5 t^{k+1}$ per $0 < t < c_6$.

Allora per $\alpha \rightarrow \infty$ si ha

$$\alpha \int_0^{T_\alpha} \exp(-\alpha t) q_\alpha(t) dt = q_\alpha^{(0)} + \frac{q_\alpha^{(1)}}{\alpha} + \dots + \frac{q_\alpha^{(k)}}{\alpha^k} + O\left(\frac{1}{\alpha^{k+1}}\right).$$

Dimostrazione. Limitiamo dall'alto alcuni integrali:

$$\begin{aligned} \left| \int_{c_6}^{T_\alpha} \alpha \exp(-\alpha t) q_\alpha(t) dt \right| &\leq \alpha \exp(-(\alpha - c_2)c_6) \int_{c_6}^{T_\alpha} \alpha \exp(-c_2 t) |q_\alpha(t)| dt \\ &\leq \alpha \exp(-\alpha c_6 + c_2 c_6) c_3 = O(\alpha^{-(k+1)}), \end{aligned}$$

$$\int_{c_6}^{\infty} \alpha \exp(-\alpha t) t^j dt = \exp(-\alpha c_6) \int_0^{\infty} \exp(-u) \left(\frac{u}{\alpha} + c_6\right)^j du = O(\alpha^{-(k+1)}).$$

Allora

$$\begin{aligned} \alpha \int_0^{T_\alpha} \exp(-\alpha t) q_\alpha(t) dt &= \alpha \int_0^{c_6} \exp(-\alpha t) q_\alpha(t) dt + \alpha \int_{c_6}^{T_\alpha} \exp(-\alpha t) q_\alpha(t) dt \\ &= \alpha \int_0^{c_6} \exp(-\alpha t) q_\alpha(t) dt + O(\alpha^{-(k+1)}) \end{aligned}$$

dove si è sfruttata la stima precedente. Inoltre:

$$\begin{aligned} &\alpha \int_0^{c_6} \exp(-\alpha t) q_\alpha(t) dt + O(\alpha^{-(k+1)}) \\ &= \alpha \int_0^{c_6} \exp(-\alpha t) \left(\sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} q_\alpha^{(j)} t^j \right) dt + O(\alpha^{-(k+1)}) \\ &= \alpha \int_0^{\infty} \exp(-\alpha t) \left(\sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} q_\alpha^{(j)} t^j \right) dt - \alpha \int_{c_6}^{\infty} \exp(-\alpha t) \left(\sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} q_\alpha^{(j)} t^j \right) dt \\ &\quad + O(\alpha^{-(k+1)}) \\ &= \alpha \left(\frac{1}{\alpha} q(0) + \frac{1}{\alpha^2} q'(0) + \dots + \frac{1}{\alpha^{k+1}} q^{(k)}(0) \right) - \alpha \int_{c_6}^{\infty} \exp(-\alpha t) \left(\sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} q_\alpha^{(j)} t^j \right) dt \\ &\quad + O(\alpha^{-(k+1)}), \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato il risultato della Proposizione C.1. Infine, in virtù della stima precedente, possiamo riscrivere questa espressione come

$$q_\alpha^{(0)} + \frac{q_\alpha^{(1)}}{\alpha} + \dots + \frac{q_\alpha^{(k)}}{\alpha^k} + O\left(\frac{1}{\alpha^{k+1}}\right),$$

perciò provando la tesi. \square

Proposizione C.3. Per $x \rightarrow \infty$ si ha

$$1 - \Phi(x) = \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} + \dots + \frac{(2k)!}{k!} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{1}{x^{2k}} + O(x^{-2k-2})\right).$$

Dimostrazione. Moltiplicando e dividendo per x e operando il cambio di variabile $y = x + z$, scriviamo

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \int_0^\infty \exp(-xz) \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz.$$

Ricordando che

$$\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{z^2}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!},$$

e utilizzando il Teorema C.2, l'espressione precedente risulta uguale a

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} + \dots + \frac{(2k)!}{k!} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{1}{x^{2k}} + O(x^{-2k-2})\right).$$

\square

C.1 Espansione asintotica uniforme

Per $\alpha \rightarrow \infty$ ci servirà espandere integrali del tipo:

$$\int_\eta^{T_\alpha} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}t^2\right) q_\alpha(t) dt, \quad (\text{C.1})$$

dove $T_\alpha > c > 0$ e $-\infty < \eta < c$.

Osservazione 24. $\int_{\eta}^{T_{\alpha}} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}t^2\right) q_{\alpha}(t) dt$

Aggiungendo e togliendo $q_{\alpha}(0)$:

$$= q_{\alpha}(0) \int_{\eta}^{T_{\alpha}} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}t^2\right) dt + \int_{\eta}^{T_{\alpha}} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}t^2\right) q_{\alpha}(t) - q_{\alpha}(0) dt$$

Moltiplicando e dividendo il secondo integrando per t :

$$= q_{\alpha}(0) \int_{\eta}^{T_{\alpha}} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}t^2\right) dt + \int_{\eta}^{T_{\alpha}} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{1/2} t \exp\left(-\frac{\alpha}{2}t^2\right) \frac{q_{\alpha}(t) - q_{\alpha}(0)}{t} dt$$

Integrando per parti:

$$\begin{aligned} &= q_{\alpha}(0) \int_{\eta}^{T_{\alpha}} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}t^2\right) dt \\ &\quad + \frac{1}{\alpha} \left[-\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}t^2\right) \frac{q_{\alpha}(t) - q_{\alpha}(0)}{t} \right]_{\eta}^{T_{\alpha}} \\ &\quad + \frac{1}{\alpha} \int_{\eta}^{T_{\alpha}} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}t^2\right) \left(\frac{d}{dt} \frac{q_{\alpha}(t) - q_{\alpha}(0)}{t}\right) dt \\ &= q_{\alpha}(0) (\Phi(\sqrt{\alpha}T_{\alpha}) - \Phi(\sqrt{\alpha}\eta)) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\eta^2\right) \left(\frac{q_{\alpha}(\eta) - q_{\alpha}(0)}{\eta} - \exp\left(-\frac{\alpha}{2}(T_{\alpha}^2 - \eta^2)\right) \frac{q_{\alpha}(T_{\alpha}) - q_{\alpha}(0)}{T_{\alpha}}\right) \\ &\quad + \frac{1}{\alpha} \int_{\eta}^{T_{\alpha}} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}t^2\right) q_{1\alpha}(t) dt \end{aligned}$$

dove $q_{1\alpha}(t) = \frac{q_{\alpha}(T_{\alpha}) - q_{\alpha}(0)}{T_{\alpha}}$.

Osserviamo che l'ultimo termine ha la stessa struttura del termine originale eccetto la moltiplicazione per il fattore $\frac{1}{\alpha}$. Questo suggerisce che, iterando questo processo, è possibile ricavare l'espansione desiderata.

Teorema C.4. *Assumiamo che esistano le costanti c_1, \dots, c_5 con $c_1 > 0$ e $c_5 > 0$ tali che:*

- $T_{\alpha} \geq c_1$;
- $|q_{\alpha}^{(j)}(t)| \leq c_2 \exp\left(\frac{c_3}{2}t^2\right)$ per $j = 0, 1, \dots, k + 1$;
- $|q_{\alpha}^{(j)}(t)| \leq c_4$ per $j = 0, 1, \dots, 2k + 2$ e per $|t| \leq c_5$.

Allora $\forall \epsilon > 0$, abbiamo uniformemente per $\alpha \rightarrow \infty$ per $\eta < c_1 - \epsilon$ la relazione:

$$\begin{aligned} & \int_{\eta}^{T_{\alpha}} \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}t^2\right) q_{\alpha}(t) dt \\ &= (1 - \Phi(\sqrt{\alpha}\eta)) \left\{ q_{\alpha}(0) + \frac{1}{\alpha} \frac{q_{\alpha}''(0)}{2} + \dots + \frac{1}{\alpha^k} \frac{q_{\alpha}^{(2k)}(0)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k)} + O\left(\frac{1}{\alpha^{k+1}}\right) \right\} \\ & \quad + \frac{\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\eta^2\right)}{\sqrt{2\pi\alpha}} \left\{ \frac{q_{\alpha}(\eta) - q_{\alpha}(0)}{\eta} + \frac{1}{\alpha} \frac{q_{1\alpha}(\eta) - q_{1\alpha}(0)}{\eta} + \dots + \frac{1}{\alpha^k} \frac{q_{k\alpha}(\eta) - q_{k\alpha}(0)}{\eta} \right\} \end{aligned}$$

dove $q_{(j+1)\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{q_{j\alpha}(t) - q_{j\alpha}(0)}{t}$.

Dimostrazione. Procediamo per passi successivi:

1. Iterando il risultato dell'Osservazione 24, si ottiene per l'integrale C.1

$$\begin{aligned} & \{ \Phi(\sqrt{\alpha}T_{\alpha}) - \Phi(\sqrt{\alpha}\eta) \} \left\{ \sum_{j=0}^k \frac{q_{j\alpha}(0)}{\alpha^j} \right\} + \frac{\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\eta^2\right)}{\sqrt{2\pi\alpha}} \left\{ \sum_{j=0}^k \frac{1}{\alpha^j} \frac{q_{j\alpha}(\eta) - q_{j\alpha}(0)}{\eta} \right\} \\ & - \frac{\exp\left(-\frac{\alpha}{2}T_{\alpha}^2\right)}{\sqrt{2\pi\alpha}} \left\{ \sum_{j=0}^k \frac{1}{\alpha^j} \frac{q_{j\alpha}(T_{\alpha}) - q_{j\alpha}(0)}{T_{\alpha}} \right\} + \frac{1}{\alpha^{k+1}} \int_{\eta}^{T_{\alpha}} \frac{\exp\left(-\frac{\alpha}{2}t^2\right)}{\sqrt{2\pi\alpha}} q_{(k+1)\alpha}(t) dt. \end{aligned}$$

2. Ora si vuole sostituire $\{ \Phi(\sqrt{\alpha}T_{\alpha}) - \Phi(\sqrt{\alpha}\eta) \}$ con $1 - \Phi(\sqrt{\alpha}\eta)$. Proviamo a dimostrare che

$$1 - \Phi(\sqrt{\alpha}T_{\alpha}) = (1 - \Phi(\sqrt{\alpha}\eta)) O(\alpha^{-(k+1)}).$$

E' chiaro che questo è vero se vale per $\eta = T_{\alpha} - \epsilon_1$, dove $\epsilon_1 = \min(\epsilon, \frac{c_1}{2})$. Proviamolo utilizzando la Proposizione C.3 :

- esiste una costante a_1 tale che

$$1 - \Phi(\sqrt{\alpha}T_{\alpha}) \geq a_1 \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad \text{per } x > \frac{c_1}{2}.$$

- esiste un $\alpha > 1$ tale che:

$$\begin{aligned} 1 - \Phi(\sqrt{\alpha}T_{\alpha}) &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}T_{\alpha}} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}T_{\alpha}^2\right) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\alpha}(T_{\alpha} - \epsilon_1)} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}(T_{\alpha} - \epsilon)^2\right) \exp\left(-\frac{\alpha}{2}[T_{\alpha}^2 - (T_{\alpha} - \epsilon)^2]\right) \\ &\leq a_1^{-1} (1 - \Phi(\sqrt{\alpha}(T_{\alpha} - \epsilon_1))) \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\epsilon_1(2c_1 - \epsilon_1)\right) \\ &= (1 - \Phi(\sqrt{\alpha}(T_{\alpha} - \epsilon_1))) O(\alpha^{-(k+1)}) \end{aligned}$$

3. il primo termine della 1 coincide con il primo termine del teorema se si dimostra che:

$$q_{j\alpha}(0) = \frac{1}{2 \cdot 4 \dots (2j)} q_{\alpha}^{(2j)}(0).$$

Dimostrazione. Per dimostrarlo scriviamo $h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!}$ formalmente. Allora:

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \frac{d}{dt} \frac{h(t) - h(0)}{t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+2} h^{(k+2)}(0) \frac{t^k}{k!} \\ h_2(t) &= \frac{d}{dt} \frac{h_1(t) - h_1(0)}{t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(k+4)} h^{(k+4)}(0) \frac{t^k}{k!} \\ &\vdots \\ h_j(t) &= \frac{d}{dt} \frac{h_{j-1}(t) - h_{j-1}(0)}{t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(k+4)\dots(k+2j)} h^{(k+2j)}(0) \frac{t^k}{k!} \end{aligned}$$

□

4. il secondo termine della 1 coincide con il secondo termine del teorema.
5. l'ultimo termine della 1 è $O(\alpha^{-(k+1)})(1 + \Phi(\sqrt{\alpha}\eta))$, per cui può essere incluso nel primo termine del teorema.

Dimostrazione. Per limitare l'ultimo termine di 1, dobbiamo limitare prima di tutto $q_{(k+1)\alpha}(t)$. Se, per $|t| \leq c_5$, $q_\alpha(t)$ ha una espansione di Taylor con errore $O(|t|^{m+1})$, è facile vedere che $q_{1\alpha}(t)$ ha un'espansione di Taylor con errore $O(|t|^{m-1})$. Usando un procedimento induttivo e l'ipotesi $|q_\alpha^{(j)}(t)| \leq c_4$ segue che $q_{(k+1)\alpha}(t)$ è limitato da una costante per $|t| \leq c_5$. Dato che $q_{(k+1)\alpha}(t)$ può anche essere scritto come somma di termini, dove ciascun termine è il prodotto di una derivazione di q_α e di una potenza inversa di t , si può concludere che $q_{(k+1)\alpha}(t)$ è limitato da a_2 volte $\exp\left(\frac{c_3}{2}t^2\right)$ per $|t| > c_5$ con a_2 costante ovvero:

$$|q_{(k+1)\alpha}(t)| \leq a_2 \exp\left(\frac{c_3}{2}t^2\right).$$

Questo limite è anche valido per $q_{j\alpha}(t)$ con $j \leq k$. E' possibile ora limitare l'ultimo termine della 1 come segue:

$$\begin{aligned} &a_2 \alpha^{-(k+1)} \int_{\eta}^{T_\alpha} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{t^2}{2}(\alpha - c_3)\right) dt \quad (C.2) \\ &= a_2 \alpha^{-(k+1)} \left(\frac{\alpha}{\alpha - c_3}\right)^{1/2} \left\{ \Phi(\sqrt{\alpha - c_3}T_\alpha) - \Phi(\sqrt{\alpha - c_3}\eta) \right\} \\ &\leq a_2 \alpha^{-(k+1)} \left(\frac{\alpha}{\alpha - c_3}\right)^{1/2} \left\{ 1 - \Phi(\sqrt{\alpha - c_3}\eta) \right\}. \end{aligned}$$

Se $\sqrt{\alpha}\eta \leq 1$, abbiamo banalmente

$$1 - \Phi(\sqrt{\alpha - c_3}\eta) \leq 1 \leq (1 - \Phi(1))^{-1} (1 - \Phi(\sqrt{\alpha}\eta)).$$

Se $\sqrt{\alpha}\eta > 1$, usando la Proposizione C.3 otteniamo, per $\eta < c_1$,

$$\begin{aligned} 1 - \Phi(\sqrt{\alpha - c_3}\eta) &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\alpha - c_3}\eta} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}(\alpha - c_3)\right) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\alpha}{\alpha - c_3}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\alpha}\eta} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\eta^2 + \frac{c_3}{2}c_1^2\right) \\ &\leq a_3 (1 - \Phi(\sqrt{\alpha}\eta)), \end{aligned}$$

dove a_3 è una costante e l'ultima disuguaglianza deriva dalla Proposizione C.3.

Ciò prova che la C.2 è $O(\alpha^{-(k+1)})(1 + \Phi(\sqrt{\alpha}\eta))$, per cui può essere incluso nel primo termine del teorema; infatti quando $c_3 = 0$ abbiamo banalmente $O(\alpha^{-(k+1)})(1 + \Phi(\sqrt{\alpha}\eta))$ per $\eta < T_\alpha$ nella C.2.

□

6. il terzo termine della 1 è incluso nel primo termine del teorema.

Dimostrazione. Le ipotesi fatte implicano che:

$$\left| \sum_{j=0}^k \frac{1}{\alpha^j} \frac{q_{j\alpha}(T_\alpha) - q_{j\alpha}(0)}{T_\alpha} \right| \leq a_4 \exp\left(\frac{c_3}{2}T_\alpha^2\right)$$

per una costante a_4 . il terzo termine per $\eta < c_1 - \epsilon$ è limitato da

$$\begin{aligned} &\frac{a_4}{\sqrt{2\pi\alpha}} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}T_\alpha^2 + \frac{c_3}{2}T_\alpha^2\right) \\ &\leq \frac{a_4 c_1}{\sqrt{2\pi\alpha} c_1 - \epsilon_1} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}(c_1 - \epsilon_1)^2\right) \exp\left(\frac{\alpha}{2}(c_1 - \epsilon_1)^2 - \frac{\alpha - c_3}{2}c_1^2\right) \\ &\leq \frac{a_4 c_1}{a_1} \exp\left(\frac{\alpha}{2}(c_1 - \epsilon_1)^2 - \frac{\alpha - c_3}{2}c_1^2\right) (1 - \Phi(\sqrt{\alpha}\eta)) \\ &= \frac{a_4 c_1}{a_1} \exp\left(\frac{c_3 c_1^2}{2} - \alpha \epsilon_1 \left(c_1 - \frac{1}{2}\epsilon_1\right)\right) (1 - \Phi(\sqrt{\alpha}\eta)) \\ &= (1 - \Phi(\sqrt{\alpha}\eta)) O(\alpha^{-(k+1)}), \end{aligned} \tag{C.3}$$

Quando $c_3 = 0$, per $\eta < T_\alpha$ la C.3 diventa:

$$\begin{aligned}
& \frac{a_4}{\sqrt{2\pi\alpha}} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}T_\alpha^2\right) \\
& \leq \frac{a_4 T_\alpha}{\sqrt{2\pi\alpha} T_\alpha - \epsilon} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}(T_\alpha - \epsilon)^2\right) \exp\left(\frac{\alpha}{2}(T_\alpha - \epsilon)^2 - \frac{\alpha}{2}T_\alpha^2\right) \\
& \leq \frac{a_4 T_\alpha}{a_1} (1 - \Phi(\sqrt{\alpha}\eta)) \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\epsilon T_\alpha\right) \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\epsilon(T_\alpha - \epsilon)^2\right) \\
& = (1 - \Phi(\sqrt{\alpha}\eta)) O(\alpha^{-(k+1)}),
\end{aligned}$$

e come prima questo prova che il terzo termine di 1 può essere incluso nel primo termine del teorema. \square

Ciò prova che l'espressione 1 e l'enunciato del teorema danno la stessa espressione per l'integrale C.1. \square

Appendice D

Processi stocastici di Itô

Definizione D.1. Si definisce processo semplice su $[0, T]$ un processo $(u_t)_{t \in [0, T]}$ tale che

$$u_t = \sum_{k=1}^N e_k \mathbb{1}_{(t_{k-1}, t_k]}(t)$$

dove $t \in [0, T]$ e $e_1 \dots e_k$ sono variabili aleatorie.

Si assume che $u \in \mathbb{L}^2([0, T]) = \left\{ (u_t)_{t \in [0, T]} \text{ adattati, } \mathbb{E} \left[\int_0^T u_t^2 dt \right] < \infty \right\}$. L'integrale stocastico per un processo semplice è definito come

$$\int_0^T u(t) dW_t = \sum_{k=1}^N e_k (W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) \quad (\text{D.1})$$

Più in generale

$$\int_a^b u(t) dW_t = \int_0^T u(t) \mathbb{1}_{(a, b]} dW_t$$

Per passaggio al limite la definizione di integrale stocastico può essere estesa a processi generici come mostrato nel Capitolo 4 di [8].

Proposizione D.1. Sia (X_t) il processo di integrali stocastici $X_t = \int_0^t u(s) dW_s$. Allora:

- X_t è \mathfrak{F}_τ -misurabile;
- $\mathbb{E} \left[\int_{t_0}^T u_s dW_s \mid \mathfrak{F}_{t_0} \right] = 0$.

Dimostrazione. 1. Osserviamo che se $t \in (t_{k-1}, t_k] \Rightarrow u_t = e_k$. Siccome u è un processo adattato per ipotesi allora anche e_k è \mathfrak{F}_t -misurabile $\forall t > t_{k-1} \Rightarrow e_k$ è $\mathfrak{F}_{t_{k-1}}$ -misurabile supponendo che valga l'ipotesi usuale di continuità a destra della filtrazione.

Siccome il moto browniano è adattato per definizione allora anche l'integrale stocastico definito da $\sum_{k=1}^N e_k (W_{t_k} - W_{t_{k-1}})$ è un processo adattato.

2. Si ricordi che se X, Y sono variabili aleatorie e \mathcal{G} una σ -algebra con X indipendente da Y e $\mathcal{G} \Rightarrow E[XY|\mathcal{G}] = E[X]E[Y|\mathcal{G}]$:

$$\begin{aligned} & E \left[\int_{t_0}^T u_s dW_s \middle| \mathfrak{F}_{t_0} \right] \\ &= \sum_{k=1}^N E [e_k (W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) | \mathfrak{F}_{t_0}]. \end{aligned}$$

Poiché e_k è $\mathfrak{F}_{t_{k-1}}$ -misurabile $\Rightarrow W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$ è indipendente da e_k e da \mathfrak{F}_{t_0} ; segue che:

$$\begin{aligned} & E \left[\int_{t_0}^T u_s dW_s \middle| \mathfrak{F}_{t_0} \right] \\ &= \sum_{k=1}^N E [e_k | \mathfrak{F}_{t_0}] E [W_{t_k} - W_{t_{k-1}}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

poiché il valore atteso dell'incremento browniano è nullo. □

Definizione D.2. Una funzione $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ è a variazione limitata se

$$\sup_{\tau} \sum_{k=1}^N |g(t_k) - g(t_{k-1})| < \infty$$

dove $\tau = \{t_1, \dots, t_N\}$ è una partizione dell'intervallo $[0, T]$.

Esempio D.1. Se $u \in L^1$ allora $g(t) = \int_0^t u(s) ds$ è a variazione limitata.

Dimostrazione. Si dimostra sfruttando la disuguaglianza triangolare:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N |g(t_k) - g(t_{k-1})| &= \sum_{k=1}^N \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} u(s) ds \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} |u(s)| ds \\ &= \int_0^T |u(s)| ds \\ &= \|u\|_{L^1[0, T]} < \infty \end{aligned}$$

□

Definizione D.3. Un processo $(M_t)_{t \geq 0}$ su $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}, (\mathfrak{F})_{t \in I})$ è una martingala se

- è sommabile cioè $M_t \in L^1 \forall t \geq 0$;
- è adattato cioè $M_t \in \mathfrak{F}_t \forall t \geq 0$;
- $M_t = E[M_T | \mathfrak{F}_t] \forall T \geq t$.

Inoltre,

se la martingala è continua e al quadrato sommabile ovvero $E[\sup_t M_t^2] < \infty$ diremo che $(M_t)_{t \geq 0} \in \mathfrak{M}_C^2$.

Esempio D.2. Sia $M_t = \int_0^t u_s dW_s$ l'integrale stocastico con $u \in \mathbb{L}^2([0, T])$. Allora il processo $M = (M_t)_{t \in [0, T]}$ è una martingala.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} E[M_t | \mathfrak{F}_\tau] &= E \left[\int_0^\tau u_s dW_s + \int_\tau^t u_s dW_s \middle| \mathfrak{F}_\tau \right] \\ &= E \left[M_\tau + \int_\tau^t u_s dW_s \middle| \mathfrak{F}_\tau \right] \\ &= E[M_\tau | \mathfrak{F}_\tau] + E \left[\int_\tau^t u_s dW_s \middle| \mathfrak{F}_\tau \right] \\ &= M_\tau \end{aligned}$$

dove si è usata la Proposizione D.1 per processi semplici (e quindi per estensione per processi qualunque):

- M_τ è \mathfrak{F}_τ -misurabile;
- $E \left[\int_{t_0}^T u_s dW_s \middle| \mathfrak{F}_{t_0} \right] = 0$.

□

Definizione D.4. Sia $M \in \mathfrak{M}_C^2$. Si definisce processo di variazione quadratica di M il seguente limite in $L^2(\Sigma, P)$:

$$\langle M \rangle_T = \lim_{|\sigma| \rightarrow 0} \sum_{\sigma} (M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2, \quad \sigma \in \mathcal{P}_{[0, T]} \quad (\text{D.2})$$

Teorema D.2 (Decomposizione di Doob). Sia $M \in \mathfrak{M}_C^2$. Allora il processo di variazione quadratica esiste ed è tale che

$$M^2 - \langle M \rangle$$

è una martingala³⁴.

³⁴Per la dimostrazione di veda la Proposizione 4.24 di [8].

Esempio D.3. Il processo di variazione quadratica $\langle M \rangle$ della martingala M definita dagli integrali stocastici $M_t = \int_0^t u_s dW_s$ è

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t u_s^2 ds$$

e per il Teorema di Decomposizione di Doob $M^2 - \langle M \rangle$ è una martingala.

Dimostrazione. Si vuole provare che

$$\lim_{|\sigma| \rightarrow 0} \sum_{\sigma} (M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2 = \int_0^T u_s^2 ds \quad \text{in } L^2(\Sigma, P)$$

ovvero

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{\sigma} (M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2 - \int_0^T u_s^2 ds \right)^2 \right] \rightarrow 0.$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left(\sum_{\sigma} (M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2 - \int_0^T u_s^2 ds \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{\sigma} \left(\int_0^{t_k} u_s dW_s - \int_0^{t_{k-1}} u_s dW_s \right)^2 - \int_0^T u_s^2 ds \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{\sigma} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} u_s dW_s \right)^2 - \int_0^T u_s^2 ds \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\left(\int_0^T u_s dW_s \right)^2 - \int_0^T u_s^2 ds \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Per l'isometria di Itô:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left(\sum_{\sigma} (M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2 - \int_0^T u_s^2 ds \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T u_s^2 ds - \int_0^T u_s^2 ds \right)^2 \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Definizione D.5. Si definisce *processo di Itô* un processo

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s ds + \int_0^t v_s dW_s, \quad u, v \in \mathbb{L}^2([0, T]) \quad (\text{D.3})$$

dove

- X_0 è una variabile aleatoria \mathfrak{F}_0 -misurabile;
- $\int_0^t u_s ds$ è un integrale deterministico con integrando al quadrato sommabile \Rightarrow l'integrale costituisce un processo a variazione limitata traiettoria per traiettoria³⁵;
- $\int_0^t v(s) dW_s$ è un integrale stocastico che costituisce una martingala³⁶ con variazione quadratica non banale $\int_0^t v_s^2 ds$ ³⁷.

Solitamente per indicare un processo di Itô si usa la seguente notazione differenziale:

$$dX_t = u_t dt + v_t dW_t.$$

Teorema D.3 (Formula di Itô). Sia X un processo di Itô e sia $F(t, x) \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Allora $F(t, X_t)$ è un processo di Itô e vale:

$$\begin{aligned} F(t, X_t) &= F(0, X_0) + \int_0^t (\partial_s F)(s, X_s) ds + \int_0^t (\partial_x F)(s, X_s) u_s ds \\ &\quad + \int_0^t (\partial_x F)(s, X_s) v_s dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t (\partial_{xx} F)(s, X_s) v_s^2 ds \end{aligned}$$

In notazione differenziale:

$$\begin{aligned} dF(t, X_t) &= (\partial_t F)(t, X_t) dt + (\partial_x F)(t, X_t) u_t dt \\ &\quad + (\partial_x F)(t, X_t) v_t dW_t + \frac{1}{2} (\partial_{xx} F)(t, X_t) d \langle X \rangle_t \\ &= (\partial_t F)(t, X_t) dt + (\partial_x F)(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} (\partial_{xx} F)(t, X_t) d \langle X \rangle_t \end{aligned}$$

dove $d \langle X \rangle_t$ è il differenziale stocastico del processo di variazione quadratica³⁸.

Proposizione D.4. Se un processo di Itô X è a coefficienti deterministici allora $X_t \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ dove

- $\mu = E[X_t] = X_0 + \int_0^t u_s ds$;

³⁵Si veda l'Esempio D.1

³⁶Si veda l'Esempio D.2.

³⁷Si veda l'Esempio D.3.

³⁸Per la dimostrazione di veda il Teorema 5.9 di [8].

$$\bullet \sigma^2 = \text{Var}[X_t] = \int_0^t v_s^2 ds = \langle X \rangle_t$$

Enunciamo ora il teorema di Girsanov il quale permetterà di sostituire arbitrariamente il drift di un processo di Itô modificando la misura di probabilità e il moto browniano lasciando inalterata la parte di diffusione.

Teorema D.5 (Teorema di Girsanov). *Sia $(W_t)_{t \in [0, T]}$ un moto Browniano nello spazio di probabilità $(\Omega, P, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t \in [0, T]})$ e sia (λ_t) un processo in \mathbb{L}_{loc}^2 ³⁹. Allora $\exists \tilde{P}$ misura martingala⁴⁰ tale che*

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \lambda_s ds, \quad t \in [0, T]$$

è un moto browniano in $(\Omega, \tilde{P}, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t \in [0, T]})$ ⁴¹.

³⁹Un processo u appartiene a \mathbb{L}_{loc}^2 se è adattato e tale che $\int_0^T u_t^2 dt < \infty$ quasi sicuramente.

⁴⁰Si veda la Definizione E.2 dell'Appendice E.

⁴¹Per la dimostrazione si veda il Teorema 10.5 di [8].

Appendice E

Cambio di numeraire

Riportiamo in questa appendice alcuni contenuti della Sezione 10.4 di [8].

Definizione E.1. In finanza viene detto *numeraire* l'asset rispetto al quale viene normalizzato il mercato ovvero è l'unità di conto attraverso cui si esprimono i prezzi di tutti gli altri titoli.

Sia $Y = (Y_t)$ il numeraire e $S = (S_t)$ un titolo e $B = (B_t)$ il bond (titolo non rischioso). Allora il mercato normalizzato rispetto al numeraire è dato dalle seguenti variabili aleatorie:

$$\tilde{S}_t = \frac{S_t}{Y_t},$$
$$\tilde{B}_t = \frac{B_t}{Y_t}.$$

Spesso come numeraire viene scelto il bond B .

In questo caso il mercato normalizzato rispetto al numeraire è il seguente:

$$\tilde{S}_t = \frac{S_t}{B_t},$$
$$\tilde{B}_t = 1.$$

Definizione E.2. Su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}, (\mathfrak{F})_{t \in I})$ definiamo *misura martingala* con numeraire Y una misura di probabilità tale che:

- P e Q sono equivalenti cioè se un evento è impossibile in P allora lo è anche in Q ;
- i prezzi normalizzati rispetto a Y sono Q -martingale cioè

$$\tilde{S}_s = \mathbb{E}^Q[\tilde{S}_t | \mathfrak{F}_s], \quad \forall s \leq t,$$

$$\tilde{B}_s = \mathbb{E}^Q[\tilde{B}_t | \mathfrak{F}_s], \quad \forall s \leq t,$$

In particolare se $Y = B$:

$$\tilde{S}_0 = E^Q[E^Q[\tilde{S}_t|\mathfrak{F}_0]] = E^Q[\tilde{S}_t] \quad (\text{E.1})$$

La misura Q viene detta *misura neutrale al rischio*.

Nella pratica è possibile che diversi investitori usino diversi tipi di numeraire; analizzeremo quindi come passare da una misura relativa a un certo numeraire ad una relativa ad un altro numeraire.

Teorema E.1. *E' possibile definire un'altra misura martingala relativa ad un altro numeraire N attraverso la derivata di Radon-Nikodym:*

$$\frac{dQ^N}{dQ} = \frac{Y_0 N_T}{Y_T N_0}.$$

Per il Teorema di Radon-Nikodym $\frac{dQ^N}{dQ}$ esiste ed è unica Q -quasi ovunque ed è tale che

- è \mathfrak{F} -misurabile;
- è sommabile;
- $Q^N(A) = \int_A \frac{dQ^N}{dQ} dQ, \quad \forall A \in \mathfrak{F}.$

Per la dimostrazione si veda il Teorema 2.19 di [8].

Osservazione 25.

$$\begin{aligned} Q^N(A) &= \int_A \frac{dQ^N}{dQ} dQ \Leftrightarrow \int_A dQ^N = \int_A \frac{dQ^N}{dQ} dQ \\ &\Leftrightarrow \int_{\Omega} \mathbb{1}_A dQ^N = \int_{\Omega} \mathbb{1}_A \frac{dQ^N}{dQ} dQ \end{aligned}$$

Per il Teorema di Dynkin⁴², poiché vale per le funzioni indicatrici vale anche per le funzioni misurabili e limitate: se $X \in L^1(\Omega, Q^N) \Rightarrow X \frac{dQ^N}{dQ} \in L^1(\Omega, Q^N) \Rightarrow \int_{\Omega} X \frac{dQ^N}{dQ} dQ = \int_{\Omega} X dQ^N$

Osservazione 26.

$$E^Q[X] = E^{Q^N} \left[X \frac{dQ^N}{dQ} \right].$$

Infatti, per l'Osservazione 25,

$$E^{Q^N}[X] = \int_{\Omega} X dQ^N = \int_{\Omega} X \frac{dQ^N}{dQ} dQ = E^Q \left[X \frac{dQ^N}{dQ} \right].$$

⁴²Per la dimostrazione di veda il Teorema A.9 di [8].

Corollario E.2. *Se si considera*

- *come numeraire $Y = B$ con relativa misura priva di rischio Q ,*
- *come secondo numeraire $N = S$ con relativa misura \tilde{Q} detta share measure relativa al prezzo del titolo S ,*
- *come cambio di numeraire $\frac{dQ^N}{dQ} = \frac{B_0 S_T}{B_T S_0}$,*

allora $\forall X \in L^1(\Omega, Q)$ risulta

$$E^Q[X] = E^{\tilde{Q}} \left[X \frac{dQ}{d\tilde{Q}} \right] = E^{\tilde{Q}} \left[X \frac{B_T S_0}{B_0 S_T} \right].$$

Bibliografia

- [1] Al Mutairi Alya O. and Heng Chin Low. Saddlepoint approximation to cumulative distribution function for Poisson-exponential distribution. *Modern Applied Science*, 7(3):26–32, 2013.
- [2] Ronald W. Butler. *Saddlepoint Approximations with Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, NJ, USA, 2007.
- [3] P. Carr, H. Geman, D. B. Madan, and M. Yor. The fine structure of asset returns: An empirical investigation. *The Journal of Business*, 55(2):305–332, 2002.
- [4] Peter Carr and Dilip B. Madan. Saddlepoint methods for option pricing. *The Journal of Computational Finance*, 13(1):49–61, 2009.
- [5] H. Daniels. Tail probability approximations. *International Statistical Review*, 55:37–48, 1987.
- [6] Jens Ledet Jensen. *Saddlepoint Approximations*. Oxford University Press, Oxford, UK, 1995.
- [7] R. Lugannini and S. Rice. Saddlepoint approximations for the distribution of the sum of independent random variables. *Advances in Applied Probability*, 12:475–490, 1980.
- [8] Andrea Pascucci. *PDE and Martingale Methods in Option Pricing*. Springer Verlag, Bocconi University Press, Milano, Italia, 2011.
- [9] Sheldon M. Ross. *Introduction to Probability Models*. Elsevier Science, Massachusetts, USA, 9 edition, 2006.
- [10] Andrew T. A. Wood, James G. Booth, and Ronald W. Butler. Saddlepoint approximations to the cdf of some statistics with nonnormal limit distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 88(422):680–686, 1993.