Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

PROBLEMA DI CAUCHY PER L'EQUAZIONE DEL CALORE E L'EQUAZIONE DELLE ONDE

Tesi di Laurea in
Istituzioni di Analisi Superiore

Relatore:
Chiar.mo Prof.
BRUNO FRANCHI

Correlatore:
Chiar.ma Prof.ssa
FRANCA FRANCHI

Presentata da:
SARA VEZZALINI

III Sessione
Anno Accademico 2012/2013

A Giacomo,

Indice

Introduzione

Oggetto di questa tesi è la trasformata di Fourier e la sua applicazione alla risoluzione dell'equazione del calore e dell'equazione delle onde.

Nel primo capitolo ricorderemo, oltre alla definizione di trasformata di Fourier di una funzione in $\mathcal{L}^1$, alcune sue importati proprietà. Concluderemo con la nozione di Spazio di Schwartz.

Nel capitolo secondo tratteremo il problema di Cauchy per l'equazione del calore e, scriveremo una soluzione esplicita come operatore di convoluzione. L'ultimo paragrafo del capitolo mostrerà come è possibile ricavare l'equazione del calore partendo dai moti browniani.

Nel terzo capitolo studieremo il problema di Cauchy per l'equazione delle onde e, in particolare, ne troveremo una soluzione in $\mathbb{R}^3$, provando la formula di Poisson-Kirchhoff.

Capitolo 1

Cenni sulla trasformata di Fourier

1.1 Definizione e alcune proprietà

Definizione 1.1. Consideriamo una funzione $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ e un vettore $\xi \in \mathbb{R}^n$. La *trasformata di Fourier* di f in ξ è così definita:

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,\xi>} f(x)dx.$$

Osserviamo che l'integrale esiste grazie alla sommabilità di f, infatti:

$$|e^{-i<x,\xi>} f(x)| = |e^{-i<x,\xi>}||f(x)| = |f(x)|$$

in quanto $|e^{i\theta}| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.
Mettiamo ora in evidenza alcune proprietà:

Teorema 1.1.1. *Sia $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Allora:*

1. $\mathcal{F}(f) = \hat{f}(\xi) \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e* $\mathcal{F} : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *è lineare e continua.*
2. $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$.
3. $\lim_{||\xi|| \to \infty} \mathcal{F}(f)(\xi) = 0$.

Dunque $\mathcal{F} : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)$ *è lineare e continua.*

Osservazione 1. Le proprietà *2.* e *3.* dicono che $\hat{f}(\xi) \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione. 1. Mostriamo che $\mathcal{F}$ è essenzialmente limitata.

$$|\mathcal{F}(f)(\xi)| = |\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,\xi>} f(x)dx| \leq \int_{\mathbb{R}^n} 1 \cdot |f(x)|dx = ||f||_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)}$$

Poiché vale $\forall\xi$, facciamo il sup in ξ, ottenendo:

$$||\mathcal{F}(f)||_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq ||f||_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)}.$$

$\Rightarrow \mathcal{F}$ è lineare: prese due funzioni f,g si ha:
$\mathcal{F}(f+g) = \int e(f+g) = \int ef + \int eg = \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g)$.

2. $\mathcal{F}$ è continua:
Consideriamo una successione $(\xi_k)_{k\in\mathbb{R}^n}$ in $\mathbb{R}^n$ convergente ad un certo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Vogliamo mostrare che $\hat{f}(\xi_k) \to \hat{f}(\xi)$ *per* $k \to \infty$.

$$\hat{f}(\xi_k) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,\xi_k>} f(x)dx$$

Utilizziamo il teorema della divergenza dominata per passare al limite sotto il segno di integrale e concludiamo:

$$\hat{f}(\xi_k) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,\xi_k>} f(x)dx \quad \to \hat{f}(\xi)$$

in quanto $e^{-i<x,\xi_k>} \to e^{-i<x,\xi>}$ per $k \to \infty$.
Da cui $\mathcal{F}$ è continua.

3.
$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,\xi>} f(x)dx$$

$$-\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\pi} e^{-i<x,\xi>} f(x)dx =$$

e poiché $-1 = e^{-i\pi}$, allora si ha :

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<\frac{\pi}{||\xi||^2}\ \xi + x,\ \xi>} f(x)dx.$$

Operiamo un cambio di variabile: $y = \frac{\pi}{||\xi||^2}\xi + x$ con $||\xi|| < 1$. Questo cambio ha jacobiano pari a 1, quindi applichiamo una traslazione, ossia una trasformazione lineare. Il nostro integrale diventa quindi:

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<y,\xi>} f(y - \frac{\pi}{||\xi||^2}\xi)dy$$

Sostituendo e chiamando $y = x$, avremo che:

$$\hat{f}(\xi) - (-\hat{f}(\xi)) = 2\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,\xi>}[f(x) - f(x - \frac{\pi}{||\xi||^2}\xi)]dx$$

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x - \frac{\pi}{||\xi||^2}\xi)|dx$$

Abbiamo definito, per una funzione $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ e un vettore $h\ in\ \mathbb{R}^n$, la traslazione $\tau_h u$ come $u(x+h)$ e abbiamo mostrato che in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$

$$||\tau_h u - u|| \to 0 \ \ per \ ||h|| \to 0.$$

In questo caso la u in questione è la nostra f, il valore h è $\frac{\pi}{||\xi||^2}\xi$ che, al tendere all' ∞ di $||\xi||$, tende a 0.
Osserviamo che

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x - \frac{\pi}{||\xi||^2}\xi)|dx = ||f - \tau_{\frac{\pi}{||\xi||^2}\xi} f||_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)} \to 0 \ \ per \ ||\xi|| \to \infty$$

$$\Rightarrow |\hat{f}(\xi)| \to 0 \ \ per \ ||\xi|| \to \infty$$

□

1.2 Derivazione, convoluzione e inversione della trasformata di Fourier

Vediamo ora come la trasformata agisce sulle operazioni di derivazione e convoluzione, ricordando che quest'ultima è definita, per funzioni in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, come:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

Per quanto riguarda la *derivazione* abbiamo che, considerata $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ in modo che $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, si ha:

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = i\xi_j \hat{f}(\xi)$$

ovvero la trasformata della derivata equivale a moltiplicare la trasformata della funzione per $i\xi$.

Dimostrazione. Se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f \in \mathcal{L}^1_{LOC}$, perciò ha senso chiedere che $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, in quanto le derivate deboli sono definite per funzioni $\mathcal{L}^1_{LOC}$.
Sia

$$\hat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,\xi>} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)dx$$

la trasformata di Fourier della derivata.
Consideriamo ora le funzioni *cut off* $\psi_N(||x||)$. Queste funzioni sono $\mathcal{C}^\infty$ e osserviamo che l'integrale è definito non su $\mathbb{R}^n$ ma su $B(0, N+1)$, poiché al di fuori di essa $\psi_N(||x||) = 0$.

$$= \lim_{N\to\infty} \int_{B(0,N+1)} e^{-i<x,\xi>} \psi_N(||x||) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)dx$$

Integrando per parti:

$$= -\int_{B(0,N+1)} (\frac{\partial}{\partial x_j} e^{-i<x,\xi>} \psi_N(||x||)) f(x)dx =$$

$$= -[\int_{B(0,N+1)} -i\xi_j e^{-i<x,\xi>} \psi_N(||x||)) f(x)dx + \int_{B(0,N+1)} e^{-i<x,\xi>} \frac{\partial}{\partial x_j} \psi_N(||x||)) f(x)dx] =$$

$$= \int_{B(0,N+1)} \underbrace{i\xi_j e^{-i<x,\xi>} \psi_N(||x||))}_{\to i\xi_j e^{-i<x,\xi>}} f(x)dx - \int_{B(0,N+1)} \underbrace{e^{-i<x,\xi>} \frac{\partial}{\partial x_j} \psi_N(||x||))}_{\to 0} f(x)dx$$

per $N \to \infty$.

Poiché $||\frac{\partial}{\partial x_j}\psi_N(||x||)|| \leq \underbrace{||\psi_N^{'}(||x||)||}_{numero} \underbrace{||\frac{x_j}{||x||}||}_{\leq 1}$

$$\Rightarrow \hat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = i\xi_j \hat{f}(\xi).$$

□

Per quanto riguarda invece la *convoluzione* su $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ si ha che la trasformata della convoluzione è il prodotto delle trasformate, in particolare:

$$(f \hat{*} g)(\xi) = \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi)$$

Dimostrazione. Poiché $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ possiamo applicare la trasformata di Fourier.

$$(f \hat{*} g)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,\xi>} f \hat{*} g(x) dx = per\ definizione =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,\xi>} \ (\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy) \ dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x-y,\xi>} e^{-i<y,\xi>} f(x-y)g(y)dy) \ dx =$$

Abbiamo che $||e^{-i<x-y,\xi>}e^{-i<y,\xi>}f(x-y)g(y)|| = ||f(x-y)|| \ ||g(y)||$.
Esse sono sommabili quindi anche tutta la funzione integranda lo è, per cui applichiamo Fubini e separiamo gli integrali:

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<y,\xi>} g(y) \ (\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x-y,\xi>} f(x-y)dx) \ dy =$$

Ponendo $x - y = X$ otteniamo:

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<y,\xi>} g(y) \ (\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<X,\xi>} f(X)dX \ )dy =$$

Il secondo integrale non dipende da y, per cui portiamo fuori dall' integrale e osserviamo che questa quantità è $\hat{f}(\xi)$ e quello che resta è $\hat{g}(\xi)$, quindi:

$$= \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$$

□

Non sempre è possibile *invertire* la trasformata di Fourier; è necessario avere delle condizioni sulla funzione trasformata. Osserviamo il seguente:

Teorema 1.2.1. *Sia $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ tale che $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Allora per quasi ogni x in $\mathbb{R}^n$ si ha:*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n)} e^{+i<x,\xi>} \hat{f}(\xi) d\xi$$

Osservazione 2. Osserviamo che a priori non è detto che $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ in quanto, per definizione, sappiamo che $\hat{f}$ è continua e va a 0 all' ∞, ma non è detto che vada a 0 abbastanza velocemente per essere sommabile. Ad esempio, se andasse a 0 con $\frac{1}{x}$ non sarebbe sommabile.

1.3 Spazi di Schwartz

Definiamo ora un particolare tipo di spazio, chiamato *Spazio di Schwartz* e indicato con $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ che contiene funzioni a decrescenza rapida, è cioè lo spazio delle funzioni le cui derivate vanno a 0 all' ∞ (i.e. decrescono) più velocemente di un polinomio.

Definizione 1.2. Diciamo che $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se :

1. $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$
2. $x^\alpha \; \partial_x^\beta \; u(x) \to 0 \; per \; x \to \infty \quad \forall \alpha, \beta \; multi-indici$

dove $\partial_x^\beta \; u$ sono così definite: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n \; \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \; e \; \beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ e

$$\partial_x^\beta \; u = \frac{\partial^{\beta_1} u}{\partial x_1^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial^{\beta_n} u}{\partial x_n^{\beta_n}}$$

Osserviamo che, considerata una funzione $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e un polinomio di un certo grado $p_n(x)$, allora $p_n(x)u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; vediamo inoltre che:

Teorema 1.3.1. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione. Consideriamo $N \in \mathbb{N}$ e $(1 + ||x||^2)^N$ e $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
Abbiamo che:

$$u(x)(1 + ||x||^2)^N = \underbrace{u(x)}_{\in \; \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \quad \underbrace{(1 + \sum_{j=1}^{n} x_j^2)^N}_{polinomio \; di \; grado \; 2N} \quad \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

per quanto detto prima. Inoltre:
$|u(x)| \; (1 + ||x||^2)^N \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$; è limitata poiché tende a 0 per $||x|| \to \infty$.

$$\Rightarrow \exists C_N \; ; \; |u(x)| \; (1 + ||x||^2)^N \leq C_N.$$

Consideriamo ora:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)| \frac{(1 + ||x||^2)^N}{(1 + ||x||^2)^N} dx \leq C_N \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + ||x||^2)^N} dx < \infty.$$

È possibile scegliere N in modo che l'integrale converga. Infatti affinché l'integrale sia finito basta che: $2N > n < \infty$. Se $n = 1$ allora la disuguaglianza è vera e quindi $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

□

Questo teorema ci permette perciò di definire la trasformata di Fourier di una funzione di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in quanto contenuta in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

Per una funzione in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vale anche che:

Teorema 1.3.2. *Se* $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Osservazione 3. Il teorema ci dice quindi che $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$.
Osserviamo inoltre che $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{u}$ è ben definita.

Dimostrazione. Consideriamo $\xi^\alpha \; \partial_\xi^\beta \; \hat{u}(\xi)$. Per mostrare che va a 0 all' ∞, dobbiamo mostrare che $\xi^\alpha \; \partial_\xi^\beta \; \hat{u}(\xi) \to 0 \quad$ *per* $\xi \to \infty$, ossia basta $\xi^\alpha \; \partial_\xi^\beta \; \hat{u}(\xi) = \mathcal{F}(v), \quad v \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \quad \forall \alpha, \beta$, questo perché sappiamo che le trasformate di Fourier di funzioni $\mathcal{L}^1$ vanno a 0 all' ∞.
Mostriamo allora che $\partial_{\xi_j} \hat{u}(\xi) = -i(\widehat{x_j u})(\xi)$, ossia la derivata della trasformata è $-i$ moltiplicato per la trasformata di $(x_j u)$.

Consideriamo:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,\xi>} u(x) dx = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \hat{u}(\xi).$$

Supponendo momentaneamente di poter scambiare derivata e integrale, otteniamo che:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial \xi_j} e^{-i<x,\xi>} u(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} -i x_j e^{-i<x,\xi>} u(x) dx = \; per \; definizione = -i(\widehat{x_j u})(\xi).$$

Vediamo ora che effettivamente vale quel passaggio:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,\xi>} u(x) dx = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \; [\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x, \; \xi \; + \; te_j>} u(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,\xi>} u(x) dx \;] =$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \; [\int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\frac{e^{-i<x, \; \xi \; + \; te_j>-} - e^{-i<x,\xi>}}{t}}_{\to \; i \; x_j \; e^{-i<x,\xi>}} u(x) dx \;]$$

$$= e^{-i<x,\xi>} \; \frac{e^{-itx_j} - 1}{t} u(x).$$

Per poter portare il limite sotto il segno di integrale, ossia per poter usare la convergenza dominata, dobbiamo fare vedere che questa quantità si stima uniformemente rispetto a t con una funzione sommabile.

Allora:

$$|e^{-i<x,\xi>}\ \frac{e^{-itx_j}-1}{t}u(x)| = |e^{-i<x,\xi>}|\ |\frac{e^{-itx_j}-1}{t}|\ |u(x)| =$$
$$= 1\cdot|\frac{e^{-itx_j}-1}{t}|\ |u(x)| = 1\cdot\frac{|\cos(tx_j)-i\sin(tx_j)-1|}{t}\ |u(x)| \leq (*)$$

Osserviamo che:

$$|\cos(tx_j)-i\sin(tx_j)-1|^2 = |1-\cos(tx_j)|^2+\sin^2(tx_j) =$$
$$= 2-2\cos(tx_j) = 2(1-\cos(tx_j))$$

Dunque:

$$(*) \leq \sqrt{2}\ \frac{|1-\cos(tx_j)|^{\frac{1}{2}}}{|t|\ |x_j|}\ \cdot \underbrace{|u(x)|\ |x_j|}_{\in\ \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n),\ in\ quanto\ sta\ in\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$$

Quindi basta far vedere che $\frac{1-\cos(tx_j)}{tx_j}$ è limitata. Chiamiamo $s = tx_j$:

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1-\cos s}{s^2} = de\ l'Hôpital = \frac{+\sin s}{2s} = \frac{1}{2}$$

quindi $\hat{u}\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, tende a 0 all' ∞ $\Rightarrow \hat{u}$ è limitata. Perciò possiamo usare la convergenza dominata.

Rimane infine da mostrare che $\xi^\alpha\ \partial_\xi^\beta\ \hat{f}(\xi)\to 0$ per $||\xi||\to\infty$.
Poiché $\hat{u}\in\mathcal{S}$, possiamo utilizzare la formula:

$$\partial_x^\beta\ u(\xi) = \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}}\cdots\frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}}\hat{u}(\xi) = (-i)^{|\beta|}\ (\widehat{x^\beta u})(\xi)$$

Troviamo quindi che:

$$\partial_\xi^\beta\ \hat{f}(\xi) = (-i)^{|\beta|}(\widehat{x^\beta f})(\xi)$$

$$\xi^\alpha\ \partial_\xi^\beta\ \hat{f}(\xi) = \xi^\alpha(-i)^{|\beta|}(\widehat{x^\beta f})(\xi) =$$
$$= (-i)^{|\beta|+|\alpha|}(i)^{|\alpha|}\xi^\alpha(\widehat{x^\beta f})(\xi) = (-i)^{|\beta|+|\alpha|}(\partial_x^\alpha(\widehat{x^\beta f}))(\xi)$$

Ma $u\in\mathcal{S}\Rightarrow u\cdot monomio\in\mathcal{S}$, ma la derivata di una funzione di $\mathcal{S}$ appartiene ancora ad $\mathcal{S}$, dunque $(\partial_x^\alpha(\widehat{x^\beta f}))(\xi)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\subseteq\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ma è trasformata di Fourier di una trasformata $\mathcal{L}^1\Rightarrow$ va a 0 all' ∞.
Abbiamo quindi dimostrato che $\xi^\alpha\ \partial_\xi^\beta\ \hat{u}(\xi)\to 0\quad per\ ||\xi||\to\infty$

□

All'interno di questi spazi è possibile studiare alcune importanti equazioni, come ad esempio l'equazione del calore e l'equazione delle onde, che tratteremo nei prossimi capitoli.

Capitolo 2

Problema di Cauchy per l'equazione del Calore

2.1 Definizione

L'*equazione del calore di Fourier* è un'equazione di diffusione che descrive dal punto di vista macroscopico l'evoluzione della temperatura in un corpo in ogni istante in assenza di sorgenti; dal punto di vista microscopico la diffusione del calore è invece descritta in termini di moto browniano.

L'equazione del calore è un'equazione di tipo differenziale ed ha espressione:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \Delta u(x,t).$$

Tale equazione però non è però sufficiente per poter determinare la temperatura a un dato istante: a tal fine è necessario avere quindi una condizione iniziale che descriva la distribuzione della temperatura ad un certo istante iniziale fissato.

Consideriamo allora un punto $x = (x_1, ...x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}_+$, e sia ϕ una funzione $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Vogliamo determinare $u : \mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{R}}_+$ tale che :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial \xi_k^2}u(x,t) = \Delta u(x,t) \quad \text{per } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = \phi(x) \end{cases}$$

dove $u(x,0) = \phi(x)$ significa $\lim_{t \to 0^+} u(x,t) = \phi(x)$.

Supponiamo che la funzione $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Per risolvere l'equazione sopra, applichiamo formalmente la trasformata di Fourier nella variabile x all'equazione del calore ad un tempo t fissato. Otteniamo:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\xi,t) + ||\xi||^2\hat{u}(t,\xi) = 0 \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{\phi}(\xi) \end{cases}$$

in quanto

$$\hat{u}(\xi,t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,\xi>}u(x,t)dx$$

ed inoltre vale che

$$\lim_{t\to 0^+} \hat{u}(\xi,t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,\xi>}u(x,0)dx = \hat{\phi}(\xi)$$

ed essendo $u(x,0) = \phi(x)$, otteniamo la seconda equazione del sistema.

Il secondo sistema è un problema di Cauchy: abbiamo infatti un' equazione differenziale del primo ordine omogenea e una condizione iniziale.

2.2 Risoluzione del problema di Cauchy

L'equazione caratterista di $\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\xi,t) + ||\xi||^2\hat{u}(t,\xi) = 0$ è $\lambda + ||\xi||^2 = 0$, da cui $\lambda = -||\xi||^2 = 0$.

Notiamo che λ è del tipo $\alpha \pm i\beta$ con $\alpha = -||\xi||^2$ e $\beta = 0$, e che perciò l'autovalore è della forma $e^{+\alpha x}\cos(\beta x)$.

Sostituendo i valori di α e β trovati, otteniamo $e^{-||\xi||^2 t}\cos(0) = e^{-||\xi||^2 t}$.

Quindi la soluzione generale è :

$$\hat{u_0}(\xi,t) = C\ e^{-||\xi||^2 t},$$

dove C è una costante.

Cerchiamo ora di soddisfare la condizione iniziale. Sappiamo che $\hat{u}(\xi,0) = \hat{\phi}(\xi)$, dunque:

$$\hat{u_0}(\xi,t) = C\ e^{-||\xi||^2 t}|_{t=0} = C\ e^{-||\xi||^2\cdot 0} = C$$

$$\Rightarrow C = \hat{\phi}(\xi).$$

Abbiamo trovato il valore della costante C; sostituendola nella soluzione generale troviamo quindi quella particolare:

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{\phi}(\xi) e^{-||\xi||^2 t}.$$

Notiamo che la soluzione del sistema appena trovata è una $\hat{u}$. Poichè $\hat{\phi}(\xi)$ è sommabile per ipotesi, in quanto avevamo supposto inizialmente $\phi(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, e poichè $e^{-||\xi||^2 t}$ è limitato, possiamo applicare il teorema di inversione, trovando:

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>} e^{-t||\xi||^2} \hat{\phi}(\xi) dx \qquad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$$

Questa appena trovata è una buona candidata a essere una soluzione dell'equazione del calore, ma ci chiediamo se lo sia effettivamente e, nel caso, se possiamo scriverla in modo migliore.

2.3 Derivazione sotto segno di integrale

Poiché nel prossimo paragrafo vogliamo applicare il *teorema della convergenza dominata* per studiare le condizioni di Cauchy, ci chiediamo se è possibile portare le derivate sotto il segno di integrale, e, in particolare, se è possibile calcolare le derivate rispetto a t.

Abbiamo:

$$\frac{u(t+h, x) - u(t, x)}{h} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>} \hat{\phi}(\xi) \frac{e^{-(t+h)||\xi||^2} - e^{-t||\xi||^2}}{h} d\xi =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>} \hat{\phi}(\xi) \; ||\xi||^2 \underbrace{\frac{e^{-(t+h)||\xi||^2} - e^{-t||\xi||^2}}{h||\xi||^2}}_{(*)} d\xi$$

Mostriamo ora che la quantità (*) si maggiora con una costante.
Sappiamo che $t \geq 0$, dunque, poiché stiamo calcolando un limite per $h \to 0$, possiamo scegliere $|h| < \frac{t}{2}$.

Dobbiamo stimare la quantità (*) uniformemente rispetto ad h, cioè dobbiamo maggiorarlo con qualcosa che non dipenda da h.

Abbiamo che:

$$\frac{e^{-(t+h)||\xi||^2} - e^{-t||\xi||^2}}{h||\xi||^2}$$

è in particolare una funzione calcolata in $(t + h)$ meno la funzione calcolata in t.

Guardiamo il numeratore: $e^{-(t+h)||\xi||^2} - e^{-t||\xi||^2}$ e lo consideriamo calcolato il $s = h, h = 0$.

Per stimare la quantità, possiamo usare il *teorema del valor medio (Lagrange)*, ottenendo una stima più rozza, oppure, nel caso in cui non otteniamo un risultato significativo, possiamo utilizzare il *teorema fondamentale del calcolo integrale*, ottenendo una stima più fine.

Scegliamo di usare il teorema di *Lagrange*:

$$\frac{e^{-(t+h)||\xi||^2} - e^{-t||\xi||^2}}{h||\xi||^2} = \frac{-||\xi||^2 e^{-(t+s^*)||\xi||^2}}{h||\xi||^2} \cdot h,$$

con $|s^*| < |h| < \frac{1}{2}$

Abbiamo che $e^{-(t+s^*)||\xi||^2}$ è limitato se $(t+s^*) > 0$, in particolare

$$(t+s^*) \geq t - |s^*| > t - \frac{t}{2} = \frac{t}{2} > 0.$$

Dunque $e^{-(t+s^*)||\xi||^2} \leq 1$ e perciò la quantità (*) ≤ 1.

Osserviamo infine che se $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow ||\xi||^2\hat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e, poiché $||\xi||^2$ è un polinomio in ξ_j e poiché le funzioni di $\mathcal{S}$ sono sommabili, $\Rightarrow ||\xi||^2\hat{\phi} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

Abbiamo dunque verificato le ipotesi per poter applicare la convergenza dominata. È possibile calcolare le derivate e si può derivare sotto il segno di integrale. Otteniamo perciò:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,\xi>}\hat{\phi}(\xi)\ ||\xi||^2\ e^{-t||\xi||^2} e\xi$$

Osservazione 4. Abbiamo quindi visto che se $\phi \in \mathcal{S}$, allora anche la sua trasformata $\hat{\phi} \in \mathcal{S}$ e in particolare $||\xi||^2\hat{\phi} \in \mathcal{S}$, e poiché le fuzioni di $\mathcal{S}$ sono sommabili, allora anche $||\xi||^2\hat{\phi} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

Possiamo perciò concludere che è possibile calcolare le derivate prime.

Osserviamo inoltre che è possibile calcolare anche le derivate seconde, in quanto, poiché $\hat{\phi}(\xi)$ appartiene a $\mathcal{S}$, derivando ulteriormente otteniamo $\hat{\phi}(\xi)||\xi||^2$ che appartiene a $\mathcal{S}$; quindi possiamo derivare anche al secondo ordine.

Infine, osserviamo che possiamo a derivare anche per ogni ordine successivo al secondo, in quanto a ogni derivazione otteniamo $\hat{\phi}(\xi)||\xi||^3$ che appartiene ancora $\mathcal{S}$. Esistono anche le derivate miste.

Dunque la funzione u è di classe C^∞.

2.4 Controllo delle condizioni di Cauchy

Verifichiamo ora che vale la condizione di Cauchy, ovvero se è possibile mandare t a 0.

$$\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>} e^{-t||\xi||^2} \hat{\phi}(\xi) dx$$

Poiché vogliamo utilizzare il *teorema della convergenza* per poter portare il limite sotto il segno di integrale, dobbiamo verficare che la funzione integranda sia sommabile.

Abbiamo che:

- $e^{i<x,\xi>} < 1$ perché $|e^{-i\theta}| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$;
- $e^{-t||\xi||^2}$ è limitato poiché stiamo considerando il limite con $t > 0$, dunque $e^{-t||\xi||^2} < k_1$;
- $\hat{\phi}(\xi) < k_2$ in quanto per ipotesi $\phi \in \mathcal{S} \Rightarrow \hat{\phi} \in \mathcal{S} \Rightarrow \hat{\phi} \in \mathcal{L}^1$.

Dunque:

$$|e^{i<x,\xi>} e^{-t||\xi||^2} \hat{\phi}(\xi)| < 1 \cdot k_1 \cdot k_2$$

Avendo maggiorato le quantità, è possibile utilizzare il teorema della convergenza dominata, onde è lecito eseguire le derivazioni sotto segno di integrale.

Procediamo dunque con la verifica della condizione di Cauchy:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>} e^{-t||\xi||^2} \hat{\phi}(\xi) dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>} \hat{\phi}(\xi) (\lim_{t\to 0^+} e^{-t||\xi||^2}) d\xi =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}} e^{i<x,\xi>} \hat{\phi}(\xi) d\xi =: \phi(x).$$

Abbiamo quindi verificato la condizione iniziale.

2.5 Ricerca della soluzione

Abbiamo finora verficato la validità della condizione di Cauchy. Ci rimane da verificare che la

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>} e^{-t||\xi||^2} \hat{\phi}(\xi) dx \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$$

sia effettivamente soluzione del problema e, nel caso, ricercare una scrittura esplicita.

Preso $t > 0$ abbiamo che:

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\phi) \cdot e^{-t||\xi||^2}) =$$

Osservazione 5. Notiamo che $e^{-t||\xi||^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, in quanto è di classe C^∞, essendo $||\xi||^2$ un polinomio, e inoltre va a 0 all'∞ più velocemente di tutti i polinomi.

Dunque abbiamo che:

$$= \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\phi) \cdot \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(e^{-t||\xi||^2}))).$$

Posto $h(\cdot,t) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t||\xi||^2})$, abbiamo:

$$\begin{aligned} &= \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\phi) * h(\cdot, t,)) \\ &= \phi * h(\cdot, t), \end{aligned}$$

dove l'operatore $*$ indica la convoluzione tra la funzione ϕ e la funzione $h(\cdot,t)$.

Rimane da esprimere esplicitamente la funzione $h(x,t)$. Consideriamo allora:

$$h(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>} e^{-t||\xi||^2} d\xi =$$

osserviamo che $e^{i<x,\xi>} e^{-t||\xi||^2} = e^{i<x,\xi> - t||\xi||^2}$, da cui:

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\sum_{j=1}^n (ix_j\xi_j - t\xi_j^2)} d\xi =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{n} e^{ix_j\xi_j - t\xi_j^2} d\xi = (*)$$

Osservazione 6. Per funzioni in $\mathcal{L}^1$ vale :

$$\iint a(x)b(y)dxdy =$$

che per il *teorema di Fubini* diventa:

$$= \int (\int a(x)b(y)d(y))dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} a(x)dx \int_{\mathbb{R}} b(y)d(y)$$

Osserviamo inoltre che $\prod_{j=1}^{n} e^{ix_j\xi_j - t\xi_j^2}$ è un prodotto di funzioni delle singole variabili.

Dunque :

$$(*) = \frac{1}{(2\pi)^n} \prod_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix_j\xi_j - t\xi_j^2} d\xi_j =$$

diventa:

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix_j\xi_j - t\xi_j^2} d\xi_j = (**).$$

L'integrale sopra è calcolato su $\mathbb{R}^n$. Per semplicità, lo calcoliamo prima nel caso unidimensionale e poi estenderemo la soluzione trovata a tutto $\mathbb{R}^n$.

Sia quindi η un numero reale tale che $\eta = \xi_j$.

Consideriamo l'integrale:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy\eta - t\eta^2} d\eta =$$

Ponendo $\lambda = \sqrt{t}\eta$ otteniamo:

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{y}{\sqrt{t}}\lambda - \lambda^2} d\lambda = (***).$$

Ricordiamo che in generale vale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ia\lambda-\lambda^2} d\lambda = Ae^{-\frac{a^2}{2}};$$

vogliamo ricavare la A.

Siccome l'uguaglianza sopra vale per tutte le A, in particolare vale anche se $a = 0$, quindi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{0-\lambda^2} d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = c,$$

dove c è una costante.

Possiamo quindi ora risolvere le due uguaglianze lasciate in sospeso.

Nel caso reale abbiamo quindi:

$$(***) = c\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{a^2}{2}}$$

Estendendo a tutto $\mathbb{R}^n$ otteniamo:

$$(**) = c^n \frac{1}{t^{n/2}} \prod_{j=1}^{n} e^{-\frac{x_j^2}{2}} = c^n \frac{1}{t^{n/2}} e^{-\frac{||x||^2}{4t}}.$$

Quindi, ricordando che avevamo trovato:

$$u(x,t) = \phi * h(x,t)$$

e ricordando inoltre la definizione di convoluzione, otteniamo infine che:

$$u(x,t) = c^n \frac{1}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) e^{-\frac{||x-y||^2}{4t}} dy \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$$

che è la soluzione dell'equazione del calore.

2.6 Considerazioni fisiche

Quello appena trovato è un integrale sempre positivo poiché prodotto di due funzioni non negative. Di conseguenza, per quanto si possa prendere x piccolo, non si avrà mai un integrale nullo.

Questo vìola il principio della fisica che afferma che tutto si trasmette a una veloce inferiore alla velocità della luce c. Consideriamo ad esempio la seguente situazione: supponiamo di accendere un fiammifero in un punto dello spazio, con temperatura assoluta pari a 0 ovunque. Se utilizzassimo l'espressione trovata per studiare il valore della temperatura, allora il conseguente riscaldamento dovuto al fiammifero risulterebbe immediato e inoltre l'effetto si sentirebbe ovunque e alla stessa maniera, ma questo, dal punto di vista fisico, è assurdo.

2.7 Moti browniani

Vediamo ora come sia possibile ricavare l'equazione del calore partendo dai moti browniani.

Consideriamo un reticolo rettagolare in due dimensioni, che comprende la zona $\{(m\Delta x, n\Delta t) \mid m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots ; n = 0, 1, 2, \dots\}$. Prendiamo una particella che parte alla posizione $x = 0$ e tempo $t = 0$, e che a ogni tempo $n\Delta t$ si muove verso sinistra di una quantità Δx con probabilità $\frac{1}{2}$, o verso destra di una quantità Δx con probabilità $\frac{1}{2}$. Denotiamo con $p(m, n)$ la probabilità che la particella sia nella posizione $m\Delta x$ al tempo $n\Delta t$. Allora:

$$p(m, 0) = \begin{cases} 0 & m \neq 0 \\ 1 & m = 0 \end{cases}$$

Inoltre

$$p(m, n+1) = \frac{1}{2}p(m-1, n) + \frac{1}{2}p(m+1, n),$$

che significa che la probabilità che la particella sia nella posizione m all'istante $n+1$ è data al $\frac{1}{2}$ della probabilità che sia nella posizione $m-1$ al tempo n, e al $\frac{1}{2}$ della probabilità che sia nella posizione $m+1$ al tempo n.

Dunque, facendo la differenza tra la probabilità al tempo $n+1$ e la probabilità al tempo n della particella alla posizione m, otteniamo :

$$p(m, n+1) - p(m, n) = \frac{1}{2}(p(m+1, n) - 2p(m, n) + p(m-1, n)).$$

Assumiamo ora:

$$\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = D,$$

per una qualche costante positiva D.

Questo implica

$$\frac{p(m,n+1) - p(m,n)}{\Delta t} = \frac{D}{2}\left(\frac{p(m+1,n) - 2p(m,n) + p(m-1,n)}{(\Delta x)^2}\right).$$

Mandiamo $\Delta t \to 0$, quindi anche $\Delta x \to 0$, e allora $m\Delta x \to x$, $n\Delta t \to t$, con $\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \equiv D$. Allora presumibilmente $p(m,n) \to f(x,t)$, che ora interpretiamo come la densità di probabilità che la particella sia nella posizione x al tempo t. Passando al limite l'equazione differenza sopra formalmente diventa:

$$f_t = \frac{D}{2} f_{xx}$$

e siamo così arrivati di nuovo all'equazione di diffusione.

Capitolo 3

Problema di Cauchy per l'equazione delle Onde

3.1 Definizione

La propagazione di onde in un mezzo (omogeneo e isotropo) è descritta dall'equazione:

$$\big(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\Delta\big)u=f(x,y,z,t).$$

L'operatore

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\Delta$$

è detto *d'Alembertiano* e l'equazione delle onde è storicamente nota come *equazione di d'Alembert*.

Naturalmente, si possono assegnare diverse condizioni al controrno a seconda che si tratti il problema in un dominio spaziale limitato o illimitato.

Il metodo della trasformata di Fourier è utile per la soluzione del problema al valore iniziale in un dominio illimtato, l'intero spazio (uni, bi o tri-dimensionale), sotto l'ipotesi di decrescenza abbastanza rapida all'infinito delle soluzioni.

Ovviamente, condizione necessaria perché ciò accada, è che tanto le condizioni iniziali, quanto il termine noto f godano di questa proprietà.

In questo capitolo discuteremo il caso in cui $c = 1$ e il termine noto $f(x, y, z, t)$ sia uguale a 0.

Osserviamo che il discriminante di $\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)=\Delta u(x,t)$ è positivo, perciò il modello è di tipo *iperbolico*. Inoltre tale equazione è lineare, in quanto dipende in modo lineare dalle derivate seconde, ed è omogenea essendo il secondo membro nullo.

La funzione $u = u(x, t)$ rappresenta uno spostamento. In particolare, supponiamo di avere una corda vibrante posta nel dominio $\Omega = (0, 1) \times \{t > 0\}$. Una volta perturbata, la corda si inarca e lo scostamento sul piano (x, y), nella direzione y, dalla posizione di riposo è dato dal numero $u(x, t)$. Si intende quindi che se fissiamo x, stiamo guardando cosa accande su di un segmento verticale e l'andamento è dettato da $u(x, t)$.

Procediamo ora con la risoluzione dell'equazione delle onde.
Consideriamo un vettore $x = (x_1, ...x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}_+$, sia $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Vogliamo determinare $u : \mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{R}}_+$ tale che:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = \Delta u(x,t) \quad per\ (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = 0 \quad per\ x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = \phi(x) \quad per\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Consideriamo inoltre la funzione $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ per il teorema visto; in questo modo abbiamo che ϕ è sommabile sempre.

Applicando formalmente la trasformata di Fourier come prima otteniamo:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{u}(\xi,t) + ||\xi||^2 \hat{u}(\xi,t) = 0 \\ \hat{u}(\xi,0) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\xi,0) = \hat{\phi}(x) \end{cases}$$

Questo sistema è un problema di Cauchy: abbiamo infatti un'equazione differenziale del secondo ordine omogenea e due condizioni al bordo.

3.2 Risoluzione del problema di Cauchy

L'equazione caratteristica del problema è $\lambda^2 + ||\xi||^2 = 0$, da cui $(\lambda - i||\xi||)(\lambda + i||\xi||) = 0$, dalla quale troviamo i due autovalori: $\lambda_1 = +i||\xi||$ e $\lambda_2 = -i||\xi||$.

Notiamo che λ_1 e λ_2 sono della forma $\alpha \pm i\beta$, con $\alpha = 0$ e $\beta = ||\xi||$ e che quindi i due autovalori sono del tipo $e^{+\alpha x}\cos(\beta x)$ e $e^{-\alpha x}\sin(\beta x)$.
Sostituendo i valori di α e β trovati precedentemente, otteniamo $e^{0\cdot x}\cos(||\xi||t)$ e $e^{0\cdot x}\sin(||\xi||t)$.
Perciò la soluzione generale è:

$$\hat{u_0}(\xi, t) = C_1\cos(||\xi||t) + C_2\sin(||\xi||t)$$

dove C_1 e C_2 costanti.
Applichiamo ora le condizioni al bordo:

1. condizione:

   $$\hat{u_0}(\xi, 0) = C_1\cos(||\xi||t) + C_2\sin(||\xi||t)|_{t=0} = C_1$$

   Sappiamo che $\hat{u_0}(\xi, 0) = 0$

   $$\Rightarrow C_1 = 0$$

2. condizione:

   $$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\hat{u_0}(\xi, 0) &= -C_1||\xi||(\sin||\xi||t) + C_2||\xi||\cos(||\xi||t)|_{t=0} = \\ &= 0 + C_2||\xi||\end{aligned}$$

   Sappiamo che $\frac{\partial}{\partial t}\hat{u_0}(\xi, 0) = \hat{\phi}(\xi) \Rightarrow C_2||\xi|| = \hat{\phi}(\xi)$

   $$\Rightarrow C_2 = \frac{\hat{\phi}(\xi)}{||\xi||}.$$

Abbiamo quindi trovato i valori delle due costanti C_1 e C_2. Sostituiamo i valori trovati nella soluzione generale:

$$\hat{u}(\xi, t) = \frac{\hat{\phi}(\xi)}{||\xi||}\sin(||\xi||t)$$

Da cui:

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{\phi}(\xi)\frac{\sin(||\xi||t)}{||\xi||}$$

che è la soluzione del nostro sistema.

La soluzione appena trovata è una $\hat{u}$. Sappiamo che, poiché $\phi \in \mathcal{S}$, allora anche $\hat{\phi} \in \mathcal{S}$. Inoltre, $\frac{\sin(||\xi||t)}{||\xi||}$ è una funzione limitata, quindi appartiene a $\mathcal{L}^1$. Dunque anche il prodotto $\hat{\phi}(\xi)\frac{\sin(||\xi||t)}{||\xi||} \in \mathcal{L}^1$ e possiamo perciútilizzare il teorema di inversione, trovando la u :

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{+i<x,\xi>}\frac{\sin(||\xi||t)}{||\xi||}\hat{\phi}(\xi)d\xi, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+.$$

3.3 Controllo delle condizioni di Cauchy

Verifichiamo ora le due condizioni di Cauchy.

1. condizione:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+} u(x,t) &= \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{+i<x,\xi>}\frac{\sin(||\xi||t)}{||\xi||}\ \hat{\phi}(\xi)d\xi \\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{t}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{+i<x,\xi>}\frac{\sin(||\xi||t)}{||\xi||t}\ \hat{\phi}(\xi)d\xi = (*)\end{aligned}$$

Vogliamo applicare ora il *teorema della convergenza dominata* al fine di poter passare al limite sotto il segno di integrale; dobbiamo allora verificare che la funzione integranda sia sommabile.

- $|e^{+i<x,\xi>}| = 1$
- $\frac{\sin(||\xi||t)}{||\xi||t} \to 1$ per $||\xi||t \to 0^+$

  $\Rightarrow |e^{+i<x,\xi>}\ \frac{\sin(||\xi||t)}{||\xi||t}| \leq 1$
- $\hat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ per ipotesi, dunque sempre sommabile

Abbiamo mostrato che è possibile applicare il teorema della convergenza dominata. Procediamo allora con la verifica della condizione.

$$(*) = \frac{t}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{+i<x,\xi>}\lim_{t\to 0^+}(\frac{\sin(||\xi||t)}{||\xi||t})\ \hat{\phi}(\xi)d\xi = 0$$

2. condizione:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+}\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) &= \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{+i<x,\xi>}\frac{\cos(||\xi||t)}{||\xi||}\,||\xi||\hat{\phi}(\xi)d\xi\\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{+i<x,\xi>}\cos(||\xi||t)\hat{\phi}(\xi)d\xi = (**)\end{aligned}$$

Anche in questo caso vogliamo utilizzare il *teorema della convergenza dominata*; verifichiamo allora che la funzione integranda sia sommabile.

- $|e^{+i<x,\xi>}| = 1$
- $|\cos(||\xi||t)| \leq 1$
- $\hat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ per ipotesi, dunque sempre sommabile

Abbiamo mostrato che è possibile applicare il teorema della convergenza dominata. Procediamo allora con la verifica della condizione.

$$\begin{aligned}(**) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{+i<x,\xi>}\lim_{t\to 0^+}(\cos(||\xi||t))\hat{\phi}(\xi)d\xi =\\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{+i<x,\xi>}\hat{\phi}(\xi)d\xi =: \phi(\xi)\end{aligned}$$

in quanto $cos(t) \to 1$ per $t \to 0^+$.

Abbiamo perciò verificato che le due condizioni di Cauchy soddisfano al sistema.

3.4 Soluzione nel caso n=3

È opportuno presentare la u in un'altra forma. Ci limitiamo al caso in cui $n = 3$, in quanto in natura le onde si propagano in tre dimensioni.

Facciamo qualche considerazione. Osserviamo che possiamo scrivere la nostra $\hat{u}(x,t)$ come:

$$\hat{u}(x,t) = \lim_{L\to+\infty} \int_{||\xi||<L} e^{i<x,\xi>} \frac{\sin(||\xi||t)}{||\xi||} \hat{\phi}(\xi) d\xi.$$

Infatti, presa una qualunque funzione $f \in \mathcal{L}^1$ abbiamo che

$$\int f d\xi = \lim_{L\to+\infty} \int_{||\xi||<L} f d\xi = \int_{||\xi||<L} f \chi_{B(0,L)} d\xi$$

che converge quasi dappertutto a f.
Ricordiamo che $\chi_{B(0,L)}$ è la *funzione caratteristica* calcolata sulla palla di centro 0 e raggio L, il cui valore è 1 $\forall x \in B(0,L)$, 0 altrimenti.

In particolare $|f\chi| \leq |f|$ e poiché $f \in \mathcal{L}^1$, allora anche $|f| \in \mathcal{L}^1$, dunque $|f\chi|$ è una funzione sommabile, perciò ha senso considerare l'integrale $\int_{||\xi||<L} f\chi_{B(0,L)} d\xi$.

Allora abbiamo:

$$\int_{||\xi||<L} e^{i<x,\xi>} \frac{\sin(||\xi||t)}{||\xi||} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<\xi,y>} \phi(y) dy.$$

Se consideriamo la funzione che associa alla coppia

$$(\xi, y) \longrightarrow e^{i<x,\xi>} \frac{\sin(||\xi||t)}{||\xi||} \phi(y) e^{-i<\xi,y>} \chi_{B(0,L)}(\xi),$$

allora questa risulta appartenere a $\mathcal{L}^1$. Osserviamo che se non avessimo considerato anche la funzione caratteristica, avremmo ottenuto una scrittura non vera.

Poiché la funzione è sommabile per quanto detto prima, possiamo applicare il teorema di Fubini. Otteniamo:

$$u(x,t) = \frac{1}{8\pi^3} \lim_{L\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \phi(y) \ (\int_{||\xi||<L} e^{-i<y-x,\xi>} \frac{\sin(||\xi||t)}{||\xi||} \ d\xi) \ dy.$$

Sia ora T una matrice $3x3$ ortogonale tale che $T^{-1}(y-x) = (||y-x||, 0, 0)$; poiché l'integrale è invariante rispetto al gruppo ortogonale, posto $\xi = T\sigma$, si ha:

$$\int_{||\xi||<L} e^{i<y-x,\xi>} \frac{\sin(||\xi||t)}{||\xi||}\, d\xi = \int_{||\sigma||<L} e^{i\sigma_1||y-x||} \frac{\sin(||\sigma||t)}{||\sigma||}\, d\sigma$$

Infatti:

- poiché $||\xi|| = ||T\sigma|| = ||\sigma||$, allora segue che $\xi = \sigma$ e quindi $d\xi = d\sigma$.
- inoltre, $< y-x, \xi >=< y-x, T\sigma >=< T^{-1}(y-x), \sigma >$; ricordando che $T^{-1}(y-x) = (||y-x||, 0, 0)$ e che $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, allora il prodotto scalare diventa $< T^{-1}(y-x), \sigma >= ||y-x||\sigma_1$.
  Dunque $< y-x, \xi >= ||y-x||\sigma_1$.

Applichiamo ora all'ingrale un cambio di variabili in coordinate sferiche. In particolare a $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ imponiamo:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \rho\cos\theta\\ \sigma_2 &= \rho\sin\theta\cos\omega\\ \sigma_3 &= \rho\sin\theta\sin\omega\end{aligned}$$

per $(\rho, \theta, \omega) \in [0, L] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$.

Effettuando questo cambio, risulta uno jacobiano pari a $\rho^2 \sin\theta$.

Dimostrazione. Calcoliamo il determinante della matrice jacobiana. Abbiamo che:

$$\frac{\partial(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)}{\partial(\rho,\theta,\omega)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\omega & \rho\cos\theta\cos\omega & -\rho\sin\theta\sin\omega \\ \sin\theta\sin\omega & \rho\cos\theta\sin\omega & \rho\sin\theta\cos\omega \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\theta(\rho^2\cos\theta\cos\omega\sin\theta\cos\omega + \rho^2\sin\theta\sin\omega\cos\theta\sin\omega) +$$

$$+\rho\sin\theta(\rho\sin\theta\cos\omega\sin\theta\cos\omega + \rho\sin\theta\sin\omega\sin\theta\sin\omega) =$$

$$= \cos\theta(\rho^2\cos\theta\sin\theta\cos^2\omega + \rho^2\cos\theta\sin\theta\sin^2\omega) +$$

$$+\rho\sin\theta(\rho\sin^2\theta\cos^2\omega + \rho\sin^2\theta\sin^2\omega) =$$

$$= \cos\theta(\rho^2\cos\theta\sin\theta[\cos^2\omega + \sin^2\omega]) + \rho\sin\theta(\rho\sin^2\theta[\cos^2\omega + \sin^2\omega]) =$$

Ricordando che $\forall\alpha$ vale la prima relazione fondamentale della goniometria $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, allora:

$$= \cos\theta(\rho^2\cos\theta\sin\theta)+\rho^2\sin^3\theta$$

$$= \rho^2\cos^2\theta\sin\theta+\rho^2\sin^3\theta$$

$$= \rho^2\sin\theta(\cos^2+\sin^2\theta)=\rho^2\sin\theta.$$

□

Per $x\neq y$ abbiamo:

$$\int_{||\sigma||<L} e^{i\sigma_1||y-x||}\frac{\sin(||\sigma||t)}{||\sigma||}\,d\sigma=\int_0^{2\pi}\int_0^L\int_0^\pi e^{i\rho||y-x||\cos\theta}\frac{\sin(\rho t)}{\rho}\rho^2\sin\theta\,d\rho d\theta d\omega$$

$$= 2\pi\int_0^L\int_0^\pi e^{i\rho||y-x||\cos\theta}\frac{\sin(\rho t)}{\rho}\rho^2\sin\theta\ d\rho d\theta$$

$$= 2\pi\int_0^L\rho\sin(\rho t)\ (\int_0^\pi e^{i\rho||y-x||\cos\theta}\sin(\theta)d\theta)\ d\rho$$

Ponendo $\tau=\cos\theta$, e quindi $d\tau=\sin\theta$, otteniamo:

$$= 2\pi\int_0^L\rho\sin(\rho t)\ (\int_{-1}^1 e^{i\rho||y-x||\tau}d\tau)\ d\rho=(*)$$

Calcoliamo quindi il secondo integrale:

$$\int_{-1}^1 e^{i\rho||y-x||\tau}d\tau=\frac{e^{1\cdot i\rho||y-x||}-e^{-1\cdot i\rho||y-x||}}{i\rho||y-x||}$$

Allora:

$$(*)=2\pi\int_0^L\rho\sin(\rho t)\ (\frac{e^{1\cdot i\rho||y-x||}-e^{-1\cdot i\rho||y-x||}}{i\rho||y-x||}\ \ d\rho$$

Ricordando che

$$2\frac{\sin(a\omega)}{\omega}=\frac{e^{ia\omega}-e^{-ia\omega}}{i\omega},$$

allora:

$$= 4\pi \int_0^L \sin(\rho t)\ (\frac{\sin(\rho||y-x||)}{i||y-x||}\ \ d\rho =$$

$$= \frac{4\pi}{||x-y||} \int_0^L \sin(\rho t)\ \ \sin(\rho||x-y||)\ \ d\rho$$

e quindi:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi^2} \lim_{L\to\infty} \int_0^L \sin(\rho t)\ (\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\sin(\rho||y-x||)}{||x-y||}\phi(y)dy)\ d\rho.$$

Chiamiamo ora $y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ e

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \xi_1 + r\cos\theta \\ \eta_2 &= \xi_2 + r\sin\theta\cos\omega \\ \eta_3 &= \xi_3 + r\sin\theta\sin\omega \end{aligned}$$

per $(r, \theta, \omega) \in [0, +\infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$.
Effettuando questo cambio di variabili, otteniamo uno jacobiano pari a $r^2 \sin\theta$.

Dimostrazione. Analogamente a prima, calcoliamo il determinante della matrice jacobiana. Osserviamo che ξ_1, ξ_2, ξ_3 non danno alcun contributo al calcolo del determinante essendo delle costanti. Abbiamo che:

$$\frac{\partial(\eta_1,\eta_2,\eta_3)}{\partial(r,\theta,\omega)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\omega & r\cos\theta\cos\omega & -r\sin\theta\sin\omega \\ \sin\theta\sin\omega & r\cos\theta\sin\omega & r\sin\theta\cos\omega \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\theta(r^2\cos\theta\cos\omega\sin\theta\cos\omega + r^2\sin\theta\sin\omega\cos\theta\sin\omega) +$$

$$+ r\sin\theta(r\sin\theta\cos\omega\sin\theta\cos\omega + r\sin\theta\sin\omega\sin\theta\sin\omega) =$$

$$= \cos\theta(r\cos\theta\sin\theta\cos^2\omega + r\cos\theta\sin\theta\sin^2\omega) +$$

$$+ r\sin\theta(r\sin^2\theta\cos^2\omega + r\sin^2\theta\sin^2\omega) =$$

$$= \cos\theta(r\cos\theta\sin\theta[\cos^2\omega + \sin^2\omega]) + r\sin\theta(r\sin^2\theta[\cos^2\omega + \sin^2\omega]) =$$

Ricordando che $\forall\alpha$ vale $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, allora:

$$=\cos\theta(r^2\cos\theta\sin\theta)+r^2\sin^3\theta$$

$$=r^2\cos^2\theta\sin\theta+r^2\sin^3\theta$$

$$=r^2\sin\theta(\cos^2+\sin^2\theta)=r^2\sin\theta.$$

$\square$

Otteniamo quindi:

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi^2}\lim_{L\to\infty}\int_0^L\sin(\rho t)\ (\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\rho r)}{r}$$

$$(\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}r^2\sin\theta\phi(\xi_1+r\cos\theta,\xi_2+r\sin\theta\cos\omega,\xi_3+r\sin\theta\sin\omega)d\theta d\omega)\ dr)\ d\rho.$$

Se chiamiamo:

$$f(r)=r\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta\ \phi(\xi_1+r\cos\theta,\xi_2+r\sin\theta\cos\omega,\xi_3+r\sin\theta\sin\omega)d\theta d\omega$$

abbiamo che

$$u(x,t)=\lim_{L\to+\infty}\int_0^L\sin(\rho t)\ \int_0^{+\infty}\sin(\rho r)f(r)drd\rho$$

Consideriamo ora la funzione:

$$f_1(r)=\begin{cases}f(r) & se\ r>0\\ -f(-r) & se\ r<0\end{cases}$$

Osserviamo che $f_1\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Infatti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f_1(r)|dr=2\int_0^{+\infty}|f(r)|dr<\infty.$$

Facciamo la trasformata di Fourier della funzione f_1:

$$\hat{f}_1(r)=\int_{\mathbb{R}}e^{-i<r,\rho>}f_1(r)dr=\int_{\mathbb{R}}(\cos(r\rho)-i\sin(r\rho))\ f_1(r)dr=$$

La funzione *coseno* è una funzione pari, mentre la funzione f_1 è dispari, quindi il loro prodotto è una funzione dispari. Sappiamo che l'integrale di una funzione dispari è nullo, dunque risulta:

$$= \int_{\mathbb{R}} -i\sin(r\rho)\ f_1(r)dr =$$

Poiché la funzione *seno* è una funzione dispari, allora il prodotto $\sin(r\rho)\ f_1(r)$ risulta essere una funzione pari. Sappiamo che l'integrale da $-\infty$ a $+\infty$ di una funzione pari è il doppio dell'integrale da 0 a $+\infty$ della stessa funzione, allora:

$$= -2i \int_0^{+\infty} \sin(r\rho) f(r)dr.$$

Osserviamo che questa è una funzione dispari in quanto la funzione $f(r)$ è dispari.

Consideriamo ora la funzione che associa:

$$\rho \longrightarrow \int_0^{+\infty} \sin(r\rho) f(r)dr.$$

Possiamo allora applicare il teorema di inversione. Considerato $s > 0$, abbiamo:

$$f(s) = -2i\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\rho\ e^{is\rho} \int_0^{+\infty} \sin(r\rho) f(r)dr$$

Osserviamo che $e^{is\rho} = cos(s\rho) + i\sin(s\rho)$, dunque:

$$\begin{aligned}
&= -2i\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\rho\ (cos(s\rho) + i\sin(s\rho)) \int_0^{+\infty} \sin(r\rho) f(r)dr \\
&= -2i\frac{2i}{2\pi} \int_0^{+\infty} d\rho\ \sin(s\rho) \int_0^{+\infty} \sin(r\rho) f(r)dr \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} d\rho\ \sin(s\rho) \int_0^{+\infty} \sin(r\rho) f(r)dr
\end{aligned}$$

Utilizzando questo risultato abbiamo quindi:

$$u(x,t) = \frac{t}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\phi(\xi_1+r\cos\theta, \xi_2+r\sin\theta\cos\omega, \xi_3+r\sin\theta\sin\omega)\sin\theta d\theta d\omega$$

che è la soluzione dell'equazione delle onde ed è chiamata anche *formula di Poisson-Kirchhoff*.

È importante osservare che dalla formula ora scritta risulta che se ϕ è di classe $\mathcal{C}^2$ allora u è soluzione del problema; il valore di u nel punto (x,t) è determinato esclusivamente dai valori di ϕ sulla superficie della sfera di centro x e raggio t e quindi l'ipotesi iniziale di sommabilità su $\mathbb{R}^n$ è superflua.

Bibliografia

[1] B. Pini, *Terzo Corso di Analisi Matematica, Cap. 1*, CLUEB Bologna (1977)

[2] W. Rudin, *Analisi Reale e Complessa*, Borlinghieri Torino (1970)

[3] L. C. Evans, *An Introduction to Stochastic Differential Equations, Version 1.2*, University of California, Berkeley, CA (2013)

Ringraziamenti

Un sincero ringraziamento va a tutti colore che, in momenti diversi e in vari modi, mi hanno prestato il loro aiuto e la loro assistenza nella realizzazione di questo lavoro.

In primo luogo ringrazio il professor Bruno Franchi, relatore di questa tesi, e la professoressa Franca Franchi, co-relatore: senza il loro prezioso aiuto e supporto questo lavoro non esisterebbe.

Ringrazio i miei genitori per avermi permesso di raggiungere questo traguardo, e mia sorella, a cui voglio un sacco di bene. Un enorme Grazie va alle mie due nonne per avermi sempre sostenuta, soprattutto se avessi mangiato un po' di più.

Un ringraziamento particolare va alle mie amiche Flavia, Silvia e Francesca per avermi sopportata in questi ultimi pazzi mesi e che mi hanno sempre incoraggiata a tener duro fino alla fine. Ringrazio anche gli amici lontani che purtroppo non sempre è possibile incontrare, ma il cui sostegno si sente ugualmente: grazie Marianna. Vorrei infine ringraziare il mio fidanzato, a cui questo lavoro è dedicato.