

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA di SCIENZE
Corso di Laurea Triennale in Matematica

GRAVITÀ TELEPARALLELA

Tesi di Laurea in Fisica Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
ROBERTO CASADIO

Presentata da:
LORENZO CASADEI

Correlatore:
Chiar.mo Prof.
MAXIMILIANO SIOLI

III Sessione
Anno Accademico 2012-2013

*Poiché, nonostante la vita solitaria che gli era toccato condurre,
il gabbiano Jonathan era nato per fare l'insegnante.
E, per lui, mettere in pratica l'amore voleva dire
rendere partecipe della verità da lui appresa, conquistata,
qualche altro gabbiano che a quella stessa verità anelasse.
(Il gabbiano Jonathan Livingston, Richard Bach)*

Introduzione

Poco dopo che venne data alla Relatività Generale la sua presentazione finale come una nuova teoria per il campo gravitazionale, H. Weyl fece un tentativo di unificare gravitazione ed elettromagnetismo. Non riuscì nel suo obiettivo, ma introdusse per la prima volta il concetto di *trasformazioni di gauge* e *invarianza di gauge*, e possono essere considerate come le basi di quella che oggi è conosciuta come teoria di gauge. Un'altro salto nella stessa direzione venne fatto da Einstein, circa dieci anni più tardi; era basato sulla struttura matematica del teleparallelismo, chiamato anche parallelismo distante o assoluto. L'idea era di introdurre un campo di tetrade, un campo di basi ortonormali sugli spazi tangenti in ogni punto dello spazio-tempo a quattro dimensioni. La tetrade ha sedici componenti, mentre il campo gravitazionale, rappresentato dalla metrica spazio-tempo, ne ha solo dieci. Einstein suppose che i sei gradi di libertà aggiuntivi della tetrade fossero collegate alle sei componenti del campo elettromagnetico. Neanche questo tentativo funzionò, perchè i sei gradi di libertà aggiuntivi della tetrade sono in effetti eliminati dai sei parametri locali della teoria di invarianza di Lorentz.

Negli anni sessanta, Moller studiò l'idea originale di Einstein, non più con una teoria unificata come scopo, ma ricercando una teoria di gauge per la gravitazione. Seguendo il suo lavoro, Pellegrini e Plebanski trovarono una formulazione lagrangiana della gravità teleparallela, un problema che Moller riconsiderò in seguito. Nel 1967, Hayashi e Nakano formularono una teoria di gauge per gruppi di traslazione. Qualche anno dopo, Hayashi trovò una connessione tra questa teoria e il teleparallelismo, e un tentativo di unificare questi due sviluppi fu fatto da Hayashi e Shirafuji nel 1979. In seguito a questo approccio la Relatività Generale, una teoria che coinvolge solo la curvatura, venne affiancata dalla Gravità Teleparallela, una teoria che coinvolge solo la torsione.

Nonostante sia equivalente alla relatività generale, la gravità teleparallela è, concettualmente parlando, una teoria completamente diversa. Per esempio,

il campo gravitazionale in questa teoria è rappresentato dalla torsione, non dalla curvatura. Inoltre, nella relatività generale la curvatura è usata per *geometrizzare* l'interazione gravitazionale: la geometria sostituisce il concetto di forza gravitazionale, e le traiettorie sono determinate dalle geodetiche, traiettorie che seguono la curvatura dello spaziotempo. Nella gravità teleparallela, d'altra parte, la gravitazione è causata dalla torsione, che agisce come una *forza*. Nella gravità teleparallela, perciò, le traiettorie non sono descritte dalle geodetiche, ma da equazioni di forza.

La ragione per cui la gravità presenta due diverse descrizioni è legata alla sua proprietà più particolare: *l'universalità*. Come le altre interazioni fondamentali in natura, la gravitazione può essere descritta in termini di una teoria di gauge. La gravità teleparallela è proprio questo, una teoria di gauge per gruppi di traslazione. L'universalità della caduta libera, d'altra parte, ci permette una seconda, generica descrizione, basata sul principio di equivalenza, precisamente la relatività generale. Essendo l'unica interazione universale, è la sola che ci permette una interpretazione geometrica; ciò implica due descrizioni alternative. Da questo punto di vista, la curvatura e la torsione sono semplicemente modi diversi di rappresentare lo stesso campo gravitazionale, tenendo conto dello stesso grado di libertà della gravità.

Indice

Introduzione	5
1 ELEMENTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE	9
1.1 Tensore Metrico	9
1.1.1 Forma canonica e basi ortonormali	10
1.1.2 Abbassare e alzare gli indici	10
1.1.3 Campo metrico tensoriale	11
1.1.4 Metrica localmente piatta	11
1.2 Derivate Covarianti	12
1.2.1 Parallelismo e Derivata Covariante	12
1.2.2 Connessione affine	14
1.2.3 Tensori di ordine superiore	15
1.2.4 Connessione simmetrica	15
1.3 Geodetiche	16
1.4 Curvatura e Tensore di Riemann	17
1.4.1 Connessioni metriche	19
2 RELATIVITA' GENERALE	21
2.1 Fondamenti della Relatività Ristretta	21
2.1.1 Le trasformazioni di Lorentz	21
2.1.2 Momento e Massa Relativistiche	22
2.2 Osservatori arbitrari e Gravità	24
2.3 Equazioni Gravitazionali	26
2.3.1 Gravità e Particelle Test	26
2.3.2 Fonte di Gravità e Equazioni di Einstein	28
3 GRAVITÀ TELEPARALLELA	33
3.1 Concetti Base	33
3.1.1 Sistemi Banali	34
3.1.2 Sistemi non banali	35

3.1.3	Connessione di Lorentz	37
3.1.4	Comportamento sotto le trasformazioni di Lorentz . .	38
3.2	Curvatura e Torsione	39
3.3	Connessioni di Lorentz Inerziali	40
3.4	Gravità Teleparallela	41
3.4.1	Potenziali di Traslazione di Gauge	41
3.4.2	Connessione Spinoriale Teleparallela	42
3.4.3	Equazioni di Campo	43
	Conclusione	47
	Bibliografia	49

Capitolo 1

ELEMENTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE

1.1 Tensore Metrico

Un tensore metrico è un tensore del tipo (0,2) che associa a due vettori un numero reale con le seguenti proprietà:

1. è simmetrico

$$g(\vec{v}, \vec{w}) = g(\vec{w}, \vec{v}) = g_{ij}v^i w^j = \vec{v} \cdot \vec{w} \quad (1.1)$$

dove $g_{ij} = g(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$

2. è non degenere

$$[g(\vec{v}, \vec{w}) = 0, \quad \forall \vec{w} \in T_P \Leftrightarrow \vec{v} = 0] \Leftrightarrow \det(g_{ij}) \neq 0 \quad (1.2)$$

Esempi di tensori metrici sono la metrica Euclidea $g_{ij} = \delta_{ij}$ e la metrica di Minkowski. Ogni tensore metrico definisce automaticamente un prodotto scalare, con le sue relative proprietà. In particolare, il modulo al quadrato di un vettore è dato da

$$v^2 = g(\vec{v}, \vec{v}) = g_{ij}v^i v^j \quad (1.3)$$

e l'angolo θ tra due vettori da

$$g(\vec{v}, \vec{w}) = v w \cos \theta \quad (1.4)$$

sebbene quest'ultimo sarà definito correttamente solo per le metriche Euclidee.

1.1.1 Forma canonica e basi ortonormali

Le componenti di una metrica g al punto P , con cambio di basi nello spazio tangente T_P , cambieranno a seconda della matrice Λ in modo tale che

$$g' = \Lambda^T g \Lambda \quad (1.5)$$

Poichè in determinate coordinate g_{ij} è una matrice simmetrica, si può sempre scrivere in forma diagonale. Più precisamente, possiamo sempre scrivere Λ come prodotto di una matrice ortogonale $O^{-1} = O^T$ e una matrice simmetrica $D = D^T$, in modo che

$$g' = D^T O^T g O D = D^T g(\text{diag}) D = D g(\text{diag}) D \quad (1.6)$$

Con una scelta adatta di D possiamo finalmente porre $|g'_{ij}| = 1$, così si ottiene la *forma canonica*

$$g'_{ij} = \pm \delta_{ij} \quad (1.7)$$

La forma canonica della metrica definisce implicitamente la base ortonormale \vec{e}_i per vettori al punto P .

Ciò che non si può cambiare arbitrariamente è il segno di ogni elemento diagonale, la cui somma è chiamata la *segnatura* della metrica. Se tutti i segni sono positivi (rispettivamente negativi), la metrica è definita positiva (rispettivamente negativa) e chiamata genericamente *Riemanniana*. La metrica Euclidea è un caso speciale della metrica Riemanniana che può essere messa in forma canonica *contemporaneamente* in tutti i punti della varietà. Se appaiono elementi di entrambi i segni, la metrica è detta *pseudo-Riemanniana*. In particolare, se un elemento è negativo (rispettivamente positivo) e tutti gli altri sono positivi (rispettivamente negativi), allora si dice che ha *segnatura Lorentziana* (come la metrica di Minkowski).

1.1.2 Abbassare e alzare gli indici

I tensori metrici ci permettono di definire una mappa tra lo spazio tangente T_P e il suo duale T_P^* . Dato un vettore \vec{v} , possiamo infatti definire il tensore (0,1)

$$\vec{v} = g(\vec{v}, \cdot) \in T_P^* \quad (1.8)$$

le cui componenti sono date da

$$v_i = \tilde{v}(\vec{e}_i) = g(v^j \vec{e}_j, \vec{e}_i) = v^j g(\vec{e}_j, \vec{e}_i) = v^j g_{ji} = g_{ij} v^j \quad (1.9)$$

In termini pratici, la metrica è usata per abbassare gli indici

$$v_i = g_{ij} v^j \quad (1.10)$$

Dato che g_{ij} è invertibile, denotiamo la sua inversa con

$$g_{ij}^{-1} = g^{ij} \quad \Rightarrow \quad g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k \quad (1.11)$$

dove

$$g^{-1}(\tilde{e}^i, \tilde{e}^j) = g^{ij} \quad (1.12)$$

Eventualmente, questo ci permette di associare una 1-forma a un vettore

$$v^i = g^{ik} v_k \quad (1.13)$$

Inoltre, se la metrica è in forma canonica, la co-base $\{\tilde{e}^j\}$ sarà anche ortonormale. Possiamo quindi concludere dicendo che a un punto P di una varietà dove è dato un tensore metrico, i vettori e le 1-forme sono oggetti equivalenti. Per esempio, se la metrica è Euclidea, abbiamo $g_{ij} = \delta_{ij}$ e $v^i = v_i$

1.1.3 Campo metrico tensoriale

Un campo metrico tensoriale è un'applicazione che associa ad ogni punto di una varietà \mathcal{M} un tensore metrico $g = g(P)$. Una varietà in cui è definito ovunque un campo metrico (tensoriale) è chiamato *varietà metrica*.

1.1.4 Metrica localmente piatta

Assumendo la regolarità del campo metrico tensoriale, le componenti di g in un sistema dato possono essere sviluppate intorno ad un punto P in serie di Taylor

$$g_{ij}(x) = g_{ij}(x_P) + \left. \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right|_{x=x_P} \delta x^k + \left. \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} \right|_{x=x_P} \delta x^k \delta x^l + \dots \quad (1.14)$$

dove $x = x_P + \delta x$. Possiamo allora trasformare $g'_{ij} = \Lambda^T g_{ij} \Lambda$, in modo che la metrica abbia forma canonica in P , $g'_{ij}(x_P) = \delta_{ij}$. Inoltre, sviluppando la stessa trasformazione Λ in un intorno di P , cioè $\Lambda = \Lambda(x)$, si ottiene

$$\left. \frac{\partial g'_{ij}}{\partial x^k} \right|_{x=x_P} = 0 \quad (1.15)$$

La conclusione perciò è che è sempre possibile, con un cambio di coordinate, scrivere un campo tensoriale metrico nella forma

$$g'_{ij}(x) = \delta_{ij} + \frac{\partial^2 g'_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} \delta x^k \delta x^l + \dots \quad (1.16)$$

intorno ad un dato punto P di coordinate $x(P)$. Equivalentemente, è sempre possibile scegliere localmente coordinate ortogonali in ogni dato punto P . In generale, comunque, allo stesso modo in cui ci si muove da un punto P , le medesime coordinate non sono ortogonali, a meno che la varietà sia \mathbb{R}^n o un suo sottinsieme: non esistono cambi di coordinate che possono mettere un tensore metrico generale in forma canonica su tutta la varietà.

1.2 Derivate Covarianti

Su una varietà senza la nozione di angoli (cioè, senza una metrica), la sola definizione di parallelismo può essere data in un punto P : due vettori di T_P sono paralleli se sono linearmente dipendenti. Ma allora è necessario un modo per confrontare vettori che appartengono allo spazio tangente in punti diversi. Si è infatti abbastanza liberi di definire questo concetto a prescindere della metrica. In particolare, si può definire come spostare un vettore “parallelamente” lungo un dato percorso.

Consideriamo l'esempio di una sfera S inscritta in \mathbb{R}^3 . Essendo uno spazio Euclideo, c'è una “naturale” nozione di spostamento parallelo: un vettore è parallelamente spostato se i suoi angoli con vettori in coordinate cartesiane rimangono costanti. Di conseguenza, un vettore spostato lungo un percorso chiuso ritorna in sé. Da questa notazione di parallelismo in \mathbb{R}^3 , possiamo indurre un trasporto parallelo su vettori di S . Comunque, spostando vettori lungo circuiti, ora troviamo che, in generale non ritornano in se stessi.

1.2.1 Parallelismo e Derivata Covariante

Assumiamo di aver dato un ruolo allo spostamento parallelo di un vettore \vec{W} lungo una curva tangente ad un campo vettoriale \vec{V} su una varietà \mathcal{M} . Questa operazione associa a $\vec{W} \in T_{P(\lambda)}$ un secondo vettore $\vec{W}''_{\Delta\lambda} \in T_{P(\lambda_0)}$, dove $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$ identifica un punto sulla curva. Possiamo allora definire la derivata covariante del campo vettoriale \vec{W} rispetto a \vec{V} nel punto $P(\lambda_0)$ come il vettore dato da

$$\nabla_{\vec{V}} \vec{W} \Big|_{\lambda_0} = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\vec{W}_{-\Delta\lambda}(\lambda_0) - \vec{W}(\lambda_0)}{\Delta\lambda} \quad (1.17)$$

il cui risultato è, per definizione, un vettore che si annulla se il vettore spostato parallelamente coincide con il vettore originale in P . Notare che stiamo spostando indietro il vettore \vec{W} al punto $P(\lambda_0)$ da $P(\lambda_0 + \Delta\lambda)$.

Dato che le funzioni non identificano una direzione, è naturale definire la

derivata covariante di uno scalare, e perciò succede che

$$\nabla_{\vec{V}} f = \frac{df}{d\lambda} \quad (1.18)$$

Per vettori e tensori generici, senza specificare l'attuale ruolo di spostamento, possiamo ancora volere che la derivata covariante soddisfi alcune proprietà formali. Prima di tutto, vogliamo che valgano le seguenti proprietà, le “regole di Leibnitz”:

$$\nabla_{\vec{V}}(f \vec{W}) = f \nabla_{\vec{V}} \vec{W} + \vec{W} \frac{df}{d\lambda} \quad (1.19)$$

$$\nabla_{\vec{V}}(\vec{A} \otimes \vec{B}) = \vec{A} \otimes (\nabla_{\vec{V}} \vec{B}) + (\nabla_{\vec{V}} \vec{A}) \otimes \vec{B} \quad (1.20)$$

$$\nabla_{\vec{V}} [\tilde{\omega}(\vec{A})] = (\nabla_{\vec{V}} \tilde{\omega}) \vec{A} + \tilde{\omega} (\nabla_{\vec{V}} \vec{A}) \quad (1.21)$$

Vogliamo anche che un cambio di parametrizzazione della curva $\gamma \rightarrow \gamma'$, cioè che $\lambda \rightarrow \mu = \mu(\lambda)$, non influenzi la derivata. Siano $\vec{V} = \frac{d}{d\lambda}$ e $\vec{V}' = \frac{d}{d\mu}$ i vettori tangenti rispettivamente a γ e γ'

$$\frac{d}{d\mu} = h \frac{d}{d\lambda} = \frac{d\mu}{d\lambda} \frac{d}{d\mu} \quad (1.22)$$

Imponiamo ora che

$$\nabla_{h \vec{V}} \vec{W} = h \nabla_{\vec{V}} \vec{W} \quad (1.23)$$

per tutte le funzioni “smooth” h (ovvero differenziabili infinite volte nel punto). Infine, vogliamo che, in un dato punto P ,

$$\left(\nabla_{\vec{V}} \vec{A} \right)_P + \left(\nabla_{\vec{W}} \vec{A} \right)_P = \left(\nabla_{\vec{V} + \vec{W}} \vec{A} \right)_P \quad (1.24)$$

cosicchè

$$\nabla_{f\vec{V} + g\vec{W}} = f \nabla_{\vec{V}} + g \nabla_{\vec{W}} \quad (1.25)$$

È consuetudine chiamare “derivata covariante del vettore \vec{W} ” l'operatore formale associato alla derivata sopra che agisce su un dato \vec{W} , ma senza una curva specifica (e perciò per tutti i vettori \vec{V}). Questo oggetto in un punto P può essere visto come un tipo di (1,1) tensore,

$$\nabla \vec{W} : \vec{V} \rightarrow \nabla_{\vec{V}} \vec{W}, \quad (1.26)$$

che associa ad ogni \vec{V} la corrispondente derivata di \vec{W} .

1.2.2 Connessione affine

Le proprietà formali appena introdotte ci permettono di ottenere le componenti della derivata covariante di un campo vettoriale in termini di quelli che sono chiamati “simboli di Christoffel” (o connessione affine). Cominciamo sviluppando sia $\vec{V}(\lambda_0)$ e la differenza tra $\vec{W}(\lambda_0)$ e \vec{W}'' su una base di $T_P(\lambda_0)$,

$$\begin{aligned}\nabla_{\vec{V}}\vec{W} &= \nabla_{V^i\vec{e}_i}(W^j\vec{e}_j) \\ &= V^i\nabla_{\vec{e}_i}(W^j\vec{e}_j) \\ &= V^i[(\nabla_{\vec{e}_i}W^j)\vec{e}_j + W^j(\nabla_{\vec{e}_i}\vec{e}_j)]\end{aligned}\quad (1.27)$$

Il secondo termine tra parentesi sopra è chiamato *connessione affine* (o simboli di Christoffel),

$$\nabla_{\vec{e}_i}\vec{e}_j = \Gamma_{ji}^k\vec{e}_k \quad (1.28)$$

e, per fissati i e j , è un vettore in $T_P(\lambda_0)$. Comunque, diversamente da quanto la notazione dell'indice potrebbe portare a pensare, Γ non è un tipo di (1,2) tensore. Infatti, se si considera un sistema di riferimento di coordinate x^i e di coordinate della base $\left\{\vec{e}^i = \frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$. Poi vediamo che, con un cambio di coordinate $x^i = \Lambda_j^{i'}x^j$, la connessione affine sarà

$$\Gamma_{j'i'}^{k'} = \Lambda_k^{k'}\Lambda_{i'}^i\Lambda_{j'}^j\Lambda_{ji}^k + \Lambda_k^{k'}\Lambda_{i'}^i(\partial_i\Lambda_{j'}^k) \quad (1.29)$$

Una volta data Γ , la derivata covariante diventa

$$\begin{aligned}\nabla_{\vec{V}}\vec{W} &= V^i[(\nabla_{\vec{e}_i}W^j)\vec{e}_j + W^j\nabla_{\vec{e}_i}\vec{e}_j] \\ &= V^i\left[\left(\frac{\partial W^j}{\partial x^i}\right)\vec{e}_j + W^j\Gamma_{ji}^k\vec{e}_k\right] \\ &= V^i\left[\frac{\partial W^k}{\partial x^i} + W^j\Gamma_{ji}^k\right]\vec{e}_k\end{aligned}\quad (1.30)$$

dalla quale possiamo estrarre le componenti

$$\left(\nabla_{\vec{V}}\vec{W}\right)^k = V^i\frac{\partial W^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ji}^kV^iW^j \quad (1.31)$$

Di solito si usano anche altre notazioni, come

$$\nabla_i W^k = W_{;i}^k = W_{,i}^k + \Gamma_{ji}^k W^j \quad (1.32)$$

1.2.3 Tensori di ordine superiore

La derivata covariante di ogni tipo di tensori (p, q) può essere ottenuto partendo semplicemente dall'equazione (1.18) e le proprietà formali della derivata covariante data nelle equazioni (1.19)-(1.24). Si può ottenere, per esempio, le componenti della derivata covariante di una 1-forma partendo dalla derivata covariante della contrazione $\vec{W}(\vec{V}) = W_i V^i$ che è una funzione

$$\partial_i (W_k V^k) = \nabla_i (W_k V^k) = (\nabla_i W_k) V^k + W_k (\nabla_i V^k) \quad (1.33)$$

Dalle proprietà delle derivate parziali e dall'equazione (1.34) si ottiene

$$(\partial_i W_k) V^k + W_k (\partial_i V^k) = (\nabla_i W_k) V^k + W_k (\partial_i V^k + \Gamma_{ij}^k V^j) \quad (1.34)$$

e, infine

$$\nabla_i W_k = \frac{\partial W_k}{\partial x^i} - \Gamma_{ki}^j W_j \quad (1.35)$$

Con lo stesso procedimento si ottengono le derivate covarianti dei tensori di ordine superiore.

1.2.4 Connessione simmetrica

Una connessione affine è *simmetrica* se

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \quad (1.36)$$

ciò implica che

$$\nabla_{\vec{V}} \vec{W} - \nabla_{\vec{W}} \vec{V} = [\vec{V}, \vec{W}] = \mathcal{L}_{\vec{V}} \vec{W} \quad (1.37)$$

dove con \mathcal{L} si indica la derivata di Lie.

La proprietà di simmetria implicano in modo chiaro che due vettori linearmente indipendenti \vec{V} e \vec{W} , definiti nello stesso punto $P \in M$ e i loro vettori trasportati parallelamente (\vec{W}'' lungo \vec{V} e \vec{V}'' lungo \vec{W}) formano un circuito chiuso. Infatti, dato che $\nabla_{\vec{V}} \vec{W}'' = \nabla_{\vec{W}} \vec{V}'' = 0$, segue che $\mathcal{L}_{\vec{V}''} \vec{W}'' = 0$, per vettori "sufficientemente piccoli", e i vettori spostati parallelamente definiscono un sistema di riferimento. Perciò, muovendo P prima lungo \vec{V} poi lungo \vec{W}'' si arriva allo stesso punto facendo il percorso muovendosi prima lungo \vec{W} e poi \vec{V}'' . Se la connessione non è simmetrica

$$T_{ji}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k \neq 0 \quad (1.38)$$

in generale i due percorsi producono immagini diverse di P , e si dice che i vettori spostati parallelamente sono soggetti a *torsione*.

1.3 Geodetiche

Una geodetica è una curva particolare che descrive localmente la traiettoria più breve fra punti di un particolare spazio. Ad esempio, nel piano le geodetiche sono le linee rette, su una sfera sono gli archi di cerchio massimo. Il termine deriva da “geodesia” la scienza della misurazione delle dimensioni e della forma del globo terrestre; nel suo significato originale, una geodetica era il cammino più breve tra due punti sulla superficie terrestre, ossia un arco di cerchio massimo infatti gli archi di meridiani e di equatore sono geodetiche, mentre gli altri paralleli no.

Matematicamente e nell’ambito della geometria differenziale, una geodetica è una curva lungo la quale il vettore tangente alla curva stessa è spostato parallelamente.

Sia $\vec{V} = \frac{d}{d\lambda}$ il vettore tangente alla curva γ parametrizzata da $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora, γ è una geodetica se \vec{V} soddisfa

$$\nabla_{\vec{V}} \vec{V} \Big|_P = 0, \quad \forall P \in \gamma \quad (1.39)$$

e λ si chiama *parametro affine*. Dall’equazione (1.23), segue immediatamente che questa definizione è invariante per cambio di parametrizzazione di γ , che implica che la stessa geodetica può essere descritta da diversi parametri affini. L’equazione (1.39) può essere scritta in un sistema di coordinate locale, in cui $\gamma \in \mathcal{M}$ è associata a $x^k = x^k(\lambda)$, così

$$\begin{aligned} (\nabla_{\vec{V}} \vec{V})^k &= V^j \left(\frac{\partial V^k}{\partial x^j} + \Gamma_{ij}^k V^i \right) \\ &= \frac{dV^k}{d\lambda} + \Gamma_{ij}^k V^i V^j \\ &= \frac{d^2 x^k}{d\lambda^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} = 0 \end{aligned} \quad (1.40)$$

che è un sistema di n equazioni differenziali del secondo ordine nelle variabili $x^k = x^k(\lambda)$. Dato un punto $P \in \mathcal{M}$ e una base \vec{e}_i di T_P , queste equazioni ammetteranno un’unica soluzione con $\vec{V} = \vec{e}_i$ in P , per ogni \vec{e}_i . Possiamo usare queste n geodetiche per definire n coordinate $\lambda_{(i)} = x^i$, e le coordinate delle basi corrispondenti $\vec{e}_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ saranno tali che la connessione affine sparisce lungo l’asse di questo sistema di riferimento. Infatti, ovviamente abbiamo

$$\begin{cases} \lambda_{(i)} = x^i \\ \vec{e}_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \end{cases} \Rightarrow \frac{dx^i}{d\lambda_{(j)}} = \frac{\partial x^i}{\partial \lambda_{(j)}} = \delta_j^i \Rightarrow \frac{d^2 x^i}{d\lambda_{(j)}^2} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \lambda_{(j)}^2} = 0 \quad (1.41)$$

Dall'equazione (1.40) si vede che

$$\Gamma_{ij}^k = 0 \quad (1.42)$$

lungo ogni geodetica del sistema, che è così chiamato *normale* (o *Gaussiano*).

Un'altra formula utile è quella che dà il vettore spostato parallelamente partendo da un vettore iniziale \vec{A} in $P = P(\lambda)$ lungo la direzione $\vec{V} = \frac{d}{d\lambda}$. Sia $Q = Q(\lambda + \delta\lambda)$ un secondo punto della curva, allora

$$\vec{A}(Q) = \vec{A}(P) + \delta\lambda \nabla_{\vec{V}} \vec{A}(P) + \frac{1}{2} \delta\lambda^2 \nabla_{\vec{V}} \nabla_{\vec{V}} \vec{A}(P) + \dots = e^{\delta\lambda \nabla_{\vec{V}}} \vec{A}(P) \quad (1.43)$$

È più facile capire l'espressione sopra se il percorso è una geodetica, per la quale possiamo scegliere λ come coordinata e $\nabla_{\vec{V}} = \frac{\partial}{\partial \lambda}$. La precedente scrittura semplicemente cambia l'argomento del vettore da λ a $\lambda + \delta\lambda$ senza influenzare in alcun modo le componenti, cioè implica

$$A^i(Q) = A^i(P) \quad (1.44)$$

che dimostra che i due vettori sono sicuramente paralleli. Per un generico percorso, sostituiamo le derivate parziali con le derivate covarianti. L'ultima contiene una connessione Γ che mescola le componenti dei vettori tenendo conto le regole dello spostamento parallelo.

1.4 Curvatura e Tensore di Riemann

Il tensore di Riemann matematicamente è una quantità che ci permette di definire la *curvatura* di una varietà come effetto dello spostamento parallelo di un campo vettoriale lungo dei circuiti.

Si considerino due campi vettoriali $\vec{V} = \frac{d}{d\lambda}$ e $\vec{W} = \frac{d}{d\mu}$ tali che $[\vec{V}, \vec{W}] = 0$. Possono essere usati per introdurre coordinate locali, o, equivalentemente, definire un circuito chiuso. Partendo da un punto $P \in \mathcal{M}$, prima muoviamo parallelamente un terzo vettore \vec{A} lungo \vec{V} , e poi lungo \vec{W} , si produce un vettore

$$\vec{A}_{WV}'' = e^{\delta\mu \nabla_{\vec{W}}} e^{\delta\lambda \nabla_{\vec{V}}} \vec{A} \quad (1.45)$$

Si può ripetere lo stesso processo invertendo l'ordine di \vec{V} e \vec{W} lungo i quali spostiamo \vec{A} e si ottiene

$$\vec{A}_{VW}'' = e^{\delta\lambda \nabla_{\vec{V}}} e^{\delta\mu \nabla_{\vec{W}}} \vec{A} \quad (1.46)$$

Per spostamenti infinitesimali $|\delta\lambda| \ll 1$ e $|\delta\mu| \ll 1$, rispettivamente lungo \vec{V} e \vec{W} , la differenza tra questi due vettori risultanti sarà il vettore

$$\delta\vec{A} = \vec{A}''_{WV} - \vec{A}''_{VW} = \delta\lambda\delta\mu[\nabla_{\vec{V}}, \nabla_{\vec{W}}]\vec{A} + O(3) \quad (1.47)$$

che inoltre chiarifica il significato di derivata covariante.

Dato il risultato sopra, definiamo ora il *tensore di Riemann* come un (1,3) tensore $R(\cdot, \cdot)$ il quale, date due direzioni \vec{V} e \vec{W} , produce un tensore (1,1) $R(\vec{V}, \vec{W})$, la cui *contrazione* con un vettore \vec{A} da un vettore

$$R(\vec{V}, \vec{W})\vec{A} = [\nabla_{\vec{V}}, \nabla_{\vec{W}}]\vec{A} - \nabla_{[\nabla_{\vec{V}}, \nabla_{\vec{W}}]}\vec{A} \quad (1.48)$$

dove specifichiamo che

$$R(\vec{V}, \vec{W})\vec{A} \equiv [R(\vec{V}, \vec{W})^i_j A^j] \vec{e}_i \quad (1.49)$$

che ci permette di scrivere

$$\delta\vec{A} = \delta\lambda\delta\mu R(\vec{V}, \vec{W})\vec{A} + O(3) \quad (1.50)$$

o

$$\delta A^i = \delta\lambda\delta\mu R^i_{jkl} V^j W^k A^l + O(3) \quad (1.51)$$

Tutto ciò ci porta a vedere il preciso significato matematico del concetto di *curvatura intrinseca* di una varietà: tutte le volte che il tensore di Riemann non sparisce, spostare parallelamente un vettore lungo un circuito chiuso non riporta il vettore al suo valore iniziale. Al contrario, se esistono circuiti tali che i vettori spostati parallelamente lungo essi non ritornano in se stessi, la varietà è curva. Notare che questa definizione di curvatura è “intrinseca” dato che non richiede fissare la varietà \mathcal{M} dentro uno spazio più grande.

Un semplice esempio è dato dalla sfera in \mathbb{R}^3 : si può definire la “curvatura estrinseca” di raggio R (e *curvatura estrinseca* $1/R$) dalla definizione $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Comunque, la stessa conclusione può essere scritta senza riferirsi a \mathbb{R}^3 , ma semplicemente notare che un vettore spostato lungo un circuito partendo (per esempio) dal polo Nord, raggiungendo l’equatore su un meridiano, si muove lungo l’equatore a distanza $R\theta$, e tornando indietro al polo Nord lungo un meridiano, apparirà ruotato di un angolo θ . In questo caso, il raggio di curvatura intrinseca ed estrinseca coincidono. Comunque, in generale, le due quantità possono essere diverse.

Dalla definizione (1.49) è facile vedere che il tensore di Riemann R ha le seguenti proprietà

$$R(\vec{V}, \vec{W})(f\vec{A}) = fR(\vec{V}, \vec{W})\vec{A} \quad (1.52)$$

$$R(f\vec{V}, \vec{W})\vec{A} = R(\vec{V}, f\vec{W})\vec{A} = fR(\vec{V}, \vec{W})\vec{A} \quad (1.53)$$

e, ad ogni punto P , il tensore di Riemann R può essere scritto come

$$R_{ljk}^i \vec{e}^l \otimes \vec{e}_i = R(\vec{e}_j, \vec{e}_k)_l^i \vec{e}^l \otimes \vec{e}_i \quad (1.54)$$

nelle corrispondenti basi locali.

1.4.1 Connessioni metriche

Fin'ora non abbiamo specificato ogni connessione affine. Tuttavia analizziamo il caso in cui uno spostamento parallelo conserva le lunghezze e gli angoli, in cui si richiede che la varietà \mathcal{M} sia dotato di un tensore metrico g :

Consideriamo due vettori \vec{A} e \vec{B} , e si assuma che siamo spostati parallelamente lungo una curva tangente \vec{V} , cioè $\nabla_{\vec{V}}\vec{A} = \nabla_{\vec{V}}\vec{B} = 0$. É naturale domandarsi che il prodotto scalare tra questi due vettori non cambia lungo la curva

$$\nabla_{\vec{V}} [g(\vec{A}, \vec{B})] = 0, \quad \forall \vec{A}, \vec{B}, \vec{V} \quad \text{tali che} \quad \nabla_{\vec{V}}\vec{A} = \nabla_{\vec{V}}\vec{B} = 0 \quad (1.55)$$

che, per la regola di Leibnitz, implica

$$\nabla_{\vec{V}} g = 0, \quad \forall \vec{V}, \quad (1.56)$$

che si può anche scrivere più semplicemente come

$$\nabla g = 0 \quad (1.57)$$

Esprimendo questa equazione in uno specifico sistema di coordinate, si trova che è equivalente a un'equazione della connessione affine, ovvero

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l}) \quad (1.58)$$

Dato che g è simmetrico, si vede immediatamente che una connessione metrica è necessariamente simmetrica.

Tutte le espressioni possono essere semplificate assumendo che la metrica sia in forma canonica al punto P , cosicchè possono essere estese in questo modo

$$g_{ij} = \pm \delta_{ij} + \left. \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} \right|_P \delta x^k \delta x^l + \dots \quad (1.59)$$

L'equazione (1.58) sopra implica che

$$g_{ij,k}|_P = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{ij}^k|_P = 0 \quad (1.60)$$

Partendo da P , possiamo considerare n direzioni linearmente indipendenti e le corrispondenti geodetiche formeranno un sistema di riferimento normale (almeno in un intorno sufficientemente piccolo di P), nei quali si ha $\Gamma = 0$. In un tale sistema normale, le derivate covarianti possono essere sostituite dalle derivate parziali e si trova che il tensore di Riemann ha le componenti date semplicemente da

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2}(g_{il,jk} - g_{ik,jl} + g_{jk,il} - g_{jl,ik}) \quad (1.61)$$

e si ha che

$$R_{ijkl} = R_{klij} \quad (1.62)$$

Questa proprietà ci permette di definire i seguenti tensori:

$$\text{Tensore di Ricci : } R^k_{ikj} = R_{ij}, \quad \text{dove } R_{ij} = R_{ji} \quad (1.63)$$

$$\text{Curvatura scalare : } R = R^k_k \quad (1.64)$$

$$\text{Tensore di Einstein : } G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} \quad (1.65)$$

Tutte le espressioni possono essere generalizzate a ogni sistema semplicemente sostituendo le derivate parziali con la derivata covariante. Per esempio, la forma generale del tensore di Riemann è data da

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2}(g_{il;jk} - g_{ik;jl} + g_{jk;il} - g_{jl;ik}) \quad (1.66)$$

Capitolo 2

RELATIVITA' GENERALE

2.1 Fondamenti della Relatività Ristretta

Nel 1905 Einstein pubblicò un articolo chiamato “Sull’elettrodinamica dei corpi in movimento” (Zur Elektrodynamik bewegter Körper) in cui formulò due nuovi principi:

Il principio di relatività: “Le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali.”

Invarianza della velocità della luce: La velocità della luce nel vuoto ha lo stesso valore c in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Dove:

$$c = 2,988 \cdot 10^8 m/s \quad (2.1)$$

Questi due postulati porteranno a un rivalutazione della nostra visione fondamentale dello spazio-tempo. In particolare, si vedrà che spazio e tempo sono collegati dal secondo postulato, non più indipendente e quindi la cinematica deve essere riformulata o quantomeno dall’inizio.

2.1.1 Le trasformazioni di Lorentz

Ora enunceremo le trasformazioni di Lorentz dal Principio di Relatività di Einstein e assumeremo uno spazio-tempo *omogeneo* e *isotropo* (ovvero privo di direzioni privilegiate). Un altro importante ruolo verrà giocato dal *principio di corrispondenza*: la meccanica newtoniana deve essere considerata valida nei contesti sperimentali in cui è verificata, ovvero per velocità piccole $v \ll c$ vogliamo ricondurci alla relatività Galileiana ; in sostanza, queste nuove teorie fisiche non contraddicono le precedenti ma le estendono

e le generalizzano.

$$\begin{cases} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases} \quad (2.2)$$

Notare che, come richiesto, queste leggi di trasformazione si riconducono a quelle di Galileo per velocità non relativistiche $v \ll c$ (*principio di corrispondenza*). Per futura convenienza, definiamo una nuova variabile temporale w e un nuovo parametro β .

$$\begin{cases} \beta = \frac{v}{c} \\ w = ct \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{x - \beta w}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ w' = \frac{w - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{cases} \quad (2.3)$$

che rende la simmetria tra spazio e tempo più evidente.

I più famosi effetti che si possono facilmente derivare nella teoria della Relatività Ristretta sono la contrazione delle lunghezze e la dilatazione dei tempi.

2.1.2 Momento e Massa Relativistiche

Il momento Newtoniano $\vec{p} = m_0\vec{u}$ di una particella puntiforme di massa m_0 non è una quantità molto usata nella Relatività Ristretta, dato che assume forme diverse in diversi sistemi inerziali, cioè $m_0\vec{u} \rightarrow m_0\vec{u}'$. In particolare dallo studio dei processi di collisione, il ruolo giocato da \vec{p} sarà preso da:

$$P^\mu = \left(\frac{m_0 c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) \quad (2.4)$$

Dove l'indice $\mu = 0, 1, 2, 3$ rispettivamente per le componenti t, x, y e z . Usando le leggi di composizione delle velocità, si può esplicitamente verificare che P^μ si trasforma come uno spostamento dello spazio-tempo sotto le

trasformazioni di Lorentz, cioè

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{P} = \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ \frac{E}{c} = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P'_x = \frac{P_x + \left(\frac{v}{c}\right) \frac{E}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 u'_x}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} \\ P'_y = P_y = \frac{m_0 u'_y}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} \\ P'_z = P_z = \frac{m_0 u'_z}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} \\ \frac{E'}{c} = \frac{\frac{E}{c} - \frac{v}{c} P_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Una volta che abbiamo i necessari strumenti matematici a nostra disposizione, sarà comunque più facile notare che

$$U^\mu = \frac{\Delta x^\mu}{\Delta \tau} \rightarrow \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (2.6)$$

è un vettore con quattro coordinate, dato che il tempo proprio $\Delta \tau$ è uno scalare, e Δx^μ è lo spostamento di tale vettore. Notare che la velocità U^μ non è la quantità misurata da un osservatore. Quest'ultima è data da \vec{u} nel sistema di riferimento dell'osservatore: questa è la ragione per cui si introduce il concetto di massa relativistica

$$m(u) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (2.7)$$

dove m_0 è la massa a riposo (o propria) della particella, misurata da un osservatore a riposo con la particella stessa. Questa scelta è equivalente a introdurre una velocità relativistica nella espressione del momento relativistico,

$$\vec{P} = m\vec{u} = \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (2.8)$$

Nel particolare caso in cui la particella è a riposo nel sistema S (cioè $\vec{u} = 0$) abbiamo che in S

$$U^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad (2.9)$$

Dato che $dt = d\tau$ e l'osservatore non si muove rispetto ad esso. Inoltre soddisfa chiaramente il principio di corrispondenza, dato che le sue componenti spaziali si riducono a \vec{p} per $|u| \ll c$.

2.2 Osservatori arbitrari e Gravità

Partendo dalla meccanica Newtoniana e la sua invarianza Galileiana, che è il Principio di Relatività per le leggi della meccanica con tempo assoluto, che è compatibile con le leggi della gravità di Newton, passando per la non invarianza delle equazioni di Maxwell si è arrivati sostituire il Principio di Relatività Galileiano con una versione allargata, il Principio della Relatività Ristretta, che include l'elettromagnetismo e inoltre impone il fatto che la velocità della luce sia costante.

Per riassumere, la Relatività Ristretta ha (almeno) due lati negativi:

1. obbliga ad usare l'ambiguo concetto di sistema inerziale;
2. dice di includere tutta la fisica, ma la gravità Newtoniana è esclusa.

Da un punto di vista matematico, la Relatività Ristretta è realizzata assumendo l'esistenza di sistemi inerziali *globali* (inerziali) connessi dalle trasformazioni di Lorentz. Alla richiesta che le leggi della fisica siano le stesse è perciò attribuito il significato matematico che le leggi fisiche possono riguardare solo quantità rappresentate dai tensori del gruppo di Lorentz e le operazioni tensoriali tra di loro.

Idealmente, a un sistema di riferimento matematico dovrebbe essere associato un sistema di misurazione. Comunque, tutte le misure fisiche sono ottenute usando strumenti con estensione spaziale e temporale finita (senza garanzia di essere inerziali *a priori*), e si dovrebbero perciò descrivere nel miglior modo possibile da generici sistemi di riferimento *locali*. Per questa ragione si usa la geometria differenziale, che garantisce strumenti matematici (mappe locali, tensori e nuove operazioni tensoriali) per scrivere equazioni in ogni sistema di coordinate, inerziale o no. Questi strumenti si rivelano così potenti da poter ora scrivere *le equazioni nella stessa forma in ogni sistema di riferimento arbitrario*. Si può così pensare di riformulare la fisica in un modo che è totalmente indipendente dal sistema di riferimento o, più fisicamente, in un modo che può essere adattato ad ogni sistema di misure, a prescindere dalla sua natura inerziale. In sostanza:

Principio della Relatività Generale: “Le leggi della fisica sono le stesse per tutti gli osservatori”

Il principio della relatività generale può essere tradotto nella richiesta matematica che tutte le leggi della fisica devono coinvolgere solo i tensori e le operazioni tensoriali nel senso della geometria differenziale (senza nessuna connessione a priori con le trasformazioni di Lorentz).

Principio di Equivalenza: Per gli oggetti fisici, la carica gravitazionale (massa) equivale alla massa inerziale.

Ciò era stato già ipotizzato da Galileo, che (presumibilmente) lo verificò lasciando cadere oggetti dalla torre di Pisa. Un tale esperimento mostra chiaramente che il sistema di riferimento di caduta libera non può essere globale ma deve seguire le linee di forza della gravità, e perciò è *locale rispetto lo spazio e il tempo*.

Dal punto di vista matematico, il Principio di Equivalenza significa che osservatori in caduta libera sono veri osservatori inerziali e quindi rispetto essi la fisica deve essere descritta (localmente), tenendo conto della Relatività Ristretta, da equazioni tensoriali (nel senso del gruppo di Lorentz). Questo significa che il gruppo di Lorentz $SO(3, 1)$ rimane una simmetria delle leggi fisiche nello spazio tangente T_p a tutti i punti P della varietà spazio-tempo \mathcal{M} . Dato che la metrica (localmente nello spazio, ma ad ogni tempo) deve essere ridotta alla forma di Minkowski per osservatori in caduta libera, devono esserci i corrispondenti vettori di Killing tangenti alle traiettorie degli osservatori in caduta libera. Tenendo in considerazione il principio della Relatività Generale, osservatori diversi (non inerziali) devono vedere le leggi della fisica come equazioni tensoriali nel senso della geometria differenziale. Si può scrivere tutto ciò nel seguente principio:

Principio di Covarianza Generale: Le leggi della fisica si ottengono dalla Relatività Ristretta sostituendo le quantità tensoriali del gruppo di Lorentz con le quantità tensoriali della varietà spazio-tempo.

In termini pratici, ciò significa che si prende una legge fisica nel sistema localmente inerziale come data dalla Relatività Ristretta e si re-interpretano gli indici tensoriali del gruppo di Lorentz rappresentando le componenti dei tensori sotto trasformazioni generali delle coordinate. Inoltre, la metrica di Minkowski deve essere sostituita da un tensore metrico generale con la stessa segnatura

$$\eta_{\mu\nu} \quad \rightarrow \quad g_{\mu\nu} \quad (2.10)$$

dove, da ora in poi, considereremo solo le varietà spazio-tempo \mathcal{M} quadridimensionali con coordinate $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, x^i)$ e segnatura metrica $(-, +, +, +)$, a meno che non venga specificato diversamente. La Covarianza Generale e quest'ultima equazione implicano che le derivate parziali devono essere sostituite dalla derivata covariante metrica

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \rightarrow \quad \nabla_\mu \equiv \nabla_{\partial_\mu} \quad (2.11)$$

Per questa costruzione, è cruciale che è matematicamente sempre possibile mettere il tensore metrico localmente in forma canonica, con le sue derivate prime che localmente spariscono allo stesso tempo.

2.3 Equazioni Gravitazionali

La costruzione appena fatta non include esplicitamente la gravità. Questo significa che due questioni sono ancora aperte:

- 1) Come si descrive l'azione della gravità su una particella test?
- 2) Quali sono le sorgenti di gravità e come si determinano le sorgenti della gravità?

C'è una risposta naturale per la prima domanda che segue dai principi già affermati (come le leggi della forza Newtoniana seguono naturalmente dal principio dell'invarianza Galileiana), mentre la seconda domanda deve essere affrontata come un problema indipendente.

2.3.1 Gravità e Particelle Test

Prima di tutto, l'idea Newtoniana che la gravità sia rappresentata da una accelerazione \vec{g} non può funzionare, dato che \vec{g} è un vettore per il quale difficilmente si può concepire l'idea di una componente temporale per sviluppare il quadri-vettore g^μ .

Rimarchiamo comunque che, dato che un osservatore in caduta libera è "inerziale", la metrica locale nel sistema di riferimento stesso è la metrica di Minkowski canonica. Denotiamo $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ la quadri-velocità di una particella test soggetta a nessun'altra forza (tranne la gravità). Nel sistema di caduta libera, deve muoversi lungo una linea dritta.

$$0 = \gamma^2 \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} = \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = u^\mu \nabla_\mu u^\alpha, \quad (2.12)$$

dove $\gamma\tau = x^0 \equiv t$ e $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ è il solito fattore della Relatività. Ristretta per una particella che si muove con velocità $\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ e $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \sim g_{\mu\nu,\beta}$ nel sistema di coordinate dell'osservatore in caduta libera. In un sistema diverso, i simboli di Christoffel non saranno zero e ciò suggerisce che la metrica $g_{\mu\nu}$ può essere vista come un potenziale per l'interazione gravitazionale

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \sim g_{\mu\nu,\beta} \quad (2.13)$$

Questa conclusione può essere perciò supportata considerando *il limite di campo debole* e *il limite non relativistico* dell'equazione geodetica, nel quale ci aspettiamo che la legge di gravitazione di Newton sia ripresa. Il limite di campo debole significa che la metrica $g_{\mu\nu}$ è statica e molto vicina a $\eta_{\mu\nu}$. Dare un preciso significato a ciò è comunque tutt'altro che semplice, e dovremmo utilizzare un trucco matematico per formalizzare la nostra procedura. Vale

a dire, introduciamo un parametro $0 < \epsilon \ll 1$ tale che

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu} \quad (2.14)$$

Il limite non relativistico significa che le velocità spaziali \vec{u} sono molto più piccole di $c = 1$. Ancora, questo può essere formalizzato scrivendo $\vec{u} = \epsilon \vec{v}$, cosicché possiamo sviluppare con Taylor in epsilon tutte le nostre espressioni e tenere solo il primo ordine. Dovremmo allora porre epsilon = 1 nella espressione troncata. Per esempio, i simboli di Christoffel

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\mu\beta,\nu} + g_{\nu\beta,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}) \quad (2.15)$$

$$= \frac{\epsilon}{2} g^{\alpha\beta} (h_{\mu\beta,\nu} + h_{\nu\beta,\mu} - h_{\mu\nu,\alpha}) \quad (2.16)$$

$$= \frac{\epsilon}{2} \eta^{\alpha\beta} (h_{\mu\beta,\nu} + h_{\nu\beta,\mu} - h_{\mu\nu,\alpha}) + O(\epsilon^2) \quad (2.17)$$

dove le derivate della metrica sono diverse da zero solo se non sono derivate rispetto al tempo, e dobbiamo ricordare che $\eta^{\alpha\beta}$ è diagonale. Perciò, nel termine che contiene i simboli di Christoffel, possiamo approssimare la quadri-velocità all'ordine zero come

$$u^{\mu} = (1 + O(\epsilon^2), O(\epsilon)) \simeq (1, \vec{0}), \quad (2.18)$$

e, perciò, notare che $dt \simeq d\tau + O(\epsilon^2)$. Ciò implica che le sole componenti non banali dell'equazione geodetica all'ordine ϵ sono date da

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \simeq \epsilon \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{00}^i \simeq \epsilon \left(\frac{d^2 x^i}{dt^2} - \frac{1}{2} \eta^{ii} h_{00,i} \right), \quad (2.19)$$

nel quale abbiamo usato

$$\Gamma_{00}^i \simeq \frac{\epsilon}{2} \eta^{ii} (h_{0i,0} + h_{0i,0} - h_{00,i}) = -\frac{\epsilon}{2} \eta^{ii} h_{00,i}. \quad (2.20)$$

Ora, se chiamiamo potenziale gravitazionale la funzione

$$V = -\frac{1}{2} \eta^{ii} h_{00} \simeq -\frac{1}{2} h_{00}, \quad (2.21)$$

e poniamo $\epsilon \rightarrow 1$, abbiamo ritrovato l'equazione di Newton come

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x^i} \quad (2.22)$$

Vedremo che la V dell'equazione (2.12) riproduce esattamente il potenziale di Newton.

La metrica $g_{\mu\nu}$ fornisce molte più informazioni di un solito campo "potenziale".

2.3.2 Fonte di Gravità e Equazioni di Einstein

Per rispondere alla seconda domanda sono necessarie più ipotesi. Prima di tutto, $g_{\mu\nu}$ è simmetrico e contiene (al massimo) 10 componenti indipendenti. Abbiamo perciò bisogno di dieci equazioni per queste componenti e vorremmo fossero al massimo equazioni differenziali a derivate parziali del secondo ordine. Vogliamo quindi un tensore costruito unicamente da $g_{\mu\nu}$ fino alle sue derivate parziali seconde e non ci sono molte scelte: il tensore di Riemann e le sue contrazioni. Uno possibile è il (0, 2) tensore di Einstein,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu}, \quad (2.23)$$

che è ovviamente simmetrico e perciò contiene 10 componenti indipendenti. Riordiamo ora che $G_{\mu\nu}$ si conserva in senso covariante

$$\nabla_\mu G_\nu^\mu = \nabla_\mu \left(R_\nu^\mu - \frac{1}{2}R g_\nu^\mu \right), \quad (2.24)$$

e la proprietà sopra riduce il numero di componenti del tensore di Einstein da $(4 \times 5)/2 = 10$ a $10 - 4 = 6$ (il quale, per inciso, è il numero di componenti della metrica spaziale). Se il tensore (2.23) deve essere a sinistra dell'equazione che determina la metrica, la sorgente alla parte destra deve avere le stesse proprietà matematiche. Un tensore fatto così è il *tensore energia-momento* (o *energia-impulso*), il quale per un fluido perfetto con quadri-velocità u^μ è dato da

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu + p(g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu) = (\rho + p)u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}, \quad (2.25)$$

dove ρ è la densità (propria) e p è la pressione (propria), entrambe misurate da un osservatore che si muove con il fluido, che rende tali quantità veri scalari. Notare che il tensore che moltiplica la pressione è ortogonale a u^μ (ricordare che $u^\mu u_\mu = -1$)

$$(g_\nu^\mu + u^\mu u_\nu)u^\nu = u^\mu - u^\mu = 0 \quad (2.26)$$

Infatti, nel sistema che si muove con il fluido, la quadri-velocità $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ e $d\tau = dt$, il che significa che $g_{00} = g^{00} = -1$ e $g_{0i} = g^{0i} = 0$. Poi abbiamo

$$T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & p g^{ij} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

che implica

$$T_\nu^\mu = \text{diag}(-\rho, p, p, p) \quad (2.28)$$

In modo da capire meglio il significato del tensore energia-impulso, consideriamo prima una particella del quadri-momento p^μ e un osservatore con quadri-velocità u^μ . E' facile vedere che l'energia della particella misurata da un osservatore è data da

$$E^{(0)} = -p^\mu U_\mu \quad (2.29)$$

Infatti, scegliamo un sistema di riferimento in caduta libera in cui

$$U^\mu = (1, 0, 0, 0) \equiv V_{(0)}^\mu \quad (2.30)$$

al punto spazio-tempo P si prende la misura. Allora

$$p^\mu V_{(0)\mu} = -m \frac{dt}{d\tau} = -\frac{m}{\sqrt{1-u^2}} \quad (2.31)$$

dove $\vec{u} = \frac{dx^i}{d\tau}$ è la tripla-velocità della particella nel sistema inerziale locale e abbiamo usato $U_0 = -U^0 = -1$. Si può completare la **tetrade** (*vierbein*, ovvero una base di quattro campi vettoriali, uno di tipo tempo e tre di tipo spazio nella varietà spazio-tempo) della base di vettori di T_P con tre vettori spaziali ortogonali a U^μ , (siano $V_{(i)}^\mu$). Non è difficile vedere che possiamo scegliere le coordinate locali in modo che $V_{(i)}^\mu = \delta_i^\mu$ e

$$p_\mu V_{(i)}^\mu = \frac{p^i}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{mu^i}{\sqrt{1-u^2}} \quad (2.32)$$

siano le componenti spaziali del quadri-momento della particella nel sistema a riposo dell'osservatore. Notare che le quantità misurate da un dato osservatore sono rappresentate correttamente da scalari, ovvero

$$E_{(a)} = p_\mu V_{(a)}^\mu, \quad a = 0, 1, 2, 3, \quad (2.33)$$

che, inoltre, formano le componenti di un vettore di Lorentz (con trasformazioni di Lorentz locali della tetrade al punto P).

Consideriamo la densità nel tensore energia-momento, e contraiamola con $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$ due volte,

$$(\rho u_\alpha u_\mu U^\mu) U^\alpha = \left(\frac{\rho}{\sqrt{1-u^2}} u_\alpha \right) U^\alpha = \frac{\rho}{1-u^2} \quad (2.34)$$

i due fattori $\sqrt{1-u^2}$ nel denominatore si spiegano facilmente ricordando prima che la densità propria (misurata da un osservatore che si muove con il fluido) è definita da

$$\rho = \frac{m}{V_0} \quad (2.35)$$

dove m è la massa propria (equivalente all'energia) delle particelle fluide contenute nel proprio volume V_0 , entrambi riscalati con fattori di $\sqrt{1-u^2}$ quando misurati da un osservatore che si muove con velocità relativa u ,

$$m \rightarrow \frac{m}{\sqrt{1-u^2}} \quad e \quad V_0 \rightarrow V_0 \sqrt{1-u^2} \quad (2.36)$$

mentre solo le lunghezze parallele a \vec{u} sono contratte. Una analisi simile si fa per il termine (spaziale) pressione.

Una importante proprietà dei fluidi è l'equazione di continuità, che in un sistema di riferimento locale si legge

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{p} = 0 \quad (2.37)$$

e ci dice soltanto che si conserva l'energia: la perdita di energia per unità di tempo $-\partial_t \rho$ di una porzione di fluido dentro un proprio volume V_0 è equivalente al lavoro per unità di tempo fatto dal fluido per espandere V_0 (il quale, per esempio, è dato da $\partial_x p^x$ nella direzione x). Un'altro modo per leggere l'equazione sopra è quello di integrarla su una cella di volume V_0 . Assumiamo per esempio che la cella è una scatola cubica con $a_- \leq x, y, z \leq a_+$ e $\vec{p} = (p^x(x), 0, 0)$, cosicchè

$$\int_{V_0} \partial_t \rho \, dx \, dy \, dz = \partial_t \int_{V_0} \rho \, dx \, dy \, dz = \partial_t E \quad (2.38)$$

dove E è l'energia nel volume $V_0 = (a_+ - a_-)^3$, e

$$\int_{V_0} (\partial_x p^x \, dx) \, dy \, dz = A_0 [p^x(a_+) - p^x(a_-)] = F^x(a_+) - F^x(a_-) \quad (2.39)$$

dove $A_0 = (a_+ - a_-)^2$ è l'area della superficie $x = a_{\pm}$ e $F^x = A_0 p^x$ è la forza che agisce su queste superfici. Se la materia non è creata o distrutta dentro la cella, possiamo applicare il solito teorema relativo all'energia cinetica al lavoro della forza, $F^x = \partial E / \partial x$, e finalmente otteniamo

$$\partial_t E = \left. \frac{\partial E}{\partial x} \right|_{x_-} - \left. \frac{\partial E}{\partial x} \right|_{x_+} \quad (2.40)$$

Quanto appena detto significa che il tasso di aumento di energia all'interno della cella è equivalente all'energia che entra da sinistra (attraverso la superficie a $x = a_-$) meno l'energia che esce (attraverso la superficie a $x = a_+$). In un sistema di riferimento generale, (2.37) significa che il tensore impulso-energia si conserva in senso covariante

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (2.41)$$

Dove ricordiamo che la derivata covariante ora contiene altri termini (rispetto al caso di Minkowski) che rappresentano l'effetto della gravità sul fluido. Ciò rende $T^{\mu\nu}$ il naturale candidato alla fonte di gravità.

I soli dettagli rimasti da essere inseriti sono le dimensioni fisiche: per il tensore di Einstein $[G^{\mu\nu}] = L^{-2}$ mentre $[T^{\mu\nu}] = ML^{-3}$. Questo richiede una costante di accoppiamento dimensionale G_N , con $[G_N] = L/M$, cosicchè possiamo finalmente scrivere le *equazioni (di campo) di Einstein*

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G_N T^{\mu\nu} \quad (2.42)$$

In questa formulazione abbiamo:

- $R_{\mu\nu}$ è il tensore curvatura;
- R è la curvatura scalare, ossia la traccia di $R_{\mu\nu}$;
- $g_{\mu\nu}$ è il tensore metrico;
- $T_{\mu\nu}$ è il tensore energia-impulso;
- G_N la costante di gravitazione universale.

Tra l'altro, notiamo che G_N è la costante di Newton, e il suo ruolo fisico è perciò di convertire massa in lunghezza (come la velocità della luce converte tempo in lunghezza).

La teoria della relatività generale afferma quindi che lo spaziotempo viene *curvato* in presenza di una massa; un'altra massa più piccola si muove quindi come effetto di tale curvatura.

Ogni particella si muove a velocità costante lungo una geodetica, che localmente può essere considerata come una retta. La velocità di tale particella è il rapporto tra la distanza *spaziale* percorsa ed il tempo *proprio*, ovvero quello misurato nel riferimento della particella; la distanza spaziale dipende dalla metrica che definisce la struttura dello spaziotempo. La curvatura determina l'effettiva forma delle geodetiche, ovvero il cammino che il corpo segue nel tempo. In sostanza, un corpo libero si muove lungo una geodetica nello spaziotempo, esattamente nello stesso modo in cui nella meccanica classica un corpo non sottoposto a forza si muove lungo una linea retta. Se in un dato punto la struttura dello spazio tempo è piatta, la geodetica sarà proprio una retta, altrimenti avrà diverse forme ma il corpo la seguirà comunque. In questo modo la gravità risulta inglobata nella struttura dello spaziotempo. Le equazioni sopra implicano un'interpretazione della gravità come geometria dello spaziotempo: la materia determina la curvatura dello spazio-tempo.

Capitolo 3

GRAVITÀ TELEPARALLELA

3.1 Concetti Base

Lo spazio-tempo è un'area dove le quattro forme fondamentali si manifestano. Elettromagnetismo, interazioni deboli e forti sono descritte da teorie di gauge che coinvolgono trasformazioni in spazi interni, non collegati con lo spazio-tempo. L'impostazione di base delle teorie di gauge sono i fibrati principali, nei quali una copia dei gruppi di gauge è attaccata a ogni punto dello spazio-tempo- lo spazio base del fibrato. La gravitazione, d'altra parte, è profondamente collegata alla struttura di spazio-tempo. L'impostazione geometrica di gravitazione è il fibrato tangente, una naturale costruzione sempre presente in ogni varietà differenziabile: ad ogni punto dello spazio-tempo, c'è uno spazio tangente attaccato lì - le fibre del fibrato- che è visto come uno spazio vettoriale. Useremo l'alfabeto greco per denotare gli indici che sono associati allo spaziotempo, e le lettere dell'alfabeto latino, per denotare gli indici relativi allo spazio tangente, uno spaziotempo di Minkowski dove si assume che la metrica di Lorentz abbia la forma

$$\eta_{ab} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1) \quad (3.1)$$

Un generico spaziotempo è una varietà quadri-dimensionale, chiamata $\mathbb{R}^{3,1}$, il cui spazio tangente è, in ogni punto, uno spaziotempo di Minkowski. Le coordinate dello spaziotempo saranno denotate da x^μ , mentre le coordinate dello spazio tempo da x^a . Tali coordinate di sistema determinano, sui loro domini di definizione, basi locali per campi vettoriali, formati dai gradienti

$$\{\partial_\mu\} \equiv \{\partial/\partial x^\mu\} \quad \text{e} \quad \{\partial_a\} \equiv \{\partial/\partial x^a\} \quad (3.2)$$

inoltre le basi ∂x^μ e dx^a . Queste basi sono duali, nel senso che

$$dx^\mu(\partial_\nu) = \delta_\nu^\mu \text{ e } dx^a(\partial_b) = \delta_b^a \quad (3.3)$$

Sui rispettivi domini di definizione, ogni vettore può essere espresso in termini di queste *coordinate di base*.

3.1.1 Sistemi Banali

Nella relatività generale si usa parlare di **tetrade** (o anche *vierbein*), ovvero di un insieme di quattro campi vettoriali ortonormali, uno di tipo tempo e tre di tipo spazio. Qui saranno denotati con

$$\{e_a\} \text{ e } \{e^a\} \quad (3.4)$$

Le basi di coordinate menzionate sopra

$$\{e_a\} = \{\partial_a\} \text{ e } \{e^a\} = \{dx^a\} \quad (3.5)$$

sono casi particolari. Ogni altro set di quattro campi linearmente indipendenti $\{e_a\}$ formano un'altra base, e si ha un duale $\{e^a\}$ i cui membri sono tali che

$$e^a(e_b) = \delta_b^a \quad (3.6)$$

Notare che, in una varietà generica, i campi vettoriali (come sistemi di coordinate) sono definiti solo localmente e i sistemi lineari, come insiemi di quattro campi vettoriali, sono definiti solo su domini ristretti.

Queste tetradi sono le generali basi lineari della varietà differenziabile spazio-tempo $\mathbb{R}^{3,1}$. L'insieme di tali basi, sotto condizioni che fanno sì che sia anche un varietà differenziabile, costituisce il *fibrato dei riferimenti lineari*. Una tetrade fornisce, ad ogni punto $p \in \mathbb{R}^{3,1}$, una base per i vettori sullo spazio tangente $T_p\mathbb{R}^{3,1}$. Sicuramente, sui domini in cui sono definite, ogni membro di una data base può essere scritto in termini di membri di ogni altra. Cioè

$$e_a = e_a^\mu \partial_\mu \text{ e } e^a = e^a_\mu dx^\mu \quad (3.7)$$

e viceversa

$$\partial_\mu = e_\mu^a e_a \text{ e } dx^\mu = e_a^\mu e^a \quad (3.8)$$

Considerando le condizioni di ortogonalità (3.6), le componenti del sistema soddisfano

$$e^a_\mu e_a^\nu = \delta_\mu^\nu \text{ e } e^a_\mu e_b^\mu = \delta_b^a \quad (3.9)$$

Notare che questi fibrati, con i loro insiemi, sono parti che costituiscono lo spazio tempo.

Una base lineare generale $\{e_a\}$ soddisfa la seguente relazione

$$[e_a, e_b] = f_{ab}^c e_c \quad (3.10)$$

con f_{ab}^c i cosiddetti coefficienti di struttura, o coefficienti di *anonomia*. Essi sono definiti da

$$f_{ab}^c = e_a^\mu e_b^\nu (\partial_\nu e_\mu^c - \partial_\mu e_\nu^c) \quad (3.11)$$

Una classe particolare è quella dei sistemi inerziali, chiamati e'_a , per i quali

$$f'^a_{cd} = 0 \quad (3.12)$$

Tali basi $\{e'^a\}$ sono dette *olonomiche*. Di certo, tutte le coordinate di base sono olonomiche. Questa non è una proprietà locale, nel senso che è valida ovunque per sistemi che appartengono a questa classe inerziale. Si consideri ora la metrica spazio-tempo di Minkowski, che in coordinate cartesiane $\{\bar{x}^\mu\}$ ha la forma

$$\bar{\eta}_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1) \quad (3.13)$$

In ogni altro sistema di coordinate, $\eta_{\mu\nu}$ sarà in funzione delle coordinate spazio-tempo. Il sistema lineare

$$e_a = e_a^\mu \partial_\mu \quad (3.14)$$

fornisce una relazione tra la metrica dello spazio tangente η_{ab} e la metrica dello spazio-tempo $\eta_{\mu\nu}$. Tale relazione è data da

$$\eta_{ab} = \eta_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu \quad (3.15)$$

Usando la condizione di ortogonalità (3.9), la relazione inversa si trova

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{ab} e^a_\mu e^b_\nu \quad (3.16)$$

Indipendentemente dal fatto se e_a è olonomica o no, o equivalentemente, se è o no inerziale, mettono sempre in relazione lo spazio tangente di Minkowski allo spazio-tempo di Minkowski.

3.1.2 Sistemi non banali

I sistemi non banali, o tetradi non banali, saranno denotati da

$$\{h_a\} \quad \text{e} \quad \{h^a\} \quad (3.17)$$

Essi sono definiti come sistemi lineari il cui coefficiente di anolonomia è in relazione sia agli effetti inerziali e gravitazionali. Si consideri un generico spazio-tempo pseudo-riemanniano con componenti metriche $g_{\mu\nu}$ nella base ologonmica $\{dx^\mu\}$. Allora

$$h_a = h_a^\mu \partial_\mu \quad e \quad h^a = h^a_\mu dx^\mu \quad (3.18)$$

è una base lineare che lega $g_{\mu\nu}$ alla metrica dello spazio-tangente η_{ab} attraverso la relazione

$$\eta_{ab} = g_{\mu\nu} h_a^\mu h_b^\nu \quad (3.19)$$

I componenti dei membri della base duale $h^a = h^a_\nu dx^\nu$ soddisfano

$$h^a_\mu h_a^\nu = \delta_\mu^\nu \quad e \quad h^a_\mu h_b^\mu = \delta_b^a \quad (3.20)$$

e l'equazione (3.19) ha inversa

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h_a^\mu h_b^\nu \quad (3.21)$$

Da queste relazioni segue che

$$h \equiv \det(h^a_\mu) = \sqrt{-g} \quad (3.22)$$

con $g = \det(g_{\mu\nu})$.

Una base di una tetrad $\{h_a\}$ soddisfa la relazione

$$[h_a, h_b] = f^c_{ab} h_c \quad (3.23)$$

con f^c_{ab} i coefficienti di struttura, o coefficienti anolonomia, di un sistema $\{h_a\}$. L'ovvia differenza nella relazione rispetto alla base lineare $\{e_a\}$ è che ora f^c_{ab} rappresenta sia gli effetti inerziali che gravitazionali, e sono date da

$$f^c_{ab} = h_a^\mu h_b^\nu (\partial_\nu h^c_\mu - \partial_\mu h^c_\nu) \quad (3.24)$$

Sebbene le tetradi non banali sono, per definizione, anolonomiche per la presenza della gravitazione, è ancora possibile che *localmente*, $f^c_{ab} = 0$. In questo caso, $dh^a = 0$, che significa che h^a è localmente una forma differenziale chiusa. Infatti, se questo vale in un punto p , allora c'è in un intorno di p su cui le funzioni (le coordinate) x^a esistono tali che

$$h^a = dx^a \quad (3.25)$$

Si è detto che una forma differenziale chiusa è sempre localmente integrabile, o esatta. Questo è il caso di sistemi localmente inerziali, che sono sempre ologonmici. In questi sistemi, gli effetti inerziali compensano localmente la gravitazione.

3.1.3 Connessione di Lorentz

Una *connessione di Lorentz* A_μ , spesso indicata anche come *connessione spinoriale*, è una 1-forma

$$A_\mu = \frac{1}{2} A_\mu^{ab} S_{ab} \quad (3.26)$$

assumendo che la matrice A^{ab} appartenga all'algebra del gruppo di Lorentz $SO(3,1)$ e che S_{ab} sia una data rappresentazione dei generatori di Lorentz. Dato che questi generatori sono antisimmetrici, A_μ^{ab} deve essere anch'esso antisimmetrico in modo da essere lorentziano. Questa connessione definisce la derivata covariante di Fock-Ivanenko

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2} A_\mu^{ab} S_{ab} \quad (3.27)$$

di cui la seconda parte agisce solo sugli indici algebrici dello spazio tangente. Per un campo vettoriale di Lorentz ϕ^c , per esempio, la rappresentazione dei generatori di Lorentz sono matrici S_{ab} con elementi

$$(S_{ab})^c_d = i(\eta_{bd}\delta_a^c - \eta_{ad}\delta_b^c) \quad (3.28)$$

La derivata di Fock-Ivanenko è, in questo caso

$$\mathcal{D}_\mu \phi^c = \partial_\mu \phi^c + A_{d\mu}^c \phi^d \quad (3.29)$$

Così, la tetraide h_a^μ mi permette di trasformare i tensori con indici di Lorentz (o interni) in tensori con indici spazio-temporali (o esterni). Per esempio, se ϕ^c è interno allora

$$\phi^\rho = h_a^\rho \phi^a \quad (3.30)$$

sarà un vettore dello spaziotempo. Invece, possiamo scrivere

$$\phi^a = h^a_\rho \phi^\rho \quad (3.31)$$

D'altra parte, data la sua natura non tensoriale, una connessione acquisirà un termine non omogeneo, soggetto alla stessa operazione

$$\Gamma_{\nu\mu}^\rho = h_a^\rho \partial_\mu h^a_\nu + h_a^\rho A_{b\mu}^a h^b_\nu \equiv h_a^\rho \mathcal{D}_\mu h^a_\nu \quad (3.32)$$

dove \mathcal{D}_μ è la derivata covariante (3.29), in cui i generatori agiscono solo sugli indici interni (o sullo spazio tangente). La relazione inversa è, di conseguenza

$$A_{b\mu}^a = h^a_\rho \partial_\mu h_b^\rho + h^a_\rho \Gamma_{\nu\mu}^\rho h_b^\nu \equiv h^a_\rho \nabla_\mu h_b^\rho \quad (3.33)$$

dove ∇_μ è la normale derivata covariante nella connessione $\Gamma_{\rho\mu}^\nu$, che agisce solo sugli indici esterni. Per il vettore dello spaziotempo ϕ^ν , per esempio, ha la forma

$$\nabla_\mu \phi^\nu = \partial_\mu \phi^\nu + \Gamma_{\rho\mu}^\nu \phi^\rho \quad (3.34)$$

Usando le equazioni (3.30) e (3.31), è facile verificare che

$$\mathcal{D}_\mu \phi^d = h^d_\rho \nabla_\mu \phi^\rho \quad (3.35)$$

Le equazioni (3.32) e (3.33) sono semplicemente diversi modi per esprimere la proprietà che la derivata covariante totale della tetrad - cioè, una derivata covariante con termini di connessione sia interni che esterni-scompare identicamente

$$\partial_\mu h^a_\nu - \Gamma^\rho_{\nu\mu} h^a_\rho + A^a_{b\mu} h^b_\nu = 0 \quad (3.36)$$

3.1.4 Comportamento sotto le trasformazioni di Lorentz

Una trasformazione di Lorentz locale è una trasformazione dello spazio tangente di coordinate x^a

$$x'^a = \Lambda^a_b(x) x^b \quad (3.37)$$

Considerando questa trasformazione, la tetrad si trasforma

$$h'^a = \Lambda^a_b(x) h^b \quad (3.38)$$

Sappiamo che la metrica di Lorentz $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ è la stessa in tutti i sistemi inerziali legati da trasformazioni di Lorentz le quali dipendono da sei parametri. Se un sistema di riferimento individua la forma di η , ogni trasformazione di Lorentz permette di cambiare riferimento senza cambiare la metrica η . In ogni punto dello spaziotempo riemanniano, l'equazione (3.21) determina solo la tetrad fino a trasformazioni di questi sei parametri del gruppo di Lorentz. Ciò significa che esistono effettivamente un'infinità di tetradi h^a_μ , ognuna delle quali mette in relazione la metrica dello spaziotempo $g_{\mu\nu}$ alla metrica dello spazio tangente η_{cd} . Quindi ogni altra tetrad h'^a mette in relazione le stesse metriche

$$g_{\mu\nu} = \eta_{cd} h'^c_\mu h'^d_\nu \quad (3.39)$$

Soggetto a una trasformazione di Lorentz locale $\Lambda^a_b(x)$, la connessione spinoriale subisce la trasformazione

$$A'^a_{b\mu} = \Lambda^a_c(x) A^c_{d\mu}(x) \Lambda_b^d(x) + \Lambda^a_c(x) \partial_\mu \Lambda_b^c(x) \quad (3.40)$$

L'ultimo termine è non-omogeneo appare perchè dovuto alla natura non-tensoriale delle connessioni.

3.2 Curvatura e Torsione

Per definire curvatura e torsione è necessario avere una connessione di Lorentz. Data una connessione di Lorentz $A^a_{b\mu}$, la corrispondente curvatura è una 2-forma che assume valori nell'algebra di Lie del gruppo di Lorentz

$$R_{\nu\mu} = \frac{1}{2} R^ab_{\nu\mu} S_{ab} \quad (3.41)$$

Anche la torsione è una 2-forma, ma assumendo che i valori nell'algebra di Lie del gruppo di traslazione,

$$T_{\nu\mu} = T^a_{\nu\mu} P_a \quad (3.42)$$

con $P_a = \partial_a$ i generatori di traslazione. Le componenti della curvatura e torsione sono dati, rispettivamente, da

$$R^a_{b\nu\mu} = \partial_\nu A^a_{b\mu} - \partial_\mu A^a_{b\nu} + A^a_{e\nu} A^e_{b\mu} - A^a_{e\mu} A^e_{b\nu} \quad (3.43)$$

e

$$T^a_{\nu\mu} = \partial_\nu h^a_\mu - \partial_\mu h^a_\nu + A^a_{e\nu} h^e_\mu - A^a_{e\mu} h^e_\nu \quad (3.44)$$

Con la contrazione con le tetradi, questi tensori possono essere scritti nella forma con indici riferiti allo spaziotempo:

$$R^\rho_{\lambda\nu\mu} = h_a^\rho h^b_\lambda R^a_{b\nu\mu} \quad (3.45)$$

e

$$T^\rho_{\nu\mu} = h_a^\rho T^a_{\nu\mu} \quad (3.46)$$

Usando la relazione (3.33), le loro componenti si trovano

$$R^\rho_{\lambda\nu\mu} = \partial_\nu \Gamma^\rho_{\lambda\mu} - \partial_\mu \Gamma^\rho_{\lambda\nu} + \Gamma^\rho_{\eta\nu} \Gamma^\eta_{\lambda\mu} - \Gamma^\rho_{\eta\mu} \Gamma^\eta_{\lambda\nu} \quad (3.47)$$

e

$$T^\rho_{\nu\mu} = \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\mu} \quad (3.48)$$

Dato che la connessione $A^a_{b\nu}$ è un quadri-vettore, soddisfa

$$A^a_{bc} = A^a_{b\nu} h^\nu_c \quad (3.49)$$

Si può perciò verificare che, in una base anonomica $\{h_a\}$, le componenti di curvatura e torsione sono date rispettivamente da

$$R^a_{bcd} = h_c(A^a_{bd}) - h_d(A^a_{bc}) + A^a_{ec} A^e_{bd} - A^a_{ed} A^e_{bc} - f^e_{cd} A^a_{be} \quad (3.50)$$

e

$$T^a_{bc} = A^a_{cb} - A^a_{bc} - f^a_{bc} \quad (3.51)$$

dove abbiamo chiamato $h_c = h_c^\mu \partial_\mu$. Usando l'equazione (3.51) si ottiene

$$A_{bc}^a = \frac{1}{2}(f_{bc}^a + T_{bc}^a + f_{cb}^a + T_{cb}^a - f_{bc}^a - T_{bc}^a) \quad (3.52)$$

Questa espressione può essere riscritta nella forma

$$A_{bc}^a = \overset{\circ}{A}_{bc}^a + K_{bc}^a \quad (3.53)$$

dove

$$\overset{\circ}{A}_{bc}^a = \frac{1}{2}(f_{bc}^a + f_{cb}^a - f_{bc}^a) \quad (3.54)$$

è la solita espressione della connessione spinoriale nella relatività generale in termini di coefficienti di anolonomia, e

$$K_{bc}^a = \frac{1}{2}(T_{bc}^a + T_{cb}^a - T_{bc}^a) \quad (3.55)$$

è il tensore contorsione. La corrispondente espressione in termini di indici dello spziotempo si legge

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho + K_{\mu\nu}^\rho \quad (3.56)$$

dove

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \quad (3.57)$$

è la torsione zero di Christoffel, o connessione di Levi-Civita, e

$$K_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}(T_{\nu\mu}^\rho + T_{\mu\nu}^\rho - T_{\mu\nu}^\rho) \quad (3.58)$$

è l'indice dello spaziotempo del tensore contorsione. Le equazioni (3.53) e (3.56) sono il contenuto di un teorema, il quale dice che ogni connessione di Lorentz può essere scomposta nella connessione spinoriale della relatività generale più il tensore torsione. Come è ben saputo, la connessione di Levi-Civita di una generica metrica spaziotempo ha torsione nulla ma curvatura non nulla:

$$T_{\nu\mu}^\rho = 0 \quad \text{e} \quad \overset{\circ}{R}{}^\rho{}_{\lambda\nu\mu} \neq 0 \quad (3.59)$$

3.3 Connessioni di Lorentz Inerziali

Nella relatività ristretta, le connessioni di Lorentz rappresentano gli effetti inerziali in un dato sistema. In modo da ottenere la forma esplicita di tali connessioni, ricordiamo che la categoria dei sistemi inerziali (o olonomici), chiamata e_μ^a , è definita tutti i sistemi per i quali $f_{ab}^c = 0$. In generale, il sistema che appartiene a questa categoria ha la forma olonomica

$$e_\mu^a = \partial_\mu x^a \quad (3.60)$$

dove x'^a tale che $x'^a = x'^a(x^\mu)$. Soggetto a una trasformazione di Lorentz locale, il sistema olonomico (3.60) si trasforma, usando

$$e^a{}_\mu = \Lambda^a{}_b(x) e'^b{}_\mu \quad (3.61)$$

Svolgendo un semplice calcolo si può mostrare la seguente forma

$$e^a{}_\mu = \partial_\mu x^a + \dot{A}^a{}_{b\mu} x^b \equiv \dot{D}_\mu x^a \quad (3.62)$$

dove

$$\dot{A}^a{}_{b\mu} = \Lambda^a{}_e(x) \partial_\mu \Lambda_b{}^e(x) \quad (3.63)$$

è una connessione di Lorentz che rappresenta gli effetti inerziali presenti nel nuovo sistema $e^a{}_\mu$. Come si può vedere dall'equazione (3.40), è solo la connessione ottenuta da una trasformazione di Lorentz della connessione spinoriale $\dot{A}'^e{}_{d\mu} = 0$:

$$\dot{A}^a{}_{b\mu} = \Lambda^a{}_e(x) \dot{A}'^e{}_{d\mu} \Lambda_b{}^d(x) + \Lambda^a{}_e(x) \partial_\mu \Lambda_b{}^e(x) \quad (3.64)$$

Partendo da un sistema inerziale, categorie diverse di sistemi sono ottenute rendendo *locali* (dipendenti dal punto) trasformazioni di Lorentz $\Lambda^a{}_b(x^\mu)$. In ogni categoria, tutti i sistemi sono in relazione attraverso trasformazioni di Lorentz *globali* (indipendenti dal punto), $\Lambda^a{}_b = \text{costante}$. Ogni componente della connessione inerziale (3.63), rappresenta un effetto inerziale diverso. A causa della sua presenza, il sistema trasformato $e^a{}_\mu$ non è più olonomico. Infatti il suo coefficiente di anolonomia è dato da

$$f^c{}_{ab} = - \left(\dot{A}^c{}_{ab} - \dot{A}^c{}_{ba} \right) \quad (3.65)$$

dove abbiamo usato l'identità $\dot{A}^a{}_{bc} = \dot{A}^a{}_{b\mu} e^{\mu c}$. Di certo, come una connessione puramente inerziale, $\dot{A}^a{}_{b\mu}$ ha curvatura e torsione nulla.

$$\dot{R}^a{}_{b\nu\mu} \equiv \partial_\nu \dot{A}^a{}_{b\mu} - \partial_\mu \dot{A}^a{}_{b\nu} + \dot{A}^a{}_{e\nu} \dot{A}^e{}_{b\mu} - \dot{A}^a{}_{e\mu} \dot{A}^e{}_{b\nu} = 0 \quad (3.66)$$

e

$$\dot{T}^a{}_{\nu\mu} \equiv \partial_\nu e^a{}_\mu - \partial_\mu e^a{}_\nu + \dot{A}^a{}_{e\nu} e^e{}_\mu - \dot{A}^a{}_{e\mu} e^e{}_\nu = 0 \quad (3.67)$$

3.4 Gravità Teleparallela

3.4.1 Potenziali di Traslazione di Gauge

La gravità teleparallela corrisponde a una teoria di gauge per gruppi di traslazioni. Come tale, il campo gravitazionale è rappresentato da un

potenziale di traslazione di gauge B_μ^a , una 1-forma assumendo che

$$B_\mu = B_\mu^a P_a \quad (3.68)$$

con $P_a = \partial_a$ i generatori di traslazione. La parte non banale della tetrad appare come

$$h_\mu^a = e_\mu^a + B_\mu^a \quad (3.69)$$

dove

$$e_\mu^a \equiv \dot{D}_\mu x^a = \partial_\mu x^a + \dot{A}^a_{b\mu} x^b \quad (3.70)$$

è la tetrad banale (non gravitazionale) (3.62). Soggetta a una traslazione di gauge infinitesima

$$\delta x^a = \epsilon^b P_b x^a \equiv \epsilon^a \quad (3.71)$$

con $\epsilon^a \equiv \epsilon^a(x^\mu)$ la trasformazione dei parametri, il potenziale gravitazionale B_μ^a si trasforma in base a

$$\delta B_\mu^a = -\dot{D}_\mu \epsilon^a \quad (3.72)$$

Conseguentemente, la tetrad (3.69) è gauge-invariante

$$\delta h_\mu^a = 0 \quad (3.73)$$

Questa è una questione di coerenza poichè una trasformazione non può cambiare la metrica spaziotempo.

3.4.2 Connessione Spinoriale Teleparallela

Il campo gravitazionale nella gravità teleparallela è rappresentato dal potenziale di traslazione di gauge B_μ^a . Ciò significa che in questa teoria le connessioni di Lorentz mantengono il loro ruolo della relatività ristretta rappresentato solo da effetti puramente inerziali. La connessione fondamentale della gravità teleparallela è di conseguenza la connessione puramente inerziale (3.63), che ha curvatura nulla

$$\dot{R}^a_{b\mu\nu} = \partial_\mu \dot{A}^a_{b\nu} - \partial_\nu \dot{A}^a_{b\mu} + \dot{A}^a_{e\mu} \dot{A}^e_{b\nu} - \dot{A}^a_{e\nu} \dot{A}^e_{b\mu} = 0 \quad (3.74)$$

Per una tetrad che una traslazione non banale del potenziale di gauge, cioè, per

$$B_\mu^a = \dot{D}_\mu \epsilon^a \quad (3.75)$$

la torsione sarà non nulla

$$\dot{T}^a_{\mu\nu} = \partial_\mu h^a_\nu - \partial_\nu h^a_\mu + \dot{A}^a_{e\mu} h^e_\nu - \dot{A}^a_{e\nu} h^e_\mu \neq 0 \quad (3.76)$$

Usando l'identità banale

$$\dot{D}_\mu \dot{D}_\nu x^a - \dot{D}_\nu \dot{D}_\mu x^a = 0 \quad (3.77)$$

Può essere riscritto nella forma

$$\dot{T}^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu B^a{}_\nu - \partial_\nu B^a{}_\mu + \dot{A}^a{}_{b\mu} B^b{}_\nu - \dot{A}^a{}_{b\nu} B^b{}_\mu \quad (3.78)$$

che è il campo di forza della gravità. In questa teoria, perciò, la gravitazione è rappresentata dalla torsione, non dalla curvatura. A causa dell'invarianza di gauge della tetrate, il campo di forza è anche invariante se soggetto a trasformazioni di gauge:

$$\dot{T}'^a{}_{\mu\nu} = \dot{T}^a{}_{\mu\nu} \quad (3.79)$$

La connessione lineare dello spaziotempo che corrisponde alla connessione spinoriale inerziale è

$$\dot{\Gamma}^\rho{}_{\nu\mu} = h_a{}^\rho \partial_\mu h^a{}_\nu + h_a{}^\rho \dot{A}^a{}_{b\mu} h^b{}_\nu \equiv h_a{}^\rho \dot{D}_\mu h^a{}_\nu \quad (3.80)$$

Questa è la cosiddetta connessione di Weitzenböck. La sua definizione è equivalente all'identità

$$\partial_\mu h^a{}_\nu + \dot{A}^a{}_{b\mu} h^b{}_\nu - \dot{\Gamma}^\rho{}_{\nu\mu} h^a{}_\rho = 0 \quad (3.81)$$

Nella categoria di sistemi in cui la connessione spinoriale $\dot{A}^a{}_{b\mu}$ si annulla, si riduce a

$$\partial_\mu h^a{}_\nu - \dot{\Gamma}^\rho{}_{\nu\mu} h^a{}_\rho = 0 \quad (3.82)$$

che è detta assoluta, o condizione di “distant parallelism”, da cui la gravità teleparallela prende il suo nome. È importante ricordare che, quando il termine assoluto, o condizione di “distant parallelism” fu inventata, nessuno era consapevole che questa condizione fosse valida solo per una specifica categoria di sistemi. L'espressione generale valida in ogni sistema è quella data dall'equazione (3.81). Ciò significa essenzialmente che la tetrate non è effettivamente trasportata in modo parallelo ovunque dalla condizione di Weitzenböck. Il nome “gravità teleparallela” di conseguenza non è appropriato. Naturalmente, lo si conserva per ragioni storiche.

3.4.3 Equazioni di Campo

La lagrangiana teleparallela ha la seguente forma

$$\dot{\mathcal{L}} = \frac{h}{4k} \dot{T}_{a\mu\nu} \dot{S}^{a\mu\nu} \quad (3.83)$$

dove la quantità $\dot{S}^{a\mu\nu}$ è il superpotenziale, ed è determinato dalle seguente formula

$$\dot{S}_a{}^{\rho\sigma} \equiv -\dot{S}_a{}^{\sigma\rho} = h_a{}^\nu \left(\dot{K}^{\rho\sigma}{}_\nu - \delta_\nu{}^\sigma \dot{T}^{\theta\rho}{}_\theta + \delta_\nu{}^\rho \dot{T}^{\theta\sigma}{}_\theta \right) \quad (3.84)$$

dove

$$\dot{K}^{\rho\sigma}{}_\nu = \frac{1}{2} \left(\dot{T}^{\sigma\rho}{}_\nu + \dot{T}_\nu{}^{\rho\sigma} - \dot{T}^{\rho\sigma}{}_\nu \right) \quad (3.85)$$

Usando la relazione (3.56) per il caso specifico della torsione teleparallela, è possibile mostrare che

$$\dot{\mathcal{L}} = \mathring{\mathcal{L}} - \partial_\mu \left(2hk^{-1} \dot{T}^{\nu\mu}{}_\nu \right) \quad (3.86)$$

dove

$$\mathring{\mathcal{L}} = -\frac{\sqrt{-g}}{2k} \mathring{R} \quad (3.87)$$

è la lagrangiana di Einstein-Hilbert della relatività generale. Perciò, fino ad una divergenza la lagrangiana teleparallela è equivalente alla lagrangiana della relatività generale.

Ci si può chiedere perchè le lagrangiane siano simili fino ad un termine di divergenza. Per capire ciò, ricordiamo che la lagrangiana di Einstein-Hilbert (3.87) dipende dalla tetrade, così come dalle sue derivate prime e seconde. Il termine che contiene derivate seconde, comunque, si riduce ad un termine di divergenza. Di conseguenza, è possibile riscrivere la lagrangiana di Einstein-Hilbert nella seguente forma

$$\mathring{\mathcal{L}} = \mathring{\mathcal{L}}_1 + \partial_\mu (\sqrt{-g} w^\mu) \quad (3.88)$$

dove $\mathring{\mathcal{L}}_1$ è la lagrangiana che dipende esclusivamente dalla tetrade e dalle sue derivate prime, e w^μ è un quadri-vettore. D'altra parte, la lagrangiana teleparallela (3.83) dipende solo dalla tetrade e dalle sue derivate prime. Il termine di divergenza nella relazione di equivalenza (3.86) è perciò necessario per giustificare i diversi ordini della lagrangiana teleparallela e di Einstein-Hilbert. Nelle teorie dei campi classiche, le lagrangiane coinvolgono solo i campi e le loro derivate prime.

Si consideri la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \dot{\mathcal{L}} + \mathcal{L}_s \quad (3.89)$$

con \mathcal{L}_s la lagrangiana di una generale sorgente di campi. La variazione rispetto al potenziale di gauge $B^a{}_\rho$ (o equivalentemente, in termini della tetrade $h^a{}_\rho$) produce la versione teleparallela dell'equazione di campo gravitazionale

$$\partial_\sigma (h \dot{S}_a{}^{\rho\sigma}) - kh \dot{J}_a{}^\rho = kh \Theta_a{}^\rho \quad (3.90)$$

In questa equazione

$$h\dot{J}_a{}^\rho \equiv -\frac{\partial \dot{\mathcal{L}}}{\partial h^a{}_\rho} = \frac{1}{k}h_a{}^\mu \dot{S}_c{}^{\nu\rho} \dot{T}^c{}_{\nu\mu} - \frac{h_a{}^\rho}{h} \dot{\mathcal{L}} + \frac{1}{k} \dot{A}^c{}_{a\sigma} \dot{S}_c{}^{\rho\sigma} \quad (3.91)$$

è una “corrente di gauge”, dovuta al fatto che questa teoria è invariante sotto trasformazioni di coordinate e sotto trasformazioni locali di Lorentz, che genera il campo di gauge A a torsione nulla. Questa può essere vista come una corrente di Noether, in quanto è una corrente conservata associata ad azioni locali.

$$h\Theta_a{}^\rho = -\frac{\delta \mathcal{L}_s}{\delta h^a{}_\rho} \equiv -\left(\frac{\partial \mathcal{L}_s}{\partial h^a{}_\rho} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_s}{\partial \dot{h}^a{}_\rho} \right) \quad (3.92)$$

è la sorgente del tensore energia-impulso. Perciò, partendo da uno spazio piatto, ho ottenuto due invarianze: le trasformazioni di Lorentz, con le quali posso passare da un osservatore inerziale ad un altro senza produrre A e le trasformazioni con le quali posso passare da un sistema inerziale ad uno non inerziale ma generando la componente A , il campo di gauge a torsione nulla. A causa dell’antisimmetria del superpotenziale negli ultimi due indici, la densità totale dell’energia-impulso (gravitazionale più interziale più la sorgente) si conserva in senso ordinario:

$$\partial_\rho (h\dot{J}_a{}^\rho + h\Theta_a{}^\rho) = 0 \quad (3.93)$$

La parte sinistra dell’equazione di campo gravitazionale (3.90) dipende da $\dot{A}^a{}_{b\mu}$. Usando l’identità (3.53) per il caso specifico della connessione inerziale $\dot{A}^a{}_{b\mu}$

$$\dot{A}^a{}_{b\mu} = \dot{A}^a{}_{b\mu} + \dot{K}^a{}_{b\mu} \quad (3.94)$$

svolvendo i calcoli, si può riscrivere in termini di $\dot{A}^a{}_{b\mu}$

$$\partial_\sigma (h\dot{S}_a{}^{\rho\sigma}) - kh\dot{J}_a{}^\rho = h(\dot{R}_a{}^\rho - \frac{1}{2}h_a{}^\rho \dot{R}) \quad (3.95)$$

Come ci si aspetta dall’equivalenza tra le due corrispondenti lagrangiane, l’equazione teleparallela di campo (3.90) è equivalente all’equazione di campo di Einstein

$$\dot{R}_a{}^\rho - \frac{1}{2}h_a{}^\rho \dot{R} = k\Theta_a{}^\rho \quad (3.96)$$

Si può osservare che il tensore energia-impulso appare come sorgente in entrambe le teorie: come sorgente di curvatura nella relatività generale, e come sorgente di torsione nella gravità teleparallela. Ciò è a conferma dell’idea che la curvatura e la torsione sono in relazione con gli stessi gradi di libertà del campo gravitazionale.

Conclusione

Sebbene sia equivalente alla relatività generale, la gravità teleparallela introduce nuovi concetti sia nella teoria classica, sia in quella quantistica. Per esempio, in considerazione della descrizione geometrica della relatività generale, che fa uso della connessione senza torsione di Levi-Civita, c'è una convinzione diffusa che la gravità produca una curvatura nello spaziotempo. Complessivamente l'universo, di conseguenza, dovrebbe essere curvo. Comunque, la gravità teleparallela spezza questo paradigma: diventa puramente convenzione descrivere l'interazione gravitazionale in termini di curvatura o in termini di torsione. Ciò significa che attribuire la curvatura allo spaziotempo non è qualcosa di assoluto, ma una affermazione dipendente dal modello. Inoltre si può notare che, grazie alla gravità teleparallela, si trova che la torsione gioca un ruolo fondamentale: è responsabile per tutti i fenomeni gravitazionali, inclusa la fisica del sistema solare, che può essere reinterpretata in termini di una equazione di forza con la torsione che gioca il ruolo della forza. Da una riformulazione della cosmologia basata sulla gravità teleparallela si può ottenere un modo nuovo considerare l'universo, eventualmente svelando nuovi punti di vista non visibile nell'approccio standard basato sulla relatività generale.

Non solo la cosmologia, ma anche molti altri fenomeni gravitazionali potrebbero acquisire nuove prospettive se analizzate dal punto di vista teleparallelo. Per esempio, nella gravità teleparallela è presente una espressione tensoriale della densità dell'energia impulso solo per la gravità, effetti inerziali esclusi. Le onde gravitazionali non possono più essere interpretate come la propagazione della perturbazione della curvatura nel tessuto dello spaziotempo, ma come la propgazione delle onde del campo di forza torsionali. Ancora più importante, la gravità teleparallela sembra essere una teoria molto più appropriata per trattare la quantizzazione del campo gravitazionale. Si può quindi concludere dicendo che questa teoria non solo è equivalente alla relatività generale, ma è proprio un nuovo modo per guardare a tutti i fenomeni gravitazionali.

In sostanza, anche se equivalenti le teorie possono sembrare molto diverse tra di loro: la *relatività generale* parte da uno spazio curvo, lo *spaziotempo*, curvato dalla presenza di masse che quindi generano *curvatura*, fa uso del *principio di equivalenza* e della *covarianza generale*, ottenendo delle traiettorie *geodetiche* e il sistema non risulta soggetto a forze. La *gravità teleparallela* invece, parte da uno spazio sostanzialmente *piatto*, ovvero $\mathbb{R}^{3,1}$, ottenendo quindi una curvatura *nulla*, mentre i fenomeni gravitazionali sono descritti da *equazioni di forza*, generate dalla *torsione*. La gravità teleparallela, da un certo punto di vista, può sembrare meglio definita, in quanto le varietà in cui è definita è chiara, sostanzialmente sono aperti di $\mathbb{R}^{3,1}$, mentre nella relatività generale non è specificata chi è la varietà, trovarle è parte integrante del problema. Al contrario, data la natura piatta dello spazio di partenza, è difficile immaginare l'esistenza di alcune caratteristiche topologiche tipiche dello spaziotempo, come i Ponti di Einstein-Rosen, conosciuti anche come *warmhole*, ipotetiche connessioni di due punti nell'universo che permetterebbero di viaggiare tra di essi più velocemente di quanto impiegherebbe la luce a percorrere la distanza attraverso lo spazio normale.

Bibliografia

- [1] J. G. Pereira, *Teleparallelism: A New Insight into Gravity*, arXiv:1302.6983
- [2] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, *Teleparallel Gravity: An Introduction* (Springer, Dordrecht, 2012).
- [3] B. Schutz, *Geometrical methods of mathematical physics*, Cambridge Univ. Press (1980).
- [4] S. Carroll, *Spacetime and geometry*, Addison-Wesley (2004).
- [5] Roberto Casadio, *Elements of Relativity*,
- [6] A. Einstein, *Come io vedo il mondo, La teoria della relatività*, Newton Compton Editori, (1975)

Ringraziamenti

Prima di tutto, vorrei ringraziare sinceramente il Prof. Roberto Casadio, per l'aiuto, il sostegno, la passione e la pazienza dedicatami nello svolgimento del mio lavoro.

Desidero inoltre ringraziare il mio babbo, che mi ha insegnato la matematica e soprattutto mi ha insegnato ad amarla.

Ringrazio tutta la mia famiglia e i miei parenti, ognuno di loro ha saputo mostrarmi fiducia nelle mie possibilità.

Un ringraziamento speciale a Chiara, Giulia, Ilaria e Stefano: grazie ragazzi, senza di voi non ce l'avrei mai fatta.

Grazie a Celeste, Marika e Roberta, indimenticabili amiche e compagne di viaggio.

Ho sempre cercato le soluzioni, le risposte, le ragioni, più ne avevo più ne cercavo, una ricerca spesso frustrante; poi ho incontrato una persona che ora è tutte le mie ragioni: ecco perchè il ringraziamento più grande, più bello, più sincero va a Cecilia, per ciò che sei, per esserci sempre stata e per esserci sempre.