

Dipartimento di Ingegneria dell'Energia Elettrica e dell'Informazione
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Elettronica

Tesi di Laurea in
Progetto di Circuiti Analogici M - A

*Campionamento e ricostruzione
di immagini full wavefield per il monitoraggio
strutturale*

Laureando:
Tommaso Di Ianni

Relatore:
Chiar.mo Prof. Guido Masetti

Correlatori:
Dott. Ing. Luca De Marchi
Dott. Alessandro Perelli

Indice

Introduzione	1
1 Applicazioni per la diagnostica non distruttiva	4
1.1 Introduzione	4
1.2 Onde superficiali di Lamb	6
1.3 Trasduttori piezoelettrici	8
1.4 Acquisizione con vibrometro laser	10
2 Campionamento compressivo	14
2.1 Introduzione alla teoria del Compressive Sensing	14
2.2 Schemi di campionamento	16
2.2.1 Campionamento Jittered	19
2.2.2 Campionamento Farthest Point	19
3 Dizionari per la rappresentazione di segnali wavefield	24
3.1 Trasformata discreta di Fourier	24
3.2 Metodi alternativi di rappresentazione	25
3.2.1 Trasformata Curvelet 2D	26
3.2.2 Trasformata Curvelet 3D	28
3.2.3 Trasformata Wave Atom	28
3.2.4 Approccio Mirror Extended	33
3.3 Trasformata Warped in frequenza	35

4 Implementazione in ambiente MATLAB	38
4.1 Algoritmo Basis Pursuit	38
4.2 Libreria SPARCO	40
4.3 Maschera Farthest Point Sampling	42
5 Risultati sperimentali	43
5.1 Setup in alluminio con simulazione del difetto	44
5.2 Ricostruzione con basi 3D	45
5.2.1 Numero di iterazioni	45
5.2.2 Estensione del dominio spaziale	50
5.2.3 Ricostruzione del segnale warped	53
5.3 Ricostruzione con basi 2D	54
5.3.1 Numero di iterazioni	54
5.3.2 Approccio Mirror Extended	57
5.4 Schemi di campionamento	59
5.4.1 Griglia adattativa	61
5.5 Tabella riassuntiva dei risultati	62
5.6 Setup in alluminio con crack	64
5.7 Setup in materiale composito con delaminazione	66
Conclusioni	68
A Appendice dei codici	71
Bibliografia	79

Elenco delle figure

1.1	Curve di dispersione	9
1.2	Sequenza di immagini wavefield in una piastra di alluminio . . .	12
1.3	Energia del segnale full wavefield	13
2.1	Campionamento di un segnale sparso nel dominio di Fourier . .	18
2.2	Schema di campionamento jittered 2D	20
2.3	Schema di campionamento FPS	21
2.4	Spettro di ampiezza degli schemi di campionamento	23
3.1	Curvelet 2D: scomposizione del piano frequenze/numeri d'onda	27
3.2	Curvelet 3D: scomposizione dello spazio frequenze/numeri d'on- da	29
3.3	Wave Atom: scomposizione del piano frequenze/numeri d'onda	30
3.4	Funzioni base: Fourier; Curvelet; Wave Atom	31
3.5	Spettro di ampiezza funzioni base: Fourier; Curvelet; Wave Atom	32
3.6	Funzione base Curvelet - Mirror Extended	34
3.7	Compensazione della dispersione	37
5.1	Setup sperimentale	44
5.2	Schema di campionamento jittered 1D	45
5.3	Risultati ricostruzione con basi 3D: numero di iterazioni . . .	46
5.4	Energia del residuo di ricostruzione con basi 3D	47

ELENCO DELLE FIGURE

5.3 Immagine wavefield del segnale sottocampionato e ricostruito con basi 3D	49
5.4 Risultati ricostruzione con basi 3D: estensione del dominio . . .	50
5.5 Energia del residuo di ricostruzione con basi 3D con estensione del dominio	51
5.6 Immagine wavefield segnale ricostruito con basi 3D ed estensione del dominio	52
5.7 Risultati ricostruzione del segnale warped	53
5.8 Risultati ricostruzione con basi 2D: numero di iterazioni	55
5.9 Energia del residuo di ricostruzione con basi 2D	56
5.10 Risultati ricostruzione con basi 2D Mirror Extended	57
5.11 Energia del residuo di ricostruzione con basi 2D Mirror Extended	58
5.12 SNR ricostruzione FFT3D al variare della percentuale dei campioni	60
5.13 Energia del residuo di ricostruzione - setup in alluminio con crack	65
5.14 Energia del residuo di ricostruzione - setup in materiale composito con delaminazione	67

Elenco delle tabelle

5.1	Risultati ricostruzione con campionamento jittered ed FPS . . .	59
5.2	Risultati ricostruzione FFT3D con distribuzioni multirisoluzione dei campioni	61
5.3	Tabella riassuntiva dei risultati di ricostruzione del segnale full wavefield	62
5.4	Tabella riassuntiva dei risultati di ricostruzione del segnale full wavefield warped	63
5.5	Risultati ricostruzione del segnale wavefield acquisito su setup in alluminio con crack	64
5.6	Risultati ricostruzione del segnale wavefield acquisito su setup in materiale composito con delaminazione	66

Introduzione

In anni recenti le tecniche di monitoraggio strutturale si sono imposte, grazie alle conoscenze acquisite in campo ingegneristico, come strumento all'avanguardia per garantire la sicurezza in servizio di diverse tipologie di strutture meccaniche, migliorando l'efficacia e la tempestività degli interventi di manutenzione. Oggetto di analisi per i sistemi di monitoraggio sono componenti strutturali di veicoli aeromobili e navali, infrastrutture civili quali dighe, ponti stradali e ferroviari, componenti meccaniche di turbomacchine ed in generale ogni struttura soggetta ad usura per la quale un controllo continuo delle condizioni di deterioramento consenta un intervento mirato con l'obiettivo di ripristinare tempestivamente le condizioni di funzionamento ottimali.

In questo contesto, il rilevamento dei difetti e delle anomalie eventualmente presenti all'interno del materiale rappresenta un contributo essenziale verso la valutazione preventiva dello stato di salute della struttura. In particolare, le procedure basate sull'analisi della propagazione di un campo ultrasonico, definite anche di *wavefield analysis*, forniscono uno strumento ideale per l'ispezione non distruttiva [1] grazie alla capacità del campo di propagarsi all'interno del materiale senza alterarne in alcun modo le caratteristiche meccaniche.

L'acquisizione del campo acustico rappresenta un processo lento ed oneroso anche per strutture di dimensioni ridotte, a causa delle elevate frequenze del segnale ultrasonico necessarie al conseguimento di una buona risoluzione spaziale di scansione. Obiettivo di questo elaborato è lo studio e la validazione

sperimentale di strategie alternative per il campionamento e la ricostruzione del segnale wavefield ultrasonico acquisito su strutture planari mediante vibrometro laser, al fine di *limitare* quanto possibile i tempi di acquisizione.

Secondo quanto asserito dalla teoria del Compressive Sensing, è possibile sottocampionare un segnale, ovvero acquisire un numero di campioni inferiore a quanto stabilito dal teorema di Shannon/Nyquist, senza sostanziali perdite di informazione. Tale risultato, benchè affatto gratuito, è di notevole importanza ed è possibile grazie a particolari condizioni le cui implicazioni sono ambivalenti. Da un lato infatti, queste presuppongono la scelta di una *strategia di distribuzione* dei campioni idonea per ciascuna applicazione; dall'altro, denotano la necessità di definire un *dizionario* adeguato, ovvero una collezione di funzioni che in qualche modo rispecchino condizioni di regolarità intrinseche del segnale.

Il Compressive Sensing trae dunque vantaggio da conoscenze a priori sul segnale da ricostruire con l'obiettivo di ridurre lo sforzo energetico del campionamento. Essendo il processo di acquisizione tanto più inefficiente quanto più è ridondante la rappresentazione del segnale in una determinata base, il problema può essere dunque affrontato rappresentando il segnale in funzione di basi a loro volta ridondanti, in virtù delle quali l'informazione può essere condensata in un numero limitato di coefficienti. In tal caso la rappresentazione del segnale si definisce *sparsa* in quanto presenta un numero limitato di coefficienti apprezzabilmente diversi da zero.

Per la rappresentazione sparsa del segnale wavefield ultrasonico, le condizioni di regolarità geometrica dei fronti d'onda suggeriscono dunque l'impiego di dizionari multiscala di funzioni localizzate non solo nel dominio delle frequenze ma anche in quello spaziale. In particolare, le trasformate Curvelet e Wave Atom offrono peculiari caratteristiche direzionali, assenti in altre trasformazioni, che le rendono particolarmente adatte per la rappresentazione di segnali con discontinuità lungo curve geometriche regolari.

In conclusione, il confronto dei risultati sperimentali di ricostruzione del segnale wavefield fornisce una visione d'insieme del problema del campionamento compressivo relativamente a strutture di varia natura ed in presenza di differenti tipologie di difetto.

L'elaborato è organizzato come segue:

- Nel Capitolo 1 si fornisce una panoramica introduttiva delle tecniche di analisi non distruttiva per il rilevamento dei difetti, con particolare riguardo verso l'analisi della propagazione del campo ultrasonico superficiale, di cui si discute un'introduzione teorica.
- Nel Capitolo 2 sono esaminate differenti strategie di campionamento. A partire dalla definizione della teoria del Compressive Sensing, si analizzano i metodi noti come campionamento Jittered ed FPS per la distribuzione dei punti di acquisizione del segnale ultrasonico, in accordo con le condizioni imposte dal campionamento compressivo.
- Nel Capitolo 3 si definiscono le basi per la rappresentazione sparsa del segnale wavefield, analizzando in particolare i dettagli teorici e le proprietà delle trasformate di Fourier, Curvelet e Wave Atom in due e tre dimensioni.
- Nel Capitolo 4 si presenta l'implementazione in ambiente MATLAB dell'algoritmo di ricostruzione del segnale sottocampionato e delle funzioni per la generazione delle distribuzioni dei punti di campionamento.
- Nel Capitolo 5 si forniscono i risultati di ricostruzione del segnale wavefield acquisito con diversi setup sperimentali su strutture planari in materiale metallico o composito.
- Si discutono infine le Conclusioni e gli sviluppi futuri dell'applicazione in analisi.

Applicazioni per la diagnostica non distruttiva

1.1 Introduzione

Nel corso degli ultimi decenni, la crescente necessità di potenziare le condizioni di sicurezza di strutture meccaniche complesse ha causato un'accelerazione nello sviluppo di tecniche di ispezione ed analisi non distruttive per il rilevamento della presenza di eventuali difetti ed irregolarità strutturali, con l'obiettivo di fornire una diagnosi preventiva dei guasti e contribuendo dunque ad evitare, ove possibile, eventi catastrofici.

Si identifica come difetto un generico cambiamento introdotto nel sistema che influisce negativamente sulle prestazioni dello stesso. Ad esempio, l'insorgere di una crepa in un componente meccanico può alterarne le caratteristiche di resistenza e causare la rottura in seguito a condizioni di carico sfavorevoli. Tale evento, oltre a rappresentare certamente un costo in termini di manutenzione, può avere conseguenze anche fatali a causa dell'improvvisa assenza delle condizioni operative di sicurezza. Esempi tipici di difetto includono "crack" in componenti metalliche, delaminazioni in materiali compositi, dissaldature e corrosione. D'altra parte, il difetto può essere del tutto invisibile ad occhio nudo e necessita dunque di procedure che ne favoriscano il rilevamento e l'identificazione. Il monitoraggio strutturale o Structural Health

Monitoring (SHM) [2] *integra* tali procedure, anche definite Non-Destructive Testing (NDT) e Non-Destructive Evaluation (NDE) [3], all'interno della struttura stessa con l'obiettivo di fornire informazioni di tipo diagnostico e di valutarne lo stato di salute.

Sebbene non vi sia una distinzione formale univoca tra lo sconfinato campo delle tecniche SHM e quelle di Non-Destructive Testing ed Evaluation, queste ultime sono comunemente riferite all'ispezione *programmata* della struttura meccanica utilizzando strumenti per lo più esterni ad essa. Viceversa, la dicitura SHM riguarda una serie di attività finalizzate ad una diagnosi *continua* della struttura attraverso sistemi del tutto integrati al suo interno, avvalendosi peraltro di principi propri di NDT e NDE.

Alla base di tali procedure vi è l'idea per la quale alterazioni delle proprietà fisiche del materiale, quali ad esempio la durezza e la resistenza, introdotte dalla presenza di un'avaria nel sistema, provocano modifiche nella risposta dinamica dello stesso che possono essere rilevate attraverso una rete di sensori ed elaborate al fine di dedurre una diagnosi sulle condizioni di deterioramento del materiale, consentendo l'intervento preventivo prima che queste raggiungano un livello critico.

I sistemi SHM possono essere classificati in base all'utilizzo di tecniche di ispezione attive o passive [4]. Il monitoraggio passivo valuta lo stato della struttura attraverso una rete di sensori in acquisizione continua. Esempi di SHM passivo comprendono il controllo dei carichi strutturali, degli sforzi, delle condizioni ambientali di lavoro, dell'emissione acustica provocata dall'insorgere di crack in strutture metalliche, ecc. In altri termini il monitoraggio passivo "ascolta" la struttura senza interagire con essa. L'affidabilità e l'efficienza di queste tecniche possono essere incrementate facendo uso di procedimenti che non si limitino ad ascoltare la struttura ma la "interrogano" attivamente determinando la presenza di anomalie e valutandone allo stesso tempo la natura e l'estensione; si parla in tal caso di SHM attivo.

I benefici derivanti dall'utilizzo di sistemi per il monitoraggio strutturale sono molteplici. La già citata riduzione dei costi di ispezione e manutenzione ordinaria e il miglioramento delle condizioni di sicurezza includono in realtà una serie di più sottili motivazioni che catalizzano la ricerca di sistemi

di auto-diagnosi verso l'implementazione di strutture *smart*. Ad esempio, il rilevamento di difetti strutturali permette di agire precocemente verso la soluzione del problema, evitando di aggravare l'entità del danno a causa dell'esposizione continuata della struttura agli sforzi meccanici. In conseguenza, viene almeno in parte a mancare l'esigenza di sovradimensionamento della struttura, aumentandone l'efficienza e limitando drasticamente, oltre ai costi di ripristino, lo sforzo di progettazione.

Ancora a beneficio dell'efficienza, la sostituzione dei metalli con più resistenti e leggeri materiali compositi avanzati, primo fra tutti la fibra di carbonio. A causa di una non completa caratterizzazione dei fattori di deterioramento di tali materiali, il loro impiego necessita di continue attività di verifica, servendosi dell'indispensabile supporto del monitoraggio strutturale. Sono questi solo alcuni dei possibili vantaggi che fanno dell'SHM un potente strumento verso la sostenibilità di strutture meccaniche avanzate, efficienti ed altamente performanti.

1.2 Onde superficiali di Lamb

In un solido elastico infinito sono possibili due modi di propagazione: onde longitudinali o compressionali (onde P) e onde trasversali o di taglio (onde S). Se, d'altra parte, il solido è limitato, le riflessioni ai bordi danno vita ad una varietà di onde cui si fa riferimento come *onde guidate*, di particolare interesse grazie alla capacità di propagarsi attraverso lunghe distanze con perdite di energia minime.

A causa della rifrazione all'interfaccia tra la superficie della struttura e quella del trasduttore, quando questo è eccitato con un segnale ad alta frequenza viene generata nel mezzo una combinazione di onde trasversali e longitudinali, le cui caratteristiche dipendono dall'angolo di incidenza del raggio ultrasonico e dalle velocità di propagazione nei due materiali. In corrispondenza dei bordi l'elevata impedenza non consente la propagazione dei fronti d'onda verso l'esterno, e si verificano riflessioni e conversioni di modo che danno vita al cosiddetto *pacchetto d'onda*; in altri termini i bordi *guidano* l'onda elastica all'interno della struttura, che si definisce pertanto

guida d'onda. Nel caso di guide d'onda planari, si parla in particolare di *onde di Lamb*.

Le definizione formale delle onde di Lamb [7] deriva dall'equazione elasto-dinamica delle onde

$$\rho \ddot{u}_i = (s_{ijkl} u_{k,l})_i \quad (1.1)$$

in cui ρ rappresenta la densità, u il campo di spostamento ed s il tensore di rigidità. Utilizzando il teorema di Helmholtz, si ottiene dalla (1.1) una coppia di equazioni differenziali disaccoppiate nelle funzioni ausiliarie ϕ e ψ

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} = \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (1.3)$$

che descrivono la propagazione del campo longitudinale con velocità c_L e del campo trasversale con velocità c_T , rispettivamente. Il campo di spostamento può quindi essere espresso in funzione di ϕ e ψ :

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi}{\partial x_3}, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - \frac{\partial \phi}{\partial x_3}. \quad (1.4)$$

Le soluzioni delle Eq. (1.4) sono combinazioni lineari di seni e coseni, pertanto possono essere divise in modi di propagazione simmetrici e antisimmetrici. Il termine u_2 del vettore spostamento è identicamente nullo come conseguenza delle condizioni al contorno imposte sulle superfici superiore ed inferiore della piastra.

L'analisi conduce infine alle equazioni di *Rayleigh-Lamb*

$$\frac{\tan qh/2}{\tan ph/2} = \left[\frac{4k^2 pq}{(q^2 - k^2)^2} \right]^{\pm 1}, \quad (1.5)$$

in cui h è lo spessore della piastra e

$$p^2 = (\omega/c_L)^2 - k^2, \quad q^2 = (\omega/c_T)^2 - k^2, \quad (1.6)$$

essendo k il numero d'onda e $\omega = 2\pi f$ la pulsazione. L'esponente in (1.5)

deve essere considerato positivo per i modi di propagazione simmetrici e negativo per quelli antisimmetrici.

La risoluzione numerica delle equazioni di Rayleigh-Lamb per un determinato materiale fornisce le cosiddette *curve di dispersione* (Figura 1.1), che rappresentano la velocità di gruppo $c_g = d\omega/dk$ in funzione della frequenza per un dato spessore h del materiale in un numero in generale infinito di curve per i modi di propagazione simmetrici S_i e antisimmetrici A_i . Di questi, S_0 ed A_0 sono detti modi fondamentali e rappresentano un buon compromesso tra la banda del segnale di eccitazione e la sua durata al fine di ottenere una buona risoluzione spaziale. In particolare, il modo A_0 è considerato la scelta migliore per quanto riguarda la sensibilità [3].

I vantaggi derivanti dall'utilizzo di onde guidate includono:

- Ispezione su grandi estensioni utilizzando un numero limitato di sensori;
- Sensibilità maggiore di altre tecniche di ispezione basate su ultrasuoni o di altre tecniche di valutazione non distruttiva in genere;
- Capacità di esaminare strutture coperte da rivestimenti, isolanti, malte cementizie e strutture in generale composite;
- Eccellenti potenzialità nel rilevamento dei difetti;
- Possibilità di localizzare, classificare e misurare l'entità dei difetti.

In conclusione, è importante notare che la sensibilità di rilevazione dei difetti è direttamente legata sia al modo di propagazione eccitato sia alla lunghezza d'onda, tanto più piccola quanto maggiore è la sensibilità della scansione richiesta.

1.3 Trasduttori piezoelettrici

L'effetto piezoelettrico accoppia la risposta elettrica e meccanica di un materiale, e può essere dunque facilmente sfruttato per la costruzione di trasduttori. Se sottoposto a uno stress meccanico, un materiale con caratteristica di piezoelettricità reagisce con una separazione di carica superficiale; al

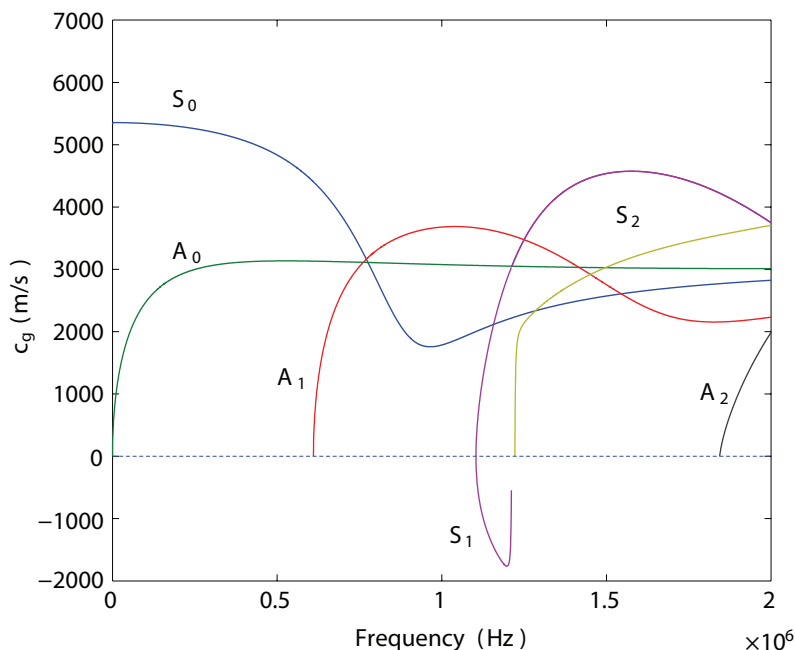


Figura 1.1: Curve di dispersione relative alla propagazione di onde di Lamb in una piastra di alluminio di spessore $h = 2.54$ mm (modulo di Young $E = 69$ GPa, coefficiente di Poisson $\nu = 0.33$, densità $\rho = 2700$ kg/m³).

contrario, in risposta ad un campo elettrico genera un'onda elastica. Pertanto, questo tipo di trasduttore può essere indistintamente utilizzato come attuatore o sensore.

I più diffusi trasduttori piezoelettrici sono costituiti da cristalli di zirconato e titanato di piombo (PZT) o pellicole di fluoruro di polivinile (PVDF) [6]. Per risolvere i problemi di fragilità di questi tipi di materiali sono state inoltre recentemente sviluppate sostanze composite basate su resine epossidiche che, in più, possono adattarsi a superfici curve.

L'acquisizione con una buona risoluzione spaziale del campo ultrasonico necessita di una fitta rete di sensori. Utilizzare trasduttori piezoelettrici può dunque costituire un eccessivo aumento del peso della struttura nonché un disturbo alla propagazione stessa. Una possibile soluzione consiste nell'utilizzare un'unico attuttore piezoelettrico delegando l'acquisizione a tecniche di scansione non a contatto, come sensori air-coupled o tecnologie di scansione ottica [9].

1.4 Acquisizione con vibrometro laser

Il vibrometro a scansione laser [Scanning Laser Doppler Vibrometer (SLDV)] [8] consente di misurare mediante una procedura non invasiva il componente trasversale del vettore spostamento u in (1.1) in una griglia discreta di punti su una superficie planare alla risoluzione spaziale desiderata.

Basandosi sui principi dell'interferometria ottica, il vibrometro emette una coppia di raggi laser ad una lunghezza d'onda fissata λ , dei quali uno è mantenuto come riferimento. Il raggio inviato sulla superficie, d'altra parte, subisce una modulazione in frequenza a causa dell'effetto Doppler, la cui intensità è direttamente legata allo spostamento nel tempo del punto target.

Identificando con I_1 e I_2 le intensità del riferimento e del raggio inviato sulla superficie, rispettivamente, e con r_1 , r_2 le distanze percorse, l'interazione tra i due raggi è descritta dalla relazione:

$$I_{int}(t) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi(r_1 - r_2(t))}{\lambda}\right), \quad (1.7)$$

di cui in particolare il terzo termine costituisce il *termine d'interferenza*. Essendo I_1 , I_2 , r_1 e λ noti, l'informazione sullo spostamento del punto in un generico istante t è contenuta nell'unica incognita $r_2(t)$.

Le tracce acquisite nel tempo sulla superficie di scansione sono organizzate in una matrice 3D $D(x_1, x_2, t)$ cui si farà riferimento nel seguito come segnale full wavefield. Per ogni fissato t_p , la matrice bidimensionale $D(x_1, x_2, t_p)$ si presta ad essere interpretata come un'immagine dalla cui analisi possono essere estrapolate informazioni sull'interazione tra i fronti d'onda del campo ultrasonico e la struttura. Una sequenza di immagini wavefield è riportata in Figura 1.2, relativa all'acquisizione del campo ultrasonico in propagazione in una piastra di alluminio sulla quale è simulata la presenza di un difetto. In tutte le immagini si nota la presenza di riflessioni di ampiezza ridotta che rendono immediatamente visibile la presenza di un'anomalia. In particolare in Figura 1.2(b) è particolarmente evidente il cono d'ombra introdotto dal difetto.

In conclusione, il vibrometro laser consente di acquisire immagini wave-

field che costituiscono un primo ed immediato strumento visuale per la diagnosi delle condizioni della struttura. Per contro, i segnali acquisiti hanno intensità molto bassa e sono affetti da quantità non trascurabili di rumore, che rendono necessarie in ogni punto diverse acquisizioni al fine di rimuovere parte delle interferenze mediante una successiva operazione di media. Il processo di campionamento si dimostra dunque particolarmente lento ed oneroso. Si affronterà quindi nel seguito il problema della minimizzazione dei punti di campionamento sulla superficie della piastra allo scopo di ridurre i tempi di acquisizione lasciando per quanto possibile inalterato il contenuto informativo del segnale wavefield ricostruito.

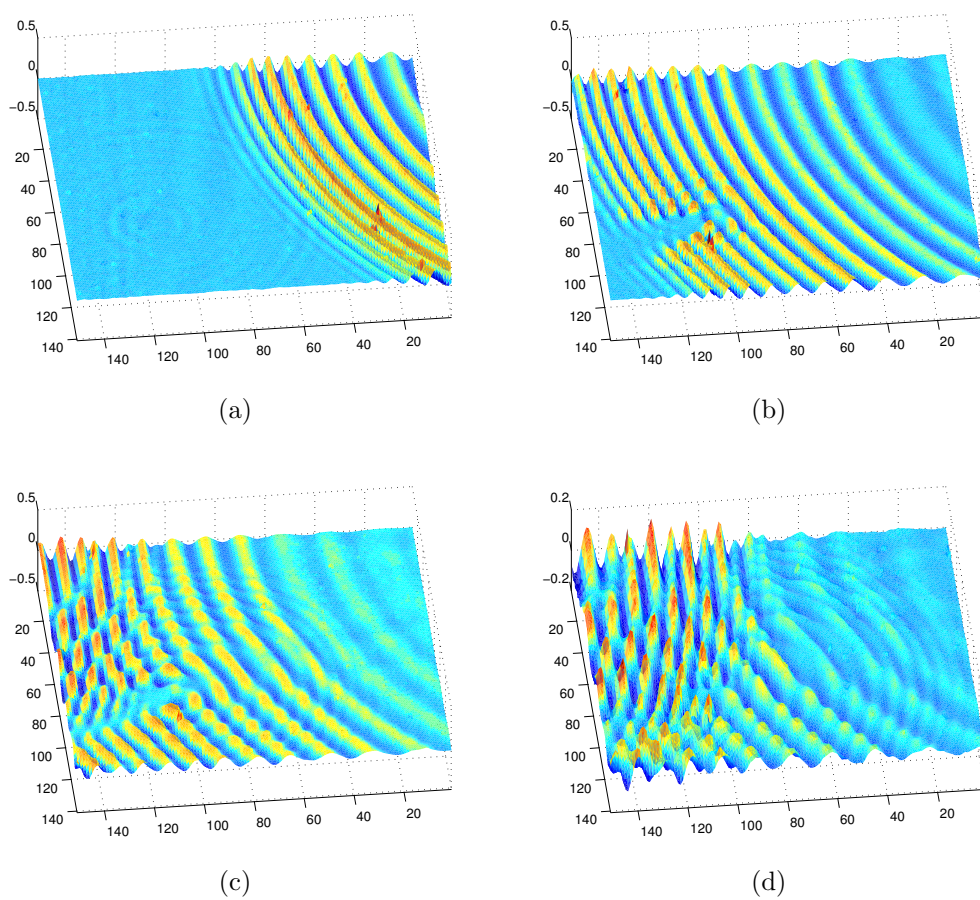


Figura 1.2: Sequenza di immagini wavefield relative ad onde di Lamb in propagazione in una piastra di alluminio sulla quale è simulata la presenza di un difetto.

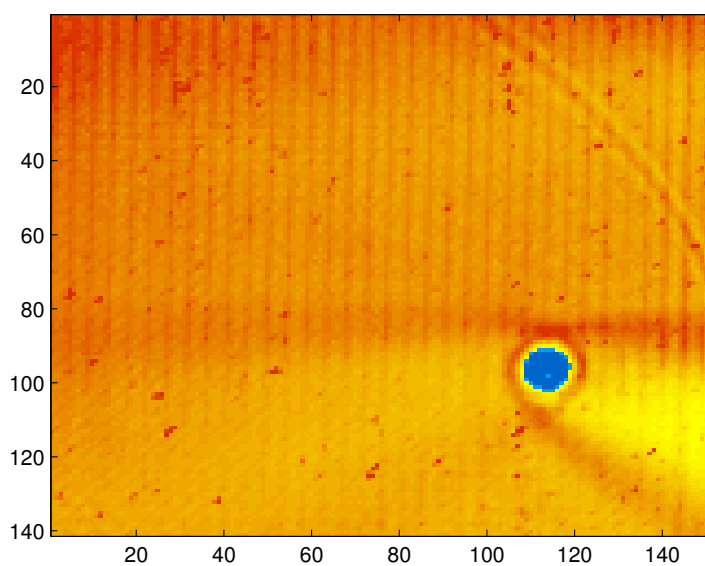


Figura 1.3: Energia del segnale full wavefield in Figura 1.2: la presenza del difetto è evidenziata da un picco negativo nella distribuzione di energia.

Campionamento compressivo

2.1 Introduzione alla teoria del Compressive Sensing

La teoria del Compressive Sensing (CS) [11]-[13] consente la ricostruzione di alcune tipologie di segnali a partire da un numero di campioni inferiore rispetto a quanto indicato dal teorema di Shannon/Nyquist, a condizione che siano verificate due proprietà: *sparsità* ed *incoerenza*. La prima esprime l'idea per la quale il contenuto informativo associato ad un segnale può essere condensato in numero limitato di coefficienti quando il segnale stesso è espresso in termini di un opportuno *dizionario* Ψ . D'altra parte, l'incoerenza è legata al principio secondo il quale oggetti sparsi in Ψ devono avere una rappresentazione densa, ovvero il più possibile non-sparsa, nel dominio in cui vengono acquisiti.

Sia $s(t) \in \mathbb{R}^n$ un segnale tempo-discreto acquisito rispettando il teorema di Nyquist. Si supponga di voler ricostruire $s(t)$ a partire da un insieme di m correlazioni lineari

$$y_i = \langle s, \varphi_i \rangle, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.1)$$

con le funzioni peso $\varphi_i(t)$. Se risulta $m < n$, il problema è in generale sottodeterminato ed ammette infinite soluzioni. Si consideri quindi un vettore

$\alpha \in \mathbb{R}^n$ tale che $s = \Psi\alpha$, con $\Psi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ base ortonormale. Se la maggior parte dei coefficienti in α possono essere trascurati a meno di $K \ll n$, si definisce α_k l'approssimazione K -sparsa di s , tale che $s_k = \Psi\alpha_k \simeq s$.

Sia $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice ottenuta organizzando in colonna le funzioni φ_k , cui si riferirà nel seguito come *matrice di campionamento*. Si definisce *coerenza* la misura della massima correlazione tra due elementi di Ψ e Φ :

$$\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{n} \cdot \max_{1 \leq i, j \leq n} |\langle \varphi_i, \psi_j \rangle|, \quad (2.2)$$

con $\mu \in [1, \sqrt{n}]$. Si può dimostrare che una matrice Φ le cui colonne sono il campionamento di processi casuali indipendenti ed identicamente distribuiti (i.i.d.), è sufficientemente incoerente con una qualsiasi base Ψ . Nel seguito si assumerà sempre verificata questa situazione.

Il Compressive Sensing assicura che se il segnale s può essere rappresentato in forma sparsa in una base Ψ e se questa è sufficientemente incoerente con la matrice di campionamento Φ , ovvero $\mu \sim 1$, $s(t)$ può essere ricostruito a partire da $m \ll n$ campioni risolvendo un problema di minimizzazione. Pertanto, essendo

$$y = \Phi\Psi\alpha + z \quad (2.3)$$

il vettore dei campioni, in cui z è un termine incognito, il segnale $s(t)$ può essere *esattamente* ricostruito a partire da

$$m \geq C \cdot K \log(n/K) \quad (2.4)$$

misure, con C costante arbitraria, risolvendo un problema del tipo

$$\min \|\tilde{\alpha}\|_{\ell_1} \quad \text{tale che} \quad \|\Phi\Psi\tilde{\alpha} - y\|_{\ell_2} \leq \epsilon, \quad (2.5)$$

in cui ϵ è legato alla quantità di rumore nel segnale. Il termine z nell'Eq. (2.3) prende in considerazione le non idealità introdotte sia dal rumore che dall'eventuale non perfetta sparsità del vettore α . Infine il grado di approssimazione ottenuto da $\tilde{s} = \Psi\tilde{\alpha}$ è confrontabile con quello del vettore s_k .

I concetti finora illustrati generalizzano il teorema del campionamento classico: una sinusoidale, la cui definizione richiede un intervallo temporale di osservazione infinito, è caratterizzata da una rappresentazione densa nel dominio in cui è acquisita, ovvero nel dominio del tempo, appunto, mentre è massimamente sparsa nel dominio di Fourier, in quanto l'informazione è condensata in un unico coefficiente; inoltre essendo Ψ la base di Fourier, ovvero $\psi_j(t) = (1/\sqrt{n})e^{i2\pi jt/n}$, e φ_i una collezione di delta di Dirac traslate $\varphi_i(t) = \delta(t - i)$, la coerenza $\mu(\Phi, \Psi)$ è minima e pari a 1 [12].

È bene notare che gli n coefficienti del segnale $s(t)$ esprimono in un formato “leggibile” l'informazione ad esso associata; viceversa, i coefficienti y_i non forniscono di per sè alcuna informazione, se non in termini del dizionario Ψ , e necessitano della successiva elaborazione in (2.5) per essere riportati nel dominio del segnale di partenza. In altri termini, il Compressive Sensing semplifica lo stadio di acquisizione a discapito di un più oneroso procedimento di ricostruzione.

Si noti inoltre che l'espressione (2.4) dipende, oltre che dalla costante C che può essere scelta arbitrariamente piccola a seconda dell'applicazione, dal grado di sparsità K , ed è influenzata dalla dimensione n del segnale di partenza solo logicamente.

In conclusione, il progetto di una efficiente procedura di acquisizione richiede da un lato di definire uno schema di campionamento adatto all'applicazione, dall'altro di determinare quale tra i dizionari noti in letteratura sia il più idoneo in accordo alla tipologia di segnali da elaborare. Entrambe le problematiche saranno affrontate nel seguito dell'elaborato.

2.2 Schemi di campionamento

In questo paragrafo si definiranno diverse strategie di campionamento con l'obiettivo di rendere minimo il numero di tracce acquisite sul piano $x = (x_1, x_2)$. I segnali nel tempo devono invece intendersi acquisiti rispettando il teorema di Shannon/Nyquist.

Il concetto di incoerenza, introdotto formalmente nel paragrafo precedente, si presta ora ad una più intuitiva interpretazione che racchiude in sè

l'essenza del Compressive Sensing. Alla base, vi è l'idea di rendere incorrelato l'aliasing causato dal sottocampionamento, consentendo così di eliminare, attraverso procedure di riduzione del rumore, componenti spettrali spurie altrimenti difficili da trattare [14]. In Figura 2.1 si fa riferimento ad un segnale monodimensionale sparso nel dominio di Fourier campionato alla frequenza di Nyquist (a), sottocampionato uniformemente con fattore di sottocampionamento $\gamma = 3$ (c) e sottocampionato con $\gamma = 3$ e distribuzione non uniforme dei campioni (e). Gli artefatti introdotti dall'acquisizione non uniforme in Figura 2.1(f) sono facilmente distinguibili dalle componenti spettrali del segnale utile e non ne compromettono la sparsità; al contrario in (d) sono evidenti gli effetti dell'aliasing che tende a mascherare completamente componenti spettrali del segnale; è evidente che il sottocampionamento random comporta una considerevole semplificazione, trasformando un problema di interpolazione in un più semplice problema di denoising. In generale alcune componenti spettrali di ampiezza ridotta potrebbero comunque essere mascherate dal rumore, motivo per cui sono necessarie $m > 1$ misure, secondo quanto indicato in (2.4). L'implicazione è generale e può essere estesa ad una qualsiasi base Ψ diversa da quella di Fourier.

L'estensione ad un caso bidimensionale segue calcolando m prodotti interni della griglia "full-resolution" nel dominio $x = (x_1, x_2)$ con distribuzioni casuali di termini $1/0$, rendendo soddisfatti i requisiti di incoerenza con un qualunque dizionario Ψ . Nel seguito, con uno slancio teorico, si farà riferimento al caso $m = 1$, ovvero sarà considerata un'unica distribuzione dei punti di campionamento per tutta la durata dell'acquisizione del segnale wavefield. Sfortunatamente, la generalità dei risultati appena illustrati viene meno se si utilizzano basi Ψ diverse da quella di Fourier con supporto compatto nel piano (x_1, x_2) per l'approssimazione sparsa del segnale, come Curvelet [15] e Wave Atom [16]. Infatti, la località spaziale delle funzioni atomiche può causare problemi di ricostruzione se il *gap*, ovvero l'intervallo tra due tracce acquisite sul piano (x_1, x_2) , è più ampio del supporto nel piano delle funzioni base. Tuttavia, introducendo delle limitazioni alla casualità della maschera di campionamento è possibile controllare l'estensione del *gap* assicurando con buona probabilità risultati di ricostruzione soddisfacenti.

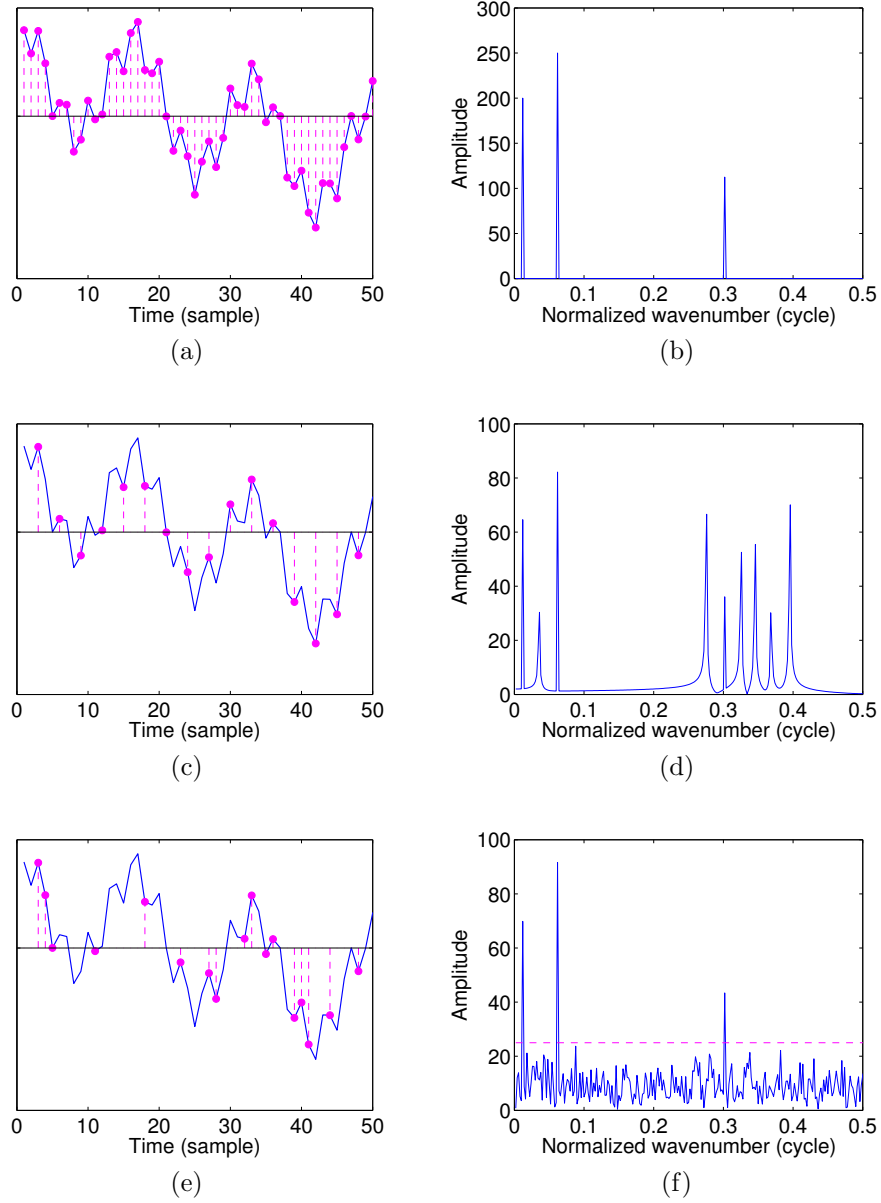


Figura 2.1: Campionamento di un segnale monodimensionale sparso nel dominio di Fourier: (a) campionamento a frequenza di Nyquist; (c) sottocampionamento uniforme con $\gamma = 3$; (e) sottocampionamento non uniforme con $\gamma = 3$; (b), (d), (f) spettri di ampiezza dei segnali campionati.

2.2.1 Campionamento Jittered

Il campionamento Jittered (JS), introdotto per applicazioni di Computer Grafica e Image Processing [17], è da lungo tempo utilizzato nell'esplorazione sismica [14] e può facilmente essere adattato per l'applicazione studiata. L'idea di base consiste nel decimare la griglia di partenza "full-resolution" di un fattore γ perturbando la posizione del campione all'interno di ciascuna cella. Questo approccio equivale a considerare una distribuzione di probabilità uniforme in ogni cella separatamente piuttosto che sull'intera estensione della griglia.

Facendo riferimento al caso monodimensionale [14], si consideri per semplicità un fattore di decimazione γ dispari. Si consideri inoltre la dimensione n del segnale di partenza $s(t)$ un multiplo di γ , in modo che il numero di campioni $m = n/\gamma$ sia intero. Il vettore y dei campioni può essere quindi definito come

$$y[i] = x[j] \quad \text{per } i = 1, \dots, m \quad \text{e} \quad j = \frac{1 - \gamma}{2} + \gamma \cdot i + \epsilon_i, \quad (2.6)$$

dove i termini ϵ_i sono interi indipendenti ed identicamente distribuiti (i.i.d.) in un intervallo $[-(\gamma - 1)/2, (\gamma - 1)/2]$. La massima estensione del gap è pari a $2(\gamma - 1)$. Se, ad esempio, $\gamma = 3$ si assegna casualmente un campione per ogni cella di tre punti consecutivi, e il gap ha estensione massima pari a 4.

Il campionamento jittered fornisce un controllo del gap preservando allo stesso tempo la casualità della distribuzione, rappresentata nell'Eq. (2.6) dai termini ϵ_i . In due dimensioni sono possibili diverse scelte geometriche per la suddivisione della griglia [18], ma il procedimento è equivalente. La distribuzione in Figura 2.2 mostra un esempio di applicazione di JS bidimensionale con $\gamma = 7$.

2.2.2 Campionamento Farthest Point

La strategia di campionamento Farthest Point (FPS) [19] assegna progressivamente le posizioni dei campioni all'interno della griglia, selezionando ad ogni passo il punto più lontano da tutti gli altri già selezionati. Il procedi-

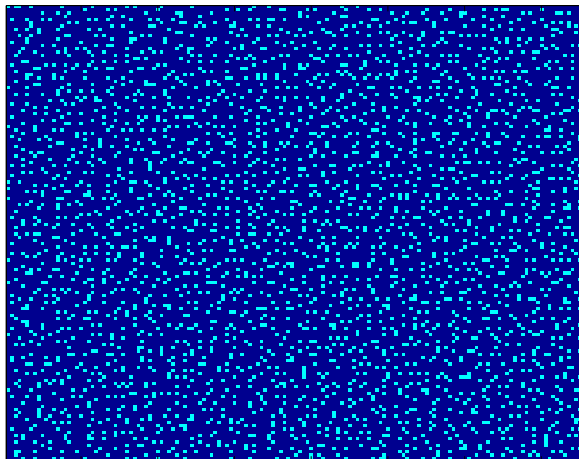


Figura 2.2: Schema di campionamento jittered 2D con $\gamma = 7$ definito su una griglia di dimensioni 141×151 : i punti di campionamento (circa il 15%) sono contraddistinti dal colore chiaro.

mento consente dunque di controllare l'estensione del gap assicurando allo stesso tempo la casualità della distribuzione per via di un set iniziale di punti assegnati casualmente.

Si può dimostrare che ad ogni passo la posizione più lontana dai punti del set $P^M = \{p_i\}_{i=1}^{M-1}$ degli M campioni già selezionati è un vertice del *diagramma di Voronoi* di tali punti. La cella di Voronoi del punto p_i è definita come il luogo dei punti del piano $x = (x_1, x_2)$ più vicini a p_i che a qualsiasi altro punto di P . Essendo $VD(P^M)$ il diagramma di Voronoi del set P^M , il procedimento indicato in [19] per la costruzione del pattern di acquisizione si basa sui seguenti passi:

1. Inizializza l'insieme P collocando 4 campioni negli angoli della griglia full-resolution e uno in una posizione casuale all'interno di essa, quindi calcola $VD(P^M)$ con $M = 5$;
2. Cerca tra i vertici di VD il punto p più lontano da tutti gli altri in P^M ;
3. $P^{M+1} = P^M \cup \{p\}$, quindi aggiorna il diagramma $VD(P^{(M+1)})$;
4. Torna al passo 2) fino a raggiungere il numero di campioni richiesto.

La strategia FPS genera una distribuzione di punti più uniforme rispetto al campionamento jittered, come si può verificare dal confronto dei pattern in Figura 2.3 e 2.2; tuttavia i due metodi forniscono risultati di ricostruzione in linea di massima equivalenti. Il vantaggio nell'utilizzo del campionamento FPS deriva dalla sua natura progressiva, che consente di aggiungere un punto per volta alla distribuzione dei campioni fino al conseguimento dei risultati di ricostruzione richiesti, implementando una strategia di campionamento a risoluzione dinamica.

Quanto esposto finora fa affidamento ad un modello stazionario della propagazione del campo d'onda sulla superficie della struttura. D'altra parte, potrebbe essere di ausilio verso una migliore ricostruzione, a parità di campioni, perturbare il metodo definito poc'anzi introducendo metriche non-standard basate su stime dell'errore di ricostruzione calcolate in maniera dinamica ed adattativa, aumentando dunque la densità dei punti di campionamento in corrispondenza delle regioni in cui si verificano situazioni di non stazionarietà, ovvero nei pressi di un difetto. La validazione di questo risultato sarà affrontata nel corso del Capitolo 5.

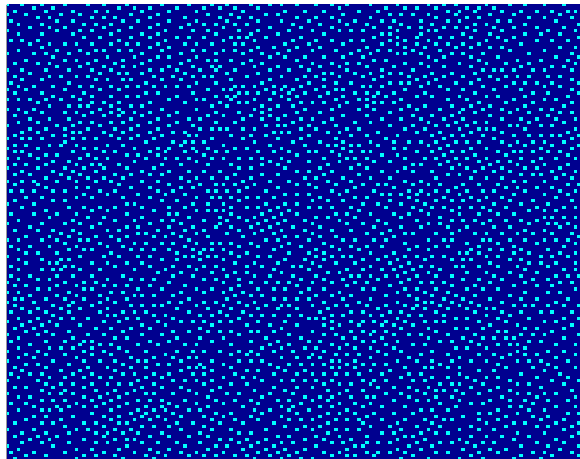
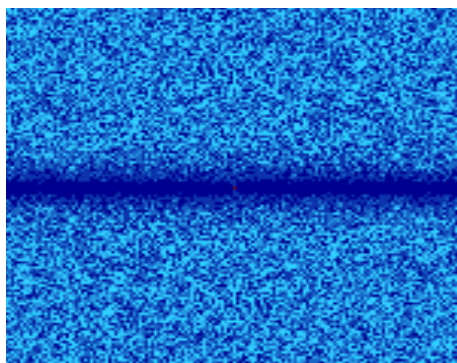
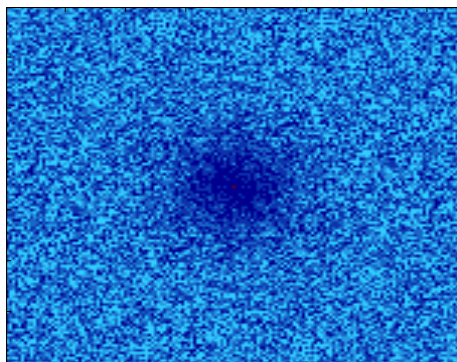


Figura 2.3: Schema di campionamento FPS con $\gamma = 7$ definito su una griglia di dimensioni 141x151: i punti di campionamento (circa il 15%) sono contraddistinti dal colore chiaro.

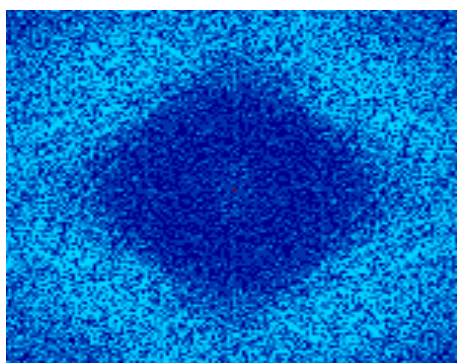
Gli schemi jittered ed FPS appartengono ad una categoria di strategie di distribuzione definita “blue-noise” [18], in quanto respingono l’energia degli artefatti del sottocampionamento verso i numeri d’onda più elevati limitando l’interferenza con la banda utile del segnale. È possibile dimostrare che la caratteristica blue-noise dello spettro è direttamente legata all’estensione del gap, e può essere dunque considerata come una misura dell’uniformità della distribuzione, ovvero dell’efficacia di una determinata strategia. La Figura 2.4 mostra gli spettri di tre pattern di acquisizione ottenuti con strategia jittered mono- e bidimensionale ((a) e (b)) ed FPS (c). In Figura 2.4(a) la caratteristica blue-noise si manifesta unicamente lungo la direzione orizzontale. Al contrario, gli spettri relativi alle distribuzioni jittered 2D ed FPS mostrano un andamento blue-noise isotropo. In particolare lo spettro dello schema FPS rappresenta la soluzione ottimale in termini di uniformità della distribuzione dei campioni.



(a)



(b)



(c)

Figura 2.4: Spettro di ampiezza (a) di uno schema jittered 1D; (b) dello schema jittered 2D in Fig. 2.2; (c) dello schema FPS in Fig. 2.3.

Dizionari per la rappresentazione di segnali wavefield

3.1 Trasformata discreta di Fourier

Si consideri un segnale tempo-discreto $s(t) \in \mathbb{R}^N$. La sequenza

$$s = [s_0, s_1, \dots, s_{N-1}] \quad (3.1)$$

può parimenti essere considerata come un segnale di lunghezza finita N o come un periodo della sequenza periodica s_p tale che

$$s_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} s(n + lN). \quad (3.2)$$

Si definisce trasformata discreta di Fourier (DFT) del segnale periodico $s_p(n)$ la serie

$$S_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s_p(n) e^{-j2\pi kn/N}. \quad (3.3)$$

La trasformata di Fourier mappa il segnale in ingresso in uno spazio le cui funzioni base sono rappresentate da funzioni seno e coseno. Pertanto il segnale $s(t)$ può essere espresso come una combinazione lineare dei coefficienti

$S_p(k)$:

$$s_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_p(k) e^{j2\pi kn/N}, \quad (3.4)$$

da cui, considerando un unico periodo, è immediato ripristinare il segnale s .

Il calcolo diretto della DFT richiede uno sforzo computazionale pari a $O(N^2)$; esistono tuttavia approcci basati sulla decimazione nel dominio del tempo o della frequenza che conducono ai medesimi risultati con un costo computazionale pari a $O(N \log N)$. A tali algoritmi ci si riferisce con la denominazione *Fast Fourier Transform* (FFT).

L'estensione ad un dominio multidimensionale segue direttamente da quanto appena definito. In particolare, si farà riferimento alle FFT in due e tre dimensioni.

3.2 Metodi alternativi di rappresentazione

La trasformata di Fourier esprime un segnale in una combinazione lineare di funzioni seno e coseno. Essendo il dominio di definizione di tali funzioni esteso a tutto l'asse reale, l'utilizzo di questo tipo di analisi è adatto a rappresentare segnali definiti in un dominio altrettanto esteso, ovvero segnali che possono essere considerati periodici.

Al contrario, la trasformata di Fourier non è efficace nella rappresentazione sparsa di segnali con supporto locale sia nel dominio del tempo/spazio che in quello delle frequenze/numeri d'onda. In anni relativamente recenti il problema è stato affrontato seguendo diverse strade, le quali hanno condotto ad un gran numero di trasformate alternative basate su una rappresentazione del segnale di ingresso come combinazione di funzioni "atomiche" assimilabili ad un *pacchetto* d'onda localizzato sia nel dominio in cui è definito (tempo o spazio, ad esempio) che nel dominio coniugato (frequenza/numero d'onda), e sull'idea per la quale funzioni base che riflettano le condizioni di regolarità del segnale nel dominio in cui è acquisito forniscano una rappresentazione maggiormente sparsa.

3.2.1 Trasformata Curvelet 2D

La trasformata Curvelet (CT) [15], [20], è una trasformazione geometrica multiscala per la rappresentazione sparsa di oggetti con singolarità lungo profili geometrici regolari. L'idea di base consiste nell'espansione del segnale in ingresso in una combinazione lineare di funzioni oscillanti, denominate appunto curvelet, localizzate sia nel dominio spaziale sia in quello dei numeri d'onda che in più dispongono, a differenza di altre trasformate, di una buona selettività direzionale. Un atomo curvelet è dunque una funzione con supporto spaziale compatto che oscilla in una direzione ad una determinata frequenza. La direzionalità rappresenta il punto di forza della Curvelet, rendendola più efficace della trasformata Wavelet [21] in presenza di discontinuità lungo curve e superfici regolari, come ad esempio nel caso di segnali relativi alla propagazione di un campo d'onda.

La CT 2D realizza una decomposizione diadica del dominio delle frequenze/numeri d'onda in una serie di corone cartesiane concentriche, in funzione della scala ν , a loro volta suddivise in moduli trapezoidali selettivi in una direzione θ_l . Sia $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ la variabile nel dominio dei numeri d'onda relativi alle dimensioni spaziali (x_1, x_2) . La scomposizione è eseguita da due classi di funzioni altamente selettive $\tilde{W}_\nu(\xi)$ e $V_\nu(\xi)$, definite rispettivamente finestre *radiali* ed *angolari*, il cui prodotto costituisce la finestra cartesiana

$$\tilde{U}_{\nu,l}(\xi) = \tilde{W}_\nu(\xi)V_\nu(S_{\theta_l}\xi), \quad (3.5)$$

in cui S_{θ_l} è la matrice direzionale

$$S_{\theta_l} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\tan \theta_l & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

e gli angoli θ_l sono scelti come una successione di direzioni $\tan \theta_l = l \cdot 2^{\lfloor \nu/2 \rfloor}$, con $l = -2^{\lfloor \nu/2 \rfloor}, \dots, 2^{\lfloor \nu/2 \rfloor} - 1$.

Il set di funzioni $\tilde{W}_\nu(\xi)$ suddivide il piano in corone cartesiane concentriche, a loro volta decomposte dalle funzioni $V_\nu(\xi)$, in una collezione di $N_\nu = 4 \cdot 2^{\lfloor \nu/2 \rfloor}$ moduli trapezoidali il cui numero raddoppia al crescere della

scala ν , come mostrato in Figura 3.1.

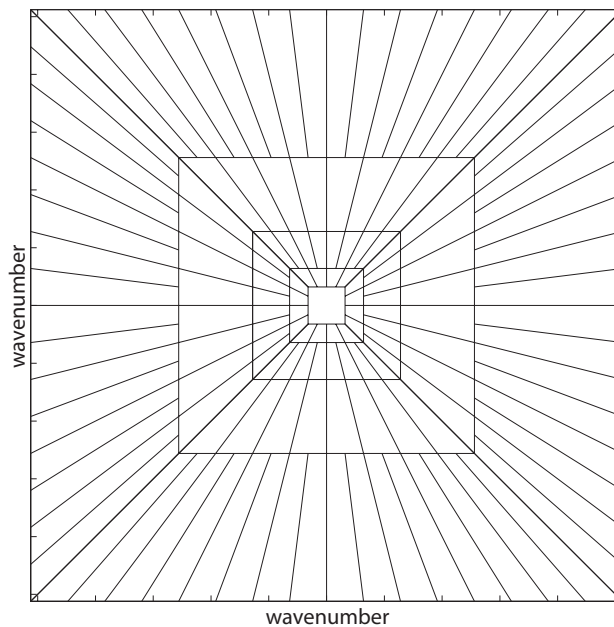


Figura 3.1: Curvelet 2D: scomposizione del piano dei numeri d'onda.

D'altra parte nel piano (x_1, x_2) , grazie alla località in frequenza delle funzioni $\tilde{U}_{\nu,l}(\xi)$, gli atomi curvelet oscillano in un supporto limitato di forma rettangolare di dimensioni $2^{-\nu} \times 2^{-\nu/2}$, il cui asse maggiore è ortogonale alla direzione θ_l di oscillazione. Le dimensioni del supporto soddisfano pertanto la condizione di *scaling parabolico*:

$$\text{lunghezza} \approx 2^{-\nu/2}, \text{ larghezza} \approx 2^{-\nu} \quad \Rightarrow \quad \text{larghezza} \approx \text{lunghezza}^2. \quad (3.7)$$

Sia $s(x)$ una funzione bidimensionale definita sul piano (x_1, x_2) la cui trasformata di Fourier è $S(\xi)$, i coefficienti $c(\nu, l, x) = \langle s, \phi_{\nu,l,x} \rangle$ tali che

$$s(x) = \sum_{\nu,l,x} c(\nu, l, x) \phi_{\nu,l,x}, \quad (3.8)$$

essendo ν e l gli indici relativi alla scala e alla direzione, rispettivamente, x la posizione nel piano e $\phi_{\nu,l,x}$ una funzione curvelet, possono essere calcolati

come

$$c(\nu, l, x) = \int S(\xi) \tilde{U}_{\nu, l}(\xi) e^{j\langle b_x^{\nu, l}, \xi \rangle} d\xi, \quad (3.9)$$

in cui il termine $b_x^{\nu, l}$ rappresenta la traslazione nello spazio della funzione *curvelet madre*.

Una implementazione discreta, con approccio wrapping indicato in [15], prevede:

1. Trasformazione dei dati nel dominio delle frequenze mediante Fast Fourier Transform (FFT);
2. Moltiplicazione dei dati trasformati con un set di funzioni $\tilde{U}_{\nu, l}(\xi)$;
3. Calcolo dei coefficienti curvelet $c(\nu, l, x)$ mediante FFT inversa.

In Figura 3.4(b) si riporta un esempio di atomo curvelet alla scala $\nu = 1$; si noti la maggiore compattezza del supporto spaziale rispetto alla funzione $\sin()$ in Figura 3.4(a), definita su tutto il piano x .

3.2.2 Trasformata Curvelet 3D

La definizione della trasformata Curvelet 3D [23] procede in modo analogo al caso bidimensionale. Lo spazio delle frequenze/numeri d'onda è suddiviso in una serie di moduli di forma piramidale troncata, mentre gli atomi curvelet, che diversamente dal caso precedente sono indicizzati da quattro coefficienti in quanto sono necessari due indici angolari, sono in un supporto di lunghezza $2^{-\nu/2}$ in due direzioni e profondità $2^{-\nu}$ nella direzione ortonormale. In Figura 3.2 è mostrata la scomposizione diadica dello spazio frequenze/numeri d'onda.

3.2.3 Trasformata Wave Atom

La trasformata Wave Atom (WA) [16], analogamente alla CT, rappresenta un segnale in una combinazione lineare di funzioni localizzate sia nel dominio spaziale sia in quello delle frequenze/numeri d'onda.

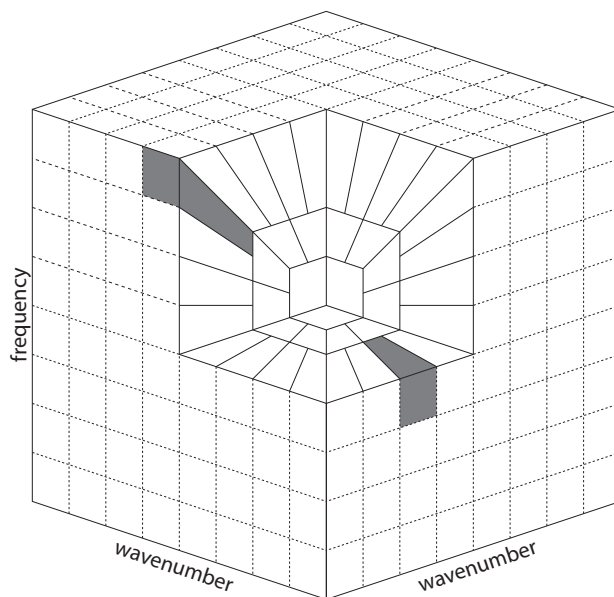


Figura 3.2: Curvelet 3D: scomposizione dello spazio frequenza/numeri d'onda.

Nel piano x gli atomi sono funzioni il cui supporto è approssimativamente un quadrato di lato $2^{-\nu} \times 2^{-\nu}$, oscillanti ad una lunghezza d'onda pari a circa $2^{-2\nu}$ alla scala ν in direzione trasversale alla cresta dell'oscillazione. La regola di scaling parabolico assume in questo caso la forma

$$\text{lunghezza d'onda} \approx (\text{lato})^2. \quad (3.10)$$

Il piano delle frequenze/numeri d'onda è suddiviso in celle di forma quadrata di lato $2^\nu \times 2^\nu$, come mostrato in Figura 3.3.

Analogamente alle funzioni curvelet 2D, ciascun atomo è in questo caso identificato da una terna di valori (ν, l, x) dei quali ν indicizza la corona cartesiana, ovvero la scala, l la direzione ed $x = (x_1, x_2)$ la posizione nello spazio.

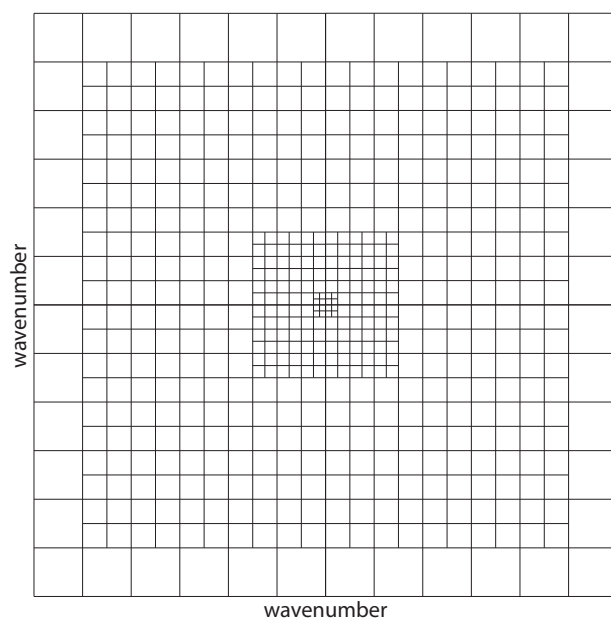
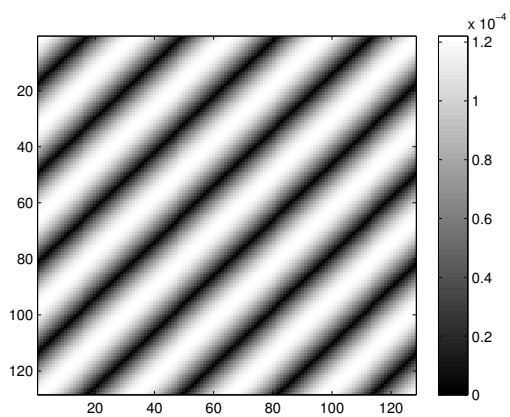
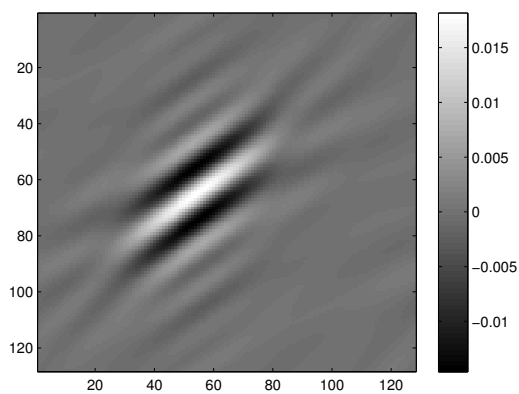


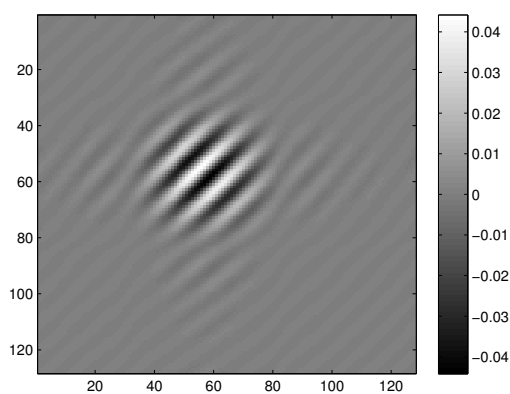
Figura 3.3: Wave Atom: scomposizione del piano dei numeri d'onda.



(a)

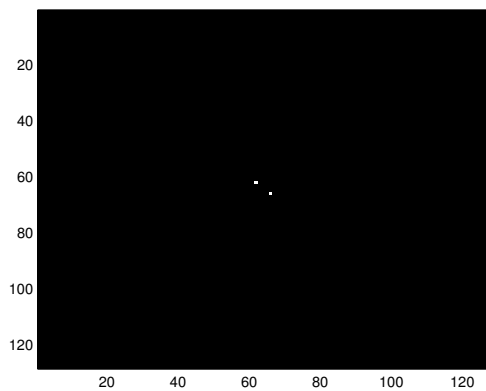


(b)

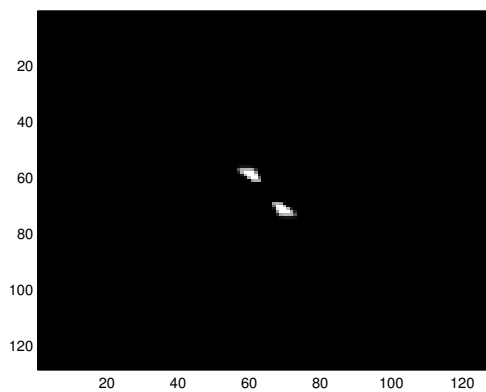


(c)

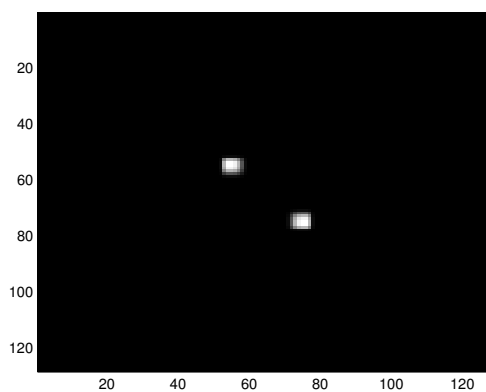
Figura 3.4: Esempio di funzione base: (a) $\sin()$; (b) curvelet; (c) wave atom.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.5: Spettro di ampiezza delle funzioni base in Figura 3.5

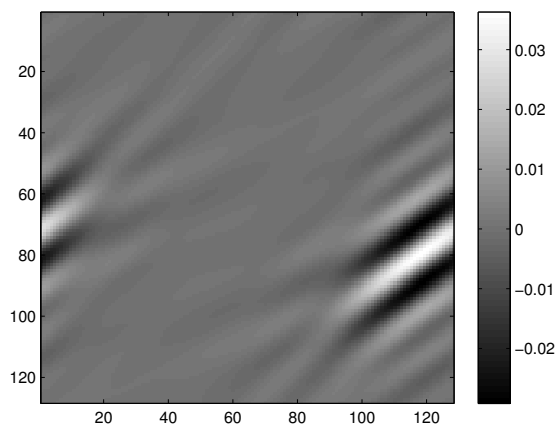
3.2.4 Approccio Mirror Extended

Entrambe le trasformate Curvelet e Wave Atom si basano su una scomposizione della trasformata di Fourier della funzione in ingresso. A causa della sua caratteristica intrinsecamente periodica, la FFT può dar luogo ad artefatti di ricostruzione in corrispondenza dei bordi del dominio spaziale. Ciò che si verifica in pratica è una riflessione della funzione atomica localizzata al limite del dominio verso il bordo opposto, come mostrato in Figura 3.6(a) nel caso di funzione curvelet.

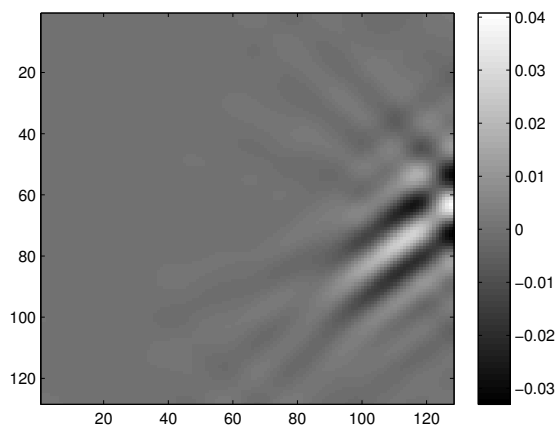
Il problema può essere risolto considerando un dominio esteso definito come:

$$\tilde{d}(x_1, x_2) = d(|x_1|, |x_2|), \quad (3.11)$$

essendo $d(|x_1|, |x_2|)$ il dominio di partenza. Sfortunatamente questo approccio *quadruplica* la complessità computazionale e la ridondanza nel calcolo delle trasformate, e non rappresenta pertanto la soluzione ottimale. In alternativa, utilizzando la trasformata coseno discreta (DCT) in luogo della FFT è possibile risolvere i problemi di ricostruzione ai bordi mantenendo inalterata la complessità computazionale. Tale approccio è definito Mirror-Extended [24] e può essere applicato ad entrambe le trasformate Curvelet e Wave Atom. In Figura 3.6(b) è mostrata una funzione curvelet con posizione e direzione di oscillazione analoghe alla funzione in (a) ottenuta con approccio Mirror Extend.



(a)



(b)

Figura 3.6: Funzioni base (a) curvelet; (b) curvelet Mirror Extended.

3.3 Trasformata Warped in frequenza

La caratteristica dispersiva del mezzo in cui ha luogo la propagazione determina la dipendenza della velocità di gruppo dalla frequenza, come descritto al Paragrafo 1.2. Questo effetto provoca una distorsione della geometria dei fronti d'onda del segnale di eccitazione rendendo meno efficace la rappresentazione sparsa del campo mediante dizionari locali come quelli appena definiti. Infatti, l'efficacia di tali dizionari è strettamente legata a particolari condizioni di regolarità dei fronti d'onda che in parte vengono meno a causa della dispersione.

La trasformata Warped in frequenza (WFT) [25] è una trasformazione unitaria grazie alla quale è possibile caratterizzare il contenuto energetico dei modi di propagazione presenti nella forma d'onda acquisita. L'operatore di Warping *deforma* l'asse delle frequenze attraverso un'appropriata funzione $w(f)$, chiamata *mappa del warping*.

Dato un segnale $s(t)$, si definisce $\mathbf{W}[\cdot]$ l'operatore Warped continuo tale che

$$\mathbb{F}[\mathbf{W}s(t)](f) = \mathbb{F}[s_w(t)](f) = \sqrt{\dot{w}(f)}\mathbb{F}[s](w(f)), \quad (3.12)$$

in cui $s_w(t) = \mathbf{W}[s(t)]$ è il segnale warpato, $\mathbb{F}[\cdot]$ l'operatore di Fourier, e $\dot{w}(f)$ la derivata prima della funzione $w(f)$, definita attraverso la sua inversa

$$K \frac{dw^{-1}(f)}{df} = \frac{1}{c_g(f)} \quad (3.13)$$

dove $c_g(f)$ è la velocità di gruppo (Fig. 1.1) e K una costante di normalizzazione per la quale $w^{-1}(0.5) = w(0.5) = 0.5$.

Sia $s_0(t, x_s)$ un segnale acquisito nel tempo a distanza $|x_a - x_s|$ dall'attuatore, posto in posizione x_a . Nel dominio delle frequenze, il segnale può essere considerato come la risposta di un sistema dispersivo:

$$S_0(f, x_s) = S_0(f, x_a) \cdot e^{-j2\pi|x_a - x_s| \int 1/c_g(f) df}, \quad (3.14)$$

essendo $S_0(f, x_a)$ la trasformata di Fourier del segnale di eccitazione e $|x_a - x_s|/c_g(f)$ il ritardo di gruppo della componente a frequenza f .

Utilizzando la mappa del warping definita in (3.13), l'equazione (3.14) diventa:

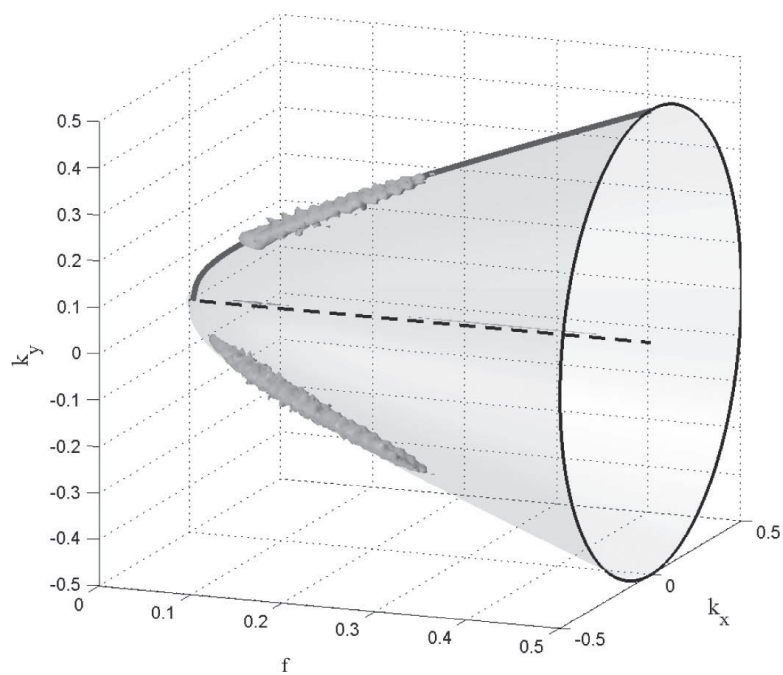
$$S_0(f, x_s) = S_0(f, x_a) \cdot e^{-j2\pi w^{-1}(f)K|x_a-x_s|}. \quad (3.15)$$

Infine, applicando l'operatore di warping \mathbf{W} al segnale $s_0(t, x_s)$, si ottiene una nuova rappresentazione in frequenza

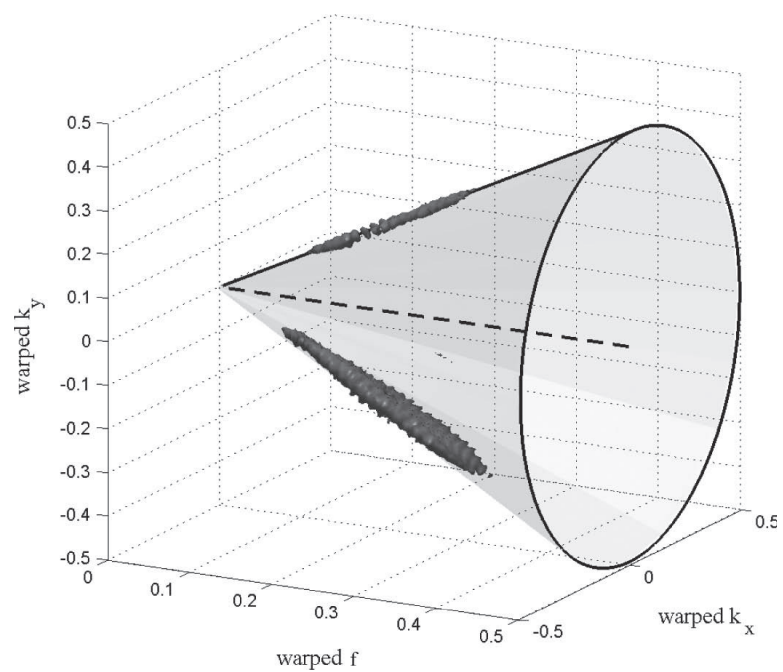
$$\mathbb{F}\mathbf{W}[s_0(t, x_s)] = \sqrt{\dot{w}(f)}S_0(w(f), x_a) \cdot e^{-j2\pi fK|x_a-x_s|}. \quad (3.16)$$

Al fine di comprendere il significato implicito nell'ultima relazione, si faccia riferimento alla Figura 3.7(a), in cui è riportata la rappresentazione nel dominio frequenza/numeri d'onda di un segnale disperso. La maggior parte dell'energia del segnale è evidentemente concentrata a ridosso della superficie definita dalla rotazione della curva di dispersione del modo A_0 (Fig. 1.1). Dopo l'applicazione dell'operatore di warping, il riallineamento della relazione tempo/frequenza trasforma la superficie di dispersione in un cono rappresentato in Figura 3.7(b).

L'operazione di warping, in conclusione, allinea in contenuto del segnale lungo una direzione radiale $k = fK$, ripristinando fronti d'onda propri di un mezzo non dispersivo. Questo risultato suggerisce l'utilizzo congiunto dell'operatore $\mathbf{W}[\cdot]$ e della trasformata Curvelet per ottenere un maggior grado di sparsità nella rappresentazione del campo d'onda acquisito su una struttura dispersiva [26].



(a)



(b)

Figura 3.7: Rappresentazione nel dominio di Fourier del segnale wavefield (a) affetto da dispersione e (b) riallineato dalla trasformata Warped secondo il modo di propagazione A_0 .

Implementazione in ambiente MATLAB

4.1 Algoritmo Basis Pursuit

L'algoritmo *basis pursuit* (BP) [27] include una serie di procedure di risoluzione per sistemi di equazioni sottodeterminati del tipo

$$Ax = b, \quad (4.1)$$

in cui A è una matrice $m \times n$ con $m < n$, b il vettore m -dimensionale dei termini noti ed x il vettore incognito.

L'approccio si basa sulla soluzione di un problema di ottimizzazione convessa

$$(BP) \quad \min_x \|x\|_1 \quad \text{s.t.} \quad Ax = b. \quad (4.2)$$

In presenza di rumore o di dati incompleti, d'altra parte, il sistema di equazioni (4.1) può essere riscritto come

$$b = Ax + z, \quad (4.3)$$

ed è possibile rilassare i vincoli in (BP). Si parla in tal caso di algoritmo basis

pursuit denoise (BPDN)

$$(BP_\sigma) \quad \min_x \|x\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \|Ax - b\|_2 \leq \sigma, \quad (4.4)$$

in cui il parametro σ fornisce una stima della quantità di rumore. Per $\sigma = 0$ i problemi in (4.2) e (4.4) coincidono; viceversa si può dimostrare che la soluzione di (BP_σ) rappresenta un' *approssimazione sparsa* della soluzione del sistema sottodeterminato. Si noti infine che il sistema in (4.3) è del tutto equivalente a (2.3), pertanto i procedimenti qui definiti possono essere utilizzati per la ricostruzione di segnali sottocampionati in accordo a quanto esposto al Capitolo 2.

Il problema di ottimizzazione convessa (BP_σ) è solo uno dei possibili approcci verso la soluzione del problema ai minimi quadrati vincolato. Infatti sotto la dicitura BPDN si inseriscono tipicamente i problemi

$$(QP_\lambda) \quad \min_x \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \quad (4.5)$$

e

$$(LS_\tau) \quad \min_x \|Ax - b\|_2 \quad \text{s.t.} \quad \|x\|_1 \leq \tau, \quad (4.6)$$

quest'ultimo anche definito *Lasso*. Il parametro λ in (4.5) è connesso al moltiplicatore di Lagrange dei vincoli in (BP_σ) . Per determinati valori dei parametri σ , λ , e τ , le soluzioni di (BP_σ) , (QP_λ) e (LS_τ) coincidono e i problemi sono in qualche modo equivalenti. Tuttavia, nella maggior parte dei casi tali valori non possono essere considerati noti a priori.

Per la validazione ed il testing dei risultati sperimentali riportati nel prossimo capitolo è stato utilizzato il toolbox SPGL1 [28], [29]. Il procedimento di risoluzione utilizzato nel toolbox si basa sulla riformulazione del problema di ottimizzazione ai minimi quadrati (BP_σ) in un più semplice sistema di *equazioni non lineari* risolvibile con il metodo di Newton.

Alla base di questo approccio vi è la risoluzione di una sequenza di problemi (LS_τ) utilizzando un algoritmo di proiezione del gradiente o spectral projected gradient (SPG). Come per (QP_λ) , il problema (LS_τ) è parametrizzato da uno scalare. La differenza fondamentale tra i due problemi sta nella

possibilità di aggiornare iterativamente il valore del parametro τ ottenendo ad ogni iterazione una migliore approssimazione alla soluzione del problema (BP_σ) .

La procedura SPG ad ogni iterazione proietta ortogonalmente un vettore n -dimensionale sullo spazio di fattibilità $\{x \mid \|x\|_1 \leq \tau\}$ mediante l'operatore

$$P_\tau[c] := \{\arg \min_x \|c - x\|_2 \quad \text{s.t.} \quad \|x\|_1 \leq \tau\}, \quad (4.7)$$

il quale calcola la proiezione del vettore c su una sfera a norma unitaria di raggio τ . Alla i -esima iterazione, l'algoritmo calcola la proiezione $P_\tau[x_i - \alpha g_i]$, in cui g_i è il gradiente corrente della funzione obiettivo $\|Ax - b\|_2^2$. Si può dimostrare che il metodo converge in un'approssimazione sparsa della soluzione del problema ai minimi quadrati vincolato.

Per la descrizione dettagliata dell'implementazione dell'algoritmo si rimanda alla documentazione di riferimento [28].

4.2 Libreria SPARCO

La libreria **Sparco** [30] include una collezione di operatori lineari implementati in MATLAB per il supporto alla risoluzione di problemi di ricostruzione sparsa nella forma (4.3).

Al fine di coprire il maggior numero possibile di applicazioni, il toolbox utilizza un'interfaccia del tutto generale. Pertanto l'operatore A è sempre espresso nella forma

$$A = MB,$$

essendo M l'operatore che descrive la metodologia di acquisizione del segnale e B la base nella quale il segnale è sparso. In altri termini, gli operatori M e B sono collegati alle matrici Φ e Ψ definite al Capitolo 2.

Il nucleo della suite **Sparco** è composto da una vasta libreria di operatori lineari, ove possibile specificamente implementati per il calcolo veloce di moltiplicazioni matrice-vettore. Tali operatori includono, tra gli altri, trasformata di Fourier, trasformata coseno discreta, wavelet e curvelet 2D. Una serie di operatori aggiuntivi è stata integrata all'interno del toolbox al fine

di ampliare il ventaglio di trasformazioni disponibili per la ricostruzione del segnale sottocampionato. Un esempio di implementazione per l'operatore Wave Atom è riportato in Appendice dei codici (A.1).

Quando un operatore è istanziato, viene creato l'*handle* ad una funzione anonima contenente alcuni dei parametri dell'operatore stesso. Quando, successivamente, tale funzione è chiamata all'interno del codice, essa invoca una routine interna che esegue le operazioni richieste; ogni funzione di **Sparco** è infatti un singolo m-file di MATLAB contenente una funzione privata che implementa la routine di basso livello.

Ciascun operatore prevede tre modalità di utilizzo, gestite dal parametro in ingresso `mode`, il quale determina se la funzione restituisce il prodotto matrice-vettore (`mode=1`) oppure il prodotto del vettore con la matrice aggiunta (`mode=2`). Infine `mode=0` costituisce un caso particolare e non esegue alcun calcolo, in quanto la funzione restituisce una struttura contenente informazioni quali il numero di righe e di colonne dell'operatore, se si tratta di un operatore reale o complesso e un campo contenente il nome dell'operatore stesso. Tale struttura è utilizzata dal solutore (SPGL1) per determinare le dimensioni ed il dominio del problema.

La creazione dell'operatore DCT per $n = 128$ segue ad esempio dall'istruzione

```
D = opDCT(128);
```

da cui:

```
y = D(x,1);    % restituisce y := Dx  
x = D(y,2);    % restituisce x := DTy
```

Di particolare interesse sono i due operatori di selezione messi a disposizione dalla libreria: `opMask` e `opRestriction`. Il primo calcola il prodotto interno con una maschera binaria, e pone pertanto uguali a zero tutti i termini del vettore in ingresso corrispondenti ai termini nulli della maschera. Al contrario `opRestriction` *scarta* i termini corrispondenti ad uno zero nella maschera e restituisce pertanto un vettore di dimensione inferiore rispetto al vettore d'ingresso.

Sparco considera tutti i problemi formulati in termini di prodotti matrice-vettore. Di conseguenza, segnali in 2 o 3 dimensioni richiedono un'operazione di *reshape* in forma vettoriale monodimensionale prima di procedere all'elaborazione.

4.3 Maschera Farthest Point Sampling

Una funzione per la generazione della maschera FPS è stata implementata seguendo il procedimento descritto al Paragrafo 2.2.2 basato sui diagrammi di Voronoi del pattern dei punti di campionamento. Il codice MATLAB della funzione `create_FPSmask` è riportato in Appendice dei codici (A.3).

Sfortunatamente, questa procedura di generazione della maschera richiede tempi di elaborazione molto lunghi. La funzione MATLAB `voronoi(x,y)` calcola infatti il diagramma di Voronoi dei punti indicizzati dai vettori x ed y senza tener conto del dominio della maschera, ovvero fornisce una versione *unbounded* del diagramma. Pertanto, una parte considerevole dello sforzo computazionale è rivolta al calcolo dei punti di intersezione tra i rami del diagramma e i bordi del dominio, essendo tali punti possibili candidati. A causa di questa complicazione, la creazione di una maschera FPS con il 15% dei punti su una griglia di dimensioni 141×151 richiede tempi superiori alle 10 ore di elaborazione. Peraltro, la complessità computazionale cresce con legge esponenziale al crescere del numero di campioni.

Una possibile strategia di ottimizzazione della procedura è suggerita in [18] e fa uso di una serie di array bidimensionali Q_i delle stesse dimensioni della maschera di campionamento, i cui elementi contengono le distanze dei relativi punti dai campioni precedentemente selezionati. Ad ogni iterazione i , le coordinate dell'elemento di Q_i con valore massimo determinano il punto di campionamento $i+1$, e l'array delle distanze è aggiornato sulla base del nuovo campione. Tale approccio dovrebbe richiedere tempi di calcolo nettamente inferiori; tuttavia questo risultato non è stato verificato.

Risultati sperimentali

Nel corso del presente capitolo si mostrano i risultati della ricostruzione di un segnale full wavefield ottenuti utilizzando le strategie di campionamento compressivo e i dizionari descritti nei capitoli precedenti su differenti setup sperimentali.

Per la soluzione del problema basis pursuit di ottimizzazione convessa è stato utilizzato il toolbox SPGL1 in ambiente MATLAB con il supporto della libreria **Sparco** e dei toolbox CurveLab v.2.1.3 [31] e WaveAtom v.1.1.1 [32] per le trasformate Curvelet e Wave Atom, rispettivamente, su architettura Intel® Core i5 2,5 GHz dotata di 8 GB di memoria RAM. Il numero N di iterazioni del solutore è stato fissato assegnando valori molto bassi ai parametri σ e τ .

I risultati di ricostruzione sono confrontati in termini di tempo di elaborazione e di rapporto Segnale/Rumore (SNR)

$$SNR_{dB} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{\|D(x_1, x_2, t)\|}{\|D_r(x_1, x_2, t) - D(x_1, x_2, t)\|} \right),$$

essendo D_r il segnale full wavefield ricostruito, ed in termini di energia del residuo di ricostruzione

$$\|D_r(x_1, x_2, t) - D(x_1, x_2, t)\|^2.$$

5.1 Setup in alluminio con simulazione del difetto

È stato inizialmente considerato un segnale full wavefield $D(x_1, x_2, t)$ acquisito su una piastra di alluminio di spessore 1.5 mm e dimensioni 638×558 mm, sulla cui superficie è simulata la presenza di un difetto mediante una massa cilindrica di diametro 12 mm posizionata a circa 4 cm dal bordo destro. Generando un campo ultrasonico per via di un trasduttore piezoelettrico PZT di diametro 20 mm fissato al centro della piastra, eccitato con un segnale sinusoidale a banda larga, è stata acquisita la risposta della struttura mediante un vibrometro SLDV Polytec in una griglia di 141×151 punti su una regione rettangolare di dimensioni 150×155 mm. Il setup sperimentale è mostrato in Figura 5.1.

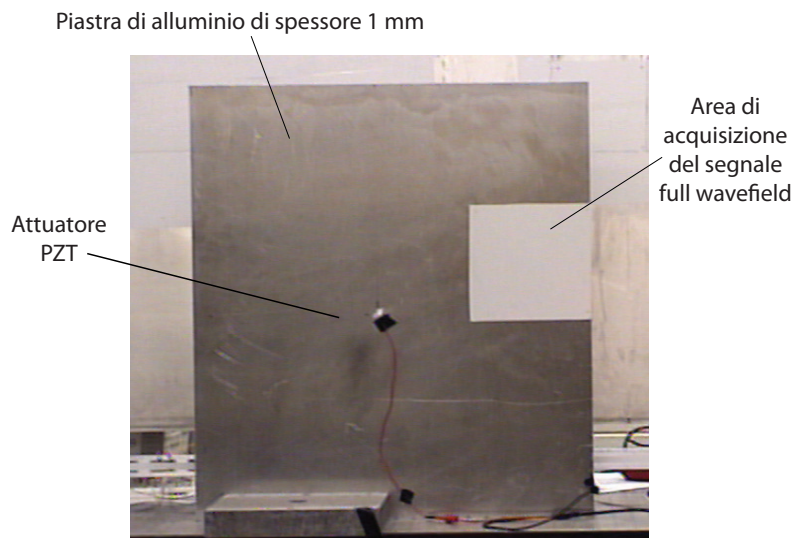


Figura 5.1: Setup sperimentale costituito da una piastra di alluminio di spessore 1.5 mm e dimensioni 638×558 mm.

5.2 Ricostruzione con basi 3D

Si riportano i risultati della ricostruzione del segnale $D(x_1, x_2, t)$ sottocampionato in un numero di punti pari al 33% della griglia full-resolution distribuiti con strategia jittered monodimensionale (Fig. 5.2). Per la rappresentazione sparsa sono stati utilizzati i dizionari Curvelet ed FFT 3D.

5.2.1 Numero di iterazioni

In Figura 5.3 si mostra l'andamento del rapporto Segnale/Rumore (a) e i tempi di ricostruzione (b) al variare del numero di iterazioni N del solutore. L'SNR ottenuto dalla ricostruzione con base FFT 3D si mantiene approssimativamente costante ad un valore di circa 28 dB al crescere del numero di iterazioni. Questo risultato evidenzia il raggiungimento della convergenza del solutore già con $N = 30$, rendendo pertanto superflue iterazioni aggiuntive. Viceversa, la ricostruzione con base Curvelet 3D si dimostra inefficiente sia in termini di SNR che di tempo di calcolo.

In Figura 5.4 si riportano le energie del residuo della ricostruzione con $N = 150$: in (b) sono evidenti errori di ricostruzione non trascurabili nei

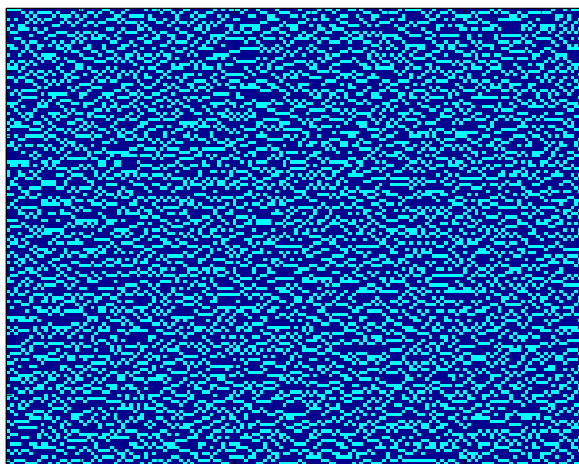


Figura 5.2: Schema di campionamento jittered 1D con $\gamma = 3$ (33% dei punti rispetto alla griglia full-resolution).

pressi del difetto e dei bordi del dominio, regioni peraltro di particolare interesse per l'ispezione della struttura. Al contrario, in (a) l'errore mostra una distribuzione puntiforme per lo più aleatoria.

I segnali nel tempo presentano artefatti nella fase iniziale precedente l'arrivo del primo fronte d'onda, con entrambe le basi e a prescindere dal numero di iterazioni del solutore. In Figura 5.3 è mostrata una slice del segnale wave-field (a) a risoluzione piena e (b) sottocampionata mediante la distribuzione in Figura 5.2; i risultati di ricostruzione con basi FFT e Curvelet 3D sono mostrati in (c) e (d), rispettivamente. Entrambe le immagini presentano artefatti in corrispondenza dei bordi, ed in particolar modo del bordo destro, dove è chiaramente visibile un andamento oscillatorio residuo dovuto alla periodicità della trasformata di Fourier. Infine, si evidenzia in (c) la ricostruzione più accurata delle oscillazioni minori riflesse dal difetto.

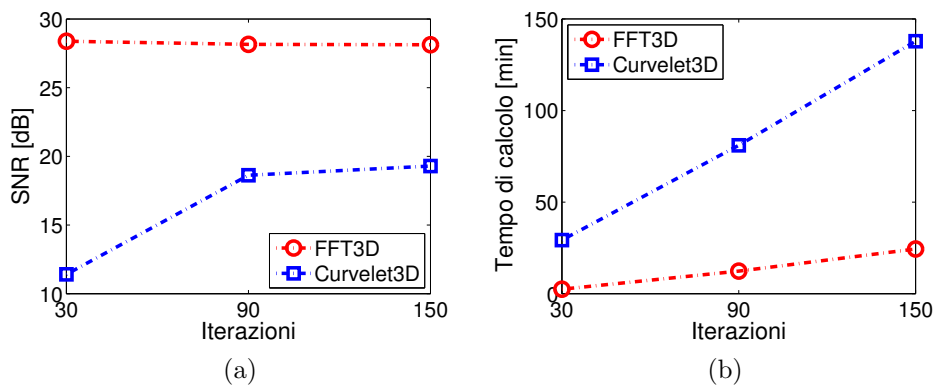
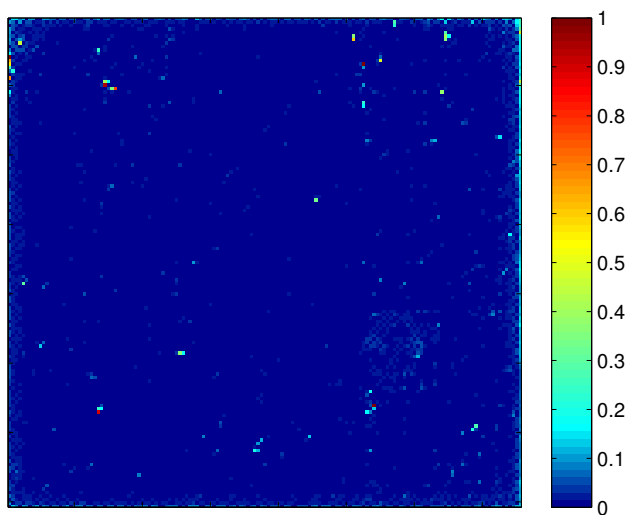
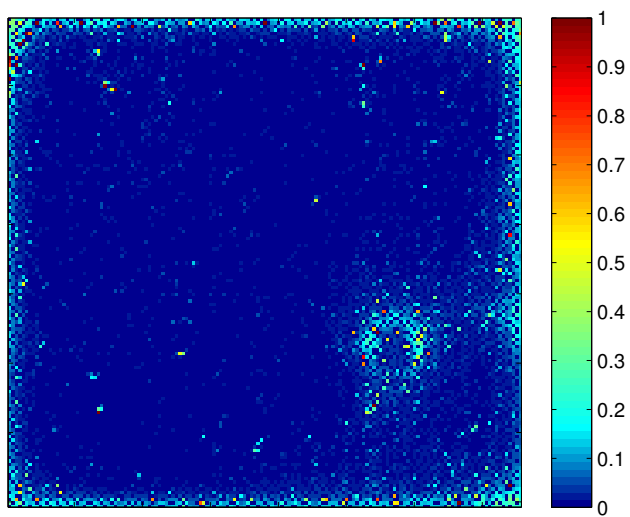


Figura 5.3: Risultati della ricostruzione con basi FFT e Curvelet 3D al variare del numero N di iterazioni del solutore: (a) SNR; (b) Tempo di calcolo.

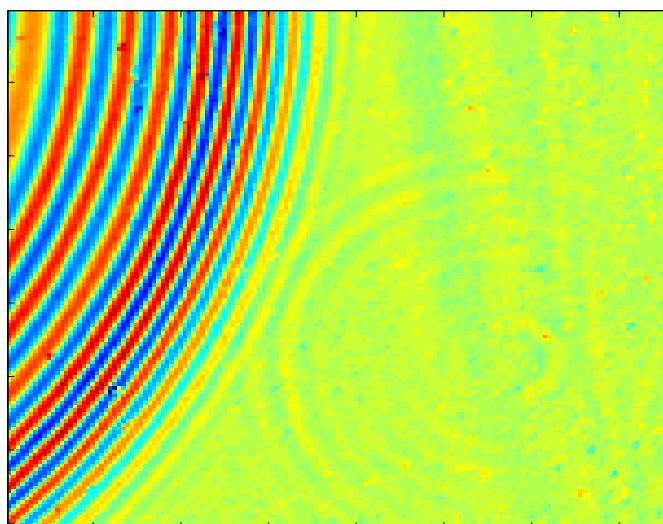


(a)

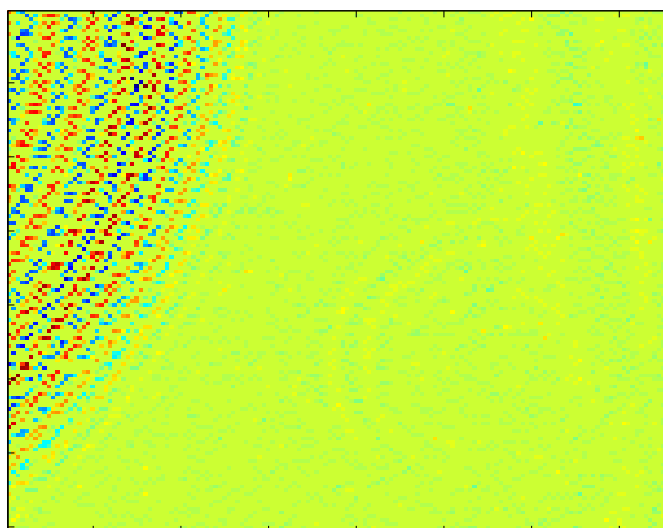


(b)

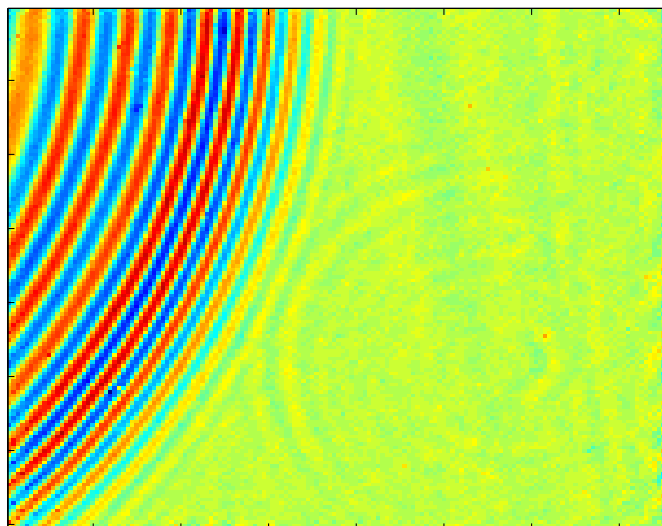
Figura 5.4: Energia del residuo della ricostruzione con base (a) FFT e (b) Curvelet 3D con $N = 150$.



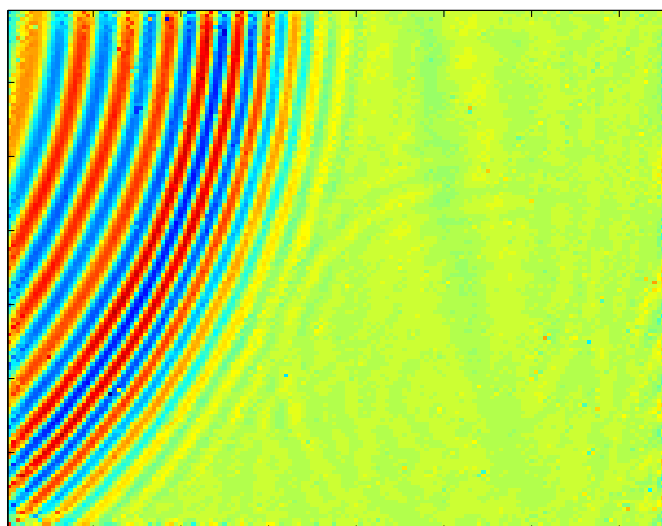
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.3: Immagine wavefield: (a) segnale di riferimento; (b) segnale sottocampionato come da schema in Fig. 5.2; risultato della ricostruzione con base (c) FFT e (d) Curvelet 3D con $N = 150$.

5.2.2 Estensione del dominio spaziale

Un possibile approccio per la riduzione degli artefatti nei pressi dei bordi dovuti alla periodicità della FFT consiste nell'estensione del dominio spaziale mediante un'operazione di "zero-padding" lungo entrambe le direzioni.

L'andamento del rapporto Segnale/Rumore ed i tempi di ricostruzione con $N = 150$ sono riportati in Figura 5.4. In Figura 5.5 è evidente che l'estensione del dominio comporta migliori risultati di ricostruzione soprattutto in caso di scomposizione Curvelet 3D nei pressi dei bordi; tuttavia nella regione del difetto non si notano sostanziali differenze.

I segnali nel tempo ricostruiti rispecchiano in linea di massima quanto riportato al paragrafo precedente, a parte l'effettiva riduzione degli artefatti nei pressi dei bordi visibile in Figura 5.6.

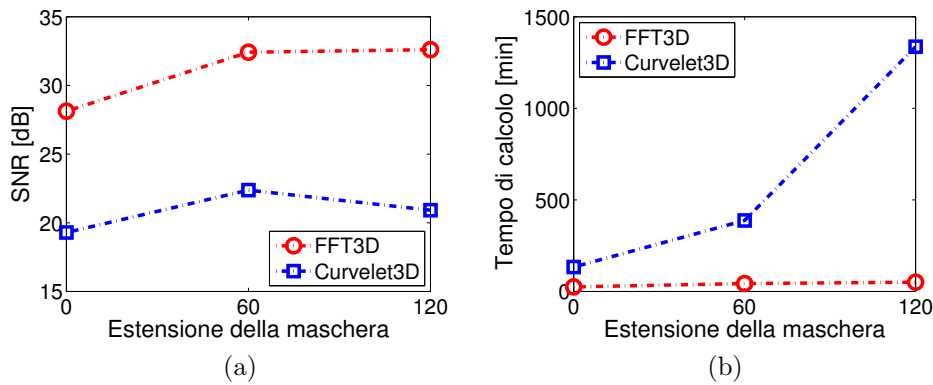
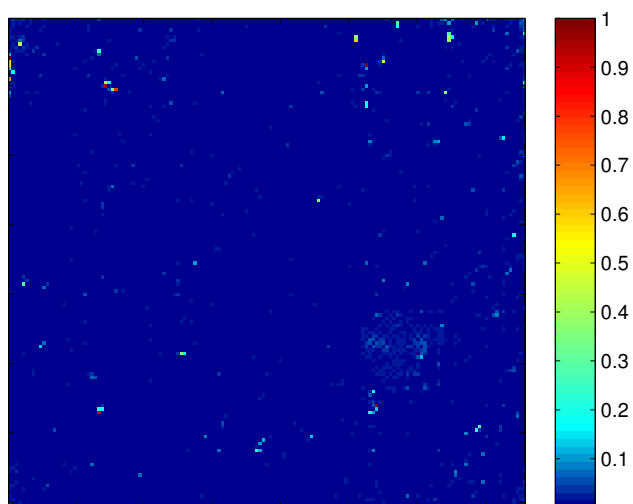
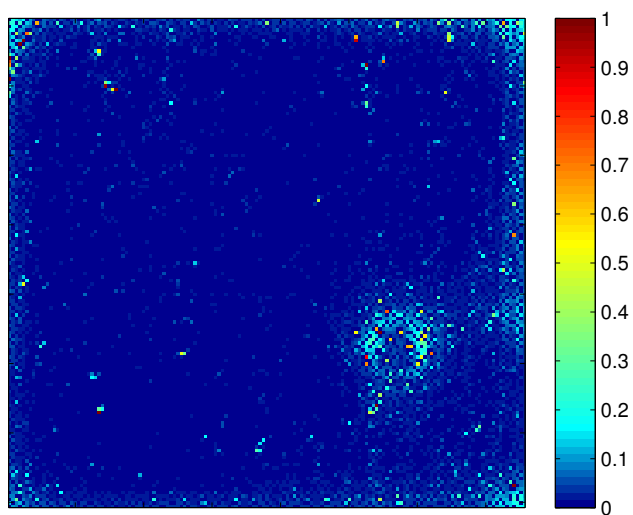


Figura 5.4: Risultati della ricostruzione con base FFT e Curvelet 3D con $N = 150$ ed estensione del dominio spaziale: (a) SNR; (b) Tempo di calcolo.

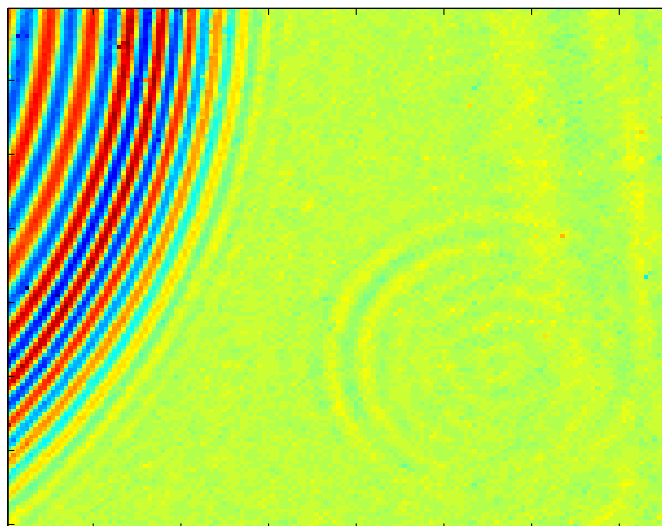


(a)

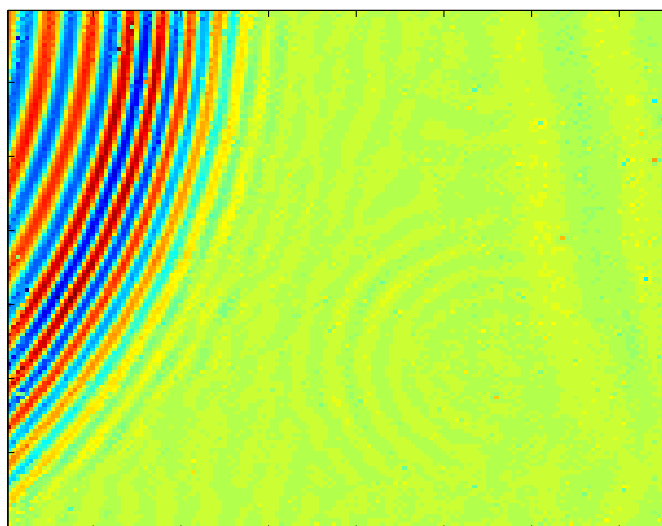


(b)

Figura 5.5: Energia del residuo della ricostruzione con base (a) FFT e (b) Curvelet 3D con $N = 150$ ed estensione del dominio pari a 60 punti.



(a)



(b)

Figura 5.6: Immagine wavefield del segnale ricostruito con base (a) FFT e (b) Curvelet 3D con $N = 150$ ed estensione del dominio pari a 60 punti.

5.2.3 Ricostruzione del segnale warpato

La trasformata Warped in frequenza, in base a quanto esposto al paragrafo 3.3, dovrebbe incrementare la sparsità della rappresentazione del segnale full wavefield attraverso la compensazione della dispersione nei fronti d'onda del campo ultrasonico. Malgrado ciò, dal rapporto Segnale/Rumore in Figura 5.7 relativo alla ricostruzione del segnale full wavefield warpato secondo il modo di propagazione A_0 , risulta una evidente penalizzazione introdotta dalla trasformata in caso di decomposizione Curvelet ed FFT 3D. Questo effetto può essere causato da un disaccoppiamento tra le curve di dispersione simulate e quelle reali relative alla piastra di alluminio.

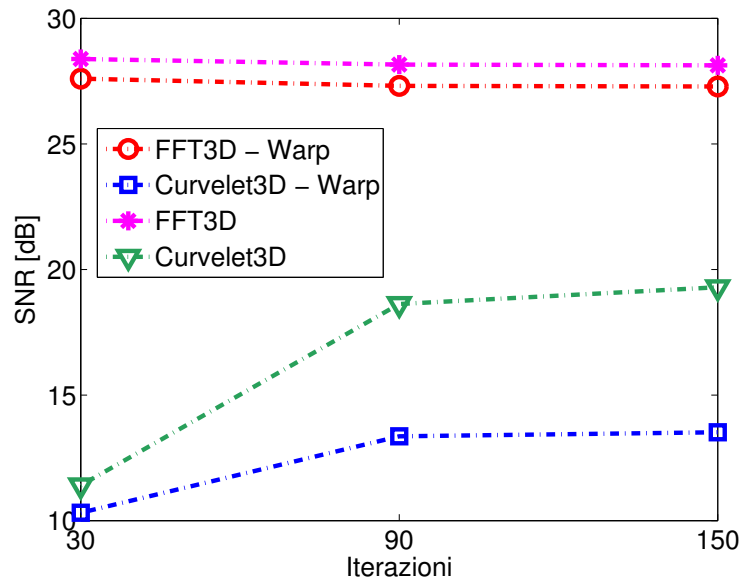


Figura 5.7: Confronto dei risultati di ricostruzione con basi FFT e Curvelet 3D del segnale warpato secondo il modo di propagazione A_0 .

5.3 Ricostruzione con basi 2D

Si riportano i risultati della ricostruzione del segnale $D(x_1, x_2, t)$ sottocampionato in un numero di punti pari al 33% della griglia full-resolution distribuiti con strategia jittered monodimensionale (Fig. 5.2). Per la rappresentazione sparsa sono stati utilizzati i dizionari FFT, Curvelet e Wave Atom 2D. In questo caso la ricostruzione procede dunque per immagini, e non tiene pertanto in considerazione l'evoluzione nel tempo dei fronti d'onda del campo ultrasonico.

5.3.1 Numero di iterazioni

La Figura 5.8 mostra l'andamento del rapporto Segnale/Rumore (a) e i tempi di ricostruzione (b) al variare del numero di iterazioni del solutore. La scomposizione Wave Atom si dimostra in questo caso la scelta ottimale in termini di SNR, raggiungendo un valore pari a 29 dB con $N = 90$. Tuttavia, un tempo di calcolo pari a circa 4.7 h rappresenta un importante impedimento all'utilizzo di tale rappresentazione, vanificando in parte i benefici apportati dal sottocampionamento. Al contrario, l'SNR della ricostruzione con base FFT 2D si attesta ad un valore di circa 26 dB con un tempo di elaborazione inferiore a 3 minuti.

Ancora una volta i segnali nel tempo mostrano artefatti diffusi nella fase precedente l'arrivo del primo fronte d'onda ed in corrispondenza dei bordi, a causa della periodicità della base di Fourier.

L'energia del residuo in Figura 5.9 evidenzia la presenza di errori in prossimità dei bordi e nella regione del difetto in caso di scomposizione Curvelet e Wave Atom, di entità comunque ridotta rispetto all'errore in Figura 5.4(b). Viceversa, l'energia del residuo della ricostruzione con base FFT 2D è molto simile al caso tridimensionale in Figura 5.4(a).

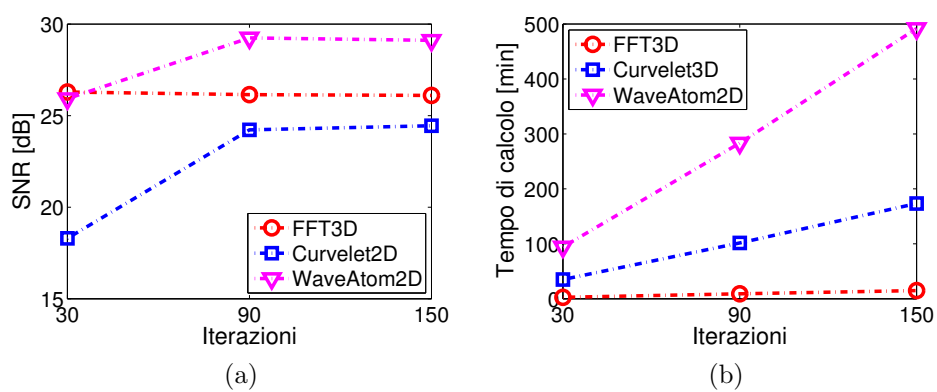
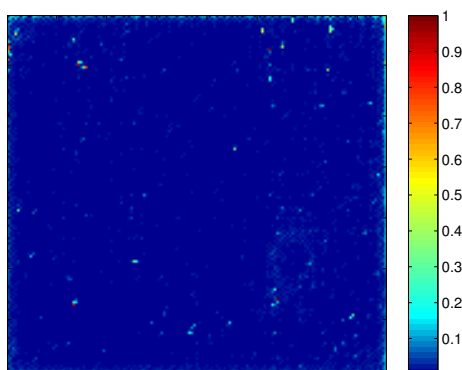
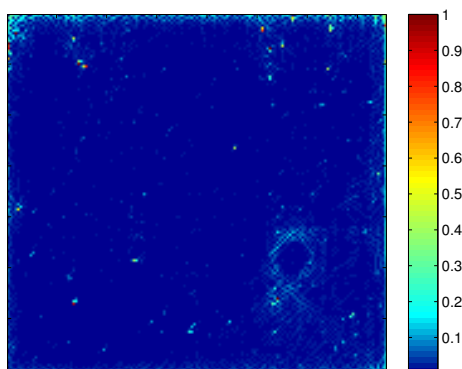


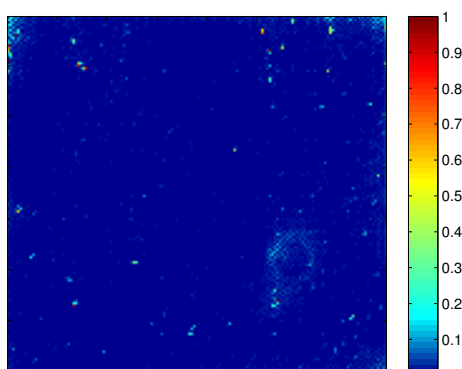
Figura 5.8: Risultati della ricostruzione con basi FFT, Curvelet e Wave Atom 2D al variare del numero di iterazioni del solutore: (a) SNR; (b) Tempo di calcolo.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.9: Energia del residuo della ricostruzione con base (a) FFT; (b) Curvelet e (c) Wave Atom 2D con $N = 150$.

5.3.2 Approccio Mirror Extended

È stato introdotto nel corso del Paragrafo 3.2.4 l'approccio Mirror Extended per la rappresentazione del segnale con basi Curvelet e Wave Atom 2D basata su una scomposizione diadica della trasformata Coseno Discreta (DCT) in luogo della FFT. In Figura 5.10 si riportano il rapporto Segnale/Rumore e i tempi di ricostruzione in caso di scomposizione Curvelet e Wave Atom 2D standard e con approccio Mirror Extended. Quest'ultima comporta in effetti un miglioramento notevole in termini di SNR, penalizzando dall'altro lato in maniera non trascurabile i tempi di calcolo. Infine in Figura 5.11 si mostra l'energia del residuo della ricostruzione.

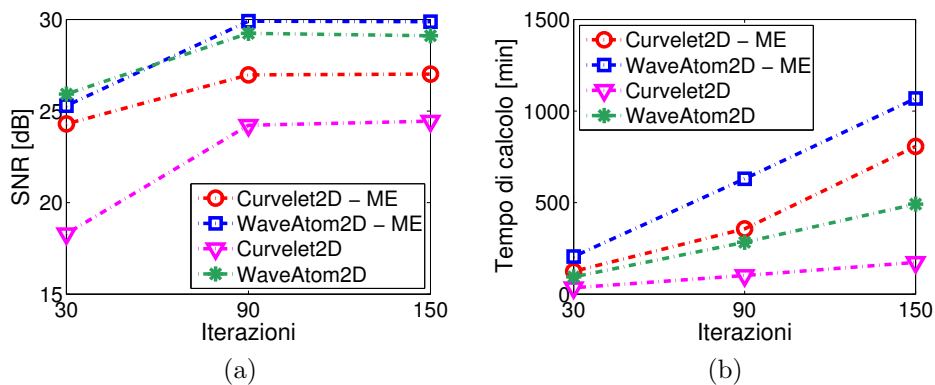
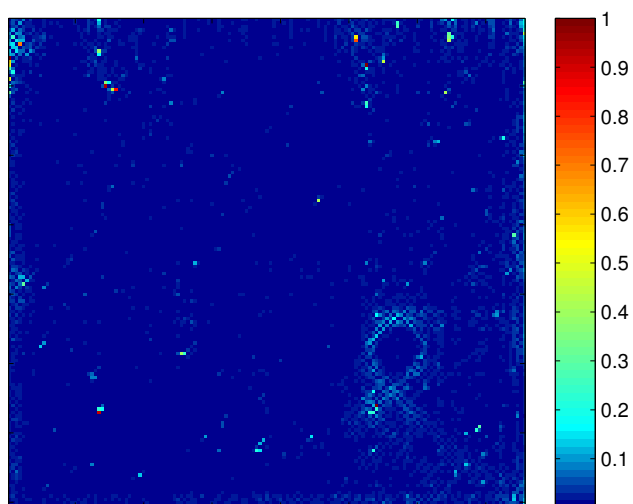
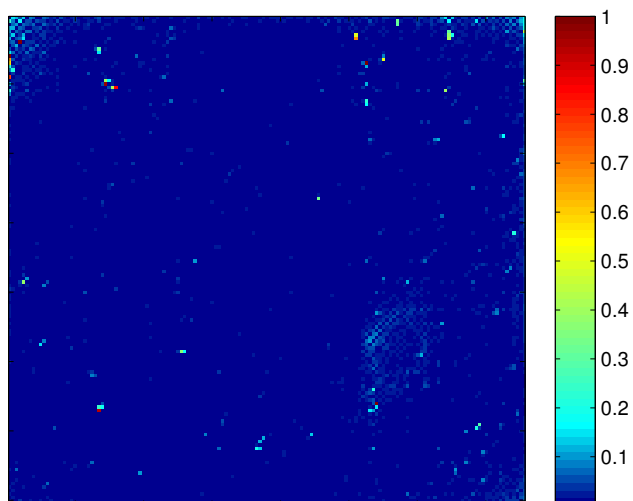


Figura 5.10: Risultati della ricostruzione con basi Curvelet e Wave Atom 2D Mirror Extended al variare del numero di iterazioni del solutore: (a) SNR; (b) Tempo di calcolo.



(a)



(b)

Figura 5.11: Energia del residuo della ricostruzione con base (a) Curvelet e (b) Wave Atom 2D Mirror Extended con $N = 150$.

5.4 Schemi di campionamento

Al fine di validare gli schemi di campionamento discussi nel corso del Capitolo 2, sono stati confrontati i risultati della ricostruzione con base FFT 3D e $N = 30$ del segnale full wavefield sottocampionato in un numero di punti pari al 15% della griglia full-resolution distribuiti con strategia jittered mono- e bidimensionale ed FPS, di cui si riportano in Tabella 5.1 i valori del rapporto Segnale/Rumore. Come discusso in precedenza, le due strategie di distribuzione forniscono risultati di ricostruzione in buona sostanza equivalenti in termini di rapporto Segnale/Rumore, malgrado la migliore uniformità e la caratteristica blue-noise della distribuzione FPS. Quest'ultima è stata testata con un numero di campioni massimo pari al 15% a causa della complessità computazionale nel calcolo dei diagrammi di Voronoi, discussa al Paragrafo 4.3.

Infine, si mostra in Figura 5.12 l'andamento del rapporto Segnale/Rumore della ricostruzione con basi FFT 2- e 3D con $N = 30$ al variare della percentuale dei punti di campionamento da 5 a 70% della griglia full-resolution, distribuiti con strategia jittered 2D.

Schema di campionamento	SNR [dB]
Jittered 1D	20.64
Jittered 2D	20.67
FPS	19.55

Tabella 5.1: Risultati della ricostruzione FFT3D con $N = 30$ del segnale sottocampionato in un numero di punti pari al 15% della griglia full-resolution distribuiti con strategia jittered mono- e bidimensionale ed FPS.

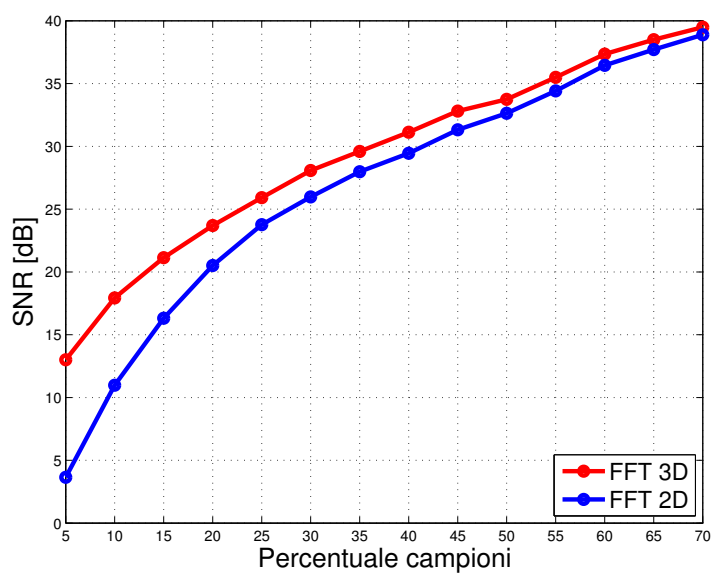


Figura 5.12: Rapporto Segnale/Rumore della ricostruzione con basi FFT 2- e 3D con $N = 30$ del segnale full wavefield sottocampionato in un numero crescente di punti distribuiti con strategia jittered 2D.

5.4.1 Griglia adattativa

Nel corso del Paragrafo 2.2.2 è stata introdotta la possibilità di distribuire i punti di campionamento in maniera adattativa sfruttando la progressività della strategia FPS e tenendo conto di condizioni di non stazionarietà nella propagazione del campo ultrasonico sulla superficie della struttura. Si potrebbe in questo modo ottenere una strategia intelligente che concentri un numero maggiore di campioni “dove ce n’è maggiormente bisogno”, riducendo complessivamente il numero di punti di acquisizione. Al fine di validare questa ipotesi sono state testate diverse distribuzioni multirisoluzione ottenute aumentando la densità dei punti di campionamento nei pressi nella regione in corrispondenza del difetto. Si riportano in Tabella 5.2 i risultati della ricostruzione FFT 3D con $N = 30$.

Facendo riferimento alla distribuzione jittered 2D 33-50%, emerge una ricostruzione praticamente equivalente in termini di rapporto Segnale/Rumore al caso di distribuzione jittered 2D standard con numero di campioni pari al 35% della griglia full-resolution (Fig. 5.12); pertanto la distribuzione multirisoluzione non comporta in questo senso miglioramenti considerevoli nella ricostruzione con base FFT 3D. Tuttavia, da un’ispezione visuale emerge una buona ricostruzione del segnale acquisito con distribuzione jittered 2D 15-50% in quasi tutta l’area in analisi, fatta eccezione per le regioni ai bordi, problema potenzialmente risolvibile mediante un’estensione del dominio spaziale, come indicato al Paragrafo 5.2.2.

Campionamento	Perc. totale campioni	SNR [dB]
Jittered 2D 15-33 %	16 %	21.79
Jittered 2D 15-50 %	18 %	22.37
Jittered 2D 33-50 %	35 %	29.71

Tabella 5.2: Rapporto Segnale/Rumore della ricostruzione FFT3D con $N = 30$ del segnale full wavefield sottocampionato con distribuzione multirisoluzione dei punti di campionamento.

5.5 Tabella riassuntiva dei risultati

Segnale full wavefield non warped acquisito su piastra di alluminio con simulazione del difetto:

Base	Campionam.	Est. dominio [punti]	Iterazioni	Tempo di calcolo [min]	SNR [dB]
FFT 3D	J1D 33	0	30	2.42	28.38
	J1D 33	0	90	12.31	28.16
	J1D 33	0	150	24.37	28.13
	J1D 33	60	150	43.17	32.42
	J1D 33	120	150	50.47	32.60
	J2D 33	0	30	2.70	29.15
	J1D 15	0	30	2.42	20.64
	J2D 15	0	30	2.43	20.67
	FPS 15	0	30	2.44	19.55
	J2D 15-33	0	30	2.50	21.79
	J2D 15-50	0	30	2.15	22.37
J2D 33-50	0	30	2.58	29.71	
FFT 2D	J1D 33	0	30	2.65	26.29
	J1D 33	0	90	8.99	26.14
	J1D 33	0	150	14.84	26.11
Curvelet 3D	J1D 33	0	30	29.24	11.41
	J1D 33	0	90	81.00	18.62
	J1D 33	0	150	137.85	19.29
	J1D 33	60	150	387.47	22.37
	J1D 33	120	150	1336.2	20.92
Curvelet 2D	J1D 33	0	30	34.95	18.30
	J1D 33	0	90	101.56	24.22
	J1D 33	0	150	173.35	24.45
Curvelet 2D ME	J1D 33	0	30	124.79	24.30
	J1D 33	0	90	356.41	26.98
Wave Atom 2D	J1D 33	0	150	807.10	27.02
	J1D 33	0	30	94.33	25.93
	J1D 33	0	90	283.38	29.24
Wave Atom 2D ME	J1D 33	0	150	491.90	29.11
	J1D 33	0	30	205.32	25.29
	J1D 33	0	90	630.16	29.90
Wave Atom 2D ME	J1D 33	0	150	1068.5	29.88

Tabella 5.3: Risultati di ricostruzione del segnale full wavefield non warped. Il primo termine nella colonna **Campionam.** specifica lo schema di campionamento considerato: jittered (J) mono- (1D) e bidimensionale (2D) o FPS. Il secondo termine specifica la percentuale di punti di campionamento in relazione alla griglia full-resolution. In particolare, valori doppi sono riferiti a schemi multirisoluzione.

CAPITOLO 5. Risultati sperimentali

Segnale full wavefield warpato secondo il modo di propagazione A_0 (Fig. 1.1) acquisito su piastra di alluminio con simulazione del difetto:

Base	Campionam.	Est. dominio [punti]	Iterazioni	Tempo di calcolo [min]	SNR [dB]
FFT 3D	J1D 33	0	30	2.13	27.60
	J1D 33	0	90	14.59	27.31
	J1D 33	0	150	20.74	27.29
Curvelet 3D	J1D 33	0	30	23.15	10.32
	J1D 33	0	90	72.04	13.36
	J1D 33	0	150	120.48	13.52

Tabella 5.4: Risultati di ricostruzione del segnale full wavefield warpato secondo il modo di propagazione A_0 . Il primo termine nella colonna **Campionam.** specifica lo schema di campionamento considerato: jittered (J) mono- (1D) e bidimensionale (2D) o FPS. Il secondo termine specifica la percentuale di punti di campionamento in relazione alla griglia full-resolution. In particolare, valori doppi sono riferiti a schemi multirisoluzione.

5.6 Setup in alluminio con crack

Si riportano i risultati della ricostruzione del segnale $D(x_1, x_2, t)$ sottocampionato con strategia jittered 2D in un numero di punti pari al 33% della griglia definita su 160×150 punti su una piastra in alluminio nella quale è nota la presenza di un crack.

Per la ricostruzione, di cui si riportano i valori del rapporto Segnale/Rumore in Tabella 5.5, sono state utilizzate le basi FFT 2- e 3D, Curvelet e Wave Atom 2D con $N = 30$.

La rappresentazione con base FFT 2D consente di ricostruire fedelmente il segnale wavefield di partenza, a meno di errori contenuti nei pressi del crack, risultato peraltro confermato dall'energia del residuo in Figura 5.13.

Base	SNR [dB]
FFT 3D	8.66
FFT 2D	39.50
Curvelet 2D	19.58
Wave Atom 2D	31.42

Tabella 5.5: Rapporto Segnale/Rumore della ricostruzione con basi FFT 3- e 2D, Curvelet e Wave Atom 2D con $N = 30$ del segnale wavefield sottocampionato su setup in alluminio con crack in un numero di punti pari al 33% della griglia full-resolution con distribuzione jittered 2D.

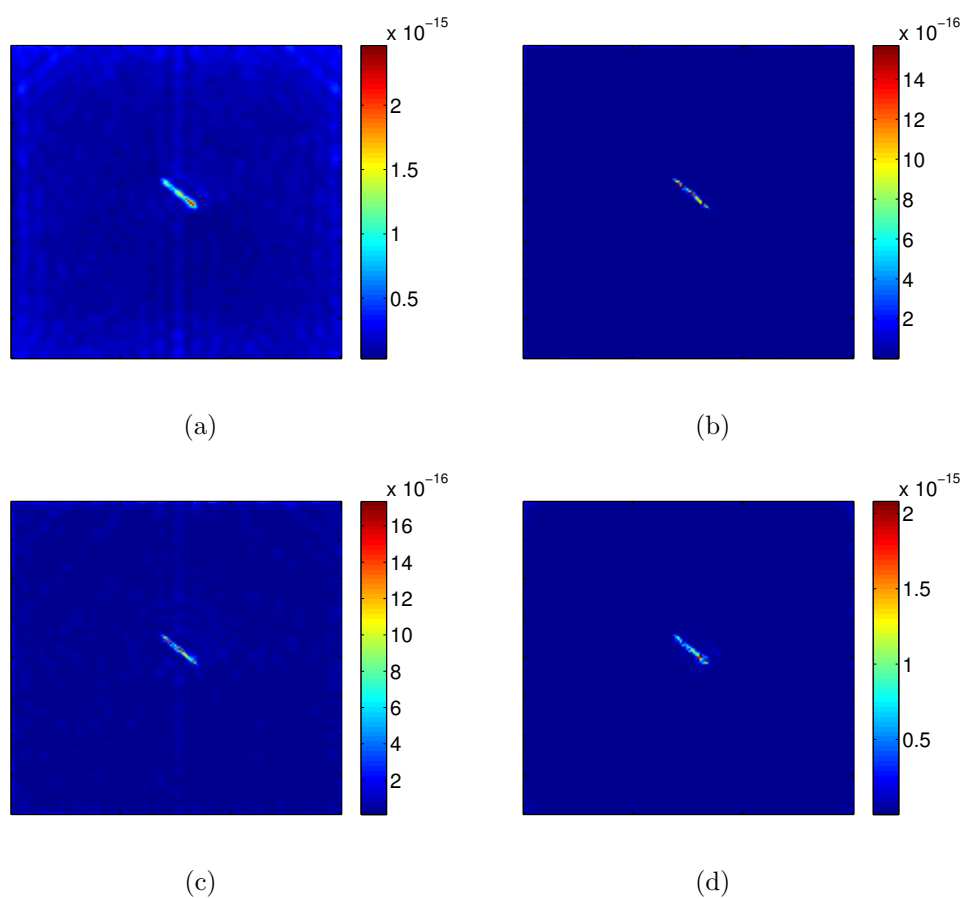


Figura 5.13: Energia del residuo della ricostruzione con base (a) FFT 3D; (b) FFT 2D; (c) Curvelet 2D e (d) Wave Atom 2D con $N = 30$ del segnale wavefield acquisito su una piastra in alluminio con crack.

5.7 Setup in materiale composito con delaminazione

Si riportano i risultati della ricostruzione del segnale $D(x_1, x_2, t)$ sottocampionato con strategia jittered 2D in un numero di punti pari al 33% della griglia definita su 100×80 punti su una piastra in materiale composito nella quale è nota la presenza di una delaminazione.

Per la ricostruzione, di cui si riportano i valori del rapporto Segnale/Rumore in Tabella 5.6, sono state utilizzate le basi FFT 2- e 3D, Curvelet e Wave Atom 2D con $N = 30$.

Anche in questo caso, la rappresentazione con base FFT 2D consente di ricostruire il segnale wavefield di partenza con ottimi risultati, come confermato dall'energia del residuo in Figura 5.14.

Base	SNR [dB]
FFT 3D	29.43
FFT 2D	30.78
Curvelet 2D	15.80
Wave Atom 2D	28.84

Tabella 5.6: Rapporto Segnale/Rumore della ricostruzione con basi FFT 3- e 2D, Curvelet e Wave Atom 2D con $N = 30$ del segnale wavefield sottocampionato su setup in materiale composito con delaminazione in un numero di punti pari al 33% della griglia full-resolution con distribuzione jittered 2D.

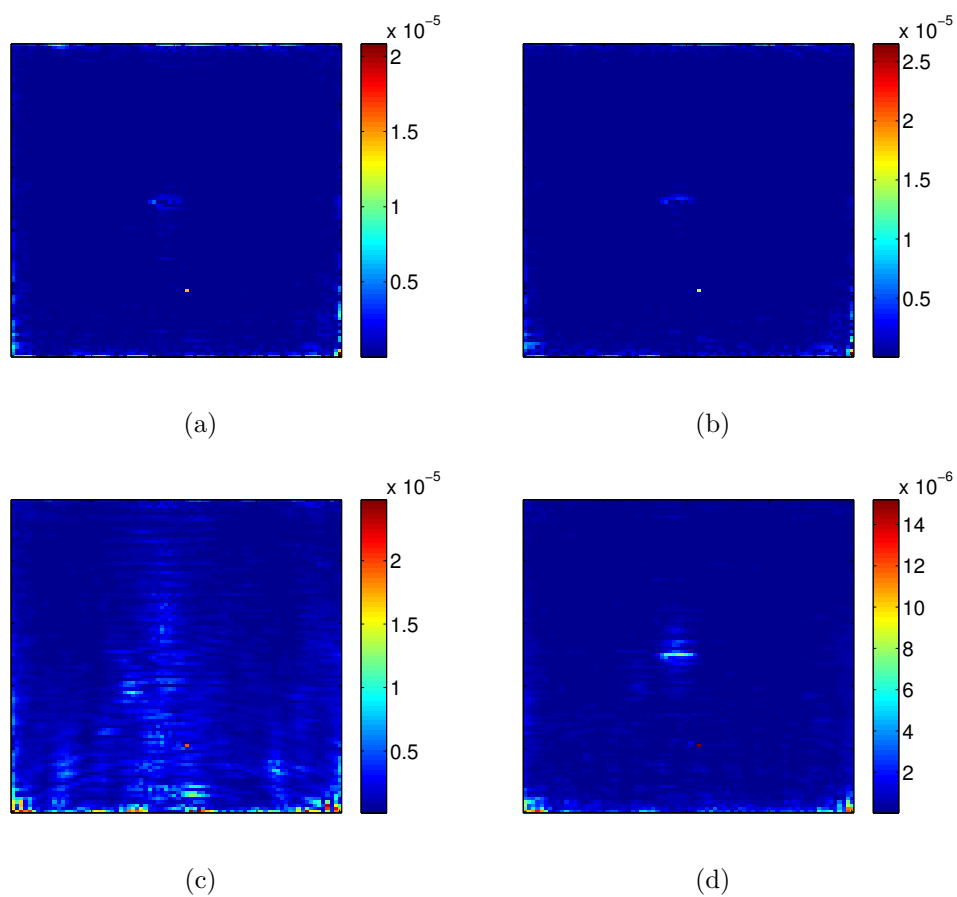


Figura 5.14: Energia del residuo della ricostruzione con base (a) FFT 3D; (b) FFT 2D; (c) Curvelet 2D e (d) Wave Atom 2D con $N = 30$ del segnale wavefield acquisito su una piastra in materiale composito con delaminazione.

Conclusioni

Nel corso di questo elaborato è stato approfondito lo studio di differenti strategie per il campionamento e la ricostruzione di segnali wavefield ultrasonici acquisiti con vibrometro laser su strutture meccaniche planari. Obiettivo dello studio è la riduzione dei tempi di acquisizione mediante la minimizzazione del numero di punti di campionamento sulla struttura.

In accordo con la teoria del Compressive Sensing, sono stati analizzati metodi di distribuzione dei punti di acquisizione noti in letteratura, in larga misura provenienti da applicazioni di elaborazione di immagini. Nello specifico, sono stati forniti i dettagli teorici ed implementativi delle strategie di campionamento Jittered e Farthest Point, le quali consentono di controllare l'estensione del gap, ovvero della distanza tra tracce contigue acquisite nel tempo sulla struttura, preservando la casualità della distribuzione necessaria al conseguimento di un buon grado di incoerenza rispetto alle basi utilizzate per la rappresentazione del segnale wavefield, come indicato dalla teoria del campionamento compressivo.

Sono stati inoltre esaminati dizionari alternativi alla base di Fourier noti come Curvelet e Wave Atom, costituiti da collezioni di funzioni localizzate sia nel dominio spaziale che in quello delle frequenze. Tali trasformate forniscono una selettività direzionale impossibile con altre basi di rappresentazione grazie ad una scomposizione diadica del dominio frequenze/numeri d'onda. Infine gli effetti della compensazione della caratteristica dispersiva del segnale ultrasonico ottenuta mediante la trasformata Warped in frequenza sono

stati valutati come possibilità di miglioramento del grado di sparsità della rappresentazione del segnale wavefield.

I metodi di campionamento e le basi di rappresentazione sono stati testati in ambiente MATLAB utilizzando il solutore SPGL1 per la soluzione del problema basis Pursuit con il supporto della libreria Sparco e di funzioni dedicate appositamente implementate, utilizzando come riferimento segnali wavefield acquisiti su setup sperimentali in alluminio o in materiale composito in presenza di differenti tipologie di difetto.

I risultati di ricostruzione del segnale wavefield evidenziano, da un lato, la sostanziale equivalenza delle strategie di campionamento analizzate. Sebbene da un punto di vista teorico la distribuzione Farthest Point dovrebbe rappresentare la scelta ottimale, in virtù della spiccata caratteristica “blue-noise” del suo spettro, tale metodo fornisce in realtà risultati peggiori in termini di rapporto Segnale/Rumore rispetto ad altre strategie di distribuzione dei campioni.

Dall’altro lato, la ricostruzione utilizzando i dizionari FFT, Curvelet e Wave Atom in due e tre dimensioni ha evidenziato nella base di Fourier bidimensionale il miglior compromesso tra tempi di ricostruzione e rapporto Segnale/Rumore. Infatti, facendo riferimento ad un segnale sottocampionato con distribuzione jittered, l’algoritmo di ricostruzione converge in $N = 30$ iterazioni ad una soluzione con rapporto Segnale/Rumore in generale maggiore di 25 dB. La ricostruzione basata su dizionario Wave Atom 2D, sebbene consenta di ottenere valori più elevati per il rapporto Segnale/Rumore, richiede viceversa tempi di calcolo del tutto proibitivi, raggiungendo la convergenza in $N = 60$ iterazioni. Infine la trasformata Curvelet si dimostra in tutti i casi inefficiente, raggiungendo valori limitati per il rapporto Segnale/Rumore in tempi di ricostruzione in generale elevati.

Questo risultato, benchè inaspettato, può essere in parte attribuito alla maggiore incoerenza degli schemi di campionamento utilizzati con la base di Fourier piuttosto che con basi di funzioni localizzate. È importante notare che le trasformazioni Curvelet e Wave Atom restituiscono strutture di dati complesse che rendono difficile il calcolo dell’incoerenza, che non è stata pertanto misurata in nessun caso.

In conclusione, con questo elaborato è stata assemblata una piattaforma di confronto che consente per ciascuna applicazione una scelta di compromesso della strategia di campionamento unitamente alla base per la rappresentazione sparsa del segnale wavefield ultrasonico, in accordo con quanto asserito dalla teoria del Compressive Sensing.

Gli sviluppi futuri dell'applicazione oggetto di questa tesi sono ambivalenti e sono da individuarsi nell'implementazione di metodi di dictionary-learning e di strategie adattative di distribuzione dei campioni che consentano, attraverso la predizione dell'errore di ricostruzione, di ottimizzare la collocazione dei punti di acquisizione, concentrando densità maggiori in corrispondenza delle regioni in cui è di particolare interesse raggiungere un elevato grado di dettaglio al fine del rilevamento del difetto.

APPENDICE A

Appendice dei codici

```
1 function op = opWaveAtom2d(m,n,pat,tp,ttype)
2
3 % 2-DIMENSIONAL WAVE ATOM OPERATOR INTEGRATION IN SPARCO TOOLBOX
4 %
5 % creates a two-dimensional WaveAtom operator for m-by-n
6 % matrices.
7 % pat specifies the type of frequency partition which satisfies
8 % parabolic scaling relationship. pat can either be 'p' or 'q'.
9 % tp is the type of transform:
10 % 'ortho': orthobasis
11 % 'directional': real-valued frame with single
12 % oscillation direction
13 % 'complex': complex-valued frame.
14 % ttype determines the type of trasformation and must equal 'ME'
15 % for Mirror Extended Wave Atom transformation.
16
17 if nargin<5, ttype = 'NO_ME'; end
18
19 if strcmp(ttype,'ME')
20     C = mefwa2(zeros(m,n),pat,tp);
21
22     cn = 0;
23     for i=1:size(C,1)
24         for j=1:size(C,2)
25             for k=1:size(C{i,j},1)
26                 for l=1:size(C{i,j},2)
27                     hdr{i,j}{k,l} = size(C{i,j}{k,l});
28                     cn = cn+prod(size(C{i,j}{k,l}));
29                 end
30             end
31         end
32     end
33 else
34     C = fwa2(zeros(m,n),pat,tp);
```

```

35
36     cn = 0;
37     for i=1:size(C,1)
38         for j=1:size(C,2)
39             for k=1:size(C{i,j},1)
40                 for l=1:size(C{i,j},2)
41                     hdr{i,j}{k,l} = size(C{i,j}{k,l});
42                     cn = cn+prod(size(C{i,j}{k,l}));
43                 end
44             end
45         end
46     end
47 end
48
49 op = @(x,mode) opWaveAtom2d_intrnl(m,n,cn,hdr,pat,tp,ttype,x,mode);
50
51 function y = opWaveAtom2d_intrnl(m,n,cn,hdr,pat,tp,ttype,x,mode)
52
53 if mode == 0
54     y = {cn,m*n,[0,0,0,0],{'WaveAtom2d'}};
55 elseif mode == 1
56     if strcmp(ttype,'ME')
57         y = mefwa2(reshape(x,m,n),pat,tp);
58     else
59         y = fwa2(reshape(x,m,n),pat,tp);
60     end
61     % WAVE ATOM COEFFICIENTS TO VECTOR
62     y = wa2d_c2v(y,cn);
63 else
64     if strcmp(ttype,'ME')
65         % VECTOR TO WAVE ATOM COEFFICIENTS STRUCTURE
66         x = wa2d_v2c(x,hdr);
67         y = meiwa2(x,pat,tp);
68     else
69         x = wa2d_v2c(x,hdr);

```

```
70     y = iwa2(x,pat,tp);  
71     end  
72     y = real(y);  
73 end
```

Listing A.1: opWaveAtom2d


```
1 function mask = create_FPsmask(n1,n2,nsamples)
2
3 samples = zeros(nsamples,2);
4 samples(1:4,:) = [1,1; 1,n2; n1,1; n1,n2];
5 samples(5,:) = [randi([1 n1]) randi([1 n2])];
6
7 for scout=6:nsamples
8     % UPDATE VORONOI DIAGRAM OF samples
9     [vx,vy] = voronoi(samples(1:(scout-1),1),...
10         samples(1:(scout-1),2));
11
12     % FIND INTERNAL VERTICES
13     int = find(vx>=1&vx<=n1&vy>=1&vy<=n2);
14     candidates(1,:) = [vx(int(1)),vy(int(1))];
15     k = 2;
16     for i=2:length(int)
17         equal = 0;
18         for j=1:size(candidates,1)
19             if(vx(int(i))==candidates(j,1)&&vy(int(i))==...
20                 candidates(j,2))
21                 equal = 1;
22                 break;
23             end
24         end
25         if(equal==0)
26             candidates(k,:) = [vx(int(i)),vy(int(i))];
27             k = k+1;
28         end
29     end
30
31     % FIND CROSSING EDGES
32     for i=1:length(vx)
33         % CHECK FOR CROSSING SEGMENTS
34         if(min(vx(:,i))<1 || max(vx(:,i))>n1 || min(vy(:,i))<1 ...
```

```

35         || max(vy(:,i))>n2)
36         [x,y] = polyxpoly(vx(:,i),vy(:,i),[1,1,n1,n1,1],...
37             [1,n2,n2,1,1]);
38         if(~(isempty(x)))
39             candidates(k:k+length(x)-1,:) = [x,y];
40             k = k+length(x);
41         end
42     end
43 end
44 candidates = round(candidates);
45
46 % EVALUATE MINIMUM DISTANCES FROM VERTICES TO SAMPLE POINTS
47 for i=1:size(candidates,1)
48     for j=1:scount
49         dist{i}(j) = abs(candidates(i,1)-samples(j,1))+...
50             abs(candidates(i,2)-samples(j,2));
51     end
52     [mindist(i,1),mindist(i,2)] = min(dist{i});
53 end
54 [x,newsampleid] = max(mindist(:,1));
55 samples(scount,:) = candidates(newsampleid,:);
56 end
57
58 mask = zeros(n1,n2);
59 for i=1:size(samples,1)
60     mask(samples(i,1),samples(i,2)) = 1;
61 end

```

Listing A.2: create_FPSmask

```
1 clear all; close all; clc;
2
3 % LOAD WAVEFIELD SIGNAL
4 load('sig_no_warped_def.mat');
5
6 % CREATE JITTERED MASK WITH gamma=3
7 % gamma = 3;
8 % mask = create_jittered_mask(gamma,n1,n2);
9
10 % LOAD MASK
11 load('mask.mat');
12
13 % SIGNAL AND MASK EXTENSION
14 addendum = 0;
15 [n1,n2,n3] = size(sig_no_warped_def);
16 sigint = zeros(n1+addendum,n2+addendum,n3);
17 sigint((addendum/2)+1:n1+(addendum/2), (addendum/2)+1:n2+...
18       (addendum/2),:) = sig_no_warped_def;
19 [N1,N2,N3] = size(sigint);
20
21 bigmask = zeros(n1+addendum,n2+addendum);
22 bigmask((addendum/2)+1:n1+(addendum/2), (addendum/2)+1:n2+...
23       (addendum/2)) = mask(10:10+(n1-1),10:10+(n2-1));
24 mask = bigmask; clear 'bigmask';
25
26 % RESTRICTION OPERATOR
27 M = opColumnRestrict3D_4pixels_blocks(N1,N2,N3,mask);
28
29 % ADJOINT CURVELET OPERATOR
30 B = opTranspose(opFFT3d(N1,N2,N3));
31
32 A = opFoG3d(M,B);
33
34 b = M(sigint(:,1));
```

```
35
36 iter = 1;
37 for i=30:60:150
38     tic;
39
40     % SPGL1 BASIS PURSUIT PROBLEM
41     opts = spgSetParams( 'iterations' , i , ...
42                         'verbosity'   , 2 , ...
43                         'bpTol'       , 1e-9 , ...
44                         'optTol'      , 1e-9 ...
45                         );
46
47     [x,r,g,info] = spg_bp(A,b,[],opts);
48
49     y = B(x,1);
50
51     y = reshape(y,N1,N2,N3);
52
53     FIELD_FFT3D{iter} = y((addendum/2)+1:n1+(addendum/2),...
54                         (addendum/2)+1:n2+(addendum/2),:);
55
56     RES_FFT3D{iter} = sig_no_warped_def - FIELD_FFT3D{iter};
57     RES_ENERGY_FFT3D{iter} = sum(RES_FFT3D{iter}.^2,3);
58     SNR_FFT3D(iter) = snr_calc(sig_no_warped_def,RES_FFT3D{iter});
59     eval_time_FFT3D(iter) = toc;
60
61     iter = iter+1;
62 end
```

Listing A.3: main file ricostruzione FFT3D al variare del numero di iterazioni

Bibliografia

- [1] J. L. Rose, “Guided Wave Nuances for Ultrasonic Nondestructive Evaluation”, *IEEE Trans. on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, vol. 47, no. 2, pp. 575-583, 2000.
- [2] D. Dutta, “Ultrasonic techniques for baseline-free damage detection in structures”, Ph.D. dissertation, Civil and Environmental Engineering, Carnegie Mellon University, Pittsburg, 2010.
- [3] V. Giurgiutiu, A. Cuc, “Embedded Non-destructive Evaluation for Structural Health Monitoring, Damage Detection, and Failure Prevention”, *The Shock and Vibration Digest*, vol. 37, no. 2, pp. 83-105, 2005.
- [4] T. Kundu, “Acoustic source localization”, *Ultrasonics*, vol. 54, no. 1, pp. 25-38, 2014.
- [5] P. J. Shull, “Nondestructive evaluation theory, techniques and applications”, New York, NY, 2002.
- [6] A. Raghavan, C. E. S. Cesnik, “Review of Guided-wave Structural Health Monitoring”, *The Shock and Vibration Digest*, vol. 39, pp. 91-114, 2007.
- [7] J. L. Rose, “Ultrasonic Waves in Solid Media”, Cambridge University Press, 2004.

- [8] P. Sriram, S. Hanagud, J. I. Craig, “Scanning laser Doppler techniques for vibration testing”, *Experimental Techniques*, vol. 16, no. 6, pp. 21-26, 1992.
- [9] W. Staszewski, B. Lee, L. Mallet, F. Scarpa, “Structural health monitoring using scanning laser vibrometry: I. Lamb wave sensing”, *Smart Mater. Struct.*, vol. 13, no. 2, pp. 251-260, 2004.
- [10] L. De Marchi, G. Cera, G. Masetti, “Compressive sensing of full field images in Lamb waves inspections”, *Ultrasonics, IEEE Symposium*, 2013.
- [11] E. Candès, J. Romberg, T. Tao, “Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information”, *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 52, no. 2, pp. 489-509, 2006.
- [12] E. Candès, M. Wakin, “An Introduction To Compressive Sampling”, *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 25, pp. 21-30, 2008.
- [13] D. L. Donoho, “Compressed Sensing”, *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 52, no. 4, pp. 1289-1306, 2006.
- [14] G. Hennefent, F. J. Herrmann, “Simply denoise: wavefield reconstruction via jittered under-sampling”, *Geophysics*, vol. 73, pp. 19-28, 2008.
- [15] E. Candès, L. Demanet, D. Donoho, L. Ying, “Fast Discrete Curvelet Transforms”, tech. rep., Applied and Computational Mathematics, California Institute of Technology, 2005.
- [16] L. Demanet, L. Ying, “Wave Atoms and Sparsity of Oscillatory Patterns”, *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol. 23, no. 3, pp. 368-387, 2007.
- [17] R. L. Cook, “Stochastic Sampling in Computer Graphics”, *ACM Transactions on Graphics*, vol. 5, no. 1, pp. 51-72, 1986.

- [18] R. Shahidi, G. Tang, J. Ma, F. J. Herrmann, “Application of randomized sampling schemes to curvelet-based sparsity-promoting seismic data recovery”, *Geophysical Prospecting*, vol. 61, pp. 973-997, 2013.
- [19] Y. Eldar, M. Lindenbaum, M. Porat, Y. Zeevi, “The Farthest Point Strategy for Progressive Image Sampling”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 6, no. 9, 1997.
- [20] J. Ma, G. Plonka, “The Curvelet Transform”, *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 27, no. 2, pp. 118-133, 2010.
- [21] S. Mallat, “A Wavelet Tour of Signal Processing”, Academic Press, San Diego, 1998.
- [22] L. Demanet, “Curvelets, Wave Atoms and Wave Equations”, Ph.D. dissertation, California Institute of Technology, 2006.
- [23] L. Ying, L. Demanet, E. Candès, “3D Discrete Curvelet Transform”, *Proc. SPIE*, vol. 5914, no. 591413, 2005.
- [24] L. Demanet, L. Ying, “Curvelets and Wave Atoms for Mirror-Extended Images”, *Proc. SPIE, Wavelets XII*, San Diego, vol. 6701, 2007.
- [25] L. De Marchi, A. Marzani, S. Caporale, N. Speciale, “Ultrasonic Guided-Waves Characterization With Warped Frequency Transforms”, *IEEE Trans. on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, vol. 56, no. 10, 2009.
- [26] L. De Marchi, E. Baravelli, M. Ruzzene, N. Speciale, G. Masetti, “Guided Wave Expansion in Warped Curvelet Frames”, *IEEE Trans. on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, vol. 59, no. 5, 2012.
- [27] S. S. Chen, D. L. Donoho, M. A. Saunders, “Atomic Decomposition by Basis Pursuit”, *SIAM J. on Scientific Computing*, vol. 20, no. 1, pp. 33-61, 1998.

- [28] E. van den Berg, M. P. Friedlander, “Probing the Pareto frontier for basis pursuit solutions”, *SIAM J. on Scientific Computing*, vol. 31, no. 2, pp. 890-912, 2008.
- [29] E. van den Berg, M. P. Friedlander, “SPGL1: A solver for large-scale sparse reconstruction”, 2007, <http://www.cs.ubc.ca/labs/scl/spgl1>.
- [30] E. van den Berg, M. P. Friedlander, F. J. Herrmann, R. Saab, Ö. Yilmaz, “Sparco: A Testing Framework for Sparse Reconstruction”, Department of Computer Science Technical Report TR-2007-20, University of British Columbia, 2007.
- [31] <http://www.curvelet.org>
- [32] <http://www.waveatom.org>