Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea in Scienze dell'Informazione

REDAZIONE DI PRESENTAZIONI E DISPENSE. UN ESEMPIO: I QUATERNIONI NELLA COMPUTER-GRAPHICS

Relatore:
Chiar.mo Prof.
GIULIO CASCIOLA

Presentata da:
GIULIANA FIGNA

Sessione III
Anno Accademico 2012/2013

Ai miei figli Andrea e Riccardo . . .

Introduzione

L'obiettivo della tesi è individuare gli strumenti più indicati per scrivere un documento a carattere tecnico-scientifico e creare la relativa presentazione multimediale. Le scelte effettuate sono state suggerite da fonti con un'indiscussa esperienza nel settore tecnico-scientifico. Tuttavia era impossibile fare delle considerazione relativamente a questi strumenti senza averli mai usati in pratica. E' stato quindi scelto un argomento tecnico scientifico come esempio: I quaternioni nella Computher Grafica. L'argomento è stato esposto in una breve dispensa scritta con LaTeX. La dispensa è costituita dai primi due capitoli della tesi. Nella dispensa sono state inserite diverse immagini tutte generate tramite il programma *Inkscape*. La presentazione multimediale associata è stata realizzata attraverso lo strumento più diffuso e utilizzato: *PowerPoint*.

La tesi è basata sull'esperienza diretta del lavoro eseguito. E' ben lontana dal voler essere un manuale. Si è cercato di dare una breve descrizione di ogni strumento ponendo l'accento sugli elementi che sono stati considerati particolarmente significativi in questa esperienza di lavoro. In particolare si è cercato di mettere in evidenza come dispense e presentazioni relative ad argomenti tecnico scientifici abbiano una struttura particolare e il modo più efficace per produrle passa proprio per la scelta di strumenti idonei ad affrontare le problematiche specifiche.

L'appendice A della tesi è una specie di diario di lavoro dove sono state riportate le scelte progettuali che hanno guidato la realizzazione pratica della dispensa.

L'appendice B è una selezione delle diapositive della presentazione.

Indice

Elenco delle figure

Capitolo 1

I Numeri Complessi

Ci sono ragioni, principalmente di natura algebrica, che ci spingono ad ampliare il campo numerico $\mathbb{R}$.

1.1 Definizione di $\mathbb{C}$ e struttura di campo

Abbiamo indicato con $\mathbb{R}^2$ (abbreviazione di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) l'insieme delle coppie ordinate (a, b) di numeri reali. Su queste definiamo direttamente le operazioni di somma e prodotto con le seguenti regole:

- $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$
- $(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$

Osserviamo che, $\forall$ (a, b):

- $(0, 0)$ è *elemento neutro* per la somma.
- $(1, 0)$ è *elemento neutro* per il prodotto.
- $(-a, -b)$ è *l'opposto* di (a, b).
- $(a/(a^2 + b^2), -b/(a^2 + b^2))$ è *il reciproco* di (a, b) *se* $(a, b) \neq (0, 0)$.

L'insieme $\mathbb{R}^2$ così strutturato è un campo, che chiameremo *campo dei numeri complessi* e indicheremo con $\mathbb{C}$.

Osserviamo ora che $\mathbb{C}$ contiene il sottoinsieme $\mathbb{C}_0$ delle coppie del tipo $(a, 0)$; esso è un *sottocampo* di $\mathbb{C}$, infatti somma e prodotto di coppie di questo tipo sono ancora coppie dello stesso tipo.

L'insieme $\mathbb{C}_0$ può essere ordinato ponendo $(a, 0) < (b, 0)$ se $a < b$. Se allora mettiamo in corrispondenza biunivoca l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ con $\mathbb{C}_0$, ponendo

$$(a, 0) \longleftrightarrow \; a$$

possiamo *identificare* i numeri reali a con i numeri complessi del tipo $(a, 0)$.

In questo senso il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ è un ampliamento di quello dei numeri reali $\mathbb{R}$.

Consideriamo ora il numero $(0, 1)$. Esso ha la singolare proprietà che

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$$

cioè il suo quadrato coincide con il numero reale -1. Per questa ragione la coppia $(0, 1)$ merita di essere indicata con un simbolo speciale: la indicheremo con "i " e la chiameremo *unità immaginaria*.

1.2 Forma algebrica dei numeri complessi

A questo punto conviene semplificare la notazione. Osserviamo che, se scriviamo semplicemente a invece di $(a, 0)$ ecc. abbiamo che

$$(a, b) = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0) = a + ib$$

Con questa notazione le regole definite per effettuare la somma e il prodotto tra due numeri complessi non sono altro che le ordinarie regole del calcolo letterale ove si tenga conto che $i^2 = -1$:

- $(a + ib) + (c + id) := (a + c) + i(b + d)$
- $(a + ib) \cdot (c + id) := ac + iad + ibc + i^2bd = (ac - bd) + i(ad + bc)$

La scrittura

$$z = a + ib$$

è detta *forma algebrica dei numeri complessi*; a si chiama *parte reale* di z e si indica con *Re(z)*, b si chiama *parte immaginaria* e si indica con *Im(z)*.

1.2.1 Piano complesso

In un piano cartesiano, rappresentiamo i numeri complessi $a + ib$ come punti di coordinate (a, b): ecco una semplice e comoda immagine geometrica del campo complesso. In questo contesto, il piano viene detto *piano complesso o piano di Gauss*; gli assi *x, y* si dicono rispettivamente *asse reale e asse immaginario*: i punti sull'asse reale sono i numeri reali, i punti sull'asse immaginario sono i numeri immaginari puri cioè del tipo *ib*. Graficamente la somma tra due numeri complessi si ottiene applicando la "regola del parallelogrammo".

Abbiamo detto che $\mathbb{C}$ è un campo, si può dimostrare che si tratta di un *campo non ordinato.*

1.3 Coniugato e modulo

Il numero complesso $\bar{z} = a - ib$ si dice *complesso coniugato* di $z = a + ib$. Si ha che:

- $z + \bar{z} = 2a = 2Re(z)$
- $z - \bar{z} = 2bi = 2iIm(z)$

L'operazione di coniugato ha le seguenti proprietà elementari rispetto alla somma e al prodotto:

- $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

- $\overline{\dfrac{1}{z}} = \dfrac{1}{\bar{z}}$

Osserviamo ora che

$$z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 \geq\ 0$$

Si chiama *modulo* di $z = a + ib$ e si indica con $|z|$, il numero reale non negativo $\sqrt{a^2+b^2}$. Segue che $z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$.

Se z è un reale il suo modulo si chiama *valore assoluto*.

Valgono le seguenti proprietà:

- $|z| \geq\ 0$ e $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z| = |\bar{z}|$
- $|Re(z)| \leq |z| \quad |Im(z)| \leq |z| \quad |z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (disuguaglianza triangolare)
- $|z_1 + z_2| \geq |\, |z_1| - |z_2|\, |$

Geometricamente $|z|$ rappresenta la *distanza* del punto z (numero complesso) dall'origine;

$|z_1 - z_2|$ rappresenta la *distanza* tra i due punti z_1 e z_2.

1.4 Forma trigonometrica

Come è noto dalla Geometria, i punti del piano possono essere individuati, oltre che dalle loro coordinate cartesiane, anche dalle coordinate polari:

- ρ *raggio polare*, cioè distanza del punto dall'origine
- θ *angolo polare*, cioè l'angolo che la retta congiungente il punto con l'origine forma con l'asse delle ascisse positive, misurato in senso antiorario.

E' chiaro che una coppia ρ, θ con $\rho > 0$, individua un ben determinato punto nel piano. Invece un punto del piano individua univocamente la coordinata ρ, ma l'angolo θ (misurato in radianti) è determinato solo a meno di multipli di 2π.

Dato un numero complesso z, il suo modulo $|z|$ coincide col raggio polare del punto che ne è l'immagine sul piano complesso. Chiameremo *argomento* di z, e lo indicheremo con $\arg(z)$, uno qualsiasi degli angoli θ relativi al punto z. In questo modo l'argomento di z non è ben determinato. Spesso questa indeterminazione non porta alcun inconveniente. Altre volte invece è preferibile assegnare un ben determinato argomento a un numero complesso. Ciò può ottenersi in infiniti modi, fissando un qualsiasi intervallo, di ampiezza 2π, entro il quale far variare l'angolo θ. Gli angoli più comunemente usati a questo scopo sono $[0, 2\pi)$ e $(-\pi, \pi]$; allora l'argomento di z viene detto *argomento principale*.

Per esempio, il numero $-i$ ha come argomento:

- $-\frac{\pi}{2}$ se si adotta la convenzione $\theta \in (-\pi, \pi]$ oppure
- $\frac{3\pi}{2}$ se si adotta la convenzione $\theta \in [0, 2\pi)$ oppure
- qualunque valore della forma: $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

I numeri reali positivi hanno argomento principale 0, quelli negativi π con entrambe le convenzioni. Per il numero 0 l'argomento non viene definito.

Dato il numero $z = a+ib$, dalla trigonometria ricaviamo immediatamente le relazioni tra le coordinate cartesiane a, b e quelle polari ρ, θ:

$$a = \rho \cos\theta$$

$$b = \rho \sin\theta$$

cosicchè il numero complesso z può anche essere scritto nella seguente forma, detta *forma trigonometrica* dei numeri complessi:

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Le relazioni inverse sono:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

La formula di Eulero afferma che, per ogni numero reale x si ha :
$e^{ix} = \cos x + i \sin x$ dove e è la base dei logaritmi naturali, i è l'unità immaginaria e *sin* e *cos* sono funzioni trigonometriche seno e coseno. La formula di Eulero inversa permette di ottenere seno e coseno della rappresentazione esponenziale di un numero complesso:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

La coppia di valori $(\cos\theta, \sin\theta)$ rappresenta un qualunque punto su un cerchio di raggio unitario centrato nell'origine, al variare di θ. Perciò per individuare qualsiasi punto nel piano è sufficiente moltiplicare la forma esponenziale per il modulo r:

$$z = re^{i\theta} = r\cos\theta + ir\sin\theta$$

Capitolo 2

I Quaternioni

2.1 L'insieme dei QUATERNIONI

I quaternioni furono formalizzati dal matematico irlandese Sir William Rowan Hamilton nell' Ottobre del 1843. Hamilton era alla ricerca di un metodo per estendere i numeri complessi, che possono essere visti come punti su un piano, su un numero maggiore di dimensioni spaziali. Dopo aver ricercato invano un'estensione tridimensionale, ne formulò una con dimensione 4: i quaternioni.

In seguito raccontò di aver fatto questa scoperta nel corso di una passeggiata con sua moglie, quando improvvisamente gli venne in mente la soluzione. Eccitato dalla scoperta, incise l'equazione sul lato del vicino ponte Brougham a Dublino. Questa formalizzazione doveva fare a meno della commutatività della moltiplicazione, una scelta radicale per quel tempo.

Oggi i quaternioni vengono utilizzati principalmente nella rappresentazione di rotazioni e orientazioni nello spazio tridimensionale. Hanno quindi applicazioni nella computer grafica 3D. Trovano anche applicazione in robotica, fisica e astronomia. La ragione è che la combinazione di molte trasformazioni descritte da quaternioni è più stabile numericamente della combinazione di molte trasformazioni matriciali.

2.1.1 Quaternioni definiti come coppia scalare-vettore

Un quaternione q è la somma di una coppia ordinata formata da una parte *scalare* e da una parte *vettoriale* $3-$dimensionale.

$$q = (s, \mathbf{v}) = s + \mathbf{v}$$

- s è la parte scalare *reale*,
- $\mathbf{v}$ è la parte vettoriale, anche detta *parte immaginaria* in quanto si tratta di un **vettore a tre componenti complesse**.

2.1.2 Quaternioni definiti come combinazione lineare

L'insieme dei quaternioni viene indicato con $\mathbb{H}$. Un quaternione q appartenente ad $\mathbb{H}$ può essere definito attraverso una combinazione lineare degli elementi: $1, i, j, k$:

$$q = s + ai + bj + ck$$

- dove s è un valore reale,
- (a, b, c) sono i coefficienti reali del vettore $\mathbf{v}$,
- i simboli letterali i, j, k soddisfano le seguenti proprietà:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k$$

$$jk = -kj = i$$

$$ki = -ik = j$$

Segue che:

$$ijk = -1$$

Osservazione: La prima proprietà è una diretta conseguenza della proprietà fondamentale dei numeri complessi: $i^2 = -1$.

Le regole di moltiplicazione tra i, j, k hanno le stesse proprietà del prodotto vettoriale tra i versori degli assi coordinati in un sistema di riferimento destrorso.

2.1.3 Quaternione denotato come quadrupla

In analogia con i numeri complessi dove $s + ai$ è rappresentabile da una coppia di reali (s, a), il generico quaternione q è rappresentabile anche mediante una quadrupla di reali: (s, a, b, c).

2.1.4 Considerazioni

I quaternioni sono un'entità matematica generale che comprende

- i numeri reali: $s = (s, 0, 0, 0), \quad s \in \mathbb{R}$
- i numeri complessi: $s + ai = (s, a, 0, 0), \quad s, a \in \mathbb{R}$
- i vettori in $\mathbb{R}^3$: $v = (0, a, b, c), \quad$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$; in questo caso però i, j, k vanno interpretati come i versori degli assi coordinati in un sistema destrorso.

Riassumendo un quaternione q può essere visto e denotato in tre modi diversi: come la somma di una parte scalare e una vettoriale, come un numero "ipercomplesso" definito su una base composta da una parte reale e tre parti immaginarie, come una quadrupla di reali. Nel seguito faremo uso di tutte le notazioni alternative per indicare i quaternioni.

2.2 Algebra dei quaternioni

2.2.1 Somma di quaternioni

Sui quaternioni è definita, in modo naturale, l'operazione di *somma* di due quaternioni:

$$q_1 + q_2 = (s_1 + s_2, \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2})$$

Il quaternione $(0,0,0,0) = (0,\mathbf{0})$ è l'elemento neutro additivo.
La struttura algebrica $(\mathbb{H},+)$ risulta essere un gruppo abeliano.

2.2.2 Prodotto di quaternioni

Applicando le usuali regole dell'algebra per eseguire il prodotto di due sommatorie e applicando le proprietà viste per il prodotto fra gli elementi i, j, k, si può ricavare la seguente formula per il prodotto di due quaternioni.

Siano:
$q_1 = (s_1, \mathbf{v_1}) = s_1 + a_1 i + b_1 j + c_1 k$
$q_2 = (s_2, \mathbf{v_2}) = s_2 + a_2 i + b_2 j + c_2 k$
allora:

$$q_1 q_2 = (s_1 s_2 - \mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2}, \quad s_1 \mathbf{v_2} + s_2 \mathbf{v_1} + \mathbf{v_1} \wedge \mathbf{v_2})$$

dove:

- $\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2} = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 \in \mathbb{R}$ = prodotto scalare dei vettori $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$
- $\mathbf{v_1} \wedge \mathbf{v_2} = (b_1 c_2 - b_2 c_1) i - (a_1 c_2 - a_2 c_1) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k$ = prodotto vettoriale dei vettori $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$

Se la parte reale è 0 il quaternione è detto **puro**. Se il quaternione è puro vale: $q_1 q_2 = (-\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1} \wedge \mathbf{v_2})$
Il prodotto tra quaternioni è associativo: $q_1(q_2 q_3) = (q_1 q_2) q_3$.
Il prodotto tra quaternioni **non è commutativo**: $q_1 q_2 \neq q_2 q_1$, la parte reale rimane identica in entrambi i prodotti, invece la parte vettoriale cambia.
Il prodotto tra quaternioni è distributivo.
Il quaternione $(1,0,0,0) = (1,\mathbf{0})$ è l'elemento neutro moltiplicativo.

2.2.3 Prodotto esterno

Introduciamo anche l'operazione di *prodotto di un quaternione q per uno scalare* $\alpha \in \mathbb{R}$ o prodotto esterno:

$$\alpha q = (\alpha s, \alpha \mathbf{v})$$

2.2.4 Struttura Algebrica

L'insieme dei quaternioni con le operazioni di addizione e prodotto tra quaternioni formano un corpo (non commutativo rispetto al prodotto). L'insieme dei quaternioni con le operazioni di addizione tra quaternioni e di moltiplicazione per uno scalare formano uno spazio vettoriale reale di dimensione quattro. Una base per tale spazio è data dagli elementi $(1, i, j, k)$. Le due strutture di corpo e di spazio vettoriale sono riassunte nel concetto di algebra di divisione non commutativa.

2.3 Coniugato e Norma

Consideriamo un generico quaternione $q = (s, \mathbf{v}) = s + ai + bj + ck$. Si chiama *quaternione coniugato* di q il quaternione

$$\bar{q} = (s, -\mathbf{v}) = s - ai - bj - ck.$$

Se q è un quaternione puro risulta $\bar{q} = -q$
Le proprietà del coniugato sono:

- $\bar{\bar{q}} = q$
- $\overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2 \bar{q}_1$
- $\overline{q_1 + q_2} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2$

Si chiama *norma* del quaternione q e si indica con $|q|$ il numero reale non negativo:

$$|q| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{\bar{q}q} = \sqrt{s^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{s^2 + a^2 + b^2 + c^2}$$

La norma di q è sempre positiva, è nulla soltanto se $q = 0$.
Valgono le relazioni seguenti:

- $q\bar{q} = \bar{q}q = |q|^2$
- $|q_1 q_2| = |q_1|\,|q_2|$

E' immediato provare che:

- $q^{-1} =$ inverso di $q = \bar{q}/\,|q|^2$

Per q^{-1} valgono le seguenti proprietà:

1. $|q^{-1}| = 1/\,|q| = |q|^{-1}$
2. $\overline{q^{-1}} = (\bar{q})^{-1}$
3. $(q_1 q_2)^{-1} = q_2^{-1} q_1^{-1}$

2.4 Quaternioni unitari

I quaternioni **unitari** sono i quaternioni di norma 1. L'insieme dei quaternioni unitari costituisce una sfera in uno spazio a 4 dimensioni:
$S^3 = \{(s, a, b, c) \in \mathbb{R}^4$ tali che $s^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 1\}$.
Se q è unitario $q^{-1} = \bar{q}$.
I quaternioni unitari formano un gruppo moltiplicativo rispetto al prodotto, gruppo non abeliano.

2.5 Quaternioni e rotazione di un punto

Qualsiasi rotazione di un punto in tre dimensioni può essere rappresentata utilizzando un asse ed un angolo di rotazione. I quaternioni unitari rappresentano un modo semplice per codificare con quattro numeri queste informazioni asse - angolo. La rotazione andrà applicata ad un vettore di posizione, cioè a un vettore che rappresenta la posizione di un punto rispetto all'origine del sistema di riferimento in $\mathbb{R}^3$.

2.5.1 Rotazione di un punto in uno spazio $3D$ usando un quaternione unitario

Vogliamo ruotare un punto P $\in \mathbb{R}^3$ di un angolo θ, espresso in radianti, intorno ad un asse di rotazione passante per l'origine del sistema di riferimento destrorso. L'asse di rotazione sia identificato da un *versore* $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$. Essendo un versore sarà $|\mathbf{n}| = 1$. A partire da questi dati si definisce il seguente quaternione unitario:

$$\begin{aligned} q = (s, \mathbf{v}) &= \cos\frac{\theta}{2} + (n_x i + n_y j + n_z k)\sin\frac{\theta}{2} \\ &= (\cos\frac{\theta}{2},\ \mathbf{n}\ \sin\frac{\theta}{2}) \end{aligned}$$

Si tratta di un quaternione in forma polare (vedi forma polare di un complesso).

Il punto P in $\mathbb{R}^3$ sia identificato dal vettore $\mathbf{r} = (p_1, p_2, p_3)$ e definiamo il seguente quaternione puro che lo rappresenta:

$$p = (0, \mathbf{r}) = (0, p_1, p_2, p_3).$$

In questo modo si identificano i punti di $\mathbb{R}^3$ con l'insieme dei quaternioni con prima coordinata nulla.

La rotazione determinata da q e applicata a p è data dall'operazione di *coniugio* così definita:

$$q \longmapsto qpq^{-1}$$

Il risultato dell'operazione è il vettore $p' = (0, \mathbf{r}')$ a prima coordinata nulla, appartenente all'insieme di quaternioni puri su $\mathbb{R}^3$. Ogni mappa definita in questo modo è effettivamente una rotazione poichè preserva la norma: $|qpq^{-1}| = |q|\,|p|\,|q^{-1}| = |q|\,|p|\,|q|^{-1} = |p|$.

Il vettore p' è uguale al vettore p ruotato di un angolo θ intorno all'asse per l'origine, asse individuato dal versore $\mathbf{n}$. La parte scalare di p' è nulla e la parte vettoriale è data da:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}' &= (s^2 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\mathbf{r} + 2\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}) + 2s(\mathbf{v}\wedge\mathbf{r})) \\
&= (\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2})r + 2\sin^2\frac{\theta}{2}\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}) + 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}(\mathbf{n}\wedge\mathbf{r}) \\
&= (\cos\frac{2\theta}{2})\mathbf{r} + (1-\cos\frac{2\theta}{2})\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}) + \sin\frac{2\theta}{2}(\mathbf{n}\wedge\mathbf{r}) \\
&= (\cos\theta)\mathbf{r} + (1-\cos\theta)\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}) + (\sin\theta)(\mathbf{n}\wedge\mathbf{r})
\end{aligned}$$

Da notare che la rotazione così ottenuta è attorno ad un asse che passa per l'origine del riferimento. Per una rotazione qualsiasi bisogna prima traslare l'asse nell'origine, effettuare la rotazione, riportare l'asse nella posizione originale.

Una sequenza di rotazioni si otterrà con una sequenza di quaternioni. La composizione di due rotazioni successive, rappresentate da due quaternioni unitari, si può ottenere moltiplicando i due quaternioni tra di loro, facendo attenzione all'ordine (perchè il prodotto di quaternioni non è commutativo) e purchè i due quaternioni si riferiscano allo stesso asse di rotazione. Supponiamo ad esempio di voler ruotare p prima rispetto a q_1 poi risperro a q_2 la concatenazione delle rotazioni si ottiene calcolando q_2q_1 infatti:
$q_2(q_1pq_1^{-1})q_2^{-1} = (q_2q_1)p(q_1^{-1}q_2^{-1}) = (q_2q_1)p(q_2q_1)^{-1}$

L'inverso di una rotazione è dato dal reciproco del rispettivo quaternione, che nel caso di quaternioni unitari equivale al quaternione coniugato.

2.6 Spostamento angolare

Alla stessa identica formula si arriva esaminando una rotazione senza l'uso di quaternioni: vogliamo ruotare il vettore $\mathbf{r}$ attorno all'asse $\mathbf{n}$ di un angolo θ (vedi figura 2.1). Il vettore $\mathbf{r}$ può essere scomposto in:

- una componente parallela a $\mathbf{n}$: $\mathbf{r}\| = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}$ (sono stati eseguiti prima un prodotto scalare, poi un prodotto scalare-vettore).

- una componente ortogonale a $\mathbf{n}$: $\mathbf{r}\perp = \mathbf{r} - \mathbf{r}\|$ calcolata per differenza dal vettore $\mathbf{r}$

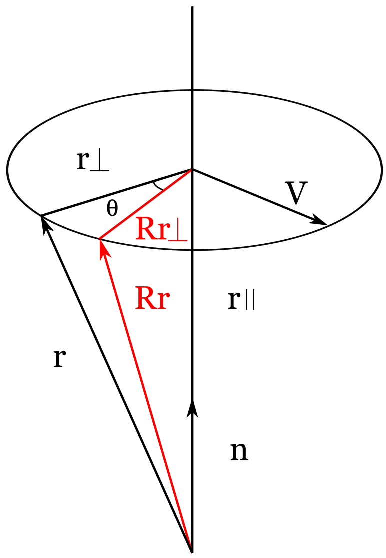


Figura 2.1: Rotazione

La componente parallela resta invariata nella rotazione, e dopo la rotazione la denoteremo con $\mathbf{Rr}\|$.
La componente perpendicolare (rossa) invece varia e dopo la rotazione la denoteremo con $\mathbf{Rr}\perp$.
Definiamo un vettore $\mathbf{V}$ ortogonale a $\mathbf{r}\perp$, sarà $\mathbf{V} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{r}\perp = \mathbf{n} \wedge \mathbf{r}$ per cui possiamo esprimere $\mathbf{Rr}\perp$ in funzione di $\mathbf{V}$:
$\mathbf{Rr}\perp = (\cos\theta)\mathbf{r}\perp + (\sin\theta)\mathbf{V}$ quindi

$$\begin{aligned}
\mathbf{Rr} &= \mathbf{Rr}\| + \mathbf{Rr}\perp \\
&= \mathbf{Rr}\| + (\cos\theta)\mathbf{r}\perp + (\sin\theta)\mathbf{V} \\
&= (\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n} + (\cos\theta)(\mathbf{r} - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}) + (\sin\theta)(\mathbf{n}\wedge\mathbf{r}) \\
&= (\cos\theta)\mathbf{r} + (1-\cos\theta)\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}) + (\sin\theta)(\mathbf{n}\wedge\mathbf{r})
\end{aligned}$$

2.7 Quaternioni e matrici

Sappiamo che una rotazione rigida nello spazio Cartesiano R^3 può venire rappresentata da una matrice di rotazione $3X3$, che ha la proprietà di essere ortogonale a determinante positivo e uguale a uno. Potremmo associare a ogni quaternione unitario una matrice di rotazione (e viceversa). La mappa è suriettiva perchè sia q che $-q$ producono la medesima rotazione.

Per ruotare un vettore $\mathbf{p}$ di un angolo θ con il quaternione unitario q usiamo l'operatore di coniugio qpq^{-1} dove $q = (\cos\frac{\theta}{2},\ \mathbf{n}\ \sin\frac{\theta}{2}) = (w, x, y, z)$ Si può dimostrare che questo corrisponde ad applicare al vettore $(\mathbf{p}, 0)$ la matrice di rotazione:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1-2(y^2+z^2) & 2xy-2wz & 2wy+2xz & 0 \\ 2xy+2wz & 1-2(x^2+z^2) & -2wx+2yz & 0 \\ -2wy+2xz & 2wx+2yz & 1-2(x^2+y^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La trasformazione inversa da matrice a quaternione, consiste nel prendere una generica matrice $\{M_{i,j}\}$ per $i, j = 0, 1, 2, 3$ con le seguenti caratteristiche:
$M_{3,3} = 1$,
$M_{0,3} = M_{1,3} = M_{2,3} = M_{3,0} = M_{3,1} = M_{3,2} = 0$
La somma degli elementi diagonali è $4 - 4(x^2 + y^2 + z^2)$.
Il quaternione deve essere unitario quindi $w^2+x^2+y^2+z^2 = 1$, da cui segue che la somma degli elementi diagonali sarà $4-4(x^2+y^2+z^2) = 4-4(1-w^2) = 4w^2$.
Da queste equazioni si ricava:

$$\begin{aligned} w &= \pm\frac{1}{2}\sqrt{M_{0,0} + M_{1,1} + M_{2,2} + M_{3,3}} \quad \text{e inoltre} \\ x &= \frac{M_{2,1} - M_{1,2}}{4w} \\ y &= \frac{M_{0,2} - M_{2,0}}{4w} \\ z &= \frac{M_{1,0} - M_{0,1}}{4w} \end{aligned}$$

2.8 Interpolazione lineare sferica SLERP.

Per interpolare due quaternioni unitari e ottenere i quaternioni intermedi che identificano le matrici di rotazione ricordiamo che lo spazio dei quaternioni unitari forma una ipersfera nello spazio $4D$, perciò tutti i quaternioni ottenuti a seguito dell'interpolazione giacciono sulla sfera stessa.

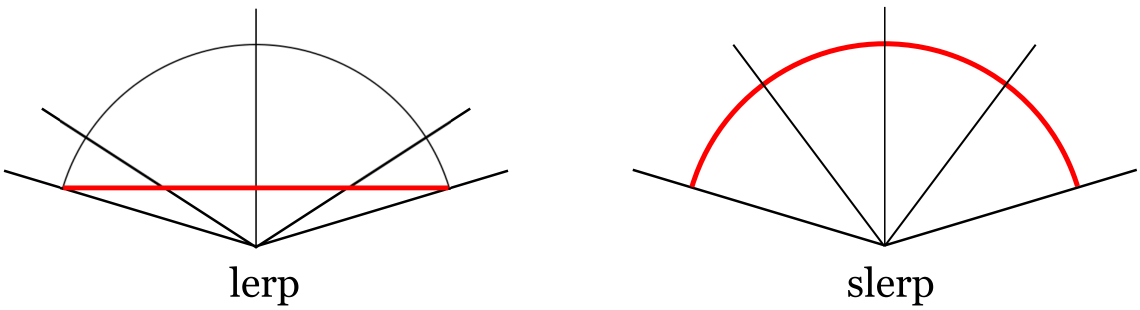


Figura 2.2: lerp-slerp

Una interpolazione lineare di due quaternioni in esame produrrebbe angoli diseguali e quindi una variazione di velocità (vedi figura 2.2). Introduciamo quindi la nozione di interpolazione sferica: interpoliamo lungo una linea geodetica che ha gli estremi nei punti chiave. La linea geodetica è l'arco della circonferenza individuata dall'intersezione tra la sfera e un piano passante per i due punti in esame e l'origine. Lo spostamento sull'arco avviene a velocità costante e dipenderà da un parametro compreso tra zero e uno.

Per semplicità esaminiamo la situazione in due dimensioni (vedi figura 2.3): siano $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ il primo e l'ultimo punto dell'arco, separati da un angolo Ω. Consideriamo poi un punto intermedio $\mathbf{p}$ che forma con $\mathbf{A}$ un angolo θ. Sarà: $\cos(\Omega) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, prodotto scalare tra i vettori unitari che vanno dall'origine del cerchio alle estremità dell'arco. Inoltre $\cos(\theta) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}$ e $|\mathbf{p}| = 1$. L'interpolazione lineare sferica si basa sul principio che ogni punto della curva deve essere una combinazione lineare delle estremità.

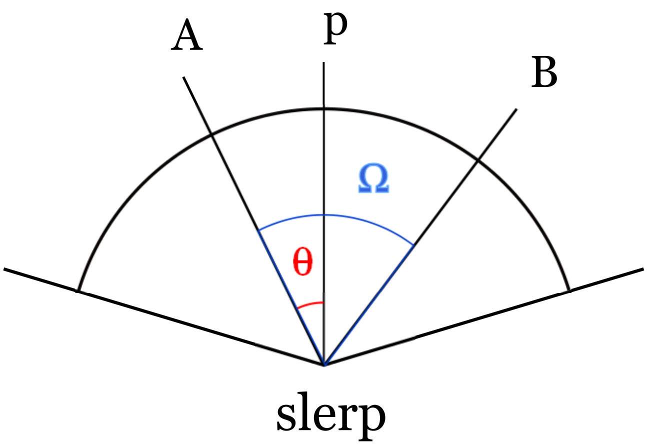


Figura 2.3: slerp

Avremo quindi che $\mathbf{p}$ sarà dato da un'equazione parametrica del tipo:

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}\sin(\Omega - \theta)/\sin(\Omega) + \mathbf{B}\sin(\theta)/\sin(\Omega)$$

Per comprendere la formula dello slerp ragioniamo nel caso in cui i vettori iniziale e finale siano perpendicolari cioè $\Omega = 90°$. Avremo quindi che $\theta = t\frac{\pi}{2}$ con $0 \leq t \leq 1$ parametro. Sarà: $p = \mathbf{A}\cos\theta + \mathbf{B}\sin\theta$
Applicando l'identità trigonometrica:
$\cos\theta = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$
otteniamo $p = \mathbf{A}\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) + \mathbf{B}\sin\theta$; ecco la formula dello slerp.
Nel caso generale in cui i vettori $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ non siano perpendicolari, si applica una normalizzazione a entrambi i fattori moltiplicandoli per $1/\sin\Omega$.

Generalizzando in $4D$ l'interpolazione tra due quaternioni unitari q_1, q_2 che formano l'angolo $q_1 \cdot q_2 = \cos(\Omega)$, considerando $\theta = u$ come parametro che varia tra 0 e 1 si ha:

$$slerp(q_1, q_2, u) = q_1 \frac{\sin((1-u)\Omega)}{\sin(\Omega)} + q_2 \frac{\sin(u\Omega)}{\sin(\Omega)}$$

L'interpolazione tra più di due posizioni chiave produce geodetiche che possono essere discontinue nelle derivata prima, il che dà luogo a movimenti con scatti. Per ora lasciamo che questo rimanga un problema aperto.

Esistono due possibili archi geodetici che vanno da $q1$ a $q2$: uno segue il percorso più breve, l'altro il più lungo e questo equivale a interpolare lungo l'angolo Ω o lungo l'angolo $2\pi - \Omega$. Ciò segue dal fatto che l'operazione di coniugio produce lo stesso risultato con q e -q. Per decidere quale percorso seguire occorre mettere a confronto il valore della distanza tra $q1$ e $q2$ con il valore della distanza tra il primo quaternione invariato e il secondo negato. Occorre cioè calcolare: $(q_1 - q_2) \cdot (q_1 - q_2)$ e $(q_1 + q_2) \cdot (q_1 + q_2)$ e scegliere il valore minore. Il valore minore è l'elemento per decidere se è il caso di sostituire q_2 con $-q_2$.

2.9 Rotazioni

La Computer Animation di oggetti 3D imita le tecniche di Key Frame dell'animazione tradizionale, usando Posizioni Chiave nello spazio invece dei Disegni Chiave dell'animazione. La posizione generica di un corpo rigido può essere data come una combinazione di una traslazione e una rotazione. In Computer Animation si utilizzano queste trasformazioni per controllare sia le telecamere che gli oggetti che devono essere renderizzati. La traslazione di un corpo rigido è ben animata usando vettori a tre componenti e interpolare le traslazioni non pone problemi. L'animazione delle rotazioni può essere migliorata usando i quaternioni. I quattro valori che compongono un quaternione descrivono le rotazioni in maniera naturale: tre di loro danno le coordinate dell'asse di rotazione, il quarto da l'ampiezza dell'angolo.

2.9.1 Corpo rigido e sistema di riferimento

Il termine *rotazione* indica due concetti:

- un'azione fisica che viene applicata ad un oggetto per modificare il suo orientamento nello spazio tridimensionale;
- la caratterizzazione matematica di questa azione (rappresentazione matematica, operatori e proprietà).

A sua volta l'interpretazione fisica è duplice: l'azione viene applicata ad un corpo per portarlo da un orientamento ad un altro oppure due oggetti identici hanno orientamenti diversi e si vuole studiare la relazione reciproca.

Il legame tra l'azione fisica e la caratterizzazione matematica della rotazione viene semplificato se si fa riferimento a *corpi rigidi*.

Un corpo rigido è un insieme (anche infinito) di punti le cui distanze reciproche non variano nel tempo e nello spazio, ovvero il corpo in movimento non cambia forma e dimensione. Un corpo rigido è sempre riconducibile a un sistema di riferimento ortogonale che lo caratterizza. Un sistema di riferimento ortogonale nello spazio 3D è costituito da tre versori mutualmente ortogonali (i, j, k) applicati ad un'origine comune O. Solitamente si usano sistemi di riferimento destrorsi (cioè tali che $i \times j = k$).

Un corpo rigido A è caratterizzato dal sistema di riferimento R_A ad esso associato. Ogni generico punto del corpo rigido è univocamente definito nel sistema di riferimento R_A tramite una terna di coordinate. La distanza tra ogni coppia di punti del corpo rimane costante sotto qualsiasi trasformazione o azione esterna sul corpo. Pertanto il corpo rigido è completamente determinato dal suo sistema di riferimento e quando parliamo di corpo rigido in realtà ci riferiamo al sistema di riferimento che lo caratterizza.

2.9.2 Relazioni tra sistemi di riferimento

Due orientamenti diversi di un oggetto vengono rappresentati da due sistemi di riferimento ortogonali R_A e R_B con origine comune ma con assetto differente. La loro reciproca relazione si può esprimere in due modi: il sistema di riferimento R_B rappresentato in R_A, o viceversa il sistema di riferimento R_A rappresentato in R_B. Che cosa sia meglio dipende dal significato fisico assegnato ai due riferimenti.

Per ottenere R_B rappresentato in R_A occorre rappresentare i tre versori (i_B, j_B, k_B) in R_A ottenendo una matrice 3X3: $\mathbf{R_B}^\mathbf{A}$

Per ottenere R_A rappresentato in R_B occorre rappresentare i tre versori (i_A, j_A, k_A) in R_B ottenendo una matrice 3X3: $\mathbf{R_A}^\mathbf{B}$

Le due matrici appartengono alla classe delle *matrici di rotazione* e sono legate dalla seguente relazione:

$$\mathbf{R_A}^{\mathbf{B}} = (\mathbf{R_B}^{\mathbf{A}})^{\mathbf{T}}$$

$$\mathbf{R_B}^{\mathbf{A}} = (\mathbf{R_A}^{\mathbf{B}})^{\mathbf{T}}$$

Diciamo quindi che ciascuna rotazione è inversa dell'altra e che l'operatore di inversione è dato dalla trasposizione della matrice relativa.

2.9.3 Rotazioni elementari e rappresentazione asse-angolo

Esiste una specie di base di matrici di rotazione, che chiameremo *elementari* perché sono rotazioni intorno agli assi principali x, y, z del sistema di riferimento:

Rotazione elementare di un angolo α intorno a x

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Rotazione elementare di un angolo β intorno a y

$$R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

Rotazione elementare di un angolo γ intorno a z

$$R_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ogni altra rotazione (e la corrispondente matrice) può essere ottenuta componendo rotazioni elementari. Ad esempio la sequenza di due rotazioni elementari R_1 ed R_2 viene composta come: $R_1 R_2$. L'ordine della composizione va rispettato perché il prodotto tra matrici non è commutativo (a parte il caso di rotazioni consecutive attorno ad uno stesso asse). Ogni rotazione elementare avviene rispetto agli assi fissi, cioè rispetto al sistema di riferimento iniziale che si assume immobile. Quando si parla di sistema di riferimento "mobile" ci si riferisce al sistema di riferimento che si ottiene come risultato di una rotazione. Comporre le matrici elementari permette di ottenere una matrice prodotto che rappresenta il sistema di riferimento di arrivo (mobile) rispetto a quello di partenza (fisso).

Il teorema di Eulero stabilisce che ogni composizione di rotazioni può sempre essere ricondotta ad una singola rotazione di un angolo θ intorno ad un asse (versore) di rotazione $\mathbf{u}$.

2.9.4 Rotazione e vettori

Vediamo qual è l'effetto della rotazione sui vettori rappresentati in due diversi sistemi di riferimento R_A, R_B uno ruotato rispetto all'altro e con origine comune. Adottiamo la convenzione di utilizzare vettori riga e di calcolare il trasformato di un vettore riga moltiplicando a destra per la matrice di trasformazione. I vettori possono rappresentare: punti geometrici (definiti mediante le coordinate cartesiane della punta) o segmenti orientati (definiti mediante la differenza tra le coordinate dei due estremi). In entrambi i casi, se consideriamo un generico vettore riga V, la relazione tra le rappresentazioni vettoriali di V nei due sistemi di riferimento è la seguente:

$V_B = V_A \mathbf{R_A}^{\mathbf{B}}$

$V_A = V_B \mathbf{R_B}^{\mathbf{A}}$

dove $\mathbf{R_A}^{\mathbf{B}} = (\mathbf{R_B}^{\mathbf{A}})^{\mathbf{T}}$.

In generale possiamo dire che la matrice di rotazione è un operatore lineare che trasforma le coordinate di un punto da un sistema di riferimento ad un altro, i due sistemi di riferimento hanno origine comune, altrimenti deve essere considerata anche la traslazione tra le origini. Al momento le traslazioni sono escluse dall'analisi delle trasformazioni.

Volendo riassumere le caratteristiche di una matrice di rotazione R possiamo dire che:

- R rappresenta la rotazione generica di un angolo intorno ad un asse;
- R fornisce la descrizione del sistema di riferimento mobile rispetto al fisso;
- R definisce l'operatore lineare che trasforma un vettore da un sistema di riferimento ad un altro.

2.10 Matrici di rotazione

Le matrici di rotazione sono *matrici ortonormali* con determinante unitario e positivo. Una matrice R si dice ortonormale quando possiede le seguenti proprietà:

- l'inversa coincide con la trasposta: $RR^T = R^T R = I$, ovvero $R^{-1} = R^T$;
- le colonne della matrice sono ortogonali cioè vettori perpendicolari a norma unitaria (lo stesso vale per le righe);
- il determinante di R ha modulo unitario;
- la rotazione rigida mantiene invariate le distanze tra ogni coppia di punti e gli angoli tra i segmenti, ossia il prodotto scalare è invariante alla rotazione: $(p_1 R) \cdot (p_2 R) = p_1 \cdot p_2$.

In uno spazio tridimensionale le rotazioni formano un *gruppo non commutativo* rispetto al prodotto matriciale. Questo gruppo è detto gruppo (speciale) di rotazione (ortonormale) e si indica con SO(3). Si tratta di un gruppo commutativo continuo, intuitivamente questo equivale a dire che esiste una rotazione infinitesima.

Una matrice di rotazione è definita da 3 parametri che sono contenuti nei 9 elementi che la compongono. Le matrici di rotazione sono il metodo più efficiente per calcolare la rotazione di un vettore e sono di fatto lo standard nella computer graphics dove, tramite l'impiego di coordinate omogenee, è possibili integrare nella medesima matrice anche le informazioni di traslazione e scala.

La rappresentazione matriciale può presentare alcuni inconvenienti:

- Non è molto intuitiva infatti se ci domandiamo quanti e quali sono i 3 parametri indipendenti che caratterizzano una generica matrice di rotazione la risposta non è immediata.
- Non è molto robusta numericamente, infatti una procedura che debba calcolare i valori di una matrice di rotazione può produrre lievi errori che fanno sì che il risultato non sia in $SO(3)$, occorre quindi ortogonalizzare la matrice in modo che rappresenti ancora una rotazione e questa procedura richiede un certo numero di calcoli.

2.11 Rappresentazione dell'orientamento attraverso tre parametri

La rappresentazione dell'orientamento di un corpo rigido nello spazio in termini di tre parametri costituisce quella che viene comunemente chiamata una rappresentazione minima.

Una rappresentazione minima può essere realizzata specificando una sequenza tre angoli di rotazione che si riferiscono rispettivamente a tre assi elementari designati a priori.
Siano $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ gli assi elementari del sistema di riferimento; ogni matrice di rotazione R può essere associata a una sequenza di tre rotazioni elementari rispetto ad assi predefiniti: $R \cong Rot(\mathbf{u_1}, \alpha_1) \mapsto Rot(\mathbf{u_2}, \alpha_2) \mapsto Rot(\mathbf{u_3}, \alpha_3)$ dove:
$Rot(\mathbf{u}, \alpha)$ indica la rotazione attorno ad un asse $\mathbf{u}$ di un angolo α e

$\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3} \in \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ ma non sono necessariamente diversi tra loro.

Se due rotazioni contigue fossero relative allo stesso asse si perderebbe un grado di libertà:
$Rot(\mathbf{i}, \alpha_1)Rot(\mathbf{k}, \alpha_2)Rot(\mathbf{k}, \alpha_3) = Rot(\mathbf{i}, \alpha_1)Rot(\mathbf{k}, (\alpha_2 + \alpha_3))$
Occorre quindi escludere questi casi dalle possibili combinazioni di rotazioni elementari.

Ricapitolando prima di specificare i valori di tre angoli, occorre specificare quali sono i tre assi coordinati attorno ai quali devono essere effettuate le singole rotazioni. Le sequenze di tre assi possibili sono 12.

2.11.1 Angoli di Eulero: Yaw-Pitch-Roll

La definizione dell'orientamento basata sugli angoli di Eulero è una parametrizzazione a tre parametri (parametrizzazione minima). La parametrizzazione con Eulero esprime il fatto che l'orientamento di un corpo rigido nello spazio ha tre gradi di libertà.

Le coordinate angolari di Eulero specificano l'orientamento come una sequenza di tre rotazioni indipendenti attorno ad assi pre-scelti.

Ad esempio l'orientamento di un velivolo a volte è dato come:
Yaw (imbardata) attorno ad un asse verticale, seguita da
Pitch (beccheggio) attorno ad un asse orizzontale passante per le ali,
seguito da Roll (rollio) attorno alla linea naso-coda dell'aereo.

Questi tre angoli devono essere utilizzati esattamente nell'ordine dato: Yaw, Pitch, Rool. L'ordine delle rotazioni in riferimento degli assi utilizzati è una questione di convenzione. Per esempio alcuni fisici utilizzano gli assi ZXZ in contrasto con la ZYX aeronautica appena vista.

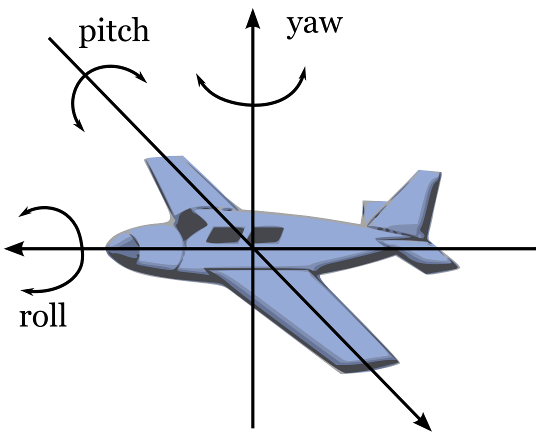


Figura 2.4: yaw,pitch,roll

2.11.2 Angoli di Eulero: vantaggi e svantaggi

Gli angoli di Eulero risolvono il problema della mappatura dei gradi di libertà infatti esprimono la rotazione cercata come una sequenza di tre diverse rotazioni intorno ad assi predefiniti, abbiamo quindi 3 angoli per 3 gradi di libertà. Inoltre sono numericamente stabili. Tuttavia la geometria degli orientamenti in angoli di Eulero è contorta e varia con la scelta degli assi coordinati iniziali. Non c'è modo ragionevole per moltiplicare o combinare due rotazioni. Anche la conversione tra matrici di rotazione e le coordinate angolari è difficile e costosa.

Se ci si domanda quali orientamenti dovrebbe assumere un oggetto nel suo viaggio tra due posizioni chiave di rotazione la risposta non è immediata. Il teorema di Eulero ci dice che è possibile passare da una posizione chiave ad un'altra effettuando una singola rotazione, quindi si suppone che un orientamento intermedio si trovi lungo tale rotazione. L'interpolazione lineare tra due quaternioni chiave segue esattamente questo approccio. Se fissiamo le coordinate delle due posizioni chiave attraverso gli angoli di Eulero, avremo per ogni posizione chiave un vettore a tre componenti (i tre angoli), per ottenere l'orientamento intermedio occorre interpolare le componenti in maniera indipendente. In altre parole non è possibile ruotare semplicemente se non rispetto agli assi prefissati.

Con l'uso degli angoli di Eulero si può presentare il problema del blocco cardanico (gimbal lock in inglese) che consiste nella perdita di un grado di libertà rotazionale che si verifica quando due dei tre assi sono guidati in configurazioni allineate (vedi figura 2.5). La perdita di un grado di libertà nelle animazioni si manifesta con artefatti nel movimento (i risultati non sono quelli previsti). I quaternioni non risentono del problema del gimbal lock.

2.12 Perchè ricorrere ai Quaternioni

Volendo effettuare ad esempio la rotazione di una telecamera rispetto ai suoi assi possiamo ricorrere ai quaternioni in grado di esprimere una rotazione di un angolo qualsiasi intorno a uno qualunque dei tre assi x, y, z. La rappresentazione mediante quaternioni risolve il problema del blocco cardanico mantenendo nel contempo una parametrizzazione compatta delle rotazioni. Rispetto alle matrici, i quaternioni consentono di creare interpolazioni fluide ad esempio tra due valori angolari predefiniti.

2.13 Analisi conclusiva: i quaternioni in Computer Graphics

L'animazione $3D$ si basa sugli stessi principi dell'animazione tradizionale. Il filmato viene realizzato attraverso una sequenza di immagini chiamate FRAMES (FOTOGRAMMI). I frames si susseguono ad una velocità stabilita, misurata in fotogrammi al secondo (FDS). Se il numero di fotogrammi al secondo è maggiore o uguale a 24 l'utente ha l'impressione del movimento continuo. Nel passaggio da un fotogramma al successivo bisogna descrivere i cambiamenti che intercorrono nel mondo virtuale, in particolare per ogni oggetto possono variare: posizione, orientamento, proprietà del materiale, luminosità e forma se l'oggetto non è rigido. Limitiamoci a considerare oggetti rigidi.

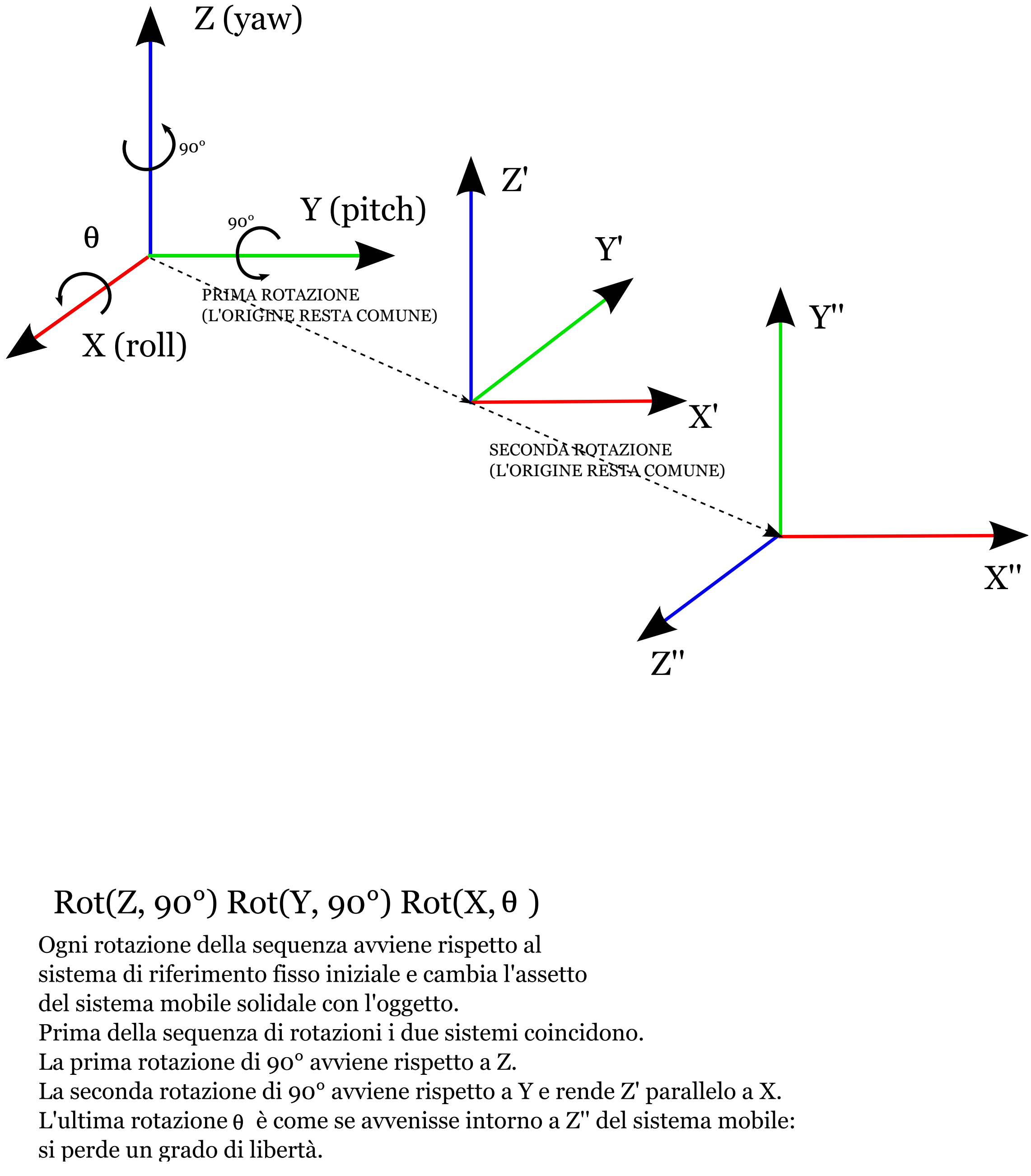


Figura 2.5: gimbal-lock

La tecnica più semplice di animazione prende il nome di KEY-FRAME ANIMATION: descrive il moto di un oggetto nel tempo a partire da un insieme di posizioni chiave dell'oggetto. Gli oggetti vengono posizionati solamente in alcuni fotogrammi speciali chiamati FOTOGRAMMI CHIAVE. Il programma genera automaticamente le posizioni dell'elemento in tutti i FOTOGRAMMI INTERMEDI tra due fotogrammi chiave successivi usando tecniche di interpolazione, in modo da mantenere la continuità dell'azione. Possiamo affermare che in ogni frame chiave i valori dei parametri che caratterizzano il modello vengono assegnati, invece nei frame intermedi tali valori vengono calcolati. Il controllo della distribuzione dei frame chiave su una linea del tempo (timeline) controlla la velocità dell'animazione: avvicinare due chiavi produce un accelerazione nell'animazione, allontanare due chiavi rallenta l'animazione.

La cinematica considera solamente la posizione e la velocità dei punti di un oggetto sulla scena; la dinamica prende in considerazione le leggi fisiche che governano la cinematica degli oggetti. Per facilitare la creazione di animazioni realistiche quasi tutti i programmi di grafica sono capaci di considerare la cinematica degli oggetti. Normalmente i programmi utilizzano una tecnica chiamata CINEMATICA DIRETTA: si applica a un modello una sequenza di trasformazioni che portano il modello in uno stato differente. In alcuni casi può essere utile specificare la posizione finale di un oggetto e chiedere al calcolatore di trovare le posizioni precedenti CINEMATICA INVERSA.

Ricapitolando la computer animation di oggetti 3D usa posizioni chiave nello spazio. I fisici dicono che la posizione generica di un corpo rigido può essere data con una combinazione di una traslazione e una rotazione. In computer grafica si utilizzano queste trasformazioni per controllare sia le telecamere che gli oggetti che devono essere renderizzati. Le traslazioni sono ben animate usando i vettori mentre l'animazione delle rotazioni può essere migliorata rispetto alle tecniche tradizionalmente usate: angoli di Eulero e matrici di rotazione. Seguendo questo approccio viene naturale chiedersi qual è la migliore rappresentazione per generiche rotazioni e come queste sono interpolate tra loro. La più recente notazione di quaternioni ci propone un'interpolazione sulla sfera dei quaternioni unitari. I quaternioni sono poco familiari, tuttavia, indipendentemente da come i fotogrammi chiave sono stati originariamente specificati, la conversione in quaternioni e la generazione di frame di interpolazione tra i frame chiave può essere completamente automatizzata.

La sfera dei quaternioni unitari forma un sottogruppo del gruppo dei quaternioni. La metrica sferica di questo sottogruppo è la stessa metrica angolare di SO(3). Da ciò ne segue che si può ruotare senza accelerare interpolando sulla sfera. Basta tracciare i due orientamenti dati sulla sfera e disegnare il grande arco di cerchio tra di loro. Tale arco è la curva in cui la sfera interseca un piano che passa per i due punti e l'origine. Se invece di seguire l'arco si seguisse il segmento che congiunge i due punti si verificherebbe un'accelerazione nella parte centrale del moto. Ma le animazioni in genere hanno più di due posizioni chiave da collegare e in questi casi anche la nostra elaborazione sferica mostra dei limiti. L'effetto pratico è che mentre l'orientamento cambia dolcemente il senso di rotazione cambia bruscamente. In termini matematici occorre una continuità di ordine superiore.

Non importa quello che facciamo nello spazio generale dei quaternioni, l'effetto finale deve essere interpretato tramite la sfera questo perché la geometria intrinseca del gruppo di rotazione SO(3) è quella di una sfera. Infatti piccoli spostamenti sulla sfera (cioè piccoli angoli di rotazione) lavorano come se la sfera fosse piatta ma continuando a muoversi sulla sfera dopo un po' ci si ritrova al punto di partenza. La geometria locale tuttavia non determina la topologia globale . Benché la geometria curvi come una sfera, la topologia ci dice che ogni coppia di punti opposti sulla sfera rappresentano la stessa rotazione. Possiamo accettare questo considerando la geometria in proiezione prospettica.

2.14 Problema Aperto

Resta quindi il problema aperto di come costruire curve morbide sulla sfera.

Pierre Bézier ha inventato una classe di curve che portano il suo nome, sulla base di idee geometriche. Le curve di Bézier passano solo attraverso il primo e l'ultimo punto di definizione quindi volendo interpolare diversi orientamenti l'idea potrebbe essere di unire brevi curve di Bézier alla maniera delle spline garantendo la continuità del primo ordine. L'inizio di una curva di Bézier è sempre tangente al primo segmento del poligono di controllo e la fine è tangente all'ultimo segmento. Allineando i segmenti attraverso un giunto si uniscono le curve in maniera morbida. Ogni breve curva collega un frame chiave con un altro. Due segmenti consecutivi in un punto di giunzione delle curve devono essere adiacenti, tuttavia uno dei due può essere scelto liberamente. Queste scelte determinano l'asse e la velocità di rotazione. Sebbene la scelta possa essere effettuata manualmente, è preferibile farlo in maniera automatica.

2.14.1 La scelta di segmenti comuni

L'interpolazione lineare sferica produrrebbe due segmenti di archi che si uniscono in un giunto. Occorre addolcire le differenza attraverso un compromesso. Cerchiamo un punto a_n a metà strada tra la direzione che dovrebbe seguire il segmento entrante nel giunto e il segmento uscente dal giunto (vedi figura 2.6). Dando tre successivi quaternioni chiave: q_{n-1}, q_n, q_{n+1}interpretati come vettori unitari 4D, il calcolo del punto a_n sul segmento che prosegue da q_n avviene come segue:

$a_n = Bisect(Double(q_{n-1}, q_n), q_{n+1})$
dove
$Double(p, q) = 2(p \cdot q)q - p$
$Bisect(p, q) = \frac{p+q}{|p+q|}$

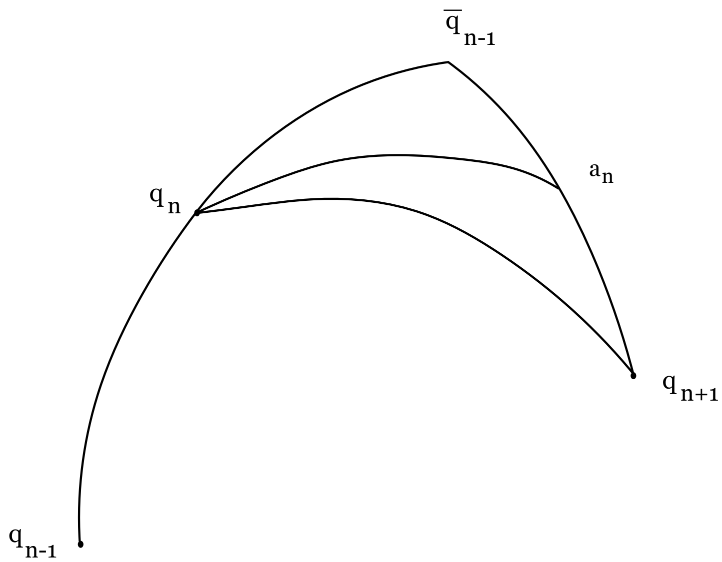


Figura 2.6: Costruzione di un punto per la tangente

Il punto di corrispondenza per il segmento prima di q_n dovrebbe essere:
$b_n = Double(a_n, q_n)$
per assicurare una congiunzione morbida indipendentemente da come è stato scelto a_n.

2.14.2 Valutazione sulla sfera

Adesso abbiamo tutto per imitare la tecnica delle curve di Bézier (vedi figura 2.7). Ogni piccola curva è definita da quattro quaternioni: $q_n, a_n, b_{n+1}, q_{n+1}$. Facciamo variare un parametro u da 0 a 1 con la la curva che parte da q_n passa da a_n e arriva a q_{n+1} tangente all'arco che parte da b_{n+1}. Si interpola sfericamente con il parametro u in proporzione tra q_n e a_n, a_n e b_{n+1}, b_{n+1} e q_{n+1} per ottenere tre nuovi quaternioni.

Quindi interpoliamo tra questi nuovi quaternioni per averne altri due e finalmente interpoliamo riducendoci a un singolo punto. Abbreviando lo $Slerp(p, q, u)$ con $(p : q)_u$ il calcolo assomiglia a questo:

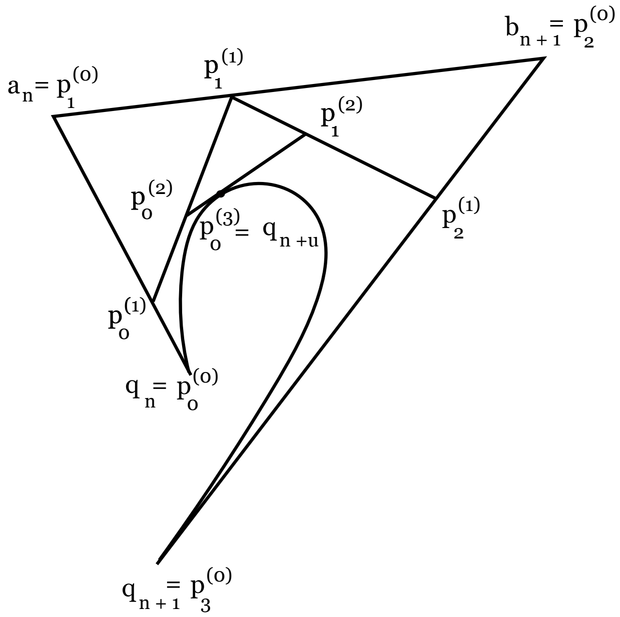


Figura 2.7: Calcolo dei punti di una curva di Bézier in maniera ricorsiva

$q_n = p_0^{(0)}$

$(p_0^{(0)} : p_1^{(0)})_u = p_0^{(1)}$

$a_n = p_1^{(0)}$ $(p_0^{(1)} : p_1^{(1)})_u = p_0^{(2)}$

$(p_1^{(0)} : p_2^{(0)})_u = p_1^{(1)}$ $(p_0^{(2)} : p_1^{(2)})_u = p_0^{(3)} = q_{n+u}$

$b_{n+1} = p_2^{(0)}$ $(p_1^{(1)} : p_2^{(1)})_u = p_1^{(2)}$

$(p_2^{(0)} : p_3^{(0)})_u = p_2^{(1)}$

$q_{n+1} = p_3^{(0)}$

Un semplice controllo prova che le curve hanno come estremi q_n e q_{n+1}. Si può dimostrare che le curve sono tangenti in questi punti al poligono di controllo (vedi figura 2.8). In corrispondenza della tangente si ruota tre volte più velocemente rispetto all'interpolazione sferica lungo l'arco. Fortunatamente possiamo correggere la velocità troncando i segmenti finali del poligono di controllo di un terzo della loro originale lunghezza in modo che siano più vicini a_n e q_n, b_{n+1} e q_{n+1}.

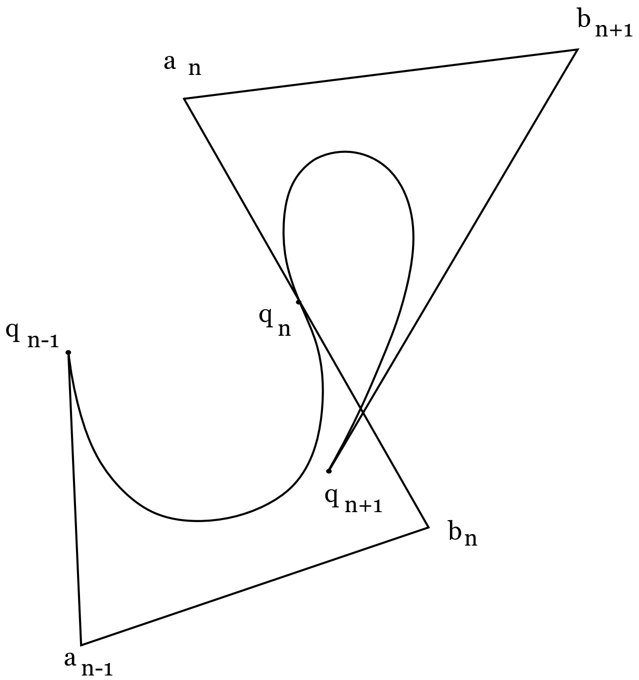


Figura 2.8: Unione di due curve di Bézier

2.14.3 Il grande schema

Che cosa abbiamo concluso? Un animatore si siede ad una workstation e interattivamente stabilisce una sequenza di chiavi per definire ad esempio l'orientamento della telecamera. L'algoritmo di interpolazione non dipende dalla natura dell'interfaccia che l'animatore vede, tutte le informazioni necessarie sono contenute nella sequenza di chiavi. Probabilmente gli orientamenti saranno rappresentati internamente come matrici quindi seguirà un passaggio di conversione: le matrici verranno trasformate in una sequenza di quaternioni q_n sulla sfera unitaria. Ogni quaternione della sequenza diventerà il punto finale di due curve di Bézier sferiche. Tra ogni coppia di quaternioni q_n e q_{n+1} verranno inseriti dei punti aggiuntivi a_n e b_{n+1} per controllare il movimento attraverso i giunti. A questo punto il tempo diventa il parametro lungo la curva composita. All'aumentare del numero di frame il parametro entra e esce da pezzi di curva successivi. All'interno di ogni pezzo di curva una versione locale del parametro viene regolato per funzionare tra zero e uno. Ora la costruzione geometrica di Bézier entra in gioco producendo un quaternione interpolato q_{n+u} da $q_n, a_n, b_{n+1}, q_{n+1}$ e dal parametro locale u. Finalmente il quaternione appena interpolato viene trasformato in una matrice da utilizzare applicandola ad un elenco di oggetti vettore per il rendering.

2.14.4 Applicabilità

Le rotazioni nello spazio sono più complicate delle rotazioni nel piano. E' facile avere a che fare con queste ultime poiché è coinvolto un solo parametro. I quaternioni sono fuori posto su un piano. Per muovere una telecamera a eye-point e per molti tipi di motion di oggetti l'interpolazione con quaternioni ha dei grossi vantaggi.

I vantaggi di costo sono difficili da stimare. Convertire una matrice a quaternione richiede solo una radice quadrata, tre divisioni più alcune addizioni nel caso peggiore. Tornare indietro richiede 9 moltiplicazioni e 15 addizioni. Mentre le conversioni non usano funzioni trigonometriche il proporzionamento degli archi le usano. Per comparazione l'interpolazione angolare richiede diverse funzioni trigonometriche come pure un discreto numero di moltiplicazioni e addizioni per creare ogni matrice interpolata. Lo schema di Bézier è abbastanza veloce per il lavoro di design, che è l'unica cosa dove la velocità è rilevante. L'interpolazione angolare non soffre del gimbal lock. Queste interpolanti non sono perfette, come tutti gli interpolanti possono sviluppare singolarità tra i punti di interpolazione.

Capitolo 3

Caratteristiche di un documento scientifico

3.1 Note introduttive

La scrittura tecnico-scientifica è anzitutto una scrittura di contenuti, ciò che conta è la qualità dell'informazione. Il problema della qualità della presentazione sorge nel momento in cui si vogliono condividere le informazioni con altre persone. Essere esperti in una certa materia non vuol necessariamente dire essere capaci di divulgarla altrettanto bene. La comunicazione è infatti una disciplina, ecco perché la stesura di un testo tecnico può risultare più difficile del previsto.

Indipendentemente dai contenuti, il testo tecnico-scientifico presenta alcune caratteristiche peculiari:

- nel testo le parole convivono con formule, figure e tabelle;
- il testo tecnico-scientifico è talvolta scritto a più mani;
- il livello testuale spesso interagisce con due livelli linguistici, l'italiano e l'inglese.

Questi tre aspetti rendono necessaria l'acquisizione di competenze di scrittura e di strategie testuali.

3.2 Dare una struttura al testo

A differenza della scrittura letteraria il testo tecnico-scientifico ha un carattere espositivo e argomentativo, deve quindi prestare particolare attenzione alla struttura logica e formale del testo e ai problemi di coerenza e precisione.

In generale il testo deve essere chiaro efficace ed essenziale. Attraverso frasi brevi e lineari deve dire tutto ciò per cui viene scritto.

Per non perdere l'attenzione del lettore è utile dare varietà visiva alle pagine dividendo il testo in capitoli, sezioni, sottosezioni e con l'uso di elenchi, tabelle e figure.

La struttura del testo tecnico-scientifico varia a seconda del tipo di documento che ci si appresta a scrivere tuttavia ci sono delle indicazioni generali sempre valide.

- La prima pagina deve sempre riportare chiaramente l'autore del testo, il titolo del lavoro e le eventuali informazioni legate all'ambito nel quale il documento è stato scritto.

- E' sempre opportuno numerare le pagine del documento.

- Nel caso di documenti articolati è utile inserire un indice generale, un indice specifico per le tabelle e uno per le figure.

- Il testo tecnico-scientifico va corredato di riferimenti bibliografici che dovranno essere realizzati secondo standard formali.

- Le diverse parti che compongono il testo (indice, introduzione, parte generale, risultati, conclusioni, bibliografia, allegati) devono essere immediatamente identificabili grazie all'uso di caratteri diversi e/o grazie all'organizzazione del testo.

3.3 Scegliere i caratteri

Occorre scegliere la forma grafica per ciascun tipo di titolo, per le didascalie di tabelle e figure, per il testo vero e proprio. Il tipo di carattere scelto e la sua dimensione dovranno essere sempre gli stessi in tutto il documento.

Alcune tipologie di carattere vanno usate solo in casi particolari. Ad esempio il corsivo va usato come elemento distintivo all'interno del testo, il grassetto si usa per i titoli e per dare una maggiore enfasi a una singola parola.

3.4 Impaginare il testo

Una buona impaginazione è indice di cura dei particolari e può incidere positivamente sulla leggibilità del documento finito, in particolare avere righe di lunghezza uniforme migliora la qualità visiva della pagina. Un rientro della prima riga di ciascun paragrafo migliora la leggibilità del testo.

I titoli vanno adeguatamente spaziati rispetto al testo e le dimensioni dei caratteri dei titoli e dei sottotitoli dovrebbero dipendere dal grado di subordinazione.

E' preferibile numerare oltre ai capitoli anche le sezioni, sottosezioni, ecc.

In tutto il documento va uniformata l'interlinea e i margini delle pagine.

3.5 Tabelle, grafici, figure e formule

In un testo tecnico-scientifico i dati sono fondamentali nel senso che tutto ciò che si dice o si scrive deve essere basato sui dati. I dati possono essere riportati direttamente nel testo oppure possono essere esposti attraverso una tabella o in alternativa un grafico. Tabelle e grafici, se costruiti e utilizzati in modo appropriato, oltre ad alleggerire il testo consentono di osservare i dati sotto più angolazioni.

Le figure, intese come immagini, rendono più piacevole la lettura ma vanno inserite solo quando aggiungono davvero informazioni al testo o chiariscono visivamente aspetti difficilmente spiegabili a parole, è pertanto richiesta una elevata qualità dell'immagine.

In un testo tecnico-scientifico tabelle e figure devono sempre essere identificate attraverso un numero e un titolo detto didascalia. La didascalia si può posizionare sopra o sotto ma una volta stabilita la posizione dovrà essere la stessa in tutto il testo. Il numero riporta il capitolo di appartenenza e un valore progressivo (si riparte da uno per ogni capitolo). Tabelle e figure hanno numerazione indipendente.

Tabelle e figure vanno posizionate con ragionevole continuità con il testo che le illustra, compatibilmente con i vincoli di impaginazione. Le tabelle possono essere inserite centrate alla pagina o allineate a sinistra, con la stessa coerenza in tutto il documento. Le figure solitamente vengono centrate.

E' meglio usare con parsimonia i colori sia per le tabelle che per i caratteri in generale.

In fine ricordiamo che un testo scientifico può avere peculiari necessità tipografiche, come quelle di contenere formule matematiche correttamente scritte con la loro complessa simbologia e opportunamente impaginate.

3.6 Un caso particolare: la presentazione multimediale

Uno strumento di comunicazione molto diffuso in ambito tecnico-scientifico è la presentazione multimediale. Poichè l'obiettivo è presentare il proprio lavoro, convincendo il pubblico della qualità dei risultati ottenuti, la presentazione è un ottimo strumento per utilizzare al meglio l'arte della retorica con il supporto visivo a cui oggi non si può più rinunciare.

Le singole diapositive si vedono dalla prima all'ultima con una sequenza lineare e permettono di organizzare il discorso in modo tradizionale:

- titolo e introduzione;
- argomentazioni e risultati;

- conclusioni.

La diapositiva di una presentazione non deve essere esaustiva come la pagina di un libro, è piuttosto la traccia del discorso e dovrebbe essere realizzata selezionando le informazioni più importanti al fine di aiutare chi ascolta a comprendere meglio e a ricordare.

In ogni diapositiva oltre al titolo non vanno scritte più di 6-7 righe di testo ed è preferibile servirsi il più possibile di liste puntate o numerate.

In una presentazione si fa largo ricorso a schemi, slogan, simboli (ad esempio una freccia esprime il rapporto causa effetto). Vengono usati il più possibile disegni, grafici e tabelle accompagnate da titoli esplicativi e legende chiare. Le animazioni andrebbero introdotte solo se è strettamente necessario.

Va adottato lo stesso layout per il testo e per le figure. Nella scelta dei formati grafici, due font sono sufficienti per tutta la presentazione: uno per i titoli e uno per il testo. Non va utilizzato un corpo troppo piccolo, ne un carattere con parti a diverso spessore, in pratica va evitato tutto ciò che rende il testo difficile da leggere a distanza. Anche la scelta delle combinazioni cromatiche deve essere efficace (ad esempio testo e sfondo dovrebbero essere complementari) senza compromettere la leggibilità.

3.7 La scelta di LaTeX, Inkscape e PowerPoint

Dovendo affrontare la stesura di un documento tecnico-scientifico la scelta di LaTeX è sembrata la più indicata. LaTeX è un linguaggio di markup usato per la preparazione di testi; fornisce funzioni di desktop publishing programmabili e mezzi che rendono automatica la maggior parte della composizione tipografica.

E' distribuito con una licenza di software libero e questo lo ha reso disponibile praticamente per qualsiasi architettura, ne esistono pertanto versioni funzionali per tutti i sistemi operativi. LaTeX è coperto dalla Latex Project Public License (LPPL), una licenza incompatibile col la GNU General Public License, poiché richiede che le versioni modificate usino un nome di file modificato, questo per evitare che i file vengano danneggiati da modifiche inopportune.

LaTeX viene usato soprattutto da fisici , matematici, informatici, ingegneri e accademici grazie all'ottima gestione dell'impaginazione delle formule matematiche ed alla gestione dei riferimenti bibliografici tramite il progetto BibTeX.

Per produrre immagini da inserire nel documento in riferimento agli argomenti trattati si è impiegato Inkscape. Inkscape è un software libero, OpenSource per il disegno vettoriale 2D basato sul formato SVG (Scalable Vector Graphics). Le immagini prodotte sono di qualità e sono scalabile in quanto indipendenti dalla risoluzione.

LaTeX prevede la possibilità di creare delle presentazioni a video con eccellenti caratteristiche di funzionalità e gradevolezza ad esempio usando la classe Beamer. Tuttavia per realizzare la presentazione associata al presente documento si è preferito utilizzare PowerPoint. Le ragioni della scelta sono principalmente di ordine pratico. PowerPoint è un software Microsoft tra i più diffusi e utilizzati nel mondo e consente di realizzare presentazioni professionali con semplicità e rapidità ottenendo risultati adeguati ad ogni tipo di esigenza. Pur mantenendo una coerenza globale in merito alla forma della presentazione, PowerPoint consente flessibilità nella realizzazione di ogni singola diapositiva.

Nei capitoli seguenti vedremo meglio alcuni aspetti di questi strumenti.

Capitolo 4

Grafica Vettoriale

4.1 Grafica al calcolatore

Ci sono due modi per definire un'immagine sul calcolatore:

modalità Vector: descrizione matematica delle curve che separano le regioni di differente colore (outline);

modalità Raster: cioè una matrice di valori interi di intensità associata alla matrice dei pixel che costituiscono l'immagine.

4.2 Grafica Vector

La Grafica Vettoriale crea le immagini attraverso la descrizione matematica di punti, linee e curve che è necessario tracciare. Gli elementi cromatici vengono realizzati attraverso la colorazione delle linee e delle aree chiuse.

Si può dire che la grafica vettoriale è grafica orientata agli oggetti, cioè un'immagine è composta da diversi oggetti divisi e indipendenti l'uno dall'altro. Ogni oggetto avrà delle proprietà (ad esempio colore di riempimento, colore di contorno, spessore del contorno ecc..) e troverà posizione e forma grazie a una serie di coordinate e formule matematiche. Quindi in un'immagine vettoriale tutti gli oggetti sono elementi a se stanti, indipendenti dagli altri oggetti che compongono l'immagine e potranno essere trattati separatamente.

Un'immagine vettoriale si può spostare e modificare, si può ingrandire o ridimensionare a piacimento mantenendo inalterate definizione e qualità. La grafica vettoriale viene definita scalabile in quanto è indipendente dalla risoluzione. Inoltre le immagini vettoriali richiedono poca memoria per essere memorizzate/visualizzate, in quanto le istruzioni per il disegno sono di norma piuttosto semplici.

4.3 Grafica Raster

Il modo usualmente adottato per disegnare curve o immagini su un Display Raster Scan è punto per punto ed in particolare ogni punto adiacente all'altro. L'unità elementare di disegno è quindi il punto o *pixel* e disegnare consiste nel modificare le informazioni di intensità luminosa (ed eventualmente di colore) di ogni pixel del Display. Quindi i pixel sono come le tessere di un mosaico.

Aumentando la dimensione di un immagine raster si intaccano nitidezza, definizione e qualità, rendendo l'immagine frastagliata e confusa. Questo perché il processore grafico non ricalcola la definizione dell'immagine ingrandita ma utilizza le informazioni di un singolo pixel applicandole ad un numero maggiore di pixel. La qualità di un'immagine raster varia a seconda della risoluzione e della modalità colore con cui è stata creata vale a dire da quanti pixel è composta e quante informazioni sono associate ad ogni pixel. La modalità raster riesce a dare un'illusione fotorealistica e ad offrire maggiori sfumature ed ombreggiature della modalità vector, ma ha bisogno di una maggior quantità di memoria.

4.4 Vector vs Raster

I vantaggi della *grafica vector* rispetto alla *grafica raster* sono:

- la possibilità di esprimere i dati in forma direttamente comprensibile;
- la maggior compressione dei dati, in pratica un'immagine vettoriale occuperà meno spazio rispetto ad una corrispondente immagine raster;
- la più facile gestione delle eventuali modifiche, essendo minore la quantità di dati coinvolti;
- la possibilità di ingrandire l'immagine arbitrariamente senza che si verifichi una perdita di risoluzione.

Le immagini raster sono ideali per rappresentare foto e texture (simulazione del colore dei materiali).

Le risorse richieste per trattare un'immagine vettoriale non sono definibili a priori quindi ci si potrebbe trovare nell'impossibilità di elaborare un'immagine complessa per mancanza di risorse. In particolare possiamo dire che i riempimenti con colore sfumati o elaborati generati in vettoriale comportano un alto impiego di risorse mentre il riempimento con tinte piatte è generato da semplici funzioni matematiche e risulta estremamente leggero in termini di memoria utilizzata.

Bisogna infine dire che la maggior parte dei dispositivi (es monitor, stampanti laser ecc) sono raster, ciò significa che quando un'immagine è in formato vector prima di essere inviata a tali dispositivi deve essere convertita in formato raster. Il processo di conversione di un'immagine vector in raster è detto rasterizing mentre il processo contrario è detto tracing (o vectorizing).

4.5 Utilizzi

La grafica vettoriale ha un notevole utilizzo nell'editoria, nell'architettura, nell'ingegneria e nella grafica realizzata al computer. Tutti i programmi di grafica tridimensionale salvano i lavori definendo gli oggetti come aggregati di primitive matematiche.

Nei personal computer l'uso più evidente è la definizione dei font: quasi tutti i font utilizzati vengono realizzati in modo vettoriale per consentire

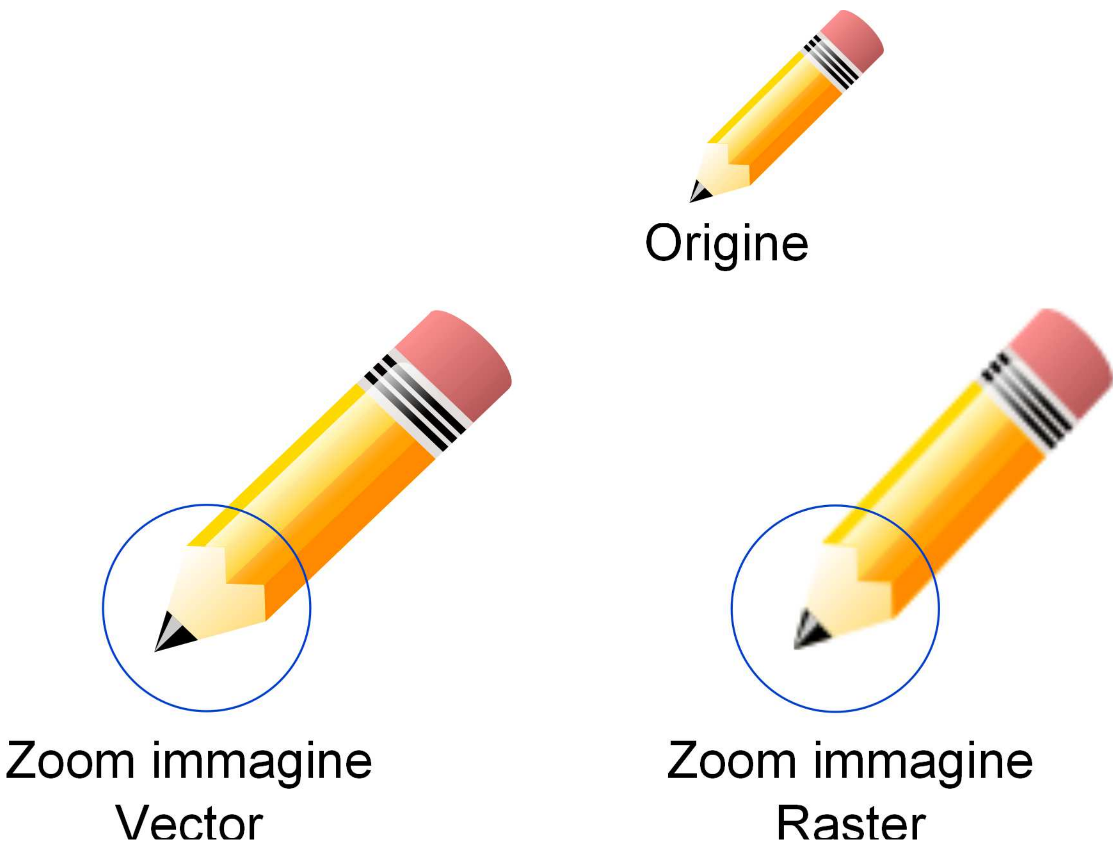


Figura 4.1: vector-raster

all'utente di variare la dimensione dei caratteri senza perdita di definizione. I font digitali possono infatti essere di due tipi:

Bitmap font: cioè una matrice di pixel rappresentante l'immagine di un glifo;

Outline font: consiste in una descrizione matematica delle curve che racchiudono lo spazio di un glifo.

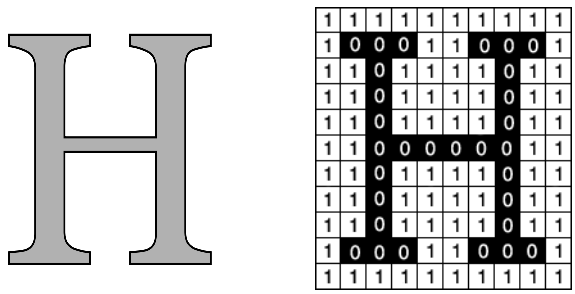


Figura 4.2: font vector/bitmap

4.6 InkScape

InkScape è un *software* libero e *OpenSource* sotto licenza GPL (Licenza Pubblica Generale) per il *disegno vettoriale*, basato sul *formato SVG*.

Un software per il disegno vettoriale è una applicazione per il disegno che utilizza espressioni matematiche (vettori) per memorizzare gli oggetti grafici realizzati dall'utente. Il principale vantaggio dei programmi di grafica vettoriale è che ogni oggetto realizzato può essere ridimensionato facilmente e senza perdita di qualità in quanto gli oggetti sono definiti a prescindere dal concetto di pixel e di risoluzione.

Abbiamo detto che InkScape è un software libero e OpenSource. Software libero nel senso che il programma può essere scaricato e utilizzato del tutto gratuitamente e in modo legale. OpenSource letteralmente significa Sorgente Aperta, cioè il codice sorgente del programma è scaricabile da chiunque voglia visionarlo o apportarvi modifiche. A tal proposito è importante ricordare che tutti i programmi di questo tipo sono in continua evoluzione.

E' possibile scaricare Inkscape dal sito ufficiale scegliendo l'ultima versione stabile disponibile per il proprio sistema operativo. Sono disponibili versioni per Linux, Mac OS X, Windows.

http://www.inkscape.org

Inkscape adotta il formato SVG come formato di salvataggio predefinito. SVG sta per *Scalable Vector Graphics* ovvero Grafica Vettoriale Scalabile. Questo formato è stato creato dal W3C (World Wide Web Consortium) consorzio noprofit che si occupa degli standard WEB. Si tratta di un formato aperto, quindi libero da diritti, creato per definire uno standard per l'utilizzo della grafica vettoriale in rete. Il sorgente di un file SVG è puro testo XML, ed è quindi compatibile modularmente con qualsiasi altra applicazione XML. Come linguaggio XML può essere processato con i tradizionali tool XML. SVG è anche utilizzato per cellulari e palmari. I disegni SVG possono essere visualizzati direttamente da tutti i principali browser web. Oltre a SVG, inkscape può importare ed esportare diversi altri formati ricordiamo EPS e PNG.

4.7 Inkscape e il metodo colore CMYK

E' noto che per creare lavori per il web lo spazio colore con cui lavorare è RGB (Red Green Blue) mentre per creare lavori per la stampa è importante lavorare in CMYK (Cyan Magenta Yellow Black), purtroppo per ora Inkscape non supporta questa modalità. Anche se all'interno di Inkscape è possibile scegliere i colori con le componenti CMYK, il dato di fatto è che poi i file SVG vengono salvati in RGB.

4.8 Gli strumenti che offre Inkscape

Inkscape è un programma con cui è possibile realizzare moltissimi progetti come ad esempio layout per siti Web, banner e loghi, volantini, etc... Volendo specificare meglio alcune cose che è possibile fare possiamo dire che Inkscape permette di disegnare forme semplici come: rettangoli, quadrati, cerchi, ellissi, archi, poligoni, stelle e spirali.

Permette la creazione di semplici figure 3D (teniamo comunque presente che inkscape è un programma per la grafica 2D).

Si possono disegnare linee a mano libera.

Si possono disegnare tracciati rettilinei e curvilinei posizionando dei punti chiave detti nodi a cui si collegano segmenti rettilinei o curvilinei. I tracciati creati possono essere modificati attraverso i nodi.

Permette di creare linee calligrafiche attraverso lo strumento *pennino*. Il pennino lascia sulla pagina dei segni grossi o sottili come se stessimo usando su un foglio un vero pennino a china.

Selezionando un oggetto è possibile spostarlo, ruotarlo, scalarlo o distorcerlo, duplicarlo o rifletterlo. Più oggetti selezionati insieme possono essere raggruppati (o divisi) allineati (o distribuiti).

Sempre in riferimento agli oggetti creati è possibile giocare con lo stile delle linee e coi colori di riempimento e di contorno, creare sfumature e trasparenze.

Con lo strumento: *Crea Connettori di Diagrammi* si è facilitati nella creazione di diagrammi; infatti è possibile tracciare linee che evitano in automatico gli oggetti.

Con Inkscape è possibile inserire e modificare il testo, formattarlo, disporlo lungo un tracciato o in un contenitore.

Inkscape dispone di un editor XML che permette di modificare a mano i nodi che compongono un'immagine. Questo rende possibile l'utilizzo di trucchi che non sono possibili con il solo editor grafico a patto di conoscere la sintassi XML e quella SVG.

4.9 La funzione di Autotracing di Inkscape

Inkscape, mediante la funzione di autotracing (autotracciamento), ha la capacità di convertire le immagini bitmap (cioè raster) in tracciati (paths). Inkscape utilizza le routine di *Potrace* (http://potrace.sourceforge.net) di Peter Selinger. Opzionalmente può essere utilizzato *SIOX* per aiutare a separare un primo piano dallo sfondo.

Tracciare l'immagine non è una cosa semplice da fare. Potrace funziona bene con alcuni tipi di immagine (in bianco e nero, disegni lineari) e un po' meno bene per altre. I percorsi creati possono avere migliaia di nodi a seconda della complessità dell'immagine e possono impegnare pesantemente la potenza della CPU. Dopo la scansione è possibile utilizzare il comando *Ctrl+L* per ridurre il numero di nodi ma a danno della qualità dell'operazione. Occorre fare diversi tentativi prima di ottenere tracciati ottimali, il risultato dipende fortemente dalla qualità delle immagini di ingresso.

Per utilizzare la funzione di autotracing prima si seleziona l'immagine bitmap, poi si seleziona il percorso:
Tracciato⇒Vettorizza Bitmap.
Viene richiamata una finestra di dialogo composta da alcune schede. La prima scheda permette di decidere la strategia di scansione dell'immagine bitmap dopo aver stabilito se si vuole effettuare una scansione semplice o multipla. La scansione semplice crea un unico tracciato, la scansione multipla crea più tracciati.

La scansione semplice prevede tre strategie possibili.

1. *Riduzione di luminosità.* L'output dipende dalla luminosità dei pixel nella bitmap. La luminosità di un pixel è definita come la somma delle componenti di colore rosso, verde, blu (o il valore in scala di grigio per immagini in bianco e nero). Un tracciato viene creato in modo che comprenda tutte le regioni che sono più scure del valore di soglia impostato. La soglia può essere impostata da 1.0 (bianco) a 0.0 (nero).

2. *Riconoscimento ottimale dei bordi.* L'output dipende dalla differenza di luminosità tra pixel adiacenti. Un tracciato viene creato tra le aree con i cambiamenti di luminosità che superano l'impostazione di soglia.

3. *Quantizzazione colore.* L'output dipende dalle variazioni di colore tra i pixel adiacenti. Il numero di colori scelto indica il numero dei diversi colori che dovranno essere usati nella ricerca dei bordi. Verrà creato un solo tracciato e ciò che farà parte o meno del tracciato si baserà sul fatto che il *color index* sia pari o dispari.

Con la scelta di scansione multipla l'immagine bitmap viene scansionata più volte e ogni volta con diverse impostazioni. Un tracciato viene creato per ogni scansione effettuata, quindi i singoli tracciati vengono raggruppati. Le strategie di scansione possono essere per luminosità, per colore, per toni di grigio.

Esiste una scheda che riporta le opzioni comuni a tutti i criteri di scansione. Due delle opzioni riducono il numero dei nodi, la terza produce tracciati più regolari.

Capitolo 5

Stesura della Dispensa

5.1 Breve storia di TEX e LATEX

TEX è un programma di composizione tipografica realizzato da Donald Ervin Knuth, professore di Informatica all'Università di Stanford (USA), e distribuito con una licenza di software libero. Nel 1977 Knuth cominciò a scrivere il suo "motore" di tipocomposizione per esplorare le potenzialità degli strumenti di stampa digitale che allora cominciavano a muovere i primi passi in campo editoriale. La prima versione del programma ha visto la luce nel 1982 e da allora ha subito costanti aggiornamenti e miglioramenti tra cui quello del 1989 che gli ha permesso di supportare un numero considerevolmente maggiore di caratteri anche non latini. TEX è rinomato per essere estremamente stabile e per girare su diversi tipi di calcolatore.

LATEX è un programma di composizione tipografica realizzato da Leslie Lamport e liberamente disponibile che usa TEX come motore di tipocomposizione. LATEX non è TEX.

LATEX è stato progettato per automatizzare tutte le più comuni operazioni necessarie per realizzare un documento e tramite le proprie impostazioni predefinite, permette all'utente di impaginare il suo lavoro ai più elevati livelli di professionalità secondo canoni tipografici consolidati. E' un programma indicato soprattutto per scrivere documenti scientifici con la più alta qualità possibile.

Lamport, che collaborava con Knuth allo sviluppo di TEX, cominciò a scrivere LATEX alla fine degli anni settanta, quando TEX non era ancora stato pubblicato. La prima versione pubblica di LATEX risale al 1985 e da allora il programma è stato continuamente aggiornato e migliorato.

5.2 Composizione sincrona e asincrona

La caratteristica che più differenzia LATEX dagli altri elaboratori di testo è il fatto che *l'introduzione del testo* e la sua *composizione* avvengono in tempi diversi.

Per modificare un documento scritto con un comune word processor l'utente agisce direttamente sul testo già composto (che appare sul monitor) e ogni sua azione si traduce in una variazione immediata del testo. Perciò questo tipo di composizione è detta *composizione sincrona*. Per essere davvero sincrono il programma deve operare con un ritardo trascurabile tra modifica del testo e visualizzazione, quindi deve puntare sulla rapidità della presentazione rinunciando a una composizione perfetta (esiste sempre un compromesso tra velocità e qualità).

La *composizione asincrona*, invece, consiste nell'introdurre il testo in un editor, concentrandosi unicamente su **strutture logiche** e **contenuto** del documento (senza preoccuparsi dei dettagli estetici) per darlo poi "in pasto" a un compositore, cioè LATEX, che lo impaginerà. L'utente, naturalmente, può modificare il proprio lavoro in qualunque modo e in qualunque momento, tenendo presente che LATEX non si limita ad aggiornarlo nel punto in cui è stato modificato ma riorganizza sempre nel migliore dei modi l'intero capoverso e di conseguenza l'intera pagina.

Questo secondo tipo di composizione punta sulla **qualità**: LATEX elabora il testo nel suo complesso ed è per questo che può fare le scelte d'impaginazione migliori.

5.3 Istruzioni di marcatura

Un File prodotto con l'editor e da comporre con LaTeX è un codice scritto in una sorta di **linguaggio di programmazione** infatti comprende il **testo** vero e proprio e dei *marcatori* (o etichette logiche, mark-up in inglese), ovvero istruzioni che il programma deve eseguire per trattare nel modo specificato dall'utente la porzione di testo a cui si riferiscono. Queste etichette logiche sono: i **comandi** (chiamati in gergo macro, abbreviazione di macro-istruzioni) e gli **ambienti**. LaTeX definisce anche degli strumenti per ritoccare manualmente l'aspetto del documento durante la revisione finale.

5.4 Vantaggi

Vediamo alcuni dei vantaggi che si hanno nella scelta di LaTeX:

- LaTeX compone documenti al massimo grado di professionalità e presenta caratteristiche di qualità e stabilità.
- L'utente pensa a struttura e contenuto del documento, LaTeX si occupa dell'impaginazione.
- LaTeX lavora a partire da impostazioni tipografiche che vanno predefinite e questo rende semplice redigere un documento a più mani uniformando gli stili.
- LaTeX genera strutture complesse come ad esempio indici, bibliografie, elenchi delle tabelle e figure, riferimenti incrociati con efficienza e flessibilità.
- LaTeX gestisce in modo impeccabile la composizione tipografica di formule matematiche e capoversi.
- LaTeX ha una struttura modulare che permette di estenderne le capacità per eseguire compiti tipografici non direttamente gestiti dal programma.

5.5 Svantaggi

In generale quando i documenti da preparare richiedono flessibilità visuale (volantini, biglietti d'invito, dépliant,...) è meglio scegliere un sistema di videoscrittura tradizionale poichè LaTeX non fornisce gli strumenti necessari a realizzare questo tipo di prodotti.

Per chi non conosce LaTeXprima di cominciare a scrivere un documento è necessario leggere attentamente una buone guida di base, ciò richiederà un po' di tempo, ma è un piccolo scotto necessario da pagare.

Inoltre l'uso di LaTeX richiede attitudine all'astrazione perché il risultato finale sarà visibile soltanto in un secondo tempo cioè dopo la composizione (compilazione del documento).

5.6 Il Software

Per prima cosa è necessario installare il compilatore MikTex (Versione per sistemi Windows);
per scaricare **MikTex** gratuitamente (http://miktex.org/download).
Servirà poi un editor per poter scriver il sorgente da compilare: TeXnicCenter (Versione per sistemi Windows);
per scaricare **TeXnicCenter** gratuitamente (http://www.texniccenter.org/).
Servirà inoltre un interprete per il linguaggio Postscript : ghostscript (Versione per sistemi Windows);
per scaricare **Ghostscript** gratuitamente (http://www.ghostscript.com/).
Per ultimo sarà necessario un visualizzatore di Pdf;
per scaricare **Acrobat Reader** gratuitamente (https://get.adobe.com/it/reader/).

5.7 La compilazione

L'editor TeXnicCenter ha una interfaccia grafica semplice ed intuitiva, ricca di pulsanti. E' possibile specificare il formato desiderato per il file di output ad es Pdf.

La compilazione del documento salvato con estensione txt (infatti i sorgente sono file di testo) è immediata grazie al tasto *Build and View Output*. Il documento viene compilato e nella parte bassa dello schermo si apre la finestra con i passaggi della compilazione. Vengono segnalati gli eventuali errori e visualizzato direttamente l'output.

5.8 Come inserire immagini in un documento

In questa sezione parleremo di come inserire grafici, figure o immagini esterne (cioè prodotte da altri programmi rispetto a LaTeX) in documenti LaTeX, cioè documenti *.tex*. Dopo la compilazione ciò che vorremmo è un documento con immagini in formato *.pdf*. I termini grafici, figure e immagini verranno utilizzati indifferentemente in quanto LaTeX non fa distinzioni.

Le figure non vengono incollate nel documento, rimangono in file separati e verrà creato un collegamento ad essi. Risulta quindi conveniente creare nella directory di lavoro una cartella dove salvare tutte le immagini da inserire nel documento.

Di norma un file dove si salva un'immagine è in formato *.eps*: Encapsulated PostScript. Aprendo un file in formato *.eps* con un editor di testo si può visualizzare la riga di istruzioni che contiene le informazioni sul perimetro della figura chiamato *BoundingBox* (brevemente BB); questa riga riporta ascissa e ordinata del vertice in basso a sinistra e ascissa e ordinata del vertice in alto a destra del BoundingBox.

Per inserire una figura in formato *.eps* in un documento LaTeX è necessario caricare nel preambolo del documento il pacchetto `graphicx` che rispetto ad altri pacchetti grafici è il più recente e forse il più semplice da usare. I comandi per inserire la figura nel documento sono i seguenti:

```
\begin{figure}[htbp]
\centering
\includegraphics[scale=0.8]{nomefile.eps}
```

```
\caption{didascalia della figura}\label{etichetta della figura}
\end{figure}
```

L'etichetta serve nel caso si voglia richiamare la figura dal testo usando il comando `\ref{}`

5.8.1 Direttive di Posizionamento

L'ambiente `figure` permette di creare un oggetto mobile all'interno del quale inserire un oggetto grafico. Gli oggetti mobili non sempre appaiono nel documento finale nel punto esatto in cui vengono dichiarati nel file sorgente, infatti possono venire spostati al fine di ottenere una impaginazione più piacevole. E' possibile specificare delle preferenze di posizionamento attraverso parametri opzionali di tale ambiente:

h: *here*, vorremmo la figura esattamente nel punto in cui abbiamo inserito le istruzioni;

t: *top*, vorremmo la figura in cima alla pagina;

b: *bottom*, vorremmo la figura in fondo alla pagina;

p: *page of floats*, vorremmo la figura in una pagina a sé stante.

LaTeX analizza le direttive di posizionamento secondo l'ordine `h->t->b->p` saltando le direttive non specificate. E' sconsigliabile indicare una sola direttiva perchè se la figura non può essere posizionata in accordo con l'unica direttiva, la figura in questione e tutte le successive figure non verranno inserite. Si può provare di forzare un po' LaTeX ad accontentare le richieste inserendo il punto esclamativo davanti alla lista delle direttive. Le direttive di default sono `tbp`.

L'istruzione: `\centering` serve a centrare la figura nella pagina.

5.8.2 Ridimensionare una figura

LaTeX legge le istruzioni del BoundingBox e riserva nel documento un corrispondente spazio di dimensioni pari alla figura da inserire. Naturalmente è possibile che le dimensioni reali della figura siano o troppo grandi o troppo piccole. Uno dei vantaggi dei formati vettoriali (*.ps*, *.eps*) rispetto ai formati bitmap (*.bmp*, *.gif*) è quello di poter modificare le dimensioni delle immagini senza modificarne la qualità. Per fare questo si utilizza la parte riservata alle `opzioni` (la parte tra parentesi quadre) nel comando `includegraphics`.

Volendo scalare l'immagine ad esempio del 20% si procede come segue:

```
\includegraphics[scale=0.8]{nomefile.eps}
```

Alternativamente è possibile impostare direttamente le dimensioni volute per la figura utilizzando le opzioni:

- `height:` indica l'altezza dell'immagine. Esempio: `height=2cm`;
- `width:` indica la larghezza dell'immagine. Esempio: `width=4cm`

In genere per non deformare la figura si imposta soltanto una dimensione sapendo che verrà mantenuto immutato il rapporto tra i due lati.

```
\includegraphics[width=4cm]{nomefile.eps}
```

Consideriamo ancora un'esempio:

```
\includegraphics[width=\textwidth]{nomefile.eps}
```

`\textwidth` è un parametro di LaTeX che misura l'ampiezza del documento, in questo modo la larghezza della figura corrisponderà alla larghezza del testo.

E' anche possibile ruotare la figura in senso antiorario di un certo angolo espresso in gradi. Esempio: `angle=45`.

Infine ricordiamo l'opzione `draft=true` per non inserire la figura nel testo ma riservare lo spazio necessario. Questa opzione può essere utile nel caso si voglia velocizzare la compilazione del documento in fase di stesura (`draft=true` è di default):

```
\includegraphics[draft=true, width=\textwidth, angle=45]{nomefile.eps}
```

Quando tra le parentesi quadre si mette più di una opzione occorre separarle con le virgole. Le opzioni vengono applicate nell'ordine in cui sono elencate quindi cambiare l'ordine può modificare il risultato finale.

5.8.3 I formati della compilazione

Il modo classico per compilare documenti con figure è il seguente:

$$.tex- > .dvi- > .pdf$$

Attraverso la compilazione con LaTeX di un file in formato *.tex* con incluse delle figure in formato *.eps* si ottiene un file in formato *.dvi* (DeVice-Independent). La ragione per cui si converte il formato *.dvi* nel formato *.pdf* è che il *.dvi* con figure, anche se correttamente visualizzato sullo schermo, non può essere direttamente stampato. Il programma `dvipdfm` genera un file *.pdf* da un file *.dvi*; `dvipdfm` nell'effettuare la conversione dei formati trasforma correttamente le figure richiamando `Ghostscript`.

Il formato *pdf* (Portable Document Format), è il formato visualizzabile con Adobe Acrobat Reader. Una figura *.pdf* è ancora vettoriale (modificabile in dimensioni senza danni alla qualità) ma manca del BoundingBox quindi il formato della figura non è indipendente dal formato della pagina in cui è inserita.

Con le moderne distribuzioni di TeX oggi si compilano i sorgenti LaTeX con il programma `pdflatex` e si ottiene direttamente un file in formato *.pdf*. Quando si produce direttamente il *.pdf* tramite `pdflatex` si possono usare nel proprio documento esclusivamente i seguenti formati per le immagini:

- *.pdf* per le immagini vettoriali;
- *.png* o *.jpg* per le immagini raster.

Esiste un modo per poter includere anche immagini *.eps* direttamente, basta usare il pacchetto `epstopdf` (`\usepackage{epstopdf}`) dopo aver controllato che sia istallato:

"oberdiek" (da menù→ programmi→ MiKTeX 2.9→ Maintenace→ Package Manager).

Capitolo 6

Presentazione Multimediale

6.1 PowerPoint

PowerPoint è un software Microsoft per la realizzazione di presentazioni informatiche multimediali tra i più diffusi e utilizzati nel mondo. Consente di realizzare presentazioni professionali con semplicità e rapidità ottenendo risultati adeguati per ogni tipo di esigenza. In particolare possiamo dire che consente di realizzare in breve tempo una presentazione efficace anche per argomenti di carattere scientifico.

Col termine *presentazione* si indica un file che include: diapositive, note personali, struttura della presentazione stessa e stampati.

Le **diapositive (slide)** possono essere considerate le pagine della presentazione, esse andranno realizzare una per volta per poi essere visualizzate in sequenza direttamente sul PC o proiettate su uno schermo attraverso un videoproiettore connesso al PC tramite un cavo VGA o HDMI.

Ogni diapositiva può includere: titolo, testo, grafica, ClipArt, disegni e forme. Volendo realizzare una presentazione elaborata si possono inserire filmati, audio e Link interni (altre diapositive) o a siti esterni. In ogni diapositiva possono essere impiegate animazioni di alto livello.

Powerpoint consente di uniformare stile e colori delle diapositive di una presentazione semplicemente applicando a priori un modello e scegliendo nel contempo le combinazioni di colori desiderate. Il modello può comunque sempre essere cambiato anche durante la realizzazione del progetto.

Per ogni pagina creata c'è il modo di inserire della **note personali** a supporto del lavoro.

La **struttura della presentazione** è uno schema globale che riporta solo i titoli ed il testo di ogni diapositiva. La struttura si genera in maniera automatica e può essere utile per riassumere il lavoro. C'è anche chi usa questo strumento per preimpostarlo.

Una volta completata la presentazione è possibile eseguire degli **stampati** da distribuire al pubblico. Uno stampato prevede l'inclusione in un foglio formato A4 di più diapositive in formato ridotto.

L'apprendimento di Microsoft PowerPoint risulta molto agevole se si ha familiarità con gli altri applicativi Microsoft Word e Microsoft Excel. Le tre applicazioni presentano infatti molte similitudini ed una sostanziale coerenza tra i menù i comandi e le finestre di dialogo; le barre degli strumenti sono standardizzate per facilitarne l'utilizzo nel passaggio da una applicazione all'altra. E' inoltre possibile creare ad esempio un foglio di lavoro con Microsoft Excel ed incollarlo in una presentazione PowerPoint. Il programma dispone di una guida in linea, descrizioni sintetiche dei pulsanti e suggerimenti per supportare il lavoro di chi è alle prime armi.

6.2 Pregi di PowerPoint

PowerPoint consente di :

- creare presentazioni professionali con semplicità e rapidità;
- integrare le presentazioni con note dell'oratore e stampati per il pubblico;
- sfruttare le conoscenze acquisite di programmi quali Microsoft Word o Microsoft Excel;
- utilizzare informazioni e oggetti creati con altri programmi Microsoft.

La proiezione di diapositive digitali consente di comunicare via schermo progetti, idee e contenuto. E' uno strumento che trova largo impiego nel mondo del lavoro ma anche in ambito scolastico e accademico. Volendo riassumere i pregi dell'esposizione di un lavoro attraverso una presentazione possiamo dire che:

- il lavoro viene esposto in modo schematico e preciso;
- è possibile mostrare filmati e immagini con un testo di supporto;
- è possibile illustrare risultati o evidenziare caratteristiche ad esempio mediante grafici e tabelle.

6.3 Il Software

Microsoft PowerPoint fa parte della suite di software di produttività personale Microsoft Office, è tutelato da copyright e distribuito con licenza commerciale. E' disponibile per i sistemi operativi Windows e Macintosh. Le presentazioni possono essere salvate in vari formati: il predefinito e più conosciuto è il ppt (presentazione di PowerPoint); le ultime versioni (a partire dal 2007) usano un nuovo formato: il pptx. I formati utilizzati da PowerPoint, come tutti i formati binari del pacchetto Office, sono formati chiusi quindi teoricamente gestibili unicamente attraverso il programma originale. Vista la diffusione del formato oggi diversi programmi free come ad esempio OpenOffice.org (Impress) sono in grado di aprire i formati nativi di Powerpoint.

6.4 Breve storia di PowerPoint

Fu sviluppato inizialmente da Bob Gaskins e dal programmatore Dennis Austin con il nome di Presenter per la Forethought Inc, che pubblicò PowerPoint 1.0 nell'aprile 1987 per sistemi Macintosh Apple. Era in bianco e nero, testo e grafica si fondevano per creare trasparenze. Con l'arrivo del primo Macintosh a colori sul mercato, uscì un anno dopo una versione di PowerPoint già adattata per sfruttare le potenzialità del colore.

Microsoft Corporation comprò la Forethought Inc e il relativo software PowerPoint nel Luglio del 1987. Nel 1990 fu rilasciata la prima versione per Windows 3.0. Da quel momento in poi PowerPoint verrà sempre incluso nella suite Microsoft Office (eccetto per la versione base).

La versione 2002 introduce nuove caratteristiche rispetto alle precedenti, vediamone alcune: definire le impostazioni per singole animazioni (e relative ombre), introduce diagrammi di vario tipo e un maggior numero di modelli predefiniti, password per proteggere documenti riservati. La versione del 2003 migliora e potenzia la grafica e il supporto per i nuovi contenuti multimediali. Nella versione 2007 cambia l'interfaccia utente e viene migliorata ulteriormente la grafica. L'ultima versione è PowerPoint 2013 (versione 15)-(Office 2013) abilitata anche al funzionamento con interfacce touch tipo tablet o sistemi operativi come Windows 8.

6.5 PowerPoint e la matematica

Spesso ci si trova a scrivere relazioni scientifiche in formato digitale che utilizzano numerose formule matematiche. Il modo di approcciare l'inserimento di formule matematiche in un documento PowerPoint cambia a seconda che si usi una versione antecedente la 2007 o l'ultima release. Nel caso di PowerPoint 2007 il menù di inserimento formule è già presente sulla barra degli strumenti. Nelle righe seguenti si farà riferimento alla versione PowerPoint 2003 usata per la stesura della presentazione associata alla dispensa.

Per inserire un'equazione in una diapositiva PowerPoint bisogna ricorrere all'applicazione Microsoft Equation Editor. Dal menù *Inserisci* ⇒ *Oggetto* ⇒, selezionare: *Microsoft Equation* 3.0 *e fare clic su OK.* In alternativa è possibile inserire il pulsante di Equation Editor direttamente sulla barra degli strumenti attraverso *Strumenti* ⇒ *Personalizza* ⇒ *Comandi* ⇒ ...

L'applicazione Equation Editor è veramente semplice da usare. Comprende un documento bianco dove verrà composta la formula e una Tavolozza. I simboli da inserire nell'equazione possono essere digitati direttamente da tastiera o selezionati dai pulsanti della tavolozza. Basta chiudere Equation Editor per ritrovare la formula composta sulla diapositiva. Per modificare una formula già esistente basta selezionarla e aprirla con un doppio clic.

A parte il modo di creare una formula, ci si trova a dover gestire le seguenti problematiche:

- Le equazioni non possono essere inserite o modificate 'in-place' in PowerPoint.
- Le equazioni sono fluttuanti nel testo e possono essere trascinate per il corretto posizionamento.
- Le equazioni vanno ridimensionate in modo opportuno (menù: *Formato* ⇒ *Oggetto* ⇒ *Dimensioni*)

6.6 PowerPoint e il testo

In PowerPoint col termine segnaposto si indicano dei riquadri che vengono visualizzati nella diapositiva per segnalare dov'è possibile l'immissione del testo. Ogni segnaposto è delimitato da una linea punteggiata ed è ridimensionabile. Ogni nuova diapositiva creata contiene dei segnaposto per il testo: quanti e quali dipende dal layout selezionato. In genere ce ne sono almeno due: uno per il titolo e uno per il testo principale. In particolare in alcuni layout sono disponibili segnaposto di testo impostati per la creazione automatica di elenchi puntati. Dovendo inserire delle immagini o anche delle formule a cui affiancare un commento o una spiegazione è meglio tenere il testo della diapositiva diviso in più caselle di testo per poterlo opportunamente spostare e ridimensionare vicino alla formula o immagine; proprio per questa ragione nella creazione della presentazione si è ricorso spesso al menù *Inserisci* ⇒ *Casella di testo*.

6.7 PowerPoint e le immagini

PowerPoint ha tutta una serie di funzioni disponibili per poter creare un disegno direttamente nella diapositiva. Oltre agli oggetti creati in PowerPoint, le presentazioni possono includere oggetti importati. E' possibile importare quasi tutti i tipi di immagini elaborate al computer, quali ClipArt, filmati e così via. Questa caratteristica consente di usufruire delle raccolte di illustrazioni disponibili senza doverne creare di nuove. In PowePoint è possibile importare immagini da altre applicazioni. Le immagini importate potranno essere modificate direttamente in PowerPoint ovvero spostate ridimensionate a volte è possibile scomporle in parti o cambiarne i colori. Ogni immagine viene inserita a partire dal menù *Inserisci* ⇒ *Immagine.*

I formati delle immagini utilizzate sono principalmente di tipo bitmap. I più utilizzati sono i seguenti:

- bmp, introdotto con Windows è normalmente usato per le immagini a video;
- gif, ideato per occupare poco spazio viene usato per lo scambio di immagini su internet;
- jpg, è un formato che impiega una tecnica di compressione sofisticata;
- tiff è un formato flessibile per immagini di qualità e prevede la compressione automatica per risparmiare spazio;
- png, Portable Network Graphics.

E' anche possibile inserire dei filmati o degli spezzoni audio, anche in questo caso a partire dal menù *Inserisci* ⇒ *Filmati e Audio.*

Appendice A

La dispensa passo dopo passo

Ogni documento o progetto (se è un oggetto complesso) realizzato con LaTeX è sempre costituito da due parti:

1. il **preambolo**,
2. il **corpo**.

A.1 Il preambolo

Il preambolo è la parte iniziale del documento, all'interno del quale si scelgono le caratteristiche tipografiche principali che LaTeX deve utilizzare nella realizzazione del documento finito. LaTeX è costruito in modo da comprendere la maggior parte delle funzioni di base per la composizione di documenti. E' ovvio comunque che non può includere tutte le possibili opzioni e non sarebbe nemmeno possibile prevederle a priori. Per questo LaTeX è espandibile. Di norma le estensioni sono contenute in pacchetti aggiuntivi (plugin) che devono essere richiamati nel preambolo del documento che li usa. Diversi pacchetti vengono istallati insieme a MikTeX, in caso contrario occorre scaricarli da Internet e posizionarli nella cartella creata per i file del documento, in questo modo il compilatore non darà problemi.

L'istruzione che apre il preambolo della dispensa è la seguente:

```
\documentclass[12pt,a4paper,openright,twoside]{report}
```

Report è la classe scelta per la dispensa. E' una classe adatta a documenti lunghi che devono essere divisi in capitoli. I parametri, elencati all'interno delle parentesi quadre, specificano che il carattere del testo dovrà avere una dimensione di 12 punti; la formattazione del testo dovrà essere adatta ad un foglio di carta A4; ogni capitolo dovrà aprirsi sulla destra e i fogli dovranno essere stampati fronte retro.

Le librerie che sono state incluse sono elencate di seguito.

```
\usepackage[italian]{babel}
\usepackage[T1]{fontenc}
\usepackage[latin1]{inputenc}
```

servono per poter scrivere in lingua italiana, e per poter inserire direttamente da tastiera le lettere accentate.

```
\usepackage{graphicx}
```

serve per caricare e inserire grafica.

```
\usepackage{amssymb}
\usepackage{amsmath}
\usepackage{latexsym}
\usepackage{amsthm}
```

servono per poter inserire simboli matematici.

```
\usepackage{fancyhdr}
```

serve per personalizzare l'intestazione e il piè di pagina.

```
\usepackage{indentfirst}
```

serve per avere l'identazione a inizio capitolo.

`\usepackage{newlfont}`
libreria per utilizzare font particolari.

A.2 Il corpo

Il corpo è così strutturato:
comincia con l'istruzione: `\begin{document}`
finisce con l'istruzione: `\end{document}`
il testo dovrà essere posizionato fra queste due istruzioni.

Tutto ciò a cui faremo riferimento in seguito potrà essere inserito entro il corpo.

A.2.1 Titolo

LaTeX permette di dare un titolo al documento, specificare l'autore/i e una data di riferimento. Il titolo va posto subito dopo il comando di inizio del documento.

```
\begin{titlepage}
\title{Il titolo che si è scelto}
\author{nome e cognome \and ..}
\date{gg/mm/anno}
\maketitle
\end{titlepage}
```

A.2.2 Strutturare il documento

Un progetto complesso va diviso in parti, tipicamente capitoli, sezioni, sottosezioni. LaTeX si adopera per numerare in progressione tutte le pagine del progetto, inoltre si preoccupa di numerare i capitoli, le sezioni e le sottosezioni in modo automatico. Si deve ricordare che un capitolo termina quando comincia il capitolo successivo. Una sezione o sottosezione termina quando comincia la successiva.

I comandi per creare un capitolo, una sezione, o una sottosezione sono elencati di seguito:
`\chapter{titolo del capitolo}`
segue il testo del capitolo
`\section{titolo della sezione}`
segue il testo della sezione
`\subsection{titolo della sottosezione}`
segue il testo della sottosezione.

In caso di documenti molto lunghi non è opportuno tenere tutto il testo in un unico file, conviene dividerlo in più file. Ad esempio si può pensare di creare un 'main file' dove inserire il preambolo e la struttura di base del corpo, poi creare un file per ogni capitolo. I file dei capitoli vengono inclusi nel main utilizzando il seguente comando che permette chiamate ricorsive:

`\input{nomefile.txt}`

A.2.3 I comandi usati con maggior frequenza

In un documento composto per lo più da testo i comandi più usati riguardano il cambiamento di stile dei caratteri. In tipografia gli stili si distinguono per la forma, il peso, la famiglia.

I comandi di cambiamento di stile impiegati nella realizzazione della dispensa sono stati essenzialmente tre:

`\textit {corsivo}`	*corsivo*	forma: Italic shape
`\textbf {grassetto}`	**grassetto**	peso: grassetto
`\texttt {typewriter}`	`typewriter`	famiglia: typewriter

A.2.4 Gli ambienti

Un ambiente è una parte di documento delimitata tra i comandi:
`\begin{ambiente}`
`\end{ambiente}`

Di seguito vediamo, attraverso degli esempi, come e quali ambienti sono stati impiegati nella realizzazione della dispensa.

Stampare parti di codice

L'ambiente `verbatim` si limita a scrivere il suo contenuto in formato macchina da scrivere. Siccome gli eventuali comandi e/o caratteri speciali presenti all'interno di questo ambiente non vengono interpretati è utile principalmente per stampare programmi o codice LaTeX.

```
\begin{verbatim}
Stampa in formato macchina da scrivere,
ignora i comandi: \textbf{grassetto}
\end{verbatim}
```

Produce:

```
Stampa in formato macchina da scrivere,
ignora i comandi: \textbf{grassetto}
```

Gli Elenchi

Gli elenchi si realizzano attraverso l'uso degli ambienti: `itemize`, `enumerate`, `description`. Rispettivamente si tratta di elenchi puntati, numerati, parole in grassetto a cui segue una descrizione-spiegazione. Vediamo degli esempi:

```
Pregi nell'uso di elenchi:
\begin{itemize}
 \item alleggerire il testo;
 \item migliorare la leggibilità;
 \item strutturare le proprie idee:
\end{itemize}
```

Produce:

Pregi nell'uso di elenchi:

- alleggerire il testo;
- migliorare la leggibilità;
- strutturare le proprie idee.

```
\begin{enumerate}
 \item primo elemento;
 \item secondo elemento;
 \item terzo elemento.
\end{enumerate}
```

Produce:

1. primo elemento;
2. secondo elemento;
3. terzo elemento.

```
\begin{description}
 \item[itemize]     per fare liste semplici;
 \item[enumerate]   per fare liste numerate;
 \item[description] per fare liste in cui ogni elemento comincia con un testo.
\end{description}
```

Produce:

itemize per fare liste semplici;

enumerate per fare liste numerate;

description per fare liste in cui ogni elemento comincia con un testo.

Creare tabelle

Utilizzando l'ambiente `tabular` si possono creare delle tabelle ben strutturate di qualsiasi tipo, tuttavia nella dispensa questo ambiente così ricco è stato impiegato unicamente per incolonnare. Dopo la voce `\begin{tabular}` tra parentesi graffe ci sono i parametri relativi alle colonne: le voci che compongono una colonna possono essere allineate a destra (usando il parametro r), a sinistra (l) o centrate (c).

```
\begin{tabular}{|l|c|r|}
\hline
aaa &  aaa & aaa\\
\hline
aa  &  aa  & aa \\
\hline
a   &  a   & a\\
\hline
\end{tabular}
```

Produce:

aaa	aaa	aaa
aa	aa	aa
a	a	a

A.2.5 LaTeXe la matematica

Nella realizzazione di un documento scientifico senza dubbio il lavoro più consistente in merito all'uso di istruzioni e ambienti di LaTeX riguarda oggetti appartenenti al mondo matematico. LaTeX dispone di due modi per inserire matematica (è indispensabile usare uno dei due modi altrimenti il compilatore produce un errore):

1. \$.....\$

2. \$\$......\$\$

Il primo modo è utilizzato per la matematica che deve comparire in mezzo al testo, il secondo permette di inserire oggetti matematici su una riga a se stante. Chiariamo con degli esempi:

Consideriamo l'uguaglianza: $\$(x + y + z) = n\$$
Produce:
Consideriamo l'uguaglianza: $(x + y + z) = n$

Invece
Consideriamo l'uguaglianza: $\$\$(x + y + z) = n\$\$$
Produce:
Consideriamo l'uguaglianza:

$$(x + y + z) = n$$

LaTeX permette di inserire mediante l'uso di comandi e ambienti tutto ciò che può avere a che fare con la matematica a partire da cose molto semplici come ad esempio simboli, operatori, lettere greche fino a elementi più complessi come ad esempio le matrici...Vediamo qualche esempio:

Comando	Risulato
`$\mathbb{C}$`	$\mathbb{C}$
`${a^ 2}$`	a^2
`${a_2}$`	a_2
`$\Omega$`	Ω
`$\theta$`	θ
`$\cdot$`	$\cdot$
`$\leq$`	$\leq$
`$\in$`	$\in$
`$\neq$`	$\neq$
`$\sin$`	$\sin$
`$\cos$`	$\cos$
`$\sqrt{400}$`	$\sqrt{400}$
`$\frac{3}{2}$`	$\frac{3}{2}$

Segue l'esempio di una matrice:

```
${\mathcal A} = \left(
\begin{array}{ccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13}\\
a_{21} & a_{22} & a_{23}\\
a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{array}
\right)$
```

Produce:

$${\mathcal A} = \left(
\begin{array}{ccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13}\\
a_{21} & a_{22} & a_{23}\\
a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{array}
\right)$$

Appendice B

Gli stampati della presentazione

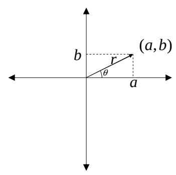
Segue una selezione degli stampati della presentazione. E' possibile constatare che le diapositive presentano tutte lo stesso stile. Il testo e le formule matematiche sono stati inseriti senza vincoli di posizione. Il testo è stato inserito modificando, all'occorrenza, il tipo e la dimensione dei caratteri, il colore, i formati e così via. Sono stati impiegati elenchi puntati. Le formule matematiche sono composte da numeri e simboli e sono impaginate correttamente. Sono presenti figure e elementi grafici.

Quaternioni e
Numeri Complessi

Giuliana Figna

Numeri Complessi

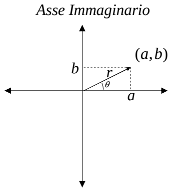
- I numeri complessi possono essere pensati come punti del "piano complesso". Consideriamo *a + bi:*



$$r = |a + b\boldsymbol{i}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\theta = \arctan \frac{b}{a}$$

Complesso in Coordinate Polari

- Si usa anche la rappresentazione di un complesso $a+bi$ in coordinate polari.



Dal T. di Pitagora :
$a = r\cos(\theta)$
$b = r\sin(\theta)$

Vediamo il complesso in forma polare
e di seguito anche in forma esponenziale:

$$a + bi = r(\cos(\theta) + \sin(\theta)\boldsymbol{i}) = re^{\theta i}$$

Numeri Complessi e Rotazioni

- Dato un punto (x,y), ruotare questo punto attorno all'origine di un angolo θ

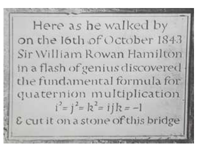
$$[x', y'] = [x, y]\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$x' + y'\boldsymbol{i} = (x\cos(\theta) - y\sin(\theta)) + (x\sin(\theta) + y\cos(\theta))\boldsymbol{i} =$$
$$= (x + y\boldsymbol{i})(\cos(\theta) + \sin(\theta)\boldsymbol{i})$$

Eseguire questa moltiplicazione
equivale a ruotare!!!

Quaternioni – Storia

- Hamilton cercò di estendere i numeri complessi da 2D a 3D …impossibile
- Nel 1843 Hamilton scoprì la generalizzazione al 4D e la scrisse su una spalla di un ponte a Dublino
- Una parte reale e 3 parti complesse



Quaternioni

I quaternione possono essere visti come un'estensione dei numeri complessi:

$q = (s, \boldsymbol{v})$

- s è uno scalare reale,
- $\boldsymbol{v}$ è la parte immaginaria,
  si tratta di un vettore a tre componenti complesse.

Possiamo denotare un quaternione q anche nel modo seguente:

$q = s + a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$

dove a, b, c sono coefficienti reali.

Lo stesso quaternione si può denotare attraverso la quadrupla di reali: (s, a, b, c)

Quaternioni

I quaternione possono essere visti come un'estensione dei numeri complessi:

$q = (s, \boldsymbol{v})$

- s è uno scalare reale,
- $\boldsymbol{v}$ è la parte immaginaria,
  si tratta di un vettore a tre componenti complesse.

Possiamo denotare un quaternione q anche nel modo seguente:

$q = s + a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$

dove a, b, c sono coefficienti reali.

Lo stesso quaternione si può denotare attraverso la quadrupla di reali: (s, a, b, c)

1

Quaternioni

L'unità immaginaria dei numeri complessi gode della seguente proprietà: $i^2 = -1$

Generalizzando questa proprietà agli elementi i, j, k otteniamo:

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1$$

Il prodotto tra ***i, j, k,*** gode della stesse proprietà del prodotto fra i versori degli assi coordinati di un sistema di riferimento destrorso:

$$\boldsymbol{ij}=\boldsymbol{k} \quad \boldsymbol{ji}=-\boldsymbol{k} \quad \boldsymbol{jk}=\boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{kj}=-\boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{ki}=\boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{ik}=-\boldsymbol{j}$$

Ne consegue che: $\boldsymbol{ijk} = -1$

2

Quaternioni – Somma e Prodotto Esterno

Dati due quaternioni $q_1 = (s_1, v_1) \quad q_2 = (s_2, v_2)$

si può definire la loro somma:

$$q_1 + q_2 = (s_1 + s_2,\ v_1 + v_2)$$

Si può definire il prodotto di un quaternione per uno scalare a:

$$\alpha q_1 = (\alpha s_1, \alpha v_1)$$

3

Moltiplicazione di quaternioni

Consideriamo due quaternioni:

$$q_1 = (s_1, v_1) \quad q_2 = (s_2, v_2)$$

Il loro prodotto è dato dalla seguente formula che si ottiene applicando le regole algebriche per il prodotto di sommatorie e le regole del prodotto tra ***i***, ***j***, ***k***:

$$q_1 q_2 = (s_1 s_2 - v_1 \cdot v_2,\ s_1 v_2 + s_2 v_1 + v_1 \times v_2)$$

$v_1 \cdot v_2$ Prodotto scalare

$v_1 \times v_2$ Prodotto vettoriale

4

Quaternioni – alcune proprietà

- Alcune proprietà del prodotto:

  $q_1 q_2 \neq q_2 q_1$ Il prodotto non gode della proprietà commutativa

  $q_1(q_2 q_3) = (q_1 q_2) q_3$ Il prodotto è associativo

  Il prodotto è distributivo

- Identità

  $[1, (0,0,0)]$ E' l'elemento neutro moltiplicativo

  $[0, (0,0,0)]$ E' l'elemento neutro additivo

5

Quaternione Coniugato

Dato un quaternione: $q = (s, v)$

si definisce il **quaternione coniugato**: $\overline{q} = (s, -v)$

E il loro prodotto vale:

$$\overline{q}q = (s^2 - v \cdot (-v), sv + s(-v) + v \times v) =$$

$$= s^2 + |v|^2 = |q|^2$$ Cioè modulo di q al quadrato

6

Quaternione Inverso

Dato un quaternione q possiamo chiederci qual è il suo inverso:

Se $q^{-1}q = 1$ Quanto vale $q^{-1} = ?$

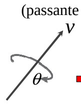
$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$$ Infatti:

$$q^{-1}q = \frac{\bar{q}}{|q|^2}q = \frac{\bar{q}q}{|q|^2} = \frac{|q|^2}{|q|^2} = 1$$

1

Quaternioni e Rotazioni

- Un quaternione **unitario** rappresenta una rotazione 3D:
  Rotazione di un angolo θ attorno ad un asse arbitrario v (passante per l'origine) dove $|v| = 1$



$$q = (s, a, b, c) = (\cos(\theta/2), v\sin(\theta/2))$$

Asse di rotazione ⟶ $v = (x, y, z)$ vettore unitario
Angolo ⟶ θ = radianti

Allora
$s = \cos(\theta/2)$
$a = x \cdot \sin(\theta/2)$
$b = y \cdot \sin(\theta/2)$
$c = z \cdot \sin(\theta/2)$
⟶ **Quaternione unitario** q

2

Quaternioni e Rotazioni

- Per trasformare un quaternione in una rotazione q attorno ad un asse v **unitario** 3D:

$q = (s, a, b, c)$ ⟶

$v = (x, y, z)$ unitario
θ radianti

Allora
$\theta = 2 \cdot \arccos(s)$
$x = a / scale$
$y = b / scale$
$z = c / scale$
$scale = a^2 + b^2 + c^2$

Se scale è 0 ⟶ no rotazione, asse infinito.
Porre l'asse di rotazione a un qualsiasi vettore unitario con angolo di rotazione 0

3

Quaternioni e Rotazioni

- Ruotare un vettore p mediante un quaternione **unitario** q:
  - Rappresentare il vettore p come p=(0,p)
  - Rappresentare la rotazione da applicare con un quaternione **unitario** q
  - Il vettore p' ruotato si ottiene dall'equazione:

$$p' = Rot(p) = q\,p\,q^{-1}$$

4

Quaternioni e Rotazioni

- La rotazione rappresentata da un quaternione attorno all'asse **unitario** v per mezzo di θ è: $(\cos(\theta/2), v\sin(\theta/2))$

- Per ruotare un vettore $\boldsymbol{p}$ di un angolo θ usando il quaternione q si moltiplica il vettore (p,0) per la matrice:

$q = (s, v_x, v_y, v_z)$

$$\begin{pmatrix} 1-2v_y^2-2v_z^2 & 2v_xv_y-2sv_z & 2v_xv_z+2sv_y & 0 \\ 2v_xv_y+2sv_z & 1-2v_x^2-2v_z^2 & 2v_yv_z-2sv_x & 0 \\ 2v_xv_z-2sv_y & 2v_yv_z+2sv_x & 1-2v_x^2-2v_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5

Quaternioni e Rotazioni

- Conversione da matrice generale di rotazione 4x4 a quaternione

$$q = (s, v_x, v_y, v_z)$$

$$s = \frac{1}{2}\sqrt{M_{00} + M_{11} + M_{22} + M_{33}}$$

$$v_x = \frac{M_{21} - M_{12}}{4s}$$

$$v_y = \frac{M_{02} - M_{20}}{4s}$$

$$v_z = \frac{M_{10} - M_{01}}{4s}$$

6

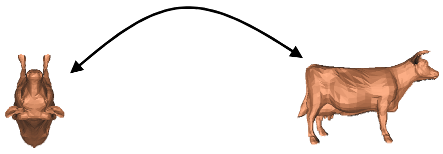
Quaternioni vs. Matrici

- I quaternioni occupano meno spazio (4 numeri contro 9 per le matrici)
- Ruotare un vettore richiede 28 moltiplicazioni usando i quaternioni (contro 9 per le matrici)
- La composizione di rotazioni usando quaternioni $q_1 q_2$ richiede 16 moltiplicazioni contro 27 per le matrici
- I quaternioni tipicamente non hanno accelerazione hardware mentre le matrici l'hanno

1

Quaternioni e Interpolazione

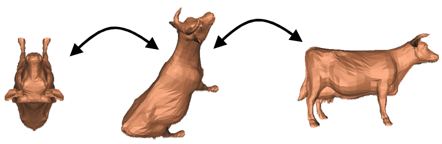
- Date due rotazioni (orientazioni) q_1 e q_2, trova la rotazione intermedia



2

Quaternioni e Interpolazione

- Date due rotazioni (orientazioni) q_1 e q_2, trova la rotazione intermedia



3

Quaternioni e Interpolazione

- Quaternioni unitari rappresentano punti su di una hyper-sfera 4D
- **L**inear int**erp**olation (***lerp***): nel piano interpola la linea tra due orientazioni

$$lerp(q_1, q_2, t) = q(t) = q_1(1-t) + q_2 t$$
$$t \in [0,1]$$

Il moto interpolato non ha velocità uniforme: punti intermedi interpolati linearmente non sono uniformemente spaziati quando proiettati su di una circonferenza

4

Quaternioni e Interpolazione

- Quaternioni unitari rappresentano punti su di una hyper-sfera 4D
- Interpolazioni sulla sfera danno rotazioni che curvano il minimo
- **S**pherical **l**inear int**erp**olation (***slerp***): interpola lungo un arco di cerchio massimo

$$slerp(q_1, q_2, t) = q(t) = \frac{q_1 \sin((1-t)\theta) + q_2 \sin(t\theta)}{\sin(\theta)} \qquad t \in [0,1]$$

dove $\cos^{-1}(q_1 \cdot q_2) = \theta$

Normalizzare per trovare quaternioni unitari

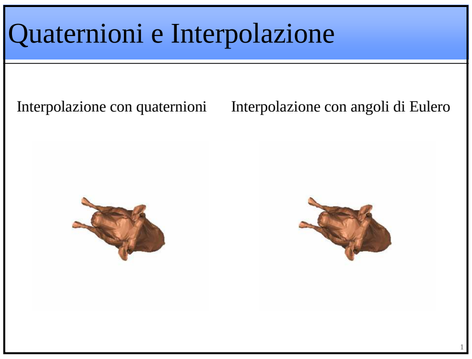
5

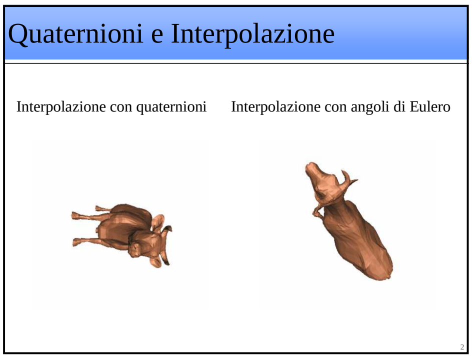
Quaternioni e Interpolazione

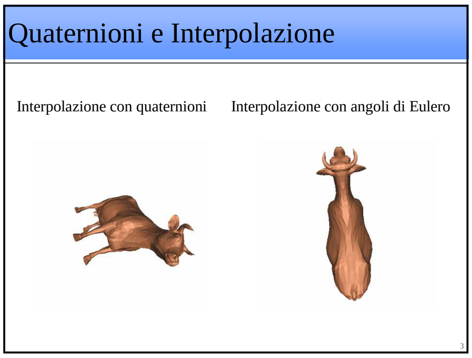
- Quaternioni unitari rappresentano punti su di una hyper-sfera 4D
- Interpolazioni sulla sfera danno rotazioni che curvano il minimo
- Potrebbe essere necessario interpolare tra q_1 e $-q_2$

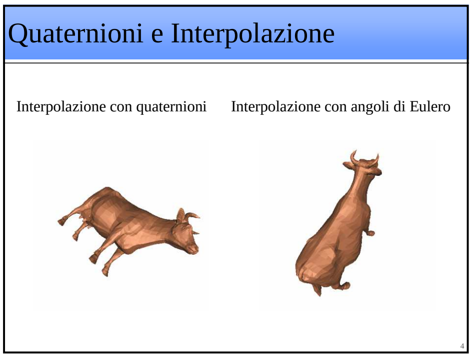
$$q(t) = \frac{q_1 \sin((1-t)\theta) + q_2 \sin(t\theta)}{\sin(\theta)} \quad \text{dove} \quad \cos^{-1}(q_1 \cdot q_2) = \theta$$

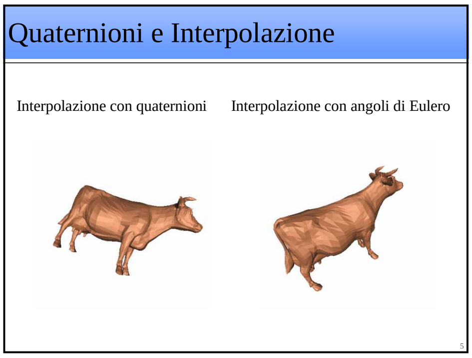
6

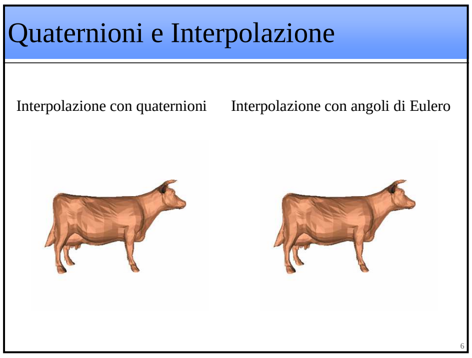

Quaternioni e Interpolazione
Interpolazione con quaternioni
Interpolazione con angoli di Eulero


Quaternioni e Interpolazione
Interpolazione con quaternioni
Interpolazione con angoli di Eulero


Quaternioni e Interpolazione
Interpolazione con quaternioni
Interpolazione con angoli di Eulero


Quaternioni e Interpolazione
Interpolazione con quaternioni
Interpolazione con angoli di Eulero


Quaternioni e Interpolazione
Interpolazione con quaternioni
Interpolazione con angoli di Eulero


Quaternioni e Interpolazione
Interpolazione con quaternioni
Interpolazione con angoli di Eulero

Bibliografia

[1] M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa, *Matematica calcolo infinitesimale e algebra lineare*, seconda edizione, Zanichelli.

[2] Ken Shoemake, *Animating Rotation with Quaternion Curves* Computer Graphics (SIGGRAPH) 19(3):245-254 (july 1985).

[3] Lorenzo Pantieri, Tommaso Gordini *L'arte di scrivere con LaTeX*, www.lorenzopantieri.net, edizione 2012.

[4] MarcBaudoin, *Impara LaTeX! (..e mettilo da parte)*, ftp://ftp.agm-ita.ensta.fr/pub/babafou/

[5] Facchini Rossella, *Guida Inkscape*, www.istitutomajorana.it