

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea in Fisica

Dipartimento di Fisica e Astronomia

# Analisi degli effetti di trascinamento in Relatività Generale

Relatore:  
Prof. Roberto Balbinot

Candidato:  
Luca Papapietro

---

Sessione III  
Anno Accademico 2012-2013



*a Paolo*



# Indice

<b>Abstract</b>	<b>5</b>
<b>Introduzione</b>	<b>7</b>
<b>1 Geodetiche</b>	<b>11</b>
1.1 La connessione affine . . . . .	12
1.2 La derivata covariante . . . . .	13
1.3 Geodetiche e integrali primi . . . . .	15
1.4 Cenni sulle equazioni di campo di Einstein . . . . .	16
<b>2 La metrica di Schwarzschild</b>	<b>19</b>
2.1 Il limite Newtoniano . . . . .	19
2.2 La soluzione di Schwarzschild . . . . .	21
2.3 Moto geodetico . . . . .	22
2.4 Superfici nulle e orizzonte degli eventi . . . . .	23
<b>3 La metrica di Kerr</b>	<b>27</b>
3.1 Trascinamento . . . . .	27
3.2 Il limite statico . . . . .	29
<b>Bibliografia</b>	<b>33</b>



# Abstract

Il presente lavoro si compone di una parte iniziale in cui si introducono i principi alla base della teoria della Relatività Generale, e viene discussa la loro effettiva importanza come elementi fondanti del lavoro di Einstein

Nel **capitolo 1** si sviluppano i principali concetti di geometria differenziale utili alla comprensione dei risultati ottenuti nei capitoli successivi. In particolare viene mostrato un risultato notevole che permette di ricavare gli integrali primi del moto geodetico a partire dalla dipendenza del tensore metrico dalle coordinate utilizzate. Vengono poi brevemente introdotte le Equazioni di campo di Einstein.

Nel **capitolo 2** Viene ricavata la soluzione di Schwarzschild e le quantità conservate nel moto in caduta libera verso una sorgente a simmetria sferica e statica. Viene poi definito il concetto di orizzonte degli eventi.

Infine nel **capitolo 3** viene introdotta la metrica di Kerr, e si suggerisce come questa possa essere indotta da una sorgente massiva rotante. Vengono analizzati gli integrali primi del moto di particelle in caduta libera e da questi viene ricavata l'espressione dell'effetto di trascinamento. Vengono poi introdotto il concetto di limite statico e la definizione di ergosfera, e viene ricavata l'espressione del raggio dell'orizzonte degli eventi.





# Introduzione

La teoria della Relatività Generale nella visione di Einstein si erge su alcuni principi creduti a posteriori più o meno fondamentali. Sicuramente è indiscutibile la centralità del principio di equivalenza che si basa sull'uguaglianza numerica di massa inerziale e gravitazionale, e indubbiamente è necessario che la teoria soddisfi il principio di corrispondenza, ossia che la teoria della Relatività Generale si accordi con le predizioni della Relatività Ristretta in assenza di campi gravitazionali da un lato, e con la teoria della gravitazione newtoniana nei limiti di campi gravitazionali deboli e di velocità non relativistiche dall'altro. Più controversi sono il principio di covarianza generale, e il principio di Mach.

Vediamo più in dettaglio cosa asseriscono i suddetti principi: l'equivalenza fra la massa inerziale, ossia la quantità che misura la resistenza di un corpo a variare il suo stato di moto, e la massa gravitazionale che misura la reazione di un corpo ad un campo gravitazionale o, nella visione attiva misura l'intensità del corpo come sorgente del campo, è nota fin dai tempi di Galileo. Fu Einstein a mettere in luce i risvolti più profondi di tale coincidenza. Infatti tramite il famoso esperimento mentale dell'ascensore viene evidenziato il fatto che è impossibile distinguere la situazione in cui l'ascensore sia accelerato verso l'alto da una forza attiva rispetto alla situazione in cui questo sia posto in quiete in un campo gravitazionale. Una conseguenza ancora più forte del principio discende dal fatto che il moto di una particella di prova in un campo gravitazionale è indipendente dalla sua massa e dalla sua composizione (è ciò è già evidente dal famoso esperimento di Pisa svolto da Galilei). Ciò permette di trovare un sistema di riferimento comovente con la particella in caduta libera nel campo che localmente, ossia in regioni in cui vi sia una

variazione di campo talmente piccola da non essere osservabile, si comporta come inerziale. In tali sistemi di riferimento le particelle di prova si muovono perciò di moto rettilineo uniforme.

Il principio di covarianza generale è l'espressione matematica di un altro principio che guidò Einstein alla formulazione della teoria, ossia il principio di Relatività Generale secondo cui *tutti gli osservatori sono equivalenti*. L'importanza di tale principio è evidente in quanto in uno spazio-tempo curvo, ossia con una metrica non piatta non esiste un sistema globalmente inerziale in cui poter formulare agevolmente le leggi fisiche come invece accade nella teoria della Relatività Speciale. Dunque le leggi fisiche devono valere allo stesso modo per ogni osservatore, e quindi preservarsi nella forma. Tale condizione è verificata se le equazioni della fisica assumono forma tensoriale, ed è proprio questo ciò che il principio di covarianza generale richiede. Alcuni autori sostengono che tale principio sia privo di significato poichè si è scoperto (ma solo dopo l'avvento della Relatività Generale), che è possibile formulare qualsiasi teoria fisica in forma covariante.

Per ultimo discutiamo brevemente il principio forse più controverso, ossia il principio di Mach. La meccanica Newtoniana riconosce sistemi di riferimento privilegiati in cui formulare le leggi della natura, ossia i sistemi di riferimento inerziali, in cui un corpo se non soggetto all'azione di forze esterne permane in uno stato di moto rettilineo uniforme. La necessità di introdurre tali sistemi preferenziali risiede nel fatto che è possibile distinguere una seconda classe di sistemi, detti non inerziali nei quali le leggi della fisica modificano la loro struttura (si ha la comparsa delle così dette forze fittizie o inerziali) e la peculiarità di tali sistemi ed di trovarsi compiere un moto accelerato rispetto alla prima classe dei sistema inerziali. Newton pensò dunque, dato che è possibile riconoscere un sistema accelerato per la presenza di forze fittizie non associabili alla presenza di altri corpi, di supporre l'esistenza di un entità metafisica, lo spazio assoluto, rispetto al quale i sistemi potevano accelerare o meno. Si notò bene presto che un modo empirico per determinare lo stato di un sistema era quello di analizzare la sua condizione di moto rispetto alle stelle fisse. Sistemi in quiete rispetto le stelle fisse si comportavano come si-

stemi di riferimento inerziali, ma non i stemi acceleranti, o posti in rotazione rispetto la volta celeste. Un classico esempio è dato dal pendolo di Foucault. Supponiamo di porre tale pendolo al Polo Nord (per ottenere una descrizione più immediata), noteremo che il suo piano di oscillazione comincerà a precedere (e sulla terra il fenomeno verrà interpretato come espressione della forza di Coriolis), compiendo un intero giro in un giorno, mentre guardando il cielo noteremo che il piano rimane fisso rispetto gli astri. Così, asserirebbe un sostenitore di Newton, abbiamo dimostrato che la terra compie un moto rotatorio rispetto allo spazio assoluto. Dunque per Newton le stelle fisse erano un buon indicatore per determinare i moti accelerati. Mach [1,2] invece sosteneva che fosse impossibile identificare un moto di un oggetto se non in relazione al moto di un altro oggetto, ritenendo inaccettabile l'idea che in uno spazio peraltro vuoto fosse possibile asserire che un corpo fosse o meno in moto, ritenendo totalmente superflua la nozione di spazio assoluto. Egli individuò nella coincidenza spazio assoluto-stelle fisse una ridondanza concettuale. Le stelle fisse non sono meri oggetti che permettono di identificare lo stato di quiete rispetto al quale è possibile definire un sistema di riferimento inerziale, ma sono le stesse responsabili delle forze inerziali che emergono quando un sistema accelera rispetto ad esse. Dunque le forze apparenti e la precessione del pendolo di Foucault sono effetti dovuti all'immensa quantità di materia presente nell'universo che con leggi non meglio definite è in grado di intervenire sui corpi terrestri causando la comparsa delle forze inerziali. Un esempio chiarirà ulteriormente la diversità di vedute dei due fisici. Nel famoso esperimento del secchio di Newton l'acqua si incurva per via delle forze centrifughe e questo è un chiaro indicatore del fatto che il secchio stia ruotando rispetto allo spazio assoluto. Se il secchio fosse lasciato fermo e fosse la volta celeste a ruotare non dovrebbe notarsi nessun effetto. Mach invece sostenne, poichè ogni moto è relativo, che i risultati dell'esperimento dovrebbero essere i medesimi. Ciò che affascino Einstein del lavoro di Mach, tanto da coniare egli stesso il termine *principio di Mach* fu l'idea secondo cui l'inerzia di un corpo è il risultato dell'interazione di questo con il resto dell'universo. Rimane comunque poco chiaro il ruolo che giocò per Einstein il principio di Mach nella formulazione della teoria, anche

per il fatto che si basa su una definizione di tale principio non rigorosa ed ambigua. Vi sono addirittura scuole di pensiero che ritengono la Relatività anti-machiana. L'argomento principale di questa tesi è quello di mettere in evidenza i fenomeni di trascinamento dovuti a corpi massivi rotanti. Vi è una vasta letteratura sul fatto che questi fenomeni possano essere considerati espressione del principio di Mach, ad esempio in [2] è mostrato come la rotazione di un guscio massivo può essere in grado di trascinare col suo moto il piano di precessione del pendolo di Foucault, e di come sia possibile identificare la presenza di tale guscio con le stelle fisse. Tuttavia l'argomento è molto semplificato e molte sottigliezze non vengono prese in considerazione. Dunque l'analisi degli effetti di trascinamento discussa in questa tesi verrà affrontata da un punto di vista puramente fenomenologico e non si discuterà la relazione presunta fra questi fenomeni e la validità del principio di Mach come elemento necessario all'interno della teoria.

# Capitolo 1

## Geodetiche

Ribadiamo che Einstein intuì che come conseguenza del principio di equivalenza, un osservatore in caduta libera in un campo gravitazionale omogeneo, non ha modo di rilevare la presenza del campo stesso. Esso assieme alle sue masse di prova con cui vorrà condurre un esperimento, risponderanno al campo con la medesima accelerazione. Prendiamo un sistema di  $N$  particelle soggette a interazioni di vario tipo  $\vec{F}(\vec{x}_N - \vec{x}_M)$  e ad un campo gravitazionale esterno  $\vec{g}$  costante. le equazioni del moto saranno:

$$m_N \frac{d^2 \vec{x}_n}{dt^2} = m_N \vec{g} + \sum_M \vec{F}(\vec{x}_N - \vec{x}_M)$$

applichiamo ora una trasformazione di coordinate

$$\vec{x}' = \vec{x} - 1/2 \vec{g} t^2 \quad t' = t$$

in modo da ottenere

$$m_N \frac{d^2 \vec{x}'_n}{dt'^2} = \sum_M \vec{F}(\vec{x}'_N - \vec{x}'_M)$$

dunque il primo osservatore a cui sono legate le coordinate  $(x,t)$  e il secondo  $(x',t')$  non noteranno alcuna differenza nelle leggi della meccanica se non per il fatto che il primo può affermare di constatare la presenza di un campo

gravitazionale, ma non il secondo. In generale la dipendenza di  $\vec{g}$  da  $\vec{x}$  o  $t$  invaliderebbe la dimostrazione precedente. Si può però puntualmente individuare un sistema locale di coordinate comovente con un corpo di prova la cui estensione sia molto minore rispetto alle dimensioni di variazione del campo. In tale sistema possiamo sempre localmente eliminare gli effetti del campo e formulare le leggi della natura come in un sistema non accelerato. Questo sarà il punto di partenza nel prossimo paragrafo che ci porterà a enunciare le equazioni del moto in presenza di campo gravitazionale in Relatività Generale.

## 1.1 La connessione affine

In accordo con il principio di equivalenza esiste in ogni punto un sistema di riferimento localmente inerziale *in caduta libera* in cui l'equazione del moto di una particella di prova soggetta unicamente all'azione di un campo gravitazionale assume la forma[3]

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad (1.1)$$

dove  $d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta}d\xi^\alpha d\xi^\beta$ . dove  $\eta_{\alpha\beta}$  è la metrica di Minkowsky

Ora scelto un generico sistema di coordinate globali  $x^\mu$ , le coordinate localmente inerziali  $\xi^\alpha$  sono funzioni delle nuove e la (1.1) diventa

$$0 = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \xi^\alpha dx^\mu}{\partial x^\mu d\tau} \right)$$

da cui otteniamo le equazioni del moto

$$0 = \frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (1.2)$$

dove  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  è la connessione affine, definita come

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda := \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad (1.3)$$

In tale sistema possiamo esprimere il tempo proprio come

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.4)$$

dove  $g_{\mu\nu}$  è il tensore metrico definito dalla relazione

$$g_{\mu\nu} := \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \quad (1.5)$$

Lo spazio tempo appare dunque curvo nelle coordinate globali  $x^\alpha$ . Notando che  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  e  $g_{\mu\nu}$  sono simmetrici per scambio degli indici  $\mu$  e  $\nu$  si ottiene mediante un calcolo esplicito facendo uso della (1.3) e della (1.5)

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right) \quad (1.6)$$

D'ora in poi compattificheremo la notazione indicando l'operazione di derivazione parziale con il simbolo  $(,)$  ottenendo:

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} (g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\lambda,\nu}) \quad (1.7)$$

## 1.2 La derivata covariante

In una varietà curva come lo spaziotempo in presenza di gravità, la derivazione di un tensore non porta generalmente ad ottenere un nuovo tensore. Ad esempio un vettore controvariante  $V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu$  se derivato da

$$\frac{\partial V'^\mu}{\partial x'^\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\rho} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} V^\nu$$

Qui l'ultimo termine distrugge il comportamento tensoriale. Si verifica un comportamento analogo anche per la connessione affine. A partire dalla derivata di un vettore e dalla connessione affine è però possibile costruire un oggetto dal comportamento tensoriale definito come *derivata covariante* nel modo seguente:

$$V^\mu_{;\lambda} := \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\lambda\kappa}^\mu V^\kappa \quad (1.8)$$

che si trasforma come un tensore a due indici

$$V'^{\mu}_{\ ;\lambda} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} V^{\nu}_{\ ;\rho}$$

Si può estendere la definizione a tensori di qualsiasi rango. Ad esempio per un vettore covariante vale:

$$V_{\mu;\nu} := \frac{\partial V_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\lambda}_{\ \mu\nu} V^{\lambda} \quad (1.9)$$

Le proprietà algebriche della derivata covariante sono analoghe a quelle dell'ordinaria operazione di derivazione (linearità, regola di Leibnitz), in tal modo abbiamo definito un buon operatore differenziale dalle proprietà tensoriali. Un risultato importante riguarda il fatto che la derivata covariante del tensore metrico è nulla. Infatti in un sistema di coordinate localmente inerziale la connessione affine e le derivate ordinarie del tensore metrico (ossia i termini di cui è composta la derivata covariante della metrica) sono nulle. Un tensore nullo in un sistema di coordinate dev'essere nullo in ogni altro sistema e questo permette di affermare che:

$$g_{\mu\nu;\lambda} = 0 \quad (1.10)$$

$$g^{\mu\nu}_{\ ;\lambda} = 0 \quad (1.11)$$

Ora abbiamo bisogno di definire un'operazione di derivazione per tensori definiti non necessariamente su tutto lo spazio tempo, ma lungo una curva  $x^{\mu}(\tau)$ . Il procedimento è simile a quello visto sopra, e si riporta immediatamente la definizione di derivata covariante lungo una curva per vettori controvarianti:

$$\frac{DA^{\mu}}{D\tau} := \frac{dA^{\mu}}{d\tau} + \Gamma^{\mu}_{\ \nu\lambda} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} A^{\nu} = A^{\mu}_{\ ;\nu} U^{\nu} \quad (1.12)$$

e covarianti:

$$\frac{DB_{\mu}}{D\tau} := \frac{dB_{\mu}}{d\tau} - \Gamma^{\lambda}_{\ \mu\nu} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} B_{\lambda} = B_{\mu;\nu} U^{\nu} \quad (1.13)$$

Infatti possiamo scrivere

$$\frac{dA^{\mu}}{d\tau} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{dx^{\alpha}}{d\tau}$$



dove  $U^\nu$  è il vettore tangente alla traiettoria.

### 1.3 Geodetiche e integrali primi

Si dice che un vettore è trasportato parallelamente lungo una curva quando vale la condizione

$$\frac{DA^\mu}{Ds} = 0 \quad (1.14)$$

Infatti ponendoci in un sistema di riferimento localmente inerziale in  $x(s)$  il vettore associato non cambia al variare di  $s$  in quanto la connessione affine si annulla e così pure  $\frac{dA^\mu}{ds}$ . Una geodetica è una curva in cui il vettore tangente alla curva è trasportato parallelamente in se stesso. La (1.2) ci dice appunto che il moto di particelle di prova sottoposte all'azione del solo campo gravitazionale si muovono lungo geodetiche nello spazio-tempo. Questa espressione può essere riespressa infatti in funzione della quadrivelocità  $U^\mu$ , che è tangente alla traiettoria della particella, come

$$\frac{DU^\mu}{Ds} = 0$$

Vediamo ora come è possibile identificare le quantità conservate nel moto di una particella lungo una geodetica, ossia in caduta libera in un campo gravitazionale. Abbiamo:

$$\frac{DU^\mu}{Ds} = 0 \Rightarrow g_{\lambda\mu} \frac{DU^\mu}{Ds} = 0 \Rightarrow \frac{DU_\lambda}{Ds} = 0$$

dove è stata usata la proprietà (1.10). Ora,

$$\frac{DU_\lambda}{Ds} = \left( \frac{\partial U_\lambda}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\lambda\mu}^\nu U_\nu \right) U^\mu$$

e

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\nu U_\nu U^\mu = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} (g_{\lambda\sigma,\mu} + g_{\mu\sigma,\lambda} - g_{\lambda\mu,\sigma}) U^\sigma U^\mu$$

Il prodotto  $U^\sigma U^\mu$  è simmetrico, mentre il primo e il terzo termine dentro la parentesi sono presi assieme, antisimmetrici rispetto agli indici  $\mu, \sigma$ , perciò si

cancellano, e sopravvive solo il termine di mezzo. Si ha perciò infine:

$$\frac{DU_\lambda}{Ds} = \frac{1}{2}g_{\mu\sigma,\lambda}U^\sigma U^\mu \quad (1.15)$$

Tale risultato è notevole. Infatti se in un sistema di riferimento le componenti del tensore metrico non dipendono da  $x^\lambda$  per  $\lambda$  fissato, allora  $U_\lambda$  è una costante lungo la traiettoria della particella.

## 1.4 Cenni sulle equazioni di campo di Einstein

Se, come risulta chiaro dalla (1.2) la connessione affine gioca il ruolo di una forza che devia la traiettoria di una particella dal suo moto inerziale, la metrica funge da potenziale in quanto la prima dipende direttamente dalle derivate dell'ultima. Ci si chiede ora qual'è la quantità tensoriale che identifica la presenza di un campo gravitazionale. Chiaramente si vuole che questa dipenda dalle derivate prime e seconde della metrica e che sia nulla indipendentemente dalla scelta delle coordinate in assenza di campo gravitazionale. Un risultato importante della geometria differenziale sancisce l'esistenza e l'unicità di tale tensore detto *tensore di Riemann*. Esso è definito come segue:

$$R_{\mu\nu\kappa}^\lambda := \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\eta\Gamma_{\kappa\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu\kappa}^\eta\Gamma_{\nu\eta}^\lambda \quad (1.16)$$

e vale un importante teorema:

*condizione necessaria e sufficiente perchè una metrica sia piatta è che il suo tensore di Riemann si annulli*

Da questo tensore si possono ottenere le sue contrazioni, il tensore di Ricci  $R_{\alpha\beta}$  e lo scalare di Ricci  $R$  definiti come segue:

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\mu\beta}^\mu, \quad R = R_\alpha^\alpha \quad (1.17)$$

Si mostra facilmente che il tensore di Ricci è simmetrico. Vale inoltre un importante proprietà differenziale data dalla combinazione dei suddetti

tensori, nota come *identità di Bianchi*

$$(R^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu R)_{;\mu} = 0 \quad (1.18)$$

Einstein identificò la sorgente del campo gravitazionale con il tensore energia-impulso, il quale è un tensore di rango 2 per cui vale la relazione  $T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$  che esprime la conservazione dell'energia-momento. Di nuovo, è possibile costruire a partire dal tensore di Riemann e dalle sue contrazioni un tensore che sia compatibile con le proprietà del tensore energia-impulso. Si arriva alla formulazione finale delle equazioni di campo

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta} \quad (1.19)$$

dove

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} \quad (1.20)$$

e per cui vale  $G^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$  e lo si verifica immediatamente sfruttando l'identità di Bianchi. Nella regione in cui non sono presenti sorgenti  $T^{\alpha\beta}$  è nullo e si ottengono facilmente le equazioni di Einstein nel vuoto

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (1.21)$$



# Capitolo 2

## La metrica di Schwarzschild

### 2.1 Il limite Newtoniano

Consideriamo ora una particella che si muova a velocità non relativistiche ( $v \ll c$ ) in un debole campo gravitazionale stazionario. Dovrebbe poter essere possibile dall'equazione della geodetiche recuperare la forma newtoniana delle equazioni del moto in un campo gravitazionale. In tale contesto è lecito trascurare il contributo delle componenti spaziali della quadrivelocità perciò  $U^\mu \simeq (U^0, \vec{0})$  La (1.2) perciò può essere riscritta come

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu U^0 U^0 = 0 \quad (2.1)$$

cioè

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0 \quad (2.2)$$

Poichè il campo è stazionario, riesprimendo  $\Gamma$  tramite la (1.6) si ottiene

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu} \quad (2.3)$$

Sempre per la stazionarietà, (usando indici romani per le componenti spaziali):

$$\Gamma_{00}^0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0 \\ \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = -\Gamma_{00}^i \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \end{cases} \quad (2.4)$$

Infine poichè il campo è debole possiamo adottare un sistema di coordinate in cui

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \quad (2.5)$$

dove  $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$ .

perciò al primo ordine in  $h_{\alpha\beta}$  si ha

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2}\eta^{il}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^l} \quad (2.6)$$

che dalla (2.2) ci porta a

$$\frac{d^2\vec{x}}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\vec{\nabla}h_{00} \quad (2.7)$$

Dalla (2.4) si nota che  $\frac{dt}{d\tau}$  è costante. Ciò permette di scrivere

$$\frac{d^2\vec{x}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\frac{dt}{d\tau}\right)$$

con ulteriore calcolo:

$$\frac{d^2\vec{x}}{d\tau} = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\frac{d^2\vec{x}}{dt}$$

così da ottenere dalla (2.7):

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}h_{00} \quad (2.8)$$

e il corrispondente risultato newtoniano è

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla}\Phi \quad (2.9)$$

dove  $\Phi = -\frac{GM}{r}$  concludiamo infine che

$$h_{00} = -2\Phi + \text{cost.} \quad (2.10)$$

ma poichè all'infinito il sistema di coordinate è Minkowskiano  $h_{00}$  deve annullarsi a grandi distanze perciò possiamo porre la costante pari a zero. Detto

questo otteniamo come risultato finale per un campo debole

$$g_{00} = -(1 + 2\Phi) \quad (2.11)$$

Verifichiamo ora se nel caso del sistema solare l'ipotesi di campo debole è una buona approssimazione. In unita del S.I.  $h_{00}$  guadagna un fattore  $c^2$ . Siano  $m_{\odot}$ ,  $R_{\odot}$  massa e raggio soalri, affinché la condizione di campo debole sia valida:

$$\frac{2GM_{\odot}}{c^2} \ll R_{\odot}$$

quindi

$$\frac{2GM_{\odot}}{c^2} = \frac{2 \times 6,67 \cdot 10^{-11} 1,9871 \cdot 10^{30}}{(3 \cdot 10^8)^2} \simeq 3km$$

decisamente trascurabile rispetto al valore  $R_{\odot} = 6,968 \times 10^5 km$

## 2.2 La soluzione di Schwarzschild

Considerando una sorgente di campo a simmetria sferica e statica, ci si pone il problema di identificare la metrica indotta da tale sorgente nello spazio vuoto, all'esterno della sorgente. Prima di tutto si può richiedere che non dipenda esplicitamente dal tempo, e in seconda analisi è sensato aspettarsi che non vari per rotazioni attorno ad assi con origine nel centro della sorgente. La prima richiesta però non è necessaria in quanto esiste un risultato noto come il *teorema di Birckoff*[1] che afferma che qualsiasi soluzione delle equazioni di campo a simmetria sferica, è necessariamente statica. Questo ci permette di scrivere la metrica in forma diagonale

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.12)$$

Notiamo che questa tende all'usuale metrica di Minkowski in coordinate polari quando i coefficienti A e B tendono a 1, ed è ragionevole supporre che ciò accada a grandi distanze dall'origine dove l'intensita del campo è minima. Dunque la coordinata temporale coincide con il tempo proprio di un osservatore fermo posto a grandi distanze dalla sorgente. Il significato

della coordinata radiale è manifesto se si considera che ogni superficie con  $r$  e  $t$  costanti, identifica una due-sfera con circonferenza  $2\pi r$  ed area  $4\pi r^2$ , anche se non rappresenta la distanza di tale superficie dall'origine data invece da

$$\int_0^r \sqrt{B(r')} dr'$$

Detto questo risolvendo le equazioni di campo nello spazio vuoto (1.21) troviamo le seguenti condizioni sui coefficienti:

$$A(r)B(r) = cost.$$

$$rB(r) = r + cost$$

imponendo come condizione al contorno che per  $r \rightarrow \infty$  il tensore metrico deve tendere al tensore di Minkowski otteniamo

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = 1$$

e ricordando che a grandi distanze dalla sorgente, per il limite di campo debole la componente  $g_{tt} = B$  deve tendere a  $-1 - 2\Phi$  otteniamo:

$$A(r) = 1/B(r)$$

$$B(r) = \left[1 - \frac{2MG}{r}\right]$$

Ricaviamo così l'elemento di linea di Schwarzschild:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2MG}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.13)$$

## 2.3 Moto geodetico

Il risultato ottenuto nella (1.15) ci permette di asserire considerando il moto geodetico nella metrica di Schwarzschild, che la componente  $U_\phi$  si conserva in quanto la metrica non dipende esplicitamente da  $\phi$ , e si può affermare la stessa cosa per la componente temporale  $U_t$ . Ragionando in termini



di componenti del quadrimomento (ottenute moltiplicando per la massa a riposo della particella le componenti della quadrivelocità) otteniamo per una particella massiva (un ragionamento analogo può essere fatto per i fotoni con alcuni accorgimenti):

$$E := -p_0/m = U_t \quad L := p_\phi/m = U_\phi$$

Otteniamo poi le componenti controvarianti del quadrimomento:

$$p^t = g^{tt}p_t = m\left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1}E = \frac{dt}{d\tau}$$

$$p^\phi = g^{\phi\phi}p_\phi = m\frac{1}{r^2}L = \frac{d\phi}{d\tau}$$

La velocità angolare della particella assume la forma

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega(r, \theta) = \frac{L}{r^2}\left(1 - \frac{2MG}{r}\right)$$

Una particella che dall'infinito cade radialmente verso la sorgente, ossia con momento angolare  $L = 0$ , permane in questo moto radiale indefinitamente senza acquistare alcuna componente angolare della velocità, cosa che come vedremo accade per particelle in caduta libera verso sorgenti rotanti.

## 2.4 Superfici nulle e orizzonte degli eventi

Se la sorgente è abbastanza densa, abbiamo quello che si può definire un buco nero di Schwarzschild. In questo caso esiste una superficie limite definita *orizzonte degli eventi* di raggio maggiore rispetto a quello che delimita la materia di cui è composta la sorgente oltre la quale è impossibile invertire il moto di caduta libera e sottrarsi all'attrazione gravitazionale del buco nero. In uno spazio-tempo piano come quello di Minkowski i coni di luce diretti verso il futuro identificano delle ipersuperfici  $\Phi : t - r = 0$  dove  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ . La particolarità di tali superfici è che il modulo del vettore normale

a queste è nullo, infatti

$$\partial_\mu(t-r) = n_\mu = \left(-1, \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}, \right) \Rightarrow n^\mu n_\mu = 0$$

Ora, possiamo identificare il raggio dell'orizzonte degli eventi con il valore per cui la superficie  $r=\text{costante}$  ha normale nulla. Sia data la famiglia di superfici[4]

$$\Phi : r - \alpha = 0$$

dove  $\alpha$  è costante. Troviamo il vettore normale

$$\partial_\mu \Phi(r) = (0, 1, 0, 0) = n_\mu$$

Richiediamo che si annulli perciò:

$$n^\mu n_\mu = 0 \Leftrightarrow g^{\mu\nu} n_\nu n_\mu \Leftrightarrow g^{rr} = 0$$

e perciò

$$r = 2MG \tag{2.14}$$

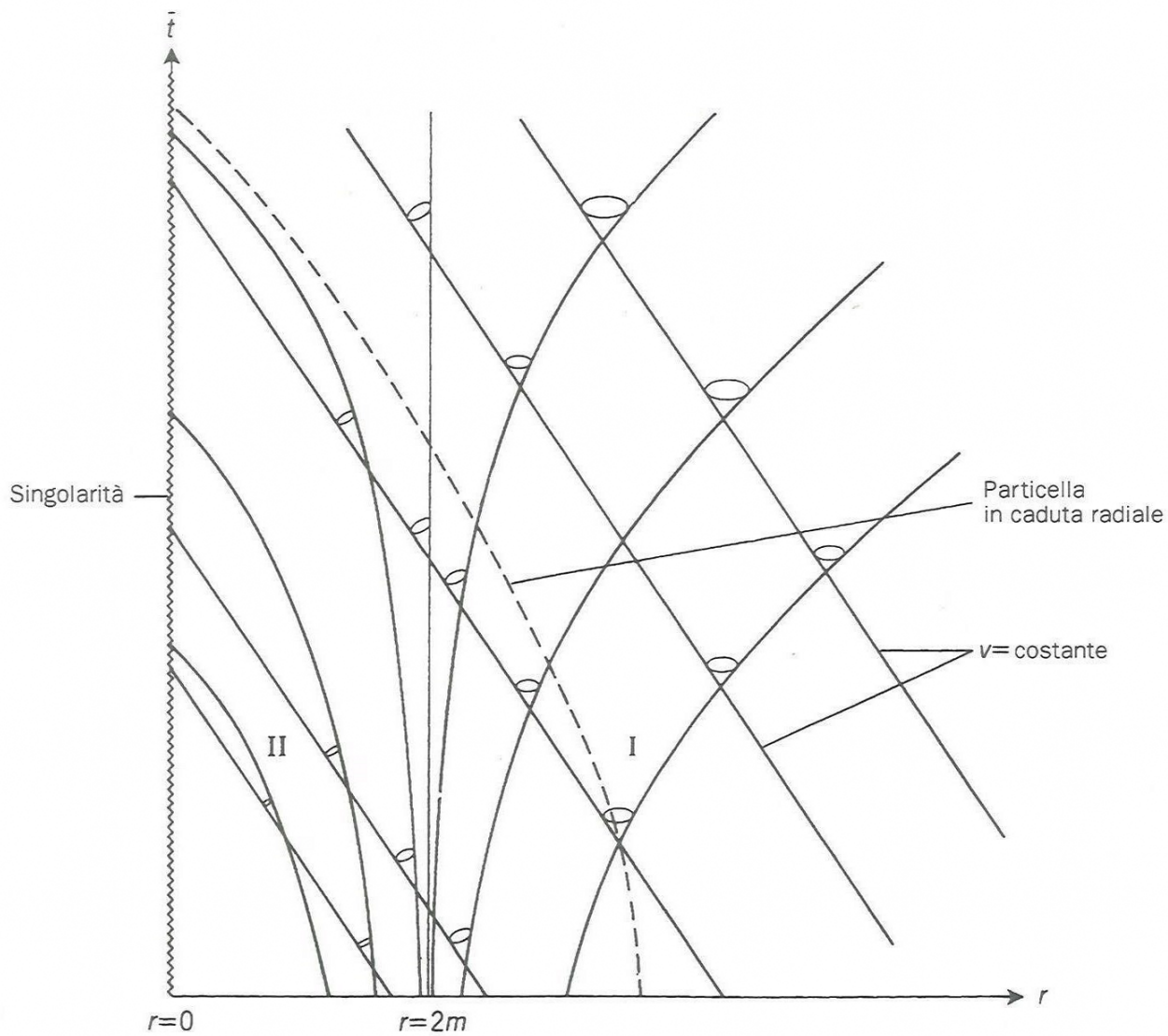


Figura 2.1: Coni di luce in prossimità dell'orizzonte degli eventi.



# Capitolo 3

## La metrica di Kerr

La metrica di Kerr descrive la geometria dello spazio tempo attorno a corpi massivi rotanti. Si tratta di una soluzione esatta delle equazioni di campo di Einstein le quali sono note per il loro carattere altamente non lineare. Per questo fatto l'esatta soluzione per un corpo non carico rotante rimase sconosciuta fino al 1963 [5]. Le previsioni che si ottengono dallo studio della struttura dello spaziotempo indotta da questa metrica hanno messo in risalto i fenomeni di trascinamento. La materia e tutto lo spazio-tempo vengono trascinati dal moto rotatorio della sorgente massiva come, volendo fare un analogia, una pallina di sughero che galleggia nell'acqua dello scarico di un lavandino.

### 3.1 Trascinamento

La metrica di Kerr è definita a partire dall'elemento di linea

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} dt^2 - 2a \frac{2Mr \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi \\ & + \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\rho^2} \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

dove

$$\Delta := r^2 - 2Mr + a^2$$

$$\rho^2 := r^2 + a^2 \cos^2 \theta$$

Notiamo che tale metrica è stazionaria e a simmetria assiale ed è invariante per l'inversione simultanea di  $t \rightarrow -t$  e  $\phi \rightarrow -\phi$  il che suggerisce che possa essere generata da una sorgente rotante. L'invarianza si ottiene pure per inversione simultanea di  $t \rightarrow -t$  e  $t \rightarrow -a$  da cui si deduce che  $a$  specifichi il verso di rotazione della sorgente. Le coordinate in cui è espressa la metrica sono dette di Boyer-Lindquist;  $\phi$  è l'angolo attorno all'asse di simmetria e  $t$  è la coordinata temporale in cui tutto è stazionario. Le coordinate  $r$  e  $\theta$  non sono così immediatamente associate ad una definizione geometrica. La dimostrazione rigorosa del fatto che un corpo massivo rotante generi tale metrica è estremamente tecnica ed esula dai nostri scopi. Ci limiteremo invece ad analizzare gli integrali primi del moto per particelle in caduta libera verso la sorgente. La peculiarità dell'elemento di linea e la presenza di un elemento non diagonale nella metrica  $g_{t\phi}$ . Di nuovo il risultato ottenuto nella (1.15) ci permette di asserire che la componente  $p_\phi$  si conserva in quanto la metrica non dipende esplicitamente da  $\phi$ , e così  $p_t$ . Ricaviamo le componenti controvarianti

$$p^\phi = g^{\phi\alpha} p_\alpha = g^{\phi\phi} p_\phi + g^{\phi t} p_t, \quad (3.2)$$

$$p^t = g^{t\alpha} p_\alpha = g^{tt} p_t + g^{t\phi} p_\phi, \quad (3.3)$$

consideriamo ora una particella con momento angolare nullo  $p_\phi = 0$ . Utilizzando la definizione di momento relativistico per particelle con massa non nulla:

$$p^t = m dt/d\tau$$

$$p^\phi = m d\phi/d\tau$$

si trova

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{p^\phi}{p^t} = \frac{g^{\phi t}}{g^{tt}} := \omega(r, \theta) \quad (3.4)$$

Ci si presenta un risultato notevole, ossia che una particella che all'infinito viene lasciata cadere dritta verso la sorgente ( $p_\phi = 0$ ) viene trascinata dall'influenza della gravità acquisendo una velocità angolare che come vedremo seguirà il senso di rotazione della sorgente. Riscriviamo il generico elemento

di linea

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2$$

per ottenere gli elementi inversi.

Il primo blocco è diagonale e si ha:

$$g^{rr} = \frac{1}{g_{rr}} = \Delta\rho^{-2}, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{g_{\theta\theta}} = \rho^{-2}$$

Bisogna poi invertire la matrice

$$\begin{pmatrix} g_{tt} & g_{t\phi} \\ g_{t\phi} & g_{\phi\phi} \end{pmatrix}$$

Detto  $D$  il determinante, si ricava l'inversa:

$$\frac{1}{D} \begin{pmatrix} g_{\phi\phi} & -g_{t\phi} \\ -g_{t\phi} & g_{tt} \end{pmatrix}$$

e infine possiamo ricavare una formula esplicita per il trascinamento

$$\omega = \frac{g^{\phi t}}{g^{tt}} = \frac{-g_{t\phi}/D}{g_{\phi\phi}/D} = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \quad (3.5)$$

e dunque dalla (3.1) otteniamo [6]

$$\omega = \frac{2Mra}{(r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta \sin^2 \theta} \quad (3.6)$$

Il denominatore è sempre positivo così che la velocità angolare ha lo stesso segno di  $a$ . Vediamo che per  $r$  grandi l'effetto di trascinamento diminuisce come  $r^{-3}$

## 3.2 Il limite statico

Consideriamo fotoni emessi nel piano equatoriale ( $\theta = \pi/2$ ) a un certo  $r$  fissato. In particolare analizziamo il moto di fotoni inizialmente diretti in direzione  $\pm\phi$ , ossia in direzione tangente ai cerchi dati da  $r$  costante, per cui

inizialmente sul percorso gli unici elementi non nulli sono  $d\phi$  e  $dt$ , e essendo  $ds^2 = 0$  per i fotoni si ha:

$$0 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2$$

da cui si ottiene:

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \pm \left[ \left( \frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.7)$$

Notevole è il fatto che per  $g_{tt} = 0$  si hanno due soluzioni:

$$\frac{d\phi}{dt} = 0, \quad \frac{d\phi}{dt} = -\frac{2g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}.$$

La seconda soluzione indica evidentemente il fotone moventesi lungo la stessa direzione di rotazione della sorgente. Nella prima il trascinamento è diventato talmente forte che il fotone non riesce a muoversi in direzione opposta a quella indotta dalla massa rotante. Chiaramente qualsiasi particella massiva, muovendosi più lentamente di un fotone, non può resistere al trascinamento in tali condizioni e comincerebbe a ruotare nel verso della sorgente. Vediamo che dalla (3.1) otteniamo per  $g_{tt} = 0$  una superficie, denominata ergosfera o limite statico, definita da un valore del raggio pari a

$$r_0 = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad (3.8)$$

La soluzione col segno negativo non ci interessa poichè come vedremo giace all'interno dell'orizzonte degli eventi. All'interno di questo valore del raggio  $g_{tt} > 0$  e particelle e fotoni sono costretti a ruotare con velocità angolare concorde ad  $a$ , infatti per una particella a  $\phi$  costante si ha un elemento di linea di tipo spazio, in quanto tutti gli addendi sono positivi.

$$ds = g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 > 0.$$

Come già visto per il la soluzione di Schwarzschild l'orizzonte degli eventi si trova imponendo  $g^{rr} = \Delta\rho^2 = 0$  il che porta a trovare più soluzioni. Noi siamo interessati a quella con raggio maggiore che si trova prendendo la



soluzione con segno + imponendo  $\Delta = 0$  quindi

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2} \quad (3.9)$$

L'orizzonte è perciò interamente contenuto nell'ergosfera e le due superfici limite si toccano ai poli.



# Bibliografia

- [1] R. d'Inverno, *Introduzione alla relatività di Einstein*, Clueb, 2001
- [2] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler *Gravitation*, Applied Surface Science, 2001
- [3] C. Weinberg, *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*, Jhon Wiley and sons, 1972
- [4] E. Poisson, *A relativist's Toolkit*, Cambridge University Press, 2004
- [5] R. P. Kerr, *Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics* Phys. Rev. Let. 11,237 1963
- [6] B. Shutz, *A first course in General Relativity*, Cambridge University Press, 2009