

ALMA Mater Studiorum  
Università degli Studi di Bologna

---

---

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea in Astronomia

Dipartimento di Fisica e Astronomia

Equazioni di Stato della Materia in Astrofisica

Elaborato Finale

Candidato:  
Davide Mollica

Relatore:  
Prof. Daniele Dallacasa

---

---

Sessione III Primaverile  
Anno Accademico 2013/2014



# Indice

<b>1</b>	<b>Forma generale delle funzioni di stato</b>	<b>1</b>
1.1	Equazioni e funzioni di stato . . . . .	1
1.2	Gas perfetti . . . . .	3
1.2.1	Distribuzione di Maxwell-Boltzmann . . . . .	3
1.3	Gas degeneri . . . . .	4
1.3.1	Statistiche di Fermi-Dirac e di Bose-Einstein . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Interni stellari</b>	<b>7</b>
2.1	Equazione di stato . . . . .	7
2.1.1	Gas perfetto . . . . .	7
2.1.2	Interazioni coulombiane e condizione di degenerazione . . . . .	8
2.1.3	Pressione di un gas di fotoni . . . . .	9
2.2	Pressione di degenerazione . . . . .	9
2.2.1	Degenerazione parziale . . . . .	10
2.2.2	Completa degenerazione . . . . .	10
2.3	Diagramma Densità-Temperatura . . . . .	11
2.4	Nane Bianche . . . . .	13
2.4.1	Relazione Massa-Raggio . . . . .	14
2.4.2	Limite di Chandrasekhar . . . . .	14
	<b>Bibliografia</b>	<b>17</b>



# Introduzione

Una stella non è un sistema in “vero” equilibrio termodinamico: perde costantemente energia, non ha una composizione chimica costante nel tempo e non ha nemmeno una temperatura uniforme. Ma, in realtà, i processi atomici e sub-atomici avvengono in tempi così brevi, rispetto ai tempi caratteristici dell’evoluzione stellare, da potersi considerare sempre in equilibrio. Le reazioni termonucleari, invece, avvengono su tempi scala molto lunghi, confrontabili persino con i tempi di evoluzione stellare. Inoltre il gradiente di temperatura è dell’ordine di  $10^{-4} \text{ K cm}^{-1}$  e il libero cammino medio di un fotone è circa di 1 cm, il che ci permette di assumere che ogni strato della stella sia uno strato adiabatico a temperatura uniforme.

Di conseguenza lo stato della materia negli interni stellari è in una condizione di “quasi” equilibrio termodinamico, cosa che ci permette di descrivere la materia attraverso le leggi della *Meccanica Statistica*. In particolare lo stato dei fotoni è descritto dalla *Statistica di Bose-Einstein*, la quale conduce alla *Legge di Planck*; lo stato del gas di ioni ed elettroni non degeneri è descritto dalla *Statistica di Maxwell-Boltzmann*; e, nel caso di degenerazione, lo stato degli elettroni è descritto dalla *Statistica di Fermi-Dirac*.

Nella forma più generale, l’equazione di stato dipende dalla somma dei contributi appena citati (radiazione, gas e degenerazione). Vedremo prima questi contributi singolarmente, e dopo li confronteremo tra loro, ottenendo delle relazioni che permettono di determinare quale legge descrive lo stato fisico di un plasma stellare, semplicemente conoscendone temperatura e densità. Rappresentando queste condizioni su un piano  $\log \rho - \log T$  possiamo descrivere lo stato del nucleo stellare come un punto, e vedere in che stato è la materia al suo interno, a seconda della zona del piano in cui ricade. È anche possibile seguire tutta l’evoluzione della stella tracciando una linea che mostra come cambia lo stato della materia nucleare nelle diverse fasi evolutive.

Infine vedremo come leggi quantistiche che operano su scala atomica e sub-atomica siano in grado di influenzare l’evoluzione di sistemi enormi come quelli stellari: infatti la degenerazione elettronica conduce ad una massa limite per oggetti completamente degeneri (in particolare per le nane bianche) detta *Massa di Chandrasekhar*.



# Capitolo 1

## Forma generale delle funzioni di stato

Ludwig Boltzmann, who spent much of his life studying statistical mechanics, died in 1906, by his own hand. Paul Ehrenfest, carrying on the work, died similarly in 1933. Now it is our turn to study statistical mechanics. Perhaps it will be wise to approach the subject cautiously.

---

D.L. Goodstein

### 1.1 Equazioni e funzioni di stato

Le *Equazioni di Stato* descrivono un sistema fisico attraverso una relazione fra le sue *Funzioni di Stato*, come temperatura, pressione e densità. Una tale relazione può essere genericamente rappresentata nella forma

$$F(P, V, T, \dots) = 0 \quad (1.1)$$

Per un sistema in *Equilibrio Termodinamico* è possibile avvalersi dei principi e dei risultati della *Meccanica Statistica* dai quali è possibile ricavare una relazione come la (1.1) e quindi legare tra loro le quantità macroscopiche che caratterizzano il sistema. Consideriamo un sistema micro-canónico suddiviso in  $N$  sottosistemi canonici distinguibili e identici. Sia  $n_\alpha$  il numero di sottosistemi che popolano il corrispondente livello di energia  $\epsilon_\alpha$  a cui corrisponde una molteplicità di stati  $g_\alpha$ . Le relazioni fondamentali che legano le principali funzioni di stato sono

$$Z_c(T, V) = \sum_{\alpha} g_{\alpha} e^{-\beta \epsilon_{\alpha}} \quad (1.2)$$

$$E(T, V) = - \left( \frac{\partial \ln Z_c}{\partial \beta} \right)_V = \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \tilde{\rho}_{\alpha} \quad (1.3)$$

$$S(T, V) = k \ln Z_c + \frac{E}{T} = k \sum_{\alpha} \tilde{\rho}_{\alpha} \ln \frac{g_{\alpha}}{\tilde{\rho}_{\alpha}} \quad (1.4)$$

$$\Phi(T, V) = E - TS = -kT \ln Z_c \quad (1.5)$$

$$P(T, V) = - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial V} \right)_T = kT \left( \frac{\partial \ln Z_c}{\partial V} \right)_T \quad (1.6)$$

dove

- $\beta^{-1} = kT$
- $Z_c$  è detta *Funzione di Partizione Canonica* e non è altro che la somma di tutti i *fattori di Boltzmann*  $g_\alpha e^{-\beta \epsilon_\alpha}$ .
- $\tilde{\rho}_\alpha = g_\alpha e^{-\beta \epsilon_\alpha} / Z_c$  è la probabilità che il singolo sistema occupi il livello  $\epsilon_\alpha$ .
- $S(T, V)$  è l'entropia del sistema.
- $\Phi(T, V)$  è l'*energia libera di Helmholtz* del sistema

Nel caso di più sistemi canonici distinguibili poiché l'energia e l'entropia sono additive lo è anche l'energia libera di Helmholtz e dalle relazioni precedenti otteniamo che, per più sistemi canonici, valgono le seguenti

$$\Phi^{tot} = \sum_k \Phi_k \quad (1.7)$$

$$P^{tot} = \sum_k P_k \quad (1.8)$$

$$Z_c^{tot} = \prod_k Z_{c,k} \quad (1.9)$$

**Limite del continuo** Il passaggio dal discreto al continuo avviene, se il sistema non è confinato ( $V \rightarrow \infty$ ), con le seguenti sostituzioni formali

$$\begin{aligned} \epsilon_\alpha &\longrightarrow \epsilon \\ g_\alpha &\longrightarrow g(\epsilon, T, V) d\epsilon \\ Z_c &\longrightarrow \int e^{-\beta \epsilon} g(\epsilon, T, V) d\epsilon \\ \tilde{\rho}_\alpha &\longrightarrow \frac{g(\epsilon, T, V) e^{-\beta \epsilon}}{Z_c} d\epsilon = \rho_c d\epsilon \end{aligned}$$

Dove  $\rho_c d\epsilon$  è la probabilità che il sistema abbia energia compresa tra  $\epsilon$  e  $\epsilon + d\epsilon$ .  $g d\epsilon$  è il numero di stati con energia compresa tra  $\epsilon$  e  $\epsilon + d\epsilon$ . Nel caso non sia possibile considerare il sistema arbitrariamente grande, il limite del continuo è ancora applicabile se il salto energetico tra il primo stato e lo stato fondamentale sia molto minore dell'energia termica del sistema

$$\beta(\epsilon_1 - \epsilon_0) \ll 1.$$

Inoltre il sistema è scomponibile in un numero  $N$  arbitrariamente grande di sotto-sistemi, che è compatibile con il volume  $V$  (anch'esso arbitrariamente grande) se è valido il *Limite Termodinamico*

$$\lim_{V, N \rightarrow \infty} \frac{N}{V} < \infty$$

## 1.2 Gas perfetti

Il gas perfetto è un sistema di  $N$  particelle massive e puntiformi libere di muoversi in un volume  $V$  che si trovano in condizione di non degenerazione e si scambiano energia solo attraverso urti, considerati come processi in cui vengono scambiate quantità finite di energia in tempi infinitesimi<sup>1</sup>. Assumere che non vi sia interazione (oltre agli urti) tra le particelle non è ovviamente realistico, ma è un'approssimazione più che ragionevole se l'energia di interazione è trascurabile rispetto alla loro energia cinetica, il che avviene per la maggioranza delle strutture stellari. Per un gas non degenerato, nel limite nel continuo la funzione di partizione della singola particella è

$$Z_c^p = \frac{1}{h^n} \int e^{-\beta H(\mathbf{z})} d\mathbf{z}$$

e l'Hamiltoniana della particella libera è  $H = \mathbf{p}^2/2m$ . La funzione di partizione del gas sarà allora

$$Z_c = \frac{1}{N!} \left( Z_c^p \right)^N = \left[ \frac{V(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{5}{2}}}{Nh^3} \right]^N \quad (1.10)$$

Inserendo la (1.10) nelle (1.3), (1.4), (1.5), (1.6) otteniamo le funzioni di stato del gas perfetto:

$$E = \frac{3}{2} NkT \quad (1.11)$$

$$S = Nk \ln \left[ \frac{V(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{5}{2}}}{Nh^3} \right] \quad (1.12)$$

$$\Phi = -NkT \ln \left[ \frac{V(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{5}{2}}}{Nh^3} \right] \quad (1.13)$$

$$P = \frac{NkT}{V} = nkT \quad (1.14)$$

$$\mu = -kT \ln \left[ \frac{V(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{5}{2}}}{Nh^3} \right] \quad (1.15)$$

Le prime tre quantità ( $E$ ,  $S$  e  $\Phi$ ) sono estensive mentre le altre ( $P$  e  $\mu$ ) sono intensive. Nel caso di sistemi non degeneri l'argomento dei logaritmi presenti nell'espressione dell'entropia, dell'energia libera e del potenziale chimico, è sempre maggiore di 0.

### 1.2.1 Distribuzione di Maxwell-Boltzmann

Nel caso non degenerato la *Distribuzione Canonica* è

$$\rho_c(\mathbf{z}) = \frac{e^{-\beta H(\mathbf{z})}}{\int e^{-\beta H(\mathbf{z}')} d\mathbf{z}'} \quad (1.16)$$

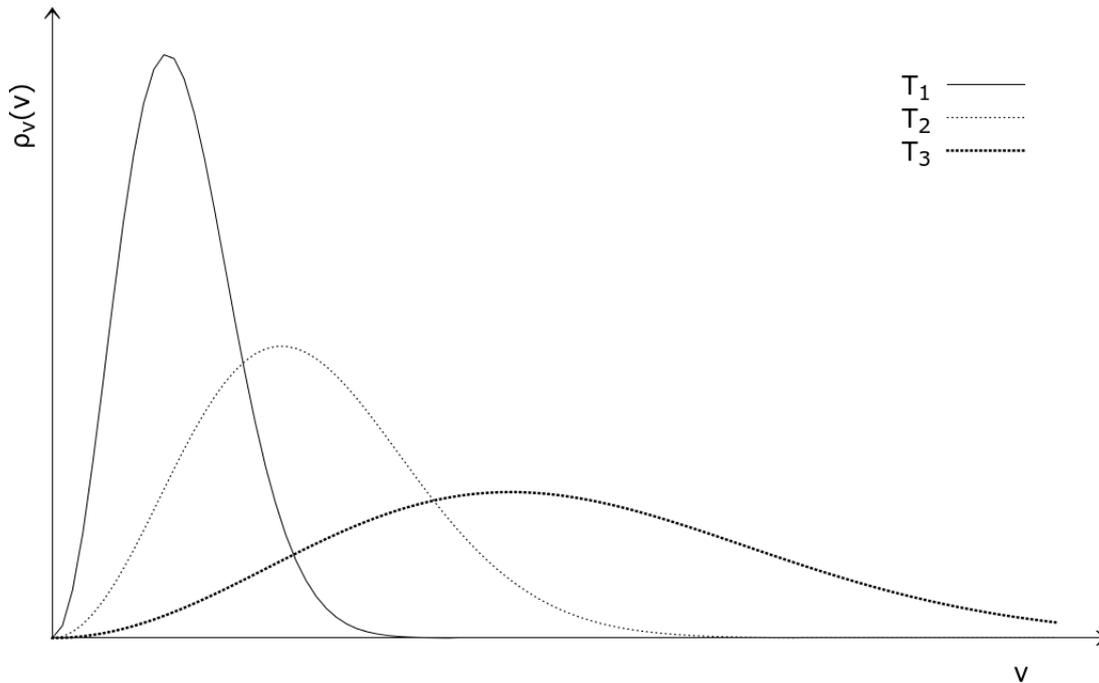
Assumendo l'Hamiltoniana di una particella di gas perfetto, integrando sul volume  $V$  in cui è confinata (il confinamento compare nell'Hamiltoniana attraverso un potenziale infinito fuori dalla regione e nullo all'interno) e utilizzando l'uguaglianza  $\rho_{\mathbf{p}}(\mathbf{p})d\mathbf{p} = \rho_{\mathbf{v}}(\mathbf{v})d\mathbf{v}$ , otteniamo

$$\rho_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}) = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta m\mathbf{v}^2/2}$$

<sup>1</sup>In questo caso gli urti svolgono solo la funzione di rendere ergodico il sistema, possono essere trascurati nel calcolo delle funzioni di stato.

Vediamo subito come la distribuzione delle velocità delle singole componenti è una gaussiana. Non vi è dunque una direzione preferenziale nel moto delle particella (infatti non agiscono forze esterne) e ciò fa sì che la pressione sia isotropa. La distribuzione del modulo della velocità va invece fatta con un passaggio alle coordinate sferiche e integrando su tutto l'angolo solido, ottenendo

$$\rho_v(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\beta m v^2 / 2} \quad (1.17)$$



**Figura 1.1:** Distribuzione di Maxwell-Boltzmann a varie temperature ( $T_3 = 4T_2 = 4T_1$ ).

A basse temperature la distribuzione delle velocità è più stretta, mentre aumentando la temperatura la distribuzione si allarga e sia il valore più probabile che il valor medio aumentano come  $\sqrt{T}$ . In particolare la moda della distribuzione è  $v_p = \sqrt{2kT/m}$  mentre la media è  $\bar{v} = \sqrt{8kT/\pi m}$ . L'energia associata alla velocità quadratica media è  $\bar{E} = \frac{3}{2}kT$  (in accordo con il *Teorema di Equipartizione dell'Energia*)<sup>2</sup>.

### 1.3 Gas degeneri

La distribuzione di Maxwell-Boltzmann vale nel caso in cui il sistema sia in una condizione tale da escludere la possibilità di occupazione multipla di uno stato. Tale condizione è detta *Condizione di Degenerazione* (vedremo un semplice modo per ricavarla nella sezione 2.1), ed è verificata quando la maggior parte degli stati energetici sono vuoti, quindi ogni particella “trova” sempre uno stato libero. Quando questo non è più vero bisogna effettuare conteggi che rispettino il *principio di esclusione di Pauli*: se le particelle sono fermioni, non è permessa l'occupazione multipla di uno stato, nel caso si tratti di bosoni, invece, non vi è alcun vincolo.

<sup>2</sup>“Per un sistema non degenero, nel limite del continuo, ogni grado di libertà quadratico che compare come addendo nell'Hamiltoniana contribuisce all'energia totale con un termine  $kT/2$ .”

### 1.3.1 Statistiche di Fermi-Dirac e di Bose-Einstein

Siano  $n_\alpha$ ,  $\epsilon_\alpha$  e  $g_\alpha$ , rispettivamente, la popolazione, l'energia e la molteplicità del livello energetico  $\alpha$ . Nel caso fermionico è facile ricavare il numero di configurazioni possibili: prendiamo il livello  $\epsilon_0$ , in questo caso vi saranno  $N!/[n_0!(N - n_0)!]$  modi (combinazioni semplici) per scegliere  $n_0$  particelle per popolarlo, la prima particella nello stato fondamentale ha  $g_0$  stati in cui collocarsi, la seconda  $g_0 - 1$ , la terza  $g_0 - 2$  e così via fino all'ultima particella. Il numero di modi con cui può essere popolato lo stato fondamentale sarà

$$\frac{N!}{n_0!(N - n_0)!} g_0(g_0 - 1)(g_0 - n_0 + 1) = \frac{N!}{n_0!(N - n_0)!} \frac{g_0!}{(g_0 - n_0)!}$$

Moltiplicando per i livelli successivi, in cui  $n_{m+1} = (N - \sum_{k=0}^m n_k)$ , tutti i fattoriali che contengono  $N$  al denominatore si semplificano con quelli al numeratore del termine successivo. Per l'intero sistema di fermioni indistinguibili avremo

$$W_{FD} = N! \prod_{\alpha=0}^{\infty} \frac{g_\alpha!}{n_\alpha!(g_\alpha - n_\alpha)!}$$

Mentre per l'intero sistema di bosoni il calcolo del numero di stati porta a

$$W_{BE} = N! \prod_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(g_\alpha - 1 + n_\alpha)!}{n_\alpha!(g_\alpha - 1)!}$$

Da cui si ottengono le popolazioni dei vari livelli <sup>3</sup>

$$n_\alpha = \frac{g_\alpha}{e^{\beta(\epsilon_\alpha - \mu)} \pm 1} \quad (1.18)$$

Che porta infine alla formulazione dell'energia libera di Helmholtz all'equilibrio

$$\Phi = \mu N \mp kT \sum_{\alpha=0}^{\infty} g_\alpha \ln \left[ 1 \pm e^{-\beta(\epsilon_\alpha - \mu)} \right] \quad (1.19)$$

Notiamo che  $\mu$  non è altro che il potenziale chimico

$$\mu = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial N} \right)_{V,T} \quad (1.20)$$

che, come si può vedere facilmente nella (1.18), nel caso fermionico può anche essere positivo, il che si traduce in una resistenza all'aggiunta di ulteriori fermioni al sistema (*Pressione di Degenerazione*, 2.2). Nel caso bosonico è immediato verificare che  $\mu$  è necessariamente negativo o nullo (*Pressione di Radiazione*, 2.1.3), se così non fosse si otterrebbe una popolazione negativa per lo stato fondamentale.

**Limite del Continuo** Nel limite del continuo il numero infinitesimo di stati semi-classici è  $d\mathbf{p}d\mathbf{r}/h^3$ , questo porta alle seguenti sostituzioni

$$\begin{aligned} \epsilon_\alpha &\longrightarrow h(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \vec{\xi}) \\ g_\alpha &\longrightarrow g_\xi \frac{d\mathbf{p}d\mathbf{r}}{h^3} \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Da qui in avanti, in presenza di doppio segno, il segno superiore è relativo ai fermioni, mentre quello inferiore ai bosoni.

$$n_\alpha \longrightarrow n(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \vec{\xi}) d\mathbf{p}d\mathbf{r}$$

dove con  $g_{\vec{\xi}}$  indichiamo la molteplicità relativa ai parametri interni (ad esempio lo spin). E infine arriviamo alle funzioni di stato fondamentali

$$n(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \vec{\xi}) d\mathbf{p}d\mathbf{r} = \frac{1}{h^3} \frac{g_{\vec{\xi}}}{e^{\beta[h(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \vec{\xi}) - \mu]} \pm 1} \quad (1.21)$$

$$\Phi_{FD} = \mu N \mp \frac{kT}{h^3} \sum_{\vec{\xi}} g_{\vec{\xi}} \int \ln \left[ 1 \pm e^{\beta[h(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \vec{\xi}) - \mu]} \right] d\mathbf{p}d\mathbf{r} \quad (1.22)$$

$$N = \frac{1}{h^3} \sum_{\vec{\xi}} \int \frac{g_{\vec{\xi}}}{e^{\beta[h(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \vec{\xi}) - \mu]} \pm 1} d\mathbf{p}d\mathbf{r} \quad (1.23)$$

dove, in assenza di campi esterni, l'Hamiltoniana della singola particella è la somma di una parte cinetica e di una parte interna di spin  $h_i(\vec{\xi})$ .

# Capitolo 2

## Interni stellari

Le stelle, per via delle alte temperature, sono completamente gassose. La materia all'interno si comporta (con buona approssimazione) come un gas perfetto o come un gas completamente degenere. Per esempio, all'interno del Sole il termine correttivo da aggiungere alla pressione, se si assume che il gas si comporti come un gas perfetto, è circa dello 0.4%, mentre in stelle più dense è circa del 2% [1]. In questo capitolo vedremo quali sono i vari "regimi" di pressione, e vedremo delle semplici relazioni che ci permetteranno di capire in che situazione ci troviamo e quale equazione di stato adottare per descrivere un determinato sistema.

**Tabella 2.1:** Valore delle principali costanti fisiche che verranno usate in questo capitolo

Quantità	Simbolo	Valore
Carica dell'elettrone	$e$	$4.8032 \times 10^{-10}$ sC
Massa dell'atomo di idrogeno	$H$	$1.6725 \times 10^{-24}$ g
Massa dell'elettrone	$m_e$	$9.1095 \times 10^{-28}$ g
Velocità della luce nel vuoto	$c$	$2.9979 \times 10^{10}$ cm s <sup>-1</sup>
Costante di Planck	$h$	$6.6261 \times 10^{-27}$ erg s
Costante di Boltzmann	$k$	$1.3807 \times 10^{-16}$ erg K <sup>-1</sup>
Costante della pressione di radiazione	$a$	$7.5670 \times 10^{-15}$ erg cm <sup>-3</sup> K <sup>-4</sup>
Costante di gravitazione universale	$G$	$6.6720 \times 10^{-8}$ cm <sup>3</sup> s <sup>-2</sup> g <sup>-1</sup>
Massa solare	$M_\odot$	$1.9885 \times 10^{33}$ g
Raggio solare	$R_\odot$	$6.9599 \times 10^{10}$ cm

## 2.1 Equazione di stato

### 2.1.1 Gas perfetto

Per un gas ideale di ioni ed elettroni, ricordando la (1.8) e la (1.14), vale l'equazione di stato

$$P = nkT = P_i + P_e = (n_i + n_e)kT$$

Introducendo il peso molecolare degli ioni  $\mu_i$  e il peso molecolare medio per elettrone  $\mu_e$

$$P_i = \frac{k}{\mu_i H} \rho T, \quad P_e = \frac{k}{\mu_e H} \rho T$$

Il peso molecolare medio per elettrone richiede la conoscenza dello stato di ionizzazione della materia. Ma negli interni stellari, a milioni di gradi di temperatura (tipico nelle

zone centrali), la radiazione è così energetica da ionizzare completamente gli elementi più leggeri. L'energia di ionizzazione di un atomo idrogenoide cresce come  $Z^2$ , così solo gli elementi più pesanti riescono a conservare i loro elettroni interni. Nel caso di ionizzazione completa possiamo calcolare il peso molecolare medio in funzione della composizione della materia stellare. Siano  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  le abbondanze in massa di idrogeno, elio e elementi più pesanti, si ottiene

$$\mu \simeq \frac{1}{2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z} = \frac{2}{1 + 3X + \frac{1}{2}Y} \quad (2.1)$$

che evidenzia come il peso molecolare medio è determinato principalmente dalla ionizzazione di H e He. Infine possiamo scrivere la pressione totale

$$P = \frac{k}{\mu H} \rho T \quad (2.2)$$

### 2.1.2 Interazioni coulombiane e condizione di degenerazione

**Interazioni Coulombiane** La (2.2) è applicabile se le particelle del gas si possono considerare non interagenti, che è vero se ogni termine che compare nell'Hamiltoniana della singola particella è trascurabile rispetto al termine  $\mathbf{p}^2/2m$ . Questo accade se l'energia cinetica è maggiore dell'energia potenziale coulombiana<sup>1</sup>

$$kT \gg \frac{Z^2 e^2}{d} \simeq Z^2 e^2 n^{\frac{1}{3}} \simeq E_c$$

dove  $Z$  indica il numero atomico medio. Poiché  $n \simeq \rho/\mu H$  la condizione diventa

$$\rho \ll 4 \times 10^{-14} \mu T^3 Z^6 \text{ gr/cm}^3 \quad (2.3)$$

La condizione è verificata per la maggioranza delle strutture stellari. Se  $E_c \simeq kT$  le interazioni sono così forti che il gas comincia a condensare. Per energie coulombiane molto maggiori dell'energia termica gli ioni si dispongono a formare una struttura solida.

**Degenerazione** In più, per utilizzare la (2.2), il gas deve essere libero da effetti quantistici: le distanze reciproche devono essere lontane dal principio di indeterminazione e, quindi, lontano da situazioni di occupazione multipla (degenerazione). Possiamo considerare il gas non degenerare se il momento medio delle particelle<sup>2</sup> e la loro distanza media sono molto maggiori delle loro stesse indeterminazioni

$$\Delta p \Delta x \geq h \ll pd$$

poiché  $kT \simeq m_e v_e^2$  allora  $p^2 \simeq m_e kT$ , da cui si ottiene

$$\rho \ll (m_e kT)^{\frac{3}{2}} \frac{\mu H}{h^3} \approx 10^{-10} T^{\frac{3}{2}} \text{ gr/cm}^3 \quad (2.4)$$

<sup>1</sup>Dalla (1.16) la distribuzione di probabilità spaziale delle particelle, nel volume  $V$  occupato, risulta uguale a  $1/V$  ovunque. Questo permette di scrivere  $d^3 = 1/n$ .

<sup>2</sup>Consideriamo solo gli elettroni perché sono i primi a degenerare vista la quantità di moto molto inferiore rispetto a quella degli ioni.

### 2.1.3 Pressione di un gas di fotoni

Considerando un gas di bosoni senza massa bisogna prima di tutto rompere il vincolo di conservazione del loro numero. Ciò si traduce nel rendere nullo il potenziale chimico. Sfruttando l'equivalenza tra un sistema di oscillatori armonici, distinguibili e quantizzati, e un gas di bosoni senza massa il numero di fotoni si può scrivere come

$$N_\gamma = \int_0^\infty \frac{g_\gamma(\omega)}{e^{\beta\epsilon} - 1} d\omega$$

Per un gas di fotoni<sup>3</sup>  $g_\gamma = \frac{8\pi V\nu^2}{c^3}$ , da cui

$$N_\gamma = \frac{8\pi V}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^2}{e^{\beta h\nu} - 1} d\nu$$

da cui ricaviamo la distribuzione delle frequenze (indice di occupazione)

$$n_\gamma(\nu) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 \frac{1}{e^{\beta h\nu} - 1}$$

Il momento trasportato dai fotoni è  $p = h\nu/c$  e la loro velocità è quella della luce, possiamo ottenere la pressione di radiazione integrando su tutte le frequenze

$$\begin{aligned} P_r &= \frac{1}{3} \int_0^\infty p(\nu) v_\gamma n(p(\nu)) dp(\nu) = \frac{h}{3} \int_0^\infty \nu n(\nu) d\nu \\ &= \frac{8\pi h}{3c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{\beta h\nu} - 1} d\nu = \frac{8\pi h}{3c^3} \frac{1}{(\beta h)^4} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \\ &= \frac{8\pi^5}{45} \frac{k^4}{c^3 h^3} T^4 = \frac{a}{3} T^4 \end{aligned} \quad (2.5)$$

La pressione dei fotoni termalizzati (in equilibrio con il gas) dipende solo dalla temperatura del gas, diventa importante solo alle alte temperature e basse densità. Cerchiamo di valutarne l'importanza: dalla linearizzazione dell'equilibrio idrostatico e dalla legge di gas perfetto abbiamo

$$T \propto \frac{P}{\rho} \propto P \frac{R^3}{M} \frac{M^2}{R^4} \propto \frac{M}{R}$$

di conseguenza  $P_r \propto M^4/R^4$ . Il rapporto tra la pressione di radiazione e la pressione di gas perfetto è  $P_r/P_g \propto M^2$ . Dunque la pressione di radiazione è rilevante in stelle molto massive, nelle quali ha l'effetto di espellere materia tramite vento stellare, così facendo la massa diminuisce e la pressione di radiazione diventa sempre meno importante.

## 2.2 Pressione di degenerazione

L'impossibilità di trascurare il comportamento quantistico della materia si traduce nell'introduzione di stati permessi per i fermioni. Utilizzando le popolazioni dei livelli energetici per un gas degenerato di fermioni, la densità di elettroni con impulso compreso tra  $p$  e  $p + dp$  è

$$n(p)dp = \frac{8\pi}{h^3} p^2 f(\epsilon) dp$$

---

<sup>3</sup>Alla densità di modi di vibrazione si arriva considerando il numero di onde stazionarie risonanti in una cavità con volume  $V$ .

dove  $f(\epsilon)$  è l'*Indice di Occupazione* (o *Funzione di Occupazione*), che rappresenta la frazione di stati occupati ad una certa energia

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} = \frac{1}{e^{\epsilon/kT - \mu/kT} + 1} = \frac{1}{e^{\epsilon/kT + \alpha} + 1} \quad (2.6)$$

d'ora in poi il potenziale chimico verrà sostituito dal parametro  $\alpha = -\mu/kT$ , per non generare confusione con il peso molecolare medio.  $\alpha$  è determinato, per ogni fissato valore di densità e temperatura, dalla normalizzazione della distribuzione  $\int n(p)dp = n_e$ .

Nel caso completamente degenere  $\alpha \ll 0$ : aggiungere elettroni al gas è energeticamente sfavorevole. Notiamo che nel caso completamente degenere tutti i livelli con energia minore di  $|\alpha|kT$  sono totalmente occupati, mentre per energie maggiori sono completamente vuoti. Chiamiamo  $\epsilon_F = |\alpha|kT$  *energia di Fermi*, e  $p_F = \sqrt{2m_e p_F}$  il corrispondente impulso. In questo caso la densità elettronica sarà

$$n_e = \int_0^{p_F} n(p)dp = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3 \quad (2.7)$$

Quando la densità diventa molto alta, gli elettroni sono forzati ad avvicinarsi (nello spazio delle fasi, quindi anche nella posizione) ma  $\Delta p \geq \hbar/\Delta x$ , per il principio di Heisenberg, dunque al diminuire della distanza l'indeterminazione sul momento cresce e rende possibili valori molto più alti. Infatti la (2.7) fornisce un massimo (completa degenerazione) alla densità di elettroni ed è proprio questo limite all'origine della pressione di degenerazione: al crescere della densità gli elettroni sono forzati a popolare stati con momento più elevato, e sono proprio gli elettroni con momento più elevato a rendere rilevante la pressione di degenerazione.

### 2.2.1 Degenerazione parziale

Nel caso generale

$$n_e = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{p^2/2m_e kT + \alpha} + 1} = \frac{4\pi}{h^3} (2m_e kT)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{2}}}{e^{\alpha+x} + 1} dx \quad (2.8)$$

dove  $x = E/kT$  e  $F_{1/2} = \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{e^{\alpha+x} + 1}$  è detta *Funzione "1/2" di Fermi*. La pressione elettronica dovuta alla degenerazione sarà

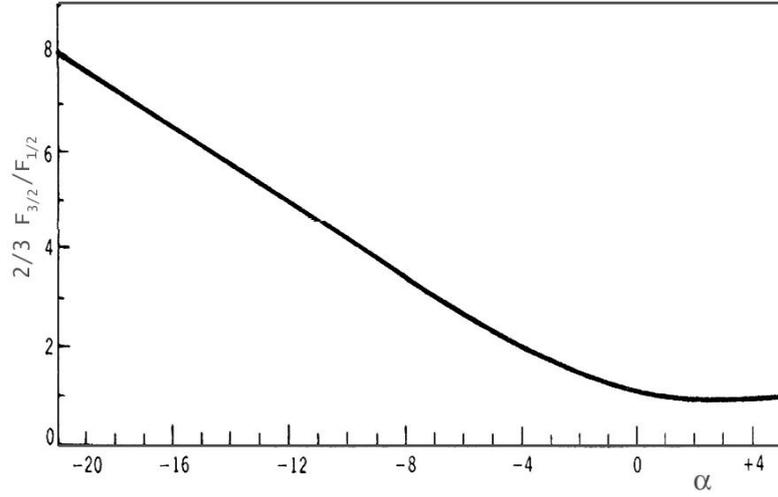
$$P_e = \frac{1}{3} \int_0^\infty p v_e n(p) dp = \frac{8\pi(2m_e kT)^{\frac{3}{2}}}{3h^3} kT F_{3/2}(\alpha, x) \quad (2.9)$$

Aggiungendo il contributo della degenerazione alla (2.2) e inserendo la (2.8) nella (2.9) otteniamo

$$P = P_i + P_e = \frac{kT}{\mu H} \rho + \frac{2}{3} \frac{n_e}{F_{1/2}(\alpha)} kT F_{3/2}(\alpha) = \frac{kT}{\mu H} \rho \left[ 1 + \frac{\mu}{\mu_e} \Psi(\alpha) \right] \quad (2.10)$$

### 2.2.2 Completa degenerazione

Nel caso di completa degenerazione tutti i livelli energetici con  $E < E_F$  risultano completamente occupati, per cui la funzione di occupazione è uguale ad 1 fino al livello di fermi, ed è nulla a livelli più alti. Per cui possiamo scrivere la pressione di



**Figura 2.1:** Valori assunti da  $\Psi$  in funzione del parametro di degenerazione  $\alpha$  (Immagine tratta da Castellani [3])

degenerazione per il caso non relativistico e per il caso relativistico in funzione della densità:

$$P_e = \frac{1}{3} \int_0^{p_F} p v_e n(p) dp = \frac{8\pi}{3m_e h^3} \int_0^{p_F} p^4 dp = \frac{8\pi}{15} \frac{p_F^5}{m_e h^3}$$

dalla (2.7) abbiamo che

$$p_F = \frac{h}{2} \left( \frac{3}{8\pi} n_e \right)^{\frac{1}{3}}$$

e ricordando che  $n_e = \rho/\mu_e H$  otteniamo

$$P_e = \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{5m_e H^{\frac{5}{3}}} \left( \frac{\rho}{\mu_e} \right)^{\frac{5}{3}} \quad (2.11)$$

Nel caso relativistico  $p = \gamma m_e v_e$  la pressione diventa

$$P_e = \frac{1}{8} \left( \frac{3}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{hc}{H^{\frac{4}{3}}} \left( \frac{\rho}{\mu_e} \right)^{\frac{4}{3}} \quad (2.12)$$

## 2.3 Diagramma Densità-Temperatura

Adesso possiamo scrivere l'equazione di stato per il plasma stellare nel caso più generale<sup>4</sup>.

$$P = P_i + (P_e + P_{e,d}) + P_r = \frac{kT}{\mu H} \rho \left[ 1 + \frac{\mu}{\mu_e} \Psi(\alpha) \right] + \frac{a}{3} T^4 \quad (2.13)$$

Confrontando i possibili contributi delle varie sorgenti di pressione possiamo avere un'idea su qual è quella dominante:

$$P_r > P_g \quad \longleftrightarrow \quad T > \sqrt[3]{\frac{3k}{\mu H a}} \rho^{\frac{1}{3}}$$

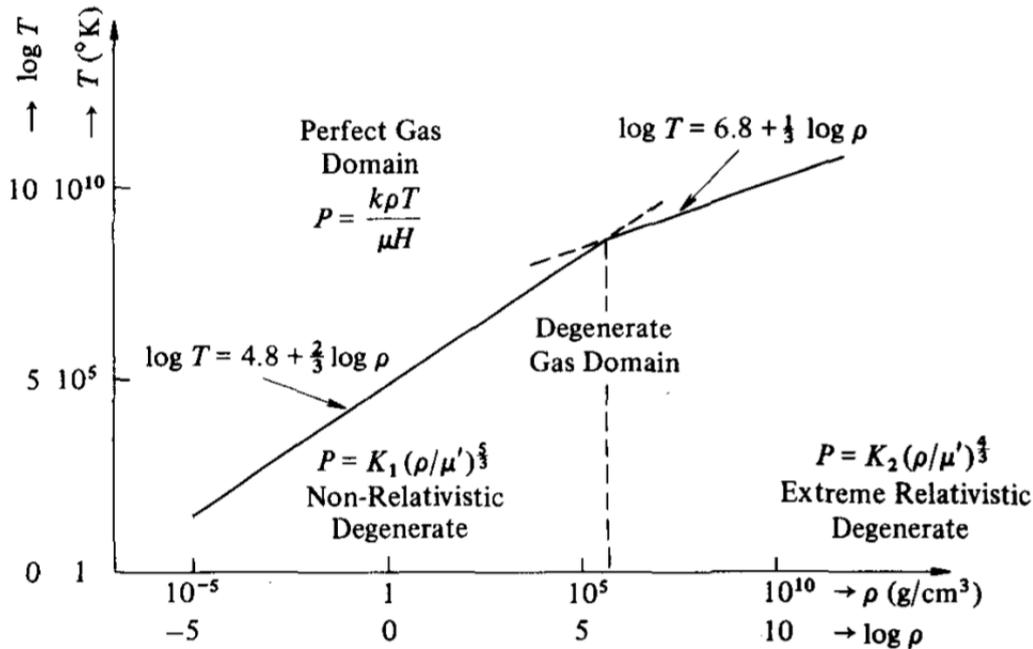
<sup>4</sup>Nel caso di degenerazione totale vale la (2.11) o la (2.12).

$$P_g > P_d \iff T > \frac{K_1}{k} \mu H \rho^{\frac{2}{3}}$$

$$P_g > P_d^{rel} \iff T > \frac{K_2}{k} \mu H \rho^{\frac{1}{3}}$$

$$P_d^{rel} = P_d \iff \rho = \left( \frac{K_2}{K_1} \right)^3$$

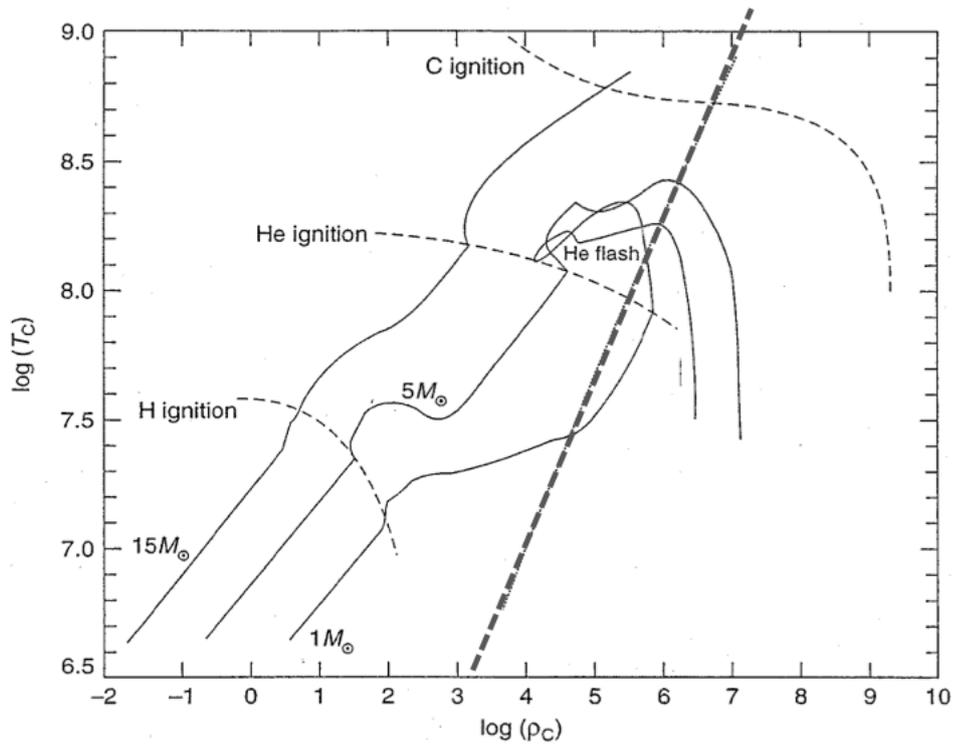
Queste condizioni possono essere rappresentate in un piano  $\log \rho - \log T$ . Questo piano descrive lo stato della materia negli interni stellari e permette di sapere quale pressione prevale, o, vicino alle zone di separazione, quali contributi considerare.



**Figura 2.2:** Il diagramma Densità-Temperatura mostra i vari regimi di pressione. Non è mostrata la relazione  $P_r = P_g$ , la quale verrebbe rappresentata da una retta con pendenza  $1/3$  e ordinata all'origine  $\log T \simeq 7.6$ .

Nel nucleo di stelle di sequenza principale la frazione maggiore della pressione totale è dovuta alla pressione di gas perfetto. Per esempio il Sole è rappresentato nel piano dal punto  $(2, 6)$ , che si trova nel regime di gas perfetto. Nuclei di stelle con massa più grande si trovano sempre nel regime di gas perfetto, ma più lontano dalla condizione di degenerazione rispetto a stelle di massa minore. I nuclei di giganti rosse si collocano invece a cavallo della condizione di degenerazione: quelle con massa maggiore nella regione di gas perfetto, quelle con massa minore nella zona di degenerazione. Mentre le nane bianche si collocano in basso a destra nel diagramma, tra il regime degenerare e degenerare relativistico.

Nella figura 2.3 a fronte, vediamo l'evoluzione del nucleo per stelle di diversa massa. Nelle stelle di massa più piccola ( $1 M_\odot$ ) si raggiunge la degenerazione prima che cominci la combustione dell'elio, una volta innescata, il nucleo esce dalla degenerazione, e vi ritorna una volta esaurito. Nelle stelle di ( $5 M_\odot$ ) la combustione dell'elio inizia in condizioni non degeneri, e, una volta esaurito, il nucleo si sposta in regime di degenerazione. Mentre per stelle di ( $15 M_\odot$ ) il nucleo non entra in condizioni di degenerazione finché non arriva alla combustione del ferro.



**Figura 2.3:** Diagramma  $\log \rho - \log T$  che mostra l'evoluzione dello stato della materia nucleare di stelle con massa diversa. Le curve tratteggiate rappresentano le condizioni necessarie per la combustione dell'H, dell'He e del C. La retta trattegggiata rappresenta la condizione di non degenerazione.

## 2.4 Nane Bianche

Nella fase finale di una stella di massa compresa tra  $0.1$  e  $8 M_\odot$ , cioè che rimane dopo l'espulsione degli strati esterni sono i resti del nucleo originario, principalmente composto da carbonio ed ossigeno. Le temperature non sono abbastanza alte da riuscire ad innescare la fusione di elementi così pesanti e la pressione del gas non è abbastanza forte da impedire il collasso gravitazionale. La densità aumenta finché le interazioni quantistiche (2.4) diventano così importanti da rendere la pressione di degenerazione così elevata da bilanciare la forza gravitazionale. Resta così una stella caratterizzata da un raggio molto piccolo e una luminosità troppo bassa per la sua massa. Per esempio la nana bianca *Sirio B* ha un raggio  $R \simeq R_\odot/125$ , una massa  $M \simeq M_\odot$ , una luminosità  $L \simeq L_\odot/40$  e una temperatura di superficie  $T_{eff} \simeq 25\,000$  K. A densità così elevate la pressione di radiazione è trascurabile, e lo stesso vale per la pressione del gas di ioni, in quanto la loro energia cinetica è almeno 2 o 3 ordini di grandezza inferiore a quella degli elettroni: la sola sorgente di pressione è la degenerazione. Una struttura stellare completamente degenerata è descritta dal sistema politropico di indice  $n$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2} \rho \\ \frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho \\ P = K\rho^\gamma = K\rho^{1+\frac{1}{n}} \end{array} \right. \quad (2.14)$$

### 2.4.1 Relazione Massa-Raggio

Nel caso di degenerazione non relativistica vale la (2.11), dunque una politropica di indice  $\frac{3}{2}$

$$P = 9.92 \times 10^{12} \left( \frac{\rho}{\mu_e} \right)^{\frac{5}{3}} \quad (2.15)$$

Cerchiamo di valutare, in ordini di grandezza, la dipendenza massa-raggio per il caso non relativistico: assunta una densità costante  $\rho \approx M/R^3$ , la struttura è descritta dalla (2.15) e dalla (2.14) che linearizzate assumono la forma

$$\begin{cases} P \approx GM^2/R^4 \\ P \approx K_1 M^{\frac{5}{3}}/R^5 \end{cases} \quad (2.16)$$

La qui soluzione fornisce

$$R \approx \frac{0.02}{\mu_e^{\frac{5}{3}} \tilde{M}^{1/3}} R_{\odot}, \quad \tilde{M} = M/M_{\odot} \quad (2.17)$$

In particolare non ha importanza da che stella si sia formata la nana bianca, poiché  $\mu_e \simeq 2$  nel caso si tratti di un nucleo di  ${}^4\text{He}$ ,  ${}^{12}\text{C}$ ,  ${}^{16}\text{O}$  o  ${}^{20}\text{Ne}$ , anche nel caso di una rara nana bianca  ${}^{16}\text{O}$ - ${}^{20}\text{Ne}$ - ${}^{25}\text{Mg}$  l'approssimazione è ancora buona<sup>5</sup>.

$$\frac{R}{R_{\odot}} \approx \frac{0.006}{\tilde{M}^{1/3}}$$

### 2.4.2 Limite di Chandrasekhar

Adesso valutiamo in ordini di grandezza, come nel caso precedente, la dipendenza massa-raggio per il caso relativistico. In questo caso abbiamo una politropica di indice 3

$$P = 1.23 \times 10^{15} \left( \frac{\rho}{\mu_e} \right)^{\frac{4}{3}} \quad (2.18)$$

ed assumendo la densità costante abbiamo

$$\begin{cases} P \approx GM^2/R^4 \\ P \approx K_1 M^{\frac{4}{3}}/R^4 \end{cases} \quad (2.19)$$

Il che porta ad una massa ben determinata, l'unica a poter sussistere in caso di completa degenerazione relativistica. Approssimando l'equazione di stato con una media armonica dei due casi

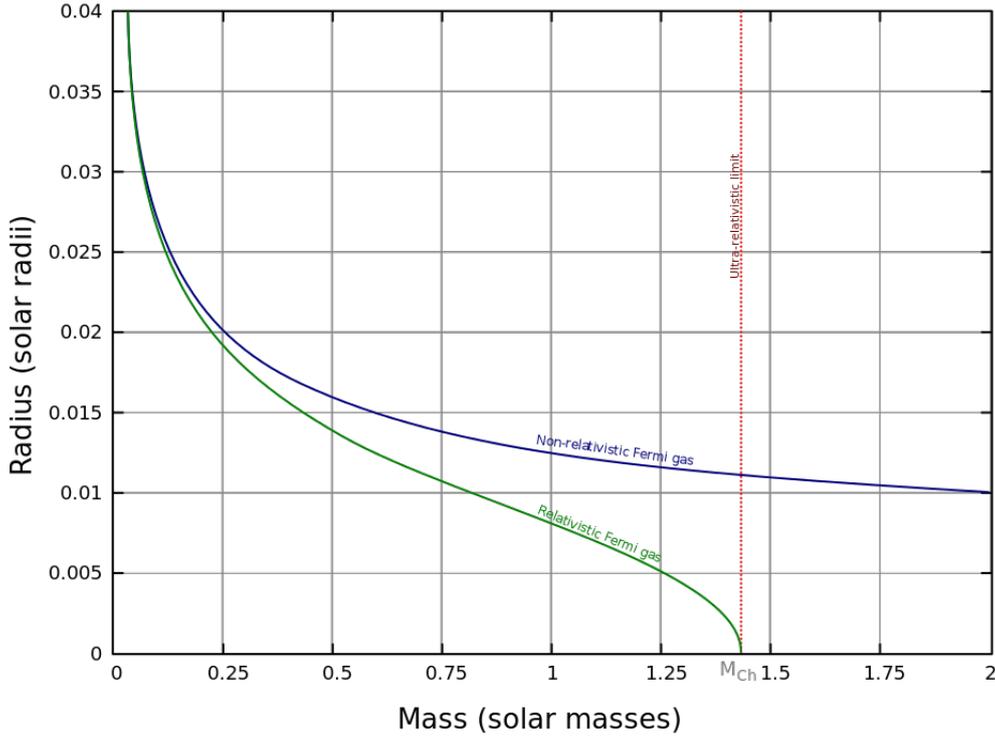
$$P \approx \left[ \left( K_1 \rho^{5/3} \right)^{-2} + \left( K_2 \rho^{4/3} \right)^{-2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.20)$$

e combinandola con la condizione di equilibrio, arriviamo alla relazione

$$R \approx \frac{K_1}{G^2} \frac{1}{M^{1/3}} \left( 1 - \frac{G^2}{K_2^2} M^{4/3} \right)^{\frac{1}{2}}$$

---

<sup>5</sup>In realtà l'approssimazione è buona fintanto che la presenza di idrogeno è trascurabile, infatti  $\mu_e \simeq 2/(X+1)$ .



**Figura 2.4:** Grafico della relazione massa-raggio. Sono rappresentati sia il caso relativistico che quello non relativistico che, per  $\bar{M} \ll 0.5$ , è descritti dalla (2.21). (Immagine tratta da Wikipedia [12])

Il raggio diventa nullo al valore limite  $M_l \approx (K_2/G)^{1.5}$ . Introducendo la variabile  $\bar{M} = M/M_l$  la relazione precedente diventa

$$R \approx \frac{K_1}{G^{3/2} K_2^{1/2}} \frac{1}{\bar{M}^{1/3}} \left(1 - \bar{M}^{4/3}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.21)$$

Questa relazione è molto imprecisa ma asintoticamente corretta. Infatti per  $\bar{M} \ll 1$  otteniamo le (2.17), mentre vediamo che  $M$  non può superare il valore  $M_l$ , che è il limite pienamente relativistico. Calcoli più precisi portano al limite di massa

$$M_{Ch} = \frac{5.75}{\mu_e^2} M_\odot \quad (2.22)$$

detta *Massa di Chandrasekar*. Per le osservazioni fatte prima,  $\mu \simeq 2$  per ogni possibile composizione della materia degenere. Dunque la massa limite per una qualsiasi nana bianca diventa

$$M_{Ch} \simeq 1.44 M_\odot \quad (2.23)$$

È possibile stimare il rapporto  $M/R$  dallo spostamento delle righe spettrali dovuto al campo gravitazionale. Per oggetti compatti come le nane bianche il campo è così intenso da dover essere trattato con la teoria della relatività generale.

Introduciamo la distanza caratteristica  $R_s = 2GM/c^2$ , detta *Raggio di Schwarzschild*, e consideriamo un fotone, di frequenza  $\nu_{em}$ , emesso dalla superficie della stella, ad una distanza  $R$  dal centro di essa. Se il fotone viene rilevato ad una distanza  $r \gg R_s$  si misurerà una frequenza

$$\nu_{oss} = \nu_{em} \left[1 - \frac{R_s}{R}\right]^{\frac{1}{2}}$$

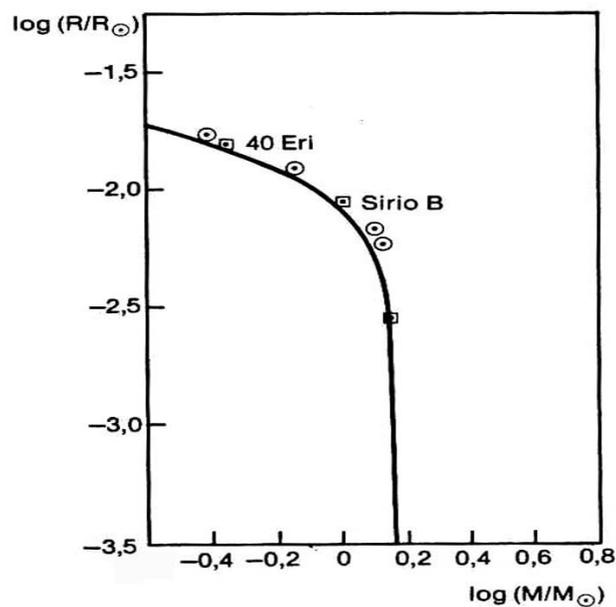
Se anche  $R \gg R_s$ <sup>6</sup> possiamo utilizzare lo sviluppo in serie di McLaurin di  $\sqrt{1-x}$  e scrivere quindi

$$z_g = \frac{\nu_{em} - \nu_{oss}}{\nu_{em}} = \frac{R_s}{2R} = \frac{GM}{c^2 R} \simeq 7.43 \times 10^{-29} \frac{M}{R} \quad (2.24)$$

A qui si fa corrispondere un effetto doppler equivalente ponendo  $z_g = v/c$ , dunque

$$v = 2.226 \times 10^{-16} \frac{M}{R} = 6.36 \times 10^4 \frac{\tilde{M}}{\tilde{R}} \quad \text{cm s}^{-1}$$

Nel caso di Sirio B abbiamo  $v = (8.042 \pm 0.483) \times 10^6 \text{ cm s}^{-1}$  e  $R = (0.00840 \pm 0.00025) R_\odot$  [2]. Il che porta ad un massa  $M = (1.019 \pm 0.007) M_\odot$ . In ottimo accordo con la relazione massa-raggio.



**Figura 2.5:** Relazione massa-raggio per strutture degeneri. Si noti l'ottimo accordo con le misure di  $R$  e  $M$  di alcune nane bianche.

<sup>6</sup>Il che è ragionevole visto che per un oggetto con massa  $M = M_{ch}$  il raggio di Schwarzschild è di circa 2 km. Dunque la correzione di  $z_g$ , assunto un raggio pari a quello terrestre, è  $o(\frac{R_s^2}{R^2}) \approx 10^{-7}$ .

# Bibliografia

- [1] Lawrence H. Aller. *Astrophysics: The Atmosphere of the Sun and Stars*. A cura di Ronald Press. 1953 (cit. a p. 7).
- [2] M.A. Barstow et al. «Hubble Space Telescope Spectroscopy of the Balmer lines in Sirius B». In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 362 (2005) (cit. a p. 16).
- [3] Vittorio Castellani. *Fondamenti di Astrofisica Stellare*. A cura di Zanichelli. 1985 (cit. a p. 11).
- [4] Cesare Chiosi. *Struttura ed Evoluzione delle Stelle*. Dispense. Dipartimento di Astronomia, Università di Padova, 2008.
- [5] Shalom Eliezer et al. *Fundamentals of Equations of State*. A cura di World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2002.
- [6] Loris Ferrari. *Elementi di Termodinamica Statistica*. Dispense. Dipartimento di Fisica, Università di Bologna, 2011.
- [7] Francesco R. Ferraro. *Astrofisica Stellare*. Dispense. Dipartimento di Astronomia, Università di Bologna, 2011.
- [8] Marc L. Kutner. *Astronomy: a physical perspective*. A cura di Cambridge University Press. 2003.
- [9] Paolo Paolicchi. *Lezioni di Astrofisica*. Dispense. Dipartimento di Fisica, Università di Pisa, 2004.
- [10] Nicholas Rowell. *White Dwarf Properties and the Degenerate Electron Gas*. Institute for Astronomy of the University of Edinburgh. 2010. URL: [http://www.roe.ac.uk/ifa/postgrad/pedagogy/2008\\_rowell.pdf](http://www.roe.ac.uk/ifa/postgrad/pedagogy/2008_rowell.pdf).
- [11] *White Dwarf (Degenerate Dwarfs)*. 2011. URL: <http://www.astro.princeton.edu/~gk/A403/wd.pdf>.
- [12] Wikipedia. *White Dwarf on Wikipedia*. URL: [http://en.wikipedia.org/wiki/White\\_dwarf](http://en.wikipedia.org/wiki/White_dwarf) (cit. a p. 15).