Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

DISUGUAGLIANZA PUNTUALE DI DOOB

Tesi di Laurea in Finanza Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
ANDREA PASCUCCI

Presentata da:
DANIELA LAZZERINI

III Sessione di laurea 2012/2013
28 marzo 2014

Per tre cose vale la pena di vivere:
la matematica, la musica e l'amore.
[*Renato Caccioppoli (1904-1959)*]

Ai miei genitori e a Davide,
per aver sempre creduto in me.

Indice

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è dimostrare la disuguaglianza puntuale di Doob, la quale è di fondamentale importanza nell'ambito della finanza matematica. Infatti, grazie a questa disuguaglianza, conoscendo il valore finale di un'opzione europea si riesce a stimare il valore finale di un'opzione esotica.
Per questo motivo la disuguaglianza puntuale di Doob è considerata una super replicazione indipendente dal modello per l'opzione esotica.

Capitolo 1

Disuguaglianza di Doob

Lo scopo di questo capitolo è enunciare e successivamente dimostrare la disuguaglianza (massimale) di Doob. Osserveremo che la disuguaglianza di Doob è diretta conseguenza della disuguaglianza puntuale di Doob, la quale a sua volta verrà dimostrata attraverso alcuni lemmi.

1.1 Disuguaglianza massimale di Doob

Consideriamo uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_n)$.
Ricordiamo che una martingala $(S_n)_{n\geq 0}$ è un processo stocastico adattato tale che:

1. $E[|S_n|] < \infty \quad \forall n$
2. $S_n = E[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] \quad \forall n \geq 0$

Ad ogni martingala $(S_n)_{n=0}^N$ associamo il processo massimale:

$$\bar{S}_n = \max_{0\leq u\leq n} |S_u| \qquad n = 0, ..., N$$

Teorema 1.1.1 (Disuguaglianza di Doob).
Per ogni martingala S abbiamo:

$$E[\bar{S}_N^2] \leq 4E[S_N^2] \tag{1.1}$$

Osservazione 1. La disuguaglianza massimale di Doob è di fondamentale importanza perchè non dipende dalla martingala considerata e non dipende neanche dal numero di passi, quindi la disuguaglianza è valida per ogni martingala e per ogni N.

1.2 Disuguaglianza puntuale di Doob

Teorema 1.2.1 (Disuguaglianza puntuale).
Per ogni processo adattato S

$$\bar{S}_N^2 \leq \sum_{n=0}^{N-1} H_n(S_{n+1} - S_n) + 4S_N^2 \tag{1.2}$$

dove $H_n = -4\bar{S}_n$ è una strategia predicibile.

Osservazione 2. Naturalmente la disuguaglianza puntuale implica la disuguaglianza massimale di Doob, infatti applicando il valore atteso si ottiene:

$$E[\bar{S}_N^2] \leq E[\sum_{n=0}^{N-1} H_n(S_{n+1} - S_n)] + E[4S_N^2]$$

$$E[\bar{S}_N^2] \leq E[H_n E[(S_{n+1} - S_n)|\mathcal{F}_n]] + E[4S_N^2]$$

Siccome S, nelle ipotesi della disuguaglianza massimale di Doob, è una martingala segue che:

$$E[(S_{n+1} - S_n)|\mathcal{F}_n] = 0$$

Quindi:

$$E[\bar{S}_N^2] \leq 4E[S_N^2]$$

1.2.1 Dimostrazione

Per dimostrare la disuguaglianza puntuale di Doob ci servirà un lemma, una proposizione e la seguente relazione:

$$x^2 + 2x(y - x) \leq y^2 \quad \forall x, y \tag{1.3}$$

la quale è equivalente a $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$.

Lemma 1.2.2. *Siano $S_0, S_1, ...S_N$ numeri reali e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Allora:*

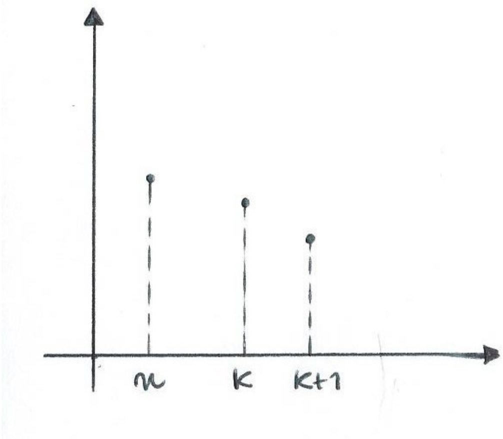
$$\sum_{k=0}^{N-1} h(\bar{S}_k)(S_{k+1} - S_k) = \sum_{k=0}^{N-1} h(\bar{S}_k)(\bar{S}_{k+1} - \bar{S}_k) + h(\bar{S}_N)(S_N - \bar{S}_N) \tag{1.4}$$

Dimostrazione. Consideriamo il termine a destra:

$$\sum_{k=0}^{N-1} h(\bar{S}_k)(\bar{S}_{k+1} - \bar{S}_k) + h(\bar{S}_N)(S_N - \bar{S}_N)$$

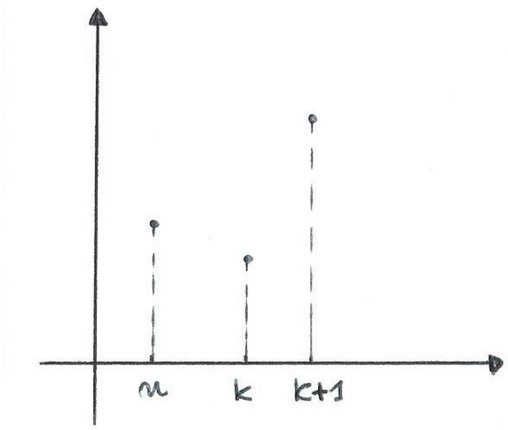
Fissiamo k.
Abbiamo due possibilità:

1. Se $S_{k+1} \leq \bar{S}_k$



abbiamo che $\bar{S}_{k+1} = \bar{S}_k$ quindi $h(\bar{S}_k)(\bar{S}_{k+1} - \bar{S}_k) = 0$

2. Se $S_{k+1} > \bar{S}_k$



abbiamo che $\bar{S}_k = S_n$ e $\bar{S}_{k+1} = S_{k+1}$
quindi si ottiene:

$$\begin{aligned} h(\bar{S}_k)(\bar{S}_{k+1} - \bar{S}_k) &= h(\bar{S}_k)(S_{k+1} - S_n) \\ &= h(\bar{S}_k)((S_{k+1} - S_k) + (S_k - S_{k-1}) + ... + (S_{n+1} - S_n)) \\ &= h(\bar{S}_k)(S_{k+1} - S_k) + h(\bar{S}_{k-1})(S_k - S_{k-1}) + ... + h(\bar{S}_n)(S_{n+1} - S_n)) \end{aligned}$$

Così ogni termine a destra viene associato ad un termine a sinistra. Il lemma risulta così dimostrato. □

Esempio 1.1. Prendiamo N=1.
La (1.4) diventa:

$$h(\bar{S}_0)(S_1 - S_0) = h(\bar{S}_0)(\bar{S}_1 - \bar{S}_0) + h(\bar{S}_1)(S_1 - \bar{S}_1)$$

Consideriamo i due casi:

1. Se $S_0 \leq S_1$

   abbiamo che $\bar{S}_0 = S_0$ e $\bar{S}_1 = S_1$.
   Risulta così $h(\bar{S}_1)(S_1 - \bar{S}_1) = 0$.
   Quindi l'uguaglianza diventa $h(\bar{S}_0)(S_1 - S_0) = h(\bar{S}_0)(\bar{S}_1 - \bar{S}_0)$.

2. Se $S_0 > S_1$

   abbiamo che $\bar{S}_0 = S_0$ e $\bar{S}_1 = S_0$.
   Risulta così $h(\bar{S}_0)(\bar{S}_1 - \bar{S}_0) = 0$.
   Quindi l'uguaglianza diventa $h(\bar{S}_0)(S_1 - S_0) = h(\bar{S}_1)(S_1 - \bar{S}_1)$.

In entrambi i casi l'uguaglianza è verificata.

Esempio 1.2. Prendiamo N=2.
La (1.4) diventa:

$$h(\bar{S}_0)(S_1 - S_0) + h(\bar{S}_1)(S_2 - S_1) = h(\bar{S}_0)(\bar{S}_1 - \bar{S}_0) + h(\bar{S}_1)(\bar{S}_2 - \bar{S}_1) + h(\bar{S}_2)(S_2 - \bar{S}_2)$$

Consideriamo i casi:

1. Se $S_0 \geq S_1 \geq S_2$ oppure $S_0 \geq S_2 \geq S_1$

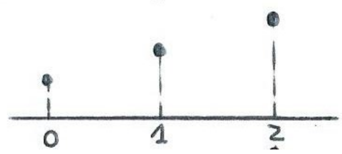
abbiamo che $\bar{S}_0 = S_0$, $\bar{S}_1 = S_0$ e $\bar{S}_2 = S_0$.
Risulta così $h(\bar{S}_0)(\bar{S}_1 - \bar{S}_0) = 0$ e $h(\bar{S}_1)(\bar{S}_2 - \bar{S}_1) = 0$.
Quindi l'uguaglianza diventa:

$$h(\bar{S}_0)(S_1 - S_0) + h(\bar{S}_1)(S_2 - S_1) = h(\bar{S}_2)(S_2 - \bar{S}_2)$$
$$h(S_0)(S_1 - S_0) + h(S_0)(S_2 - S_1) = h(S_0)(S_2 - S_0)$$

2. Se $S_1 \geq S_2 \geq S_0$ oppure $S_1 \geq S_0 \geq S_2$

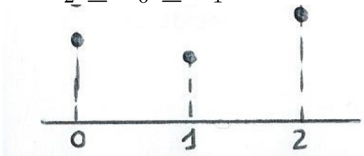
abbiamo che $\bar{S}_0 = S_0$, $\bar{S}_1 = S_1$ e $\bar{S}_2 = S_1$.
Risulta così $h(\bar{S}_1)(\bar{S}_2 - \bar{S}_1) = 0$.
Quindi l'uguaglianza diventa
$h(\bar{S}_0)(S_1 - S_0) + h(\bar{S}_1)(S_2 - S_1) = h(\bar{S}_0)(\bar{S}_1 - \bar{S}_0) + h(\bar{S}_2)(S_2 - \bar{S}_2)$

3. Se $S_2 \geq S_1 \geq S_0$



abbiamo che $\bar{S}_0 = S_0$, $\bar{S}_1 = S_1$ e $\bar{S}_2 = S_2$.
Risulta così $h(\bar{S}_2)(S_2 - \bar{S}_2) = 0$.
Quindi l'uguaglianza diventa
$h(\bar{S}_0)(S_1 - S_0) + h(\bar{S}_1)(S_2 - S_1) = h(\bar{S}_0)(\bar{S}_1 - \bar{S}_0) + h(\bar{S}_1)(\bar{S}_2 - \bar{S}_1)$

4. Se $S_2 \geq S_0 \geq S_1$

   abbiamo che $\bar{S}_0 = S_0$, $\bar{S}_1 = S_0$ e $\bar{S}_2 = S_2$.
   Risulta così $h(\bar{S}_0)(\bar{S}_1 - \bar{S}_0) = 0$ e $h(\bar{S}_2)(S_2 - \bar{S}_2) = 0$.
   Quindi l'uguaglianza diventa
   $h(\bar{S}_0)(S_1 - S_0) + h(\bar{S}_1)(S_2 - S_1) = h(\bar{S}_1)(\bar{S}_2 - \bar{S}_1)$

In tutti i casi l'uguaglianza è verificata.

Proposizione 1.2.3. *Siano $S_0, S_1, ..., S_N$ numeri reali e sia*

$$\bar{S}_n = \max_{0 \leq u \leq n} S_u$$

$$\bar{S}_N^2 \leq -4 \sum_{k=0}^{N-1} \bar{S}_k (S_{k+1} - S_k) + 4S_N^2 - 2S_0^2 \tag{1.5}$$

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che:

$$-4 \sum_{k=0}^{N-1} \bar{S}_k (S_{k+1} - S_k) + 4S_N^2 - 2S_0^2 - \bar{S}_N^2 \geq 0 \tag{1.6}$$

Ricordiamo la (1.4):

$$\sum_{k=0}^{N-1} h(\bar{S}_k)(S_{k+1} - S_k) = \sum_{k=0}^{N-1} h(\bar{S}_k)(\bar{S}_{k+1} - \bar{S}_k) + h(\bar{S}_N)(S_N - \bar{S}_N)$$

Consideriamo $h(\bar{S}_k) = -4\bar{S}_k$ quindi otteniamo:

$$\sum_{k=0}^{N-1} -4\bar{S}_k (S_{k+1} - S_k) = \sum_{k=0}^{N-1} -4\bar{S}_k (\bar{S}_{k+1} - \bar{S}_k) - 4\bar{S}_N (S_N - \bar{S}_N)$$

Utilizzando la (1.3) si ottiene:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N-1} -4\bar{S}_k(\bar{S}_{k+1} - \bar{S}_k) &\geq -2\sum_{k=0}^{N-1}(\bar{S}_{k+1}^2 - \bar{S}_k^2)\\ &= -2\left[(\bar{S}_N^2 - \bar{S}_{N-1}^2) + (\bar{S}_{N-1}^2 - \bar{S}_{N-2}^2) + ... + (\bar{S}_2^2 - \bar{S}_1^2) + (\bar{S}_1^2 - \bar{S}_0^2)\right]\\ &= -2\bar{S}_N^2 + 2\bar{S}_0^2\end{aligned}$$

Quindi si ottiene:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N-1} -4\bar{S}_k(S_{k+1} - S_k) &\geq -2\bar{S}_N^2 + 2\bar{S}_0^2 - 4\bar{S}_N(S_N - \bar{S}_N)\\ &= 2\bar{S}_N^2 + 2\bar{S}_0^2 - 4\bar{S}_N S_N\end{aligned}$$

Tornando alla (1.6):

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N-1} -4\bar{S}_k(S_{k+1} - S_k) + 4S_N^2 - 2S_0^2 - \bar{S}_N^2 &\geq 2\bar{S}_N^2 + 2\bar{S}_0^2 - 4\bar{S}_N S_N + 4S_N^2 - 2S_0^2 - \bar{S}_N^2\\ &= \bar{S}_N^2 - 4\bar{S}_N S_N + 4S_N^2\\ &= (\bar{S}_N - 2S_N)^2 \geq 0\end{aligned}$$

La proposizione risulta così dimostrata. $\square$

Capitolo 2

Significato Finanziario

In questo capitolo cercheremo di spiegare la disuguaglianza di Doob in termini di finanza matematica.

2.1 Interpretazione finanziaria della disuguaglianza puntuale di Doob

Consideriamo $S = (S_n)_{0 \leq n \leq N}$ il processo che descrive il prezzo di un titolo.
Consideriamo un'opzione esotica che paga $\bar{S}_N^2$ a tempo N e un'opzione europea che paga S_N^2 a tempo N.

La disuguaglianza puntuale di Doob:

$$\bar{S}_N^2 \leq -4 \sum_{n=0}^{N-1} \bar{S}_n (S_{n+1} - S_n) + 4 S_N^2$$

ora può essere interpretata come una **super replicazione indipendente dal modello** per l'opzione esotica $\bar{S}_N^2$.
Infatti conoscendo il valore dell'opzione europea S_N^2 e utilizzando la disu-

guaglianza puntuale di Doob possiamo stimare il valore $\bar{S}_N^2$ dell'opzione esotica.

2.2 Modello classico di finanza matematica

Consideriamo uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_n)$ e una martingala adattata $(S_n)_{0 \leq n \leq N}$.
Sia $\mathcal{M}^e(S)$ l'insieme delle misure di probabilità $\mathcal{Q}$ su $\mathcal{F}$, con $\mathcal{Q} = P$, tale che S è una $\mathcal{Q}$-martingala.
Si assume che $\mathcal{M}^e(S) \neq \emptyset$, ciò che ci deve essere almeno una misura martingala.

Ora studiamo separatamente il caso di mercato completo e mercato incompleto.

2.2.1 Caso di Mercato Completo

Supponiamo che $\mathcal{M}^e(S) = \{\mathcal{Q}\}$.
In questo caso per il teorema di rappresentazione delle martingale possiamo dire che ogni derivato $X_N \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ può essere replicato da:

$$X_N = E_{\mathcal{Q}}[X_N] + \sum_{n=0}^{N-1} H_n(S_{n+1} - S_n) \tag{2.1}$$

dove $H_n = -4\bar{S}_n$ è una strategia predicibile.

Osservazione 3. La (2.1) deriva dal secondo teorema fondamentale della valutazione (vedi Appendice C).

2.2.2 Caso di Mercato Incompleto

Supponiamo che $\mathcal{M}^e(S) \neq \emptyset$.
Ogni derivato $X_N \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ può essere super-replicato da:

$$X_N \leq X_0 + \sum_{n=0}^{N-1} H_n(S_{n+1} - S_n) \tag{2.2}$$

dove:

$$X_0 = \sup_{\mathcal{Q} \in \mathcal{M}^e(S)} E_{\mathcal{Q}}[X_N] \tag{2.3}$$

e H_n è una strategia predicibile.

Appendice A

Elementi di probabilità

A.1 Spazi di probabilità

Considero Ω insieme non vuoto.

Definizione A.1. Una σ-algebra $\mathcal{F}$ è una famiglia di sottoinsiemi di Ω tale che:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. se $F \in \mathcal{F}$ allora $F^c = (\Omega - F) \in \mathcal{F}$
3. per ogni successione $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di $\mathcal{F}$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{F}$$

Esempio A.1. Una σ-algebra importante è quella dei borelliani $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Tale σ-algebra è generata dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^n$.

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\{A \quad | \quad A \quad aperto \quad in \quad \mathbb{R}^n\})$$

Definizione A.2. Una misura di probabilità sulla σ-algebra $\mathcal{F}$ di Ω è un'applicazione $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ tale che:

1. $P(\emptyset) = 0$
2. Per ogni successione $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di $\mathcal{F}$ a due a due disgiunti vale:
$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(F_n)$$
3. $P(\Omega) = 1$

Definizione A.3. Uno spazio di probabilità è una terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, dove:

- $\mathcal{F}$ è una σ-algebra su Ω
- P è una misura di probabilità su $\mathcal{F}$

A.1.1 Variabili aleatorie

Definizione A.4. Una variabile aleatoria sulla spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ è una funzione misurabile $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ tale che:

$$X^{-1}(H) \in \mathcal{F} \text{ con } H \in \mathcal{B}$$
$$\text{dove: } X^{-1}(H) = \{\omega \in \Omega \quad | \quad X(\omega) \in H\}$$

A.1.2 Valore atteso

Definizione A.5. Data una variabile aleatoria $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ sommabile definita su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, si definisce valore atteso di X il vettore di $\mathbb{R}^N$

$$E[X] = \int_{\Omega} X dP$$

A.1.3 Attesa condizionata

Definizione A.6. Data una variabile aleatoria reale sommabile X e un evento $B \in \mathcal{F}$ di probabilità positiva si definisce attesa di X condizionata all'evento B

$$E[X|B] = \frac{1}{P(B)} \int_B X dP$$

Dato $B \in \mathcal{F}$ tale che $0 \leq P(B) \leq 1$ si indica con $\mathcal{G}$ la σ-algebra generata da B ($\mathcal{G} = \sigma(B)$)

$$\mathcal{G} = \{\varnothing, \Omega, B, B^c\}$$

Definizione A.7. Sia X una variabile aleatoria reale sommabile e $B \in \mathcal{F}$ un evento di probabilità positiva. Sia $\mathcal{G}$ la σ-algebra generata da B.
Si definisce attesa di X condizionata a $\mathcal{G}$:

$$E[X|\mathcal{G}](\omega) = \begin{cases} E[X|B], & \omega \in B \\ E[X|B^c], & \omega \in B^c \end{cases}$$

Osservazione 4. $E[X|\mathcal{G}]$ è una variabile aleatoria che stima X a seconda che B sia avvenuto o meno. $E[X|\mathcal{G}]$ rappresenta quindi il valore atteso di X note le informazioni di $\mathcal{G}$, ossia rappresenta la miglior stima di X in base alle informazioni di $\mathcal{G}$.

Proprietà dell'attesa condizionata:

1. $E[X|\mathcal{G}]$ è $\mathcal{G}$ misurabile
2. $\int_G X dP = \int_G E[X|\mathcal{G}] dP \quad \forall G \in \mathcal{G}$

A.2 Processi stocastici discreti

Definizione A.8. Un processo stocastico discreto in $\mathbb{R}^N$ è una famiglia $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ di variabili aleatorie definite su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a valori in $\mathbb{R}^N$

$$X_n : \Omega \to \mathbb{R}^N \quad n \in \mathbb{N}_0$$

dove n rappresenta l'indice temporale, infatti stiamo considerando il tempo in maniera discreta.

Definizione A.9. Una filtrazione sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ è una famiglia $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ crescente di sotto-σ-algebre di $\mathcal{F}$.

Definizione A.10. Il processo X si dice adattato alla filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ se X_n è $\mathcal{F}_n$ misurabile $\forall n \geq 0$

Definizione A.11. Dato $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_n)$ e $(X_n)_{n\geq 0}$ un processo stocastico adattato, diciamo che $(X_n)_{n\geq 0}$ è una martingala se:

1. $E[|X_n|] < \infty \quad \forall n$
2. $X_n = E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \quad \forall n \geq 0$

Appendice B

Derivati finanziari

Un derivato è uno strumento finanziario il cui valore dipende da altri strumenti finanziari chiamati strumenti primitivi o sottostanti. Ogni derivato può dipendere da uno o più titoli sottostanti.
I sottostanti in genere sono dei titoli che si possono comprare o vendere, come ad esempio un'azione o un titolo di stato, oppure possono essere anche delle quotazioni su beni come petrolio, oro, ecc...

L'esempio più semplice di derivato è dato dalle **opzioni**.

B.1 Opzioni

Un'opzione è un contratto finaziario nel quale vengono fissati:

- un *sottostante*;
- una data di *scadenza* (al tempo futuro T);
- un prezzo K detto *prezzo strike*.

I due tipi di opzioni più utilizzate sono le **opzioni call** e le **opzioni put**.

B.1.1 Opzioni Call

Un'opzione Call è un contratto che da, a chi lo compra, il diritto di acquistare una certa quantità di titolo sottostante alla scadenza T al prezzo strike fissato, K.

Questo tipo di opzione è molto utile per gestire il rischio relativo all'andamento del sottostante, infatti chi compra oggi un'opzione Call può fissare il prezzo con cui acquisterà il sottostante alla data di scadenza.

Si chiama **pay-off** il valore del derivato alla scadenza. Il pay-off per un'opzione Call è dato da:

$$(S_T - K)^+ = \max\{0, S_T - K\}$$

dove S_T è il prezzo del sottostante alla scadenza T.

Alla scadenza T ci sono infatti due eventualità:

- $S_T > K$ il prezzo di mercato alla scadenza è maggiore del prezzo strike, quindi conviene esercitare l'opzione e comprare al prezzo K.
  In tal caso il payoff è $S_T - K$ che corrisponde al ricavo che si otterrebbe acquistando il sottostante al prezzo K e rivendendolo al prezzo di mercato S_T.

- $S_T < K$ il prezzo di mercato alla scadenza è minore del prezzo strike, quindi non conviene esercitare l'opzione, ma conviene comprare il sottostante direttamente al prezzo di mercato S_T. In tal caso il payoff è nullo.

B.1.2 Opzioni Put

Un'opzione Put è un contratto che da, a chi lo compra, il diritto di vendere una certa quantità di titolo sottostante alla scadenza T al prezzo strike fissato, K.

Questo tipo di opzione è molto utile per gestire il rischio relativo all'andamento del sottostante, infatti chi compra oggi un'opzione Put può fissare il prezzo con cui venderà il sottostante alla data di scadenza.

Il pay-off per un'opzione Put è dato da:

$$(K - S_T)^+ = \max\{0, K - S_T\}$$

dove S_T è il prezzo del sottostante alla scadenza T.

Alla scadenza T ci sono infatti due eventualità:

- $S_T > K$ il prezzo di mercato alla scadenza è maggiore del prezzo strike, quindi non conviene esercitare l'opzione, ma conviene vendere al prezzo di mercato S_T.
  In tal caso il payoff è nullo.

- $S_T < K$ il prezzo di mercato alla scadenza è minore del prezzo strike, quindi conviene esercitare l'opzione e vendere il sottostante al prezzo strike K.
  In tal caso il payoff è $K - S_T$ che corrisponde al ricavo che si otterrebbe vendendo il sottostante al prezzo K e ricomprandolo al prezzo di mercato S_T.

B.1.3 Problemi

Il valore finale di un'opzione dipende dal prezzo del sottostante a scadenza, il quale è incognito. Per questo motivo ci sono due problemi di fondamentale importanza:

1. PROBLEMA DELLA VALUTAZIONE: la determinazione del giusto prezzo (detto premio) per l'opzione, cioè del prezzo che il compratore deve pagare per comprare l'opzione al tempo iniziale.

2. PROBLEMA DELLA REPLICAZIONE: la determinazione di una strategia di investimento che, utilizzando il premio, riesca a replicare a scadenza il pay-off qualsiasi sia il valore del sottostante alla scadenza.

B.1.4 Principio di assenza d'arbitraggi

Un arbitraggio è la possibilità di compiere operazioni finanziarie che producono un profitto privo di rischio, senza alcun impiego di denaro. Il principio di assenza d'arbitraggi dice che:

se due strumenti finanziari hanno con certezza lo stesso valore in una data futura, allora devono avere lo stesso valore anche attualmente.

Cioè, presi X_t e Y_t valori di due strumenti finanziari si deve avere:

$$X_T \leq Y_T \Rightarrow X_t \leq Y_t \quad \forall t \leq T$$

In particolare:

$$X_T = Y_T \Rightarrow X_t = Y_t \quad \forall t \leq T$$

Appendice C

Mercati discreti

Consideriamo uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_n)$,
con Ω finito e $P(w) > 0 \quad \forall w \in \Omega$.
Fissato un intervallo temporale $[0, T]$ prendiamo $t_n = \frac{T}{N}n$.
I t_n sono dette date di contrattazione.

A questo punto consideriamo:

- B titolo non rischioso (bond)

$$\begin{cases} B_{n+1} = B_n(1 - r\frac{T}{N}) \\ B_0 = 1 \end{cases}$$

  dove: r = tasso di interesse nell'intervallo $[t_n, t_{n+1}]$.

- $S = (S^1, ..., S^d)$ d titoli rischiosi

$$\begin{cases} S^i_{n+1} = S^i_n(1 + \mu^i_{n+1}) \\ S^i_0 \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

  dove: μ = vettore dei rendimenti.

(B, S) è un mercato discreto sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_n)$.

C.1 Strategie

Definizione C.1. Dato un mercato (B, S) su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_n)$, si definisce portafoglio (o strategia) una coppia (α, β) di processi stocastici dove $\alpha = (\alpha^1, ..., \alpha^d)$.

Il valore della strategia (α, β) all'istante n è dato da:

$$V_n^{(\alpha,\beta)} = \sum_{i=1}^{d} \alpha_n^i S_n^i + \beta_n B_n$$

Definizione C.2. Una strategia (α, β) si dice autofinanziante se vale la relazione:

$$V_{n-1}^{(\alpha,\beta)} = \alpha_n S_{n-1} + \beta_n B_{n-1}$$

Per la condizione di autofinanziamento si avrà:

$$\alpha_n S_n + \beta_n B_n = \alpha_{n+1} S_n + \beta_{n+1} B_n$$

quindi il valore complessivo della strategia rimane invariato.
La strategia si chiama autofinanziante perchè si investe solo il capitale iniziale, senza aggiungere o togliere denaro.

Definizione C.3. Una strategia (α, β) si dice predicibile se (α_n, β_n) è $\mathcal{F}_{n-1}$-misurabile $\forall n = 1, ...N$.

Considero la famiglia della strategie autofinanzianti e predicibili.

$$\mathcal{A} = \{(\alpha, \beta); (\alpha, \beta) \quad autofinanziante \quad e \quad predicibile\}$$

Definizione C.4. Si dice che una strategia (α, β) è un arbitraggio se valgono le seguenti proprietà:

- $V_0(\alpha, \beta) = 0$

$\exists n$ tale che:

- $V_n(\alpha, \beta) \geq 0$
- $P(V_n(\alpha, \beta) > 0) > 0$

Definizione C.5. Diciamo che il mercato è libero da arbitraggi se la famiglia $\mathcal{A}$ non contiene arbitraggi.

Osservazione 5. Ogni mercato sensato deve essere libero da arbitraggi.

C.2 Misura martingala

Definizione C.6. Una misura martingala è una misura di probabilità Q sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tale che:

- Q è equivalente a P
- $\forall n = 1, ...N$ $\widetilde{S}$ è una Q-martingala

dove $\widetilde{S}$ è il prezzo neutrale al rischio.

C.3 Primo teorema fondamentale della valutazione

Teorema C.3.1. *Un mercato discreto è libero da arbitraggi se e solo se esiste almeno una misura martingala.*

C.4 Secondo teorema fondamentale della valutazione

Teorema C.4.1. *Un mercato libero da arbitraggi è completo se e solo se la misura martingala è unica.*

Bibliografia

[1] A.PASCUCCI *Calcolo stocastico per la finanza*. Dipartimento di Matematica, Bologna.

[2] B.ACCIAIO, M.BEIGLBOCK, F.PENKNER, W.SCHACHERMAYER, J. TEMME *A Trajectorial Interpretation of Doob's Martingale Inequalities*. The Annals of Applied Probability 2013, Vol. 23, No. 4, 1494-1505, Institute of Mathematical Statistics, 2013.

[3] W.SCHACHERMAYER *From Doob's inequality to model-free superhedging*. University of Vienna, Faculty of Mathematics.

Ringraziamenti

In primo luogo vorrei ringraziare il mio relatore, prof.Andrea Pascucci, per la disponibilità e la pazienza con cui mi ha seguita durante la stesura di questa tesi.

Un gigantesco grazie va sicuramente ai miei genitori, perchè senza di loro e senza il loro sostegno probabilmente io oggi non sarei arrivata fino a qui.
Un altro grazie speciale va a Davide, che ha saputo starmi accanto durante tutto questo percorso.

Grazie a Ilaria, la mia amica di sempre, perchè anche quando a separarci c'erano migliaia di kilometri sapevamo di poter sempre contare l'una sull'altra.
Vorrei ringraziare i miei compagni di corso: Rachele e Palma, ma in particolar modo devo ringraziare Marina, perchè mi ha sempre sostenuta, anche quando io stessa avevo smesso di crederci.

Ultimo ringraziamento, ma non meno importante, va alle mie professoresse di Matematica del Liceo, perchè sono riuscite a trasmettermi la loro passione per questa materia. Probabilmente senza di voi, non avrei intrapreso questo bellissimo percorso.

Grazie di cuore a tutti coloro che non hanno mai dubitato che ce l'avrei fatta.