Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

TEOREMA DELLA MAPPA DI RIEMANN

Tesi di Laurea Triennale in Analisi Complessa

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Sergio Venturini

Correlatore:
Chiar.mo Prof.
Alberto Parmeggiani

Presentata da:
Gianluca Bosi

Sessione II
Anno Accademico 2012/2013

Indice

Introduzione

Il teorema della mappa di Riemann è un risultato fondamentale dell'analisi complessa che afferma l'esistenza di un biolomorfismo tra un qualsiasi dominio semplicemente connesso incluso strettamente nel piano ed il disco unità. Si tratta di un teorema di grande importanza e generalità, dato che non si fa alcuna ipotesi sul bordo del dominio considerato. Inoltre ha applicazioni in diverse aree della matematica, ad esempio nella topologia: può infatti essere usato per dimostrare che due domini semplicemente connessi del piano sono tra loro omeomorfi.

Presentiamo in questa tesi due diverse dimostrazioni del teorema.

Nel primo capitolo richiameremo i principali risultati della teoria delle forme differenziali negli aperti del piano complesso e la relativa teoria dell'integrazione che utilizzeremo costantemente nel seguito della trattazione.

Nel secondo capitolo dimostreremo quei risultati della teoria dell'analisi complessa necessari per la trattazione del teorema della mappa di Riemann.

Nel terzo capitolo descriveremo la topologia dello spazio delle funzioni olomorfe su un dominio. Dimostreremo due teoremi che avranno un ruolo cruciale nella prima dimostrazione del teorema di Riemann. Il primo si tratta del teorema di Weierstrass che afferma che lo spazio delle funzioni olomorfe è chiuso nello spazio delle funzioni continue rispetto alla topologia della convergenza puntuale e che l'operatore di derivata è ivi continuo. Il secondo e il teorema di Montel, che caratterizza i compatti di tale spazio.

Il quarto è il capitolo centrale di questa tesi: viene data la prima dimostrazione del teorema della mappa di Riemann. Per la precisione mostreremo che ogni dominio D strettamente contenuto nel piano complesso in cui ogni funzione olomorfa non nulla ammette una determinazione olomorfa della radice quadrata è biolomorfo al disco unità U.

Mostreremo che in un dominio siffatto, preso un punto arbitrario $z_0 \in D$ i biolomorfismi tra D ed U che trasformano $z_0 \in D$ in $0 \in U$ sono esattamente le funzioni che massimizzano il funzionale $f \mapsto |f'(z_0)|$ nella classe di tutte le funzioni olomorfe iniettive che da D in U che trasformano z_0 in 0.

Mostreremo l'esistenza di tali massimi mediante un argomento di compattezza di opportune famiglie di funzioni olomorfe rispetto alla topologia della convergenza uniforme sui compatti.

Nel quinto ed ultimo capitolo presenteremo una seconda dimostrazione del teorema della mappa di Riemann supponendo che il dominio sia limitato ed abbia bordo liscio. Mostreremo se D è un dominio limitato con bordo liscio, assegnata un'arbitraria funzione φ positiva e di classe C^∞ sulla frontiera ∂D, esiste un'unica funzione olomorfa su D, di classe C^∞ su $\overline{D}$, avente tutti gli zeri su un sottoinsieme finito preassegnato di D con le relative molteplicità e che soddisfa $|f| = \varphi$ su ∂D. Mostreremo allora che ogni funzione che verifica $|f| \equiv 1$ ed avente un unico zero semplice in D è necessariamente un biolomorfismo tra D ed U.

Capitolo 1

Forme differenziali nel piano

1.1 Forme differenziali lineari

Indicheremo con $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ rispettivamente il campo dei numeri reali e dei numeri complessi muniti delle rispettive topologie euclidee.

Per ogni $z_0 \in \mathbb{C}$ e per ogni $r > 0$ indicheremo con

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z = 0| < r\}$$

il disco aperto di centro z_0 e raggio r.

Porremo inoltre

$$U = D(0, 1)$$

e

$$S^1 = \partial U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Se $A \subset \mathbb{C}$ è un aperto indicheremo con $C^k(A)$, $k = 0, 1, \ldots, \infty$, lo spazio delle funzioni su A a valori complessi aventi tutte le derivate (in senso reale) di ordine minore o uguale a k continue su A. Se $k = 0$ scriveremo anche $C(A)$ al posto di $C^0(A)$.

Osserviamo che $C^k(A)$, con le usuali operazione di somma e prodotto tra funzioni, è un anello commutativo con unità.

Indicheremo inoltre con $\overline{A}$ la chiusura di A. Infine $C^k(\overline{A})$ è lo spazio delle funzioni di classe C^k su A che si estendono con continuità a $\overline{A}$ insieme a tutte le derivate di ordine minore o uguale a k.

Definizione 1.1.1 *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto. Una funzione*

$$\omega : A \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \tag{1.1}$$

si dice forma differenziale lineare *su* A *o semplicemente* forma differenziale *di classe* C^k *se per ogni* $\xi \in \mathbb{C}$ *la funzione*

$$A \ni z \mapsto \omega(z, \xi) \in \mathbb{C}$$

è di classe C^k *su* A *e per ogni* $z \in A$ *la funzione*

$$\mathbb{C} \ni \xi \mapsto \omega(z, \xi) \in \mathbb{C}$$

è $\mathbb{R}$*-lineare.*

Indicheremo con

$$\Omega_k(A)$$

lo spazio delle forme differenziali su A di classe C^k. Scriveremo $\Omega(A)$ al posto di $\Omega_\infty(A)$.

Indicheremo inoltre con $\Omega_k(\overline{A})$ lo spazio delle forme

$$\omega : \overline{A} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

la cui restrizione ad $A \times \mathbb{C}$ appartiene a $\Omega_k(A)$ e per ogni $\xi \in \mathbb{C}$ la funzione $z \mapsto \omega(z, \xi)$ appartiene a $C^k(\overline{A})$.

Definizione 1.1.2 *Sia* $A \subset \mathbb{C}$ *una aperto e sia* $f \in C^k(A)$*,* $k > 1$*. Si definisce il* differenziale *di* f *e si indica con* df *la forma differenziale di classe* C^{k-1} *definita da*

$$df(z, \xi) = \frac{d}{dt} f(z + t\xi)\bigg|_{t=0},$$

dove t *è una variabile reale.*

Osserviamo che se $f \in C^\infty(A)$ allora $df \in \Omega(A)$.

Definizione 1.1.3 *Sia* $A \subset \mathbb{C}$ *una aperto e sia* $\omega \in \Omega_{k+1}(A)$ *una forma differenziale su* A*. Diremo che* $f \in C^k(A)$ *è una* primitiva *di* ω *se* $df = \omega$*.*

Osserviamo che lo spazio $\Omega_k(A)$ ha una struttura naturale di modulo sull'anello $C^k(A)$.

Se indichiamo con x e y rispettivamente le funzioni parte reale e immmaginaria di z, ossia le funzioni

$$\begin{aligned} z &\mapsto \Re z, \\ z &\mapsto \Im z, \end{aligned}$$

si verifica facilmente ogni forma differenziale ω può essere scritta in modo univoco come

$$\omega = pdx + qdy$$

dove $p, q \in C^k(A)$ sono rispettivamente

$$\begin{aligned} p(z) &= \omega(z,1), \\ q(z) &= \omega(z,i), \end{aligned}$$

ossia lo spazio $\Omega_k(A)$ è un modulo libero su $C^k(A)$ generato dalle forme dx e dy.

Inoltre si verifica che per ogni $f \in C^1(A)$ vale l'uguaglianza

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Se indichiamo con z e $\overline{z}$ le funzioni

$$\begin{aligned} z &\mapsto z, \\ z &\mapsto \overline{z}, \end{aligned}$$

anche dz e $d\overline{z}$ sono generatori di $\Omega(A)$ e valgono le formule di trasformazione

$$\begin{cases} dz = dx + idy, \\ d\overline{z} = dx - idy \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} dx = \dfrac{dz + d\overline{z}}{2}, \\ dy = \dfrac{dz - d\overline{z}}{2i}. \end{cases}$$

Definizione 1.1.4 *Sia $f \in C^1(A)$. Definiamo $\frac{\partial f}{\partial z}$ e $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ mediante l'uguaglianza*

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}.$$

Proposizione 1.1.1 *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $f \in C^1(A)$ allora*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial f}{\partial y}\right), \\ \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial f}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Dimostrazione. Dalla definizione di differenziale segue che

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dz+d\overline{z}}{2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dz-d\overline{z}}{2i} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)d\overline{z} \end{aligned}$$

da cui la tesi.

□

1.2 Forme differenziali di secondo grado

Definizione 1.2.1 *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto. Una funzione*

$$\omega^2 : A \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \tag{1.2}$$

se dice forma differenziale di secondo grado *ovvero* 2-forma differenziale *di classe C^k se per ogni $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}$ la funzione*

$$z \mapsto \omega^2(z, \xi_1, \xi_2)$$

è di classe C^k su A e per ogni $z \in A$ la funzione

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \ni (\xi_1, \xi_2) \mapsto \omega^2(z, \xi_1, \xi_2) \in \mathbb{C}$$

è $\mathbb{R}$-bilineare ed antisimmetrica.

Indicheremo con $\Omega^2_k(A)$ lo spazio delle 2-forme differenziali su A di classe C^∞ e scriveremo anche $\Omega^2(A)$ al posto di $\Omega^2_\infty(A)$.

In modo analogo al caso delle forme lineari si definisce lo spazio $\Omega^2_k(\overline{A})$.

Definizione 1.2.2 *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e siano $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_k(A)$. Il* prodotto esterno *tra ω_1 ed ω_2 è la 2-forma $\omega_1 \wedge \omega_2$ su A definita ponendo*

$$\omega_1 \wedge \omega_2(z, \xi_1, \xi_2) = \det\begin{pmatrix} \omega_1(z,\xi_1) & \omega_1(z,\xi_2) \\ \omega_2(z,\xi_1) & \omega_2(z,\xi_2) \end{pmatrix}.$$

Definizione 1.2.3 *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $\omega \in \Omega_{k+1}(A)$ Il* differenziale *della forma lineare ω è la 2-forma $d\omega$ su A di classe C^k definita da*

$$d\omega(z, \xi_1, \xi_2) = \frac{d}{dt}\omega(z + t\xi_1, \xi_2)\bigg|_{t=0} - \frac{d}{dt}\omega(z + t\xi_2, \xi_1)\bigg|_{t=0},$$

dove t è una variabile reale.

Ogni 2-forma $\omega^2 \in \Omega^2_k(A)$ ammette un'unica rappresentazione come

$$\omega = pdx \wedge dy$$

con $p \in C^k(A)$ definita da

$$p(z) = \omega^2(z, 1, 1).$$

Si possono inoltre dimostrare le proprietà seguenti.

Proposizione 1.2.1 *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia k un intero non negativo. Allora:*

1. *se $\omega \in \Omega_k(A)$ allora*
$$\omega \wedge \omega = 0;$$
2. *se $f \in C^{k+2}(A)$ allora*
$$d^2 f = d(df) = 0;$$
3. *se $f \in C^k(A)$ e $\omega \in \Omega_k(A)$ allora*
$$d(f\omega) = df \wedge \omega;$$
4. *se $\omega = pdx + qdy$ con $p, q \in C^{k+1}(A)$ allora*
$$d\omega = \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

1.3 Integrazione

Gli enunciati seguenti descrivono i principali risultati della teoria dell'integrazione delle forme differenziali che utilizzeremo nel seguito.

Definizione 1.3.1 *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto. Diremo che A ha bordo liscio se la frontiera ∂A di A è rappresentabile come unione di immagini di curve differenziabili chiuse di classe C^∞.*

Indicheremo inoltre con

$$\nu_A : \partial A \to \mathbb{C}$$

la normale interna al dominio.

Proposizione 1.3.1 *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto limitato con bordo liscio. Esiste un unico funzionale $\mathbb{C}$-lineare*

$$\Omega^2_0(\overline{A}) \ni \omega^2 \mapsto \int_A \omega^2 \in \mathbb{C}$$

tale che se $\omega^2 = pdx \wedge dy$ *con* $p \in C(\overline{A})$ *allora*

$$\int_A \omega^2 = \int_A p(x+iy)dxdy,$$

dove l'integrale a secondo membro è l'integrale ordinario per funzioni continue di due variabili reali.

Proposizione 1.3.2 *Sia* $A \subset \mathbb{C}$ *un aperto limitato con bordo liscio e sia* $K \subset A$ *un compatto. Esiste un unico funzionale* $\mathbb{C}$*-lineare*

$$\Omega_1(\overline{A \setminus K}) \ni \omega \mapsto \int_{\partial A} \omega \in \mathbb{C}$$

tale che se

$$\gamma_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{C}, j = 1, \ldots, k$$

sono curve regolari chiuse differenziabili due a due disgiunte tali che

$$\partial A = \bigcup_{j=1}^{k} \gamma_j\big([a_i, b_i]\big)$$

e sono percorse in modo tale che per ogni $j = 1, \ldots, k$ *e per ogni* $t \in [a_j, b_j]$

$$\Im\Big(\dot\gamma_j(t)\overline{\nu_A\big(\gamma_j(t)\big)}\Big) < 0,$$

allora

$$\int_{\partial A} \omega = \sum_{j=1}^{k} \int_{a_j}^{b_j} \omega\big(\gamma_j(t), \dot\gamma_j(t)\big)\, dt$$

Uno dei principali risultati nella teoria dell'integrazione delle forme differenziali è il teorema di Stokes, che nel caso di domini piani prende il nome teorema di Green-Stokes.

Teorema 1.3.1 *(teorema di Green-Stokes) Sia* $A \subset \mathbb{C}$ *un aperto limitato con bordo liscio. Se* $\omega \in \Omega_1(\overline{A})$ *allora*

$$\int_{\partial A} \omega = \int_A d\omega \tag{1.3}$$

Richiamiamo ora la nozioni di forma chiusa ed esatta e di dominio semplicemente connesso.

Definizione 1.3.2 *Sia ω una forma differenziale lineare su A.*

Diremo che ω è esatta *se ammette una primitiva su A, ossia se esiste $f \in C^1(A)$ tale che*

$$df = \omega.$$

Diremo che ω è chiusa *se è di classe C^1 e*

$$d\omega = 0. \tag{1.4}$$

Osserviamo che essendo $d^2\omega = 0$ ogni forma esatta è necessariamente chiusa.

Diamo ora la definizione di semplice connessione per un dominio del piano.

Definizione 1.3.3 *Un aperto $D \subset \mathbb{C}$ si dice* dominio *se è connesso.*

Definizione 1.3.4 *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto. Siano $\alpha, \beta : S^1 \longrightarrow \mathbb{C}$ continue. Un'applicazione continua*

$$H : S^1 \times [0,1] \longrightarrow A$$

si dice omotopia *tra α e β, e diremo allora che α e β sono* omotope*, se per ogni $\xi \in S^1$,*

$$\begin{cases} H(\xi, 0) = \alpha(\xi), \\ H(\xi, 1) = \beta(\xi). \end{cases}$$

Definizione 1.3.5 *Sia $D \subset \mathbb{C}$ un dominio e $z_0 \in D$. Diremo che D è semplicemente connesso se ogni $\alpha : S^1 \longrightarrow D$ è omotopa in D ad un'applicazione costante.*

Nella teoria delle forme differenziali lineari si dimostra il risultato seguente:

Teorema 1.3.2 *Se $D \subset \mathbb{C}$ è un dominio semplicemente connesso allora ogni forma differenziale lineare chiusa su D è esatta.*

Capitolo 2

Alcuni teoremi sulle funzioni olomorfe in un dominio

In questo capitolo enunceremo e dimostreremo alcuni importanti risultati quali: il principio del massimo, il teorema di identità, il teorema dell'applicazione aperta.

2.1 Funzioni olomorfe

Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto. Ricordiamo che una funzione $f \in C^1(A)$ si dice *olomorfa* se verifica
$$\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x},$$
che per la proposizione 1.1.1 equivale a
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$$
Tali equazioni sono dette *equazioni di Cauchy-Riemann.*

Se $f = u + iv$ con u e v rispettivamente parte reale ed immaginaria di f le equazioni di Cauchy-Riemann equivalgono al sistema
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}.$$

Indicheremo con $H(A)$ l'algebra delle funzioni olomorfe su A. Le funzioni di $H(\mathbb{C})$ si dicono funzioni olomorfe intere.

Si verifica elementarmente che una funzione $f \in C^1(A)$ è olomorfa se per ogni $z \in A$ esiste la derivata complessa

$$f'(z) = \lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

ed in tal caso

$$f'(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial z}$$

Mostreremo in seguito che ogni funzione olomorfa è di classe C^∞ ed ammette le derivata complessa di ogni ordine.

Si può dimostrare che se una funzione $f(z)$ definita su un aperto ammette derivata complessa $f'(z)$ in ogni punto allora $f(z)$ è olomorfa, ossia la funzione $f'(z)$ è automaticamente continua. Non faremo uso di tale risultato in questa tesi.

Lemma 2.1.1 *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto. Per ogni $f \in C^1(A)$ abbiamo*

$$d(f dz) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z} \wedge dz.$$

Dimostrazione. Sia $f \in C^1(A)$. Utilizzando le proposizioni 1.2.1 e 1.1.1 otteniamo

$$d(f dz) = df \wedge dz = \left(\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z} \right) \wedge dz = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z} \wedge dz.$$

□

Come conseguenza immediata otteniamo la seguente caratterizzazione delle funzioni olomorfe.

Proposizione 2.1.1 *Sia $A \subset \mathbb{C}$ aperto. Allora $f \in H(A)$ se, e solo se, la forma differenziale $\omega = f dz$ è chiusa in A.*

Infine dal teorema di Green-Stokes si ottiene immediatamente l'enunciato seguente.

Teorema 2.1.1 *Sia $D \subset \mathbb{C}$ un dominio limitato a bordo liscio e sia $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$. Allora*

$$\int_{\partial D} f(\xi) d\xi = 0.$$

2.2 Formula di Cauchy

La formula di rappresentazione integrale di Cauchy permette di ricostruire una funzione olomorfa su un domino a partire dai valori che la funzione assume al bordo.

Lemma 2.2.1 *Sian $D \subset \mathbb{C}$ un dominio limitato con bordo liscio e sia $z \in D$. Allora*

$$\int_{\partial D} \frac{d\xi}{\xi - z} = 2\pi i. \tag{2.1}$$

Dimostrazione. Sia $z \in D$ e sia $\varepsilon > 0$ tale che $\overline{D(z,\varepsilon)} \subset D$.

Definiamo $D_\varepsilon = D \backslash \overline{D(z,\varepsilon)}$. La funzione

$$g(w) = \frac{1}{w - z}$$

è olomorfa in D_ε, per il teorema (2.1.1) abbiamo

$$0 = \int_{\partial D_\varepsilon} \frac{d\xi}{\xi - z} = \int_{\partial D} \frac{d\xi}{\xi - z} - \int_{\partial D(z,\varepsilon)} \frac{d\xi}{\xi - z}.$$

Ponendo $\xi = z + \varepsilon e^{i\theta}$, si ottiene

$$\int_{\partial D} \frac{d\xi}{\xi - z} = \int_{\partial D(z,\varepsilon)} \frac{d\xi}{\xi - z} = \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon i e^{i\theta}}{\varepsilon e^{i\theta}} d\theta = 2\pi i.$$

□

Lemma 2.2.2 *Sia $D \subset \mathbb{C}$ un dominio limitato con bordo liscio. Sia $z_0 \in D$ e supponiamo che $f \in H(D \backslash \{z_0\}) \cap C(\overline{D})$. Allora*

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0.$$

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $\overline{D(z_0,\varepsilon)} \subset D$. Consideriamo $D_\varepsilon = D \backslash \overline{D(z_0,\varepsilon)}$. Per il teorema (2.1.1) abbiamo

$$\int_{\partial D} f(z) dz = \int_{\partial D(z_0,\varepsilon)} f(z) dz.$$

Considerando i moduli osserviamo che

$$\left| \int_{\partial D} f(z) dz \right| = \left| \int_{\partial D(z_0,\varepsilon)} f(z) dz \right| \leq \int_{\partial D(z_0,\varepsilon)} |f(z)| dz \leq 2\pi\varepsilon M_\varepsilon$$

dove

$$M_\varepsilon = \max_{z \in \partial D(z_0,\varepsilon)} |f(z)|.$$

Essendo M_ε limitato in un intorno destro di 0, per $\varepsilon \longrightarrow 0$ otteniamo

$$\left| \int_{\partial D} f(z)dz \right| = \lim_{\varepsilon \to 0^+} 2\pi\varepsilon M_\varepsilon = 0.$$

□

Teorema 2.2.1 *(formula di Cauchy) Sia $D \subset \mathbb{C}$ un dominio limitato con bordo liscio. Se $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$ allora per ogni $z \in D$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Dimostrazione. Sia $z \in D$ arbitrario. Definiamo

$$g(w) = \begin{cases} \dfrac{f(w) - f(z)}{w - z} & \text{se} \quad w \in \overline{D} \backslash z \\ f'(w) & \text{se} \quad w = z \end{cases}$$

Essendo f olomorfa ne segue che $g \in H(D \backslash \{z\}) \cap C(\overline{D})$. Per il lemma precedente

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} g(\xi) d\xi = 0$$

ovvero

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi = 0.$$

Dunque, per il lemma (2.2.1),

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = f(z) \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{1}{\xi - z} d\xi = f(z).$$

□

Lemma 2.2.3 *Sia D un dominio limitato con bordo liscio e sia $f \in C(\partial D \times D)$. Se per ogni $\xi \in \partial D$ la funzione*

$$z \longmapsto f(\xi, z)$$

è olomorfa su D, allora la funzione

$$F(z) = \int_{\partial D} f(\xi, z) d\xi$$

è olomorfa su D.

Dimostrazione. E' sufficiente provare che F verifica l'equazione di Cauchy-Riemann.

Osserviamo che, essendo la funzione

$$z \longmapsto f(\xi, z)$$

olomorfa su D per ogni $\xi \in \partial D$, allora

$$\frac{\partial f(\xi, z)}{\partial \overline{z}} = 0.$$

Dai teoremi standard di integrazione rispetto ad un parametro abbiamo

$$\frac{\partial F}{\partial \overline{z}} = \int_{\partial D} \frac{\partial f(\xi, z)}{\partial \overline{z}} \, d\xi = 0$$

□

Corollario 2.2.1 *Sia $A \subset \mathbb{C}$ aperto e sia $f \in H(A)$. Allora f è indefinitamente derivabile in A (in senso complesso).*

Dimostrazione. Sia $z_0 \in A$ e consideriamo $D(z_0, r) \subset A,\ r > 0$, tale che $\overline{D(z_0, r)} \subset A$. E' sufficiente provare che $f' \in H(D(z_0, r))$.

Per la formula integrale di Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \ \forall z \in D(z_0, r),$$

e derivando f otteniamo

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{w \to z} \frac{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{\xi - w} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi}{w - z} \\
&= \lim_{w \to z} \frac{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\xi)(w-z)}{(\xi - w)(\xi - z)} d\xi}{w - z} \\
&= \lim_{w \to z} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - w)(\xi - z)} d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi
\end{aligned}$$

che è olomorfa su $D(z_0, r)$ per il lemma (2.2.3).

□

Osservazione 2.2.1 *Se $D(z_0, r)$ è un intorno di $z_0 \in A$ tale che $\overline{D(z_0, r)} \subset A$, allora la derivata di ordine k è data dalla formula*

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi \tag{2.2}$$

Terminiamo questa sezione con un risultato che utilizzeremo frequentemente nel resto della trattazione.

Proposizione 2.2.1 *Sia $D \subset \mathbb{C}$ un dominio e sia $z_0 \in D$. Se $f \in H(D \backslash \{z_0\}) \cap C(D)$ allora $f \in H(D)$.*

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare che f è olomorfa in un intorno di z_0.

Sia dunque $r > 0$ scelto in modo tale che $\overline{D(z_0, r)} \subset D$. Sia $g : D(z_0, r) \longrightarrow \mathbb{C}$ la funzione definita da

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Per il lemma (2.2.3) $g \in H\big(D(z_0, r)\big)$. Mostriamo che per ogni $z \in D(z_0, r)$

$$f(z) = g(z).$$

Osserviamo che, essendo f e g continue, è sufficiente supporre che $z \in D(z_0, r) \backslash \{z_0\}$.

Sia dunque $z \in D(z_0, r) \backslash \{z_0\}$ e consideriamo un disco $D(z, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ tale che $\overline{D(z, \varepsilon)} \subset D(z_0, r) \backslash \{z_0\}$. Sia $D_\varepsilon = D(z_0, r) \backslash \overline{D(z, \varepsilon)}$. Osserviamo che la funzione

$$w \longmapsto \frac{f(w)}{w - z}$$

è olomorfa su $D_\varepsilon \backslash \{z_0\}$ e continua su $\overline{D_\varepsilon}$. Per il lemma (2.2.2) abbiamo quindi

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z,\varepsilon)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

e per la formula di Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z,\varepsilon)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = f(z).$$

□

2.3 Il principio del massimo modulo ed il principio di identità

Dimostreremo i risultati di questa sezione servendoci sostanzialmente del seguente teorema, che è una diretta conseguenza della formula integrale di Cauchy nel caso di un disco.

Teorema 2.3.1 *(teorema della media) Sia $D(z, R)$ il disco di centro $z \in \mathbb{C}$ e raggio $R > 0$, e sia $f \in H\big(D(z, R)\big) \cap C\big(\overline{D(z, R)}\big)$. Allora*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + Re^{i\theta}) d\theta$$

Dimostrazione. Applicando la formula integrale di Cauchy, otteniamo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(z,R)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z+Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+Re^{i\theta})d\theta$$

□

Lemma 2.3.1 *$D \subset \mathbb{C}$ dominio, $f \in H(D)$. Se $|f|$ è costante, allora f è costante.*

Dimostrazione. Distinguiamo due casi: $|f| = 0$ e $|f| = c > 0$.

Se $|f| = 0 \Rightarrow f = 0$ e quindi f è costante.

Sia ora f tale che $|f| = c > 0$; poiché $f = u + iv$ con u e v rispettivamente parte reale e parte immaginaria di f, questa condizione è equivalente a

$$u^2 + v^2 = c^2$$

e osserviamo che u e v non si annullano mai simultaneamente. Derivando si ottiene la seguente coppia di equazioni:

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial u}{\partial x}u + 2\frac{\partial v}{\partial x}v &= 0 \\ 2\frac{\partial u}{\partial y}u + 2\frac{\partial v}{\partial y}v &= 0 \end{aligned}$$

ovvero (u, v) è soluzione non banale del sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}X + \frac{\partial v}{\partial x}X = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}Y + \frac{\partial v}{\partial y}Y = 0 \end{cases}$$

il quale perciò deve avere determinante nullo. Dunque

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

e applicando le equazioni di Cauchy-Riemann

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0,$$

da cui

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Sempre dalle equazioni di Cauchy-Riemann segue che

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Allora, essendo D connesso, ne segue che u e v sono costanti su D, dunque f è costante.

$\square$

Ricordiamo che nella teoria delle funzioni reali di variabile reale vale il seguente risultato.

Lemma 2.3.2 *Sia $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua.*

Se $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a,b]$ e

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0,$$

allora $f \equiv 0$.

Teorema 2.3.2 *Sia D un dominio e sia $f \in H(D)$, f non costante. Allora risulta:*

$$|f(z)| < \sup_D |f|, \ \forall z \in D.$$

Dimostrazione. Siano $M = \sup_D |f|$ ed $E = \{z \in D$ tali che $|f(z)| = M\}$. Vogliamo provare che $E = \varnothing$.

Distinguiamo due casi: $M < \infty$ ed $M = \infty$. Se $M = \infty$, la tesi è banalmente verificata.

Supponiamo ora che sia $M < \infty$. Siano $z_0 \in E$ e $R > 0$ tale che $\overline{D(z_0, R)} \subset D$. Mostriamo che $D(z_0, R) \subset E$, ossia $|f(z)| = M$ per ogni $z \in D(z_0, R)$.

Osserviamo che se $z \in D(z_0, R)$ allora $z = z_0 + re^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ e $r \in [0, R]$. Quindi è sufficiente dimostrare che se $\theta \in [0, 2\pi]$ e $r \in [0, R]$ allora

$$|f(z_0 + re^{i\theta})| = M.$$

Fissato $r \in [0, R]$, per il teorema della media (2.3.1) si ha

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta,$$

e quindi

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)| d\theta = |f(z_0)|, \end{aligned}$$

ovvero
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{i\theta})|d\theta = M.$$
Allora
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(M-|f(z_0+re^{i\theta})|)d\theta = 0$$
e poiché
$$M-|f(z_0+re^{i\theta})|\geq 0,$$
per il lemma (2.3.2) otteniamo
$$M\equiv |f(z_0+re^{i\theta})|.$$
Dunque E è aperto; inoltre E è chiuso essendo f continua. Allora poiché D è connesso, $E=\varnothing$ oppure $E=D$; se $E=D$, per il lemma (2.3.1) f è costante, contraddicendo le ipotesi. Dunque $E=\varnothing$, come richiesto.

$\square$

Corollario 2.3.1 *Siano D dominio limitato, $f\in H(D)\cap C(\overline{D})$, f non costante. Allora risulta:*
$$|f(z)|<\sup_{\partial D}|f|,\ \forall z\in D.$$
Dimostrazione. Sia $M=\sup_D|f|$. Poiché $\overline{D}$ è compatto, per il teorema di Weierstrass esiste $z_0\in\overline{D}$ tale che $|f(z_0)|=M$. Osserviamo che $z_0\notin D$, infatti per il teorema precedente
$$|f(z)|<M,\ \forall z\in D.$$
Allora $z_0\in\partial D$ e quindi $M=\sup_{\partial D}|f|$.

$\square$

Definizione 2.3.1 *Siano $A\subset\mathbb{C}$ un aperto, $f\in H(A)$ e $z_0\in A$. Allora z_0 è uno zero di molteplicità $m>0$ per f se*
$$f(z)=(z-z_0)^m g(z)$$
in un intorno di z_0, con $g\in H(A)$ e $g(z_0)\neq 0$. Scriveremo
$$\mathrm{ord}_{z_0}(f)=m.$$
Se
$$f(z)=(z-z_0)^m g(z)$$
con nessuna ipotesi sulla funzione olomorfa g scriveremo
$$\mathrm{ord}_{z_0}(f)\geq m.$$

Lemma 2.3.3 *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia*

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z)$$

dove $z_0 \in A$, $k \in \mathbb{N}$ e $g \in H(A)$. Allora

$$f^{(k)}(z_0) = k! g(z_0)$$

Dimostrazione. Se definiamo

$$h_k(z) = \frac{(z - z_0)^k}{k!},$$

allora per $i = 0, \dots, k$ abbiamo

$$h_k^{(i)} = h_{k-i}$$

e quindi

$$f^{(k)}(z) = k!(h_k(z)g(z))^{(k)} = k! \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} h_i(z) g^{(i)}(z).$$

Per $z = z_0$, osservando che se $i < k$ allora

$$h_k^{(i)}(z_0) = h_{k-i}(z_0) = 0,$$

otteniamo

$$f^{(k)}(z_0) = k! \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} h_i(z_0) g^{(i)}(z_0) = k! g(z_0).$$

□

Lemma 2.3.4 *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $f \in H(A)$. Sia poi $z_0 \in A$ tale che $f(z_0) = 0$ e sia $m \in \mathbb{N},\ m > 0$. Se $f^{(n)}(z_0) = 0$ per ogni $n < m$, allora*

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

con $g \in H(A)$.

Dimostrazione. Procediamo per induzione su m.

Mostriamo che per $m = 1$ l'implicazione è vera. Definiamo la funzione

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z - z_0} & z \neq z_0, \\ f'(z_0) & z = z_0. \end{cases}$$

Osserviamo che $g \in H(A \backslash \{z_0\}) \cap C(A)$. Per la proposizione 2.2.1 $g \in H(A)$ e abbiamo

$$f(z) = (z - z_0)g(z).$$

Supponiamo che l'implicazione sia vera per $m - 1$ e dimostriamo che l'implicazione è vera per m.

Sia f tale che $f(z_0) = f'(z_0) = ... = f^{(m-1)}(z_0) = 0$. Applicando l'ipotesi induttiva abbiamo che

$$f(z) = (z - z_0)^{m-1}h(z)$$

con $h \in H(A)$. Per il lemma (2.3.3) derivando otteniamo

$$0 = f^{(m-1)}(z_0) = (m - 1)!\, h(z_0).$$

Allora $h(z_0) = 0$ e quindi

$$h(z) = (z - z_0)g(z),$$

con $g \in H(A)$, da cui

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z).$$

□

Proposizione 2.3.1 *Sia $z_0 \in A$ tale che $f(z_0) = 0$. Allora* $\mathrm{ord}_{z_0}(f) = m > 0$ $\iff$ *$f^{(n)}(z_0) = 0$ per ogni $n < m$ e $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.*

Dimostrazione. $\Longrightarrow$) Se $\mathrm{ord}_{z_0}(f) = m$, allora in un intorno $D(z_0, r) \subset A$, $r > 0$, possiamo scrivere $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, con $g \in H(A)$ e $g(z_0) \neq 0$. Derivando otteniamo la tesi.

$\Longleftarrow$) Per il lemma precedente la molteplicità di z_0 come zero di f è almeno m, per cui abbiamo

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z),$$

con g funzione olomorfa su D. Resta da verificare che $g(z_0) \neq 0$.

Per il lemma (2.3.3) derivando otteniamo

$$f^{(m)}(z_0) = m!\, g(z_0).$$

Poiché $f^{(m)}(z_0) \neq 0$, concludiamo che $g(z_0) \neq 0$.

□

Teorema 2.3.3 *Sia $D \subset \mathbb{C}$ un dominio limitato con bordo liscio, e siano $f, g \in H(D) \cap C(\overline{D})$ con $g(z) \neq 0$ per ogni $z \in \partial D$. Se $z_1, ..., z_k \in D$ sono tutti gli zeri di g di molteplicità, rispettivamente, $m_1, ..., m_k$ e se per ogni $j = i, ..., k$*

$$\mathrm{ord}_{z_j}(f) \geq \mathrm{ord}_{z_j}(g),$$

allora per ogni $z \in \overline{D}$

$$|f(z)| \leq \frac{\sup_{\partial D} |f|}{\inf_{\partial D} |g|} |g(z)|$$

e per $j = 1, \ldots, k$

$$|f^{(m_j)}(z_j)| \leq \frac{\sup_{\partial D} |f|}{\inf_{\partial D} |g|} |g^{(m_j)}(z_j)|.$$

Dimostrazione. Definiamo la funzione

$$h(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{g(z)} & z \in D \backslash \{z_1, ..., z_k\} \\ \dfrac{f^{(m_j)}(z_j)}{g^{(m_j)}(z_j)} & z = z_j \end{cases}$$

Risulta $h(z) \in H(D) \cap C(\overline{D})$. Infatti per ogni $j = 1, ..., k$ possiamo considerare un intorno $D(z_j, r) \subset D, r > 0$ tale che

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{(z - z_j)^{m_j} k_1(z)}{(z - z_j)^{m_j} k_2(z)} = \frac{k_1(z)}{k_2(z)}.$$

con k_1, $k_2 \in H(D(z_j, r))$ e $k_2(z_j) \neq 0$. Per $z \longrightarrow z_j$ abbiamo

$$\frac{k_1(z)}{k_2(z)} \longrightarrow \frac{f^{(m_j)}(z_j)}{g^{(m_j)}(z_j)}.$$

Sia $z \in \overline{D}$ arbitrario. Per il corollario (2.3.1)

$$|h(z)| \leq \sup_{\partial D} |h|.$$

Osserviamo che

$$\sup_{\partial D} |h| \leq \frac{\sup_{\partial D} |f|}{\inf_{\partial D} |g|},$$

e quindi

$$|h(z)| \leq \frac{\sup_{\partial D} |f|}{\inf_{\partial D} |g|}.$$

Per $z \in D \setminus \{z_1, \ldots, z_k\}$ otteniamo

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| \leq \frac{\sup_{\partial D}|f|}{\inf_{\partial D}|g|},$$

e per $z = z_j$ otteniamo

$$|f^{(m_j)}(z_j)| \leq \frac{\sup_{\partial D}|f|}{\inf_{\partial D}|g|}|g^{(m_j)}(z_j)|.$$

ossia la tesi.

□

Corollario 2.3.2 *(lemma di Schwarz) Siano U il disco unità aperto, $f \in H(U)$ con $f(U) \subset U$ ed $f(0) = 0$. Allora per ogni $z \in U$*

$$|f(z)| \leq |z|,$$
$$|f'(0)| \leq 1.$$

Dimostrazione. Definiamo $g(z) = z$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Sia $z \in U$ e consideriamo un disco $D(0, R)$ con $|z| < R < 1$. Osserviamo che $g \in H(D(0, R) \cap C(\overline{D(0, R)}))$, e che $\inf_{\partial D(0,R)}|g| = R$, mentre $\sup_{\partial D(0,R)}|f| \leq 1$. Per il teorema precedente

$$|f(z)| \leq \frac{1}{R}|z|$$

e

$$|f'(0)| \leq \frac{1}{R}.$$

Facendo tendere R a 1 si ottiene la tesi.

□

Osservazione 2.3.1 *Sia $D \subset \mathbb{C}$ un dominio e sia $f \in H(D)$. Se z_0 è uno zero di f di molteplicità finita, allora z_0 è un punto isolato per l'insieme degli zeri di f.*

Infatti sia $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ per un certo $m > 0$, con $g(z_0) \neq 0$. Per continuità, esiste un intorno $D(z_0, \varepsilon)$ di z_0 dove g non si annulla, e dunque $f \neq 0$ in $D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$.

Corollario 2.3.3 *Siano $D \subset \mathbb{C}$ dominio, $f \in H(D)$, f non costante. Tutti gli zeri di f sono isolati.*

Dimostrazione. È sufficiente mostrare che ogni zero di f ha molteplicità finita.

Sia $E = \{z \in D | f^{(k)}(z) = 0, \ \forall k \in \mathbb{N}\}$. Dobbiamo dimostrare che $E = \varnothing$.

E è chiuso essendo intersezione di chiusi. Mostriamo che E è aperto.

Sia $z_0 \in E$. Consideriamo un disco $D(z_0, r) \subset D, \ r > 0$ tale che $\overline{D(z_0, r)} \subset D$. Mostriamo che $D(z_0, r) \subset E$.

Per il teorema di Weierstrass esiste $M \geq 0$ tale che per ogni $z \in \overline{D(z_0, r)}$ risulti

$$|f(z)| \leq M < \infty.$$

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia

$$g_k(z) = (z - z_0)^k.$$

Osserviamo che

$$\inf_{\partial D(z_0, r)} g_k = r^k$$

e

$$\mathrm{ord}_{z_0}(g_k) \leq \mathrm{ord}\, z_0(f).$$

Per il teorema (2.3.3), per ogni $z \in D(z_0, r)$ abbiamo

$$|f(z)| \leq \frac{M}{r^k} |z - z_0|^k = M \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^k.$$

Poiché

$$\lim_{k \to +\infty} M \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^k = 0,$$

ne segue che

$$f(z) = 0.$$

Dunque E è aperto e chiuso. Essendo D connesso necessariamente $E = \varnothing$ oppure $E = D$. Se $E = D$ allora $f \equiv 0$, contraddicendo l'ipotesi f non costante. Deve quindi essere $E = \varnothing$ come richiesto.

□

Corollario 2.3.4 *$H(D)$ è un dominio di integrità $\iff$ D è un dominio.*

Dimostrazione. $\Longleftarrow$) Siano $f, g \in H(D)$ entrambe diverse dalla funzione identicamente nulla. Osserviamo che se $z_0 \in D$ è uno zero di fg, allora $f(z_0) = 0$ o $g(z_0) = 0$ oppure entrambe. Dunque poiché f e g hanno zeri isolati in D (vedi teorema (2.3.3)) anche fg ha zeri isolati, ovvero $fg \neq 0$.

$\Longrightarrow$) Supponiamo $D \subset \mathbb{C}$ aperto non connesso. Allora $D = D_1 \cup D_2$, con D_1 e D_2 aperti non vuoti disgiunti.

Definiamo $f, g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ ponendo

$$f(z) = \begin{cases} 1 \ se \ z \in D_1 \\ 0 \ se \ z \in D_2 \end{cases}$$

e

$$g(z) = \begin{cases} 1 \ se \ z \in D_2 \\ 0 \ se \ z \in D_1 \end{cases}$$

Abbiamo $f, g \in H(D)$, $f, g \neq 0$ e $fg = 0$, ossia $H(D)$ non è un dominio di integrità.
$\square$

2.4 Il teorema dell'applicazione aperta

In questa sezione faremo largo uso del seguente teorema, che altro non è che una generalizzazione della formula integrale di Cauchy ed un caso particolare del teorema dei residui.

Teorema 2.4.1 *Sia $D \subset \mathbb{C}$ un dominio limitato con bordo liscio, e siano $f, g \in C(\overline{D}) \cap H(D)$. Supponiamo $f(\xi) \neq 0 \ \forall \xi \in \partial D$, e siano $z_1, ..., z_k$ gli zeri di f su D con relative molteplicità $m_1, ..., m_k$. Allora*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{g(\xi) f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi = \sum_{i=0}^{k} m_i g(z_i). \tag{2.3}$$

Dimostrazione. Osserviamo che $\frac{f'(z)}{f(z)} \in H(D \backslash z_1, ..., z_n)$, dunque posso trovare k dischi $D(z_i, \varepsilon_i) \subset \overline{D}$ le cui chiusure sono a due a due disgiunte tali che:

$$\int_{\partial D} \frac{g(\xi) f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi = \sum_{i=1}^{k} \int_{\partial D(z_i, \varepsilon_i)} \frac{g(\xi) f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi$$

e per $i = 1, \ldots, n$

$$f = (z - z_i)^{m_i} \tilde{f}_i$$

e $\tilde{f}_i(z_i) \neq 0$.

Derivando si ottiene

$$f'(z) = m_i (z - z_i)^{m_i - 1} \tilde{f}_i(z) + (z - z_i)^{m_i} \tilde{f}_i{}'(z)$$

e quindi

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_j}{z - z_j} + \frac{\tilde{f}_j{}'(z)}{\tilde{f}_j(z)}.$$

Allora:

$$\int_{\partial D(z_i,\varepsilon_i)} \frac{g(\xi)f'(\xi)}{f(\xi)}d\xi =$$
$$m_i \int_{\partial D(z_i,\varepsilon_i)} \frac{g(\xi)}{(\xi - z_i)}d\xi + \int_{\partial D(z_i,\varepsilon_i)} \frac{\tilde{f_i}'(\xi)g(\xi)}{\tilde{f_i}(\xi)}d\xi.$$

Poiché $g(z) \in H(D)$ e $\frac{\tilde{f}'(z)}{\tilde{f}(z)} \in H(D(z_i, \varepsilon_i))$, il secondo integrale a secondo membro è nullo. Inoltre, grazie alla formula integrale di Cauchy

$$m_i \int_{\partial D(z_i,\varepsilon_i)} \frac{g(\xi)}{(\xi - z_i)}d\xi = 2\pi i m_i g(z_i).$$

Dunque

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{g(\xi)f'(\xi)}{f(\xi)}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{k}\int_{\partial D(z_i,\varepsilon_i)} \frac{g(\xi)f'(\xi)}{f(\xi)}d\xi = \sum_{i=0}^{k} m_i g(z_i),$$

come richiesto.

□

Osservazione 2.4.1 *Per $f(w) = w - z$ si riottiene la formula di Cauchy.*

Teorema 2.4.2 *(Teorema dell'applicazione aperta) Sia D un dominio e sia $f \in H(D)$. Se f è non costante allora f è aperta.*

Dimostrazione. Sia $z_0 \in D$ e $w_0 = f(z_0)$. Allora $f(z) - f(z_0)$ ha uno zero isolato in z_0, altrimenti per il corollario (2.3.3) f sarebbe costante.

Consideriamo $D(z_0, r)$, $r > 0$ tale che $\overline{D(z_0, r)} \subset D$ e

$$f(z) \neq f(z_0)\ \forall z \in \overline{D(z_0, r)} \backslash \{z_0\}.$$

Vogliamo mostrare che esiste un aperto $A \subset f(D(z_0, r))$.

Consideriamo $Z : \mathbb{C}\backslash f\big(\partial D(z_0, r)\big) \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$Z(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f'(\xi)}{f(\xi) - w}d\xi.$$

Per il teorema (2.4.1) abbiamo $Z(w) \in \mathbb{Z}$. Per il lemma (2.2.3) Z è olomorfa e dunque per continuità è costante sulle componenti connesse di $\mathbb{C}\backslash f(\partial D(z_0, r))$.

Poichè z_0 è l'unico zero di $f(z) - f(z_0)$ in $D(z_0, r)$, detta $m > 0$ la molteplicità di tale zero, per il teorema (2.4.1) otteniamo

$$Z(w_0) = m > 0.$$

Allora $Z(w) = m > 0$ sull'aperto A, componente connessa di $\mathbb{C}\backslash f(\partial D(z_0, r))$ che contiene w_0. Osservando che $Z(w) \neq 0$ implica $w \in f(D(z_0, r))$ abbiamo $w_0 \in A \subset f(D(z_0, r))$.

$\square$

Definiamo ora un'importante classe di funzioni.

Definizione 2.4.1 *Siano $A, B \subset \mathbb{C}$ aperti, $f : A \longrightarrow B$. f è un biolomorfismo tra A e B se è biunivoca, olomorfa su A e tale che l'inversa f^{-1} sia olomorfa su B.*

Definizione 2.4.2 *Diremo che A e B sono biolomorfi se esiste un biolomorfismo f tra A e B.*

Osservazione 2.4.2 *La semplice connessione è invariante per biolomorfismo.*

Teorema 2.4.3 *Sia $D \subset \mathbb{C}$ un dominio e sia $f \in H(D)$. Se f è iniettiva su D, allora $f^{-1} : f(D) \longrightarrow D$ è olomorfa su $f(D)$, ovvero f è un biolomorfismo tra D e $f(D)$.*

Dimostrazione. E' sufficiente provare questo risultato localmente, ossia per ogni $z_0 \in D$ mostreremo che f^{-1} è olomorfa in un opportuno intorno di $w_0 = f(z_0)$.

Sia dunque $z_0 \in D$. Consideriamo $D(z_0, r) \subset D$, $r > 0$ tale che $f \in C(\overline{D(z_0, r)})$ e sia $D' = f(D(z_0, r))$. Per il teorema (2.4.2) D' è aperto e, per la continuità di f, D' è connesso, ossia D' è un dominio.

Mostreremo che f^{-1} è olomorfa su D'.

Essendo f iniettiva su $\overline{D(z_0, r)}$, esiste $z_1 \in D(z_0, r)$ tale che $f'(z_1) \neq 0$.

Sia $w_1 = f(z_1)$. Allora $f(z) - f(z_1)$ ha un unico zero in D di molteplicità 1.

Sia ora $Z : D' \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$Z(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f'(\xi)}{f(\xi) - w} d\xi. \tag{2.4}$$

Per il teorema (2.4.1) $Z(w_1) = 1$ e quindi, per continuità $Z(w) = 1$ identicamente su D'.

Consideriamo la funzione $F : D' \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$F(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{\xi f'(\xi)}{f(\xi) - w} d\xi.$$

Per il lemma (2.2.3) la funzione F è olomorfa su D'. Per il teorema (2.4.1) abbiamo

$$F(w) = 1 \cdot f^{-1}(w) = f^{-1}(w)$$

e quindi f^{-1} è olomorfa su D' poiché coincide con la funzione olomorfa F.

$\square$

2.5 Determinazioni olomorfe della radice quadrata

Osserviamo una interessante proprietà della semplice connessione per un dominio del piano: ovvero il fatto che essa implica l'esistenza di una determinazione olomorfa della radice quadrata di ogni funzione olomorfa priva di zeri, fatto che si rivelerà fondamentale nella dimostrazione del teorema della mappa di Riemann.

Definizione 2.5.1 *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e $f \in H(A)$. Diremo che $F \in C^{\infty}(A)$ è una* primitiva *della funzione olomorfa f in A se $F \in H(A)$ e $F' = f$.*

Definizione 2.5.2 *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto, e sia $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$, $f \in H(A)$. Diremo che $l : A \longrightarrow \mathbb{C}$ è una determinazione olomorfa del logaritmo di f se $l \in H(A)$ e $e^{l} = f$.*

Definizione 2.5.3 *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto, e sia $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$, $f \in H(A)$. Diremo che $g : A \longrightarrow \mathbb{C}$ è una determinazione olomorfa della radice quadrata di f se $g \in H(A)$ e $g^2 = f$.*

Proposizione 2.5.1 *Siano $f \in H(A)$ e $F \in C^{\infty}(A)$. Allora F è una primitiva della forma $\omega = f dz \Longleftrightarrow F$ è una primitiva della funzione olomorfa f.*

Dimostrazione. Per definizione

$$dF = \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial \overline{z}} d\overline{z}.$$

Quindi

$$dF = f dz$$

se, e solo se,

$$\frac{\partial F}{\partial \overline{z}} = 0$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial z} = f$$

ossia se, e solo se, $F \in H(A)$ e

$$F' = \frac{\partial F}{\partial z} = f.$$

□

Teorema 2.5.1 *Sia $D \subset \mathbb{C}$ un dominio semplicemente connesso e sia $f \in H(D)$. Allora f ammette primitiva su D.*

Dimostrazione. Per la proposizione (2.1.1) la forma $\omega = fdz$ è chiusa in D. Per il teorema (1.3.2), essendo D semplicemente connesso, la forma ω ammette una primitiva $F \in C^\infty(D)$. Dalla proposizione (2.5.1) segue che F è olomorfa e $F' = f$ ossia F è una primitiva della funzione olomorfa f.
□

Teorema 2.5.2 *Sia $D \subset \mathbb{C}$ un dominio. Consideriamo le condizioni seguenti:*

1. *D è semplicemente connesso;*
2. *ogni funzione olomorfa in D priva di zeri in D ammette una determinazione olomorfa del logaritmo in D;*
3. *ogni funzione olomorfa in D priva di zeri in D ammette una determinazione olomorfa della radice quadrata in D.*

Allora

$$(1) \implies (2) \implies (3).$$

Dimostrazione.
$(1) \Rightarrow (2)$. Sia $f \in H(D)$ che non si annulla in D e sia $z_0 \in D$. Essendo la funzione

$$\frac{f'(z)}{f(z)}$$

olomorfa, per il teorema precedente esiste $g \in H(D)$ tale che

$$g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Aggiungendo eventualmente una costante a g possiamo supporre che

$$e^{g(z_0)} = f(z_0).$$

Consideriamo il rapporto

$$\frac{e^{g(z)}}{f(z)}.$$

Derivando si ottiene

$$\left(\frac{e^{g(z)}}{f(z)}\right)' = \frac{\frac{f'(z)}{f(z)} e^{g(z)} f(z) - e^{g(z)} f'(z)}{f(z)^2} = 0,$$

ossia

$$\frac{e^g}{f} \equiv c \in \mathbb{C}.$$

Essendo $e^{g(z_0)} = f(z_0)$, necessariamente $c = 1$, ossia

$$e^g = f,$$

come richiesto.

(2) $\Rightarrow$ (3). Sia $f \in H(D)$ priva di zeri in D. Per ipotesi esiste g tale che $e^g = f$ in D. Allora

$$h = e^{\frac{g}{2}}$$

è una determinazione olomorfa della radice quadrata di f. Infatti

$$h^2 = e^{\frac{g}{2}} e^{\frac{g}{2}} = e^{2\frac{g}{2}} = e^g = f.$$

□

Capitolo 3

Lo spazio H(A)

3.1 La topologia compatto aperta

Siano X e Y spazi topologici.

Sia
$$C(X,Y) = \{f : X \longrightarrow Y \mid f \text{ continua}\}.$$

Se $Y = \mathbb{C}$ poniamo
$$C(X) = C(X, \mathbb{C}).$$

Descriviamo ora la topologia compatto aperta su $C(X,Y)$.

Introduciamo la notazone seguente.

Per ogni $K \subset X$ compatto e per ogni $A \subset Y$ aperto poniamo
$$U(K,A) = \{f \in C(X,Y) | f(K) \subset A\}.$$

Si dice topologia compatto-aperta su $C(X,Y)$ la topologia generata dai sottoinsiemi $U(K,A)$ al variare di K nei sottoinsiemi compatti di X e di A al variare dei sottoinsiemi aperti A di Y.

Sia ora $X = A$ un aperto di $\mathbb{C}$. Allora la topologia compatta aperta su $C(A)$ è metrizzabile.

La seguente costruzione descrive una distanza su $C(A)$ che induce la topologia compatta aperta.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo
$$K_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq n\} \bigcap \{z \in \mathbb{C} : d(z, \mathbb{C} \backslash A) \geq \frac{1}{n}\}$$

Si verifica che:

1. $\{K_n\}$ è una successione crescente di compatti in A.

2. $\bigcup_n K_n = A$

3. Per ogni n, $K_n \subset \overset{\circ}{\widehat{K_{n+1}}}$.

4. Se $K \subset A$ è compatto, esiste n tale che $K \subset K_n$.

Siano $f, g \in C(A)$ e $n \in \mathbb{N}$ Poniamo

$$\rho_n(f,g) = \sup_{z \in K_n} |f(z) - g(z)|$$

e

$$\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\rho_n(f,g)}{1 + \rho_n(f,g)} \tag{3.1}$$

Si può dimostrare che ρ è una distanza su $C(A)$ che induce la topologia compatto aperta di $C(A)$.

Si può anche dimostrare che le successioni di funzioni convergenti in $C(A)$ rispetto alla topologia compatto aperta sono tutte e sole le successioni convergenti uniformemente sui compatti di A.

Diremo che una successione di funzioni converge in modo localmente uniforme su A se per ogni punto di A posso trovare un intorno su cui la successione converge uniformemente.

Dimostriamo il seguente fatto:

Proposizione 3.1.1 *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $f_i \subset C(A)$, $i = 1, 2, 3, ...$, una successione di funzioni. f_i converge uniformemente sui compatti di A se, e solo se, converge in modo localmente uniforme su A.*

Dimostrazione. $\Longrightarrow$) Sia $z_0 \in A$.

$\overline{D(z_0, r)} \subset A, r > 0$ è un intorno compatto di z_0. Dunque $f_i \longrightarrow f$ uniformemente su $\overline{D(z_0, r)}$, e quindi converge uniformemente anche su ogni $D(z_0, r')$, $r' < r$.

$\Longleftarrow$) Sia K è un compatto di A; è possibile trovare un insieme finito di dischi $D(a_j, r)$, $j = 1, 2...n$, tali che

$$K \subset \cup_{j=1}^{n} D(a_j, r)$$

e che $f_i \longrightarrow f$ uniformemente su ogni $D(a_j, r)$. Dunque $f_i \longrightarrow f$ uniformemente su K.

□

Ricordiamo che un sottoinsieme di uno spazio topologico si dice relativamente compatto se la sua chiusura è compatta.

Ricordiamo la nozione di *equicontinuità*.

Definizione 3.1.1 *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto. Diremo che una famiglia di funzioni $\mathcal{F} \subset C(A)$ è* equicontinua *in z_0 se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $f \in \mathcal{F}$ e per ogni $z \in A$*

$$|z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Richiamiamo infine il teorema di Ascoli-Arzelà.

Teorema 3.1.1 *Sia $\mathcal{F} \subset C(A)$ una famiglia di funzioni. Allora $\mathcal{F}$ è relativamente compatta in $C(A)$ rispetto alla topologia compatto aperta se, e solo se, la famiglia $\mathcal{F}$ è equicontinua in A e per ogni $z \in A$ l'insieme*

$$\mathcal{F}(z) = \{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$$

è limitato in $\mathbb{C}$.

3.2 I teoremi di Weierstrass e di Montel

Il teorema di Ascoli-Arzelà fornisce una caratterizzazione dei compatti in $C(A)$. Vogliamo caratterizzare i compatti in $H(A)$.

Essendo $H(A) \subset C(A)$, considereremo come topologia su $H(A)$ la topologia indotta da $C(A)$.

Prima di tutto dimostriamo il seguente teorema, detto teorema di Weierstrass, il quale mostra che lo spazio $H(A)$ è chiuso nello spazio $C(A)$, e che l'operatore di derivata è continuo in $H(A)$.

Teorema 3.2.1 *Sia $A \subset \mathbb{C}$ aperto e sia $f_i \subset H(A)$, $i = 1, 2, 3...$ Se $f_i \longrightarrow f$ uniformemente sui compatti, allora $f \in H(A)$ e $f_i' \longrightarrow f'$ uniformemente sui compatti.*

Dimostrazione. Proviamo che $H(A)$ è chiuso. Sia $z_0 \in A$ e sia $r > 0$ tale che $\overline{D(z_0, r)} \subset A$. Per la formula di Cauchy, se $i = 1, 2, 3...$, e per ogni $z \in D(z_0, r)$

$$f_i(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f_i(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Poiché $f_i \longrightarrow f$ uniformemente sui compatti di A, abbiamo

$$f(z) = \lim_{i\to\infty} f_i(z) = \lim_{i\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f_i(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Per il lemma (2.2.3) $f \in H(D(z_0, r))$. Essendo $z_0 \in D$ arbitrario ne segue che $f \in H(A)$.

Mostriamo ora che $f'_i \longrightarrow f'$ uniformemente sui compatti. Per la proposizione (3.1.1), è sufficiente provare che f'_i converge in modo localmente uniforme su A.

Consideriamo $\overline{D(z_0,r)} \subset \overline{D(z_0,R)} \subset A$, con $r < R$. Per l'osservazione (2.2.1) abbiamo

$$f'_i(z) - f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(z_0,R)} \frac{f_i(\xi) - f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi, \quad z \in \overline{D(z_0,r)}.$$

Quindi otteniamo

$$|f'_i(z) - f'(z)| \leq \frac{RM_i}{(R-r)^2}, \quad z \in \overline{D(z_0,r)},$$

dove

$$M_i = \sup_{\partial D(z_0,R)} \{|f_i(\xi) - f(\xi)|\}.$$

Poiché $f_i \longrightarrow f$ uniformemente sui compatti di D, $M_i \longrightarrow 0$. Allora $f'_i \longrightarrow f'$ uniformemente su $\overline{D(z_0,r)}$.

□

Definizione 3.2.1 *Una famiglia $\mathcal{F} \subset C(A)$ si dice equilimitata sui compatti se, per ogni $K \subset A$ compatto, esiste $M = M(K) > 0$ tale che $|f(z)| \leq M$ per ogni $z \in K$ e per ogni $f \in \mathcal{F}$.*

Ricordiamo che vale in generale il seguente teorema:

Teorema 3.2.2 *(teorema di Weierstrass) Sia X spazio topologico e sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Se $K \subset X$ compatto, allora $f(K) \subset \mathbb{R}$ è compatto.*

Siamo pronti per dimostrare l'ultimo teorema di questo capitolo, il teorema di Montel, che fornisce una caratterizzazione dei compatti dello spazio $H(A)$.

Teorema 3.2.3 *Sia $A \subset \mathbb{C}$ aperto, $\mathcal{F} \subset H(A)$ una famiglia di funzioni olomorfe su A. Allora $\mathcal{F}$ è relativamente compatta in $H(A)$ se, e solo se, $\mathcal{F}$ è equilimitata sui compatti.*

Dimostrazione. $\Longrightarrow$)

Supponiamo che $\mathcal{F}$ non sia equilimitata sui compatti, allora possiamo scegliere un compatto $K \subset A$ tale che

$$\sup_{z\in K, f\in\mathcal{F}} \{|f(z)|\} = \infty.$$

Sia $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ tale che

$$\sup_{z\in K}\{|f_n(z)|\} \geq n$$

Poiché $\mathcal{F}$ è relativamente compatta, esiste una sottosuccessione $\{f_{n_j}\}$ di $\{f_n\}$ tale che $\{f_{n_j}\} \longrightarrow f$ uniformemente sui compatti di A. Dunque abbiamo

$$\sup_{z\in K}\{|f_{n_j}(z) - f(z)|\} \longrightarrow 0, \text{ se j} \longrightarrow \infty.$$

Per il teorema (3.2.1) allora $f \in H(A)$. Inoltre, per il teorema (3.2.2) esiste $M > 0$ tale che, per ogni $z \in K$

$$|f(z)| \leq M.$$

Abbiamo dunque

$$n_j \leq \sup_{z\in K}\{|f_{n_j}(z)|\} \leq \sup_{z\in K}\{|f_{n_j}(z) - f(z)|\} + M.$$

Facendo tendere j a $+\infty$ otteniamo

$$\lim_{j\to\infty} n_j \leq M,$$

che è assurdo.

$\Longleftarrow$)

Per il teorema di Ascoli-Arzelà, è sufficiente provare che $\mathcal{F}$ è equicontinua.

Sia $z_0 \in A$ e sia $\varepsilon > 0$. Per ipotesi, possiamo scegliere $r > 0$ e $M > 0$ tali che $\overline{D(z_0, r)} \subset A$, e per ogni $f \in \mathcal{F}$ e ogni $z \in \overline{D(z_0, r)}$,

$$|f(z)| \leq M.$$

Siano $f \in \mathcal{F}$, $z \in D(z_0, \frac{r}{2})$. Applicando la formula di Cauchy si ottiene:

$$\begin{aligned}
|f(z_0) - f(z)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\partial D(z_0,r)} \left(\frac{f(\xi)}{\xi - z_0} - \frac{f(\xi)}{\xi - z}\right) d\xi\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(\xi)(z_0 - z)}{(\xi - z)(\xi - z_0)} d\xi\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\frac{M}{\frac{r}{2}r}|z - z_0|2\pi r = \frac{2M}{r}|z - z_0|
\end{aligned}$$

A questo punto $\delta = \min\{\frac{r\varepsilon}{2M}, \frac{r}{2}\}$. Allora per ogni $f \in \mathcal{F}$ e per ogni z tale che $|z - z_0| < \delta$ abbiamo

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

$\square$

Capitolo 4

Il teorema della mappa di Riemann

In questo capitolo daremo una prima dimostrazione al teorema della mappa di Riemann. Esso afferma che ogni dominio semplicemente connesso incluso strettamente in $\mathbb{C}$ è biolomorfo al disco unità U. Nella prima sezione ci occuperemo di fare alcune osservazioni sull'ipotesi di semplice connessione e le sue implicazioni; nella seconda sezione affronteremo finalmente la dimostrazione del teorema.

Per prima cosa osserviamo che $\mathbb{C}$ non è biolomorfo a U.

Infatti vale il teorema seguente di Liouville.

Teorema 4.0.4 *Ogni funzione olomorfa intera limitata è costante.*

Dimostrazione. Sia $f \in H(\mathbb{C})$ limitata. Moltiplicando f per un'opportuna costante possiamo supporre che $f(\mathbb{C}) \subset U$. Sia $z \in \mathbb{C}$ fissato. Per l'osservazione (2.2.1), per ogni $r > 0$ abbiamo

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(z,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{i\theta})}{r^2 e^{i2\theta}} ire^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\theta} f(z + re^{i\theta})}{r} d\theta, \end{aligned}$$

da cui, prendendo i moduli

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{r}$$

Facendo tendere r all'infinito otteniamo

$$|f'(z)| = 0.$$

Per l'arbitrarietà di $z \in \mathbb{C}$ ne segue che la derivata f' è identicamente nulla e quindi f è costante.

□

Siamo ora pronti per dimostrare il teorema della mappa di Riemann.

Teorema 4.0.5 *(Teorema della mappa di Riemann)*
Ogni dominio semplicemente connesso $D \subsetneq \mathbb{C}$ è biolomorfo al disco unità U.

Per orientarci meglio nell'argomentazione, procederemo per passi.

4.1 Primo passo

Proposizione 4.1.1 *Ogni dominio $D \subsetneq \mathbb{C}$ semplicemente connesso è biolomorfo a un dominio semplicemente conneso D' tale che $D' \subset U$.*

Dimostrazione. Sia $w_0 \in \mathbb{C} \backslash D$. Poiché D è semplicemente connesso, per (2.5.2) esiste una funzione g in $H(D)$ tale che

$$g(z)^2 = z - w_0.$$

Osserviamo che g è iniettiva essendo g^2 iniettiva, e che se $g(z_1) = -g(z_2)$ allora $g(z_1)^2 = g(z_2)^2$ e quindi $z_1 = z_2$.

Poiché g è non costante, per il teorema (2.4.2) $g(D)$ contiene un disco $D(a; r)$, con $0 < r < |a|$. Allora per quanto appena osservato

$$D(-a; r) \cap g(D) = \varnothing.$$

Sia $f : D \longrightarrow U$ così definita

$$f(z) = \frac{r}{g(z) + a}.$$

Osserviamo che $f \in H(D)$, f è iniettiva su D perchè lo è g, e per ogni $z \in D$

$$|g(z) + a| > r.$$

Quindi per ogni $z \in D$

$$|f(z)| \leq 1.$$

Dunque, per il teorema (2.4.3) f è un biolomorfismo tra D ed $f(D) \subset U$. Osserviamo che, per il teorema (2.4.2), $f(D)$ è un aperto, e che per l'osservazione (2.4.2) è semplicemente connesso.

□

4.2 Secondo passo

Per la proposizione 4.1.1 è sufficiente dimostrare il teorema della mappa di Riemann per domini semplicemente connessi contenuti nel disco unità U.

Per ogni $\alpha \in U$ definiamo

$$\phi_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z} \tag{4.1}$$

Proposizione 4.2.1 *Sia $\alpha \in U$. Allora ϕ_α è un biolomorfismo tra U e U, che manda α in 0. L'inversa di ϕ_α è $\phi_{-\alpha}$. Inoltre risulta*

$$\phi'_\alpha(z) = \frac{1-|\alpha|^2}{(1-\overline{\alpha}z)^2} \tag{4.2}$$

Dimostrazione. Poiché $\frac{1}{\overline{\alpha}} \notin U$, osserviamo che $\phi_\alpha \in H(U)$.

per sostituzione diretta si verifica che $\phi_{-\alpha}(\phi_\alpha(z)) = z$. Quindi ϕ_α è iniettiva, con inversa $\phi_{-\alpha}$. Inoltre, per $t \in \mathbb{R}$

$$\left|\frac{e^{it}-\alpha}{1-\overline{\alpha}e^{it}}\right| = \left|\frac{e^{it}-\alpha}{e^{it}(e^{-it}-\overline{\alpha})}\right| = \left|\frac{e^{it}-\alpha}{e^{-it}-\overline{\alpha}}\right| = 1$$

ovvero $\phi_\alpha(\partial U) = \partial U$.

Quindi, per il teorema del massimo modulo (corollario 2.3.1) , $\phi_\alpha(U) \subset U$.

Facendo lo stesso con $\phi_{-\alpha}$ concludiamo che $\phi_\alpha(U) = U$.

Per quanto riguarda (4.2), si tratta di una semplice verifica.

□

Possiamo ora procedere con il nostro secondo passo.

Proposizione 4.2.2 *Sia $f \in H(D)$, f iniettiva, $f(z_0) = 0$, $f(D) \subset U$. Supponiamo $\alpha \in (0,1)$ tale che $\alpha \notin f(D)$; Allora esiste $h \in H(D)$ iniettiva, con $h(z_0) = 0$ e $h(D) \subset U$ tale che:*

$$h'(z_0) = \frac{1+\alpha}{2\sqrt{\alpha}} f'(z_0)$$

dove, come è facile verificare, $\frac{1+\alpha}{2\sqrt{\alpha}} > 1$

Dimostrazione.

Sia $\alpha \in (0,1)$ tale che $\alpha \notin f(D)$ e consideriamo l'applicazione ϕ_α definita in (4.1). Sia $\phi_\alpha \circ f(z)$: $D \longrightarrow U$ la funzione

$$\phi_\alpha \circ f(z) = \frac{f(z)-\alpha}{1-\alpha f(z)}$$

Osserviamo che $\phi_\alpha \circ f(z)$ è olomorfa su D e diversa da zero per ogni $z \in D$. Per il teorema (2.5.2), esiste $g \in H(D)$ tale che $g(z)^2 = \phi_\alpha \circ f(z)$. Osserviamo che $g(z_0)^2 = -\alpha$. Possiamo supporre $g(z_0) = i\sqrt{\alpha}$.

Definiamo la funzione

$$h(z) = i\phi_{i\sqrt{\alpha}} \circ g(z) = i\frac{g(z) - i\sqrt{\alpha}}{1 + i\sqrt{\alpha}g(z)}.$$

Osserviamo che $h \in H(D)$.

Deriviamo $h(z)$ e $g(z)^2$, ricordando la formula (4.2):

$$\begin{aligned} h'(z) &= \frac{i(1-\alpha)}{(1+i\sqrt{\alpha}g(z))^2}g'(z); \\ (g'(z)^2)' &= 2g(z)g'(z) = \frac{1-\alpha^2}{(1-\alpha f(z))^2}f'(z). \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} f'(z)(1-\alpha^2) &= 2g(z)g'(z)(1-\alpha f(z))^2 \\ &= 2g(z)h'(z)\frac{(1+i\sqrt{\alpha}g(z))^2}{i(1-\alpha)}(1-\alpha f(z))^2, \end{aligned}$$

che calcolata in z_0 dà

$$f'(z_0)(1-\alpha^2) = 2i\sqrt{\alpha}h'(z_0)\frac{(1-\alpha)^2}{i(1-\alpha)} = 2\sqrt{\alpha}h'(z_0)(1-\alpha).$$

Dunque

$$h'(z_0) = \frac{(1+\alpha)}{2\sqrt{\alpha}}f'(z_0).$$

□

4.3 Terzo passo

Definizione 4.3.1 *Sia $D \subset U$ un dominio semplicemente connesso, $z_0 \in D$. Definiamo*

$$\mathcal{S} = \left\{ f \in H(D), f \text{ iniettiva}, f(D) \subset U, f(z_0) = 0, |f'(z_0)| \geq \frac{1}{1-|z_0|} \right\}. \tag{4.3}$$

Sia poi

$$\zeta = \sup_{f \in \mathcal{S}} |f'(z_0)|. \tag{4.4}$$

Osservazione 4.3.1 *$\mathcal{S}$ è non vuoto. Ad esempio $f(z) = \frac{(z-z_0)}{1-|z_0|} \in S$.*

Proposizione 4.3.1 *Se $h \in \mathcal{S}$ e $|h'(z_0)| = \zeta$ allora h è un biolomorfismo tra D e U.*

Dimostrazione. Sia $h \in \mathcal{S}$ tale che $|h'(z_0)| = \zeta$.

Per il teorema (2.4.3) è sufficiente dimostrare che h è suriettiva.

Sia $b \in U$ tale che $b \notin h(D)$. Allora

$$b = |b|e^{i\theta}$$

con $|b| < 1$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Consideriamo la funzione

$$h_1(z) = e^{-i\theta}h(z).$$

Ponendo $a = |b| \in (0, 1)$, osserviamo che $a \notin h_1(D)$. Osserviamo inoltre che $h_1 \in \mathcal{S}$ e che

$$|h_1'(z_0)| = |e^{-i\theta}h'(z_0)| = |e^{-i\theta}||h'(z_0)| = |h'(z_0)| = \zeta.$$

Per la proposizione (4.2.2) esiste $h_2 \in \mathcal{S}$ tale che

$$|h_2'(z_0)| > |h'(z_0)| = \zeta$$

e ciò è impossibile per definizione di ζ.

Dunque h è suriettiva, come richiesto.

□

Termineremo la dimostrazione del teorema di Riemann mostrando che una funzione h con tale proprietà esiste.

Innanzitutto, riportiamo un risultato molto importante di analisi complessa: il teorema di Hurwitz.

Lemma 4.3.1 *Sia $D \subset \mathbb{C}$ un dominio limitato e $f \in C(\overline{D}) \bigcap H(D)$ non costante. Supponiamo che $f(z) \neq 0,\ \forall z \in \overline{D}$. Siano*

$$m = \min_{w \in \partial D} |f(w)|$$

$$M = \max_{w \in \partial D} |f(w)|$$

Allora $0 < m \leq M < +\infty$, e per ogni $z \in \overline{D}$

$$m \leq |f(z)| \leq M$$

Dimostrazione. Per il teorema del massimo modulo $|f(z)| < M < \infty$ per ogni $z \in D$.

Applicando il teorema del massimo modulo alla funzione

$$g = \frac{1}{f},$$

che è olomorfa su D essendo $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in \overline{D}$, otteniamo che

$$|g(z)| < m_1, \ \forall z \in D,$$

dove

$$m_1 = \max_{w \in \partial D}(g) < \infty.$$

Allora

$$|f| > \frac{1}{m_1},$$

dove $\frac{1}{m_1} = m > 0$. Si ottiene quindi la tesi.

□

Teorema 4.3.1 *(teorema di Hurwitz) Sia $D \subset \mathbb{C}$ un dominio e siano $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$ tali che per ogni $n \in \mathbb{N}$ $f_n \in H(D)$ e f_n non ha zeri su D. Supponiamo che $f_n \longrightarrow f$ uniformemente sui compatti di D, $f \in H(D)$ non costantemente nulla. Allora f non ha zeri su D.*

Dimostrazione. Poiché f non è costantemente nulla, per il corollario (2.3.3) i suoi zeri sono isolati, quindi per ogni z_0 tale che $f(z_0) \neq 0$ posso sempre trovare $r_{z_0} > 0$ tale che $\overline{D(z_0, r_{z_0})} \subset D$ e f non abbia zeri su $\partial D(z_0, r_{z_0})$.

Perciò esistono m, M, $0 < m \leq M < \infty$, tali che

$$m \leq |f(z)| \leq M, \ \forall z \in \partial D(z_0, r_{z_0}).$$

Poiché $f_n \longrightarrow f$ uniformemente su $\partial D(z_0, r_{z_0})$, esiste n_0 tale che per ogni $n > n_0$ e per ogni $z \in \partial D(z_0, r_{z_0})$,

$$\frac{m}{2} \leq |f_n(z)| \leq 2M.$$

Grazie al lemma (4.3.1), poiché per ogni $n \in \mathbb{N}$ f_n non ha zeri su $\overline{D}(z_0, r_{z_0})$, concludiamo che per ogni $n > n_0$

$$0 < \frac{m}{2} \leq |f_n(z)| \leq 2M, \ \forall z \in \overline{D(z_0, r_{z_0})}.$$

Facendo tendere n a $+\infty$,

$$0 < \frac{m}{2} \leq |f(z)| \leq 2M, \ \forall z \in \overline{D(z_0, r_{z_0})}.$$

□

Corollario 4.3.1 *Sia $D \subset \mathbb{C}$ un dominio e siano $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$ tali che per ogni $n \in \mathbb{N}$ $f_n \in H(D)$ e f_n iniettiva. Supponiamo che $f_n \longrightarrow f$ uniformemente sui compatti di D, $f \in H(D)$ non costante. Allora f è iniettiva.*

Dimostrazione. Sia $z_1 \in D$. Consideriamo la successione $g_n : D\backslash\{z_1\} \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_1).$$

Allora $g_n \longrightarrow g$, con $g = f - f(z_1)$. Poiché per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $z \in D\backslash\{z_1\}$ $g_n(z) \neq 0$, dal teorema (4.3.1) segue che o g è costantemente zero, o g non ha alcuno zero su $D\backslash\{z_1\}$.

Se g è costantemente zero allora $f \equiv f(z_1)$ su $D\backslash\{z_1\}$, e per il corollario (2.3.3) $f \equiv f(z_1)$ su D. Ciò contraddice l'ipotesi f non costante.

Dunque $f(z) \neq f(z_1)$ per ogni $z \in D$ tale che $z \neq z_1$, ovvero f è iniettiva.

□

Siamo ora pronti ad affrontare il passo decisivo della dimostrazione del teorema della mappa di Riemann.

Richiamiamo la definizione di $\mathcal{S}$.

$$\mathcal{S} = \left\{ f \in H(D), f \text{ iniettiva}, f(D) \subset U, f(z_0) = 0, |f'(z_0)| \geq \frac{1}{1 - |z_0|} \right\}.$$

Proposizione 4.3.2 *Consideriamo l'applicazione*

$$\begin{aligned} \lambda : \mathcal{S} &\longrightarrow [0, +\infty] \\ f &\longmapsto \lambda(f) = |f'(z_0)|. \end{aligned}$$

Allora λ ammette un massimo su $\mathcal{S}$.

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare che la famiglia $\mathcal{S}$ è compatta per la topologia compatto aperta e che λ è continua.

Poiché per ogni $f \in \mathcal{S}$ e ogni $z \in D$ vale $|f(z)| < 1$, il teorema di Montel (3.2.3) mostra che $\mathcal{S} \subset H(D)$ è una famiglia relativamente compatta.

Osserviamo che $\mathcal{S}$ chiusa. Sia $f_n \in \mathcal{S}$ tale che $f_n \longrightarrow f$ sui compatti di D; allora per il teorema (3.2.1) $f \in H(D)$, per il corollario (4.3.1) f è iniettiva, $f(D) \subset U$ e $f(z_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(z_0) = 0$; dunque $f \in \mathcal{S}$.

Perciò, essendo relativamente compatta e chiusa, $\mathcal{S}$ è compatta.

Terminiamo la dimostrazione osservando che λ è continua su $\mathcal{S}$. Ricordiamo che per il teorema (3.2.1) l'operatore di derivata è continuo; dunque λ è continua perché composizione di funzioni continue.

□

In conclusione, per la proposizione (4.3.2) esiste $h \in S$ tale che $h' = \sup_{f\in\mathcal{S}} |f'(z_0)|$ e dalla proposizione (4.3.1) segue che h è un biolomorfismo tra D e U. Dunque il teorema della mappa di Riemann è dimostrato.

Capitolo 5

Un'altra dimostrazione

L'obiettivo di questo capitolo sarà dare una dimostrazione alternativa del teorema di Riemann: questa volta considereremo sempre domini limitati e con bordo liscio, e ci serviremo della risoluzione di un particolare problema di Dirichlet al bordo.

Osserviamo che, considerando domini con bordo liscio, dimostreremo in realtà una versione più debole del teorema; otterremo, però, una scrittura esplicita del biolomorfismo cercato.

5.1 Alcuni richiami sulle funzioni armoniche

Diremo che una funzione $u \in C^\infty(A)$ è *reale* se assume valori reali.

Indicheremo con $C^\infty(\partial A)$ lo spazio delle funzioni su ∂A che sono restrizioni di funzioni di classe C^∞ in un opportuno intorno aperto (che in generale dipende dalla funzione) di ∂A.

Definizione 5.1.1 *Sia $A \subset \mathbb{C}$ una aperto e sia $u \in C^\infty(A)$. Il* laplaciano *di u è definito da*

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{5.1}$$

La funzione u si dice armonica *se $\triangle u = 0$*

Proposizione 5.1.1 *Sia $f \in H(D)$, $D \subset \mathbb{C}$ dominio. La parte reale e la parte immaginaria di f sono funzioni armoniche reali.*

Dimostrazione. Sia $f = u + iv$ con u e v reali. Poiché f è olomorfa valgono le equazioni di Cauchy-Riemann, ovvero

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}, \tag{5.2}$$

e quindi
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$
e
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$
Dunque
$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0.$$
Analogamente si verifica che $\triangle v = 0$.

□

Proposizione 5.1.2 *Sia D un dominio semplicemente connesso. Ogni funzione armonica reale è la parte reale di una funzione olomorfa.*

Dimostrazione. Sia u armonica reale su D. Consideriamo la forma differenziale
$$\omega = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$
Osserviamo che ω è chiusa in D. Infatti
$$-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$
Poiché D è semplicemente connesso, per il teorema (1.3.2) essa ammette una primitiva v.

Sia $g = u + iv$. Osserviamo che g è differenziabile in senso reale e soddisfa le equazioni di Cauchy-Riemann. Infatti
$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \tag{5.3}$$
Ne segue che $g \in H(D)$.

□

Osservazione 5.1.1 *Se $u \in C^\infty(\overline{D})$, allora anche $g \in C^\infty(\overline{D})$.*

Ricordiamo che nella teoria delle funzioni armoniche si dimostra il seguente risultato:

Teorema 5.1.1 *Sia $D \subset \mathbb{C}$ un aperto limitato con bordo liscio. Per ogni $\varphi \in C^\infty(\partial D)$ il problema*

$$\begin{cases} \triangle u = 0 \quad \text{in } D, \\ u|_{\partial D} = \varphi \end{cases} \tag{5.4}$$

ammette un'unica soluzione $u \in C^\infty(\overline{D})$.

5.2 La dimostrazione

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema della mappa di Riemann per il caso dei domini limitati e con bordo liscio.

Teorema 5.2.1 *Ogni dominio $D \subset \mathbb{C}$ semplicemente connesso, limitato e con bordo liscio è biolomorfo al disco unità U.*

Abbiamo bisogno del seguente enunciato.

Teorema 5.2.2 *Sia $D \subset \mathbb{C}$ un dominio semplicemente connesso limitato e con bordo liscio. Siano $z_1, ..., z_k \in D$, $w_1, ..., w_k \in \mathbb{N}$ e sia $\varphi \in C^\infty(\partial D)$ tale che $\varphi(\xi) > 0$ per ogni $\xi \in \partial D$. Allora esiste $f \in C^\infty(\overline{D}) \cap H(D)$ tale che*

1. *$|f(\xi)| = \varphi(\xi)$ per ogni $\xi \in \partial D$;*
2. *per ogni $i = 1, ..., k$ risulta*

$$\mathrm{ord}_{z_i}(f) = m_i;$$

3. *$f(z) \neq 0$ se $z \in D \setminus \{z_1, \ldots, z_k\}$.*

Dimostrazione. Per il teorema (5.1.1) sappiamo che esiste un'unica soluzione $u \in C^\infty$ del problema:

$$\begin{cases} \triangle u = 0 \quad \text{in } D, \\ u|_{\partial D} = \log \varphi(\xi) - \displaystyle\sum_{i=1}^{k} m_i \log |\xi - z_i|. \end{cases} \tag{5.5}$$

Essendo D semplicemente connesso, per la proposizione (5.1.2) esiste $g \in H(D)$ tale che $\Re g = u$. Per l'osservazione (5.1.1) risulta $g \in C^\infty(\overline{D})$.

Definiamo quindi la funzione

$$f(z) = \prod_{i=1}^{k} (z - z_i)^{m_i} e^{g(z)}.$$

Osserviamo che $f \in H(D)$, e gli zeri di f sono tutti e soli gli z_i, $i = 1, ..., k$ con molteplicità m_i. Considerando i moduli si ottiene

$$|f(z)| = \prod_{i=1}^{k} |z - z_i|^{m_i} e^{\Re g(z)}.$$

Se $\xi \in \partial D$ allora $f(\xi) \neq 0$ ed abbiamo

$$\log |f(\xi)| = \sum_{i=1}^{k} m_i \log |\xi - z_i| + u(\xi) = \log \varphi(\xi)$$

da cui

$$|f(\xi)| = \varphi(\xi).$$

$\square$

Osservazione 5.2.1 *Se $g \in C^\infty(\overline{D}) \cap H(A)$ è un'altra funzione che soddisfa le condizioni (1), (2) e (3) della proposizione allora esiste una costante $c \in \mathbb{C}$ con $|c| = 1$ tale che $g = cf$. Infatti la funzione $h = f/g$ è una funzione olomorfa su D, continua e priva di zeri su $\overline{D}$ e verifica $|h(\xi)| = 1$ per ogni $\xi \in \partial D$. Per il lemma (4.3.1) la funzione h è costante, da cui la tesi.*

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema 5.2.1

Sia $D \subset \mathbb{C}$ un dominio semplicemente connesso limitato e con bordo liscio, e sia $z_0 \in D$. Considerando la funzione $\varphi \equiv 1$ su ∂D, per il teorema (5.2.2) esiste $f \in C^\infty(\overline{D}) \cap H(A)$ tale che

1. $f(\partial D) \subset \partial U$.
2. $\text{ord}_{z_0}(f) = 1$.
3. $f(z) \neq 0$ se $z \neq z_0$.

Mostriamo che la funzione olomorfa f così costruita è un biolomorfismo tra D ed U.

Per costruzione, per ogni $\xi \in \partial D$ abbiamo $|f(\xi)| = 1$ e quindi, per il corollario 2.3.1 abbiamo

$$|f(z)| < 1$$

per ogni $z \in D$, ossia $f(D) \subset U$.

Definiamo $Z : \mathbb{C} \backslash f(\partial D) \longrightarrow \mathbb{C}$ ponendo

$$Z(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(\xi)}{f(\xi) - w} d\xi.$$

Per il teorema (2.4.1),

$$Z(w) = \sum_{z \in f^{-1}(w)} \mathrm{ord}_z(f - w).$$

Osserviamo che $Z(0) = 1$ e quindi, per continuità, la funzione Z assume questo valore sulla componente connessa di $\mathbb{C} \backslash f(\partial D)$ contenente 0. Poiché $f(\partial D) \cap U = \varnothing$, $Z(w) = 1$ su U, ovvero $U \subset f(D)$.

D'altra parte $f(D) \subset U$ e quindi f è suriettiva.

Inoltre f è iniettiva su D poiché $Z(w) = 1$ su U.

Allora f è biunivoca e applicando il teorema (2.4.3) concludiamo che f è un biolomorfismo tra D e $f(D) = U$.

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare innanzitutto il Professor Sergio Venturini, il mio relatore, per la passione e la pazienza con cui mi ha aiutato e seguito nella scrittura di questa tesi.

Un sentito grazie è rivolto poi alla città di Bologna, e alle persone che vi ho incontrato. In particolare voglio ringraziare Bertoz e Alex, per gli amici che sono stati e che ancora sono, e perché grazie a loro studiare matematica in questi anni è stato fantastico.

Un profondo grazie anche a Madrid, dove ho trascorso il terzo anno di studi: vi arrivai in settembre da solo, e la lasciai in giugno pieno di nuove amicizie, saperi e ricordi di incontri ed esperienze uniche. In particolare voglio ringraziare Marcos da Pedroñeras e Josef da Monaco.

Un grazie a mio fratello Dave, che mi è stato sempre vicino quando c'ero, e mi ha aspettato quando ero lontano, e un grazie a Matteo e Simona, i miei genitori, che mi hanno sempre ascoltato e sostenuto in tutti i miei progetti, e mi vogliono bene.

Bibliografia

[1] W. Rudin. *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill, 1970.

[2] G. Sansone and J. Gerretsen. *Lectures on the theory of functions of a complex variable.* Wolters-Noordhoff Publishing, 1969.

[3] M. E. Taylor. *Partial Differential Equations I.* Springer, 2011.