Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

SEMIGRUPPI GENERATI DA OPERATORI LINEARI MULTIVOCI ED APPLICAZIONI A PROBLEMI DI EVOLUZIONE DEGENERI

Tesi di Laurea in Analisi

Relatore:
Chiar.mo Prof.
ANGELO FAVINI

Correlatore:
Chiar.ma Prof.
FRANCA FRANCHI

Presentata da:
MARTA SACCOLETTO

Seconda Sessione
Anno Accademico 2012-2013

E quanto intendo più, tanto più ignoro.
(Tommaso Campanella)

Indice

1 Operatori multivoci **5**
1.1 Definizioni e prime proprietà 5
1.1.1 Operazioni 7
1.2 Spettro e risolvente di operatori multivoci 9
1.3 Potenze frazionarie e spazi di interpolazione 12

Introduzione **5**

2 Equazioni degeneri di tipo parabolico **15**
2.1 Generazione di semigruppi infinitamente differenziabili 15
2.2 Approssimazione di Yosida 18
2.3 Problemi multivoci lineari di tipo parabolico 20
2.4 Problemi evolutivi degeneri di tipo parabolico 23
2.4.1 Risolvente modificato 23
2.4.2 Problemi evolutivi 23
2.5 Regolarità massimale delle soluzioni 26
2.5.1 Caso ottimale 26
2.5.2 Caso generale 28
2.6 Alcuni risultati di tipo Trotter-Kato 29

3 Applicazioni **31**
3.1 Spazi di Sobolev 31
3.2 Teorema di Lax-Milgram 33
3.3 Studio dell'equazione del calore 34

Bibliografia **37**

Introduzione

In questa tesi si vuole studiare la risoluzione del problema evolutivo degenere:

$$\begin{cases} \dfrac{dMv}{dt} = Lv + f(t), \quad 0 < t \leq T \\ \\ Mv(0) = u_0 \end{cases}$$

in uno spazio di Banach X, dove M, L sono operatori lineari chiusi su X, f è una funzione continua da [0,T] a X e u_0 è un elemento assegnato appartenente allo spazio X. In generale l'operatore M non è invertibile.

Si richiede, inoltre, che vengano soddisfatte le condizioni di tipo parabolico:

$$\begin{cases} \rho_M(L) \supseteq \Sigma_\gamma = \{\lambda \in \mathbb{C}; \Re e(\lambda - \gamma) \geq -c(|\Im m\lambda| + 1)^\alpha\}, \quad \gamma \in \mathbb{R} \\ \\ \|M(\lambda M - L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \dfrac{C}{(|\lambda - \gamma| + 1)^\beta}, \quad \lambda \in \Sigma_\gamma \end{cases}$$

L'approccio seguito è il primo tra quelli presentati da Favini-Yagi, nel loro *Degenerate differential equations in Banch Spaces*, pubblicato nel 1999. Ovvero viene generalizzata la teoria dei semigruppi al caso di operatori mulitvoci; in questo modo si riduce il problema differenziale degenere all'equazione multivoca:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} - f(t) \in Au, \quad 0 < t \leq T \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

dove A risulta essere uguale a $(LM^{-1} - \gamma)$.

Pertanto nel primo capitolo vengono introdotti gli operatori lineari multivoci e si presentano alcune loro importanti proprietà. Ci si sofferma in particolare sulle nozioni di insieme risolvente e operatore risolvente, che presentano proprietà analoghe a quelle del caso single-valued.

Inoltre vengono presentati le potenze frazionarie e gli spazi di interpolazioni, fondamentali per lo sviluppo della teoria.
Nel secondo capitolo si affronta la risoluzione del problema evolutivo e si presentano i risultati della regolarità massimale della soluzione, sia nel caso ottimale, cioè quello in cui gli esponenti α e β relativi alla condizione di tipo parabolico sono uguali a 1, sia in un caso più generale in cui si richiede solamente che $2\alpha + \beta > 2$. Il secondo capitolo si conclude con alcuni risultati di tipo Trotter-Kato sulla convergenza delle successioni $A_n u_n$, con A_n operatori multivoci.
Infine nell'ultima parte si è scelto di affrontare un'applicazione. In particolare si studia l'equazione del calore secondo la formulazione di Poissson applicando i risultati teorici precedentemente illustrati.

Capitolo 1

Operatori multivoci

In questo capitolo si estende la nozione di funzione a quella di operatore lineare multivoco, cioè a quella di un operatore che associa a un elemento del dominio un sottoinsieme del codominio. Si richiede, inoltre, che tale operatore soddisfi la proprietà di linearità. Nel caso particolare in cui l'immagine di un elemento è costituito da un singoletto si ritrova la nozione usuale di single-valued operator.
Osserviamo anche che la generalizzazione conserva altre importanti proprietà, ad esempio l'inversa di un operatore multivoco rimane un operatore multivoco.

1.1 Definizioni e prime proprietà

Dato X spazio di Banach complesso, definiamo quindi un operatore lineare multivoco in questo modo:

Definizione. Una mappa $A : X \to 2^X$, dove 2^X indica l'insieme delle parti, è chiamata un *operatore lineare multivoco* in X se il dominio D(A)=$\{u \in X; Au \neq \emptyset\}$ è un sottospazio lineare di X e A soddisfa:

$$\begin{cases} Au + Av \subset A(u+v) \quad per \quad u, v \in D(A), \\ \lambda Au \subset A(\lambda u) \quad \text{per} \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad e \quad u \in D(A). \end{cases}$$

Inoltre l'immagine di A è definita come:

$$Im(A) = \bigcup_{u \in D(A)} Au$$

Per brevità l'operatore lineare multivoco verrà a volte indicato con operatore m.l.

Dalla definizione precedente si può derivare il seguente teorema che esprime la proprietà di linearità:

Teorema 1.

$$Au + Av = A(u + v) \text{ per } u, v \in D(A).$$

$$\lambda Au = A(\lambda u) \text{ per } u \in D(A) \text{ e } \lambda \neq 0$$

Dimostrazione. Dalla definizione di operatore multivoco segue che $A(u + v) - Av \subset A(u + v) + A(-v) \subset A(u)$; quindi $A(u + v) \subset Au + Av$. In modo simile, $A(\lambda u) = \lambda\lambda^{-1}A(\lambda u) = \lambda(\lambda^{-1}A(\lambda u)) \subset \lambda Au$ se $\lambda \neq 0$. □

Un altro semplice teorema è quello che concerne l'insieme A0:

Teorema 2. *$A0$ è un sottospazio vettoriale di X. $Au = f + A0 \quad \forall f \in Au$.*
In particolare segue che A è single-valued $\Leftrightarrow A0 = 0$.

Dimostrazione. Prima di tutto mostriamo che $A0$ è un sottospazio vettoriale.
$A0 = \{y \in X$ t.c. $(0, y) \in A\}$. Prendiamo quindi $y_1, y_2 \in A0$ allora, poiché $A0 + A0 = A0$, segue che $y_1 + y_2 \in A0$. Inoltre $\lambda A0 = A0$, quindi anche $\lambda y_1 \in A0$, per ogni $y_1 \in A0$ e per ogni scalare λ.
Vediamo ora la seconda affermazione. Dalla definizione di operatore m.l. si ha $Au + A0 \subset A(u + 0) = Au$, quindi $f + A0 \subset Au, \quad \forall f \in Au$. D'altra parte consideriamo $g \in Au$. Poiché $Au - Au = A(u - u) = A0$, risulta che la differenza di f e g è un elemento appartenente ad $A0$. Cioè $g = y + f$ con $y \in A0$, quindi $g \in f + A0$. □

Definiamo inoltre il grafico di un operatore multivoco

Definizione. Il *Grafico* di un operatore m.l. $A : D(A) \subset X \to 2^X$ è l'insieme:

$$Graph(A) = \{(x, y) \in X \times X; x \in D(A), \quad y \in Ax\}$$

.

Osservazione. Possiamo osservare che il grafico di un operatore multivoco lineare è una relazione A su X. Dove per relazione lineare sullo spazio di Banach X intendiamo un sottospazio lineare A di $X \times X$.

Dimostrazione. Considero un operatore multivoco $A : D(A) \subset X \to 2^X$ e il suo grafico:

$$Graph(A) = \{(x, y) \in X \times X; x \in D(A), \quad y \in Ax\}$$

Mostriamo che $Graph(A)$ è un sottospazio vettoriale di $X \times X$.

- $(0, 0) \in Graph(A)$

  Infatti per la seconda proprietà degli operatori multivoci $0 \in A0$

- $Graph(A)$ è chiuso rispetto alla somma

  Prendiamo (x_1, y_1) e (x_2, y_2) entrambi appartenenti a $Graph(A)$. Allora, poiché $Ax_1 + Ax_2 \subset A(x_1 + x_2)$ e $(y_1 + y_2) \in Ax_1 + Ax_2$ si ha che $(y_1 + y_2) \in A(x_1 + x_2)$.

- $Graph(A)$ è chiuso rispetto al prodotto per uno scalare.

  Se considero $(x, y) \in Graph(A)$ allora, da $\lambda Ax \subset A(\lambda x)$ segue che $\lambda(x, y) \in Graph(A)$.

□

Introduciamo anche le seguenti definizioni:

Definizione. Quando due operatori lineari multivoci A, B soddisfano $D(A) \subset D(B)$ e $Au \subset Bu, \forall u \in D(A)$, B è chiamato un'*estensione di* A e si scrive $A \subset B$. Ovviamente $A = B$ se $A \subset B$ e $B \subset A$.

Definizione. Se esiste un operatore lineare single-valued A^o che soddisfa $D(A^o) = D(A)$ e $A^o \subset A$ allora A^o è chiamato *sezione lineare di* A.

1.1.1 Operazioni

Siano A e B due operatori lineari multivoci sullo spazio di Banach X. Vengono quindi definite le operazioni di somme e prodotto in questo modo:

Definizione (*Somma*).

$$\begin{cases} D(A+B) = D(A) \cap D(B) \\ (A+B)u = Au + Bu \end{cases}$$

Definizione (*Prodotto*).

$$\begin{cases} D(AB) = \{u \in D(B); D(A) \cap Bu\} \neq \emptyset \\ (AB)u = \bigcup_{f \in D(A) \cap BU} Af \end{cases}$$

Si può facilmente vedere che la somma e il prodotto di due operatori multivoci sono a loro volta due operatori multivoci.
Altra fondamentale definizione è quella di operatore inverso, indicato come A^{-1}.

Definizione (*Inversa*).

$$\begin{cases} D(A^{-1}) = Im(A) \\ A^{-1}f = \{u \in D(A); Au \ni f\} \end{cases}$$

Teorema 3. *A^{-1} è un operatore m.l. in X. $u \in A^{-1}f \Leftrightarrow f \in Au$; in particolare $(A^{-1})^{-1} = A$.*

Se A^{-1} è single-valued l'operatore m.l. A si dice *iniettivo*.

Elenchiamo ora altre importanti proprietà elementari dell'operatore lineare multivoco.

Teorema 4. *Siano A, B opertaori m.l. su uno spazio di Banach X. E sia I l'operatore identico. Allora valgono le seguenti affermazioni:*

- $A = AI_{D(A)} = I_{Im(A)}A$;
- $I_{D(A)} \subset AA^{-1}$;
  in particolare A è single-valued $\Leftrightarrow AA^{-1} = I$;
- $(AB)^{-1} = (B^{-1})(A^{-1})$;

1.2 Spettro e risolvente di operatori multivoci

Oltre a generalizzare la nozione di operatore lineare ci serve, naturalmente, generalizzare quelle di insieme risolvente e di operatore risolvente. Noteremo che anche in questo caso si mantengono importanti proprietà analoghe a quelle del caso single-valued.

Definizione. Dato A un operatore lineare multivoco, l'insieme di tutti in numeri $\lambda \in \mathbb{C}$ tali che $Im(\lambda - A) = D((\lambda - A)^{-1}) = X$ e $(\lambda - A)^{-1}$ è un operatore limitato single-valued in X è chiamato *insieme risolvente* di A e denotato con $\rho(A)$.

Definizione. L'operatore lineare limitato $(\lambda - A)^{-1}, \lambda \in \rho(A)$ è chiamato il *risolvente* di A.

Non è difficile vedere che, come per il caso single-valued, se l'insieme risolvente è diverso dal vuoto, allora A è chiuso, ovvero il suo grafico è chiuso in $X \times X$. Inoltre continua a valere che $\rho(A)$ è aperto.

Teorema 5. *$\rho(A)$ è un insieme aperto di $\mathbb{C}$.*

Dimostrazione. Consideriamo prima il caso in cui
$(\lambda - A)^{-1} \neq 0 \; \forall \lambda \in \rho(A)$.
Consideriamo $\lambda_0 \in \rho(A)$ e sia λ t.c. $|(\lambda - \lambda_0)| < \dfrac{1}{\|(\lambda_0 - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}}$

$$\forall f \in X \text{ poniamo } g = \{1 + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 - A)^{-1}\}^{-1} f, \quad u = (\lambda_0 - A)^{-1} g$$

Quindi

$$g + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 - A)^{-1} g = g + (\lambda - \lambda_0) u = f, \quad g \in (\lambda_0 - A) u$$

Da cui segue che

$$f \in (\lambda_0 - A) u + (\lambda - \lambda_0) u = (A - \lambda) u$$

Ovvero $Im(\lambda - A) = X$. Mostriamo ora che $(\lambda - A)^{-1}$ è single-valued, equivalentemente che $(\lambda - A)^{-1} 0 = 0$. Prendiamo $u \in (\lambda - A)^{-1} 0$. Allora, per quanto visto prima, esiste $g \in (\lambda_0 - A)u$ t.c. $g + (\lambda - \lambda_0)u = 0$. Quindi

$$u + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 - A)^{-1}u = 0;$$

$$\{1 + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 - A)^{-1}\}u = 0;$$

$$\{1 + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 - A)^{-1}\}^{-1}0 = u.$$

Da cui si ricava $u = 0$. Quindi possiamo concludere che $\lambda \in \rho(A)$ e, quindi, che $\rho(A)$ è aperto.
Vediamo ora il caso in cui $(\lambda - A)^{-1} = 0$ per qualche $\lambda_0 \in \rho(A)$.
Notiamo che $\lambda_0 - A = O_\infty$ è l'inverso dell'operatore nullo, caratterizzato da $D(O_\infty) = \{0\}$ e $O_\infty 0 = X$. Vogliamo mostrare che $A = O_\infty$.
Poiché $A = \lambda_0 - O_\infty$ vale che $D(A) = D(\lambda_0) \cap D(O_\infty) = D(O_\infty) = \{0\}$ e $A0 = (\lambda_0 - O_\infty)0 = X$. Quindi $(\lambda - O_\infty)^{-1} = (O_\infty)^{-1} = 0$ identicamente. Quindi è lineare, single-valued e limitato, mentre $\rho(O_\infty) = \mathbb{C}$. Quindi è provata la tesi. $\square$

Diversamente dal caso single-valued si ottiene il seguente risultato:

Teorema 6. $(\lambda - A)^{-1}A \subset \lambda(\lambda - A)^{-1} - 1 \subset A(\lambda - A)^{-1}$ *per* $\lambda \in \rho(A)$.

Dimostrazione. Sia $f \in Au$ allora $\lambda u - f \in (\lambda u - Au) = (\lambda - A)u$ da cui si ottiene che $(\lambda - A)^{-1}(\lambda u - f) = (\lambda - A)^{-1}\lambda u - (\lambda - A)^{-1}f = u$ cioè $(\lambda - A)^{-1}f = \lambda(\lambda - A)^{-1}u - u$. Quindi, ricordando che $f \in Au$ si dimostra la prima inclusione.
Si ponga ora $v = (\lambda - A)^{-1}f$, quindi $f \in (\lambda - A)(\lambda - A)^{-1}f = (\lambda - A)v$ da cui si ricava che $\lambda v - f \in Av$, allora, andando a sostituire v con $(\lambda - A)^{-1}f$ si ottiene che $\lambda(\lambda - A)^{-1}f - f \in A(\lambda - A)^{-1}f$ da cui la seconda inclusione della tesi. $\square$

Quindi se $\lambda \in \rho(A)$, $\lambda(\lambda - A)^{-1} - 1$ è solo una sezione lineare dell'operatore m.l. $A(\lambda - A)^{-1}$. Questa particolare sezione viene denotata con $A^o(\lambda - A)^{-1}$. Si noti che A^o non è necessariamente una sezione lineare di A.

Osservazione. Dal teorema precedente segue che $(\lambda - A)^{-1}A$ è single-valued su $D(A)$ e

$(\lambda - A)^{-1}Au = (\lambda - A)^{-1}f \quad \forall f \in Au.$

Vale inoltre che $Ker((\lambda - A)^{-1}) = (\lambda - A)0 = A0 \; \forall \lambda \in \rho(A)$.

Osservazione. $A^o(\lambda - A)^{-1} = (\lambda A^{-1} - 1)^{-1} \quad \forall \lambda \in \rho(A)$.

E se $0 \in \rho(A)$ allora $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Quindi $Ker(A^o(\lambda - A)^{-1}) = (\lambda A^{-1} - 1)0 = 0$

Rimane valida l'equazione del risolvente.

Teorema 7 (*Equazione del risolvente*)**.** *Per $\lambda, \mu \in \rho(A)$ viene soddisfatta l'equazione del risolvente:*

$$(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1} = -(\lambda - \mu)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1} \tag{1.1}$$

Dimostrazione. Poniamo $\lambda_\mu = \lambda - \mu$ e $A_\mu = A - \mu$. Applichiamo il teorema precedente a A_μ. Allora, poiché $0, \lambda_\mu \in \rho(A_\mu)$ si ottiene che

$$(\lambda_\mu - A_\mu)^{-1}A_\mu \subset \lambda_\mu(\lambda_\mu - A_\mu)^{-1} - 1$$

da cui

$$(\lambda_\mu - A_\mu)^{-1}A_\mu(A_\mu)^{-1} \subset \lambda_\mu(\lambda_\mu - A_\mu)^{-1}(A_\mu)^{-1} - (A_\mu)^{-1}$$

e poiché vale l'inclusione $1 \subset A_\mu(A_\mu)^{-1}$

$$(\lambda_\mu - A_\mu)^{-1} \subset \lambda_\mu(\lambda_\mu - A_\mu)^{-1}(A_\mu)^{-1} - (A_\mu)^{-1}$$

ovvero

$$(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1} \subset -(\lambda - \mu)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}$$

Sempre dal teorema precedente, usando questa volta la seconda inclusione, si ottiene che

$$\{(\lambda_\mu(\lambda_\mu - A_\mu)^{-1} - 1)A_\mu^{-1} \subset A_\mu(\lambda_\mu - A_\mu)^{-1}A_\mu^{-1}$$

e dato che gli operatori commutano, si ottiene l'inclusione inversa e quindi la tesi. $\square$

Mostriamo infine che il risolvente è una funzione olomorfa.

Teorema 8. *Il risolvente* $(\lambda - A)^{-1}$ *è una funzione a valori in* $\mathcal{L}(X)$*, olomorfa in* $\rho(A)$ *e*

$$\frac{d}{d\lambda}(\lambda - A)^{-1}|_{\lambda=\lambda_0} = -((\lambda - A)^{-1})^2$$

.

Dimostrazione. Usando l'identità del risolvente si ottiene che:

$$\frac{(\lambda - A)^{-1} - (\lambda_0 - A)^{-1}}{\lambda - \lambda_0} = -(\lambda - A)^{-1}(\lambda_0 - A)^{-1}$$

Da cui, passando al limite per λ che tende a λ_0, si ottiene la tesi. □

1.3 Potenze frazionarie e spazi di interpolazione

Infine, in questa ultima sezione del capitolo, in analogia con il caso degli operatori single-valued, studiamo le potenze frazionarie e gli spazi di interpolazione relativi ad un operatore multivoco A.

Sia quindi A un operatore m.l. in X e assumiamo che soddisfi la seguente condizione:

$$\begin{cases} \rho(A) \supset \Sigma = \{\lambda \in \mathbb{C}; \Re e\lambda \geq -c(|\Im m\lambda| + 1)^{\alpha}\} \\ \|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \dfrac{M}{(|\lambda| + 1)^{\beta}}, & \lambda \in \Sigma \end{cases}$$

Per qualche esponente $0 < \beta \leq \alpha \leq 1$ e per qualche costante $c, M > 0$.

Possiamo definire allora le potenze frazionarie di $[-A]$.

Definizione. Per $\theta > 1 - \beta$, le *potenze frazionarie* $[-A]^{-\theta}$ di A sono definite attraverso gli integrali di Dunford:

$$[-A]^{-\theta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (-\lambda)^{-\theta}(\lambda - A)^{-1} d\lambda$$

in $\mathcal{L}(X)$, dove la curva Γ è parametrizzata da $\lambda = -c(|\eta| + 1)^{\alpha} + i\eta, -\infty < \eta < \infty$, giacente in Σ.

Osservazione. $[-A]^{-\theta} \in \mathcal{L}(X)$, $\forall\theta > 1 - \beta$

Definiamo $[-A]^\theta$ come l'inverso multivoco di $[-A]^{-\theta}$. Si vede quindi che $0 \in \rho([-A]^\theta)$ e $[-A]^\theta$ è un operatore lineare multivoco chiuso.

Osservazione. Si ha

$$\begin{aligned} I &= [-A]^{-\theta}[-A]^\theta \quad &&su\ D([-A]^\theta) \\ I &\subset [-A]^\theta[-A]^{-\theta} \quad &&su\ X. \end{aligned}$$

Consideriamo ora gli spazi di interpolazione reale tra il dominino di A e lo spazio di Banach X. Prima di tutto dotiamo $D(A)$ della norma

$$\|u\|_{D(A)} = \inf_{f\in Au} \|f\|_X$$

e osserviamo che, poichè $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ tale norma è equivalente alla norma del grafico, definita come $\|u\|_X + \inf_{f\in Au} \|f\|_X$. Inoltre D(A) diventa uno spazio di Banach. Allora possiamo introdurre lo spazio intermedio

$$X_A^\theta = \{u \in X; \sup_{\xi>0} \xi^\theta \|A^o(\xi + A)^{-1}u\|_X < \infty\}$$

dotato della norma

$$\|u\|_{X_A^\theta} = \|u\|_X + \sup_{\xi>0} \xi^\theta \|A^o(\xi + A)^{-1}u\|_X$$

Naturalmente anche X_A^θ con questa norma diventa uno spazio di Banach. Inoltre, considerando gli spazi di interpolazioni reali

$$\begin{aligned} X, D(A))_{\theta,\infty} = &\{u \in X; u = u_0(t) + u_1(t), 0 < t < \infty,\ \textit{con}\ u_0 \in C((0,\infty);X), \\ &u_1 \in C((0,\infty);D(A))\ \text{e con}\ t^{-\theta}u_0 \in L^\infty((0,\infty);X), t^{1-\theta}u_1 \in L^\infty((0,\infty);D(A))\} \end{aligned}$$

si ottengono le seguenti inclusioni:

Teorema 9.

$$\begin{aligned} &X_A^\theta \subset (X, D(A))_{\theta,\infty}, \quad 0 < \theta < 1 \\ &(X, D(A))_{\theta,\infty} \subset X_A^{\theta+\beta-1}, \quad 1-\beta < \theta < 1 \end{aligned}$$

In particolare se $\beta = 1$ allora $X_A^\theta = (X, D(A))_{\theta,\infty}$.

Capitolo 2

Equazioni degeneri di tipo parabolico

In questo capitolo centrale verranno studiate le equazioni paraboliche degeneri usando i semigruppi generati dagli operatori lineari multivoci. Inoltre studieremo i risultati di massima regolarità, estendendo i risultati conosciuti sulla regolarità massimale della soluzione di $\frac{du}{dt} = Au + f(t)$, dove A è il generatore di un semigruppo analitico nello spazio di Banach complesso X, all'equazione multivoca $\frac{du}{dt} - f(t) \in Au$.

2.1 Generazione di semigruppi infinitamente differenziabili

Sia A un operatore multivoco lineare su uno spazio di Banach X. Lo studio delle equazioni di tipo parabolico si traduce nel fatto che A deve soddisfare le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \rho(A) \supset \Sigma = \{\lambda \in \mathbb{C}; \Re e\lambda \geq -c(|\Im m\lambda| + 1)^{\alpha}\} \\ \|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \dfrac{M}{(|\lambda| + 1)^{\beta}}, \qquad \lambda \in \Sigma \end{cases} \tag{2.1}$$

per qualche esponente $0 < \beta \leq \alpha \leq 1$ e per qualche costante $c, M > 0$.

Vediamo quindi che se A soddisfa tali condizioni allora genera un semigruppo di operatori lineari infinitamente differenziabile.

Definizione. Sia A un operatore m.l. che soddisfa la condizione (2.1). Possiamo allora definire la famiglia degli operatori lineari limitati e^{tA} come:

$$e^{tA} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{t\lambda} (\lambda - A)^{-1} d\lambda, \quad t > 0$$

dove l'integrale di Dunford si sviluppa su $\mathcal{L}(X)$ e la curva Γ è parametrizzata da $\lambda = -c(|\eta| + 1)^{\alpha} + i\eta, -\infty < \eta < \infty$, giacente in Σ.
Definiamo inoltre $e^{0A} = 1$.

Teorema 10. *Sia A un operatore m.l. soddisfacente* (2.1)*. Allora la famiglia degli operatori lineari e^{tA} definita come sopra è un semigruppo su X. Inoltre e^{tA} è infinitamente differenziabile per $t > 0$ nella norma di $\mathcal{L}(X)$ con*

$$\frac{d}{dt} e^{tA} \subset A e^{tA}, \quad t > 0$$

Dimostrazione. Sia:

$$e^{tA} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{t\lambda} (\lambda - A)^{-1} d\lambda, \quad t > 0$$

dove la curva Γ è parametrizzata da $\lambda = -c(|\eta| + 1)^{\alpha} + i\eta, -\infty < \eta < \infty$, giacente in Σ.
Consideriamo ora una curva Γ' ottenuta da Γ traslando ogni punto della curva verso destra di una quantità positiva fissata. Allora:

$$e^{sA} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} e^{s\mu} (\mu - A)^{-1} d\mu, \quad t > 0$$

Mostriamo ora la proprietà del semigruppo:

$$e^{tA} e^{sA} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} e^{t\lambda} (\lambda - A)^{-1} d\lambda \int_{\Gamma'} e^{s\mu} (\mu - A)^{-1} d\mu =$$
$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} e^{\lambda t} e^{\mu s} (\lambda - A)^{-1} (\mu - A)^{-1} d\mu d\lambda$$

Che,usando l'identità di Hilbert dei risolventi, diventa:

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} e^{\lambda t + \mu s} \frac{(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1}}{\mu - \lambda} d\mu d\lambda =$$
$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} e^{\lambda t + \mu s} \frac{(\lambda - A)^{-1}}{\mu - \lambda} d\mu d\lambda - \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} e^{\lambda t + \mu s} \frac{(\mu - A)^{-1}}{\mu - \lambda} d\mu d\lambda$$

Applicando di nuovo Fubini-Tonelli:

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}d\lambda \int_{\Gamma'} \frac{e^{\mu s}}{\mu - \lambda}d\mu - \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma'} e^{\mu s}(\mu - A)^{-1}d\mu \int_\Gamma \frac{e^{\lambda s}}{\mu - \lambda}d\lambda$$

Ora osserviamo che

$$\int_\Gamma \frac{e^{\lambda s}}{\mu - \lambda}d\lambda = 0$$

perché Γ giace a sinistra di Γ' e $\mu \in \Gamma'$. Inoltre

$$\int_{\Gamma'} \frac{e^{\mu s}}{\mu - \lambda}d\mu = 2\pi i e^{\lambda s}$$

per la formula integrale di Cauchy. Allora possiamo concludere che:

$$e^{tA}e^{sA} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{t\lambda}e^{s\mu}(\lambda - A)^{-1}d\lambda = e^{(t+s)A}.$$

Applicando il teorema della convergenza dominata di Lebesgue, si ottiene che

$$\frac{d^k}{dt^k}e^{tA} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^k e^t\lambda(\lambda - A)^{-1}d\lambda, \quad t > 0,\ k = 1, 2, 3, ...$$

. Infine l'inclusione segue da $A^{-1}\frac{d}{dt}e^{tA} = e^{tA}$. □

Inoltre, sempre generalizzando il caso regolare, si ottengono le seguenti importanti stime.

Proposizione 1. *Per $\theta \geq 0$ sia*

$$([-A]^\theta)^o e^{tA} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (-\lambda)^\theta e^{t\lambda}(\lambda - A)^{-1}d\lambda, t > 0$$

Allora

$$\|([-A]^\theta)^o e^{tA}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_\theta t^{\frac{\beta-\theta-1}{\alpha}}, \quad t > 0$$

Per $0 < \theta < 1$,

$$\|e^{tA}\|_{\mathcal{L}(X, X_A^\theta)} \leq C_\theta t^{\frac{\beta-\theta-1}{\alpha}}, \quad t > 0$$

dove C_θ è una costante che dipende dall'esponente θ.

Osservazione. Dal teorema precedente segue che $A0 \subset \bigcap_{t>0} Ker([-A]^\theta)^o e^{tA}$. Inoltre $[(-A)^0]^o e^{tA} = e^{tA}, t > 0$.

Osservazione. Poichè $([-A]^\theta)^o e^{tA}$ è la sezione lineare dell'operatore multivoco $[-A]^\theta e^{tA}$ vale che $[-A]^{-\theta}([-A]^\theta)^o e^{tA} = e^{tA}, \quad per\ \theta > 1-\beta.$

Consideriamo ora la continuità di e^{tA} in $t = 0$.

Teorema 11. *e^{tA} è fortemente continuo rispetto alla seminorma $p_A(\cdot) = \|A^{-1}\cdot\|_X$. Se $1-\beta < \theta$, allora e^{tA} è fortemente continuo nella norma originale di X, sul sottospazio $D([-A]^\theta)$.*

In maniera più forte, l'esponente di Hölder di $(e^{-tA} - I)u$ può essere calcolato se $u \in D([-A]^\theta)$ *e* X_A^θ rispettivamente con il maggiore tra gli esponenti θ. Infatti la norma di $A^o e^{tA} u$ è stimata come segue.

Proposizione 2. *Per $1-\beta < \theta \leq 1$,*

$$\|A^o e^{tA}\|_X \leq C_\theta t^{\frac{\beta+\theta-2}{\alpha}} \|u\|_{D[-A]^\theta}, \quad u \in D([-A]^\theta)$$

Per $1-\beta < \theta < 1$,

$$\|A^o e^{tA}\|_X \leq C_\theta t^{\frac{\beta+\theta-2}{\alpha}} \|u\|_{X_A^\theta}, \quad u \in X_A^\theta$$

2.2 Approssimazione di Yosida

Ora vogliamo introdurre l'approssimazione di Yosida dell'operatore multivoco A e le sue principali proprietà. Tale approssimazione sarà denotata con A_n. Ci interessa inoltre studiare la convergenza di e^{tA_n}.

Definizione. Definiamo l'approssimazione di Yosida di A come

$$A_n = n\{n(n-A)^{-1} - 1\} = n(J_n - 1), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

dove $J_n := n(n-A)^{-1} = (1 - n^{-1}A)^{-1}$.

Osservazione. A_n è un operatore lineare single-valued limitato su A.

Osservazione. Sia A un operatore m.l. per cui vale (2.1) e sia A_n l'approssimazione di Yosida di A. Allora $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *e* $0 < \tilde{c} < c$ t.c.

$$\rho(A_n) \supset \tilde{\Sigma} = \{\lambda \in \Re e\lambda \geq -\tilde{c}(|\Im m\lambda| + 1)^\alpha\} \quad \forall n \geq n_0$$

Teorema 12. *Valgono le seguenti affermazioni:*

1. $\lim_{n\to\infty}(\lambda - A_n)^{-1} = (\lambda - A)^{-1}$ *in* $\mathcal{L}(X)$

   con la stima

   $\|(\lambda - A_n)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \dfrac{\tilde{M}}{(|\lambda| + 1)^\beta}, \quad \lambda \in \tilde{\Sigma}$, *per una certa* $\tilde{M}$ *e* $n \geq n_0$

2. $\forall\theta \geq 0$

   $\lim_{n\to\infty}([-A_n]^\theta e^{tA_n}) = ([-A]^\theta)^o e^{tA}, \quad t > 0$

   in $\mathcal{L}(X)$ *con la stima*

   $\|[-A_n]^\theta e^{tA_n}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \tilde{c}_\theta t^{\frac{\beta-\theta-1}{\alpha}}, \quad n \geq n_0$

   dove $\tilde{c}_\theta$ *è una costante indipendente da* n.

3. $\lim_{n\to\infty} J_n(\lambda - A_n)^{-1} = (\lambda - A)^{-1}$ *in* $\mathcal{L}(X)$

   con la stima

   $\|J_n(\lambda - A_n)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \dfrac{\tilde{M}}{(|\lambda| + 1)^\beta}, \quad \lambda \in \tilde{\Sigma}$, *per certa costante* $\tilde{M}$ *indipendente da* n.

4. $\forall\theta \geq 0$

   $\lim_{n\to\infty}([-A_n]^\theta J_n e^{tA_n}) = ([-A]^\theta)^o e^{tA}, \quad t > 0$

   in $\mathcal{L}(X)$ *con la stima*

   $\|[-A_n]^\theta J_n e^{tA_n}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \tilde{c}_\theta t^{\frac{\beta-\theta-1}{\alpha}}, \quad n \geq n_0$

   dove $\tilde{c}_\theta$ *è una costante indipendente da* n.

Osservazione. Osserviamo inoltre che se l'insieme risolvente dell'operatore m.l. A contiene il semipiano $\{\lambda \in \mathbb{C}; \Re e\lambda \geq 0\}$ e il risolvente soddisfa la stima $\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \dfrac{M}{(|\lambda| + 1)^\beta}, \quad \Re e\lambda \geq 0$ per qualche $0 < \beta \leq 1$, allora si verifica che $\rho(A)$ contiene una regione $\Sigma = \{\lambda \in \mathbb{C}; \Re e\lambda \geq -c(|\Im m\lambda| + 1)^\beta\}$ con $c > 0$ e la stima per $(\lambda - A)^{-1}$ si può estendere per tutto Σ.
Questo mostra che se è valida la condizione (2.1) per qualche esponente $0 < \alpha, \beta \leq 1$ allora è sempre soddisfatta la relazione $\beta \leq \alpha$.

Osservazione. Notiamo inoltre che quando $\alpha = \beta = 1$, allora $\|e^{tA}\|_{\mathcal{L}(X)}$ è limitato per t che tende a 0. Pertanto il semigruppo e^{tA} è fortemente continuo nella norma di X sul sottospazio $\overline{D(A)}$.

2.3 Problemi multivoci lineari di tipo parabolico

Si consideri il seguente problema evolutivo multivoco:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} - f(t) \in Au, \quad 0 < t \leq T \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

dove X è uno spazio di Banach, A è operatore multivoco che soddisfa la condizione (2.1), $f : [0, T] \to X$ è una funzione continua nota e u_0 è il valore iniziale. Definiamo ora una soluzione stretta per il caso parabolico.

Definizione. Una funzione $u : [0, T] \to X$ è chiamata *soluzione stretta* di (2.2) se $u \in C^1((0, T]; X)$ e $u(t) \in D(A)$ $\forall 0 < t \leq T$ e se vale $u(0) = u_0$ rispetto alla seminorma $p_A(\cdot) = \|A^{-1} \cdot \|_X$, cioè se il $\lim_{t\to 0} p_A(u(t) - u_0) = 0$.

Teorema 13. *Sia A un operatore lineare multivoco che soddisfa la proprietà (2.1). Per ogni funzione hölderiana continua $f \in C^\sigma([0, T], X)$, $\frac{2-\alpha-\beta}{\alpha} < \sigma < 1$, cioè $2\alpha + \beta > 2$, e per ogni valore iniziale $u_0 \in X$ la funzione data da*

$$u(t) = e^{tA}u_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A} f(\tau)d\tau \quad 0 \leq t \leq T \tag{2.3}$$

è una soluzione stretta del problema (2.2)*.*
Viceversa ogni soluzione stretta di (2.2) *con $f \in C([0, T], X)$ e con $u_0 \in X$ è necessariamente della forma* (2.3)*.*

Dimostrazione. Sia $\in C^\sigma([0, T], X)$ *con* $\frac{2-\alpha-\beta}{\alpha}$. Si consideri la successione di funzioni

$$u_n(t) = e^t A_n u_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A_n} f(\tau)d\tau, \quad 0 \leq t \leq T, n \geq n_0$$

Si noti che, poichè $2\alpha + \beta > 2$ allora $\frac{\beta-1}{\alpha} > -1$, quindi l'integrale è ben definito. Inoltre $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ puntualmente su [0,T].
Applichiamo ora A_n a u_n:

$$\begin{aligned} A_n u_n(t) &= A_n e^{tA_n} u_0 + \int_0^t A_n e^{(t-\tau)A_n} \{f(\tau) - f(t) + f(t)\} d\tau = \\ &= A_n e^{tA_n} u_0 + \int_0^t A_n e^{(t-\tau)A_n} \{f(\tau) - f(t)\} d\tau + (e^{(tA_n)} - 1) f(t) \end{aligned}$$

Allora, per le proprietà dell'approssimazione di Yosida, $A_n u_n$ converge a una funzione g puntualmente su (0,T], con $g \in C((0,T],X)$.
Inoltre poichè si ha:

$$
\begin{aligned}
u_n(t) - u_n(\varepsilon) &= \int_\varepsilon^t \frac{d}{dt} u_n'(\tau) d\tau = \\
&= \int_\varepsilon^t \{A_n u_n(\tau) + f(\tau)\} d\tau, \quad \varepsilon \le t \le T
\end{aligned}
$$

$\forall \varepsilon > 0$ passando al limite si ottiene che:

$$u(t) - u(\varepsilon) = \int_\varepsilon^t \{g(\tau) + f(\tau)\} d\tau$$

cioè $u \in C^1((0,T],X)$ con $u'(t) = f(t) + g(t), \quad 0 < t \le T$.
D'altra parte $u_n(t) = A_n^{-1} A_n u_n(t)$, quindi per $n \to \infty$ si ha $u(t) = A^{-1} g(t)$, cioè $g(t) = u'(t) - f(t) \in Au(t), \quad 0 < t \le T$. Allora u soddisfa l'equazione in (2.2).
Infine, siccome per $t \to 0, \quad \int_0^t e^{(t-\tau)A} f(\tau) d\tau \to 0$ in X è verificata anche la condizione iniziale.
Viceversa sia $f \in C([0,T],X)$ e assumiamo che esista una soluzione stretta per il problema (2.2). Scriviamo:

$$
\begin{aligned}
&u(t) = e^{(t-\varepsilon)A_n} u(\varepsilon) = \int_\varepsilon^t \frac{\partial}{\partial \tau} \{e^{(t-\tau)A_n} u(\tau)\} d\tau = \\
&= \int_\varepsilon^t \{-A_n e^{(t-\tau)A_n} u(\tau) + e^{(t-\tau)A_n} u'(\tau)\} d\tau = \\
&= \int_\varepsilon^t e^{(t-\tau)A_n} \{-A_n u(\tau) + g(\tau)\} d\tau + \int_\varepsilon^t e^{(t-\tau)A_n} f(\tau) d\tau, \quad \varepsilon \le t \le T,
\end{aligned}
$$

per ogni $\varepsilon > 0$, dove $g(t) = u'(t) - f(t) \in Au(t), 0 < t \le T$. Passando al limite si ottiene che:

$$u(t) - e^{(t-\varepsilon)A_n} u(\varepsilon) = \int_\varepsilon^t e^{(t-\tau)A_n} f(\tau) d\tau.$$

Poiché il primo integrale si annulla per le proprietà dell'approssimazione di Yosida. Facciamo ora tendere ε a 0. Allora, utilizzando la condizione iniziale imposta su u, troviamo che

$$e^{(t-\varepsilon)A} u(\epsilon) = A^o e^{(t-\varepsilon)A} A^{-1} u(\varepsilon) \to A^o e^{tA} A^{-1} u_0 = e^{tA} u_0.$$

□

Osservazione. Dal teorema (11) se $u \in D([-A]^\theta) \cup X_A^\theta$, $\quad 1-\beta < \theta < 1$, allora la soluzione data dal teorema precedente è continua in $t = 0$ rispetto alla norma di X, cioè la condizione iniziale è soddisfatta con $\lim_{t\to 0} u(t) = u_0$ in X in senso forte.

Osservazione. Per $f \in C^\sigma([0,T], X)$, $\frac{2-\alpha-\beta}{\alpha} < \sigma < 1$, la derivata della soluzione è data da

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt}(t) &= A^o e^{tA} u_0 + f(t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} e^{(t-\tau)A} f(\tau) - f(t) + f(t) d\tau = \\
&= A^o e^{tA} u_0 + f(t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} e^{(t-\tau)A} f(\tau) - f(t) d\tau + [-e^{(t-s)A}]_0^t f(t) = \\
&= e^{tA} f(t) + A^0 e^{tA} u_0 + \int_0^t A^0 e^{(t-\tau)A} \{f(\tau) - f(t)\} d\tau
\end{aligned}$$

per $0 < t \leq T$. Allora se u_0 soddisfa la condizione

$$\{f(0) + Au_0\} \cap \{D([-A]^\theta) \cup X_A^\theta\} \neq \emptyset, \quad 1-\beta < \theta < 1,$$

otteniamo:

$$\frac{du}{dt}(t) = e^{tA}\{f(0) + f_0\} + e^{tA}\{f(t) - f(0)\} + \int_0^t A^0 e^{(t-\tau)A} \{f(\tau) - f(t)\} d\tau$$

con $f_0 \in Au_0$; $f(0) + f_0 \in D([-A]^\theta) \cup X_A^\theta$. Pertanto il $\lim_{t\to 0} \frac{du}{dt}(t) = f(0) + f_0$. Questo mostra che $u \in C^1([0,T], X)$ e che l'equazione in (2.2) è soddisfatta anche per $t = 0$.

Osservazione. Notiamo infine che $A0 \cap \{D([-A]^\theta) \cup X_A^\theta\} = 0$.
Prendiamo infatti $\eta \in A0$ allora $A^{-1}\eta = 0$. Poiché η deve appartenere anche a X_A^θ deve essere finito il $\sup_{\xi>0} \xi^\theta \|A^o(\xi + A)^{-1}\eta\| = \sup_{\xi>0} \xi^\theta \| -\eta + \xi(\xi + A)^{-1}\eta\|$. Ma $(\xi + A)^{-1} = A^{-1}(\xi A^{-1} + 1)^{-1} = (\xi A^{-1} + 1)^{-1} A^{-1}$. Allora $(\xi + A)^{-1}\eta = (\xi A^{-1} + 1)^{-1} A^{-1}\eta = 0$. Quindi l'unico valore di η che rende finito il $\sup_{\xi>0} \xi^\theta \|A^o(\xi + A)^{-1}\eta\|$ è $\eta = 0$.
Quindi se $\{f(0) + Au_0\} \cap \{D([-A]^\theta) \cup X_A^\theta\} \neq \emptyset$ allora è sempre formato da un solo punto.

2.4 Problemi evolutivi degeneri di tipo parabolico

2.4.1 Risolvente modificato

D'ora in avanti L e M indicano due operatori lineari chiusi, e single-valued su uno spazio di Banach X con $D(L) \subset D(M)$.

Definizione. L'insieme dei $\lambda \in \mathbb{C}; \lambda M - L$ ha un inversa single-valued, limitata su X è chiamato l'insieme risolvente M-modificato di L, o più semplicemente, *l'insieme M-risolvente di L* e viene denotato con $\rho_M(L)$. L'operatore limitato $(\lambda M - L)^{-1}$ viene chiamato il risolvente M-modificato di L o *M-risolvente di L.*

Osserviamo che, per le proprietà degli operatori multivoci, $M(\lambda M - L)^{-1} = \{(\lambda M - L)M^{-1}\}^{-1} = (\lambda - LM^{-1})^{-1} \quad \forall \lambda \in \rho_M(L)$. Quindi $\rho_M(L) \subset \rho(LM^{-1})$.

2.4.2 Problemi evolutivi

Prendiamo in considerazione la seguente equazione differenziale:

$$\begin{cases} \dfrac{dMv}{dt} = Lv + f(t), \quad 0 < t \leq T \\ \\ Mv(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

X è uno spazio di Banach, M, L sono operatori lineari chiusi, single-valued su X t.c. $D(L) \subset D(M)$

$f : [0, T] \to X$ è una funzione continua data

$u_0 \in X$ il valore iniziale

$v : [0, T] \to X$ è la funzione incognita

Assumiamo inoltre le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \rho_M(L) \supseteq \Sigma_\gamma = \{\lambda \in \mathbb{C}; \Re e(\lambda - \gamma) \geq -c(|\Im m\lambda| + 1)^\alpha\}, \quad \gamma \in \mathbb{R} \\ \\ \|M(\lambda M - L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \dfrac{C}{(|\lambda - \gamma| + 1)^\beta}, \quad \lambda \in \Sigma_\gamma \end{cases} \tag{2.5}$$

per qualche esponente $0 < \beta \leq \alpha \leq 1$ e costanti $c, C > 0$.

Teorema 14. *Sia soddisfatta la condizione* (2.5) *con* $2\alpha + \beta > 2$.
Allora $\forall f \in C^{\sigma}((0,T];X)$, $\quad \dfrac{2-\alpha-\beta}{\alpha} < \sigma(\leq 1)$ *e* $\forall u_0 \in X$
(2.4) possiede un'unica soluzione stretta v *t.c.* $Mv \in C^1((0,T],X)$, $Lv \in C((0,T],X)$ *e per* $Mv(0) = u_0$ *si intende che* $\lim_{t\to 0} \|M(\gamma M - L)^{-1}\{Mv(t) - u_0\}\|_X = 0$

Dimostrazione. Poniamo $Mv(t) = u(t) \Rightarrow v(t) \in M^{-1}u(t)$ in (2.4). Allora si ottiene:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} \in LM^{-1}u(t) + f(t), \quad 0 < t \leq T \\ \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Introduciamo ora una seconda sostituzione: $u_\gamma(t) = e^{-\gamma t}u(t)$, cioè $u(t) = e^{\gamma t}u_\gamma(t)$. Così il problema differenziale diventa:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(e^{\gamma t}u_\gamma(t)) \in LM^{-1}e^{\gamma t}u_\gamma(t) + f(t), \quad 0 < t \leq T \\ \\ e^{\gamma t}u_\gamma(t) = u_0 \end{cases}$$

Da cui, per la prima inclusione si ottiene che:

$$\gamma e^{\gamma t}u_\gamma(t) + e^{\gamma t}\frac{d}{dt}u_\gamma(t) \in LM^{-1}e^{\gamma t}u(t) + f(t)$$
$$e^{\gamma t}\frac{d}{dt}u\gamma(t) \in (LM^{-1} - \gamma)e^{\gamma t}u(t) + f(t)$$
$$\frac{d}{dt}u_\gamma(t) \in (LM^{-1} - \gamma)u(t) + e^{-\gamma t}f(t)$$

Quindi (2.4) diventa (2.2) con $A = (LM^{-1} - \gamma)$.

Mostriamo ora che per $A = (LM^{-1} - \gamma)$ è soddisfatta la condizione (2.1):

a) Dobbiamo mostrare che: $\rho(A) \supseteq \Sigma = \{\lambda \in \mathbb{C}; \Re e\lambda \geq -c(|\Im m\lambda| + 1)^{\alpha}\}$

Dalla prima condizione di (2.5) segue che $\rho_M(L) \supseteq \Sigma_\gamma$ e poichè $\rho_M(L) \subseteq \rho(LM^{-1})$ allora $\Sigma_\gamma \subseteq \rho(LM^{-1})$.

Considero ora $\lambda \in \Sigma$ da cui segue che $\lambda + \gamma \in \Sigma_\gamma$,quindi

$$\lambda + \gamma \in \rho(LM^{-1}) = \{\mu \in \mathbb{C}; (\mu - LM^{-1})^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}$$

$$\Rightarrow (\lambda + \gamma - LM^{-1})^{-1} \in \mathcal{L}(X)$$

$$\Rightarrow (\lambda - (LM^{-1}) - \gamma)^{-1}) \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow \lambda \in \rho(LM^{-1} - \gamma)$$

b) Mostriamo ora che è soddisfatta anche la stima per il risolvente:
Innanzitutto $\|M(\mu M-L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le \dfrac{C}{(|\mu-\gamma|+1)^{\beta}}$, *con* $\mu \in \Sigma_\gamma$ e, poiché $\lambda+\gamma \in \Sigma_\gamma \subset \rho_M(L)$ allora

$\|M((\lambda+\gamma)M-L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = \|M\{((\lambda+\gamma)-LM^{-1})M\}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} =$
$\|MM^{-1}((\lambda+\gamma)-LM^{-1})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \subset \|((\lambda+\gamma)-LM^{-1})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = \|((\lambda-(LM^{-1}-\gamma))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}$.

Possiamo quindi concludere che:
$\|((\lambda-(LM^{-1}-\gamma))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le \|M((\lambda+\gamma)M-L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le \dfrac{C}{(|\lambda|+1)^{\beta}}$.

Quindi esiste unica $\bar{u}_\gamma(t)$ soluzione stretta di

$$(E_1)\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u_\gamma(t) \in Au_\gamma(t)+e-\gamma t f(t) \\ u_\gamma(0)=e-\gamma t u_0 \end{cases}$$

Perciò, per l'equivalenza dei due sistemi, si ha che:
$\bar{u}_\gamma(t)$ è soluzione stretta di $(E)_1 \Leftrightarrow \bar{v}(t)$ lo è per (2.4), con $M\bar{v}(t)=e^{\gamma t}\bar{u}_\gamma$.
Si ha inoltre che $M\bar{v}(t) \in C^1((0,T];X)$ e $L=(A+\gamma)M \in C((0,T];X)$.
Inoltre dall'invertibilità di $(\gamma M - L)$ segue l'unicità della soluzione $\bar{v}$. □

La continuità di $Mv(t)$ in t=0 rispetto alla topologia di X è ottenuta nel seguente modo.

Teorema 15. *Sia* $u_0 \in \overline{(D(L))}$ *se* $\alpha=\beta=1$ *e* $u_0 \in M(D(L))$ *in tutti gli altri casi. Allora, per la soluzione* v *ottenuta nel teorema di prima* $Mv(t)$ *è continua in* $t=0$. *Cioè*
$Mv \in C([0,T],X)$ *con* $Mv(0)=u_0$ *se* $u_0 \in M(D(L))$

Dimostrazione. In questo caso si ha $D(A)=D(LM^{-1}-\gamma)=D(LM^{-1})\cap D(\gamma I)=D(LM^{-1})=M(D(L))$ Pertanto se $u_0 \in M(D(L)) \Rightarrow Mv(0)=e^{tA}u_0$ è continua nella norma di X. Infatti se u soluzione stretta di (2.2) u è della forma:

$$u(t)=e^{tA}u_0+\int_0^t e^{(t-\tau)A}f(\tau)\,d\tau, \qquad 0 \le t \le T$$

$\Rightarrow Mv(0)=u(0)=e^{tA}u_0$ è continua nella norma di X per il teorema (11) □

2.5 Regolarità massimale delle soluzioni

2.5.1 Caso ottimale

In questa sezione assumiamo che l'operatore m.l. A soddisfi la condizione (2.1) con esponenti ottimali. Cioè poniamo $\alpha = \beta = 1$. Il nostro obiettivo è stabilire la massima regolarità della soluzione di (2.2). Questo caso è abbastanza analogo a quello non degenere. Otteniamo i seguenti risultati di regolarità spaziale e temporale.

Teorema 16. *Se $f \in C^\theta([0,T],X)$ con $0 < \theta < 1$ e se $u_0 \in D(A)$ con $\{f(0) + Au_0\} \cap X_A^\theta \neq \emptyset$, allora u', la derivata della soluzione u del problema (2.2) soddisfa la seguente regolarità:*

$$u' \in C^\theta([0,T],X) \cap B([0,T],X_A^\theta)$$

Dimostrazione. Come già verificato nella dimostrazione del teorema (13), vale: $u'(t) = f(t) + g(t)$,
$0 < t \leq T$, dove $g(t)$ è il limite di $A_n u_n(t)$. Pertanto, in accordo con l'osservazione del teorema (13), si ottiene che:

$$u'(t) = e^{tA}\{f(0) + g_0\} + e^{tA}\{f(t) - f(0)\} + \int_0^t A^0 e^{(t-\tau)A}\{f(\tau) - f(t)\}d\tau.$$

Dove $g_0 \in Au_0$ è tale che $f(0) + g_0 \in X_A^\theta$. Notiamo anche che $A^0 e^{tA} u_0 = e^{tA} g \;\; \forall g \in Au_0$. Allora poiché $\|e^{tA}u\|_{X_A^\theta} \leq C_\theta t^{-\theta}\|u\|, \quad u \in X$ e $\|(e^{tA}-1)u\|_X \leq C_\theta t^\theta \|u\|_{X_A^\theta}, \quad u \in X_A^\theta$ segue che

$$e^{tA}\{f(0) + g_0\},\; e^{tA}\{f(t) - f(0)\} \;\in\; C^\theta([0;T],X) \cap B([0,T],X_A^\theta).$$

Per la parte integrale invece osserviamo che

$$\int_0^t A^o e^{(t-\tau)A}\{f(t) - f(\tau)\}d\tau - \int_0^s A^o e^{(s-\tau)A}\{f(s) - f(\tau)\}d\tau =$$
$$\int_0^t A^o e^{(t-\tau)A}\{f(t) - f(\tau)\}d\tau + (e^{tA} - e^{(t-s)A})\{f(t) - f(s)\} +$$
$$+ (e^{(t-s)A} - 1)\int_0^s A^o e^{-(s-\tau)A}\{f(s) - f(\tau)\}d\tau$$

Quindi, poichè $\forall\ 0 < \theta < 1$ vale la stima $\| \int_0^t A^o e^{(t-\tau)A}\{f(t) - f(\tau)\}d\tau\|_{X_A^\theta} \leq C_\theta$ si ha che

$$\int_0^t A^o e^{(t-\tau)A}\{f(t) - f(\tau)\}d\tau \in C^\theta([0,T],X)$$

Inoltre, da $\| \int_0^t A^0 e^{(t-\tau)A} f(\tau)d\tau\|_{X_A^\theta}, \leq C_\theta \|f\|_{B([0,t],X_A^\theta)}, \quad f \in C([0,t],X) \cap B([0,t],X_A^\theta$ si ottiene

$$\int_0^t A^0 e^{(t-\tau)A}\{f(\tau) - f(t)\}d\tau \in B([0,T],X_A^\theta)$$

Quindi vale la tesi. □

Mostriamo ora un risultato di regolarità massimale sotto una condizione di regolarità spaziale per la funzione f.

Teorema 17. *Sia $0 < \theta < 1$. Per ogni $f \in C([0,T],X) \cap B([0,T],X_A^\theta)$ e per ogni $u_0 \in D(A)$ t.c. $Au_0 \cap X_A^\theta \neq \emptyset$ il problema (2.2) possiede un'unica soluzione stretta u che soddisfa*

$$u' - f \in B([0,T],X_A^\theta) \cap C^\theta([0,T],X)$$

Applichiamo ora questi teoremi all' equazione degenere della sezione precedente. Consideriamo quindi il problema (2.4) e sia soddisfatta l'assunzione $(P)_1$ con gli esponenti ottimali.
Poiché $A = (LM^{-1} - \gamma)$ l'ipotesi $\{f_0 + Au_0\} \cap X_A^\theta \neq \emptyset$ implica che esistono g_0 e v_0 t.c. $f_0 + g_0 \in X_A^\theta$, $g_0 = Lv_0 - \gamma u_0$ e $Mv_0 = u_0$ o, equivalentemente,

$$f_0 + Lv_0 \in X_A^\theta \text{ e } Mv_0 = u_0. \tag{2.6}$$

Allora si ottengono i seguenti risultati:

Teorema 18. *Se $f \in C^\theta([0,T],X)$, $0 < \theta < 1$, e se $u_0 \in M(D(L))$ soddisfa la relazione (2.6) con $f(0) = f_0$ allora soluzione del problema (2.4) soddisfa la regolarità*

$$\frac{dMv}{dt} \in C^\theta([0,T],X) \cap B([0,T],X_A^\theta).$$

Teorema 19. *Sia* $0 < \theta < 1$. *Per ogni* $f \in C([0,T],X) \cap B([0,T],X_A^\theta)$ *e per ogni* $u_0 \in M(D(L))$ *per cui vale la condizione (2.6) con* $f_0 = 0$, *allora (2.4) possiede un'unica soluzione* v *che soddisfa*

$$Lv \in C^\theta([0,T],X) \cap B([0,T],X_A^\theta).$$

2.5.2 Caso generale

Vogliamo ora stabilire la regolarità massimale della soluzione del problema (2.2) in un caso più generale. Chiediamo quindi solo che gli esponenti α e β soddisfino la relazione $2\alpha + \beta > 1$.

Teorema 20. *Sia* A *un operatore m.l. che soddisfa (2.1) con* $2\alpha + \beta > 2$. *Se* $f \in C^\theta([0,T],X)$, $\frac{2-\alpha-\beta}{\alpha} < \theta < 1$ *e* $u_0 \in D(A)$, $f(0)$ *soddisfa* $\{f(0) + Au_0\} \cap \{D([-A]^\varphi) \cup X_A^\varphi\} \neq \emptyset$ *con* $\varphi = \alpha^2\theta + (2-\alpha-\beta)(1-\alpha)$, *allora la soluzione stretta di (2.2) soddisfa la regolarità:*

$$\frac{du}{dt} \in C^\omega([0,T],X), \quad \omega = \alpha\theta + \alpha + \beta - 2.$$

.

Applichiamo il risultato ottenuto all'equazione degenere (2.4). Otteniamo quindi

Teorema 21. *Siano* L,M *due operatori che soddisfano (2.5) con* $2\alpha + \beta > 2$ *e sia* $A = LM^{-1} - \gamma$. *Se* $f \in C^\theta([0,T],X)$, $\frac{2-\alpha-\beta}{\alpha} < \theta < 1$ *e se* $u_0 \in M(D(L))$ *soddisfa la relazione*

$$Lv_0 + f(0) = g_0, \quad u_0 = Mv_0 \text{ con } g_0 \in D([-A]^\varphi) \cup X_A^\varphi, v_0 \in D(L)$$

dove $\varphi = (\alpha)^2\theta + (2-\alpha-\beta)(1-\alpha)$, *allora la soluzione stretta* v *di (2.4) soddisfa la regolarità*

$$\frac{dMv}{dt}, Lv \in C^\omega([0,T];X)$$

con $\omega = \alpha\theta + \alpha + \beta - 2$.

2.6 Alcuni risultati di tipo Trotter-Kato

Consideriamo una successione $A_n,\ n \in \mathbb{N}$ di operatori m.l. in uno spazio di Banach X. Vogliamo studiare la convergenza di u_n, soluzioni del problema

$$\begin{cases} \dfrac{du_n}{dt} \in A_n u + f(t), \quad 0 < t \leq T \\ u_n(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Assumiamo che $\forall n \in \mathbb{N}$ gli A_n soddisfino le condizioni di (2.1) con gli stessi esponenti $0 < \beta \leq \alpha \leq 1$ e con le stesse costanti $c, M > 0$.
Verifichiamo innanzitutto la convergenza dei semigruppi e^{tA_n} generati da A_n.

Teorema 22. *A_n soddisfano (2.1) con gli stessi esponenti α, β e le stesse costanti c, M per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia Σ la regione definita in (2.1) che assumiamo contenuta in ogni insieme $\rho(A_n)$. Inoltre esiste $\lambda_0 \in \Sigma$ tale che per $n \to \infty$*

$$(\lambda_0 - A_n)^{-1} f \text{ è convergente in } X\ \forall f \in X \tag{2.8}$$

Allora esiste un unico operatore lineare multivoco A in X t.c. $\Sigma \subset \rho(A)$ e per cui

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda - A)^{-1} = (\lambda - A)^{-1} \text{ in } X\ \forall \lambda \in \Sigma$$

Dove il limite è inteso in senso forte. Di conseguenza anche A soddisfa la condizione (2.1) con gli stessi esponenti.

Studiamo ora più dettagliatamente l'operatore limite A. Poiché A soddisfa la condizione (2.1) allora A genera un semigruppo $e^{tA}, t \geq 0$ infinitamente differenziabile definito come

$$e^{tA} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{t\lambda} (\lambda - A)^{-1} d\lambda, \quad t > 0$$

dove $\Gamma:\ -c(1+|\eta|)^\alpha + i\eta,\ -\infty < \eta < \infty$ è una curva giacente in Σ. Allora per il teorema precedente e^{tA_n} converge per $n \to \infty$ a e^{tA} fortemente su X $\forall t \geq 0$ e la convergenza è uniforme su t per ogni intervallo chiuso $[\delta, \infty), \delta > 0$. Inoltre poiché

$$\frac{d^k}{dt^k} e^{tA_n} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \lambda^k e^{tA} (\lambda - A)^{-1} d\lambda$$

per $t > 0,\ k = 1, 2, 3...$ il risultato è vero anche per ogni derivata.
Come conseguenza si ottiene il seguente teorema sulla convergenza della soluzioni.

Teorema 23. *Assumiamo che $\forall n \in \mathbb{N}$ gli A_n soddisfino (2.1) con i medesimi esponenti α, β tali che $\alpha+\beta > 1$ e con le stesse costanti c, M. Valga inoltre la condizione (2.8) e sia A il limite di tale successione. Allora per ogni $f \in C([0,T];X)$ e per ogni $u_0 \in X$, la sequenza di funzioni u_n, $n \in \mathbb{N}$ data da*

$$u_n(t) = e^{tA_n}u_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A_n} f(\tau)d\tau, \quad 0 < t \leq T$$

converge puntualmente alla funzione u data da

$$u(t) = e^{tA}u_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A} f(\tau)d\tau, \quad 0 < t \leq T$$

nella norma di X.

Capitolo 3

Applicazioni

A conclusione della trattazione riportiamo come esempio una delle più famose equazioni paraboliche: l'equazione del calore. In particolare studieremo la formulazione di Poisson nello spazio di Hilbert $H^{-1}(\Omega)$.
Prima di studiare il problema, però, richiamiamo gli spazi di Sobolev e alcuni importanti teoremi che ci saranno particolarmente utili nell'esempio.

3.1 Spazi di Sobolev

Definizione. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Siano $f, g \in L'_{loc}(\Omega)$, cioè $f \in L'(K) \quad \forall K$ compatto in Ω. Diremo che $g = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ è la derivata in senso debole se

$$\int_\Omega g\varphi dx = -\int_\Omega f\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Definizione. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Diremo che f appartiene allo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$ se:

i) $f \in L^p(\Omega)$

ii) f ha derivate deboli $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$

iii) $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} \in L^p(\Omega) \quad \forall j = 1, \ldots, n$

Per $p = 2$ si denota $H^1(\Omega) = W^{1,2}$.

Per $u \in W^{1,p}(\Omega)$ poniamo

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

che viene detto gradiente debole della u.

Indichiamo con

$$\|\nabla u\|_{L^p} = \sum_{j=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_j}\|_{L^p}$$

e con

$$< \nabla u, \nabla v >= \sum_{i=1}^{n} < \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} >$$

Lo spazio $W^{1,p}$ è munito della norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p} + \|\nabla u\|_{L^p}$$

o della norma equivalente

$$(\|u\|_{L^p}^p + \|\nabla u\|_{L^p})^{\frac{1}{p}}.$$

Mentre lo spazio $H^1(\Omega)$ è munito del prodotto scalare

$$< u, v >_{H^1} = < u, v >_{L^2} + < \nabla u, \nabla v >_{L^2}$$

a cui è associata la norma

$$\|u\|_{H^1} = (\|u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L_2}^2)^{\frac{1}{2}}$$

equivalente alla norma di $W^{1,2}$.

Lo spazio $W^{1,p}$ è uno spazio di Banach per $1 \leq p \leq \infty$, è riflessivo per $1 < p < \infty$ e separabile per $1 \leq p < \infty$. Lo spazio H^1 è uno spazio di Hilbert separabile.

Definizione. $W_0^{1,p}$ indica la chiusura di $C_c^1(\Omega)$ in $W^{1,p}$, per ogni $1 \leq p > \infty$

Si pone

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$$

Lo spazio $W_0^{1,p}$ munito della norma indotta da $W^{1,p}$ è uno spazio di Banach separabile. Se $1 < p < \infty$ è riflessivo. Inoltre H_0^1 è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare di H^1.

Teorema 24 (Disuguaglianza di Poincaré)**.** *Supponiamo che Ω sia un aperto limitato. Allora, per ogni $1 \leq p < \infty$, esiste una costante C (dipendente da Ω e da p) tale che*

$$C\|u\|_{L^p} \leq \|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

In particolare $\|u\|_{L^p}$ *è una norma su* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *equivalente alla norma di* $\|u\|_{W^{1,p}}$. *Mentre su* $H_0^1(\Omega)$, $\int_\Omega \nabla u \nabla v$ *è un prodotto scalare che induce la norma* $\|\nabla u\|_{L^2}$ *equivalente alla norma* $\|u\|_{H^1}$.

Indichiamo inoltre con $W^{-1,p'}(\Omega)$ lo spazio duale di $W_0^{1,p}(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$ e con $H^{-1}(\Omega)$ lo spazio duale di $H_0^1(\Omega)$.
Identifichiamo $L^2(\Omega)$ con il suo duale (ma non identifichiamo $H_0^1(\Omega)$ con il suo duale).
Si hanno le seguenti inclusioni

$$H_0^1 \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$$

con immersioni continue e dense.
Possiamo caratterizzare gli elementi di $H^{-1}(\Omega)$ nel seguente modo:

Proposizione 3. *Sia* $F \in H^{-1}(\Omega)$ *allora esistono* $f_1, f_2, \dots, f_n \in (L^2)'$ *tali che*

$$\langle F, v \rangle = \int f_0 v + \sum_{i=1}^{n} \int f_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$$

e

$$\max_{0 \leq i \leq n} \|f_i\|_{(L^2)'} = \|F\|$$

Se Ω *è limitato grazie alla disuguaglianza di Poincaré si può scegliere* $f_0 = 0$.

3.2 Teorema di Lax-Milgram

Consideriamo X, uno spazio di Hilbert su $\mathbb{C}$.

Definizione. Una *forma sesquilineare* su $\mathbb{C}$ è un'applicazione

$$a : X \times X \to \mathbb{C}$$

lineare rispetto alla prima componente e antilineare rispetto alla seconda.

Definizione. Una forma sesquilineare a si dice *coerciva* in X se $\exists \alpha > 0$ per cui è soddisfatta la seguente stima:

$$|a(u, v)| \geq \alpha \|v\|_X^2 \ , \forall\, v \in X$$

.

Definizione. Una forma sesquilineare si dice *limitata* in X, se $\exists\beta > 0$ per cui vale

$$|a(u,v)| \leq \beta \|v\|_X \|u\|_X \quad \forall\, u, v \in X$$

Teorema 25 (Lax-Milgram)**.** *Sia a una forma sesquilineare continua e coerciva su uno spazio di Hilbert X. Allora per ogni $\varphi \in X'$ esiste un unico elemento $u \in X$ tale che*

$$a(u,v) =< \varphi, v > \quad \forall v \in X$$

3.3 Studio dell'equazione del calore

Consideriamo quindi il seguente problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial m(x)v}{\partial t} = \Delta v + f(x,t), & (x,t) \in \Omega \times (0,T] \\ v = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T] \\ m(x)v(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

Dove $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un sottospazio limitato con un bordo liscio $\partial\Omega$ e $m(x) \geq 0$ in Ω è una funzione data in $L^\infty(\Omega)$.
Il problema risulta quindi essere del tipo

$$\begin{cases} \dfrac{dMv}{dt} = Lv + f(t), & 0 < t \leq T \\ \\ Mv(0) = u_0 \end{cases}$$

Dove M è l'operatore di moltiplicazione per la funzione $m(x)$ e L è il laplaciano Δ, con le condizioni al bordo di Dirichlet.
Consideriamo come spazio di Banach $X = H^{-1}(\Omega)$.
Otteniamo quindi che

$$M : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega) \subset X$$
$$L : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega).$$

Ora consideriamo per $\lambda \in \mathbb{C}$ la seguente forma bilineare definita su H_0^1:

$$a_\lambda(u,v) = \lambda \int_\Omega m(x) u\bar{v} dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \bar{v} dx, \quad u, v \in H_0^1(\Omega)$$

Osserviamo che la forma è continua su H_0^1. Inoltre

$$|a_\lambda(u,u)| = |\lambda \int_\Omega m(x) u\bar{u} dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \bar{u} dx| = |\lambda| \|\sqrt{m} u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

e poiché $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ è una norma equivalente a $\|u\|_{H_0^1}$ risulta che per ogni $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$ e per qualche opportuna costante $c > 0$, la seguente stima:

$$|a_\lambda(u,v)| \geq \delta(\|u\|_{H_0^1}^2 + |\lambda| \|\sqrt{m} u\|_{L^2}^2), \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

è soddisfatta per ogni $\lambda \in \Sigma = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \arg \lambda| \leq \omega \text{ o } |\lambda| \leq c\}$ per qualche uniforme $\delta > 0$. Quindi la forma sesquilineare risulta essere anche coerciva.
Si può perciò applicare il teorema di Lax-Milgram: per ogni funzione $\varphi \in H^{-1}$ esiste unico $u \in H_0^1$ tale che

$$a_\lambda(u,v) = < \varphi, v > \quad \forall v \in H_0^1$$

Osservazione. $a_\lambda(u,v) = < (\lambda M - L)u, v >_{H^{-1} \times H_0^1} \quad u,v \in H_0^1(\Omega)$. Infatti

$$< (\lambda M - L)u, v >_{H^{-1} \times H_0^1} = \int_\Omega (\lambda M - L) u \bar{v} dx = \lambda \int_\Omega m u \bar{v} dx - \int_\Omega (Lu) \bar{v} dx$$

integrando per parti e osservando che la prima parte si annulla poiché $v \in H_0^1$ si dimostra che

$$< (\lambda M - L)u, v >_{H^{-1} \times H_0^1} = \lambda \int_\Omega m(x) u \bar{v} dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \bar{v} dx$$

Allora si ottiene che $\lambda M - L \in \Sigma$ ha un'inversa limitata da $H^{-1}(\Omega)$ a $H_0^1(\Omega)$ con una stima

$$\delta(\|u\|_{H_0^1}^2 + |\lambda| \|\sqrt{m} u\|_{L^2}^2 \leq \|\varphi\|_{H^{-1}} \|u\|_{H_0^1} \text{ se } u = (\lambda M - L)^{-1} \varphi.$$

Quindi $\|Lu\|_{H^{-1}} \leq C \|u\|_{H_0^1} \leq C \|\varphi\|_{H^{-1}}$. Allora è dimostrata la prima condizione di (2.5) con $\beta = 1$ e $\gamma = 0$.
Inoltre $\lambda M(\lambda M - L)^{-1} \subset \lambda(\lambda - LM^{-1})^{-1} \subset LM^{-1}(\lambda - LM^{-1})^{-1} + 1 = L(\lambda M - L)^{-1} + 1$. Da cui

$$\|M(\lambda M - L)^{-1} \varphi\|_{H^{-1}} \leq C |\lambda|^{-1} \|\varphi\|_{H^{-1}}, \quad \varphi \in H^{-1}(\Omega)$$

Allora è soddisfatta anche la stima per il risolvente con l'esponente $\alpha = 1$.

Possiamo quindi applicare i teoremi del capitolo precedente e affermare che per ogni $f \in C^{\sigma}([0,T]; H^{-1}(\Omega))$, $\sigma > 0$ e per ogni $u_0 \in H^{-1}(\Omega)$ il problema (3.1) ammette un'unica soluzione tale che $mv \in C^1((0,T]; H^{-1}(\Omega))$, $v \in C((0,T]; H_0^1(\Omega))$. Inoltre dal teorema (15) si ha che mv è continua in $t = 0$ se $u_0 = mv_0$ per qualche $v_0 \in L^2(\Omega)$.

Inoltre possiamo applicare i risultati relativi alla regolarità massimale della soluzione nel caso ottimale. In particolare per il teorema (18) si ottiene che se $f \in C^{\theta}([0,T]; H^{-1}(\Omega))$,
$0 < \theta < 1$, e se u_0 è uguale a mv_0 per qualche $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ per cui $f(x,0) + \Delta v_0 \in X_A^{\theta}$, allora

$$\frac{\partial mv}{\partial t} \in C^{\theta}([0,T]; H^{-1}(\Omega)) \cap B([0,T]; X_A^{\theta})$$

mentre, grazie al teorema (19) si ha che se $f \in C([0,T]; H^{-1}(\Omega)), 0 < \theta < 1$ e se u_0 è uguale a mv_0 per qualche $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ tale che $\Delta v_0 \in X_A^{\theta}$, allora
$\Delta v \in C^{\theta}([0,T]; H^{-1}(\Omega)) \cap B([0,T]; X_A^{\theta})$.

Bibliografia

[1] H.Brezis, *Analisi funzionale. Teoria e applicazioni*, Liguori Editore, 2006.

[2] R. Cross, *Multivalued Linear Operators*, New York-Basel - Hong Kong: Marcel Dekker, 1998.

[3] A. Favini, *Potenze frazionarie e teoria della interpolazione per operatori lineari multivoci ed applicazioni*, Rend. Sem. Mat. Univ. Bologna, 2011.

[4] A. Favini and A.Yagi, *Degenerate Differential Equations in Banach Spaces*, New York-Basel - Hong Kong: Marcel Dekker, 1999.

[5] J.A. Goldstein, *Semigroups of Linear Operators and Applications*, Oxford Univ. Press, New York, 1995.

[6] A. Lunardi, *Analytici Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 1995.