ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea in Matematica

TEORIA SPETTRALE IN SPAZI DI HILBERT

Tesi di Laurea in Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Bruno Franchi

Presentata da:
Giacomo Sachs

II Sessione
Anno Accademico 2013/2014

Prefazione

In questa tesi ci si occuperà di presentare alcuni aspetti salienti della teoria spettrale per gli operatori limitati negli spazi di Hilbert.

Nel primo capitolo verranno presentate alcune nozioni fondamentali di analisi funzionale, necessarie per lo studio degli operatori.

Il secondo capitolo si occupa invece di analizzare la teoria spettrale per operatori compatti. In particolare, verrà presentato il Teorema Spettrale per Operatori Normali Compatti e il Teorema dell'Alternativa di Fredholm. In seguito verrà applicata tale teoria alla risolubilità del problema di Dirichlet.

Nel terzo capitolo verrà esteso quanto ottenuto per gli operatori compatti ad operatori limitati autoaggiunti e per gli operatori normali limitati, passando attraverso le famiglie spettrali.

Indice

Capitolo 1

Nozioni Preliminari

Per studiare gli operatori lineari su degli spazi di Hilbert è innanzitutto necessario introdurre alcune definizioni essenziali. Per i nostri studi si sottintenderà, qualora non sia indicato diversamente, che il campo su cui si lavora sia $\mathbb{C}$.

1.1 Funzionali Lineari Continui su Spazi di Hilbert

Definizione 1.1.1 (Spazio di Hilbert)**.** Sia H uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare. H viene detto uno *spazio di Hilbert* se è uno spazio di Banach, avendo scelto come norma la norma indotta dal prodotto scalare.

Esempio 1.1.1. Un esempio di spazio di Hilbert è dato dallo spazio vettoriale $\mathbb{C}^n$, con la norma indotta dal prodotto hermitiano standard su $\mathbb{C}^n$.

Proposizione 1.1.1 (Formula di Polarizzazione)**.** Sia H uno spazio di Hilbert. Allora per ogni $x, y \in H$ si ha

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle + i\langle x-iy, x-iy\rangle - i\langle x+iy, x+iy\rangle)$$

Definizione 1.1.2. Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ *e* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati, e sia $T : X \to Y$ un operatore lineare. Diremo che T è *limitato* se $\exists c \geq 0 :$ $\|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X, \forall x \in X$. Denoteremo con $\mathfrak{L}(X,Y)$ l'insieme degli operatori lineari limitati da X a Y.

Chiameremo poi *norma operatoriale* su $\mathfrak{L}(X,Y)$ la seguente espressione:

$$\|T\| = \inf\{c : \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X,\ \forall x \in X,\ C \geq 0\}$$

Se poi $(Y, \|\cdot\|_Y) = \mathbb{C}$, allora lo spazio $\mathfrak{L}(X,\mathbb{C})$ è detto lo *spazio duale* di X, e si indica con X^*.

Teorema 1.1.1 ([4], *Teorema 4.1*)**.** Sia H uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, e siano $T_1, \ldots, T_n, T \in H^*$. Se $Ker(T) \supset \cap_{i=1}^{n} Ker(T_i) \implies \exists a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K} :$

$$T = \sum_{i=1}^{n} a_i T_i$$

Teorema 1.1.2 ([4], *Teorema 4.2*)**.** Siano X e Y due spazi normati, e $T : X \to Y$ lineare. Allora sono equivalenti le seguenti espressioni:

1. T è continuo
2. T è continuo nell'origine
3. T è limitato

Teorema di Banach-Steinhaus ([4], *Teorema 4.22*)**.** Siano X e Y due spazi di Banach. Sia poi $M = \{T_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq \mathfrak{L}(X,Y)$, T_α limitate. Se M è puntualmente limitato ($\iff \forall x \in X\ \exists\ C_x \geq 0 :\ \|T_\alpha x\| \leq C_x,\ \forall \alpha \in A$), allora M è limitato
($\iff \exists C \geq 0 : \|T\| \leq C\ \forall \alpha \in A$).

Teorema di Riesz ([4], *Teorema 4.8*)**.** Sia H uno spazio di Hilbert, e sia $f \in H^*$. Allora

$$\exists!\ x_f \in H : f(x) = \langle x, x_f \rangle,\ \ \forall x \in H$$

Teorema 1.1.3. Sia H uno spazio di Hilbert, e $M \subseteq H$ un sottospazio chiuso. Valgono allora le seguenti affermazioni:

1. $M^\perp$ è un sottospazio chiuso
2. $H = M \oplus M^\perp$
3. $\exists P : H \to M, Q : H \to M^\perp$ lineari e continue, $\|P\| = \|Q\| = 1$:
$$P + Q = I$$
4. $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$

Definizione 1.1.3. Un operatore viene definito *densamente definito* se $\mathbb{D}(T)$ è denso. Un operatore T densamente definito su uno spazio di Hilbert viene detto *simmetrico* se

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{D}(T)$$

Teorema 1.1.4 ([4], *Teorema 4.4*)**.** Sia T un operatore densamente definito su uno spazio di Hilbert complesso.
T è limitato se e solo se

$$C = \sup_{\substack{x \in \mathbb{D}(T) \\ \|x\| \leq 1}} |\langle x, Tx\rangle| < \infty$$

Se poi T è limitato, si avrà che:

1. $\|T\| \leq 2C$,
2. $\|T\| = C$ se T è simmetrico.

Teorema 1.1.5 ([4], *Teorema 4.5*)**.** Sia T un operatore limitato da un spazio di Banach H_1 a uno spazio di Banach H_2.
$\Longrightarrow$ $\exists! S$ estensione limitata di T:

$$\mathbb{D}(S) = \overline{\mathbb{D}(T)}, \text{ e } \|S\| = \|T\|$$

Teorema 1.1.6 ([4], *Teorema 4.7*)**.**

1. Siano $H_1,\ H_2$ due spazi normati. Se $T \in \mathfrak{L}(H_1, H_2)$, allora $Ker(T)$ è un sottospazio chiuso di H_1.

2. Sia T un funzionale lineare su uno spazio di Hilbert H: $\mathbb{D}(T) = H$.

$$T \in H^* \iff Ker(T) \text{ è chiuso}$$

1.2 Operatore Autoaggiunto

Definizione 1.2.1. Supponiamo che H_1 e H_2 siano due spazi di Hilbert. Siano $T : H_1 \to H_2$ e $S : H_2 \to H_1$ due operatori. S è detto un *operatore aggiunto formale* di T se:

$$\langle y, Tx \rangle = \langle Sy, x \rangle \ , \quad \forall x \in \mathbb{D}(T),\ y \in \mathbb{D}(S)$$

Allora anche T è l'operatore autoaggiunto formale di S. Diremo allora che S e T sono uno l'aggiunto dell'altro.

Osservazione 1.2.1. Un operatore S_0 tale che $\mathbb{D}(S_0) = \{0\}$ è un aggiunto formale per ogni operatore da H_1 in H_2.

Osserviamo poi che, se S è un aggiunto formale di T, allora per ogni $y \in \mathbb{D}(S)$ il funzionale lineare L_y definito come:

$$\mathbb{D}(L_y) = \mathbb{D}(T),\ L_y x = \langle y, Tx \rangle$$

è continuo. Inoltre, per ogni $x \in \mathbb{D}(T)$ si ha

$$L_y x = \langle y, Tx \rangle = \langle Sy, x \rangle$$

e cioè $L_y = T_{Sy}$ ristretto a $\mathbb{D}(T)$. Se $\mathbb{D}(T)$ è denso e il funzionale L_y é continuo, allora per il Teorema (1.1.5) possiamo estendere L_y in modo unico a $H = \overline{\mathbb{D}(T)}$. Esiste cioè un $h_y \in H_1$ univocamente determinato da y e T da

$$\langle y, Tx \rangle = L_y x = \langle h_y, x \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{D}(T)$$

Allora, essendo S un aggiunto formale di T e $y \in \mathbb{D}(S)$, si ha sicuramente $Sy = h_y$.

Sia ora $T : H_1 \to H_2$ un operatore densamente definito, e sia

$$\begin{aligned} D^* &= \{y \in H_2 : \text{ il funzionale } x \mapsto \langle y, Tx\rangle \text{ sia continuo su } \mathbb{D}(T)\} \\ &= \{y \in H_2 : \exists h_y \in H_1 \text{ tale che } \langle h_y, x\rangle, \langle y, Tx\rangle,\ \forall x \in \mathbb{D}(T)\} \end{aligned}$$

Allora l'elemento h_y è univocamente determinato: se $\langle h_1, x\rangle = \langle y, Tx\rangle = \langle h_2, x\rangle$ per ogni $x \in \mathbb{D}(T)$, allora $h_1 - h_2 \in \mathbb{D}(T)^\perp = \{0\}$, e dunque $h_1 = h_2$. D^* è un sottospazio di H_1, e la corrispondenza

$$\begin{aligned} D^* &\to H_1 \\ y &\mapsto h_y \end{aligned}$$

è lineare, in quanto presi $y_1, y_2 \in D^*$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, si ha

$$h_{\alpha y_1 + \beta y_2} = \alpha h_{y_1} + \beta h_{y_2}$$

Allora, se poniamo $\mathbb{D}(T^*) = D^*$ e $T^*(y) = h_y$ per $y \in \mathbb{D}(T^*)$, abbiamo definito un operatore da H_1 in H_2, che è un aggiunto formale di T, ed è estensione di ogni aggiunto formale di T.

Definizione 1.2.2. Nelle condizioni precedenti, diciamo che T^* è l'*operatore aggiunto* di T.

Teorema 1.2.1 ([4], *Teorema 4.14*)**.** Sia T un operatore densamente definito, $T : H_1 \to H_2$.

- T è limitato $\iff$ $T^* \in \mathfrak{L}(H_2, H_1)$.
- Se T è limitato, allora $\|T\| = \|T^*\|$
- Se $T \in \mathfrak{L}(H_1, H_2)$, allora T^{**} è l'estensione continua di T su tutto H_1. Inoltre $T^{**} = T$.

Definizione 1.2.3. Sia $T : H_1 \to H_2$ un operatore. Il *grafico* di T è il sottinsieme

$$G(T) = \{(x, Tx) : x \in \mathbb{D}(T)\}$$

di $H_1 \times H_2$, dove $H_1 \times H_2$ è uno spazio di Hilbert.

Definizione 1.2.4 (Operatore autoaggiunto)**.** Un operatore T su uno spazio di Hilbert H viene detto *Hermitiano* se è un aggiunto formale di sè stesso, cioè:

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle,\ \forall x, y \in \mathbb{D}(T)$$

Un operatore T su H verrà detto *simmetrico* se è Hermitiano e densamente definito.
Poichè ogni operatore densamente definito T è Hermitiano se e solo se è una restrizione di T^*, avremo che *un operatore T è simmetrico se e solo se T è densamente definito e $\mathbb{D}(T) \subset \mathbb{D}(T^*)$*. Un operatore T su H viene detto *autoaggiunto* se T è densamente definito e $T = T^*$.

1.3 Operatori Chiusi

Definizione 1.3.1 (Operatore chiuso, Operatore chiudibile)**.** Un operatore $T : H_1 \to H_2$ si dice *chiuso* se $G(T)$ è chiuso. Un operatore T si dice invece *chiudibile* se $\overline{G(T)}$ è un grafico. Si dimostra poi che, se T è chiudibile, esiste un unico operatore $\overline{T}$ tale che $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$.

Sia T un operatore chiuso. Un sottospazio $D \subset \mathbb{D}(T)$ viene detto un *nucleo* di T se, posto $S = T_{|D}$, si ha $T = \overline{S}$. Se poi T è un operatore chiudibile, allora $\mathbb{D}(T)$ è ovviamente un nucleo di $\overline{T}$.

Teorema del Grafico Chiuso ([4], *Teorema 5.6*)**.** Siano H_1, H_2 due spazi di Hilbert, e sia $T : H_1 \to H_2$. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1. T è chiuso e $\mathbb{D}(T)$ è chiuso
2. T è limitato e $\mathbb{D}(T)$ è chiuso
3. T è limitato e chiuso

Teorema di Hellinger-Toeplitz ([4], *Teorema 5.7*)**.** Siano H_1, H_2 due spazi di Hilbert, e sia $T : H_1 \to H_2 :\ \mathbb{D}(T) = H_1,$ e $\mathbb{D}(T^*)$ è denso in H_2. Allora $T \in \mathfrak{L}(H_1, H_2)$.

1.4 Elementi di Teoria Spettrale

Da ora in poi un operatore $T : H_1 \to H_2$ verrà detto *biettivo* se T è iniettivo e $\mathfrak{R}(T) = H_2$.

Definizione 1.4.1 (Autovettore, Autovalore, Autospazio, Insieme Risolvente)**.** Sia H uno spazio di Hilbert su $\mathbb{C}$, e sia T un operatore su H. Sia poi $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\exists x \in \mathbb{D}(T), x \neq 0 : \; Tx = \lambda x$$

$\iff \lambda - T = \lambda I - T$ non è iniettivo $\iff Ker(\lambda - T) \neq \{0\}$. Un λ di questo tipo viene detto un *autovalore* di T, e l'insieme $Ker(\lambda - T)$ viene detto *autospazio di* λ. La dimensione di $Ker(\lambda - T)$ viene detta poi *molteplicità geometrica dell'autovalore* λ. L'elemento x viene detto un *autovettore di* T *di autovalore* λ.
Se μ non è un autovalore di T, allora l'operatore

$$R(\mu, T) = (\mu - T)^{-1}$$

è ben definito, e l'insieme

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \; \lambda - T \text{ è iniettiva, e } R(\lambda, T) \in \mathfrak{B}(H)\}$$

viene detto *insieme risolvente di* T.

Osservazione 1.4.1. Se T non è chiuso, allora $\lambda - T$ e $R(\lambda, T)$ non sono chiusi, e dunque $\rho(T) = \emptyset$.

Osservazione 1.4.2. Per un operatore chiuso T su H abbiamo, per il Teorema del Grafico Chiuso, che

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda - T \text{ è biettiva}\}$$

Definizione 1.4.2. L'operatore

$$R(\cdot, T) : \rho(T) \to \mathfrak{L}(H), \quad \lambda \mapsto R(\lambda, T)$$

è detto il *risolvente di* T. Per ogni $\lambda \in \rho(T)$ l'operatore $R(\lambda, T)$ viene chiamato il *risolvente di* T *al punto* λ. L'insieme

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$$

è detto lo *spettro di* T. L'insieme $\sigma_p(T)$ di tutti gli autovalori di T è ovviamente incluso in $\sigma(T)$. L'insieme $\sigma_p(T)$ è detto lo *spettro puntuale di* T.

Teorema 1.4.1 ([4], *Teorema 5.12*)**.** Sia T un operatore densamente definito su H. Allora $\sigma(T^*) = \sigma(T)^*$ e $\rho(T^*) = \rho(T)^*$ (Se $M \subseteq \mathbb{C}$, definiamo $M^* = \{z^* : \ z \in M\}$).

Teorema 1.4.2 ([4], *Teorema 5.17*)**.** Sia H uno spazio di Hilbert, e sia $T \in \mathfrak{L}(H)$, $r(T) = \limsup \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$. Allora

- $r(T) \leq \|T^m\|^{\frac{1}{m}}$ per ogni $m \in \mathbb{N}$, e dunque $r(T) = \lim \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$
- $r(T) \leq \|T\|$, e $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r(T)\}$
- $\sigma(T) \neq \emptyset$. Inoltre esiste un $\lambda \in \sigma(T)$ tale che $|\lambda| = r(T)$, e cioè $r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$

$r(T)$ è detto il *raggio spettrale di* T.

1.5 Operatori Normali

Definizione 1.5.1. Un operatore densamente definito T su uno spazio di Hilbert H si dice *normale* se:

$$\mathbb{D}(T) = \mathbb{D}(T^*) \text{ e } \|Tx\| = \|T^*x\| \; \forall x \in \mathbb{D}(T)$$

Ogni operatore autoaggiunto è ovviamente normale.

Teorema 1.5.1 ([4], *Teorema 5.41*)**.** Sia T un operatore normale.

- $\forall z \in \mathbb{K}$ si ha $Ker(\lambda - T) = Ker(\lambda^* - T^*)$.
- se λ_1, λ_2 sono due autovalori distinti di T e x_1, x_2 sono due corrispondenti autovettori, allora $x_1 \perp x_2$.

Proposizione 1.5.1. Sia T un operatore densamente definito e chiuso. Allora sono equivalenti le seguenti:

- T è normale
- T^* è normale
- $T^*T = TT^*$

Teorema 1.5.2 ([4], *Teoremi 5.43, 5.44*)**.** Se T è normale, allora

$$\rho(T) = \{\mu \in \mathbb{K} : (\mu - T)\text{è continuamente invertibile}\}$$

$$= \{\mu \in \mathbb{K} : \mathfrak{R}(\mu - T) = H\}$$

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \overline{\mathfrak{K}(\lambda - T)} \neq H\}$$

Se poi $T \in \mathfrak{B}(H)$, allora $r(T) = \|T\|$.

1.6 Operatori Compatti e di Rango Finito

Definizione 1.6.1. Diciamo che un operatore $T : H_1 \to H_2$ è *di rango finito* m se $dim\ \mathfrak{R}(T) = m < \infty$.

Teorema 1.6.1 ([4], *Teorema 6.1*)**.** Sia $T : H_1 \to H_2$ un operatore: $\mathbb{D}(T) = H_1$. T è un operatore limitato di rango finito m se e sono se esistono m elementi linearmente indipendenti $x_1, \dots, x_m \in H_1$ ed m elementi linearmente indipendenti $y_1, \dots, y_m \in H_2$:

$$Tx = \sum_{j=1}^{m} \langle x_j, x \rangle y_j, \quad \forall x \in H_1$$

Allora

$$T^* y = \sum_{j=1}^{m} \langle y_j, y \rangle x_j, \quad \forall y \in H_2$$

Inoltre $\|T\| \leq \sum_{j=1}^{m} \|x_j\| \|y_j\|$.
L'operatore T è di rango m se e solo se T^* è di rango m.

Definizione 1.6.2. Sia $T : H_1 \to H_2$ un operatore fra spazi di Banach. T si dice *compatto* se, preso $D \subseteq H_1$ chiuso, si ha che $T(D) \subseteq H_2$ è *precompatto*, e cioè $\overline{T(D)}$ è compatto in H_2.

Se poi H_1, H_2 sono spazi di Hilbert, tale definizione implica che T è compatto se ogni successione limitata $(x_n) \in \mathbb{D}(T)$ contiene una sottosuccessione (x_{n_k}) per cui (Tx_{n_k}) è convergente.
Indichiamo con $\mathfrak{B}_\infty(H_1, H_2)$ l'insieme degli operatori compatti. Se poi $H_1 = H_2 = H$ scriveremo $\mathfrak{B}_\infty(H)$.

Teorema 1.6.2 ([4], *Teorema 6.2*)**.** Ogni operatore compatto è limitato. Se poi T è compatto, anche $\overline{T}$ lo è.

Proposizione 1.6.1. Sia H uno spazio di Hilbert di dimensione infinita. Se $T \in \mathfrak{L}(H)$ è compatto, allora $0 \in \sigma(T)$.

Teorema 1.6.3 ([4], *Teorema 6.5*)**.** Un operatore $T \in \mathfrak{L}(H_1, H_2)$ è compatto se e solo se è il limite di una successione di operatori di rango finito.
Inoltre per ogni operatore compatto T i sottospazi $Ker(T)^{\perp}$ e $\mathfrak{R}(T)$ sono separabili.

Teorema 1.6.4 ([4], *Teorema 6.6*)**.** Sia H uno spazio di Hilbert, $T \in \mathfrak{B}_{\infty}(H), \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.
Allora $\mathfrak{R}(\lambda - T)$ è chiuso.

Capitolo 2

Teorema Spettrale per Operatori Compatti

2.1 Teorema Spettrale per Operatori Normali Compatti

Teorema 2.1.1 ([4], *Teorema 6.7*)**.** Sia H uno spazio di Hilbert sul campo $\mathbb{K}$, e sia $T \in \mathfrak{B}_\infty(H)$.
Allora

$$\sigma(T) \cap (\mathbb{K} \setminus \{0\}) = \sigma_p(T) \cap (\mathbb{K} \setminus \{0\})$$

Se poi $dimH = \infty$, allora

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$$

L'operatore T ha al più una infinità numerabile di autovalori che possono convergere solo a 0, e ogni autovalore non nullo ha molteplicità finita.
Il numero $\lambda \neq 0$ è un autovalore se e solo se λ^* è un autovalore di T^*.

Dimostrazione. Essendo per ipotesi T compatto, si ha che $0 \in \sigma(T)$ se $dimH = \infty$. Per mostrare che $\sigma(T) \cap \mathbb{K} \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \cap \mathbb{K} \setminus \{0\}$, basta mostrare che, se λ non è un autovalore di T, allora $\lambda \notin \sigma(T)$.
Sia allora $\lambda \neq 0$, $Ker(\lambda - T) = 0$. Poichè $\mathfrak{R}(\lambda - T)$ è chiuso, allora $\lambda - T$ è

una mappa biettiva da H nello spazio di Hilbert $\mathfrak{R}(\lambda - T)$. Vogliamo allora mostrare che $\mathfrak{R}(\lambda - T) = H$. Da ciò seguirà che $\lambda \in \rho(T) \iff \lambda \notin \sigma(T)$. Supponiamo per assurdo che $\mathfrak{R}(\lambda - T) \neq H$. Poniamo allora $H_0 = H$, $H_n = \mathfrak{R}((\lambda - T)^n)$, $n \in \mathbb{N}$. Allora per ogni n si ha che il sottospazio H_{n+1} è chiuso e $H_{n+1} \subset H_n$. Se per ogni $n \in \mathbb{N}$ scegliamo un $x_n \in H_{n-1} \ominus H_n$ tale che $\|x_n\| = 1$, allora (x_n) è una successione di elementi ortonormali fra loro, ed essendo T compatto, si ha che $Tx_n \to 0$. D'altra parte, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$Tx_n = \lambda x_n - (\lambda - T)x_n$$

e dunque $(\lambda - T)x_n \in H_n$, e dunque è ortogonale a x_n. Quindi

$$\|Tx_n\| \geq |\lambda|\|x_n\| = |\lambda|$$

ma questo contraddice il fatto che $Tx_n \to 0$. Dunque $\mathfrak{R}(\lambda - T) = H$. Mostriamo ora che la molteplicità di ogni autovalore non nullo ha molteplicità finita. Se avessimo $\dim Ker(\lambda - T) = \infty$, allora dovrebbe esistere una successione di vettori ortonormali x_n in $Ker(\lambda - T)$ tale che $Tx_n \to 0$, ma questo contraddice le uguaglianze $\|Tx_n\| = |\lambda|, \|x_n\| = |\lambda|$.

Dimostriamo infine che l'unico punto di accumulazione per gli autovalori di T è 0. Seguirà da ciò anche che gli autovalori sono al più una infinità numerabile. Supponiamo ora che esista una successione di autovalori (λ_n) a due a due distinti tali che $\lambda_n \to \lambda \neq 0$. Allora esisterà una successione (x_n) in H tale che $\|x_n\| = 1, (\lambda_n - T)x_n = 0$. Sappiamo che la famiglia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una famiglia di elementi linearmente indipendenti. Sia allora $H_n = span\{x_1, \ldots, x_n\}$, e $y_n \in H_n \ominus H_{n-1}$ tale che $\|y_n\| = 1, n \in \mathbb{N}$. Allora $y_n \to 0$, e dunque $Ty_n \to 0$. D'altra parte, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$Ty_n = \lambda_n y_n - (\lambda_n - T)y_n$$

con $(\lambda_n - T)y_n \in H_{n-1}$, in quanto dal fatto che $y_n = \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}x_j$ segue che

$$(\lambda_n - T)y_n = \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}(\lambda_n - T)x_n = \sum_{j=1}^{n-1} a_{n,j}(\lambda_n - \lambda_j)x_j \in H_{n-1}$$

Per il fatto che $y_n \perp H_{n-1}$ si ha allora che $\|Ty_n\| \geq |\lambda_n|$, che contraddice il fatto che $Ty_n \to 0$. $\square$

Teorema Spettrale per Operatori Normali Compatti ([4], *Teorema 7.1*).

1. Sia T un operatore normale compatto su H, e siano $\{\lambda_j\}_{j\in J}$ gli autovalori non nulli di T. Siano poi $\{P_j\}_{j\in J}$ le proiezioni ortogonali sui rispettivi autospazi. Allora
$$T = \sum_{j\in J} \lambda_j P_j \tag{2.1}$$
e tale serie converge nella norma di $\mathfrak{L}(H)$. Se poi T è autoaggiunto, allora tale affermazione è vera per H reale.

2. Se (λ_j) è una successione convergente a zero in $\mathbb{C}$ con gli elementi a due a due distinti, e le P_j sono proiezioni ortogonali non nulle e di rango finito, tali che $P_jP_k = 0$ per $j \neq k$, allora la serie (2.1) è convergente in $\mathfrak{L}(H)$, e l'operatore $T = \sum_{j\in J} \lambda_j P_j$ è compatto e normale. Perdipiù, $\{\lambda_j\}$ è l'insieme degli autovalori non nulli di T, e i $\mathfrak{R}(P_j)$ sono i rispettivi autospazi. In questo senso, la rappresentazione (2.1) è unica. Se poi $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $\forall j \in J$, allora T è autoaggiunto.

Dimostrazione.

1. Sia M la copertura lineare di $\{\mathfrak{R}(P_j)\}_{j\in J}$, e sia P la proiezione ortogonale su $M^\perp$. Se $M^\perp \neq \emptyset$, allora per ogni $x \in M^\perp, y \in H, j \in J$ si ha
$$\langle Tx, P_jy\rangle = \langle x, T^*P_jy\rangle = \lambda_j^*\langle x, P_jy\rangle = 0$$
e cioè $M^\perp$ è T-invariante. Allo stesso modo si mostra poi che $M^\perp$ è T^*-invariante. Dunque $S = T_{|M^\perp}$ è un operatore normale sullo spazio di Hilbert $M^\perp$. Inoltre ogni autovalore di S è un autovalore di T, ed ogni autovettore corrispondente di S è un autovettore di T contenuto in $M^\perp$. Dunque l'unico autovalore accettabile per S è l'autovalore

nullo, e dunque $\sigma(S) = \{0\}$, e dunque $r(S) = 0$. In conclusione, $S = 0 \iff T = 0$ in $M^\perp$. Allora, per ogni $x \in H$ vale

$$Tx = TPx + T\sum_{j\in J} P_j x = \sum_{j\in J} \lambda_j P_j x$$

Se la successione (λ_j) è infinita, allora per ogni $x \in H, m \in \mathbb{N}$ vale

$$\|(T - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j P_j)x\|^2 = \sum_{j=m+1}^{\infty} |\lambda_j|^2 \|P_j x\|^2 \leq \|x\|^2 \sup_{j\geq m+1} |\lambda_j|^2$$

Poichè la successione (λ_j) converge a zero, l'ultima equazione dà la convergenza in norma di (2.1).

2. La convergenza della serie può essere dimostrata come nel punto (1). Per ogni $m \in \mathbb{N}$, l'operatore $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j P_j$ è di rango finito, e dunque compatto. Inoltre si può mostrare che T è normale. Tutti i λ_j sono ovviamente autovalori di T, e ogni $x \in \mathfrak{R}(P_j)$ è un autovettore di T associato all'autovalore λ_j. Se $\lambda \neq 0$ è un autovalore di T, e $x \neq 0$ è un autovettore associato, allora

$$0 = \|(\lambda - T)x\|^2 = \sum_{j\in J} |\lambda - \lambda_j|^2 \|P_j x\|^2 + |\lambda|^2 \|x - \sum_{j\in J} P_j x\|^2$$

e cioè $|\lambda - \lambda_j| \|P_j x\| = 0$ per ogni j, e $x = \sum_{j\in J} P_j x$. Poichè $x \neq 0$, esisterà un j_0 per cui $P_{j_0} x \neq 0$, e dunque $\lambda = \lambda_{j_0}$. Di conseguenza $\lambda \neq \lambda_j$ per ogni $j \neq j_0$, e quindi $P_j x \neq 0$ per $j \neq j_0$. Si ottiene allora $x \in \mathfrak{R}(P_{j_0})$.

□

Teorema di Espansione per Operatori Normali Compatti ([4], *Teorema 7.2*)**.** Se T è un operatore normale compatto su uno spazio di Hilbert complesso, allora esiste una successione convergente a zero o finita $(\mu_j) \in \mathbb{C}$, e una successione di vettori ortonormali $(x_j) \in H$ tali che

$$Tx = \sum_{j \in J} \mu_j \langle x_j, x \rangle x_j \quad \forall x \in H \tag{2.2}$$

Viceversa, ogni operatore definito come in (2.2) è compatto e normale. I numeri μ_j sono gli autovalori di T, e gli x_j sono degli autovettori corrispondenti. Se poi T è autoaggiunto, tali risultati sono validi anche su uno spazio di Hilbert reale.

Dimostrazione. Sia $T = \sum_{j \in J} \lambda_j P_j$ la rappresentazione ottenuta nel Teorema Spettrale. Per ogni j, sia $\{y_{j,1}, y_{j,2}, \ldots, y_{j,k_j}\}$ una base ortonormale per $\mathfrak{R}(P_j)$. Perdipiù, siano $\mu_{j,k} = \lambda_j, j = 1, 2, \ldots, k_j$. Allora per Teorema Spettrale si ha

$$Tx = \sum_{j \in J} \lambda_j P_j x = \sum_{j \in J} \lambda_j \sum_{k=1}^{k_j} \langle y_{j,k}, P_j x \rangle y_{j,k} = \sum_{j \in J} \sum_{k=1}^{k_j} \mu_{j,k} \langle y_{j,k}, x \rangle y_{j,k}$$

L'equazione (2.2) si ottiene cambiando gli indici.

Viceversa, sia T un operatore definito come in (2.2). Allora, per ogni $k \in J$ si ha

$$Tx_k = \sum_{j \in J} \mu_j \langle x_k, x_j \rangle x_j = \mu_k \|x_k\|^2 x_k = \mu_k x_k$$

Di conseguenza, $\mu_j \in \sigma_p(T)$ per ogni j, e gli x_j sono dei rispettivi autovettori. Definiamo ora degli operatori

$$T_k = \sum_{j=1}^{k} \mu_j \langle x_j, x \rangle x_j$$

Tali operatori T_k, per il Teorema (1.6.1), sono operatori di rango finito. Osserviamo poi che

$$\|(T - T_k)x\|^2 = \| \sum_{j=k+1}^{\infty} \mu_j \langle x_j, x \rangle x_j \|^2 \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} |\mu_j|^2 |\langle x_j, x \rangle|^2 \|x_j\|^2$$

$$\leq \sup_{j\geq k+1} |\mu_j|^2 \sum_{j=k+1}^{\infty} |\langle x_j, x\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \sup_{j\geq k+1} |\mu_j|^2$$

che per la convergenza a zero dei μ_j ci dà la convergenza in norma. Dunque T è limite di operatori di rango finito, e dunque compatto. Il fatto che T sia normale viene dal fatto che T è normale se e solo se $T^*T = TT^*$. Osserviamo che, per il Teorema (2.1.1) si ha

$$T^*x = \sum_{j\in J} \mu_j^* \langle x_j, x\rangle x_j$$

Allora

$$\|(TT^* - T^*T)x\| = \|T(\sum_{j\in J} \mu_j^* \langle x_j, x\rangle x_j) - T^*(\sum_{j\in J})\mu_j \langle x_j, x\rangle x_j)\|$$

$$\leq \|\sum_{j\in J} \mu_j^* \langle x_j, x\rangle T x_j - \sum_{j\in J} \mu \langle x_j, x\rangle T^* x_j\|$$

$$= \|\sum_{j\in J} \mu_j^* \mu_j \langle x_j, x\rangle x_j - \sum_{j\in J} \mu_j^* \mu_j \langle x_j, x\rangle x_j\| = 0$$

e dunque T è normale. □

Teorema 2.1.2 ([4], *Teorema 7.4*)**.** Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Ogni operatore compatto normale T su uno spazio di Hilbert complesso ha esattamente un'unica radice n-esima, i cui autovalori giacciono tutti in

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \arg z < \frac{2\pi}{n}\} \tag{2.3}$$

Ogni operatore compatto autoaggiunto non negativo ha esattamente una radice n-esima compatta e non negativa.

Dimostrazione. Consideriamo l'operatore $T_n = \sum_{j\in J} \lambda_j^{\frac{1}{n}} P_j$, con $0 \leq \arg \lambda_j^{\frac{1}{n}} < \frac{2\pi}{n}$. Tale operatore ha esattamente le proprietà che cerchiamo. Sia ora $S = \sum_{k\in K} \mu_k Q_k$ un altro operatore avente le stesse proprietà. Allora

$$\sum_{k\in K} \mu_k^n Q_k = S^n = T = \sum_{j\in J} \lambda_j P_j$$

Per il Teorema Spettrale per Operatori Compatti Normali osserviamo che vale allora $\mu_j^n = \lambda_j$, e $Q_j = P_j$. Inoltre, il fatto che $0 \leq \arg \mu_j < \frac{2\pi}{n}$ ci dà $\mu_j = \lambda^{\frac{1}{n}}$. Di conseguenza $S = T_n$. Se poi T è non negativa, allora $\lambda_j \geq 0 \; \forall j$, e la condizione (2.3) ci dà $\lambda_j^{\frac{1}{n}} \geq 0$. □

Teorema dell'Alternativa di Fredholm ([5], *Teorema VI.14* e *Alternativa di Fredholm, pagina 203*)**.** Sia H uno spazio di Hilbert, T compatto, e sia $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Se non esiste una soluzione non banale $0 \neq x \in H$ all'equazione:

$$(T - \lambda)x = 0$$

allora, per ogni $y \in H$ esiste un unico x_y:

$$(T - \lambda)x_y = y$$

Si ha inoltre che $\|x_y\| \leq C\|y\|$ per qualche $C \geq 0$.

Dimostrazione. L'ipotesi ovviamente è che $\lambda \notin \sigma_p(T) \setminus \{0\} \iff \lambda \notin \sigma(T)$, in quanto lo spettro non nullo è fatto soltanto di autovalori. Dunque $(T - \lambda)$ è invertibile, e da ciò si ha la tesi. □

In altri termini, se $\lambda \in \rho(T)$, si ha che $(T-\lambda)$ è invertibile, e la sua inversa $(T-\lambda)^{-1}$ è limitata. Se invece $\lambda \in \mathbb{C}\setminus(\{0\}\cup\rho(T)) = \sigma(T)\setminus\{0\} = \sigma_p(T)\setminus\{0\}$ allora l'autospazio associato all'autovalore λ ha dimensione almeno 1. Di fatto questo teorema ci permette di diagonalizzare un operatore compatto. Un'idea di tale fatto la si può osservare di seguito, dove si studierà un fatto molto importante sui cosiddetti *operatori diagonali*.

Definizione 2.1.1. Definiamo un operatore T su uno spazio di Hilbert separabile H *diagonale* se, fissata una base $(e_i)_{i\in I}$ in H, T è definito come

$$T : H \to H, \; T(e_i) = \alpha_i e_i, \; \forall i \in I, \; \alpha_i : \max_i |\alpha_i| < \infty$$

Proposizione 2.1.1. Ogni operatore diagonale definito su uno spazio di Hilbert separabile H fissando una base ortonormale (e_n) e ponendo

$$T(e_n) = \lambda_n e_n \tag{2.4}$$

per qualche successione $(\lambda_n) \in \mathbb{C}$ convergente a 0, è compatto, e il suo spettro è l'insieme $\{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$, con l'aggiunta di 0 se H è infinito dimensionale.

Osservazione 2.1.1. La proposizione è una specie di inverso del punto (4) del Teorema Spettrale per Operatori Normali Compatti: quello che ci dà il Teorema Spettrale è un modello "diagonale" per ogni operatore normale compatto, mentre la Proposizione ci dà la caratterizzazione compatta del modello diagonale.

Dimostrazione. Sia T un operatore diagonale definito come in (2.4). Vogliamo mostrare allora che tale operatore è compatto. Sia (x_j) una successione di vettori unitari limitata in H. Per definizione si ha $x_j = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{j,n}e_n$, in quanto (e_n) è una base di H. Allora

$$0 \leq |T(x_j)| = |T(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{j,n}e_n)| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_{j,n}||T(e_n)| = \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_{j,n}||\lambda_n||e_n| \to 0$$

per la convergenza dei λ_n. Dunque T è compatto. □

In conclusione abbiamo che, in uno spazio di Hilbert separabile, un operatore normale compatto può essere reso come operatore diagonale, e che anche un operatore diagonale definito come nella Proposizione (2.1.1) è compatto.

Se ci si muove in uno spazio di Hilbert non separabile, si può pensare di studiare un operatore normale compatto in $H_1 = Ker(T)^\perp$, che è un sottospazio separabile di H. Poniamo allora $S = T_{|H_1} : H_1 \to H_1$ per il Teorema Spettrale. Allora, fissata una base (e_n) di H_1, abbiamo sempre per il Teorema spettrale che $T(e_n) = \lambda_n e_n$, dove i λ_n sono limitati da $\|T\|$. Essendo (e_n) una base di H_1 si ha che

$$S(e_n) = T(e_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n e_n$$

con i λ_n convergenti a 0. Dunque S è un operatore diagonale su H_1, e dunque è normale compatto. Essendo S un operatore definito su un sottospazio di H, per il Teorema di Hahn-Banach possiamo prolungare in modo continuo S su tutto H. Tuttavia non si può avere la garanzia che, come T, anche il prolungamento di S si annulli su $Ker(T)$. E qui sta la discriminante fra operatori diagonali e operatori compatti su uno spazio di Hilbert non separabile: a partire da un operatore compatto, non è detto che questo sia diagonale, e la differenza è intrinseca allo spazio in cui si è.

2.2 Applicazione: Risolubilità del Problema di Dirichlet

Sia L un operatore della forma

$$Lu = D_i(a_{i,j}(x)D_j u + b_i(x)u) + c_i D_i u + d(x)u \tag{2.5}$$

con coefficienti $a_{i,j}, b_i, c_i, d_i$ funzioni misurabili in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $a_{i,j}, b_j$ differenziabili, e $u \in C^2(\Omega)$. Se però scriviamo l'operatore L in forma di divergenza, sappiamo che L risulta avere significato anche quando applicato a classi più ampie di funzioni.

Infatti, se supponiamo $u \in W^{1,2}(\Omega)$, e che le funzioni $a_{i,j}D_j u + b_i u, c_i D_i u + du \in L^1_{loc}(\Omega)$, diciamo che u è una soluzione debole di $Lu = 0$ se:

$$\mathfrak{L}(u,v) = \int_\Omega [(a_{i,j})D_j u + b_i u)D_i v - (c_i D_i u + du)v]dx = 0 \tag{2.6}$$

per $v \in C^1_0(\Omega)$. Osserviamo che, per il teorema della divergenza, si ha che una soluzione classica è anche una soluzione debole.

Siano $f_i, g \in L^1_{loc}(\Omega)$, $i = 1, \dots, n$. Una funzione $u \in W^{1,2}(\Omega)$ verrà detta una soluzione debole dell'equazione

$$Lu = g + D_i f_i \tag{2.7}$$

in Ω se

$$\mathfrak{L}(u,v) = F(v) = \int_\Omega (f_i D_i u - gv)dx, \ \forall v \in C^1_0(\Omega) \tag{2.8}$$

Aggiungiamo ulteriori ipotesi, supponiamo cioè che L sia strettamente ellittico in Ω, e cioè supponiamo che esistano $\lambda \geq 0$:

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j, \ \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n \tag{2.9}$$

Supponiamo inoltre che L sia limitato, e cioè che esistano $\Lambda, \nu \geq 0$:

$$\sum |a_{i,j}(x)|^2 \leq \Lambda^2, \ \frac{1}{\lambda^2}\sum(|b_i(x)|^2 + |c_i(x)|^2) + \frac{1}{\lambda}|d(x)| \leq \nu \tag{2.10}$$

Una funzione $u \in W^{1,2}(\Omega)$ verrà detta una soluzione al problema di Dirichlet generalizzato:

$$\begin{cases} Lu = g + D_j f_j & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{in } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.11}$$

se u è una soluzione generalizzata dell'equazione (2.6), $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$, $u - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Osserviamo poi che vale il seguente risultato:

Principio del Massimo Debole ([1], *Teorema 8.1*)**.** Sia $u \in W^{1,2}(\Omega)$ tale che $Lu \geq 0$ (≤ 0) in Ω. Allora

$$\sup_\Omega u \leq \sup_\Omega u^+ \quad (\inf_\Omega u \geq \inf_\Omega u^-)$$

dove $u^+ = \max\{u, 0\} \in W_0^{1,2}(\Omega)$, e $u^- = \min\{u, 0\} \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Al Principio del Massimo Debole segue poi questo Corollario:

Corollario 2.2.1. Sia $u \in W_0^{1,2}(\Omega): \ Lu = 0$ in Ω. Allora $u = 0$ in Ω.

L'obiettivo è quello di dimostrare il seguente teorema:

Teorema 2.2.1 ([1], *Teorema 8.3*)**.** Sia L un operatore soddisfacente (2.9), (2.10) e tale che

$$\int_\Omega (dv - b_i D_i v)dx \leq 0, \ v \in C_0^1(\Omega)$$

Allora, per $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$, $g, f_i \in L^2(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$ il problema di Dirichlet generalizzato

$$\begin{cases} Lu = g + D_i f_i & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{in } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.12}$$

ha una unica soluzione.

Alla fine di questa sezione giungeremo alla conclusione.

Osserviamo che il problema di Dirichlet è equivalente ad un altro con $\varphi = 0$. Sia infatti $w = u - \varphi$, allora si ha

$$Lw = Lu - L\varphi = g - c_i D_i \varphi - d\varphi + D_i(f_i - a_{i,j} D_j \varphi - b_i \varphi) = \hat{g} + D_i \hat{f}_i$$

e, dalle condizioni su L e φ si ha $\hat{g}, \hat{f}_i \in L^2(\Omega), i = 1, \ldots, n$ e $w \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Allora possiamo studiare il problema ponendo $u = w$ e $\varphi = 0$. Siano allora $\boldsymbol{g} = (g, f_1, \ldots, f_n), F(v) = -\int_\Omega (gv - f_i D_i v) dx$ per $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Allora $|F(v)| \leq \|g\|_2 \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$ e dunque $F \in W_0^{1,2}(\Omega)^*$. Se la forma bilineare $\mathfrak{L}$ fosse anche coerciva su $W_0^{1,2}(\Omega)$, allora potremmo usare il teorema di Lax-Milgram per provare l'unicità e l'esistenza della soluzione al problema di Dirichlet. Abbiamo però il seguente

Lemma 2.2.1. Sia L un operatore soddisfacente (2.9) e (2.10). Allora

$$\mathfrak{L}(u, u) \geq \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |Du|^2 dx - \lambda \nu^2 \int_\Omega u^2 dx$$

Sia ora $\sigma \in \mathbb{R}$. Definiamo gli operatori $L_\sigma = (L - \sigma)u$. Per il lemma precedente osserviamo che le forme bilineari $\mathfrak{L}_\sigma$ associate saranno coercive se σ è abbastanza grande, o se $\mu(\Omega)$ è sufficientemente piccola.
Definiamo ora la seguente immersione $I : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)^*$ come

$$I(u)v = \int_\Omega uv dx, \ v \in W_0^{1,2}(\Omega) \tag{2.13}$$

Abbiamo allora il seguente

Lemma 2.2.2. L'immersione I è compatta.

Dimostrazione. Se poniamo $I_2 : W_0^{1,2}(\Omega) \to L^2(\Omega)$ l'immersione naturale in $L^2(\Omega)$, e $I_1 : L^2(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)^*$ è data da (2.13), abbiamo allora che $I = I_1, I_2$. Se mostriamo che una fra I_1 e I_2 è compatta e l'altra continua, avremo allora che I è compatta. Osserviamo subito che I_1 è continua. Se allora mostriamo che I_2 è compatta abbiamo la tesi. La compattezza di I_2 ci viene dal seguente teorema, detto Teorema di Compattezza di Kondrachov. □

Teorema di Compattezza di Kondrachov ([1], *Teorema 7.22*)**.** Gli spazi $W_0^{1,p}(\Omega)$ sono immersi compattamente negli spazi $L^q(\Omega)$ per ogni $q < \frac{np}{n-p}$ per $p < n$, e in $C^0(\overline{\Omega})$ se $p > n$.

Osservazione 2.2.1. Se $p = 2$, allora $q < \frac{2n}{n-2}$. A noi interessa il caso $q = 2$. Osserviamo allora che

$$2 < \frac{2n}{n-2} \iff 2(n-2) - 2n < 0 \iff -4 < 0$$

che è sempre vero. Dunque tale teorema si può applicare al nostro caso.

Prima della dimostrazione premettiamo un teorema, che risulterà essenziale in seguito.

Teorema di Immersione di Morrey ([1], *Teorema 7.17*)**.**

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega) & \text{per } p < n \\ C^0(\Omega) & \text{per } p > n \end{cases}$$

Dimostrazione del Teorema di Compattezza di Kondrachov. Preoccupiamoci della prima parte, e cioè supponiamo $p < n$. Supponiamo inizialmente $q = 1$. Sia A un insieme limitato in $W_0^{1,p}(\Omega)$. Senza perdere in generalità, possiamo supporre che $A \subset C_0^1(\Omega)$, e che $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq 1$, $\forall u \in A$. Sia ora $h > 0$. Poniamo $A_\varepsilon = \{u_\varepsilon, u \in A\}$, dove u_h è la regolarizzazione di u con un mollificatore. Allora A_ε è precompatto in $L^1(\Omega)$. Infatti, se $u \in A$, abbiamo:

$$|u_\varepsilon(x)| \geq \int_{|z|\leq 1} \rho(z)|u(x-hz)|dz \leq \sup \rho \|u\|_1$$

e

$$|Du_\varepsilon(x)| \geq \int_{|z|\leq 1} D(\rho(z))|u(x-\varepsilon z)| \leq \sup |D(\rho)| \|u\|_1$$

così A_ε è un sottinsieme limitato ed equicontinuo di $C^0(\overline{\Omega})$ è dunque per il teorema di Arzelà e precompatto. Dunque è precompatto anche in $L^1(\Omega)$. Sia ora $u \in A$. Allora

$$|u(x) - u_\varepsilon(x)| \leq \int_{|z|\leq 1} \rho(z)|u(x) - u(x-\varepsilon z)|dz$$

$$\leq \rho(z) \int_0^{\varepsilon|z|} |D_r(u - r\omega)| dr dz, \quad \omega = \frac{z}{|z|}$$

Allora, integrando a destra e a sinistra in x si ha

$$\int_\Omega |u(x) - u_\varepsilon(x)| dx \leq \int_\Omega |Du| dx \leq \varepsilon$$

e dunque u_ε è uniformemente vicino a u in $L^1(\Omega)$. Poichè abbiamo mostrato che A_ε è totalmente limitato in $L^1(\Omega)$ $\forall \varepsilon \geq 0$, si ha che A è totalmente limitato in $L^1(\Omega)$ e dunque è precompatto. Abbiamo dunque terminato la dimostrazione per $q = 1$. Per estendere la dimostrazione al caso generale $q < \frac{np}{n-p}$, osserviamo che, per la diseguaglianza di Hölder, si ha

$$\|u\|_q \leq \|u\|_1^\lambda \|u\|_{\frac{np}{n-p}}^{1-\lambda} \text{ dove } \lambda + (1-\lambda)(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}) = 1 \tag{2.14}$$

$$\leq \|u\|_1^\lambda (C\|Du\|_p)^{1-\lambda} \tag{2.15}$$

per il Teorema precedentemente enunciato. Dunque un sottinsieme limitato in $W_0^{1,p}(\Omega)$ deve essere precompatto in $L^q(\Omega)$, $q > 1$, e dunque abbiamo la tesi. □

Teorema di Lax-Milgram ([1], *Teorema 5.8*)**.** Sia B una forma bilineare su H limitata e coerciva su uno spazio di Hilbert H, e cioè sia $B : H \times H \to \mathbb{C}$ tale che

- $\exists C \geq 0 : |B(x,y)| \leq C\|x\|\|y\|, \quad \forall x, y \in H$ (limitata)
- $\exists c \geq 0 : B(x,x) \geq c\|x\|^2, \quad \forall x \in H$ (coerciva)

Allora, per ogni $F \in H^*$ esiste un unico elemento $x_F \in H$ tale che

$$B(x, x_F) = F(x), \quad \forall x \in H$$

Scegliamo ora σ_0 in modo che $\mathfrak{L}_{\sigma_0}$ sia limitata e coerciva su $W_0^{1,2}(\Omega)$. Allora l'equazione $Lu = F$, $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $F \in W_0^{1,2}(\Omega)^*$ è equivalente a

$$(L_{\sigma_0} + \sigma_0 I)u = F$$

Per il Teorema di Lax-Milgram si ha poi che $L_{\sigma_0}^{-1}$ è una funzione continua e iniettiva da $W_0^{1,2}(\Omega)^*$ in $W_0^{1,2}(\Omega)$. Allora, applicandola all'equazione precedente otteniamo

$$u + \sigma_0 L_{\sigma_0}^{-1} I u = L_{\sigma_0}^{-1} F \tag{2.16}$$

La mappa $T = -\sigma_0 L_{\sigma_0}^{-1} I$, per il Lemma (2.2.2) è compatta, e allora, per l'alternativa di Fredholm, l'esistenza di una funzione $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ soddisfacente l'equazione (2.16) è una conseguenza dell'esistenza di una soluzione triviale a $Lu = 0$ in $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Abbiamo dunque dimostrato il Teorema di esistenza e unicità della soluzione al problema di Dirichlet generalizzato. Fatto interessante che si rimarca è appunto il fatto che l'immersione di $W_0^{1,2}(\Omega)$ nel suo duale è un operatore compatto. Allora, alla luce del Teorema Spettrale, è interessante studiarne il comportamento spettrale.

Se al posto di L studiamo L_σ, osserviamo che l'equazione $L_\sigma u = F$ sarà equivalente all'equazione $u + (\sigma_0 - \sigma) L_{\sigma_0}^{-1} I u = L_{\sigma_0}^{-1}$. Allora l'operatore aggiunto $T_{\sigma_0}^*$ di $T_{\sigma_0} = (\sigma_0 - \sigma) L_{\sigma_0}^{-1} I$ sarà

$$T_{\sigma_0}^* = (\sigma_0 - \sigma)(L_{\sigma_0}^{-1})^* I$$

Allora, applicando il Teorema di Lax-Milgram, otteniamo il seguente risultato:

Teorema 2.2.2 ([1], *Teorema 8.6*)**.** Sia l'operatore T soddisfacente (2.10) e (2.9). Allora esiste un insieme $\Sigma \subset \mathbb{R}$ numerabile e discreto tale che, se $\sigma \notin \Sigma$, i problemi di Dirichlet

$$\begin{cases} L_\sigma u = g + D_i f_i & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{in } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.17}$$

e

$$\begin{cases} L_\sigma^* u = g + D_i f_i & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{in } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.18}$$

hanno una unica soluzione per $g, f_i \in L^2(\Omega)$ e $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$.
Se $\sigma \in \Sigma$, allora il sottospazio delle soluzioni dei problemi omogenei

$$\begin{cases} L_\sigma u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{in } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.19}$$

e

$$\begin{cases} L^*_\sigma u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{in } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.20}$$

hanno dimensione finita e positiva. Inoltre il problema

$$\begin{cases} L_\sigma u = g + D_i f_i & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{in } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.21}$$

ha soluzione se e solo se

$$\int_\Omega [(g - c_i D_i\varphi + \sigma\varphi)v - (f_i a_{i,j} D_j\varphi - b_i\varphi)D_i v]dx = 0$$

per ogni v soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} L^*_\sigma v = 0 & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.22}$$

In altri termini, se abbiamo un operatore limitato e strettamente ellittico, si ha che il suo spettro è un insieme discreto e numerabile. Questo vuol dire, per esempio, che il problema di Laplace, se visto come azione dell'operatore $\Delta : W^{2,2}_0(\Omega) \to L^2(\Omega)$, ha un numero finito di autovalori. Questo significa che

$$(\Delta - \lambda)u = 0$$

non è biettiva per un numero finito di λ.
É possibile dimostrare poi che gli autovettori del laplaciano formano una base ortonormale per lo spazio di Hilbert $L^2(\Omega)$, e che sono C^∞.

Capitolo 3

Teorema Spettrale per Operatori Autoaggiunti

Nel seguente capitolo generalizzeremo i risultati ottenuti per gli operatori compatti. Estenderemo, in particolare, i risultati da $\mathfrak{B}_\infty(H)$ a $\mathfrak{L}(H)$.

Osserviamo innanzitutto che, se $T \in \mathfrak{L}(H)$ è un operatore limitato ma non compatto, questo può non avere abbastanza autovalori nello spettro puntuale per descrivere T.

Dobbiamo allora innanzitutto estendere l'idea dello spettro puntuale, e lo faremo nel modo seguente.
Abbiamo posto, nella Definizione (1.4.2), lo spettro di un operatore T come:

$$\sigma(T) = \mathbb{K} \setminus \rho(T)$$

dove $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda - T \text{ è biettiva}\}$.
Tuttavia può accadere che $\sigma_p(T) = \emptyset$. Lo spettro puntuale non è dunque più sufficiente per classificare gli operatori limitati.

Definizione 3.0.1. Sia $\lambda \in \sigma(T)$.

- Diciamo che λ appartiene allo *spettro residuo* $\sigma_r(T)$ se $\lambda - T$ è iniettiva, ma $\overline{\mathfrak{R}(\lambda - T)} \neq H$.

- Diciamo che λ appartiene allo *spettro continuo* $\sigma_c(T)$ se $\lambda - T$ è iniettiva e non suriettiva, ma $\mathfrak{R}(\lambda - T)$ è denso in H.

Proposizione 3.0.1. Sia $\lambda \in \sigma(T)$ un punto isolato dello spettro di T. Allora $\lambda \in \sigma_p(T)$.

3.1 Integrazione Rispetto ad una Famiglia Spettrale

Definizione 3.1.1. Una famiglia spettrale su uno spazio di Hilbert H è una funzione $E : \mathbb{R} \to \mathfrak{L}(H)$ tale che:

- $E(t)$ è una proiezione ortogonale per ogni $t \in \mathbb{R}$

- $E(s) \leq E(t)$ per $s \leq t$

- $E(t + \varepsilon) \to E(t)$ per $\varepsilon \to 0$

Esempio 3.1.1. Sia $M \subset \mathbb{R}^n$ misurabile, e sia $g : M \to \mathbb{R}$ misurabile. Poniamo, per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$M(t) = \{x \in M : g(x) \leq t\}$$

$M(t)$ è ovviamente misurabile.

Osserviamo che l'equazione

$$E(t)f = \chi_{M(t)}f, \quad f \in L^2(M)$$

definisce una famiglia spettrale su $L^2(M)$.

Definizione 3.1.2. Sia E una famiglia spettrale su H. Per ogni $x \in H$ poniamo

$$\rho_x(t) = \langle x, E(t)x \rangle = \|E(t)x\|^2, \quad t \in \mathbb{R}$$

Tale funzione $\rho_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è ovviamente limitata, non decrescente e continua a destra. Diciamo che una funzione $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è E-misurabile se è ρ_x-misurabile per ogni $x \in H$.

Esempio 3.1.2. Esempi non banali di funzioni E-misurabili, qualunque sia E, sono tutte le funzioni continue, tutte le funzioni a gradini, tutte le funzioni che sono limite puntuale di funzioni a gradini, e le funzioni Borel-misurabili.

Osservazione 3.1.1. La funzione $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u_0(t) = 1$ è una funzione $L^2(\mathbb{R}, \rho_x)$, $\forall x \in H$. Allora ogni funzione limitata $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sta in $L^2(\mathbb{R}, \rho_x)$ per ogni $x \in H$.

Sia ora u una funzione a gradini. Possiamo allora definire per tale u l'integrale $\int u(t)dE(t)$ tramite l'equazione

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{J_j} dE(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j E(J_j)$$

con

$$E(]a,b]) = E(b) - E(a), \qquad E(]a,b[) = E(b^-) - E(a)$$

$$E([a,b]) = E(b) - E(a^-) \qquad E([a,b[) = E(b^-) - E(a^-)$$

Inoltre

$$\| \int_{\mathbb{R}} u(t)dE(t)x\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 d\rho_x(t)$$

Infatti, se $x \in H$, $u \in L^2(\mathbb{R}, \rho_x)$, allora esiste una successione di funzioni a gradino tali che $u_n \to u$ in $L^2(\mathbb{R}, \rho_x)$. Allora

$$\| \int_{\mathbb{R}} u_n dE(t)x - \int_{\mathbb{R}} u_m(t)dE(t)x\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |u_n(t) - u_m(t)|^2 d\rho_x(t) \to 0, \ n, m \to \infty$$

e cioè la successione $(\int_{\mathbb{R}} u_n dE(t)x)$ è una successione di Cauchy in H. Allora ha senso la definizione

$$\int_{\mathbb{R}} u(t)dE(t)x = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} u_n(t)dE(t)x$$

Allora

$$\| \int_{\mathbb{R}} u(t) dE(t)x \|^2 = \int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 d\rho_x(t) \tag{3.1}$$

Si può poi mostrare che tale integrale è lineare.

Teorema 3.1.1 ([4], *Teorema 7.13*)**.** Sia E una famiglia spettrale su H, e sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione E-misurabile. Se $\{x_1, \dots, x_p\}$ è un insieme finito in H, allora esiste una successione (u_n) di funzioni a gradino convergente a u quasi dappertutto rispetto a ρ_{x_j}, $j = 1, \dots, p$. Se poi u è limitata, allora la successione può essere scelta limitata.

Definizione 3.1.3 ([2], *Definizione 3.1*)**.** Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, e sia $u \in L^1(\Omega)$. Diremo che u è una *funzione a variazione limitata su* Ω se

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \varphi dD_i u, \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega), \quad i = 1, \dots, N$$

per qualche misura di $\mathbb{R}^N$ $Du = (D_1 u, \dots, D_N u)$ in Ω.

Teorema 3.1.2 ([4], *Teorema 7.14*)**.** Sia E una famiglia spettrale su H, e sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione E-misurabile. Allora

$$\mathbb{D}(\hat{E}(u)) = \{x \in H : u \in L^2(\mathbb{R}, \rho_x)\}$$

$$\hat{E}(u)x = \int_{\mathbb{R}} u(t) dE(t)x, \quad x \in \mathbb{D}(\hat{E}(u)) \tag{3.2}$$

definisce un operatore normale $\hat{E}(u)$ in H. Per brevità, scriveremo al posto di (3.2)

$$\hat{E}(u) = \int_{\mathbb{R}} u(t) dE(t)$$

Se poi $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sono E-misurabili e $a, b \in \mathbb{C}$, posto

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } |u(t)| \leq n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \psi_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } |v(t)| \leq n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

allora si ha

1. per ogni $x \in \mathbb{D}(\hat{E}(u))$, $y \in \mathbb{D}(\hat{E}(v))$ si ha

$$\langle \hat{E}(v)y, \hat{E}(u)x \rangle = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_n(t) v(t)^* \varphi_n(t) u(t) d\langle y, E(t)x \rangle$$

scriveremo, per brevità, al posto del secondo membro $\int_{\mathbb{R}} v(t)^* u(t) d\langle y, E(t)x \rangle$.

2. per ogni $x \in \mathbb{D}(\hat{E}(u))$ si ha
$$\|\hat{E}(u)x\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 d\rho_x(t)$$
3. se u è limitata, allora $\hat{E}(u) \in \mathfrak{L}(H)$, e
$$\|\hat{E}(u)\| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} |u(t)|$$
4. se $u(t) = 1, \ \forall t \in \mathbb{R}$, allora $\hat{E}(u) = I$
5. per ogni $x \in \mathbb{D}(\hat{E}(u))$, e per ogni $y \in H$ si ha
$$\langle y, \hat{E}(u)x\rangle = \int_{\mathbb{R}} u(t) d\langle y, E(t)x\rangle$$
6. Se $u(t) \geq c, \ \forall t \in \mathbb{R}$, allora
$$\langle x, \hat{E}(u)x\rangle \geq c\|x\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{D}(\hat{E}(u))$$
7. $\hat{E}(au + bv) \supset a\hat{E}(u) + b\hat{E}(v), \ \mathbb{D}(\hat{E}(u) + \hat{E}(v)) = \mathbb{D}(\hat{E}(|u| + |v|))$
8. $\hat{E}(uv) \supset \hat{E}(u)\hat{E}(v), \ \mathbb{D}(\hat{E}(u)\hat{E}(v)) = \mathbb{D}(\hat{E}(u)) \cap \mathbb{D}(\hat{E}(uv))$
9. $\hat{E}(u^*) = \hat{E}(u)^*, \mathbb{D}(\hat{E}(u^*)) = \mathbb{D}(\hat{E}(u))$

Dimostrazione. L'operatore $\hat{E}(u) : \mathbb{D}(\hat{E}(u)) \to H$ è ben definito. Inoltre, preso $x \in \mathbb{D}(\hat{E}(u)), a \in \mathbb{C}$, allora vale sia $ax \in \mathbb{D}(\hat{E}(u))$ che $\hat{E}(u)ax = a\hat{E}(u)x$. Sia ora u limitata. Allora $\mathbb{D}(\hat{E}(u)) = H$. Inoltre, per il Teorema (3.1.1), presi $x, y \in H$, esiste una successione limitata (u_n) di funzioni a gradino convergente a u quasi dappertutto rispetto a ρ_x, ρ_y e ρ_{x+y}. Allora $u_n \to u$ in $L^2(\mathbb{R}, \rho_x)$, $L^2(\mathbb{R}, \rho_y)$ e $L^2(\mathbb{R}, \rho_{x+y})$. Dunque $\hat{E}(u_n)x \to \hat{E}(u)x$, $\hat{E}(u_n)y \to \hat{E}(u)y$ e $\hat{E}(u_n)(x + y) \to \hat{E}(u)(x + y)$. Essendo allora $\hat{E}(u)$ lineare, si ha
$$\hat{E}(u)(x + y) = \lim_{n\to\infty} \hat{E}(u_n)(x + y)$$
$$= \lim_{n\to\infty} (\hat{E}(u_n)x + \hat{E}(u_n)y) = \hat{E}(u)x + \hat{E}(u)y$$

Sia ora u E-misurabile, e siano $x, y \in \mathbb{D}(\hat{E}(u))$. Allora $(|\varphi_n(t)u(t)|)$ converge a $|u(t)|$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Allora

$$[\int_{\mathbb{R}} |\varphi_n(t)u(t)|^2 d\rho_{x+y}(t)]^{\frac{1}{2}} = \|\hat{E}(\varphi_n u)(x+y)\|$$

$$\leq \|\hat{E}(\varphi_n u)x\| + \|\hat{E}(\varphi_n)y\| =$$

$$= [\int_{\mathbb{R}} |\varphi_n(t)u(t)d\rho_x(t)]^{\frac{1}{2}} + [\int_{\mathbb{R}} |\varphi_n(t)v(t)d\rho_y(t)]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq [\int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 d\rho_x(t)]^{\frac{1}{2}} + [\int_{\mathbb{R}} |v(t)|^2 d\rho_y(t)]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \|\hat{E}(u)x\| + \|\hat{E}(v)y\| < \infty$$

Allora, per il Teorema di Levi si ha che $u \in L^2(\mathbb{R}, \rho_{x+y})$. Dunque $x + y \in \mathbb{D}(\hat{E}(u))$, e

$$\hat{E}(u)(x+y) = \lim_{n\to\infty} \hat{E}(\varphi_n u)(x+y) =$$

$$\lim_{n\to\infty} (\hat{E}(\varphi_n u)x + \hat{E}(\varphi_n u)y) = \hat{E}(u)x + \hat{E}(u)y$$

e dunque $\hat{E}(u)$ è lineare. Dimostrando il punto (9) avremo poi la normalità.

1. Se u, v sono funzioni a gradini, l'eguaglianza è chiara. Se u, v sono invece E-misurabili e limitate, allora la tesi segue dal Teorema (3.1.1).

2. viene dall'equazione (3.1) ponendo $v = u, x = y$.

3. Essendo u limitata, si ha $u \in L^2(\mathbb{R}, \rho_x)$, $\forall x \in H$. Allora $\mathbb{D}(\hat{E}(u)) = H$. Allora dal punto (2) si ha la stima della norma.

4. Per il punto (3), si ha $\hat{E}(u) \in \mathfrak{L}(H)$. Inoltre $\chi_{]-n,n]}(t) \to u(t) = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Allora

$$\hat{E}(u)x = \lim_{n\to\infty} \hat{E}(\chi_{]-n,n]})x = \lim_{n\to\infty} (E(n)x - E(-n)x) = x$$

5. Segue dal punto (1) ponendo $v = 1$ e prendendo in considerazione quanto mostrato nel punto (4).

6. segue direttamente dal punto (5)

7. Se $x \in \mathbb{D}(\hat{E}(u) + \hat{E}(v)) = \mathbb{D}(\hat{E}(u)) \cap \mathbb{D}(\hat{E}(v))$, allora $u, v \in L^2(\mathbb{R}, \rho_x)$. Dunque $au + bv \in L^2(\mathbb{R}, \rho_x)$, e cioè $x \in \mathbb{D}(\hat{E}(au + bv))$. Allora, dal Teorema (3.1.1), si ha l'uguaglianza $\hat{E}(au + bv)x = a\hat{E}(u)x + b\hat{E}(v)x$. Poichè se u, v sono E-misurabili si ha $u, v \in L^2(\mathbb{R}, \rho_x) \iff |u| + |v| \in L^2(\mathbb{R}, \rho_x)$, si ha $\mathbb{D}(\hat{E}(v) + \hat{E}(v)) = \mathbb{D}(\hat{E}(|u| + |v|))$.

8. Per i punti (1) e (2), si ha che, per tutte le funzioni φ, ψ E-misurabili limitate e per ogni $x, y \in H$, si ha

$$\langle y, \hat{E}(\varphi)x \rangle = \langle \hat{E}(1)y, \hat{E}(\varphi)x \rangle = \langle \hat{E}(\varphi^*)y, \hat{E}(1)x \rangle = \langle \hat{E}(\varphi^*)y, x \rangle$$

dunque

$$\langle y, \hat{E}(\varphi)\hat{E}(\psi)x \rangle = \langle \hat{E}(\varphi^*)y, \hat{E}(\psi)x \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\psi(t) d\langle y, E(t)x \rangle = \langle y, \hat{E}(\varphi\psi)x \rangle$$

E dunque, per φ, ψ E-misurabili e limitate si ha $\hat{E}(\varphi)\hat{E}(\psi) = \hat{E}(\varphi\psi)$. Sia ora $x \in \mathbb{D}(\hat{E}(u)\hat{E}(v))$, e cioè sia $x \in \mathbb{D}(\hat{E}(v))$ e $\hat{E}(v)x \in \mathbb{D}(\hat{E}(u))$. Essendo $\varphi_n u$ limitata per n fissato, allora

$$\varphi_n u \psi_m v \to \varphi_n uv, \text{ in } L^2(\mathbb{R}, \rho_x)$$

Di conseguenza

$$\hat{E}(u)\hat{E}(v)x = \lim_{n\to\infty} \hat{E}(\varphi_n u)[\lim_{m\to\infty} \hat{E}(\psi_m v)x] =$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \hat{E}(\varphi_n u)\hat{E}(\psi_m v)x =$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \hat{E}(\varphi_n u \psi_m v)x = \lim_{n\to\infty} \hat{E}(\varphi_n uv)x$$

e dunque la successione $(\varphi_n uv)$ è di Cauchy in $L^2(\mathbb{R}, \rho_x)$. Poichè poi $\varphi_n uv \to uv$ puntualmente, si ha $uv \in L^2(\mathbb{R}, \rho_x)$, e di conseguenza $x \in \mathbb{D}(\hat{E}(uv))$ e $\hat{E}(u)\hat{E}(v)x = \hat{E}(uv)x$. Dunque si ha

$$\mathbb{D}(\hat{E}(u)\hat{E}(v)) \subset \mathbb{D}(\hat{E}(v)) \cap \mathbb{D}(\hat{E}(uv))$$

$$\hat{E}(u)\hat{E}(v) \subset \hat{E}(uv)$$

Se poi $x \in \mathbb{D}(\hat{E}(v)) \cap \mathbb{D}(\hat{E}(uv))$, si ha

$$\hat{E}(uv)x = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \hat{E}(\varphi_n u \psi_m v) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \hat{E}(\varphi_n u)\hat{E}(\psi_m v)x =$$

$$\lim_{n\to\infty} \hat{E}(\varphi_n u)\hat{E}(v)x$$

e dunque $u \in L^2(\mathbb{R}, \rho_x)$, da cui $\hat{E}(v)x \in \mathbb{D}(\hat{E}(u)) \implies x \in \mathbb{D}(\hat{E}(u)\hat{E}(v))$.

9. Osserviamo innanzitutto che $\mathbb{D}(\hat{E}(u))$ è denso in H. Infatti, preso $x \in H, m \in \mathbb{N}$, si ha che $\hat{E}(\varphi_m)x \in \mathbb{D}(\hat{E}(u))$. Poichè poi $\hat{E}(\varphi_m)x \to x$, si ha la densità. Sia ora $x \in H, m \in \mathbb{N}, y = \hat{E}(\varphi_m)x$. Allora per il punto (8) si avrà che, per $n \geq m$, vale

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi_n(t)u(t)|^2 d\rho_y(t) = \|\hat{E}(\varphi_n u)\hat{E}(\varphi_m)x\|^2 = \|\hat{E}(\varphi_m u)x\|^2 < \infty$$

e dunque

$$u \in L^2(\mathbb{R}, \rho_y) \iff \hat{E}(\varphi_m)x = y \in \mathbb{D}(\hat{E}(u)),\ \forall m \in \mathbb{N}$$

Vale poi che $\mathbb{D}(\hat{E}(u^*)) = \mathbb{D}(\hat{E}(u))$. Per il punto (5) si ha poi che, presi $x, y \in \mathbb{D}(\hat{E}(u)) = \mathbb{D}(\hat{E}(u^*))$,

$$\langle y, \hat{E}(u)x\rangle = \int_{\mathbb{R}} u(t) d\langle y, E(t)x\rangle = [\int_{\mathbb{R}} u(t)^* d\langle x, E(t)y\rangle]^*$$

$$= \langle x, \hat{E}(u^*)y\rangle = \langle \hat{E}(u^*)y, x\rangle$$

e cioè $\hat{E}(u)$ e $\hat{E}(u^*)$ sono aggiunte formali l'una dell'altra. Manca allora da mostrare $\mathbb{D}(\hat{E}(u)^*) \subset \mathbb{D}(\hat{E}(u^*))$. Sia $y \in \mathbb{D}(\hat{E}(u)^*)$. Allora, per ogni $x \in \mathbb{D}(\hat{E}(u))$

$$\langle \hat{E}(u)^* y, x\rangle = \langle y, \hat{E}(u)x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle y, \hat{E}(\varphi_n u)x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \hat{E}(\varphi_n u^*)y, x\rangle$$

in particolare, per ogni $x \in H, m \in \mathbb{N}$

$$\langle \hat{E}(\varphi_m)\hat{E}(u)^* y, x\rangle = \langle \hat{E}(u)^* y, \hat{E}(\varphi_m x\rangle$$

$$= \lim_{n\to\infty} \langle \hat{E}(\varphi_n u^*)y, \hat{E}\varphi_m)x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \hat{E}(\varphi_m \varphi_n u^*)y, x\rangle$$

$$= \langle \hat{E}(\varphi_m u^*)y, x\rangle$$

e dunque, per ogni $y \in \mathbb{D}(\hat{E}(u)^*), m \in \mathbb{N}$

$$\hat{E}(\varphi_n)\hat{E}(u)^* y = \hat{E}(\varphi_m u^*)y$$

e dunque

$$\hat{E}(u)^* y = \lim_{m\to\infty} \hat{E}(\varphi_m u^*)y = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_m(t)u(t)dE(t)y$$

e dunque la successione $(\varphi_m u^*)$ è convergente in $L^2(\mathbb{R}, \rho_y)$ è cioè $u^* \in L^2(\mathbb{R}, \rho_y)$, da cui $y \in \mathbb{D}(\hat{E}(u^*))$. In particolare,

$$\mathbb{D}(\hat{E}(u)^*) = \mathbb{D}(\hat{E}(u))$$

e per il punto (2) $\|\hat{E}(u)x\| = \|\hat{E}(u)^* x\|$, $\forall x \in \mathbb{D}(\hat{E}(u))$, e cioè $\hat{E}(u)$ è normale.

□

3.2 Teorema Spettrale per Operatori Autoaggiunti

Teorema Spettrale Per Operatori Limitati Autoaggiunti via Famiglie Spettrali ([4], *Teorema 7.17*)**.** Per ogni operatore autoaggiunto T sullo spazio di Hilbert H esiste un'unica famiglia spettrale E per cui

$$T = \hat{E}(I)$$

o, alternativamente,

$$T = \int t dE(t)$$

Nel caso complesso tale famiglia spettrale è data da

$$\langle y, (E(b) - E(a))x\rangle = \lim_{\substack{\delta\to 0^+\\ \varepsilon\to 0^+}} \frac{1}{2\pi i} \int_{a+\delta}^{b+\delta} \langle y, (R(t-i\varepsilon, T) - R(t+i\varepsilon, T)x\rangle dt \quad (3.3)$$

per ogni $x, y \in H, -\infty < a \leq b < \infty$. In tal caso diciamo che E è la famiglia spettrale di T.

Dimostrazione.

Unicità Se $T = \hat{E}(I)$, allora $\lambda - T = \hat{E}(\lambda - I)$ per il Teorema (3.1.2)(7). Allora, per ogni $\lambda \in \mathbb{C} : Im(\lambda) \neq 0$ si ha per il Teorema (3.1.2)(8), ponendo $u_\lambda(t) = (\lambda - t)^{-1}$, che

$$(\lambda - T)\hat{E}(u_\lambda)x = \hat{E}((\lambda - I)u_\lambda)x = x, \ \forall x \in H$$

$$\hat{E}(\lambda - T)x = \hat{E}(u_\lambda(\lambda - I))x = x, \ \forall x \in \mathbb{D}(T)$$

e dunque $\hat{E}(u_\lambda) = R(\lambda, T)$, per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ con $Im(\lambda) \neq 0$. Allora, per il Teorema (3.1.2)(5) si ha

$$\langle x, R(\lambda - T)x \rangle = \int_{\mathbb{R}} (\lambda - t)^{-1} d\rho_x(t), \quad \forall x \in H$$

Osserviamo allora che $\rho_x(t) = \|E(t)x\|^2$ e $F(\lambda) = \langle x, R(\lambda, T)x \rangle$ soddisfano le ipotesi del seguente

Teorema 3.2.1 ([4], *Teorema B1*)**.** Sia $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua a destra e a variazione limitata, con $\lim_{t \to \infty} w(t) = 0$ e

$$f(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} (\lambda - t)^{-1} dw(t), \quad \lambda \in G = \{\lambda \in \mathbb{C} : Im(\lambda) > 0\}$$

Allora

- Per ogni $t \in \mathbb{R}$ vale la formula di inversione di Stieltjes

$$w(t) = \lim_{\substack{\delta \to 0^+ \\ \varepsilon \to 0^+}} -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{t+\delta} Im(f(s + i\varepsilon))ds$$

- Se $f(\lambda) = 0$ per ogni $\lambda \in G$, allora $w(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$

Allora

$$\|E(t)x\|^2 = \langle x, E(t)x \rangle = \lim_{\substack{\delta \to 0^+ \\ \varepsilon \to 0^+}} -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{t+\delta} Im(\langle x, R(s + i\varepsilon, T)x \rangle)ds$$

$$= \lim_{\substack{\delta \to 0^+ \\ \varepsilon \to 0^+}} -1\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{t+\delta} \langle x, (R(s - i\varepsilon, T) - R(s + i\varepsilon, T))x \rangle ds$$

e per la Proposizione (1.1.1) si ha l'equazione (3.3). Poichè poi l'equazione (3.3) è vera per ogni $x, y \in H$, si ha l'unicità.

Esistenza Se esiste una famiglia spettrale per cui $T = \int tdE(t)$, allora l'equazione (3.3) sarà soddisfatta. É necessario allora studiare a che condizione l'equazione (3.3) definisce una famiglia spettrale per cui $T = \int tdE(t)$. Abbiamo bisogno del seguente

Teorema di Herglotz ([4], *Teorema B3*)**.** Sia $G = \{\lambda \in \mathbb{C} : Im(\lambda) > 0\}$, e sia $f : G \to \mathbb{C}$ olomorfa e tale che

$$Im(f(\lambda)) \leq 0$$

$$|f(\lambda)Im(\lambda)| \leq M, \quad \forall \lambda \in G$$

Allora esiste un'unica funzione continua a destra e non decrescente $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per cui $\lim_{t\to-\infty} w(t) = 0$ e

$$f(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} (\lambda - t)^{-1} dw(t), \quad \forall \lambda \in G$$

Per ogni $t \in \mathbb{R}$ abbiamo poi $w(t) \leq M$ e

$$w(t) = \lim_{\substack{\delta\to 0^+ \\ \varepsilon\to 0^+}} -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{t+\delta} Im(f(s + i\varepsilon))ds$$

Allora le funzioni $F_x(\lambda) = \langle x, R(\lambda, T)x\rangle$ soddisfano le ipotesi del Teorema di Herglotz, in quanto F_x è olomorfa per $Im(\lambda) > 0$. Allora

$$Im(F_x(\lambda)) = Im(\langle x, R(\lambda, T)x\rangle) = Im(\langle(\lambda - T)R(\lambda, T)x, R(\lambda, T)x\rangle)$$

$$= \|R(\lambda, T)x\|^2 Im(\lambda^*) < 0, \text{ per } Im(\lambda) > 0$$

e dunque

$$|F_x(\lambda)Im(\lambda)| \leq |Im(\lambda)|^{-1}\|x\|^2|Im(\lambda)| = \|x\|^2$$

da cui

$$\langle x, R(\lambda, T)x\rangle = F_x(\lambda) = \int (\lambda - t)^{-1} dw(x, t) \tag{3.4}$$

dove

$$w(x, t) = \lim_{\substack{\delta\to 0^+ \\ \varepsilon\to 0^+}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{t+\delta} \langle x, (R(s - i\varepsilon, T) - R(s + i\varepsilon, T))x\rangle ds$$

Ora, $w(x,t)$ è una funzione continua a destra e non decrescente in t, con $w(x,t) \to 0$ per $t \to -\infty$ e $\|w(x,t) \leq \|x\|^2$. L'equazione (3.4) vale anche per $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, in quanto $\langle x, R(\lambda^*, T)x\rangle = \langle x, R(\lambda, T)x\rangle^*$. Definiamo poi

$$w(y,x,t) = \lim_{\substack{\delta \to 0^+ \\ \varepsilon \to 0^+}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{t+\delta} \langle y, (R(s - i\varepsilon, T) - R(s + i\varepsilon, T))x\langle ds$$

l'esistenza di tali limiti segue dalla Proposizione (1.1.1).

La mappa $(y,x) \mapsto w(y,x,t)$ è allora una forma sesquilineare limitata non negativa su H per ogni $t \in \mathbb{R}$. Osserviamo poi che $w(x,x,t) = w(x,t) \geq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Allora

$$|w(y,x,t)|^2 \leq w(y,t)w(x,t) \leq \|y\|^2\|x\|^2$$

Abbiamo allora il seguente

Lemma 3.2.1. Se w è una forma sesquilineare limitata in H, allora esiste una unica $T \in \mathfrak{L}(H)$ tale che $w(x,y) = \langle Tx, y\rangle$ per ogni $x, y \in H$. In tal caso si ha $\|T\| = \|w\|$.

Allora per il Lemma esiste, per ogni $t \in \mathbb{R}$, un operatore $E(t) \in \mathfrak{L}(H)$, $\|E(t)\| \leq 1$, tale che

$$\langle y, E(t)x\rangle = w(y,x,t), \quad \forall x, y \in H$$

É ovvio il fatto che $E(t)$ sia autoaggiunta e positiva.

Vogliamo ora mostrare che E è una famiglia spettrale.

Osserviamo innanzitutto che per ogni $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $x \in H$ vale

$$\langle y, R(\lambda, T)x\rangle = \int (\lambda - t)^{-1} dw(y,x,t) = \int (\lambda - t)^{-1} d\langle y, E(t)x\rangle \quad (3.5)$$

Allora, per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\lambda \neq \mu$

$$\int (\lambda - t)^{-1} d\langle R(\mu^*, T)y, E(t)x\rangle = \langle R(\mu^*, T)y, R(\lambda, T)x\rangle$$

$$= \langle y, R(\mu,T)R(\lambda,T)x\rangle = (\mu-\lambda)^{-1}[\langle y, R(\lambda,T)x\rangle - \langle y, R(\mu,T)x\rangle]$$

$$= (\mu-\lambda)^{-1}\int[(\lambda-t^1)-(\mu-t)^{-1}]d\langle y, E(t)x\rangle$$

$$= \int(\lambda-t)^{-1}d-t\int_{-\infty}^{t}(\mu-s)^{-1}d\langle y, E(s)x\rangle$$

Lemma 3.2.2. Sia $w : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua a destra e a variazione limitata, $\lim_{t\to-\infty} w(t) = 0$. Se $\int_{\mathbb{R}}(\lambda-t)^{-1}dw(t) = 0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, allora $w(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Per il Lemma vale allora che

$$\int(\mu-s)^{-1}d_s\langle y, E(s)E(t)x\rangle = \langle y, R(\mu,T)E(t)x\rangle = \langle R(\mu^*,T)y, E(t)x\rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{t}(\mu-s)^{-1}d\langle y, E(s)x\rangle$$

Allora, sempre per il Lemma, si ha

$$\langle y, E(s)E(t)x\rangle = \begin{cases} \langle y, E(s)x\rangle & \text{per } s \le t \\ \langle y, E(t)x\rangle & \text{per } t \le s \end{cases}$$

E dunque, per ogni $s, t \in \mathbb{R}$,

$$E(s)E(t) = E(\min\{s,t\})$$

In particolare $E(t)^2 = E(t)$, e cioè le $E(t)$ sono proiezioni ortogonali per ogni $t \in \mathbb{R}$, e $E(s) \le E(t)$ per $s \le t$. Osserviamo poi che

$$\|E(t+\varepsilon)x - E(t)x\|^2 = \|E(t+\varepsilon)x\|^2 - \|E(t)x\|^2$$

$$= w(x,t+\varepsilon) - w(x,t) \to 0,\ \varepsilon \to 0^+$$

in quanto $w(x,\cdot)$ è continua a destra. Inoltre $\|E(t)x\|^2 = w(x,t) \to 0$ per $t \to -\infty$. Quindi $\lim_{t\to-\infty} E(t) = 0$, e la convergenza è forte. Manca allora da mostrare che $E(t) \to I$ per $t \to \infty$.

Poichè $E(\cdot)$ è monotona, $E(t)$ converge fortemente ad una proiezione ortogonale per $t \to \infty$. Allora

$$\langle x, E(\infty)x\rangle = \lim_{s\to\infty}\langle x, E(s)x\rangle \ge \langle x, E(t)x\rangle$$

Dunque $E(\infty) \geq E(t)$ per ogni t. Sia ora $F = I - E(\infty)$. Allora

$$E(t)F = E(t)(I - E(\infty)) = E(t) - E(t) = 0$$

Allora, per ogni $x, y \in H$, $Im(\lambda) \neq 0$, si ha

$$\langle y, R(\lambda, T)Fx\rangle = \int (\lambda - t)^{-1} d\langle y, E(t)Fx\rangle = 0$$

E dunque $R(\lambda, T)Fx = 0$ per ogni $x \in H$, e dunque $F = 0 \iff E(\infty) = I$. Abbiamo dunque provato che E è una famiglia spettrale. Inoltre $R(\lambda, T) = \hat{E}(u_\lambda)$ per (3.5) il Teorema (3.1.2). Dunque $\hat{E}(\lambda - I) = \lambda - T$ e $T = \int t dE(t)$.

□

Quello che abbiamo mostrato è una sorta di generalizzazione del Teorema Spettrale per gli Operatori Normali Compatti: se questi avevano una rappresentazione come serie, gli operatori autoaggiunti hanno una rappresentazione di tipo integrale. Questo essenzialmente viene dal fatto che lo spettro di un operatore autoaggiunto non compatto è anche spettro continuo, e dunque non è costituito solamente di autovalori, i quali abbiamo dimostrato essere punti isolati dello spettro. Si è rivelato dunque necessario passare da una rappresentazione discreta data dalla serie ad una serie continua, data dall'integrale.

Definizione 3.2.1. Sia A un insieme, e sia H_α uno spazio di Hilbert per ogni α. Allora

$$H = \{x = (x_\alpha)_{\alpha \in A} \prod_{\alpha \in A} H_\alpha :$$

$$x_\alpha \neq 0 \text{ per un insieme almeno numerabile di } \alpha \in A, \sum_{\alpha \in A} \|x_\alpha\|^2 < \infty\}$$

è uno spazio di Hilbert, dotato del prodotto scalare

$$\langle x_\alpha, y_\alpha\rangle = \sum_{\alpha \in A} \langle x_\alpha, y_\alpha\rangle, \quad (x_\alpha), (y_\alpha) \in H$$

Poniamo in questo caso $H = \oplus_{\alpha \in A} H_\alpha$.

Sia ora $\{\rho_\alpha, \alpha \in A\}$ una famiglia di funzioni continue a destra non decrescenti su $\mathbb{R}$. Allora

$$E(t)(f_\alpha) = \chi_{]-\infty,t]}(f_\alpha) = (\chi_{]-\infty,t]} f_\alpha),\ f_\alpha \in \oplus_{\alpha \in A} L^2(\mathbb{R}, \rho_\alpha),\ t \in \mathbb{R}$$

definisce una famiglia spettrale su $\oplus_{\alpha \in A} L^2(\mathbb{R}, \rho_\alpha)$.

Sia ora $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione E-misurabile. Allora

$$\mathbb{D}(u(T)) = \{(f_\alpha \in \oplus_{\alpha \in A} L^2(\mathbb{R}, \rho_\alpha) : (uf_\alpha) \in \oplus_{\alpha \in A} L^2(\mathbb{R}, \rho_\alpha)\}$$

e

$$u(T) f_\alpha = (uf_\alpha), \quad f_\alpha \in \mathbb{D}(u(T))$$

. Chiamiamo questo operatore *l'operatore massimale di moltiplicazione indotto da u su $\oplus_{\alpha \in A} L^2(\mathbb{R}, \rho_\alpha)$*.

Teorema di Rappresentazione Spettrale ([4], *Teorema 7.18*)**.** Sia $T \in \mathfrak{L}(H)$ autoaggiunto. Allora esiste una famiglia $\{\rho_\alpha, \alpha \in A\}$ di funzioni continue a destra non decrescenti e un operatore

$$U : H \to \oplus_{\alpha \in A} L^2(\mathbb{R}, \rho_\alpha)$$

tale che

$$T = U^{-1} T_I U$$

dove T_I è l'operatore massimale di moltiplicazione per I su $\oplus_{\alpha \in A} L^2(\mathbb{R}, \rho_\alpha)$. La famiglia spettrale di T sarà poi $E(t) = U^{-1} \chi_{]-\infty,t]} U$.

Anteponiamo alla dimostrazione il seguente

Teorema 3.2.2 ([4], *Teorema 7.16*)**.** Sia E una famiglia spettrale sullo spazio di Hilbert H. Allora esiste una famiglia di funzioni continue a destra non decrescenti $\{\rho_\alpha : \alpha \in A\}$, dove $card(A)$ è al più la dimensione di H, e un operatore unitario $U : H \to \oplus_{\alpha \in A} L^2(\mathbb{R}, \rho_\alpha)$ per cui

$$E(t) = U^{-1} F U,\ \forall t \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione del Teorema di Rappresentazione Spettrale. Se E è la famiglia spettrale di T, e $\oplus_{\alpha\in A} L^2(\mathbb{R}, \rho_\alpha)$,$U$ e F sono costruite come nel Teorema (3.2.2), allora per il Teorema (3.2.2) e il Teorema Spettrale si ha

$$T = \hat{E}(I) = U^{-1}\hat{F}(I)U = U^{-1}$$

$$E(t) = U^{-1}F(t)U = U^{-1}\chi_{[-\infty,t[}U$$

□

Quello che si è provato è un teorema che nell'enunciato è molto simile alla versione matriciale del teorema spettrale nel caso di spazi di Hilbert di dimensione finita, che dice

Teorema Spettrale - Dimensione Finita ([3], *Teorema 23.13*)**.** Sia H uno spazio di Hilbert di dimensione finita, e sia T un operatore normale su H. Allora esiste una matrice unitaria U e una matrice diagonale D tali che

$$D = UTU^{-1}$$

La matrice diagonale, in questo caso, è data dall'operatore $\hat{E}(\chi_{[-\infty,t[})$. Se E è la famiglia spettrale dell'operatore autoaggiunto T, e u è una funzione misurabile, scriveremo $u(T)$ al posto di $\hat{E}(u)$.

Definizione 3.2.2. Sia E una famiglia spettrale. $M \subset \mathbb{R}$ viene detto E-misurabile se la sua funzione caratteristica χ_M lo è. Scriveremo allora, al posto di $\hat{E}(\chi_M)$, $E(M)$.

Osservazione 3.2.1. $E(\mathbb{R} \setminus M) = \hat{E}(I - \chi_M) = I - \hat{E}(\chi_M) = I - E(M)$. Se poi E è la famiglia spettrale di T, si ha $E(M) = \chi_M(T)$. Inoltre, gli operatori $E(M)$ sono proiezioni ortogonali.

Proposizione 3.2.1 ([4], *Proposizione pagina 196*)**.** Sia T un operatore autoaggiunto su H, e sia E la sua famiglia spettrale. Se u è una funzione a valori reali E-misurabile, allora vale per la famiglia spettrale F di $u(T)$ che

$$F(t) = E(\{s \in \mathbb{R} : u(s) \leq t\}), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

e

$$F(M) = E(\{s \in \mathbb{R} : u(s) \in M\}), \quad \forall M \text{ insieme di Borel}$$

3.3 Teorema Spettrale per Operatori Limitati Normali

Definizione 3.3.1. Sia H uno spazio di Hilbert. Una funzione $G : \mathbb{C} \to \mathfrak{L}(H)$ viene detta una *famiglia spettrale complessa* se esistono due famiglie spettrali reali E, F tali che

$$G(t + is) = E(t)F(s) = F(s)E(t), \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

Osserviamo poi che, se $u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $u(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{J_j}(z)$ è una funzione a gradini, possiamo definire l'integrale rispetto alla famiglia spettrale complessa G attraverso l'equazione

$$\int u(z)dG(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j G(J_j)$$

valgono allora gli argomenti usati nelle sezioni precedenti. Diremo che una funzione $u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è G-misurabile se, posto $\gamma_x(J) = \|G(J)x\|^2, J \subset \mathbb{C}$ se è γ_x-misurabile, per ogni $x \in H$. Se poi $u \in L^2(\mathbb{C}, \gamma_x)$, è possibile definire l'integrale

$$\int_{\mathbb{C}} u(z)dG(z)x$$

esattamente come nelle sezioni precedenti.

In particolare, per ogni funzione G-misurabile $U : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ le equazioni

$$\mathbb{D}(\hat{G}(u)) = \{x \in H : u \in L^2(\mathbb{C}, \gamma_x)\}$$

$$\hat{G}(u)x = \int_{\mathbb{C}} u(z)dG(z)x, \quad x \in \mathbb{D}(\hat{G}(u))$$

definiscono un operatore normale su H. Scriveremo anche

$$\hat{G}(u) = \int_{\mathbb{C}} u(z)dG(z)$$

Osserviamo che poi restano validi i risultati del Teorema (3.1.2) Otteniamo allora il seguente risultato:

Teorema Spettrale per Operatori Limitati Normali ([4], *Teorema 7.31*)**.** Sia H uno spazio di Hilbert, $T \in \mathfrak{L}(H)$ normale. Allora esiste esattamente una famiglia spettrale G per cui

$$T = \int_{\mathbb{C}} zdG(z)$$

Si ha poi

$$G(t+is) = E(t)F(t) = F(s)E(t), \quad s,t \in \mathbb{R}$$

dove E ed F sono le famiglie spettrali degli operatori $A = \frac{T+T^*}{2}$ e $B = \frac{T-T^*}{2i}$ rispettivamente.

Dimostrazione. Se A, B sono definiti come nelle ipotesi, osserviamo che $A = A^*, B = B^*$ e $T = A + iB$. Inoltre

$$AB = \frac{1}{4i}(T^* - TT^* + T^*T - T^{*2}) = \frac{1}{4i}(T^2 - T^{*2}) = BA$$

Inoltre

$$R(z,A)R(z',B) = R(z',B)R(z,A)$$

Per ogni $z, z' \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Inoltre, per il Teorema Spettrale per Operatori Autoaggiunti si ha poi che

$$E(t)F(s) = F(s)E(t), \quad \forall s,t \in \mathbb{R}$$

Poniamo allora

$$G(t+is) = E(t)F(s), \quad \forall s,t \in \mathbb{R}$$

Allora

$$G(t+is) = E(t)F(s) = I, \text{ per } s,t \geq \|T\|$$

in quanto $\|A\|, \|B\| \leq \|T\|$. Analogamente si avrà

$$G(t+is) = E(t)F(s) = 0, \text{ per } s, t < -\|T\|$$

Sia ora (u_n) una successione limitata di funzioni a gradino su $\mathbb{R}$ convergente uniformemente per $|t| \geq \|T\|$. Allora

$$A = \int_{\mathbb{R}} tdE(t) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} u_n(t)dE(t) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{C}} u_n(Re(z))dG(z)$$
$$= \int_{\mathbb{C}} Re(z)dG(z)$$

Analogamente si ottiene

$$B = \int_{\mathbb{C}} Im(z)dG(z)$$

Allora si ha

$$T = A + iB = \int_{\mathbb{C}} Re(z)dG(z) + i\int_{\mathbb{C}} Im(z)dG(z) = \int_{\mathbb{C}} zdG(z)$$

Manca allora da mostrare l'unicità di G.

Sia allora G' una famiglia spettrale complessa per cui

$$T = \int_{\mathbb{C}} zdG'(z), \quad G'(t+is) = E'(t)F'(s) = F'(s)E'(t)$$

Allora

$$A = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{C}} (z+z^*)dG'(z) = \int_{\mathbb{C}} Re(z)dG'(z) = \int_{\mathbb{R}} tdE'(t)$$

L'unicità della famiglia spettrale per gli Operatori Autoaggiunti ci dà allora $E = E'$. Analogamente si mostra $F = F'$, da cui $G = G'$. $\square$

Esattamente come per gli operatori autoaggiunti, se G è la famiglia spettrale di un operatore T, allora scriveremo $u(T)$ al posto di $\hat{G}(u)$.

Bibliografia

[1] David Gilbarg, Neil S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equation of Second Order*, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1977

[2] Luigi Ambrosio, Nicola Fusco, Diego Pallara, *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, Oxford University Press, Great Clarendon Street, Oxford, 2000

[3] Edoardo Sernesi, *Geometria 1*, Bollati Boringhieri editore s.r.l., corso Vittorio Emanuele II 86, Torino, 2000

[4] Joachim Weidmann, *Linear Operators in Hilbert Spaces*, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1980

[5] Michael Reed, Barry Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics vol. 1*, Academic Press Inc., 1250 Sixth Avenue, San Diego, California 92101, 1980

Ringraziamenti

Desidero ringraziare tutti coloro che mi hanno aiutato nella realizzazione della mia Tesi con suggerimenti, critiche ed osservazioni: a loro va la mia gratitudine, anche se a me spetta la responsabilità per ogni errore o imprecisione contenuta in questa tesi.

Ringrazio innanzitutto il professor Bruno Franchi, Relatore: senza il suo supporto e la sua guida sapiente questa tesi non esisterebbe.

Proseguo con il personale degli archivi e delle biblioteche consultate, in particolare della Biblioteca del Dipartimento di Matematica e della Biblioteca del Quartiere Savena/Mazzini N. Ginzburg, fonti inestimabili di documentazione.

Un ringraziamento particolare va alla mia famiglia e agli amici che mi hanno incoraggiato o che hanno speso parte del proprio tempo per discutere con me le bozze del lavoro, in particolare Alessandro Calzolari, Alessandro De Gregorio, Gioacchino Ruocco, Federico Zucchini, Francesca Bologna, Emanuele Perazzolo, Federico Viara, il clan e la comunità capi del Bologna 18, gli amici di Beat-Bit Music School, il Madela's, gli amici del Movimento dei Focolari e gli amici di Matematica.

Vorrei infine ringraziare la mia fidanzata, sempre vicina e paziente in questo percorso.