ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in MATEMATICA

STORIA E SVILUPPO DEL CONCETTO DI LIMITE : FRA MATEMATICA, FILOSOFIA E DIDATTICA

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
GIORGIO BOLONDI

Presentata da:
FABIANA CINTI

II Sessione
Anno Accademico 2012/2013

A tutti i miei studenti,

quelli di oggi,
quelli passati...
ma soprattutto quelli futuri...

« Considerate la vostra semenza:
fatti non foste a viver come bruti,
ma per seguir virtute e canoscenza".

Li miei compagni fec'io sì aguti,
con questa orazion picciola, al cammino,
che a pena poscia li avrei ritenuti;

e volta nostra poppa nel mattino,
de' remi facemmo ali al folle volo
[...]»

Dante - Inferno, canto XXVI

C.Cairo, *Colonne d'Ercole*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists \delta_\varepsilon > 0\ /\ \forall\, x \in (x_0 - \delta_\varepsilon;\ x_0 + \delta_\varepsilon),\ x \neq x_0;\ \ |f(x) - l| < \varepsilon$$

INTRODUZIONE

Mi sono diplomata nel 1997, all'orale delle maturità mi chiesero come avrei proseguito i miei studi: risposi che ero indecisa fra matematica o lettere e filosofia.
Mi sono laureata in ingegneria nel 2003.
Ma non sono un ingegnere, ho scoperto di essere un insegnante di matematica.
E così sono arrivata qua.

Quando ho iniziato il corso di storia della matematica e della fisica ho riscoperto la mia passione divisa fra le scienze e tutto ciò che è storia, lettere e filosofia: e da questo intreccio, da questo sovrapporsi di idee e riferimenti, da questo percorso culturale su fronti diversi, come insegnante appassionata credo possa venire un grande valore aggiunto agli studenti, soprattutto nello studio e nell'apprendimento della matematica e della fisica, così tanto difficoltoso e troppo spesso odiato.

A partire da questa posizione e passione personale, ho pensato dunque di affrontare il concetto di limite da un punto di vista storico, e, per quanto le mie conoscenze me lo permettono, filosofico, perché il limite rappresenta uno degli ostacoli più duri da superare quando lo si presenta in modo tradizionale ai ragazzi: lo studente che vede per la prima volta la definizione di limite, solitamente tende a pensare di essere arrivato "al proprio limite" ! Si sta infatti apprestando ad iniziare lo studio dell'analisi matematica, per la quale dovrebbe essere stato preparato negli anni precedenti della sua carriera scolastica, ed ecco che si ritrova davanti a questa definizione "illeggibile" di un concetto apparentemente intuitivo : il pensiero che di solito viene è che l' analisi matematica sia scritta in una lingua incomprensibile riservata a pochi eletti, e che il suo scopo principale sia quello di rendere impossibile la vita dello studente medio. Il risultato che si ottiene è un rigetto totale da parte dello studente, quando invece dovrebbe essere fatto intendere come una sfida, come un trampolino per andare oltre ai limiti della propria conoscenza, e per intraprendere un *"folle volo"* verso un mondo da scoprire, quello dell'analisi matematica.
Cosa fare allora per non abbattere lo studente ed incentivarlo ad intraprendere il suo *"folle volo"* verso *"virtute e canoscenza"* ?
Si sono fatte numerose ricerche in questo senso, volte a superare gli ostacoli di apprendimento che si trova a dover fronteggiare lo studente, ostacoli di natura principalmente epistemologica e di registri rappresentativi : questi ostacoli sono spesso gli stessi che hanno incontrato gli uomini del passato nella ricerca e nello sviluppo di nuovi concetti. E lo sviluppo e l'affermazione del concetto di limite, al quale si vanno quasi a fondere inevitabilmente altri fondamentali concetti matematici come ad esempio quello di funzione, di numero reale e di continuità, è un chiaro esempio di storia lenta e particolarmente complessa e tormentata che mostra in se proprio tutti gli ostacoli epistemologici intrinseci al concetto di limite, oltre che alla necessità di evolvere i proprio registri rappresentativi per poter definire in modo rigoroso i concetti necessari.

A mio avviso per permettere un migliore apprendimento da parte degli studenti del concetto di limite, così fondamentale per la comprensione dell'analisi matematica, gli si potrebbe mostrare come l'arrivo alla definizione sopracitata e tanto odiata non sia un percorso doloroso solo per lui, ma lo sia stato anche per i matematici che hanno scritto la storia della nostra disciplina, affrontando l'argomento con un approccio storico, che ricalchi in qualche modo il percorso molto lungo (tre secoli circa) e altrettanto complesso che si è dovuto affrontare per riuscire ad arrivare ad una definizione rigorosa del limite matematico.
Accanto al concetto matematico, che si potrebbe dunque affrontare con un approccio di tipo storico, si può poi accostare anche un discorso più ampio, a livello storico e filosofico in senso lato, per affrontare e poter così vedere la matematica non solo da un punto di vista prettamente tecnico, ma anche da quello più profondo e reale del contesto culturale in cui nasce, si sviluppa e si afferma. Lo sviluppo delle scienze, e con esse anche della matematica, avviene sempre in un contesto storico, sociale e culturale ben definito, e anche a causa di esso la nostra disciplina si è sviluppata in certi versi anziché in altri: un approccio interdisciplinare a mio avviso potrebbe aiutare molto gli studenti a percepire la matematica come una materia non così lontana dagli “uomini comuni” come spesso viene ritenuta, e soprattutto a muovere la loro curiosità e il loro spirito critico, che troppo poco l'insegnamento tradizionale incentiva, anzi talvolta tende addirittura a spegnere. E il concetto di limite, proprio per la sua complessità e la sua lunga storia ben si presta a mostrare anche un panorama culturale e filosofico a livello interdisciplinare.

Quello che mi propongo in questa tesi è pertanto un viaggio nella storia della matematica, che da un' intuizione di Leibniz ci ha portato, passando per motivazioni e modi diversi nel corso dei secoli, alla formalizzazione e alla definizione del concetto di limite matematico, e come questo viaggio molto spesso ricalchi il percorso cognitivo che devono affrontare i ragazzi per raggiungere la conoscenza consapevole e profonda del concetto di limite, e di ciò che esso implica. E in questo viaggio complesso e talvolta faticoso nella storia e nella didattica della matematica, ci faremo accompagnare dalla filosofia e dalle sue evoluzioni … perché in fondo matematica e filosofia non sono le regine della stessa scienza?
Nella prima parte verrà pertanto presentato un excursus sui principali pro e contro dell'utilizzo della storia all'interno della didattica della matematica; si proseguirà poi con la parte strettamente storica dell'evoluzione e dell'affermazione del concetto di limite come fondamento dell'analisi infinitesimale, ed infine cercheremo di analizzare gli aspetti didattici di una possibile trattazione del concetto di limite dal punto di vista storico e filosofico in classe: sarebbe certamente stato interessante poter effettuare una ricerca sperimentale in classe, ma per vicessitudini e tempistiche varie purtroppo non si è potuto – ma, come disse Cauchy, ci auguriamo che questa possa comunque essere una strada per nuove e interessanti ricerche!!!

INDICE

PARTE I

LA STORIA NELLA DIDATTICA DELLA MATEMATICA

«Alcuni sono dell'opinione che la storia costruisca un fine a sé,
e altri pensano che la sola cosa buona della storia
sia il suo valore euristico.
A me sembra chiaro che la storia fornisca
un mezzo estremamente prezioso, forse l'unico,
per farsi un'idea giusta della nostra conoscenza,
dando stimolo alla critica.
Da un lato stimola la scoperta originale
e dall'altro anche la critica.»

-Jourdain, 1913-

Introduzione

Fra le varie concezioni della didattica della matematica, si inserisce certamente quella secondo la quale lo scopo centrale dell'azione e della ricerca didattica è il miglioramento dell'insegnamento. La logica sottintesa a tale interpretazione è evidente: ad un miglioramento del nostro insegnamento farà inevitabilmente riscontro un miglioramento dei risultati che potremo ottenere dai nostri allievi. L' approccio puramente logico all'insegnamento e all'apprendimento della matematica, quindi relativo ad un'impostazione tradizionale, fornisce, ad esempio secondo Skemp, solo il prodotto finale della scoperta matematica e non genera nel discente i processi attraverso i quali essa avviene: tale approccio insegna il pensiero matematico non il pensare matematico! Molti ricercatori, seguendo questa impostazione, hanno brillantemente indicato agli insegnanti concrete possibilità di migliorare significativamente l'insegnamento attraverso sussidi innovativi, accorgimenti, attività. La possibilità di presentare la matematica ai nostri allievi anche mediante riferimenti alla storia della nostra disciplina, va inquadrata in questo tipo di impostazione della didattica : numerose sono in questi termini le ricerche in campo didattico volte a svelare i vantaggi nell'apprendimento della matematica utilizzandone la storia. Ad esempio, per citarne alcuni :

«Come ogni progetto educativo,
quello di intendere la storia della matematica come
componente dell'insegnamento della matematica implica
un'aspettativa più o meno esplicita
in termini di un migliore apprendimento»

- Fauvel e Van Maanen (1997) -

«Ci sembra si possano individuare due livelli di lavoro nell'introduzione della storia nella didattica:
uno che potremmo associare a un'immagine “sociale” della matematica
e un altro che concerne piuttosto un'immagine “interna” della stessa
Il primo livello si riferisce a quegli interventi mirati a fornire motivazioni allo studio
della matematica mediante la contestualizzazione nel sociale
(geografico, storico, commerciale, linguistico, …) […]
Il secondo livello è quello che recupera
la dimensione culturale della matematica come metodo,
anche in stretta connessione con metodi di lavoro propri anche di altre discipline
(filosofia, fisica, chimica).»

-Furinghetti e Somaglia (1997)

«Sia la *Storia* (come analisi critica delle evoluzione delle idee),
sia la *storia* (come sviluppo dei fatti),
sia infine la *storia aneddotica*, hanno ruoli interessanti.»

-D'Amore (1999)

Il discorso inoltre si può ampliare e collocare nell'ambito dell'insegnamento scientifico in generale, dove l'inserimento della storia e della filosofia possono dare contributi importanti per migliorare le prestazioni degli insegnanti e l'apprendimento dei discenti. A tal proposito citiamo un articolo di M.R.Matthwes dal titolo *Il riavvicinamento tra storia, filosofia ed insegnamento della scienza*, che richiama ovviamente anche un aspetto di interdisciplinarietà che si va ad affiancare al puro inserimento della storia della disciplina che stiamo trattando:

«La storia e la filosofia possono dare un contributo all'obiettivo generale
del miglioramento dell'insegnamento
e dell'apprendimento della scienza.
Gli aspetti principali del contributo dato dalla storia e dalla filosofia della scienza
possono essere così schematizzati:

- umanizza la scienza e la collega ad ambiti personali, culturali, etici e politici. Questo sembra che renda la scienza e la tecnologia più attraenti per gli studenti
- rende le classi più attive, e sviluppa le capacità di ragionamento critico[...]
- contribuisce alla profonda comprensione degli argomenti scientifici e a superare il “mare dell'insensatezza dove formule ed equazioni sono recitate senza una comprensione si cosa significhino o a che cosa si riferiscano
- migliora la preparazione degli insegnanti aiutandoli a sviluppare una comprensione più autentica della scienza e del suo ruolo nella vita sociale e culturale[...]
- aiuta gli insegnanti a capire le difficoltà di apprendimento degli studenti, poiché li rende consci delle difficoltà storiche dello sviluppo scientifico e dei cambiamenti concettuali [...]Mediante studi storici gli insegnanti possono apprezzare le difficoltà concettuali ed intellettuali dei primi periodi dello sviluppo della loro disciplina. […]
- contribuisce ad una più chiara valutazione dell'attuale dibattito sull'educazione che coinvolge gli insegnanti e chi progetta curricoli innovativi[...]»

In questa prima parte cercheremo dunque di dare una panoramica generale, senza scendere nel dettaglio di studi specifici, di quali possono essere i principali vantaggi e svantaggi nell'introduzione della storia della matematica all'interno di un corso di insegnamento della stessa (riferendoci in particolare a studenti di indirizzi liceali), focalizzandoci in particolar modo sui vantaggi della storia per il superamento degli ostacoli di tipo epistemologico e di registri.

Capitolo I.1

Aspetti positivi della storia della matematica nella didattica

> *«Il senso storico è un'importante componente del*
> *senso sociale della matematica.*
> *Il nostro interesse per il senso sociale*
> *non è confinato a valori etici, ma si lega all'obiettivo*
> *di fare della classe una community of inquiry*
> *in cui imparare avviene attraverso*
> *comunicazione, discussione, esplorazione»*
> - Furinghetti, 2007 -

Gli studi di didattica della matematica rivolti ad analizzare possibili vantaggi e svantaggi dell'uso della storia della matematica, sono molto numerosi. Non si vuole in questa sede analizzare tutti gli aspetti studiati e sperimentati, ma solo offrire una panoramica di tipo generale di quali possono essere alcuni dei contributi principali che la storia della matematica può offrire alla nostra didattica.

In un articolo del 1989, ad esempio, Swetz afferma che il contributo della storia all'interno della didattica della matematica sembra basato sull'idea di fondo che dare l'emozione del contatto 'col passato' sia già di per sé un valore aggiunto nell'insegnamento della matematica. In questo articolo egli offre una serie di esempi di antichi problemi interessanti e passabili in una presentazione ed analisi in classe; inoltre commenta quali possibili vantaggi comporti il loro uso:

- possono essere usati come esercizi
- rinforzano e chiariscono i concetti
- forniscono informazioni di carattere storico e sociale
- presentano mutamenti del pensiero matematico

Anche Furinghetti ha effettuato numerosi studi e ricerche volte a riscontrare i vantaggi dell'uso della storia all'interno della didattica della matematica, partendo dalla fondamentale idea che per rendere l'insegnamento efficace e positivo:

«l'insegnante deve trovare nuovi stimoli e motivazioni per gli alunni e per se stesso»

Le due linee guida principali che vengono delineate per conseguire questo fine, sono la tecnologia da una parte, che se usata con consapevolezza aiuta nella vita di classe, e dall' altra appunto l'integrazione della storia nell'insegnamento: questa in particolare, seguendo le parole di Furinghetti

«ci delinea percorsi didattici per costruire oggetti matematici,
ci intrattiene con aneddoti,
ci suggerisce problemi ,
la storia dice "perché" ,
fa retrocedere dalla teoria finita alle idee grezze che ne sono la base concettuale.
questi mezzi vanno inquadrati in un nuovo modo di vivere la vita di classe :

- devoluzione dell’autorità dell’insegnante
- condivisione della conoscenza
- nuove forme di comunicazione
- sviluppo di attività di *problem solving* »

A mio avviso, l'utilizzo della storia all'interno della didattica della matematica favorisce non solo l'apprendimento da parte degli studenti, migliorandolo dal punto di vista della motivazione, della problematizzazione e della chiarificazione dei concetti, oltre che sulla consapevolezza del sapere appreso e di un suo eventuale approccio critico, ma migliora anche la consapevolezza e l'attenzione dell'insegnante relativamente all'oggetto insegnato, sia a livello del possibile metodo didattico, sia a livello epistemologico dell'oggetto stesso: e più l'insegnante è consapevole di ciò che sta insegnando, più sarà attento a insegnarlo nella maniera migliore e più opportuna.
Vediamo a tal proposito alcuni dei principali aspetti positivi che si possono riscontrare nell'uso della storia della matematica.

Contesto epistemologico

Lo sviluppo della matematica, e quindi dell'apprendimento della matematica, è indiscutibilmente legato alla creazione di concetti: per produrre un concetto occorre delinearlo epistemologicamente, dunque, volente o nolente, chi riflette sullo sviluppo della matematica deve necessariamente porsi il problema della natura di quei concetti, o di quegli oggetti matematici che ci apprestiamo a fare apprendere ai nostri studenti. In questi termini, l'uso della storia può aiutare nella riflessione sulla costruzione degli oggetti matematici, mettendo in luce le radici delle idee matematiche e i meccanismi che hanno portato alla creazione matematica, ponendoli in un contesto realmente esistito, quello cioè della storia. La storia offre dunque, oltre che la riflessione epistemologica per eccellenza perché riguarda la prima creazione, cioè la nascita del concetto o dell'oggetto matematico, anche un contesto per osservare la transizione dal non-conoscere al conoscere, che costituisce l'intuizione pedagogica essenziale: spesso gli studenti non capiscono come si è arrivati a costruire certi oggetti o il perché qualcuno prima di loro si è preoccupato di farlo (lo studente ha spesso una percezione di una sorta di perversione dei matematici che secondo loro si inventano oggetti inutili, quasi volti solo a torturare il povero studente obbligato a studiarli!!), dunque un contesto realmente esistito, una spiegazione e una motivazione storica può aiutarli a capire meglio non solo come si sono costruiti certi oggetti, ma anche il perché qualcuno ha sentito il bisogno di costruirli, a cosa sono serviti e a cosa servono, e pertanto perché è giusto impararli.
Dal punto di vista degli insegnanti poi, conoscere la storia aiuta a dare alle nozioni isolate acquisite in corsi universitari di tipo disciplinare, un quadro di riferimento che non è sequenziale, ma concettuale, e se l'insegnante ha questa percezione profonda di una matematica a a largo spettro, difficilmente farà percepire agli studenti un argomento chiuso e superato quando si passa ad un nuovo argomento. In questo modo si possono aiutare gli studenti a non vedere la matematica a compartimenti stagni, sia fra loro sia nei confronti delle altre discipline, ma in un complesso più ampio in cui ogni argomento si può ritrovare concettualmente legato ad altri : il problema è che spesso gli studenti, una volta fatto il compito in classe o l'interrogazione, hanno la tendenza a non voler ricordare quanto appreso, o proprio tendono a dimenticarlo, la loro sensazione è che quello che imparano non servirà in futuro, quindi non si sforzano di capirlo per non dimenticarlo. Chiuso un argomento si passa ad un altro, di quanto si è fatto in precedenza spesso non rimane memoria: presentare la matematica da un punto di vista storico può aiutare in questo senso proprio perché, creando un contesto nel quale inserire i concetti matematici, automaticamente vengono legati fra loro, non rendendoli più sequenziali e disgiunti, ma facenti parte tutti della stessa disciplina, della

stessa storia, e tramite questo contesto di legame fra un concetto e l'altro, forse sarà meno facile dimenticarsi di ciò che è avvenuto, e che hanno studiato in precedenza.
L'inserimento della storia della matematica nella didattica, offre dunque la possibilità di una riflessione metacognitiva e la possibilità di una conoscenza organica di un periodo storico e della comprensione delle situazioni culturali che hanno influenzato la nascita o la diffusione di un'idea matematica, fino a come la utilizziamo noi oggi. Il metodo storico potrà essere allora un modo e la storia un luogo dove cercare una risposta ai problemi che sono essenzialmente epistemologici, nel senso che incoraggia il soggetto alla conoscenza nella sua globalità, sia esso colui che insegna oppure colui che al quale viene insegnato.

Interdisciplinarietà

L'uso della storia può aiutare a riflettere e a percepire la natura della matematica come processo socioculturale, può aiutare a comprendere il ruolo che la matematica gioca nella società umana: la scelta di argomenti storici può essere effettuata in modo tale da offrire un altro punto di vista e un altro ambiente di lavoro quando si affrontano certe problematiche del programma. Accanto a fatti matematici, infatti, lo sviluppo storico della stessa richiede ovviamente una certa attenzione ai fatti storici più di tipo generale (come note biografiche o relative al contesto storico-sociale-filosofico entro il quale certe idee matematiche si sono sviluppate): in questo senso la storia della matematica può costruire un efficiente modo di attraversare altre discipline, e quindi di offrire una prospettiva culturale ai nostri studenti di tipo interdisciplinare (soprattutto quando abbiamo a che fare con studenti del liceo).
Seguendo Bertin (*Educazione ed Alienazione*, 1973), si possono ritrovare tre principali motivazioni legate all'esigenza di un'impostazione interdisciplinare nell'insegnamento: la prima di carattere epistemologico-scientifico, di carattere pedagogico-didattico la seconda, ed infine la terza di carattere etico-sociale. La prima motivazione è legata al fatto che il progresso del sapere ha comportato la sua differenziazione in una molteplicità crescente di discipline, e pertanto la necessità di una specializzazione nello studio di ciascuna in vista del suo approfondimento: l'esigenza interdisciplinare è rivolta a combattere da un lato la frammentazione e la diversificazione di linguaggio derivanti da siffatta molteplicità, talvolta portata ad estremi esagerati; mentre dall'altro può essere rivolta ad osservare quel processo stesso del sapere che tende a congiungere più discipline, risultanti complementari nel corso dell'indagine, accoppiandole fra loro (ad esempio psicologia sociale, chimica-fisica), o aggregandole in gruppi unificati dall'oggetto cui esse convergono (ad esempio: le scienze dell'educazione), o inserendole in unità disciplinari più comprensive – ricordiamo fra l'altro che è solo dall'Ottocento che inizia questa specializzazione, prima le discipline non erano così profondamente divise come lo sono ora, e molti matematici e fisici erano anche filosofi, così come molti letterati erano grandi appassionati di scienze : l'interdisciplinarietà è parte della storia stessa della scienza ,della cultura, della letteratura, degli eventi storici. Il carattere pedagogico-didattico dell'interdisciplinarietà è rivolto invece a contrastare quell'insegnamento svolto mediante discipline prive di reciproco collegamento, impartite da insegnanti differenti e ciascuno fornito di preparazione specialistica, che favorisce nel discente una formazione intellettuale incapace di unificare con uno sforzo autonomo e personale la molteplicità degli aspetti in cui l'esperienza si presenta, e quindi proclive a lasciarsi imporre dall'esterno forme e modi dell'unificazione medesima, o a rinunciare ad essa: in questa direzione l'intelligenza, anziché potenziarsi, rischia di perdere la sua capacità critica e dinamica. Infine, sempre in questo quadro di comprensione unitaria del mondo dell'esperienza (inteso nella sua duplice dimensione, naturale ed umana), l' interdisciplinarietà può assumere un significato etico-sociale in funzione di un rapporto dialettico tra conoscenza ed azione, tra teoresi e prassi, che permetta all'uomo di utilizzare la conoscenza per la costruzione di una realtà sempre più aperta alle sue immense risorse creative.

Legato al tema dell' interdisciplinarietà ritroviamo un altro tema a lungo dibattuto a proposito dell'uso della storia nell'insegnamento della matematica: quello dell'opportunità di usare fonti originali. Pur concedendo che la lettura di un testo antico può costituire un ostacolo, che comunque con una buona mediazione dello storico professionista (il docente in questo caso) può essere in parte aggirato, l'uso delle fonti introduce comunque una grande suggestione nel lavoro in classe, oltre ad aiutare a contestualizzare la matematica e a mettere a fuoco concetti matematici, inoltre, avvicinandosi al modo di lavorare sia del matematico che dello storico, fornisce spunti di lavoro interdisciplinare, come mostrato in alcuni studi di Grugnetti. Inoltre ci sembra che con questo uso di fonti originali la matematica, ancor più della letteratura e della storia stessa, si presti a stabilire un contatto con il passato e con il contesto culturale e sociale, quindi non solo a sottolineare ancora di più quell' interdisciplinarietà, ma anche a mostrare le differenze che separano il nostro sapere istituzionalizzato da quello che era "istituzionalizzato" in un altro contesto storico e sociale. Inoltre a mio avviso, utilizzare fonti storiche accuratamente scelte, può aiutare gli studenti a superare un altro ostacolo tipico nell'apprendimento della matematica, ovvero quello dei differenti registri di linguaggio. Nel passato non si faceva uso di un linguaggio fortemente simbolico come quello da noi utilizzato oggi, ma piuttosto si utilizzava il registro retorico, o in altri casi grafico: utilizzare fonti appropriate può aiutare gli studenti in questi passaggi da diversi registri, e talvolta forse anche ad apprezzare maggiormente il nostro linguaggio simbolico, proprio per la difficoltà del "decifrare" scritture matematiche scritte in forma retorica.

Metodo didattico

Fra i vantaggi che può trarre soprattutto l'insegnante dalla conoscenza della storia e l'applicazione di essa in ambito didattico, c'è quello per cui conoscere il metodo storico fa percepire e maturare, nell'insegnante, convinzioni e riflessioni scientifiche, oltre che relative ad aspetti epistemologici e ontologici dei concetti matematici, e dunque didattiche. Inoltre permette di abbandonare l'idea diffusa che i progressi matematici abbiano un andamento di tipo lineare, e con essi anche l'apprendimento degli studenti che ricalca per lo più l'andamento dei progressi storici: alla luce di ciò, il metodo storico allora potrà aiutare l'insegnante anche nella parte di ingegneria didattica, per creare un percorso che, richiamando gli stessi processi e passi dell'evoluzione storica del concetto, possa facilitare l'apprendimento, anche prevedendo gli eventuali ostacoli che possono sorgere ad un certo punto, e quindi attuando strategia volte al superamento degli stessi. L'analisi storica mostra l'ondeggiare degli autori fra differenti ipotesi e metodi: questo fatto dovrebbe favorire agli insegnanti un metodo didattico orientato all'esplorazione e alla discussione in classe. L'insegnamento è influenzato dalle concezioni dei docenti a proposito della natura della conoscenza scientifica e della sua evoluzione: appare dunque fondamentale che un insegnante si confronti direttamente con la storia della disciplina e che giunga a saper impiegare i riferimenti storici consapevolmente e coerentemente con le proprie concezioni epistemologiche.

Motivazione

Questo vantaggio legato alla motivazione rientra innanzitutto nell'ambito dell'utilizzo della storia dal punto di vista di un approccio aneddotico che, pur essendo talvolta considerato superficiale, può rinforzare in termini apprezzabili la motivazione dei discenti. Citare aneddoti e storie relative ai personaggi che hanno creato la matematica, o la scienza più in generale, serve a umanizzare quei nomi che altrimenti restano spesso solo come nomi di teoremi: "umanizzare la matematica" anche presentando l' uomo matematico (o fisico, o scienziato in generale) che è vissuto in una dimensione storica reale e radicata nel tempo, che è stato uomo "normale" come noi tutti, con aneddoti di vissuto legati alla sua vita; raccontare gli scontri, le diatribe, i problemi che sorgevano sia dal punto di vista pratico che matematico, può non solo aiutare gli studenti a non sentirsi così lontani ed estranei alla materia di studio, ma può fargliela percepire come una materia non riservata a poche menti "elette", ma essendo stata fatta da uomini normali, da uomini normali potrà essere capita.

Spaesamento

Un'idea molto interessante sull'efficacia dell'uso della storia della matematica è quella proposta da Barbin nel 1994 che riguarda lo "spaesamento". L'introduzione della storia della matematica nel corso del regolare insegnamento del programma scolastico, vuol dire sostituire le abitudini e gli argomenti abituali con qualcosa di nuovo, e quindi mettere in discussione le proprie percezioni, proprio grazie al cambiamento dalla routine. Esattamente come quando ci si trova in un paese straniero, o in un luogo sconosciuto, dopo un momento iniziale di smarrimento, si mettono in atto tentativi di riposizionamento ed orientamento, accompagnati ovviamente da una maggiore attenzione. Così attraverso lo spaesamento iniziale dovuto all'introduzione della storia in una lezione classica di matematica, l'attenzione e i meccanismi messi in atto per ovviare al disorientamento e quindi volti a riposizionarsi ed orientarsi, favoriscono la nascita dell'opportunità di ripensare, forse anche con una maggiore consapevolezza, alle proprie idee sulla natura degli oggetti matematici e sui processi per la loro costruzione. Per lo studente la necessità di riposizionarsi sarà un'occasione per aumentare la propria attenzione, e l'introduzione di un elemento di novità potrà aiutarlo a chiedersi qualche cosa di più su quegli oggetti matematici che spesso vengono assunti passivamente dallo studente. Ma quest'azione di spaesamento assume un ruolo particolare per l'insegnante, spesso migliorandone la professionalità: come esperto di concetti acquisiti già da lungo tempo, molto spesso l'insegnante perde la flessibilità e l'abitudine di tornare indietro dal prodotto finale che egli ha già acquisito e fatto proprio, ritornando al processo costruttivo che lo ha generato, cioè di passare dall'ambito formale e sistemato a quello informale delle idee ancora ad uno stato grezzo. Introdurre pertanto un ragionamento matematico che sta dietro ad un passaggio storico può diventare un mezzo per analizzare le difficoltà degli studenti da un punto di vista diverso da quello classico, ma soprattutto può ricordare all'insegnante che quei concetti per lui ormai così facili non lo sono stati all'inizio del processo storico, e quindi non lo potranno essere per i nostri studenti.

Capitolo I.2

Aspetti negativi della storia della matematica nella didattica

Ovviamente l'introduzione della storia della didattica non è la panacea della risoluzione dei problemi di insegnamento e apprendimento: se da un lato la storia può essere utile per alcuni dei motivi illustrati in precedenza, dall'altro un utilizzo troppo spinto, o non perfettamente integrato e consapevole della storia, può creare danno all'insegnamento. Vediamo anche in questo caso di passare in rassegna i principali pericoli di un uso non corretto della storia della matematica.

Aggiunta, non integrazione

Affinché la storia della matematica abbia risvolti positivi è essenziale che essa si trovi ad essere integrata nel corso dell'insegnamento, e non aggiunta, altrimenti sortirebbe come unico effetto un appesantimento del programma curricolare. Affinché questo possa accadere è necessario che la storia faccia parte della cultura dell'insegnante: se non abbiamo questa cultura integrata nell'insegnante, quindi se la parte di storia non viene perfettamente integrata nel corso di matematica, ma aggiunta, verrà percepita dagli studenti non certo come uno strumento utile ed interessante per il loro apprendimento (spesso già molto difficoltoso e poco incentivato), quanto piuttosto come una cosa in più da dover studiare e sulla quale essere interrogati. In questo caso la storia non può fornire alcun valore aggiunto al processo di insegnamento /apprendimento, ne dal punto di vista dell'insegnante ne tanto meno da quello dello studente: occorre essere molto attenti a non fare percepire agli studenti la parte di storia come un'aggiunta al programma, altrimenti si otterrà l'effetto contrario, ovvero una storia percepita come una questione pesante ed inutile, come spesso gli studenti percepiscono la stessa storia generale. Non dobbiamo rischiare di aggiungere ai nostri studenti una serie di aneddoti e nozioni che loro possono percepire separate dal resto del programma di matematica, altrimenti penseranno di avere un'altra parte da studiare, noiosa tanto quanto la storia e con le stesse complicazioni che la matematica si porta dentro per la maggior parte degli studenti. Anche qualora la parte di storia della matematica riguardi lo specifico argomento matematico che si sta trattando (perché purtroppo ho talvolta visto inserire parti di storia della matematica tramite asettiche dispense fornite dal docente, nemmeno inerenti alla parte di programma trattato), occorre che l'insegnante si preoccupi di integrarla alle spiegazioni, non di aggiungerla o di trattarla come affare poco rilevante, quindi nemmeno di separarla in qualche modo, onde evitare accuratamente che lo studente la percepisca come qualcosa di inutile, come l'ennesima trovata dell'insegnante per farli studiare di più.

Esagerazione

Inserendo la storia della matematica all'interno della didattica, un altro aspetto negativo che può affacciarsi è quello di "lasciarsi prendere un po' la mano" e finire con l'esagerare con il presentare fatti storici e aneddoti : un' abbondanza in questo senso rischia di fare perdere allo studente il senso della storia della matematica, ovvero come questa possa servire per migliorare e approfondire la comprensione della matematica stessa. Inserire parti di storia perdendo la prospettiva sulla storia stessa che stiamo insegnando, senza un'attenzione esplicita alle ragioni per cui si vuole studiare i suoi contenuti o senza dimostrazione dei benefici che se ne possono trarre, svuota completamente la storia del ruolo che ha senso assegnarle per creare un'istruzione matematica che enfatizzi l'abilità del capire e della consapevolezza della conoscenza.

Concezioni epistemologiche docenti

Considerare un concetto matematico attraverso la sua evoluzione storica richiede l'assunzione di posizioni epistemologiche impegnative da parte dell'insegnante: la stessa selezione dei dati storici non è neutra e problemi notevoli sono inoltre connessi alla loro interpretazione, inevitabilmente condotta alla luce dei nostri attuali paradigmi culturali, mediante i quali si pongono in contatto culture e punti di vista indubbiamente diversi. L'insegnamento è senza dubbio influenzato dalle concezioni dei docenti a proposito della natura della conoscenza scientifica e della sua evoluzione: appare dunque fondamentale che un insegnante che decida di confrontarsi direttamente con la storia della disciplina, giunga a saper impiegare i riferimenti storici consapevolmente e coerentemente con le proprie concezioni epistemologiche, per non rischiare di creare egli stesso confusione nell'apprendimento dei suoi studenti, magari mostrandogli aspetti epistemologici non perfettamente coerenti fra quanto spiegato a livello concettuale in senso stretto e quanto legato ad un aspetto storico.
L'insegnante pertanto non può e non deve pensare alla storia come a qualcosa che lo può sostituire nell'organizzazione del suo insegnamento, come a qualcosa su cui poggiarsi passivamente per generare la conoscenza negli studenti: per poter avere effetti positivi, è necessario che la storia faccia parte integrante della cultura dell'insegnante, e che questo sia ben formato relativamente alla genesi di una nozione o di una teoria, in modo tale che possa scegliere come e quando applicare la storia affinché questa possa realmente migliorare e facilitare l'apprendimento e la comprensione degli allievi, ed eventualmente svilupparne le capacità critiche. Se la conoscenza della storia non è radicata profondamente nella cultura dell'insegnante, il suo utilizzo non porterà gli effetti positivi desiderati, anzi rischierà di peggiorare l'apprendimento andando a creare nuovi ostacoli, sia di natura epistemologica, sia di difficoltà di lettura qualora si decida di utilizzare fonti non appropriate o non guidate i modo opportuno.

Nuovi Ostacoli

L'insegnamento della matematica ha e deve avere come oggetto la matematica: l'inserimento della storia della matematica all'interno dell'insegnamento deve essere rivolto essenzialmente all'insegnamento dell'oggetto matematica, nel senso che non deve rischiare nella maniera più assoluta di far percepire agli studenti uno spostamento dell'attenzione sull'oggetto studiato, dalla matematica alla storia. L'insegnante deve essere sempre molto attento a non spostare l'attenzione dall'oggetto di studio desiderato, quando si appoggia ad artefatti per aiutarne la didattica, a quello dell'artefatto stesso, perché se l'artefatto è usato per semplificare ed aiutare, lo studente lo renderà più volentieri oggetto del proprio apprendimento, proprio perché più agevole e meno faticoso : la storia deve portare alla conoscenza migliore e facilitata del concetto matematico, non della storia del concetto. Il rischio che si corre con un uso non dominato della storia della matematica è quindi quello di andare a creare confusione nei discenti relativamente all'oggetto del loro studio, e una confusione in questi termini non fa altro che accrescere e creare nuove difficoltà nell'apprendimento della disciplina: la "magia" creata dalla storia non sarà più dunque quella illustrata all'inizio, che porta ad una nuova emozione e a un nuovo modo più positivo, motivato e propositivo di apprestarsi alla conoscenza dei concetti matematici, ma diventerà una magia che crea nuove difficoltà e nuovi ostacoli. Ad esempio, mostrare l'evoluzione di un concetto matematico nel corso dei secoli, anziché favorirne la comprensione, potrebbe portare gli studenti a crearsi più idee diverse, magari contrastanti fra loro, dello stesso oggetto, perché non riescono a percepirne bene la profonda ed intrinseca evoluzione; o ancora il mostrare le convinzioni storiche legate a un concetto potrebbe far si che lo studente si appropri solo di un aspetto dell'evoluzione, senza andare a completarlo con la conoscenza finita, perché per loro è sufficiente e comodo quello cui sono arrivati; oppure potrebbero percepire la richiesta di imparare la matematica nella sua evoluzione storica come un'ulteriore questione inutile: molto spesso gli studenti ritengono che la matematica non gli servirà mai nella vita, la stessa cosa se la ripetono quando si trovano a studiare la storia in senso stretto, unire queste due cose, se l'insegnante non è bravo a sottolinearne e a trasmetterne l'utilità epistemologica e culturale, rischia di creare un'accoppiata ancora più rilevante di questioni percepite dai ragazzi come totalmente inutili.

Capitolo I.3

Ostacoli epistemologici e il ruolo della storia in didattica

«Mi sembra interessante analizzare in dettaglio le differenti difficoltà
che incontrano gli studenti nel corso dell'apprendimento della matematica.
Alcune di queste difficoltà si reggono solo sul fatto che esistono dei salti mentali,
senza che questi salti entrino violentemente in contraddizione
con i concetti e le competenze formate precedentemente. Delle altre, al contrario,
formano degli ostacoli epistemologici importanti e duraturi...
Non si salta un ostacolo epistemologico,
lo si analizza, per cambiare idea
e capire la relazione tra la concezione nuova da formare e quella precedente...
Il modo in cui la matematica viene insegnata può rendere
più o meno agevole il superamento di questi ostacoli:
esistono delle presentazioni che rafforzano gli ostacoli epistemologici
invece che facilitarne il superamento. Si può allora parlare di ostacoli didattici»

- G.Vergnaud, 1989 -

Uno degli aspetti in cui molti studi di didattica relativi all'applicazione della storia si sono concentrati, è proprio quello che riguarda i vantaggi che l'uso della storia può apportare alla didattica al fine di aiutare gli studenti a superare e ad abbattere gli ostacoli di tipo epistemologico. Fra gli ostacoli che possiamo incontrare nell'insegnamento ritroviamo infatti questa categoria solitamente chiamata di "ostacoli di tipo epistemologico" :questi sono in pratica quegli ostacoli che dipendono dall'evoluzione dei concetti, dalla loro accettazione critica, dal linguaggio in cui vengono espressi . In quest'ottica epistemologica appare ovvio pensare alla storia come al riferimento paradigmatico per eccellenza per capire l'evoluzione delle idee e le necessità di adeguamento del pensiero : la storia della matematica costituisce dunque il riscontro oggettivo per capire l'epistemologia.
Storia ed epistemologia sono strettamente intrecciate tra loro, ed il loro sistema lo è con la didattica della matematica. Tanto che si potrebbe seguire la via aperta da Kant e caldeggiata da Lakatos, che conia un nuovo motto in evoluzione di quello kantiano:

"La didattica della matematica senza relazioni con
la epistemologia e la storia
è come uno strumento agile e potente che nessuno sa usare a pieno;
l'epistemologia e la storia sono mezzi culturali forti, astratti e profondi
che la didattica della matematica rende concreti ed utili
al progresso dell'umanità,
alla costruzione di competenze,
alla consapevolezza del proprio sapere."

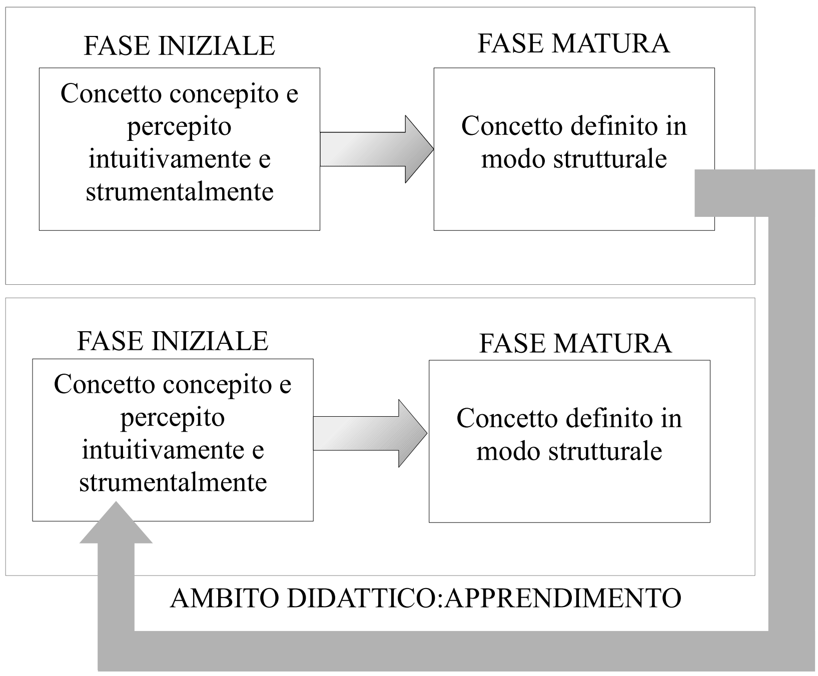
I commenti relativi a questa forte presa di posizione a favore dello stretto legame fra la storia e l'epistemologia all'interno della didattica della matematica, sono del tutto superflui.
L'epistemologia studia l'evoluzione dei concetti, quindi per sua natura non è pensabile scinderne gli

studi da quelli di storia della matematica: i risultati dell'analisi storica, possono essere utilizzati per avere informazioni sulla comprensione matematica da parte degli studenti. Questo modo di procedere si basa sull'opinione che la conoscenza dell'evoluzione concettuale storica di alcuni oggetti matematici aiuti a superare gli ostacoli epistemologici che incontrano gli studenti approcciandosi ad essi, proprio perché nel loro piccolo devono seguire lo stesso processo di costruzione che è avvenuto, spesso con tempistiche molto dilatate, nel corso della storia della matematica, e altrettanto spesso le difficoltà a superare gli ostacoli per la costruzione del sapere istituzionalizzato che abbiamo oggi, sono le stesse che hanno dovuto superare i matematici del passato.
La "conoscenza istituzionalizzata" risulta essere l'ultima versione, dal punto di vista cronologico, del sapere considerato, dunque la sua più recente forma accettata dalla comunità scientifica: da ciò segue che l'istituzionalizzazione alla quale facciamo riferimento viene ad essere fortemente contestualizzata dal punto di vista storico; e tale contestualizzazione è connessa ai diversi ambienti socio-culturali (Bagni, 2004). A questo punto entra però in gioco la componente storica: è infatti rarissimo (o forse impossibile) che una conoscenza matematica nasca da un'idea assolutamente nuova, priva di connessioni con l'esperienza del passato: per molti versi una conoscenza incorpora in sé stessa le proprie radici storiche.
Quale rapporto collega dunque la conoscenza istituzionalizzata alla propria storia?
Tale problematica ci spinge ad un'indagine più approfondita della struttura storica di una conoscenza matematica che, come vedremo, potrà influenzare notevolmente la didattica. Seguendo D'Amore (2001), potremmo ad esempio chiederci: il progressivo incremento del sapere può essere assimilato ad un processo di affiancamento (accumulazione quantitativa) o di sovrapposizione (qualitativa)? Ovvero: la reimpostazione di un oggetto matematico si affianca alle vecchie versioni o le rimpiazza? (D'Amore 2001).
Per quanto riguarda l'aspetto didattico per descrivere il Sapere specifico di una certa conoscenza K, è necessario procedere alla sua trasposizione didattica, cioè in sapere insegnato. In questa trasformazione un ruolo di fondamentale importanza è rivestito dall'epistemologia: in questi termini ci possiamo quindi chiedere ulteriormente quale ruolo andiamo a riconoscere, in questa fase, alla storia della conoscenza K che ci apprestiamo a insegnare. In particolare, come si differenziano le modalità della trasposizione della conoscenza K istituzionalizzata al momento in cui si considera il processo di insegnamento-apprendimento, da quelle della trasposizione dei riferimenti che costituiscono la "storia di K"? Come dice Gadamer, in questo caso, il punto cruciale è costituito dalla trasposizione della "storia di K", e si possono indicare due scelte possibili (seguendo ancora D'Amore):

1. la trasposizione di K(1), K(2), ..., K(n–1) con riferimento al contesto C(n) in cui stiamo effettuando la nostra spiegazione (*attualizzazione*);
2. la trasposizione di K(1),K(2), ..., K(n–1) con riferimento ai rispettivi contesti C(1) C(2), ..., C(n–1) nei quali comparivano i passi successivi della conoscenza K (*contestualizzazione storica dei riferimenti*).

Ciascuna opzione si basa evidentemente su assunzioni epistemologiche impegnative e presenta, dal punto di vista didattico, aspetti delicati: certamente sarebbe accettabile proporre didatticamente un'evoluzione storica dall'unico punto di vista moderno, e questa concezione permetterebbe di mostrare agli studenti i principali ostacoli epistemologici incontrati nel passato e chiarire alcune posizioni storiche la cui debolezza si è mostrata in un momento successivo, ma una proposta didattica di questo tipo mostrerebbe comunque uno sviluppo isolato della matematica, decontestualizzato per così dire dal proprio periodo storico, e questo è difficilmente sostenibile dal punto di vista epistemologico. D'altro canto, un'impostazione didattica che pretenda di far seguire allo sviluppo cognitivo un percorso modellato sull'evoluzione storica (Piaget, Garcia, 1983) incontrerebbe difficoltà teoriche e qualche dubbio fondazionale.
Indipendentemente da come si decida di effettuare la trasposizione storica, la maggior parte delle

ricerche mostra che la storia della matematica in generale può essere impiegata con esito favorevole nella trasposizione didattica dal sapere scientifico a quello effettivamente utilizzato nel processo di insegnamento-apprendimento.
In questi termini (seguendo in particolare Bagni,2001), si può ipotizzare una sequenza di almeno due macro fasi: la prima riguarda la fase in cui il concetto è percepito solo a livello intuitivo e strumentale, la seconda invece si riferisce alla fase matura in cui il concetto viene definito in modo strutturale. Fra le due, dal punto di vista storico-cronologico, possono intercorrere anche diversi secoli (come vedremo in particolare per il concetto di limite) : ma queste due fasi possono essere rilevate in maniera analoga dal punto di vista didattico, ovvero in una prima fase gli studenti si accostano intuitivamente ad un concetto matematico, senza avere di esso una comprensione completa e sviluppata, e solo in un secondo momento l'apprendimento che si va a creare diventa più completo e maturo. Possiamo riassumere queste fasi nel seguente schema, in cui si mostra evidente l'analogia che può sorgere nel passaggio didattico dalla fase iniziale alla fase matura nell'apprendimento degli studenti, nei quali possono sorgere gli stessi dubbi, le stesse reazioni, le stesse difficoltà che possiamo riscontrare nella formazione del sapere scientifico istituzionalizzato come lo abbiamo oggi. Inoltre la freccia grigia mostra come possiamo utilizzare il sapere scientifico già formalizzato e fondato per creare ed indirizzare il sapere appreso dagli studenti già nella prima fase intuitiva:



A proposito degli ostacoli epistemologici che l'utilizzo della storia della matematica, con il suo sviluppo accostabile a quello della conoscenza degli studenti, può aiutare a superare, è interessante la classificazione che ne fa Bkouche in un articolo del 2000.
Egli distingue tre tipi di questioni epistemologiche che possiamo riscontrare nel corso della storia che ha portato alla costruzione della conoscenza come l'intendiamo oggi, e quindi della didattica:

- epistemologia dei fondamenti
- epistemologia dei funzionamenti
- epistemologia delle problematiche

Nel primo tipo di problemi epistemologici ritroviamo fondamentalmente due questioni: la prima è relativa agli oggetti matematici e quindi alla loro ontologia, e come ad esempio questi, in un'ottica di filosofia empirista, possono essere considerate astrazioni derivate da conoscenze sensibili; la seconda questione invece riguarda la matematica delle relazioni, o meglio la sua forma analitica e l'analisi del linguaggio che porta ad esplicitare le diverse forme di ragionamento. All'interno dell'epistemologia dei funzionamenti troviamo invece l'analisi delle procedure sia sul piano propriamente tecnico che su quello di tipo concettuale, e i problemi che sono legati all'applicazione di tali procedure. A quest'ultimo aspetto legato ai problemi dell'utilizzo di determinate procedure, si riallaccia l'ultimo tipo di epistemologia identificata da Bkouche, e forse anche la più interessante a mio avviso soprattutto dal punto di vista didattico, ovvero quella legata alle problematiche. L'epistemologia delle problematiche infatti analizza come e quali problemi hanno condotto l' uomo a crearsi quella che oggi possiamo chiamare conoscenza scientifica, perché come dice Max Weber

«la costruzione dei concetti dipende dal modo di porsi i problemi.»

É attraverso i problemi, ovvero per risolvere problematiche di diversa natura, infatti, che si è costruito il metodo scientifico, ed è dentro al carattere di questi problemi e della loro formulazione che si può cercare di comprendere come si sono implementate le teorie più o meno sofisticate che costituiscono la scienza; le problematiche fanno parte della costruzione della scienza, in quanto esse rappresentano anche una sistematizzazione e una organizzazione della conoscenza. Questo aspetto a mio avviso è particolarmente importante in quanto molto spesso una domanda che si pongono i ragazzi è quella del perché devono studiare determinate cose, e anche qualora riescano a pervenire ad una risposta più o meno esauriente, e non di tipo passivo o rassegnato, alla loro mente se ne affaccia subito un'altra molto più profonda, e che riguarda il perché si è sentita la necessità di costruire questi tipi di sapere. E se il sapere scientifico relativo a discipline quali chimica, biologia o scienze naturali, meno spesso quello relativo alla fisica, riesce per lo più a trovare una risposta in quanto vedono e toccano con loro mano gli sviluppi, medici o tecnologici ad esempio, al quale si è pervenuti dall'applicazione di tale sapere, per quanto riguarda il sapere matematico la sensazione degli studenti è quasi sempre quella di un sapere inutile ai fini pratici, un sapere fine a se stesso e non mosso da problematiche contingenti e reali. Per questo, a mio avviso, analizzare il percorso storico anche dal punto di vista dell'epistemologia delle problematiche può aiutare moltissimo nella didattica, soprattutto per migliorare quella sfera di motivazione allo studio e all'apprendimento matematico che troppo spesso manca ai nostri ragazzi.

Un ultimo aspetto molto interessante sul quale si sono focalizzate numerose ricerche in campo didattico, riguarda l'aspetto epistemologico delle rappresentazioni che si possono conferire ad un particolare concetto matematico, ed in particolare alle evoluzioni dei queste rappresentazioni dal punto di vista storico-epistemologico. Anche in questo caso lo sviluppo storico dei diversi registri di rappresentazione può essere visto in un'ottica di parallelismo con quanto accade allo sviluppo, anche in termini di difficoltà legate alle diverse rappresentazioni di uno stesso concetto, dell'apprendimento nella mente degli studenti, e come tale può mostrare un modo per superare gli ostacoli incontrati dai nostri studenti nell'usare, coordinare e legare fra loro differenti registri.
In questa prospettiva le varie e complesse interazioni fra storia e didattica richiedono importanti e delicate assunzioni epistemologiche, forse ancora di più che per trattare lo sviluppo dei concetti (come ad esempio in Radford, 1997) : per esempio diventa rilevante la scelta dei dati storici da proporre, e possono sorgere numerosi problemi collegati all'interpretazione, perché in termini di registri si fanno ancora più forti i legami con i diversi stadi dell'evoluzione storica e culturale, con le istituzioni e credenze legate alla propria cultura e alla propria epoca (basta pensare ad esempio a quanto ci è proprio per noi fin da piccoli l' utilizzo di un linguaggio simbolico matematico diverso da quello retorico della scrittura e della parlata, cosa che fino all'Ottocento non è così diffuso e impregnato in ambito scientifico e matematico).

PARTE II

STORIA DEL CONCETTO DI LIMITE MATEMATICO

Introduzione

La storia del concetto di limite matematico è senza dubbio una storia molto complessa, piena di risvolti che vanno ben oltre al problema della definizione rigorosa di limite : il concetto di limite nasce in modo "naturale" quando si cerca la migliore approssimazione, e in questi termini positivi ne possiamo trovare traccia già in tempi antichi nel metodo di esaustione e nel problema della quadratura del cerchio o della parabola, poi inizia ad insinuarsi, seppur in modo non esplicito, nell' opera di Leibniz che segna la nascita del calcolo differenziale. Dalla nascita del calcolo alla definizione di limite ε-δ come la usiamo noi oggi passano circa 238 anni (Leibniz, 1684 – Moore e Smith, 1922), nel corso dei quali il concetto di limite, apparentemente molto intuitivo a pensarci bene, deve attraversare un lungo processo di formalizzazione, che riguarda non solo una problematica di tipo metodologico con cui affrontare rigorosamente tutta l' analisi matematica, ma anche l' accostamento, e talvolta la sovrapposizione e la mescolanza, ad altri grandi problemi e concetti della storia della matematica, come quello di funzione, ed in particolare a quello delle funzioni continue, e a quello ancora più ampio e profondo del continuo in generale, che porta dentro il se il germe che condurrà alla nascita e alla definizione dell'insieme dei numeri reali.
Quello che ci proponiamo di fare in queste pagine è pertanto una panoramica storica dell'evoluzione del concetto di limite, e di come questo si va a mescolare agli altri due grandi temi, continuità e numeri reali, ai quali esso per sua natura si va a legare.

Capitolo II.1

Le “origini” antiche

Uno dei problemi tipici del calcolo integrale è quello della quadratura delle curve, o in generale delle figure : questo problema, rivolto ovviamente solo ad alcune specifiche figure, e talvolta risolto con successo, nacque nella scuola pitagorica intorno al VI secolo a.C. .
In questo tipo di problema si possono ritrovare in qualche modo le radici preistoriche di un “concetto di limite” inteso nel senso positivo del termine : cercare di avvicinarmi il più possibile con metodi certi e conosciuti a qualcosa che non potrei sapere in modo altrettanto certo, avvicinarmi pur sapendo che non avrò la soluzione esatta, ma la più vicina possibile, ovvero la migliore approssimazione. A tal riguardo si può ricordare come già Democrito di Abdera, vissuto nel V secolo a.C, e uno dei principali filosofi greci, avesse l' idea di questo concetto di “avvicinamento” estremo, senza poter raggiungere l' uguaglianza completa pur non potendo nemmeno essere ritenuti diversi : in una testimonianza di Archimede ritroviamo il seguente frammento attribuito appunto a Democrito

«Due sezioni, eseguite in un cono mediante due piani paralleli fra loro vicinissimi,
non possono risultare fra loro uguali, senza che il cono si muti in un cilindro,
né possono risultare disuguali,
altrimenti il cono presenterebbe rugosità e discontinuità»

Formalmente è il metodo di esaustione, attribuito ad Eudosso di Cnido (vissuto presumibilmente fra il V e il IV secolo a.C.), il procedimento più rigoroso e che più si avvicina al nostro concetto di limite, sempre positivamente inteso come migliore approssimazione per calcolare ciò che non potrei in altro modo : è un procedimento per calcolare aree o volumi di grandezze non equiscomponibili in altre grandezze note , che consiste nel confrontare la grandezza da calcolare con un numero finito di figure ad essa omogenee note (cioè poligoni o parallelepipedi) incluse nella data o includenti la data e a questa approssimantesi.
Di tale metodo ritroviamo la principale testimonianza negli *Elementi* di Euclide, il quale attribuisce direttamente ad Eudosso la dimostrazione per esaustione del fatto che il volume di un cono rotondo è un terzo del volume del cilindro con la stessa base e la stessa altezza, inclusa come proposizione X nel XII libro degli *Elementi*, oltre che a dare una forma euclidea al postulato su cui fonda tutto il metodo di esaustione di Eudosso (Definizione IV del V libro degli *Elementi*) , cioè che «date due grandezze, è sempre possibile trovare un multiplo dell'una che superi l' altra» , e fornire una definizione della proprietà di esaustione nella Proposizione I del X libro, che Euclide dimostra facendo uso del postulato di Eudosso :

« date due grandezze diseguali,
se si sottrae dalla maggiore una grandezza maggiore della metà,
dalla parte restante un’altra grandezza maggiore della metà,
e così si procede successivamente,
rimarrà una grandezza che sarà minore della grandezza minore [inizialmente] assunta»

Importante è comunque notare come, pur essendo questo metodo concettualmente molto simile a quanto viene fatto nel calcolo infinitesimale, nel senso che è sempre possibile avvicinarsi a una grandezza piccola a piacere a partire da una più grande mediante "rimpicciolimenti" successivi, e quindi con un' idea chiara se non esattamente di continuità quantomeno di densità della grandezza che stiamo trattando, nel metodo di esaustione, così come in tutte le sue applicazioni che portano anche a risultati esatti, non si trova mai un procedimento che corrisponda formalmente ad un moderno passaggio al limite. Sottolineiamo infatti che il metodo di esaustione si applica sempre e solo a grandezze geometriche, mai a numeri – che peraltro anticamente venivano anch'esse intesi solo come rapporti fra grandezze– ; il concetto unificante di limite, che riguarda essenzialmente l'applicazione su numeri non è presente, è pertanto non offre risultati generali : il metodo funziona applicato a casi specifici, senza avere la pretesa di estendersi a problemi di natura più ampia e generica. La relazione fra il concetto di limite e il concetto di numero, ai tempi dei rapporti fra le grandezze di Euclide, resta implicita dentro all'applicazione del metodo di esaustione : Euclide costruisce rapporti per la relazione di uguaglianza all'interno di rapporti dove rientrava l'incommensurabile π, così come Archimede utilizzava il metodo di esaustione per approssimare π. Un'altra profonda differenza, essenziale da osservare fra il metodo di esaustione e la moderna analisi infinitesimale è che, a differenza del processo di limite come viene usato oggi, il metodo di esaustione non è un procedimento analitico di ricerca che conduce ad una scoperta, bensì è solo il mezzo utilizzato per dimostrare in modo rigoroso, per assurdo, un risultato che si suppone già noto, cioè un risultato che si è intuito mediante procedimenti diversi, probabilmente spesso poco rigorosi e dettati dall'intuizione.

Il metodo di esaustione come sorta di "procedimento infinitesimale dell'Antichità" trova il culmine del suo successo nella straordinaria opera di Archimede di Siracusa (287 – 212 a.C.): egli riesce a calcolare aree, volumi, baricentri in modo geniale, spesso utilizzando tecniche molto simili a quelle di integrazione o degli indivisibili. Resta per noi ancora un mistero (Frajese dice che si potrebbe parlare di *"mistero di Archimede"*) come, e utilizzando quali metodi, Archimede riuscisse ad arrivare al risultato cercato prima di procedere a dimostrarlo per assurdo: quello che è certo è che il metodo di esaustione costituiva nella sua opera il metodo necessario per dare rigore alla dimostrazione del suo risultato, senza il quale sarebbe rimasto probabilmente risultato empirico ed intuitivo.

A titolo esemplificativo dell'applicazione del metodo di esaustione, ricordiamo la famosa dimostrazione archimedea della Quadratura della Parabola, ovvero, come scrive Archimede :

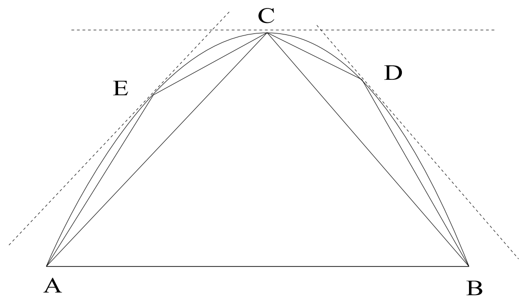
«Dimostriamo infatti che qualunque segmento compreso da una retta e da una
sezione di cono rettangolo è uguale ai 4/3 del triangolo avente la stessa
base e altezza uguale al segmento»

In questo caso Archimede è giunto alla tesi che l' area del segmento parabolico è pari ai 4/3 di quella del triangolo descritto, partendo da un postulato analogo a quello di Eudosso, seguito da due lemmi dimostrati, e poi immaginando di coprire la superficie del segmento di parabola con tanti triangoli via via più piccoli.

Postulato : " date due aree disuguali è possibile, aggiungendo a se stesso l' eccesso di cui la maggiore supera la minore, superare ogni area limitata data."

Lemma 1 : "se C è il vertice del segmento di parabola di base AB, l' area del triangolo ABC è maggiore della metà dell' area del segmento di parabola"

Lemma 2 : "Se C è il vertice del segmento di parabola di base AB e D è il vertice del segmento di parabola di base CB, l'area del triangolo CBD è 1/8 di quella del triangolo ABC"



Dato il postulato e i due lemmi, Archimede procede con l' inserimento dei triangoli all'interno del segmento parabolico: il primo triangolo inserito sarà ACB, cioè quello avente per base la stessa del segmento parabolico e per altezza quella del segmento parabolico stesso (distanza fra la base e la tangente alla base del segmento parabolico), di area A_0; successivamente si considerano i lati AC e BC come basi di altri due segmenti parabolici, e quindi si procede con un' analoga costruzione per i triangoli AEC e BDC, entrambi di area A_1 (uguale a 1/8 di A_0 per il Lemma 2) : questo procedimento si può iterare quante volte si vuole, supponiamo per un numero finito di volte n. Per il Lemma 2, si trova pertanto che ogni area è pari a un quarto di quella del triangolo trovato sul segmento parabolico precedente, poiché di triangoli se ne trovano due uguali ad ogni iterazione successiva, ovvero

$$A_0=\frac{1}{4}A_1 \quad A_1=\frac{1}{4}A_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad A_n=\frac{1}{4}A_{n-1}$$

Abbiamo così trovato che le aree dei triangoli inseriti nel segmento parabolico formano una successione geometrica : Archimede procede quindi a dimostrare un terzo lemma (una particolare proprietà delle successioni geometriche), cioè

Lemma 3 : data una successione finita di grandezze A_0, A_1, A_2, …, A_n tali che ciascuna è il quadruplo della successiva, si ha la seguente relazione

$$A_0+A_1+A_2+\ldots.+A_n+\frac{1}{3}A_n=\frac{4}{3}A_0 \qquad (1.1)$$

Ora Archimede è pronto per formulare la sua tesi da dimostrare citata precedentemente, cioè che l' area S del segmento parabolico è uguale ai 4/3 dell'area A_0 del triangolo ACB : è a questo punto che entra in gioco il metodo di esaustione, nel procedimento per assurdo volto a dimostrare che non può essere né $S > (4/3)\,A_0$ né $S< (4/3)\,A_0$.
Se fosse $S > (4/3)\,A_0$ vorrebbe dire che i triangoli inseriti non coprono pienamente il segmento parabolico, pertanto ne dovrebbe restare fuori una area ε_n, che si riduce di più della metà, per il Lemma 1, ogni volta che itero il procedimento di inserimento dei triangoli, e quindi

$$S=A_0+A_1+A_2+\ldots+A_n+\varepsilon_n>\frac{4}{3}A_0$$

ovvero

$$S = A_0 + A_1 + A_2 + ... + A_n + \varepsilon_n = \frac{4}{3} A_0 + E$$

Per il postulato enunciato, ε_n risulterà inferiore a E e quindi

$$A_0 + A_1 + A_2 + ... + A_n > \frac{4}{3} A_0$$

che è un assurdo per il Lemma 3, e quindi non può essere $S > (4/3) A_0$.
Supponiamo a questo punto che sia $S < (4/3) A_0$. Avendo due aree disuguali, applicando ancora il postulato ho che la loro differenza $(4/3) A_0 - S$ deve essere superiore all'area $(1/3) A_n$ per almeno un certo valore di n sufficientemente elevato. Applicando questa disuguaglianza alla (1.1) otteniamo pertanto

$$\frac{4}{3} A_0 = A_0 + A_1 + A_2 + ... + A_n + \frac{1}{3} A_n < A_0 + A_1 + A_2 + ... + A_n + \frac{4}{3} A_n - S$$

cioè

$$S < A_0 + A_1 + A_2 + ... + A_n$$

Quest'ultima disuguaglianza è chiaramente falsa in quanto S è l' area della parabola mentre la somma $A_0 + A_1 + A_2 + ... + A_n$ è la somma di triangoli ad essa inscritti, e quindi non possono superare l' area che li contiene.
Avendo trovato un assurdo anche per la seconda disuguaglianza, non resta che concludere che la tesi $S = (4/3) A_0$ è vera.

Abbiamo osservato come il metodo di esaustione si applichi solo a grandezze geometriche e pertanto non sia esplicita una vera e propria relazione fra l'ipotetico passaggio al limite del metodo di esaustione e il concetto di numero: secondo Bourbaki tutte le misure implicano una nozione quantomeno confusa di numero reale, quindi per lui il problema dell'incommensurabilità delle grandezze ha creato il primo riscontro della premessa del concetto di limite all'interno della geometria.
Per quanto riguarda pertanto il legame fra il concetto di limite, ovviamente ancora molto lontano, e i numeri reali, ricordiamo che Euclide tratta la teoria dei numeri dei numeri nei libri VII, VIII e IX degli *Elementi* : in questi libri il numero è in realtà sempre inteso e rappresentato da un segmento; la scoperta degli incommensurabili aveva mostrato che non tutti i segmenti si potevano associare a numeri interi, ma l'affermazione inversa, ovvero che un numero può essere sempre rappresentato da un segmento, ovviamente continua a valere, pertanto Euclide resta sempre strettamente legato ad espressioni del tipo “è misurato da” o “misura”, in modo tale da non rischiare di cadere in qualche segmento incommensurabile. La trattazione e la classificazione dei segmenti incommensurabili, Euclide la pone nel X libro, che per l'autore era uno dei libri in realtà riguardanti la geometria : le grandezze che tratta sono dei seguenti tipi, con a e b grandezze incommensurabili

$$a \pm \sqrt{b} \quad \sqrt{a} \pm \sqrt{b} \quad \sqrt{a \pm \sqrt{b}} \quad \sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$$

Osservando la natura di questi oggetti noi saremmo portati a pensare che il libro X parla dei numeri irrazionali: ma ai greci mancava la conoscenza di numero reale, pertanto per loro risultava molto più ampia e generale la trattazione di un'algebra geometrica piuttosto che aritmetica, per questo Euclide si sofferma a lungo sulla costruzione con riga e compasso di segmenti dati dalle espressioni di numeri razionali sopra esposte.

Capitolo II.2

Eredità e superamento del metodo di esaustione : gli “indivisibili”

L' importanza dell'opera di Archimede non è mai stata sottovalutata, per questo le sue opere si sono tramandate nel tempo, e quasi tutti i suoi scritti sono riusciti a superare i secoli, quando tanti altri testi sono purtroppo andati perduti.
La grande fortuna dei testi antichi in generale, in particolare delle opere di Euclide e Archimede, ma anche di grandi altri matematici antichi, si ha però nel Rinascimento, soprattutto grazie all'invenzione della stampa, che permise una diffusione dei testi e quindi della cultura, che prima era per lo più relegata ai conventi o a pochissimi eletti: ed è proprio grazie a questa diffusione dei testi antichi prima, e dei nuovi poi, grazie alla stampa, che a partire dal Cinquecento la cultura e la ricerca scientifica subiscono un'immensa accelerata rispetto i precedenti secoli medioevali.
Ricordiamo a tal proposito che la prima edizione stampata è quella della Bibbia del 1456, già nel 1480 si contavano presse tipografiche in più di 110 città europee e si è calcolato che entro il 1500 fossero già state stampate circa 35.000 edizioni di 10-15.000 testi diversi. Questo solo per mostrare la grande e velocissima diffusione di questa mitica invenzione che ha permesso la grande rivoluzione culturale del Rinascimento!
Per quanto riguarda i testi matematici antichi, nel XVI secolo ritroviamo grandi nomi che commentavano queste nuove edizioni stampate, fra cui Nicolò Tartaglia, Luca Valerio e Federico Commandino: quest'ultimo in particolare curò la prima traduzione in latino dall'originale greco (ricordiamo a tal proposito che le traduzioni medioevali venivano fatte non dai testi originali, ma da traduzioni arabe dei testi in greco) degli *Elementi* di Euclide – edita a Pesaro nel 1572 - , preceduta dalla prima edizione in greco degli *Elementi* risalente al 1533 (Basilea). Sempre Commandino curò la traduzione latina dei testi di Archimede (Venezia 1558), delle *Coniche* di Appolonio (Bologna 1566), e delle opere di Pappo (Pesaro 1588).
La riscoperta della cultura antica fa certamente da base al grande sviluppo degli scienze cui si assiste dal XV secolo : alla riscoperta degli antichi non si affianca più però solo un senso di *imitatio*, cioè di pura e semplice riproduzione più fedele possibile, ma si passa all'*aemulatio*, inizialmente con commenti e ricerche filologiche per cercare di andare oltre, quasi con un senso di competizione, che porteranno poi l' uomo del Rinascimento ad affiancare alla riscoperta anche un fortissimo “senso del nuovo” e quindi a tutte le grandi scoperte scientifiche.

In questo contesto, nel XVII secolo, per risolvere l' antico ma sempre vivo problema di tangenti e quadrature di curve, si viene a creare un nuovo metodo in sostituzione di quello di esaustione: il metodo degli indivisibili. Per certi versi questi indivisibili si possono guardare come un' evoluzione dell'antico metodo di esaustione (Archimede spesso procedeva per le sue tesi utilizzando metodi molto simili a quelli utilizzati poi da Cavalieri), mentre per altri, come affermava lo stesso Cavalieri, come un superamento di tale metodo, soprattutto per quanto riguarda l'agilità e la possibilità di condurre dimostrazioni costruttive, e non solo per dimostrare risultati cui si è arrivati per altre strade: per alcuni storici della matematica, come ad esempio Dupont, il metodo degli indivisibili si può considerare come un primo tentativo di analisi infinitesimale, fondata però su basi talmente fragili che non poteva certo riuscire a svilupparsi ulteriormente. Fra i più importanti matematici che operarono ricerche su questo nuovo metodo degli indivisibili, ricordiamo, oltre al già citato Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647), anche Johannes Kepler (1571-

1630), Gilles Personne de Roberval (1602- 1675) ed Evangelista Torricelli (1608 – 1647).
Il metodo degli indivisibili è fondamentalmente basato sul "Principio di Cavalieri" per il quale se due solidi sono compresi fra piani paralleli, ovvero se due solidi hanno uguale altezza, e se le sezioni tagliate da questi piani paralleli alle basi e ugualmente distanti da queste stanno sempre in un dato rapporto, allora anche i volumi dei solidi staranno in questo rapporto: il metodo degli indivisibili consta poi nel considerare ogni area o ogni solido suddiviso in tante sottilissime strisce, il più sottile possibile, appunto "indivisibili" : queste quantità però, pur essendo sempre private di un'attribuzione di un vero e proprio spessore, restano comunque in tutte le applicazioni dotate di una certa "quantità" distinta dalla loro lunghezza, e fra l'altro variabile a seconda della posizione nel solido.
L' idea degli indivisibili è vicina al punto di vista "differenziale", eppure manca completamente una ricerca volta a dare fondamenti della teoria e ad acquistare un reale livello di generalità per consentire un reale progresso.
Nel metodo degli indivisibili, che pur si avvicina come idea di fondo al calcolo integrale, manca completamente l' idea del passaggio al limite, proprio per quello "spessore" di cui gli indivisibili non possono liberarsi: possiamo dire che, nel corso del nostro viaggio nella storia del limite, gli indivisibili non rappresentano molto di più che un metodo pratico per calcolare alcune tangenti, aree o volumi, oltre che un timido approccio alla nascita dell'analisi infinitesimale.
C'è però un concetto che in essi si inizia ad insinuare e che si andrà strettamente ad intrecciare con il futuro sviluppo del limite, e cioè il tema del continuo: Cavalieri intitola la sua opera del 1635 in cui illustra la teoria degli indivisibili esattamente *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota,* e se non ritroviamo in questa alcuna idea di passaggio al limite, certamente è però presente l' idea che il passaggio da un indivisibile all'altro deve avvenire in modo continuo!

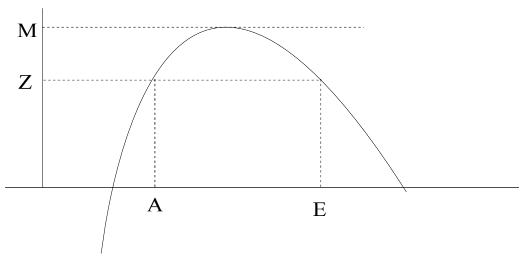
Accanto al tema del continuo, che entra comunque in modo molto indiretto nell'opera di Cavalieri, un altro concetto che proprio nel XVI secolo subisce una grande innovazione è il concetto di numero. É proprio in questo periodo infatti che si iniziano a porre le basi per la relazione fra la nozione di limite e la nozione di numero reale, cioè nel momento in cui l'oggetto "numero reale" assume un nuovo significato numerico: ci si inizia a separare dal rapporto di grandezze geometriche per abbracciare il più ampio e generico campo dell'algebra. Ricordiamo a tal proposito che in epoca rinascimentale, grazie anche all'opera degli algebristi italiani quali Tartaglia, Cardano, Ferrari e Bombelli, dalla scoperta della formula per la soluzione esatta delle equazioni di terzo grado (che segna il primo e vero momento innovativa rispetto all'algebra già nota dagli arabi dell'antichità), si era assistito ad un fortissimo sviluppo dell'algebra, che portò anche a trovare la formula per la soluzione esatta delle equazioni di quarto grado, nonché ad introdurre l'idea, seppur fosse ritenuta "assurda" anche dal suo stesso autore Bombelli, dei numeri immaginari. Le scoperte di questo periodo si fanno rientrare ancora in quel processo che va sotto il nome di geometrizzazione dell'algebra, ovvero la necessità di legare ogni grandezza ed ogni nuova scoperta algebrica a una rappresentazione e una giustificazione di tipo geometrico.
Sarà dopo l'opera di Simon Stevin del 1585, *De Thiende* , che il numero decimale assume lo stato di nozione matematica: a Stevin è dovuta l'introduzione di una nuova notazione per i numeri decimali, che permetteva di estendere a tali numeri le normali operazioni algebriche sui numeri interi, anziché usare la notazione frazionaria. L'innovazione di Stevin ha aperto la strada alla notazione decimale moderna e al concetto di "numero reale" : egli introduce sistematicamente i numeri geometrici e le funzioni polinomiali per unificare la nozione di numero e le soluzioni dei problemi algebrici della sua epoca. Stevin resta comunque ancorato ad un immagine negativa dei numeri reali, pensandoli come quantità irrazionali, inspiegabili, irregolari e assurde, perché comunque si possono approssimare con numeri decimali.
Fino alle costruzioni di Dedekind e Cantor il ruolo essenziale sarà sempre occupato dai numeri razionali: i numeri reali pertanto non vengono mai affrontati direttamente, in quanto in tutti problemi contingenti possono essere approssimati dai numeri razionali.

Capitolo II.3

Un metodo per i massimi e i minimi : l' idea di Fermat

Nel 1637 Descartes pubblicava la sua *Géométrie* in cui, fra le altre cose, illustrava il suo metodo ideato per trovare le tangenti alle curve, basato sulla rappresentazione analitica delle stesse : questo metodo, pur rappresentando una grandissima innovazione, soprattutto per quanto riguardava l' applicazione dell'algebra a problemi trattati fino a quel momento solo come puramente geometrici (algebrizzazione della geometria), e una certa generalità almeno in linea di principio, in quanto si poteva applicare a tutte le curve esprimibili per mezzo di un' espressione algebrica, non risultava di facile applicazione anche per casi abbastanza semplici, richiedendo quasi sempre lunghi e laboriosi calcoli. Proprio per questi motivi, storicamente il metodo di Descartes per il calcolo delle tangenti fu largamente criticato, mentre negli ambienti cartesiani si cercò da subito di condurre nuove ricerche volte ad apportarne migliorie : una critica molto interessante a Descartes fu mossa da un matematico non di professione, Pierre de Fermat.

Il metodo di Fermat, che fu diffuso poco dopo la pubblicazione cartesiana in una memoria dal titolo *Methodus ad disquirendam maximam et minimam,* trae origine dal problema della ricerca dei massimi e minimi per una certa grandezza variabile, e prende come spunto principale, anche per quanto riguarda le notazioni, lo studio delle opere di un altro grande matematico francese, François Viète.
Fermat parte dunque da una curva che denominiamo f della quale vogliamo trovare per esempio il massimo M.

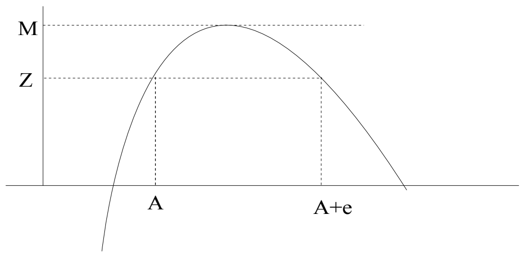


La sua idea iniziale è che, poiché se ho un massimo la curva sarà crescente a sinistra del massimo e decrescente dall'altra parte, possiamo considerare un valore Z<M assunto dalla curva corrispondente a due valori distinti della variabile indipendente, cioè f(A)= f(E)=Z , e quindi

$$\frac{f(A)-f(E)}{A-E}=0$$

Ora, se si aumenta il valore di Z, i due punti A ed E si avvicineranno sempre più, fino a coincidere quando si raggiunge con Z il valore del massimo M. Pertanto, impostando tale equazione generica con i due punti A ed E, e procedendo con le adeguate semplificazioni, volte soprattutto ad eliminare il denominatore, ed infine ponendo E=A, il risultato di A che si ottiene è esattamente quello corrispondente al valore massimo M.

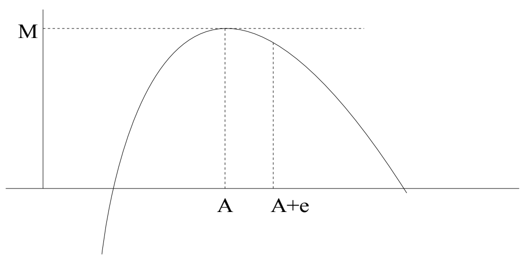
A questo punto Fermat non si ferma, fa un altro grande passaggio per estendere il metodo non solo al calcolo dei massimi e minimi, ma anche per utilizzarlo nel calcolo delle tangenti ad una curva : è questo il passaggio che probabilmente più di tutti ha influenzato Leibniz nella sua *Nova Methodus* e che segna la vera nascita della moderna analisi infinitesimale.
Il passaggio di Fermat è tanto semplice quanto geniale: invece che considerare le due soluzioni distinte A ed E dell'equazione f(X)=Z, considera solo la prima, e la seconda la vede come la prima soluzione A aumenta di una certa quantità e.



L' espressione precedente per trovare il massimo diventa pertanto :

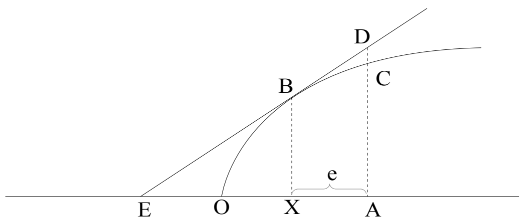
$$\frac{f(A)-f(A+e)}{e}=0 \qquad (2.1)$$

A livello tecnico, il secondo metodo illustrato non è molto diverso dal primo: semplicemente si divide per e invece che per A-E, rendendo così i passaggi delle semplificazioni più semplici, a discapito del calcolo di un' espressione, f(A+e), un po' più complicata rispetto f(E), ed infine si pone e=0. In realtà le differenze sono più profonde: se nel primo metodo era chiara l' idea di avvicinarsi al massimo ed avere le due soluzioni A ed E sempre più vicine fra loro, nel secondo caso la situazione è più ambigua in quanto viene perduta la simmetria, e quindi A diventa fin dall'inizio la soluzione che si vorrà trovare al passaggio finale e=0, cioè il massimo.



Il punto A perde così il suo carattere variabile, divenendo fin dall'inizio incognita, mentre il carattere variabile viene assunto completamente da e che perde invece quello di incognita (nel primo modo A ed E erano entrambe variabili ed incognite) : Fermat infatti a questo punto chiama l'espressione f(A)=f(A+e) *adaequatio*, cioè non un'equazione vera e propria, ma solo un' equazione approssimata, che risulterà vera solo al passaggio finale con e=0.
Questo secondo metodo si rivelò molto utile a Fermat soprattutto per il calcolo delle tangenti ad una

curva: vediamo a titolo esemplificativo come lo si può applicare per trovare la tangente ad una parabola in un suo punto B, o meglio per calcolare la sottotangente, cioè il segmento individuato dalla retta tangente sull'asse delle ascisse (EX in figura).



Dalla proprietà della parabola abbiamo che le ascisse stanno fra loro come i quadrati delle ordinate :

$$OA : OX = AC^2 : XB^2$$

Se ora invece che il punto C sulla parabola, considero il suo prolungamento fino alla retta tangente, cioè il punto D, avrò certamente AD > AC, e quindi

$$OA : OX < AD^2 : XB^2$$

Ma poiché i triangoli EXB e EAD sono simili ho anche

$$EA : EX = AD : XB$$

e quindi, quadrando l' ultima espressione e sostituendola nella precedente, si ottiene

$$OA : OX < EA^2 : EX^2$$

Ora si riscrive la precedente sostituendo i valori delle lunghezze dei segmenti per semplicità, quindi poniamo :

OX = x OA = x+e EX = t EA = t+e

e sostituendo

$$(x+e) : x < (t+e)^2 : t^2$$

A questo punto Fermat passa all'*adequazione*, cioè non considera questa espressione come una disuguaglianza, ma come un' equazione approssimata, che diventa dunque la seguente

$$\frac{(x+e)}{x} \approx \frac{(t+e)^2}{t^2}$$

ossia

$$t^2(x+e) \approx x(t+e)^2$$

Ora basta sviluppare il quadrato e le moltiplicazioni e poi semplificare, prima elidendo i termini identici e poi dividendo tutto per e : si ottiene

$$t^2 \approx xe + 2tx$$

A questo punto Fermat pone e=0, trasformando così l' *adequazione* approssimata in un' equazione in cui l' incognita è la nostra sottotangente t :

$$t^2 = 2tx$$

Dividendo infine per t troviamo la soluzione cercata : t = 2x

Il metodo di Fermat fu reso pubblico dopo la pubblicazione della *Géométrie* di Descartes poiché Fermat lo riteneva nettamente superiore a quello ideato da Descartes per calcolare le tangenti, asseriva infatti che

«il metodo non fallisce mai e può essere esteso ad un gran numero di questioni molto belle»

Dal canto suo Descartes pose numerose critiche a Fermat e al suo metodo, pur riconoscendone alla fine la superiorità: innanzi tutto osservò come Fermat non abbia spiegato qual è il nesso fra il metodo dei massimi e minimi e quello delle tangenti, inoltre Descartes riteneva che il metodo fosse stato creato ad hoc per la parabola, e quindi che applicato ad altri tipi di curve avrebbe potuto condurre a risultati erronei.
Al di là delle critiche cartesiane, il metodo di Fermat presenta un errore concettuale molto più profondo: nel momento in cui egli pone e = 0 tutte le espressioni perdono di significato. Se consideriamo però col senno di poi l' espressione (2.1), e leggiamo quell'incremento e, non come una quantità che a un certo punto diventa esattamente nulla, ma come un intorno di A, cioè come un valore che può essere infinitamente piccolo (ovvero tendente a zero), quest'espressione diventa esattamente quella che utilizziamo per calcolare i punti stazionari di una funzione: ovviamente noi aggiungiamo il passaggio al limite facendo tendere e a 0, cosa che Fermat non accenna nella maniera più assoluta, e questo è essenziale tenerlo bene a mente: queste sono idee che iniziano ad insinuarsi fra i matematici, e il cammino per la formalizzazione e la definizione del limite è ancora lungo e pieno di complicazioni, ma le basi per l' analisi infinitesimale si stanno già profondamente insinuando!

Capitolo II.4

L' intuizione di Gottfried Wilhelm Leibniz

«In un certo senso, la matematica
Ha progredito di più grazie alle persone che si sono
distinte per le loro intuizioni
Che per i metodi rigorosi di dimostrazione.»
- Kasner -

«Era passato il momento di versare vino nuovo in botti vecchie ...
La via dell'analisi moderna si apre solo quando Newton e Leibniz,
voltando le spalle al passato,
si accontentano di cercare provvisoriamente
la giustificazione dei nuovi metodi
non in dimostrazioni rigorose,
ma nella fecondità e nella coerenza dei risultati»
- Bourbaki, 1963 -

L' affermazione di Bourbaki mi pare particolarmente adeguata per focalizzare l' attenzione su quanto accade nel '600 alla storia della matematica: dopo i secoli del Medioevo in cui non si è dato alcuno spazio alla ricerca matematica, dopo la riscoperta e lo studio dei testi del passato, dopo i primi tentativi di andare oltre alle conoscenze antiche per risolvere i grandi ed annosi problemi delle quadrature e delle tangenti, ecco che si presenta l' idea che dà vita ad una nuova matematica, l'analisi infinitesimale. E come osserva Bourbaki, questa nasce e cresce inizialmente senza quel rigore che ci aveva insegnato il metodo di esaustione, ma solo perché ci conduce a risultati coerenti e che aprono sempre nuove vie alla ricerca e al sapere non solo matematico, ma scientifico in generale grazie alle innumerevoli applicazioni di questo metodo che da subito furono evidenti.
L' analisi infinitesimale, e con essa il nostro concetto di limite (anche se non se ne farà menzione esplicita ancora per almeno un secolo), nascono dunque per le applicazioni e per i risultati cui conducono, pur senza poggiare, come invece quasi tutte le altre branche della matematica, su una solida base di definizioni e dimostrazioni rigorose: sarà solo dalla fine del Settecento che si inizierà ad avvertire il bisogno di dare rigore e fondamento alle conoscenze acquisite, ed ecco allora che accanto al filone della ricerca delle molteplici applicazioni dell'analisi, si affiancherà una ricerca volta a consolidare i principi sui quali tale strumento è fondato.

Nel 1684, sugli *Acta Eruditorum* di Lipsia, Gottfried Wilhelm Leibniz pubblica una memoria che nel titolo ricalca in qualche modo quella di Fermat, ma si pone subito con un accento di novità : *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus quæ nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus* .
Il metodo illustrato da Leibniz in questa memoria, frutto di ricerche e studi avanzati già una decina di anni prima, è per certi versi simile a quello che ideò Newton nel suo calcolo delle flussioni, ma a differenza di Newton, Leibniz si guadagna il grande merito di aver introdotto una simbologia specifica per il suo calcolo, che risulta chiara, sistematica ed efficace, oltre che poter essere applicata in modo del tutto generale. La grande idea di Leibniz, e che differenzia il suo metodo da quello flussionale di Newton che si riferiva soltanto a quantità variabili in funzione del tempo, è

quella di evidenziare nella notazione differenziale anche la variabile indipendente, e procedere così con l'attuare un processo di algebrizzazione di quel calcolo infinitesimale che da lungo tempo si insinuava nelle menti dei matematici: in questo modo Leibnitz riesce, almeno nell'applicazione pratica, a superare le difficoltà sulla concezione dell'infininitesimo attuale e sulla composizione del continuo.
Vediamo come procede Leibniz nella sua *Nova methodus*.

Alla base dello studio leibniziano troviamo quello che egli chiama triangolo caratteristico, che costruisce come segue e del quale scrive:

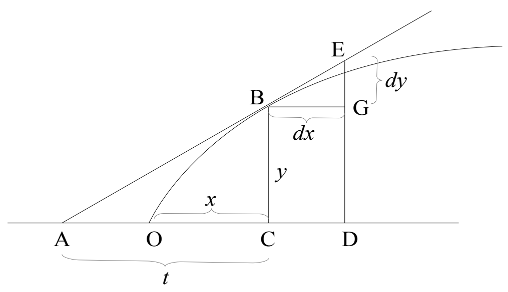
«Tutto riposa su un triangolo rettangolo,
dai lati infinitamente piccoli,
che io di solito chiamo caratteristico,
a similitudine del quale vengono costruiti altri triangoli,
dai lati assegnabili, secondo le proprietà delle figure.
Poi questi triangoli simili, confrontati con quello caratteristico,
forniscono numerosi lemmi per lo studio della figura[...]
Vi sono poche cose che non si deducano da questo triangolo caratteristico.»

Consideriamo una curva e la sua tangente in un dato punto B. Egli parte col prendere un segmento che non è a priori un infinitesimo :

"Ora un segmento, preso ad arbitrio, sia detto *dx*"

A partire da questo segmento totalmente arbitrario costruisce un triangolo simile a quello creato dalla tangente con la curva e l' asse delle ascisse, cioè ABC, e quindi considera un segmento *dy* che sta a *dx* come *t* sta a BC, che poniamo pari a *y*; quindi si ha semplicemente

$$t : y = dx : dy \qquad \Rightarrow \quad t = \frac{ydx}{dy}$$



A questo punto Leibniz va a dare le regole del suo calcolo, che sono esattamente le nostre regole di derivazione :

«Ciò posto le regole del calcolo saranno queste:

Sia *a* una quantità data costante, sarà
$da = 0$ e $dax = a\,dx$

Se abbiamo $y = v$ (ossia se un'ordinata qualsiasi della curva Y è uguale a una qualsiasi ordinata della curva V), sarà : $dy = dv$

Addizione e sottrazione

se si ha

$$z-y+w+x = v$$

sarà

$$d(z-y+w+x) = dv = dz-dy+dw+dx$$

Moltiplicazione

$$dxv = x\ dx+v\ dx$$

[…]

Divisione

posto

$$z=\frac{v}{y} \quad \text{si ha}$$

$$z=\frac{v}{y}=dz=\frac{\pm v\,dy\mp y\,dv}{y^2}$$

[...]

Potenza

$$dx^a=a\,x^{a-1}\,dx$$

[…]

Radice

$$d\sqrt[b]{x^a}=\frac{a}{b}\,dx\sqrt[b]{x^{a-b}}$$ »

A questo punto, avendo dettato le regole «di questo particolare *algoritmo*, o di questo calcolo, che io chiamo *differenziale*», come scrive lo stesso Leibniz, si può scrivere l' equazione differenziale relativa a qualunque equazione, comprese quelle trascendenti, la quale ci permette di ottenere i massimi e i minimi, come pure le tangenti «in modo che non sia necessario far sparire le frazioni o gli irrazionali, od altri vincoli». Così Leibniz ci mostra consapevolmente la superiorità del suo metodo, rispetto a tutti gli altri, non solo per il calcolo delle tangenti ad una curva in suo punto dato, basterà infatti in questo caso passare semplicemente all'equazione differenziale per mezzo delle regole descritte, ma viceversa permette l'apertura alla soluzione del problema inverso: risalire all'equazione "finita" della curva a partire da un'equazione differenziale, alla quale si perviene risolvendo la maggior parte dei problemi di geometria o di meccanica, ovvero il problema dell'integrazione di un' equazione differenziale. Al problema delle tangenti fra l'altro, nel corso dei suoi studi e delle sue ricerche, Leibniz collega in modo profondo anche un altro problema: quello delle quadrature. Egli infatti ottenne una particolare trasformazione di quadrature come applicazione del triangolo caratteristico, ovvero quello dato dai lati "differenziali" dx e dy, cui diede il nome di "trasmutazione" : e nel 1683 comunicherà al suo amico Tschirnhaus di aver compiuto un grande passo avanti relativo alla sua regola di trasmutazione, e di averne inventato anche un particolare simbolismo. Nasce così il simbolo di integrale $\int$ che sta per l' iniziale di somma, proprio per indicare la somma dei rettangoli infinitesimi inscritti nella curva che si sta quadrando: così se l è una curva, $\int l$ ne dà la quadratura, aumentando quindi in numero delle dimensioni della quantità su cui opera; allo stesso modo il suo simbolo inverso d, relativo alle quantità differenziali, ne diminuisce le dimensioni.

Quanto mostrato finora, come ben si può capire e osservare, è esattamente la base dell'analisi matematica, anche se ancora priva del suo apparato teorico e della sua struttura rigorosa, sia in termini tecnici che simbolici, che dunque nelle sue fondamenta poggia sulla grande invenzione di Leibniz: a mio avviso egli capì non solo l' importanza e l' innovazione del suo metodo, ma intuì anche la necessità che per portarlo avanti fosse necessario un ulteriore passo avanti, in primo luogo nella formalizzazione e nel simbolismo, tant'è che egli stesso lo inventa nei suoi principi base.

Per quanto riguarda in particolare la nostra storia, Leibniz non effettua mai esplicitamente un passaggio al limite, non ne fa in verità nemmeno accenno, ma da quanto scrive e dai risultati cui giunge possiamo ritenere che una qualche intuizione del concetto di limite Leibniz, e i matematici del '600 in generale, in realtà la dovessero aver carpita :

«trovare la tangente è condurre una retta che congiunga
due punti aventi una distanza infinitamente piccola,
o tracciare il lato prolungato di un poligono infinitangolo che per noi equivale a una curva.
Quella distanza infinitamente piccola è sempre nota per mezzo di qualche differenziale come *dy*,
o può essere espressa per mezzo di una relazione con questo,
cioè per via di una certa tangente nota.»

Successivamente scriverà poi:

«Quando la differenza di due casi può essere diminuita *in datis*, o in ciò che è posto,
al di sotto di una grandezza assegnata,
bisogna che tale differenza si possa trovare diminuita al di sotto di ogni grandezza assegnata
anche *in quaesitis*, o in ciò che risulta»

Oltre all'importanza già sottolineata che Leibniz attribuisce al simbolismo da utilizzare per il suo calcolo, e sulla quale si tornerà molto spesso nel corso del cammino che porta alla definizione formale del nostro concetto di limite, c' è un'altra questione per noi molto importante che Leibniz affronta in modo esplicito nella sua opera, e che nei secoli successivi si porrà come preponderante ed essenziale per lo sviluppo dell'analisi: il concetto del continuo.
In realtà Leibniz affronta l' argomento non in stretto riferimento alle sue ricerche matematiche, bensì in campo fisico, o meglio metafisico, ma l' estrazione del suo lavoro, almeno in un primo momento, appare chiaramente fondata sull'immagine e sulla geometria del calcolo: egli ipotizza un'infinita divisione della materia che può chiaramente rimandare alla divisione in parti infinitesime in cui sono state suddivise le curve, e parla esplicitamente del continuo.
Scrive nel 1675 (epoca in cui aveva già ideato il calcolo, seppur ne darà la versione definitiva alle stampe solo nel 1684) :

« è assurdo che il continuo si componga di parti minime,
perciò anche che vi siano parti di tal genere nel continuo»

«poiché vediamo che l' ipotesi di infiniti infiniti,
infinitamente piccoli,
riesce eccellentemente in geometria,
anche questo aumenta la possibilità che risponda al vero»

L' idea del continuo di Leibniz (arriverà fino ad enunciare un “Principio di continuità”) è quindi fortemente presente, e pone le sue basi proprio sul caso matematico (ci si potrebbe riferire in questo caso alla famosa affermazione di Galileo per cui il mondo è scritto in caratteri matematici, e allora ecco che Leibniz espande la sua scoperta matematica supponendo che anche la fisica possa

rispettare gli stessi principi che funzionano per la matematica), pur non parlando esplicitamente, anche in questo caso, di continuità in ambito matematico, ma solo in ambito fisico, in particolare per questioni meccaniche relative allo studio del moto, e quindi più in generale in ambito metafisico nella sua ricerca sulle leggi che governano l' essenza e l' origine dell'universo.
Concludiamo pertanto osservando che Leibniz, esplicitamente, non ha fatto nulla per il nostro concetto di limite, eppure possiamo dire che è da lui che inizia ufficialmente la ricerca matematica relativa all'analisi infinitesimale, che poggia essenzialmente, come dirà in seguito Russel, proprio sul concetto di limite: e Leibniz, oltre a offrirci le origini di tutto, ci semina già anche i primi germi dei problemi specifici che i matematici futuri dovranno affrontare per sciogliere i nodi e le incertezze che girano intorno alla definizione e al concetto di limite: la questione della notazione e del simbolismo, che possiamo ricondurre più in generale al problema del rigore e del formalismo legato al concetto di limite, e la questione del continuo.

Grande interesse storico è spesso dato al lungo dibattito che segna la priorità della nascita del calcolo, e se l'attribuzione di essa sia da assegnare al calcolo differenziale di Leibniz sopra esposto piuttosto che quello delle flussioni illustrato nella grande opera di Newton. In questa sede non mi pare particolarmente interessante soffermarmi sulle ragioni e le questioni sollevate da questo dibattito, anche perché ormai è assodato che i due grandi matematici giunsero a conclusioni simili seguendo vie diverse, e soprattutto autonome e indipendenti l'una dall'altra. Si è qui privilegiata quella di Leibniz in quanto quella di Newton nasce da questioni di ragioni più di tipo fisico che di tipo squisitamente matematico, inoltre Newton risolve tutto utilizzando gli sviluppi in serie, pertanto il suo metodo è già chiuso e finito in se stesso: questo per lui era la sua grande forza, mentre invece si rivelò la sua debolezza, perché il lasciare aperte nuove strade per la ricerca differenziale e integrale sarà proprio la forza del metodo leibniziano, che ne permise la diffusione e la continua ricerca.
Leibniz fu matematico, filosofo, fisico e teologo: la sua opera di ampio respiro occupa campi molto vari, solo per citarne alcuni matematici, egli si occupò anche di serie numeriche, di algebra e di determinanti, di logica. Uno dei suoi contributi minori invece riguarda studi che effettuò sui numeri complessi e la sua proposta di un sistema di numerazione binaria, nonostante la scomposizione del binomio x^4+a^4 che sorprese i suoi contemporanei, poco altro è degno di nota, pertanto Leibniz non diede alcun contributo a quella questione che viaggia parallela al nostro concetto di limite, ovvero la definizione dei numeri reali, e alla questione dell'epoca relativa all'idea se i rapporti si potessero o meno considerare come numeri.

Una prima riflessione approfondita in termini di tale questione, possiamo riscontrarla invece nel metodo delle flussioni di Newton, alla base del quale si ritrova proprio una nozione di limite espressa come un rapporto astratto che egli definisce "rapporto ultimo" : scrive infatti infatti

> «Si può obiettare che l'ultimo rapporto di due quantità evanescenti non è nullo,
> perché prima che esse svaniscono, il loro rapporto non è l'ultimo
> e allorché sono svanite non ne hanno più alcuno.
> Ma è facile rispondere:[…]
> l'ultimo rapporto delle quantità evanescenti deve essere inteso come
> il rapporto fra dette quantità non prima che siano svanite e nemmeno dopo,
> ma nell'istante stesso in cui svaniscono.»

Pertanto gli ultimi rapporti appaiono come i limiti verso i quali tendono i rapporti delle quantità che si fanno via via più piccole, ma che non possono mai raggiungere. Newton definirà poi tutti i numeri come rapporti astratti, che potranno essere di tre tipi: gli interi vengono misurati dall'unità, i frazionari che sono sottomultipli dell'unità, e i reali che sono incommensurabili con l'unità.

Capitolo II.5

«Gli inizi di una geometria molto più sublime» : il Settecento

«Di tutte le scoperte che si sono mai fatte nelle scienze,
non ve n'è una così importante,
né così feconda di applicazioni,
come l'analisi infinitesimale.
A quest'epoca, le matematiche cambiano volto»
- D'Alembert, 1784 -

Leibniz, classe 1646, inizia ad interessarsi di matematica quando giunge a Parigi nel 1672 per un incarico diplomatico e lì conosce Huygens, il quale all'epoca stava conducendo i suoi studi sul pendolo. Questi, per saggiare le sue capacità il calcolo, gli affida come problema della somma di una serie, e proprio per risolverlo Leibniz inizia a studiare matematica, iniziando da l' *Opus geometricum* di Gregorio st. Vincent e l' *Arithmetica infinitorum* di Wallis. Nel '73, proseguendo la missione diplomatica a Londra, Leibniz conoscerà poi Oldenburg, Hooke e Pell.
Leibniz inizia così un periodo di intenso studio, familiarizzando con la letteratura matematica contemporanea : dalla *Géométrie* di Descartes, agli scritti di Pascal, alla *Geometriae pars universalis* di Gregory, la *Logarithothecnia* di Mercator, fino agli studi dei geometri italiani e alle problematiche degli indivisibili di Cavalieri e Roberval. E così apprende l' importanza del "triangolo caratteristico" (principalmente dalle *Lettres* di Pascal) e intorno al 1675 inizia ad ideare il suo metodo della "trasmutazione" delle curve, che è alla base del formalismo differenziale.
Leibniz ha sempre discusso delle idee che andava elaborando con fitti carteggi con altri matematici, in particolare Huygens e il suo amico Tschirnhaus, ma anche con i matematici inglesi: quando nel 1676 Leibniz torna ad Hannover, non essendo riuscito ad ottenere un incarico remunerato all'Académie des Sciences a Parigi, i concetti del suo nuovo calcolo erano già pienamente delineati. Come abbiamo visto, solo una decina di anni dopo, nel 1684, Leibniz renderà ufficialmente pubblico il suo calcolo tramite la memoria sugli *Acta Eroditorium*, la quale viene terminata dallo stesso autore con queste parole :

«e invero questi sono soltanto gli inizi di una geometria molto più sublime,
che si estende a qualunque dei problemi più difficili e più belli»»

Dopo la pubblicazione il calcolo ebbe subito un grandissimo successo e sviluppo, proprio come aveva predetto il suo autore! Fra i primi che si rivelarono entusiasti del nuovo calcolo troviamo la famiglia Bernuolli, che a partire da Jackob (1654 – 1705) fornirono una dozzina di generazioni di matematici e fisici. Jackob, insieme al fratello minore Johann, furono fra i primi esploratori del nuovo calcolo leibniziano, applicandolo con estrema facilità e successo ad innumerevoli problemi che avevano posto in difficoltà i matematici precedenti: solo per citarne alcuni ricordiamo la spirale logaritmica (della quale se ne scoprirono numerose proprietà geometriche), il calcolo dell'equazione della curva isocrona, della brachistocrona e della catenaria.
Johann Bernuolli, durante il suo soggiorno a Parigi nel 1692, insegnerà i fondamenti del calcolo al

giovane marchese Guillome François de l' Hospital, il quale pubblicherà poi i suoi insegnamenti in l' *Analyse des infiniment petit* nel 1696, che rappresentò il primo trattato sul calcolo differenziale, e rappresentò la base della conoscenza a riguardo per tutta la prima metà del Settecento.
Nella prefazione scrive il marchese de l' Hospital a riguardo del calcolo differenziale :

«L'analisi ordinaria non tratta che di grandezze finite :
questa penetra nell'infinito stesso. […]
Si può dire addirittura che questa analisi si estende al di là dell'infinito,
poiché non si limita alle differenze infinitesime,
ma scopre i rapporti delle differenze di queste differenze […]
essa non abbraccia solamente l' infinito, ma l' infinito dell'infinito,
o un infinità di infiniti.
Solo un' analisi di questa natura poteva condurci
fino ai veri principi delle linee curve»

Il metodo si diffuse così rapidamente in tutta l'Europa continentale, riscuotendo grande successo e grande interesse non solo per i risultati che andava a raggiungere, ma anche per i l'emergere di nuovi problemi e per l' intrecciarsi di soluzioni, che davano vita ad accese e costruttive discussioni sulla correttezza e sulle priorità dei risultati.

Gli unici che non ne apprezzarono la grandezza e l'innovazione, furono i matematici inglesi, che resteranno fino all'Ottocento legati alla tradizione newtoniana: nasce infatti in questo periodo la famosa e annosa diatriba sulla nascita del calcolo che Newton riteneva fosse merito suo. Ora non ci soffermeremo su tale diatriba, limitandoci a osservare come, dal punto di vista cronologico, certamente il calcolo con le flussioni newtoniane è antecedente agli studi leibniziani, ma ciò che col tempo è stato provato è la completa indipendenza della scoperta di Leibniz, soprattutto perché i due matematici avevano concezioni radicalmente diverse di ciò che stavano facendo, pur raggiungendo risultati fra loro analoghi.
Il metodo delle flussioni di Newton perviene a risultati del tutto analogo a quelli dei differenziali di Leibniz, ma partendo da punti di vista nettamente differenti : Newton lavora nell'ambito di una concezione meccanica della geometria, considerando quantità variabili in funzione di un parametro temporale, le “fluenti”, introducendo poi due nuove grandezze, dette “flussioni”, che rappresentano le velocità istantanee, che restano però quantità finite e il cui rapporto determina la tangente alla curva data. Newton non effettua dunque una radicale innovazione, ne intellettuale ne tanto meno strutturale come quella di Leibniz, restando vincolato a queste quantità finite, e non facendo ricorso ad un'idea del calcolo integrale, preferendo piuttosto utilizzare gli sviluppi in serie che, seppur introdotti in precedenza e in modo indipendente da altri matematici quali Mercatore e Gregory, trovano nell'analisi newtoniana un' estrema estensione divenendo il nucleo centrale del suo calcolo: utilizzando metodi diversi Newton riesce a dare gli sviluppare in serie di tutte le funzioni allora conosciute.

In questo breve excursus sull'origine del calcolo infinitesimale abbiamo quindi visto, e già ricordato, che il passaggio al limite non compare mai esplicitamente, anche se probabilmente il suo concetto intuitivo è già proprio della maggior parte dei matematici dell'epoca: ricordiamo a tal riguardo che i più chiari riferimenti ad un concetto esplicito di limite li ritroviamo relativamente alla nozione di limite di una successione, come ad esempio nell' *Arithmetica infinitorum* di John Wallis (1655), o nella *Geometriae speciosae elementa* di Pietro Mengoli (1659).
Per tutto il corso del Settecento, pur osservando un grandissimo sviluppo e diffusione del calcolo ideato da Leibniz, all'idea del limite, che pur probabilmente doveva esserci, non viene mai attribuita l' importanza che solo nel corso dell'Ottocento gli verrà riconosciuta, ovvero come concetto centrale sul quale fondano i procedimenti infinitesimali. Probabilmente questo avviene anche perché, per tutto il corso del Settecento, non si avverte il bisogno della formalizzazione rigorosa di questo “calcolo delle meraviglie” : è come se aprendo una strada così innovativa ed inesplorata, che

lasciava spazio a scoperte ed applicazioni sempre nuove, che permetteva di effettuare calcoli che prima non si potevano immaginare, non si pensasse a formalizzarla e darle basi rigorose, sembra come che i matematici del Settecento si accontentassero della pratica e delle meraviglie delle applicazioni del calcolo, e non pensassero che quel calcolo sublime necessitasse, come tutte le altre parti della matematica, di basi rigorose e formali, nonostante il suo fondatore si fosse preoccupato di darne quantomeno un simbolismo appropriato.

Capitolo II.6

Le critiche e il primo tentativo di definizione : l' *Encyclopédie*

«Confidai il mio imbarazzo a un famoso geometra,
che mi rispose:
"Ammettete gli infinitamente piccoli come un'ipotesi,
studiate la pratica del calcolo, e la fede verrà."
In effetti la fede è venuta:
mi sono convinto che la metafisica dell'analisi infinitesimale
è la medesima del metodo di esaustione degli antichi geometri.»
- Bossut, 1802 -

Accanto al grande successo del calcolo ideato da Leibniz, non mancarono, già dai suoi esordi, accese critiche : abbiamo visto come i matematici inglesi resteranno a lungo vincolati ad un' impostazione più di tipo newtoniana, dando vita anche a spiacevoli dispute relative all'originalità del calcolo leibniziano che si protrarranno anche oltre la morte del suo ideatore; ma le critiche non provengono solo da ambienti matematici.
Già alla fine del Seicento (1694) in Olanda venne pubblicato un opuscolo, per opera di Nieuwentijt, in cui venivano denunciate debolezze logiche nelle fondamenta del calcolo: a queste rispose lo stesso Leibniz rivendicando che il proprio calcolo era nelle sue basi analogo a quello degli Antichi, e quindi altrettanto rigoroso, solo che era più semplice *«ad intelligendum et utilior ad inveniendum»*.
Le critiche che venivano mosse al calcolo riguardavano soprattutto la natura degli infinitesimi e se si dovessero trattare come costanti, piuttosto che come variabili, o se esistessero in natura *ipso facto*, e i matematici che non abbracciarono il nuovo calcolo, oltre ai già citati anglosassoni, furono soprattutto francesi legati ai metodi geometrici antichi, fra questi il più illustre è certamente Michel Rolle (1652 - 1719), che riteneva il calcolo ideato da Leibniz una sorta di trucco molto ben riuscito. Critiche analoghe, rivolte sia al calcolo infinitesimale di Leibniz quanto a quello delle flussioni di Newton, ma formulate in modo molto più completo e convincente, vennero invece dal vescovo irlandese Berkeley: nel suo *The Analyst*, pubblicato nel 1734, egli sosteneva che i fondamenti e gli oggetti trattati dal nuovo calcolo non fossero certo più chiari dei misteri della fede, come invece gli scienziati sostenevano fossero gli oggetti matematici e scientifici in generale. Berkeley offre nella sua opera una critica dettagliata e penetrante per evidenziare debolezze, misteri e incongruenze nel calcolo, sostenendo che le cose alla fine funzionassero grazie ad una compensazione di errori. Riportiamo alcune affermazioni di Berkeley per mostrare con quanta foga egli si scagliasse contro il calcolo, ed in particolare proprio contro quelle quantità infinitesime su cui si fondava :

«concepire una quantità infinitamente piccola (ossia
infinitamente minore di una quantità sensibile o immaginabile,
o di qualunque infima quantità finita) è, a mio avviso,
al di sopra delle mie capacità.
Ma il concepire una parte di tale quantità infinitamente piccola
la quale sia ancora infinitamente più piccola della medesima, tale che, per conseguenza,

anche moltiplicata infinitamente,
non possa uguagliare la più piccola quantità finita, costituisce, come io sospetto,
una infinita difficoltà per qualsiasi uomo
[...]
Ma con quale apparenza di ragione potrà un uomo
presumere di asserire che i misteri non possono essere oggetto di fede,
quando nello stesso tempo egli è disposto ad ammettere
che misteri tanto oscuri possano essere oggetto di scienza?»

Ed a proposito dell'idea intuitiva di limite che abbiamo supposto essere già insinuata fra i matematici, e della simbologia inventata per questo nuovo calcolo, scrive ancora Berkeley :

«Niente è più facile che inventare espressioni o notazioni
per le flussioni e gli infinitesimi di primo, secondo, terzo ordine ecc.
procedendo nella medesima forma senza alcun limite, $\dot{x}$, $\ddot{x}$,ecc oppure *dx*, *ddx*, *dddx,* ecc .
A dire il vero, queste espressioni sono chiare e distinte
e la mente non trova alcuna difficoltà a pensare che possano essere continuate
oltre ogni assegnabile limite.
Ma se togliamo il velo e procuriamo di guardare dentro, se,
lasciando da parte le espressioni,
decidiamo di considerare attentamente le cose che si suppone siano espresse o denotate con esse,
scopriremo molto vuoto, oscurità e confusione;
per non dire, se non m' inganno, vere e proprie impossibilità e contraddizioni.»

«E cosa sono questi incrementi evanescenti?
Essi non sono quantità finite, non sono infinitesimi, non sono niente.
Ed allora non dobbiamo forse chiamarli spettri di quantità morte?»

Le critiche sollevate contro il calcolo fecero muovere i matematici, che in qualche modo cercarono di rispondere con motivazioni che conferissero al calcolo quel rigore del quale veniva accusato mancare. Abbiamo già menzionato Leibniz stesso che sosteneva che il suo calcolo differenziale partisse dagli stessi presupposti di rigore tipici delle trattazioni degli Antichi, e Johann Bernoulli che si schierò insieme a lui con le stesse motivazioni; tra i francesi il più vicino a Leibniz fu Pierre Varignon (1654 – 1722), che apprezzava tanto Leibniz quanto Newton. Successivamente continuarono le difese del calcolo anche da parte dei matematici del Settecento, che ne riconoscevano la grandezza e le immense possibilità applicative. Ovviamente anche in questo caso ritroviamo i due grandi filoni, ovvero i matematici inglesi che difendevano più esplicitamente il metodo delle flussioni newtoniane e degli sviluppi in serie da una parte, dall'altra i matematici continentali che invece abbracciavano i differenziali leibniziani.

Fra i matematici inglesi, uno dei più importanti, sia per i risultati ottenuti dagli sviluppi in serie che il metodo di Newton si portava dietro, sia per la forte difesa che fece al calcolo in risposta delle accuse di Berkeley, fu Colin MacLaurin (1698 – 1746) : questi nel 1742, in risposta alle accuse presentate su *The Analyst*, pubblicò il suo *Treatise of fluxions*.
Scrive all'inizio del suo trattato :

«Quando la certezza di una parte qualunque della geometria è messa in discussione,
la maniera più efficace per ristabilire la verità sulla sua piena luce e prevenire dispute,
è di dedurla da assiomi o principi primi di evidenza indiscutibile,
con dimostrazioni del tipo più rigoroso alla maniera degli antichi geometri.
Questo è il nostro intento nel trattato che segue;
nel quale non proponiamo di cambiare la nozione di flussione di Sir Isaac Newton,

ma di spiegare e dimostrare il suo metodo deducendolo per disteso
da poche verità autoevidenti, in maniera rigorosa: e, nel trattare ciò,
di fare astrazione da tutti i principi e i postulati che possono richiedere di immaginare
altre quantità che non possano essere facilmente concepite come realmente esistenti.
Non considereremo una parte qualunque dello spazio o del tempo
come indivisibile o infinitesima;
ma considereremo un punto come il termine o il limite di una linea,
e un momento come un termine o un limite del tempo.»

MacLaurin, nelle oltre 700 pagine del suo *Treatise*, si spinge oltre alla semplice difesa del metodo delle flussioni, scrivendo un vero e proprio trattato di geometria (Lagrange lo definirà «un capolavoro di geometria, che si può confrontare con tutto ciò che Archimede ci ha lasciato di più bello e ingegnoso»), ma questo non sarà sufficiente a far guadagnare al metodo di Newton il primato sul calcolo differenziale che ormai si stava spingendo verso una diffusione sempre maggiore.

Proprio a partire dalle critiche che vennero mosse contro il differenziale, ritroviamo dunque un primo tentativo di dare basi più rigorose a quel calcolo che portava a grandi risultati, ma che non era ancora dotato di solida base teorica.
A tal proposito ricordiamo la più grande opera intellettuale del Settecento, idea e frutto di quella cultura illuminista che si era diffusa in tutta Europa, ed in particolare in Francia : l' *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, progetto diretto da Dennis Diderot e Jean Baptiste Le Rond de D'Alembert, e redatto da una foltissima schiera di intellettuali dell'epoca. D'Alembert, fisico e matematico, seguì ovviamente la parte scientifica dell' *Encyclopédie*, e ne scrisse numerose voci: fra queste ritroviamo quella di "limite".
La voce relativa al limite presente nell'*Encyclopédie*, rappresenta per la nostra storia un nodo fondamentale: qui ritroviamo la prima dichiarazione della sua importanza all'interno del nuovo calcolo differenziale, oltre che un primo tentativo di sua definizione, anche se ancora vincolato all'idea del limite di una successione (ma ricordiamo che il concetto di funzione modernamente intesa si stava costruendo proprio in quei tempi grazie soprattutto all'opera di un altro grande matematico: Euler), e soprattutto ancora legato ad un linguaggio e un registro di tipo verbale, e quindi come tale legato alle possibili interpretazioni che la cultura dell'epoca ne poteva dare. Scrive D' Alembert alla voce "limite" :

«La teoria dei limiti è la base della vera metafisica del calcolo differenziale.
[…]
A dire il vero, il limite non coincide mai, o non diventa mai uguale alla quantità di cui è limite,
ma questa vi si avvicina sempre di più
e può differirne poco quanto si vuole.»

Senza stare a scendere nel dettaglio specifico delle funzioni, senza ancora aver ideato strutture e registri adatti ad esprimere con pieno rigore il nostro concetto di limite, qui si ha quasi una vera e propria definizione di quel concetto di limite che avevamo supposto che a livello quantomeno intuitivo fosse già largamente diffuso: questa ne è la sua momentanea e prima formalizzazione, o tentativo di essa, che per certi tratti non si allontana così tanto da quell' ε piccolo a piacere ("può differirne poco quanto si vuole") rispetto al quale la differenza fra la funzione calcolata e il suo limite è sempre inferiore, ma sottolineando sempre l' essenzialità di escludere x_0 stesso quando si entra in un suo intorno ("il limite non coincide mai"). In realtà poi D'Alembert prosegue nella definizione di limite esposta nella relativa voce enciclopedica, così come in un articolo pubblicato nel 1768 dal titolo *Sur les principes métaphysiques du calcul infinitésimal,* nel quale definisce l'infinito come "propriamente il limite del finito", con esempi ed applicazioni di questo concetto di limite relative esclusivamente alle successioni. Considera ad esempio la successione del tipo $1/2^n$, e mostra come la somma dei suoi termini tenda a 1, ma non possa mai fare 1, e come 1 può essere considerato l' unico limite di tale successione : scrive infatti nell'articolo del 1798

«Consideriamo questa successione infinita di numeri frazionari,
1/2, 1/4, 1/8, 1/16, e così via, diminuendo sempre della metà:
i Matematici asseriscono e dimostrano che la somma di questa successione di numeri,
se la si suppone eseguita fino all'infinito, é uguale a 1.
Ciò significa, se vogliamo esprimerci soltanto tramite idee chiare,
che il numero 1 è il limite della somma di questa successione di numeri;
in altri termini, quanti più numeri considereremo in questa successione,
tanto più la somma di questi numeri si approssimerà ad 1,
ed essa potrà avvicinarlo tanto vicino quanto si voglia.
Questa ultima condizione è necessaria per completare l'idea che è associata alla parola limite.
Difatti il numero 2, ad esempio, non è il limite della somma di questa successione perché,
qualsiasi sia il numero dei termini che si sceglie,
in verità la somma si avvicinerà sempre più al numero 2,
ma non potrà avvicinarsi ad esso tanto vicino quanto si voglia,
perché la differenza sarà sempre maggiore di 1. »

Ovviamente la definizione che D'Alembert dà del limite è ancora pregna di tutte quelle imprecisioni che solo i matematici del XIX secolo saranno in grado di eliminare: l'autore enciclopedico dà una definizione in realtà ancora fondata su un concetto intuitivo di limite, senza focalizzarsi sul definire prima i concetti sui quali basarsi, come ad esempio quello di infinitesimo, che cerca accuratamente di evitare nelle sue varie accezioni utilizzate in passato. Sottolinea infatti la loro natura assolutamente poco chiara e come tale soggetta alle numerose critiche che abbiamo visto, scrivendo a riguardo:

«una quantità o è qualcosa o è niente:
se è qualcosa, non si è ancora annullata;
se è niente, si è letteralmente annullata.
Supporre che vi sia uno stato intermedio fra qualcosa e niente,
è una pura chimera.»

Ma pur non menzionando in modo esplicito questi infinitesimi, D'Alembert si affida comunque ad un linguaggio poco chiaro dal punto di vista matematico e lontano dal rigore che da lì a poco verrà richiesto all'analisi: fra un infinitesimo di natura oscura, e un "avvicinarsi sempre di più" o un "vicino quanto si voglia" la chiarezza non è aumentata di molto!
Secondo Cornu, D'Alembert ha introdotto in modo accurato la definizione di limite proprio per evitare l'utilizzo degli "infinitamente piccoli" e degli "infinitamente grandi". Sottolinea che la quantità non può mai diventare uguale al limite cui tende, e a differenza di Newton considera i numeri solo come rapporti fra grandezze commensurabili, scrive infatti a tal proposito che solo i numeri commensurabili sono propriamente i soli e veri numeri, in effetti tutti i numeri includono l'idea di un rapporto in cui le due quantità stanno rispettivamente, mentre $\sqrt{2}$ non è un numero propriamente detto perché non si può ritrovare su una retta un punto ad esso corrispondente.
Se la discriminazione fra irrazionali e razionali conduce a non considerare gli irrazionali come numeri, questi stessi irrazionali vengono considerati da D'Alembert come limiti di numeri razionali.

Ritornando alle definizioni che D' Alembert tratta sull' *Encyclopédie*, molto interessante è anche ciò che ritroviamo alla voce "differenziale", in quanto anche questa viene definita utilizzando il limite, proprio come siamo soliti fare noi, scrive infatti :

«la differenziazione di un'equazione consiste sempre nel trovare
il limite del rapporto di due differenze finite di due variabili che compaiono nell'equazione»

Ecco come ritroviamo dunque quell'accento sull'importanza della teoria dei limiti all'interno del calcolo differenziale: Leibniz non aveva mai fatto accenno ad un passaggio al limite, ma dopo qualche decennio dalla pubblicazione della *Nova Methodus*, nella sua operazione di differenziazione compare per la prima volta il concetto di limite: in realtà per D'Alembert la differenziazione perde il suo significato più profondo, quello stesso che le aveva attribuito il suo creatore, in quanto viene ritenuta solo un modo semplice e conveniente di trattare un'entità che si sarebbe dovuta esprimere con il linguaggio dei limiti.

Capitolo II.7

Il concetto di funzione

Prima di addentrarci nel secolo che ci porterà ad avere in mano la nostra quasi definitiva definizione di limite (l' Ottocento), soffermiamoci ancora un momento sul secolo dei lumi, che ci porta, oltre al già visto primo tentativo di formalizzazione della teoria dei limiti, anche mosso dalle critiche che erano state sollevate contro il calcolo, alle ricerche e all'evoluzione di un altro fondamentale concetto per lo sviluppo dell'analisi infinitesimale, e in particolare per il nostro concetto di limite: il concetto di funzione.
Il primo a introdurre il termine "funzione" relativamente all'applicazione del calcolo alle curve, le quali richiedevano diverse operazioni effettuate sulla variabile posta sull'asse delle ascisse, fu, tanto per cambiare, Leibniz, in un manoscritto del 1673 che riportava tale termine direttamente nel titolo : *Methodus tangentium inversa seude functionibus*. Questo concetto ritorna ancora ripetutamente nella corrispondenza che Leibniz tenne con i Bernoulli fra il 1692 e il 1694: in queste epistole la terminologia utilizzata è soprattutto quella di "characteristica". Sarà Jhoann Bernoulli che in un articolo del 1718 si preoccuperà di dare una certa definizione del nuovo concetto di funzione:

«Chiamo funzione di una grandezza variabile
una quantità composta in una maniera qualunque
da questa grandezza variabile e da costanti»

Analogamente, Leonhard Euler nella sua *Introductio in analysin infinitorum* del 1748, definisce funzione come segue :

«una funzione di una quantità variabile
è un'espressione analitica composta in maniera qualunque
da questa quantità variabile e da numeri o quantità costanti»

La sua grande opera sul calcolo differenziale verrà data alle stampe nel 1755, e porterà il titolo *Institutiones calculis differentialis* : qui Euler darà una definizione più precisa di funzione

«Quelle quantità che dipendono da altre in modo tale che,
variando queste, anche quelle subiscono una variazione,
le chiameremo funzioni di queste;
questa definizione è della più ampia natura
e abbraccia in se tutti i modi con i quali una quantità può essere determinata da altre.»

Molto interessante è notare come Euler leghi subito questo concetto di funzione già più perfezionato rispetto alla prima definizione del 1748, al calcolo differenziale: proprio come se il concetto di funzione e di calcolo differenziale fossero strettamente collegati, inscindibili dato che, come egli afferma subito dopo la definizione di funzione, che la variazione di queste funzioni è alla base del calcolo

«Si presenta già qui la questione seguente:
se la quantità x aumenta o diminuisce di una data quantità,
di quanto variano delle funzioni qualunque della x,

ossia quale incremento o decremento subiscono?
[…]
La ricerca di questo genere di rapporti degli incrementi
è invero non solo di grande importanza di per sé,
ma su di essa si basa anche l' intera analisi degli infiniti.»

Ecco allora che ritroviamo per la prima volta una definizione di calcolo differenziale in cui le variabili indipendenti vengono legate al valore che la funzione va ad assumere, anche quando si passa al differenziale, e non si parla più solo di valori puntuali :

«E in questo modo siamo condotti alla definizione di calcolo differenziale,
che è il metodo di determinare il rapporto di incrementi evanescenti,
che funzioni qualunque subiscono
quando si attribuisce un incremento evanescente alla quantità variabile di cui sono funzione.»

Nelle sue *Institutiones*, Euler prosegue poi con l' illustrare il calcolo differenziale, ed in particolare la natura degli incrementi utilizzati per esse: è interessante notare come nelle parole di Euler non compare invece alcun indizio del passaggio al limite di cui stiamo cercando di ricostruire la storia. D' Alembert sosteneva che è sulla teoria dei limiti che si basa il calcolo differenziale, mentre ora Euler ne fa quasi sparire ogni traccia, considerando i differenziali come delle quantità nulle, o meglio ancora degli zeri; scrive infatti:

«invero si deve sempre tener fermo che,
essendo questi differenziali assolutamente degli zeri,
non si può dedurne nient' altro se non i loro mutui rapporti,
che certamente si riconducono a delle quantità finite.
Se del resto si stabiliscono i principi del calcolo in questo modo,
che è il solo conforme alla ragione,
vengono spontaneamente a cadere tutte le accuse denigratorie che vendono di solito indirizzate contro questo calcolo,
le quali invece manterrebbero una grande forza se i differenziali, ovvero gli infinitesimi,
non si annullassero affatto.»

Sempre nella stessa introduzione, poche righe dopo, torna anche sulle accuse sollevate da Berkeley che sostenevano che il calcolo funzionasse per una compensazione di errori: anche qui con la sua teoria Euler cerca di sottolineare che non sarà così se si considerano gli infinitesimi nel modo corretto :

«infatti se quegli infinitesimi, che si trascurano nel calcolo,
non sono zero,
ne deve necessariamente risultare un errore,
tanto più grande quanto più se ne considerano.
E se ciò non avviene,
si deve attribuire un errore al calcolo,
per il quale alcuni errori si compensano con altri errori
[…]
ciò che è stato trascurato,deve essere considerato
sempre e assolutamente come zero
e gli infinitesimi, che si considerano nel calcolo differenziale,
non differiscono da uno zero assoluto.»

Perdiamo quindi totalmente quel concetto di avvicinamento senza mai raggiungere il valore cui si tende, di cui aveva parlato D'Alembert nella definizione di limite che compariva nell'*Encyclopédie* (e che rappresenta il nostro concetto di limite almeno da un punto di vista intuitivo): ricordiamo comunque che Euler cerca si focalizza sul calcolo differenziale, mentre D'Alembert in realtà si riferiva in particolar modo ai limiti di successioni nella sua definizione, pur sottolineandone l'importanza nel calcolo differenziale.

Prima di passare ad illustrare le prime opere di formalizzazione dell'analisi, e quindi dei limiti, torniamo brevemente al concetto di funzione, che diventa centrale verso la metà del Settecento grazie ad una questione di carattere fisico-matematico: studiare le vibrazioni di una corda in un piano.
La discussione a riguardo si accese quando D'Alembert pubblicò nel 1749 sulle "Memorie" dell'Accademia delle Scienze di Berlino, un suo lavoro di un paio di anni prima: egli riuscì ad integrare le equazioni differenziali alle derivate parziali ottenute descrivendo matematicamente le forme assunte da una corda che vibra in un piano (Johann Bernoulli aveva già tentato di affrontare questo problema nel 1727, ma fornendone solo una soluzione approssimata).
Nella memoria D'Alembert considera una funzione $y = y(t,x)$ che risulta continua al variare con continuità da 0 a l della variabile x, che rappresenta appunta la lunghezza della corda: è importante osservare come l'autore sottolinea con vigore che la funzione deve essere soggetta alla legge di continuità, e contemporaneamente differenziabile due volte per poter soddisfare il problema.
Per D'Alembert rispondere alla legge di continuità si traduceva nel fatto che la funzione doveva essere data da un' unica espressione analitica.
Da queste prime affermazioni di D'Alembert, è interessante notare come, con i successivi interventi dapprima da parte di Euler, poi anche di Lagrange e Fourier, la discussione si andrà ad incentrare su una questione strettamente matematica: quella del concetto di funzione, che si intendeva allora nella definizione "standard" data da Euler , ed in particolare sulla continuità o discontinuità di queste funzioni, e di come questa entrasse nei risultati ottenuti dall'integrazione dell'equazioni differenziali.
Fu addirittura indetto un concorso dall'Accademia di Pietroburgo, nel 1787, per determinare questa natura di queste funzioni: questo fu vinto nel 1791 da L.F. Arbogast, che diede nella memoria vincente una prima definizione di funzione continua, che certamente migliora quella data da D'Alembert che si riferiva solo al tipo di espressione analitica:

«la legge di continuità consiste nel fatto che
una quantità non può passare da uno stato all'altro
senza passare attraverso tutti gli stati intermedi
che sono soggetti alla stessa legge.
Le funzioni algebriche sono considerate continue,
poiché i differenti valori di queste funzioni dipendono nella stessa maniera da quelli della variabile,
e supponendo che la variabile cresca continuamente,
la funzione subirà variazioni in modo corrispondente,
ma tuttavia non passerà da un valore ad un altro
senza passare attraverso tutti gli stati intermedi.»

Arbogast procederà poi con il distinguere due casi in cui le funzioni non rispettano questa continuità: in un primo caso può "cambiare del tutto" la "legge secondo cui la funzione dipende dalla variabile", e avremo una funzione che egli chiama *discontinua,* oppure posso avere il caso che "differenti parti di una curva non si congiungono fra loro", ed in questo caso avrò una funzione *discontigua*.
Possiamo notare come si stanno già insinuando, all'interno del calcolo infinitesimale, tutti quei concetti, che certamente sono ancora ben lontani dal rigore con cui li utilizziamo oggi, ma che

risultano necessari per la formalizzazione rigorosa di quel calcolo sublime che ha ideato Leibniz, ed in particolare per il nostro concetto di limite su cui esso fonda le sue basi.

Capitolo II.8

Verso "il rigore delle antiche dimostrazioni" : Joseph Louis Lagrange

Nel 1797 Lagrange pubblica la *Théorie des fonctions analytiques*, il cui scopo, sottolineato dal sottotitolo dell'autore stesso è mostrare i fondamenti del calcolo differenziale, "liberati da ogni considerazione di infinitesimi, di quantità evanescenti, di limiti e di flussioni, e ricondotti all'analisi algebrica di quantità finite" : come osserviamo dalle parole di Lagrange questo trattato per la storia del nostro limite non sarà particolarmente rilevante, proprio perché si cerca di liberarlo da tutte quelle idee metafisiche sulle quali aveva fondato finora. Ricordiamo però l' opera di Lagrange in questa sede perché per noi è importante per un paio di altre questioni che saranno fondamentali poi nell'Ottocento.
Innanzi tutto inizia con il dare una definizione di funzione che è più restrittiva rispetto a quella che aveva dato precedentemente Euler :

«Si chiama funzione di una o più quantità
ogni espressione del calcolo nella quale
queste quantità entrano in maniera qualunque,
insieme o no con altre quantità che si considerano come aventi dei valori dati e costanti,
mentre le quantità della funzione possono assumere ogni valore possibile.»

Dopo di che Lagrange osserva come sia i primi fondatori del calcolo, come Leibniz e Bernoulli, non si siano preoccupati di dimostrare i principi fondanti del nuovo calcolo, così come i matematici successivi, quali Euler e D'Alembert, hanno cercato di dare giustificazioni agli errori di fondo sugli infinitesimi considerandoli come assolutamente nulli : scrive infatti relativamente a ciò

«I primi geometri che hanno utilizzato il calcolo differenziale,[...]
Contenti di giungere, con i procedimenti di questo calcolo,
in una maniera pronta e sicura a risultati esatti,
essi non si sono affatto preoccupati di dimostrarne i principi.
Quelli che sono venuti dopo, Euler, D'Alembert,ecc.
hanno cercato di porre rimedio a questo difetto, facendo vedere,
mediante applicazioni particolari,
che le differenze che si suppongono infinitesime devono essere assolutamente nulle[...]»

Prosegue poi dichiarando, come aveva sostenuto Berkeley per primo nelle sue critiche al calcolo, che le cose nel calcolo come lo si stava utilizzando funzionano per una compensazione di errori, e che si necessitava di dare dei principi fondanti al calcolo affinché si potesse considerare una vera scienza, e non continuare a basarlo su queste quantità infinitesime prive di una definizione reale e rigorosa :

«Ma bisogna dire che questa idea, benché corretta di per se,
non è abbastanza chiara per servire da principio a una scienza
la cui certezza deve essere fondata sull'evidenza,
e soprattutto per essere presentata a dei principianti.»

Lagrange pertanto si propone di risolvere questi problemi riconducendo il calcolo infinitesimale ad un fondamento algebrico: considera “le funzioni che nascono dallo sviluppo di una funzione qualunque” , e di applicare poi queste funzioni per risolvere problemi legati al calcolo differenziale, liberandolo così da “ogni supposizione” e da “ogni metafisica” per fondarlo solo su un metodo di funzioni primitive e derivate, e dichiarando di poter in questo modo dare alla risoluzione dei problemi “il rigore delle antiche dimostrazioni”:

«Noi ci proponiamo in questo scritto di considerare
le funzioni che nascono dallo sviluppo di una funzione qualunque.
Daremo la legge della loro formazione e della loro derivazione
e ne mostreremo l' uso per la trasformazione delle espressioni analitiche.
Faremo in seguito l'applicazione di queste funzioni derivate
ai principali problemi di geometria e di meccanica che si collegano al calcolo differenziale
e conferiremo con ciò alla soluzione di questi problemi il rigore delle antiche dimostrazioni.
Infine, faremo valere l' identità di questo calcolo delle funzioni
con il calcolo differenziale propriamente detto e per questa via
ne dimostreremo i principi e le regole note,
in maniera indipendente da ogni supposizione e da ogni metafisica.»

Al di là dei risultati non brillanti che otterrà Lagrange (entra in un circolo vizioso partendo dal presupposto che ogni funzione si possa sviluppare in serie e da lì va a cercare le derivate, senza fra l' altro effettuare alcun tentativo per assicurarsi la convergenza della serie), l' opera di Lagrange è importante fondamentalmente per due aspetti. Il primo è il suo tentativo esplicito di dare rigore al calcolo differenziale, cosa che fino a questo punto non era mai stata fatta seriamente da nessuno, e il secondo aspetto importante della sua opera, e che segnerà lo sviluppo dell'analisi per tutto il secolo successivo, è l' impronta strettamente algebrica che Lagrange cerca di dare al calcolo: nasce qui l' inizio del distacco dell'analisi dai riferimenti di tipo geometrico, e pertanto la necessità di creare criteri autonomi di coerenza.
L'opera di Lagrange, datata 1797, ci apre dunque le porte al nuovo secolo e alla sua grande ricerca in termini di analisi infinitesimale : dare un fondamento rigoroso al calcolo, allontanandolo il più possibile dalle evidenze di tipo geometrico, per fondarlo su principi che non possano più dare adito a critiche di genere “metafisico”, quindi cercate in campo algebrico, che porteranno in definitiva a quel processo che viene chiamato “aritmetizzazione dell'analisi”, e che porrà fine ad ogni tipo di dubbio o diatriba sull'effettiva validità e potenza del calcolo infinitesimale.

Capitolo II.9

“L' età dell' oro della matematica” : l' Ottocento

Nel 1794 vennero inaugurate a Parigi l' École Polytechnique e l' École Normale Supérieure, per formare la prima tecnici e scienziati (unificò in pratica quelle che erano le varie scuole militari), la seconda per formare gli insegnanti delle scuole elementari francesi.
Su imitazione di queste due nuove istituzioni scolastiche, nel corso dell'Ottocento nacque in tutta Europa, e principalmente in Prussia, l'università modernamente intesa: ovvero un centro non solo di insegnamento e diffusione del sapere, ma un luogo di formazione del sapere stesso, cioè un luogo di ricerca, dove agli scienziati viene assicurato un posto di lavoro e uno stipendio stabile, molto di più rispetto quanto facevano le Accademie settecentesche.
La diffusione di queste organizzazioni universitarie, assegnava dunque alla maggior parte dei matematici un ruolo attivo e militante, non più solo di ricerca chiusa e fine solo alla ricerca di nuove conoscenze: nell'Ottocento quasi tutti i matematici diventano Insegnanti.
E come già aveva preannunciato Lagrange nella sua opera, occorreva dare chiarezza e principi alla scienza “soprattutto per essere presentata a dei principianti” : la riorganizzazione delle teorie matematiche in funzione della didattica è la grande spinta che porterà i matematici a ricercare, e conferire infine, quel rigore e quella struttura che da tempo si cercava. É per favorire la comprensione degli studenti si riuscirà a sistemare definitivamente tutte quelle idee che aleggiavano fondamentalmente in modo intuitivo, ma comunque sufficienti per l' applicazione e il raggiungimento dei risultati; ma ora non importa più solo raggiungere il risultato cercato per una particolare applicazione e problema, ora lo scopo diventa più nobile, più universale, più rivolto al prossimo invece che al problema: occorre far capire agli studenti la matematica, non solo fargliela applicare, e per fare questo non ci si può fondare su basi che ognuno può interpretare in modo diverso lasciando ampissimi spazi ad ogni genere di critica, come abbiamo visto era già successo, occorre dare principi solidi e rigorosi, dare dimostrazioni analitiche, legare insieme i concetti per creare una struttura uniforme ed ordinata. E per fare tutto questo è necessario riuscire ad isolare i principi fondamentali delle teorie (per l'analisi in particolare quelli di funzione, di continuità, di derivata, di limite) e da essi far discendere teoremi secondo un'organizzazione deduttiva che mostri chiaramente come le varie proposizioni siano fra loro connesse.

Oltre alla questione didattica, a mio avviso spinta essenziale per la ricerca del rigore, all'inizio del secolo XIX era comunque diffuso il senso di disagio provato dai matematici per la precarietà della loro scienza, per la quale pareva non si riuscissero a trovare fondamenti validi in generale e propri della matematica (l' analisi dell'epoca andava a ricercare le sue giustificazioni nella geometria e nella fisica principalmente). La stessa opera di Lagrange, la cui larga diffusione aveva posto, come egli aveva dettato, le serie infinite assunte come fondamento dell'analisi infinitesimale , mostrava al proprio interno circoli viziosi e passaggi poco chiari, nonostante anche Lagrange fosse stato mosso dall'idea di fare chiarezza sull'analisi.
La situazione di disagio matematico,l' inadeguatezza e la mancanza di rigore, è ben presentata nelle lettere che il giovane Abel scrive quando si trova in viaggio fra Parigi e Berlino, poli della matematica:

«Ciascuno lavora per conto suo senza occuparsi di quello che fanno gli altri.
Tutti vogliono insegnare e nessuno vuole imparare.
L' egoismo più assoluto regna ovunque»

«Gottinga ha una buona biblioteca, è vero, ma è tutto qui;
poiché Gauss è l' unico che sa qualcosa
ed è inavvicinabile.»

Abel incarna bene il sentimento di malcontento matematico, e anche il desiderio di uscirne, rintracciando la via di uscita nel fare chiarezza e dare rigore: in questo è chiara l' influenza che ha su di lui Cauchy, del quale Abel infatti scrive :

« Cauchy è matto
ma è il solo che sa come bisogna fare della matematica.
E' l' unico che oggigiorno faccia della matematica pura.»

E infatti l' obiettivo di Abel diventa molto simile a quello di Cauchy :

«Voglio dedicarmi con tutte le mie forze
a introdurre un po' di chiarezza
nella prodigiosa oscurità che
innegabilmente c' è oggigiorno in analisi.»

Abel purtroppo morirà prematuramente in Norvegia prima di ricevere la notizia di essere stato assunto come professore di matematica a Berlino.
Della sua testimonianza sul bisogno diffuso di rigore e chiarezza nell'analisi infinitesimale ne resta grande prova il *Cours d'analyse* di Cauchy, pubblicato nel 1821, di cui Abel scrive

«deve essere letto da ogni analista che ami il rigore nelle ricerche matematiche»

E lo stesso Cauchy dichiara che lo scopo della sua opera, che è in pratica la prima parte del suo corso di lezioni tenute agli studenti del primo anno dell' École Polytechnique, è

«per maggiore utilità degli studenti»

A partire dunque da Cauchy, e prima di lui già con Bolzano, si assiste così all'inizio del processo che porterà ad affermare l'analisi come branca della matematica autonoma e poggiata su principi rigorosi e profondi, e proprio la ricerca in questa direzione porterà al più grande e profondo sviluppo che la matematica in generale ha mai avuto, e con essa le grandi applicazioni in campo fisico e tecnologico alle quali ha condotto: per capire il motivo per cui l' Ottocento venga spesso designato come il secolo dell' ”età dell'oro della matematica”, basta pensare ai nomi dei grandi matematici che vi hanno militato … Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), Augustine-Luis Cauchy (1789 – 1857), Peter Gustav Dirichelet (1805-1859), Évariste Galois (1811 – 1832), Carl Weirstrass (1815 – 1897), Bernhard Riemann (1826 – 1866), Richard Dedekind (1831 – 1916), Georg Cantor (1845 – 1918), Henri Poincaré (1854 – 1912).

Capitolo II.10

La questione del metodo : Bolzano e Cauchy

La questione del metodo non è certamente una faccenda nuova in campo della ricerca matematica: ricordiamo che il primo a porsi in modo chiaro e sistematico un problema a tal riguardo fu Descartes, che nel 1637 pubblicò il suo *Discours de la méthode* come introduzione a tre ulteriori saggi scientifici, fra i quali la *Géométrie*. Proprio nell'opera di Descartes si ebbe il primo tentativo, che porterà ai brillanti risultati che abbiamo visto, di fornire metodi più rigorosi, in particolare quelli dell'algebra applicata alla geometria (egli inizia il processo che va sotto il nome di "algebrizzazione della geometria"). Dal *Discours de la méthode* nascerà quindi la grande rivoluzione scientifica che nel Seicento ha portato al grande sviluppo delle scienze in generale e della matematica in particolare: ora, riproponendosi una questione sul metodo per affrontare i nuovi problemi sorti dalla nascita dell'analisi infinitesimale, assisteremo al grande sviluppo e alla grande affermazione della matematica nell'Ottocento, che porterà alla fine del secolo a quel processo già citato di "aritmetizzazione dell'analisi", che affermerà definitivamente l' invenzione di Leibniz come una nuova e autonoma branca della matematica.

Bernhard Bolzano era un monaco boemo che si occupò diffusamente di filosofia e matematica, restando però tagliato fuori dalle principali correnti di pensiero scientifico dell'epoca. Egli pubblicò anche diversi opuscoli, molto interessanti dal punto di vista matematico e metodologico appunto, che però rimasero per lo più sconosciuti ai principali matematici dell'epoca: egli dimostrò nel 1817 il teorema che oggi chiamiamo di Bolzano- Weirstrass, proprio perchè Weirstrass lo ridimostrò per vie indipendenti nel 1851, non essendo a conoscenza della pubblicazione del primo!
Il titolo della pubblicazione di Bolzano del 1817, forse la sua più importante, riporta già l' enunciato del teorema e lo scopo del monaco : *Dimostrazione puramente analitica del teorema: tra due valori qualunque che danno due risultati di segno opposto, si trova almeno una radice dell'equazione*. E Bolzano, all'inizio dell'articolo, pone subito un fortissimo accento su un problema metodologico relativo a quanto fosse diffuso fare all'epoca: ovvero la completa mancanza di un metodo vero e proprio nelle dimostrazioni precedenti, in quanto queste si appoggiavano solo su evidenze ed applicazioni colte da altre branche della matematica, in particolare la geometria

«Non c'è assolutamente nulla da obiettare
ne contro la giustezza ne contro l'evidenza
di questo teorema geometrico.
Ma è anche del tutto manifesto che c' è qui
una mancanza intollerabile contro il buon metodo,
che consiste nel voler dedurre le verità della matematica pura (o generale),
ossia dell'aritmetica, dell'algebra o dell'analisi,
da considerazioni che appartengono a una parte applicata (o speciale) soltanto,
ossia alla geometria.»

Per Bolzano infatti è essenziale chiarire bene che cosa si intende per dimostrazione matematica: non seve seguire procedure che portino a costruire evidenze, che egli chiama "fabbricazione di evidenze", quanto piuttosto occorre dare fondamenta rigorose e reali, oggettive, non legate a concetti intuitivi o costruzioni geometriche per poter procedere ad una effettiva dimostrazione che non lasci adito a nessuna possibile controversia :

«occorre esporre i fondamenti oggettivi posseduti dalla verità da dimostrare»

Molto interessante è osservare ciò che fa Bolzano dopo aver puntualizzato che la sua dimostrazione del teorema sarà condotta solo in termini analitici, e che cosa intende di preciso con dimostrazione: egli va a definire tutto ciò che gli occorre per procedere alla dimostrazione, e lo fa nel modo più rigoroso possibile, in modo tale che nessuno potrà obiettare che si sia affidato a concetti intuitivi o metafisici, come, ad esempio, era accaduto fino a poco tempo prima per la questione della natura degli infinitesimi. E la prima cosa che Bolzano si trova a dover definire è proprio un concetto che per noi è strettissimamente legato alla definizione di limite, ovvero l' idea di continuità : e anche in questo caso prende le distanze da tutto ciò che non è strettamente matematico per dare la sua definizione di continuità di una funzione, continua infatti :

«In maniera analoga bisogna rifiutare la dimostrazione che certi ne hanno dato
a partire dal concetto di continuità di una funzione,
facendo intervenire i concetti di tempo e di movimento.[...]
I concetti di tempo e di movimento (e questi ancor di più)
sono altrettanto estranei alla matematica generale del concetto di spazio,
il che non può essere messo in dubbio da nessuno.»

E così Bolzano va a dare la sua definizione di continuità di una funzione, e per farlo utilizza, se non ancora propriamente un limite, comunque una variazione della variabile indipendente e del valore assunto dalla funzione di conseguenza:

«una funzione $f(x)$ varia secondo la legge di continuità
per tutti i valori di x situati all'interno o all'esterno di certi limiti,
nient'altro che questo:
se x è uno qualunque di quei valori,
la differenza $f(x+\omega)-f(x)$ può essere resa più piccola di ogni grandezza data,
se si può prendere ω tanto piccola quanto si vuole,
ossia quando si ha $f(x+\omega)=f(x)+\Omega$.»

Qui Bolzano sembra fare in realtà ciò che facciamo noi per dare la definizione di continuità di una funzione, pur senza entrando nello specifico del passaggio al limite: vedere le funzioni non punto per punto, ma all'interno di un intorno in cui ci si può stringere quanto si vuole vicino a prefissati valori, e qua sottolinea anche un altro fatto fondamentale per la successiva definizione di limite, ovvero il fatto che è la differenza dei valori assunti dalla funzione che si può rendere piccola a piacere, qualora sia possibile farlo sulla variabile indipendente, sembra cioè già porre l' attenzione sull'arbitrarietà iniziale non della variabile indipendente come sarebbe naturale, ma piuttosto su quella dipendente, ovvero il valore assunto dalla funzione.
Per portare a termine la sua dimostrazione Bolzano si serve poi di alcune considerazioni sulle serie infinite che aveva anticipato in una pubblicazione precedente, in cui in particolare aveva dimostrato una condizione necessaria e sufficiente per determinare sotto quali condizioni si poteva parlare di somma si infiniti addendi, e della definizione del concetto di estremo superiore di cui ne dà prova e spessore con un altro teorema che dimostra formalmente

«Teorema: se una proprietà M non appartiene a tutti i valori di una grandezza variabile x,
ma appartiene a tutti quelli che sono minori di un certo u:
allora esiste sempre una grandezza U
che è la più grande di quelle per le quali si può affermare
che tutti i valori più piccoli di x possiedono la proprietà M.»

Bolzano dunque, a partire da un problema la cui validità era da sempre evidente, ma solo a livello geometrico, pone l'accento sulla necessità di dover innanzi tutto sistemare il metodo per riportarlo sulla giusta via dell'utilizzo, per le dimostrazioni matematiche, solo questioni e teoremi presi dalla matematica stessa, e non da una particolare applicazione di essa. E per far questo Bolzano fa esattamente quello che occorreva fare, ovvero si impegna, prima di dare la sua dimostrazione analitica, a definire in modo rigoroso tutto ciò di cui si dovrà servire nella dimostrazione stessa. Bolzano è il primo esempio di matematico che incarna lo spirito dell'Ottocento, pur essendo rimasto sempre lontano dalle correnti e dalla vita scientifica ufficiale, ma degno di nota è che i grandi pilastri della nascita del rigore nell'analisi matematica, Cauchy prima e Weirstrass dopo, in realtà seguiranno un metodo analogo a quello che in silenzio aveva anticipato il monaco boemo.

Sicuramente lontano dal silenzio che accompagnò le pubblicazioni di Bolzano, si pone la grande opera di Cauchy, che nel 1821, sollecitato da influenti colleghi quali Laplace e Poisson, pubblica il suo *Cours d'analyse* “per maggiore utilità degli studenti”, essendo infatti questo la trascrizione delle lezioni del suo corso di analisi del primo anno tenuto all'École Polytechnique. Prima di entrare nello specifico dell'opera di Cauchy (che è un punto essenziale della nostra storia in quanto è lui che fonda definitivamente ed apertamente l' analisi infinitesimale sulla teoria dei limiti), poniamo l'attenzione su un aspetto più ampio dell'opera, ovvero la riflessione sul metodo : che come già abbiamo osservato diventa di fondamentale importanza per lo sviluppo della ricerca e della conoscenza, e Cauchy mostra di esserne ben consapevole.
L'introduzione del *Cours d'analyse* inizia proprio con una digressione sul metodo, in cui possiamo osservare che Cauchy prende una strada diversa da quella del suo predecessore Lagrange (ricordiamo che anch'egli, seppur con poco successo, aveva tentato di conferire all'analisi il rigore di cui mancava, cercandosi di appoggiare in particolare sull'algebra), e diversa anche da Bolzano : Cauchy ritiene che il maggior rigore spetti alla geometria piuttosto che alla più generica algebra, le cui formule possono valere solo sotto precise condizioni; ma interessante è notare come anche Cauchy osserva e ribadisce che quei concetti evidenti ed intuitivi, che all'inizio erano serviti e bastati a dare l' input per il grande sviluppo dell'analisi infinitesimale di Leibniz, ora stanno stretti all'esattezza e al rigore che spetta di diritto alle scienze matematiche in quanto tali. Non basta più il successo delle applicazioni del calcolo alla geometria e alla fisica, occorre individuarne i veri e profondi fondamenti.

«Quanto ai metodi,
ho cercato di dar loro tutto il rigore che si esige in geometria,
in modo da non ricorrere mai a dei ragionamenti
tratti dalla generalità dell'algebra.
Ragionamenti di questo tipo, […]
non possono essere considerati, mi sembra,
che come delle induzioni adatte a far talvolta presentire la verità,
ma che poco si accordano con l'esattezza tanto vantata delle scienze matematiche.
Bisogna inoltre osservare che essi tendono
a far attribuire alle formule algebriche un'estensione indefinita,
mentre in realtà la maggior parte di queste formule
sussiste unicamente sotto certe condizioni
e per certi valori delle quantità in esse contenute.»

Cauchy mostra come farà a far sparire ogni dubbio o incertezza dall'analisi, e notiamo anche come pone l' attenzione alle notazioni che utilizza,sottolineando che verranno utilizzato solo dopo averne ben chiarito il significato: non inventa nulla per così dire, ovvero giustifica ogni suo passaggio, anche quando questo richiederà l' introduzione di nuove notazioni – ed è molto importante anche per noi questo, perché qui si ha un ulteriore cambio di registro e di simbologia : come aveva fatto Leibniz per introdurre il suo nuovo calcolo differenziale, anche Cauchy si potrebbe trovare costretto ad introdurre nuovi simboli, che però andrà a "fissare in maniera precisa", cosicché non gli si potranno sollevare obiezioni di alcun genere riguardo la natura della sua simbologia, o dell'utilizzo della stessa:

«Determinando queste condizioni e questi valori,
e fissando in maniera precisa le notazioni di cui mi servo,
faccio sparire ogni incertezza;[...]
É vero che per mantenermi
costantemente fedele a questi principi,
mi sono visto costretto ad ammettere diverse proposizioni
che sembreranno un po' dure a prima vista.»

Il problema del metodo sarà ribadito dallo stesso autore anche nel 1823, quando pubblica il *Résumé des Leçons sur le calcul infinitésimal*, nel quale ancora più esplicitamente prenderà le distanze dai metodi lagrangiani, in particolare seguiti all'epoca dal suo collega all'École Ampère, mostrando la novità e l' innovazione del suo modo di porre l'analisi infinitesimale, che non si trova più fondata sulle serie, bensì sulla nuova teoria dei limiti (nuova perché fino a questo punto non solo non era mai stata formalizzata in maniera adeguata, ma anche perché, a parte un piccolo accento nelle parole di D'Alembert nella definizione di limite all'interno dell'*Encyclopédie*, non si era mai posta questa teoria sui limiti a fondamento dell'analisi):

«I metodi che ho seguito
differiscono per diversi aspetti da quelli che si trovano esposti nelle opere dello stesso genere.
Il mio scopo principale è stato quello di conciliare il rigore,
che mi ero posto come norma irrinunciabile nel mio *Cours d'analyse*,
con la semplicità che proviene dalla considerazione diretta degli infinitesimi.
[…]
Ma, malgrado tutto il rispetto che si deve ad una grande autorità,
la maggior parte dei geometri concorda
nel riconoscere l'incertezza dei risultati ai quali si può essere portati
usando le serie divergenti.
[…]
Del resto, chi leggerà il mio libro si convincerà, spero,
che i principi del calcolo differenziale e le sue applicazioni più importanti
possono essere facilmente esposti senza l'intervento delle serie.»

L'opera di Cauchy nasce con uno scopo didattico, e questo è il motivo principale che gli fa porre l'accento sull'importanza del metodo, e lo conduce ad impegnarsi ad isolare i principi fondamentali delle teorie, e da essi far discendere i teoremi secondo un'organizzazione deduttiva che mostri chiaramente la connessione fra le varie proposizioni, e quindi renda tutto di più facile comprensione: ma al di là di questo, sapendo di rivolgersi principalmente ad un pubblico di studenti e studiosi, fa anche la grande osservazione per cui la sua opera tornerà a vantaggio dell'analisi matematica non solo per la chiarezza dei risultati raggiunti che ne mostra, ma anche perché offrirà nuovi spunti per la ricerca matematica. Cauchy mostra di avere consapevolezza che solo con basi chiare e solide possiamo formare i nostri studenti nel modo migliore, per dare loro la possibilità di procedere nel campo del sapere, ma anche che l'analisi matematica è ancora un campo pieno di cose da scoprire.

«Ma quelli che leggeranno la mia opera riconosceranno, spero,
che le proposizioni di questa natura,
comportando la felice necessità di porre maggiore precisione alle teorie, […]

torneranno a profitto dell'analisi e
forniranno un certo numero di argomenti di ricerca che non sono privi di importanza.»

Infine Cauchy, ribadendo l'obiettivo principe della sua opera, cioè il perfezionamento dell'analisi per donare ad essa il metodo, la chiarezza e il rigore che le deve essere proprio, effettua, a mio avviso, un' interessantissima digressione sulla specificità del sapere matematico: questo deve restare all'interno del proprio campo, non può e non deve fuoriuscire in ambiti del sapere che non gli sono propri, da un lato proprio per non andarlo a vincolare e a legare fino a rischiare di confonderlo con le scienze e le applicazioni empiriche, dall'altro perché di sua propria natura non può occuparsi di questioni legate alla morale o alla politica, per portare gli esempi dello stesso Cauchy – ricordiamo a tal proposito che alcuni matematici dell'epoca, fra i quali spiccava il nome di Laplace, vedevano la matematica non come una disciplina dal valore particolare, ma solo come uno strumento utile per la ricerca scientifica e per problemi pratici,che talvolta arrivavano fino ad invadere campi lontanissimi dalla scienza in senso stretto, come appunto ad esempio la storia o la politica : alcuni matematici, in primis Laplace, erano cioè accesi sostenitori di quella corrente filosofica che va sotto il nome di determinismo.

«Del resto, se ho cercato da un lato
di perfezionare l'analisi matematica,
dall'altro sono lontano dal pretendere che
questa analisi debba bastare per tutte le scienze del ragionamento.
Senza dubbio, nelle scienze che si chiamano naturali,
il solo metodo che si può impiegare con successo
consiste nell'osservare i fatti
e nel sottomettere in seguito le osservazioni al calcolo.
Ma sarebbe un grave errore pensare
che non si trova la certezza che nelle dimostrazioni geometriche, o nella testimonianza de sensi.»

«Persuadiamoci dunque che esistono altre verità oltre quelle dell'algebra,
altre realtà oltre agli oggetti sensibili.
Coltiviamo con ardore le scienze matematiche,
senza volerle estendere al di là del loro dominio
e non andiamo a immaginare che si possa
affrontare la storia con delle formule
ne dare per sanzione alla morale dei teoremi d'algebra o di calcolo integrale.»

Capitolo II.11

Il *Cours d' analyse* e la prima definizione di limite

Oltre che per l' importanza attribuita al metodo e al rigore che si va cercando di attribuire definitivamente all'analisi e al calcolo infinitesimale, e alle motivazioni didattiche che spingeranno questa ricerca per tutto il corso dell'Ottocento, l'opera di Cauchy è un punto di svolta fondamentale anche nella nostra storia del concetto di limite.
Il concetto di limite diventa per Cauchy la chiave di volta su cui fondare tutte le altre costruzioni dell'analisi infinitesimale: grazie a questo concetto Cauchy può definire una volta per tutte innanzi tutto la continuità delle funzioni, e poi anche la derivata e l'integrale, la convergenza di una serie e la sua somma. Pertanto, proprio perché deve partire dai fondamenti per costruire la teoria, come prima cosa Cauchy dà la definizione di limite.
Questa definizione di limite è ancora lontana dalla simbologia che dobbiamo oggi arrivare a mostrare ai nostri studenti, ma ha già dentro di se le stesse caratteristiche che noi abbiamo tradotto in un registro simbolico ancora superiore: Cauchy non dice solo di avvicinarsi ad un certo valore, ma dà l'indicazione di come occorre avvicinarsi, non lascia quindi l'idea ad un livello intuitivo e personale, perché specifica che ci si può avvicinare tanto da poter rendere sempre più piccola la differenza, inoltre va poi a specificare chi è il limite, ovvero la grandezza alla quale ci stiamo avvicinando mantenendo la nostra differenza via via più piccola, quindi mai nulla, e quindi il valore limite in realtà, è intrinseco nella sua definizione, non si potrà mai raggiungere :

«Allorché i valori successivamente assunti da una stessa variabile
si avvicinano indefinitamente a un valore fissato,
in modo da finire per differirne di tanto poco quanto si vorrà,
quest'ultimo è chiamato il limite di tutti gli altri.
Così per esempio, un numero irrazionale è
il limite delle diverse frazioni che ne forniscono valori sempre più approssimati.
In geometria, la superficie di un cerchio è
il limite verso il quale convergono le superfici dei poligoni inscritti,
mentre il numero dei loro lati cresce sempre di più.»

Molto interessante è notare che il primo esempio fornito per mostrare i limiti siano esattamente i numeri reali: questa sarà l' idea che condurrà Dedekind a definire i numeri reali proprio servendosi del concetto di continuità e di limite.
Per Cauchy il numero è la misura di una grandezza comparata rispetto a una prescelta unità, facendo precedere il numero da un segno + o – si ottiene una quantità che esprime rispettivamente un aumento o una diminuzione rispetto il punto di partenza prescelto: Cauchy introduce in questo modo i numeri positivi e negativi, mantenendosi ancora comunque legato all'idea di numero come rapporto fra grandezze e valori esprimibili e rappresentabili sotto forma di segmenti. Dalla definizione di limite, ancora legata ad punto di vista di un'approssimazione, egli stabilisce cosa significa che una variabile x tende a un certo valore a, e da qui è quantomeno interessante notare come egli sia comunque in grado di fare una definizione di numero irrazionale.

Cauchy si serve subito della definizione di limite appena illustrata per definire e chiarire una volta per tutte che cosa si intende per infinitesimo e per infinito:

«Allorchè i successivi valori numerici di una stessa variabile
decrescono indefinitamente in modo da diventare minori di ogni numero dato,
questa variabile diviene ciò che si chiama infinitesimo o una quantità infinitesima.
Una variabile di questa specie ha zero come limite.
Quando i successivi valori numerici di una stessa variabile
crescono sempre di più,
in modo da superare ogni numero dato,
si dice che questa variabile ha per limite l'infinito positivo, indicato con ∞,
se si tratta di una variabile positiva,
l' infinito negativo se si tratta di una variabile negativa.»

E a questo punto non c'è più nulla da discutere sulla natura più o meno metafisica di quegli infinitesimi che avevano creato un sacco di disaccordi fra matematici e non solo!!
Cauchy pone la definizione di limite, e di infinito e infinitesimo direttamente nell'introduzione del suo *Cours d'analyse*, quasi come a voler sottolineare ulteriormente come siano questi i fondamenti della teoria, senza questi concetti inequivocabilmente definiti non si può nemmeno iniziare a sostenere un corso di analisi.
Nel primo capitolo poi procede con il definire altri due concetti che abbiamo visto essere fondamentali per l'utilizzo dell'analisi infinitesimale, innanzi tutto quello di funzione perché è di quelle che stiamo parlando, e insieme ad esse quello della loro continuità :

«Allorché delle quantità variabili sono legate tra loro in modo tale che,
dato il valore di una,
si possa ricavare il valore di tutte le altre,
si considerano di solito queste diverse quantità espresse per mezzo di una di esse,
che prende allora il nome di variabile indipendente;
e le altre quantità espresse per mezzo della variabile indipendente
sono chiamate funzioni di questa variabile.»

Cauchy definisce in modo analogo anche le funzioni in più variabili, e distingue le funzioni esplicite da quelle implicite, le quali si hanno

«quando si danno solo le relazioni tra le funzioni e la variabile,
vale a dire le equazioni alle quali soddisfano queste quantità,
senza che tali equazioni siano risolte algebricamente.»

Ma veniamo al più interessante concetto di continuità, del quale Cauchy ha ben presente l'importanza all'interno del calcolo infinitesimale, come egli stesso specifica prima di entrare nel merito della definizione stessa:

«Tra gli oggetti che si collegano alla considerazione degli infinitesimi,
si devono porre le nozioni relative
alla continuità o discontinuità delle funzioni.»

Specifica in queste poche parole ancora la coerenza del suo metodo: per poter procedere con il calcolo è necessario avere in mano tutti gli strumenti per farlo, e questi strumenti devono essere ben definiti. Ed il concetto fondamentale di continuità, Cauchy lo definisce poggiandosi saldamente sui suoi infinitesimi, che ora sono stati ben chiariti per poter essere appunto sfruttati per una definizione tanto importante. La definizione che troviamo nel *Cours d'analyse* di funzioni continue è praticamente già quella che noi insegniamo ai nostri studenti, esattamente dopo avergli fatto capire cosa sono i limiti di una funzione :

«Sia *f(x)* una funzione della variabile *x*,
e supponiamo che per ogni valore di *x* compreso tra due limiti dati,
questa funzione ammetta sempre un valore unico e finito.»

Quindi come prima cosa Cauchy, a differenza di tutti gli altri prima di lui che avevano cercato di dare una definizione di funzione continua, si pone in un intervallo di valori della variabile indipendente in cui la funzione è definita per tutte le *x* che vi appartengono (come diremo oggi un intervallo compreso del dominio della funzione), e per questo intende che il valore assunto dalla funzione sia unico, cosa che prima non aveva specificato in termini di definizione della funzione, e ovviamente finito, ovvero che questo valore esista in R. Una volta assicuratosi che la funzione sia definita all'interno dell'intero intervallo considerato, va a dare la definizione di continuità della funzione in quell'intervallo dei valori di *x*, considerando tutti gli elementi *x* di tale intervallo, ma definendo la continuità puntualmente in ciascun singolo elemento *x*:

«Se, partendo da un valore di *x* compreso entro questi due limiti,
si attribuisce alla variabile *x* un incremento infinitesimo *α*,
la funzione stessa riceverà per incremento la differenza
f(x+α) – f(x)
che dipenderà al tempo stesso dalla nuova variabile *α* e dal valore di *x*.
Ciò posto, la funzione *f(x)* sarà, entro i due limiti assegnati alla variabile *x*,
funzione continua di questa variabile se,
per ogni valore di *x* compreso fra questi due limiti,
il valore numerico della differenza
f(x+α) – f(x)
decresce indefinitamente insieme a quello di *α*.»

Questa è praticamente la definizione che utilizziamo noi per definire una funzione continua in un certo intervallo, ovvero continua in ogni punto dell'intervallo, utilizzando i limiti della funzione stessa; ed infatti Cauchy la ribadisce utilizzando i suoi infinitesimi :

«In altri termini,
la funzione *f(x)* resterà continua rispetto a *x* entro i limiti dati se,
entro questi limiti,
un incremento infinitesimo della variabile
produce sempre un incremento infinitesimo della funzione stessa.»

Ovvero, utilizzando i limiti per definire gli infinitesimi, questa definizione diviene appunto la nostra: ho una funzione continua in un punto quando esiste il limite in quel punto (ovvero se il limite destro e quello sinistro sono uguali e non vanno all'infinito), e il valore finito assunto dal limite è uguale al valore assunto dalla funzione in quel punto, o ancora in altre parole, una funzione è continua se muovendoci in un intorno del punto x_0, i corrispondenti valori di f*(x)* cadono in un intorno di $f(x_0)$, e per usare la simbologia che ci è propria:

$$f(x)\ \ continua\, su[a,b]\ \Leftrightarrow \forall x\in[a,b],\ \lim_{\alpha\to 0}(f(x+\alpha)-f(x))=0$$

Dentro la definizione di continuità di Cauchy, l'espressione "per ogni valore di x compreso fra i due limiti" presuppone già l'idea della continuità dell'intervallo stesso, vale a dire la continuità dei numeri reali, anche se in realtà l'idea di continuità di R che ritroviamo qua è ancora legata all'intuizione geometrica, che fra l'altro non va ad assicurare l'esistenza di un un numero reale come

limite di una successione di Cauchy.
Al di là di qualche pecca ancora legata alla mancanza di una vera definizione dei numeri reali che ne assicuri la relativa continuità, la definizione di continuità data da Cauchy è assolutamente innovativa rispetto le precedenti, e non lascia più spazio ad alcun dubbio relativo alla sua chiarezza, precisione e applicabilità :lo stesso autore ne è ben consapevole, come si leggerà in suo scritto del 1844 in cui affermerà, riferendosi alle definizioni di continuità date da Euler e Lagrange :

«siffatta definizione è lontana dall'offrire una precisione matematica,
[…]
se si considera la definizione di Euler e di Lagrange
come applicabile ad ogni specie di funzioni,[...],
un semplice cambio di notazione
basterà sovente per trasformare una funzione continua in funzione discontinua, e reciprocamente.
[…]
Dunque, il carattere di continuità nelle funzioni,
considerato dal punto di vista dal quale dapprima si misero i geometri,
è un carattere vago e indeterminato.
Ma l'indeterminazione cesserà se alla definizione di Euler
si sostituisce quella da me data nel capitolo 2 dell' *Analyse Algébrique*.»

Il *Cours d'analyse* continua per lunghe pagine sullo studio dei "valori singolari delle funzioni in alcuni casi particolari", ovvero dopo aver definito i punti in cui la funzione è continua, va a studiare i principali casi di discontinuità, che lo stesso Cauchy definisce

«una delle questioni più importanti e delicate dell'analisi»

Avendo ricondotto tutto al concetto di limite, ovviamente per studiare le singolarità occorrerà andarne a studiare i limiti: lo studio di questi limiti per alcune funzioni, quando la x vale zero o tende all'infinito, porta Cauchy ad individuare per la prima volta le cosiddette forme indeterminate, ovvero i limiti di quelle funzioni che si presentano nella formalizza

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ 0^{\infty},\ \infty^{0,}\ 1^{\infty}$$

Il *Cours d'analyse* continua ovviamente con il trattare tutti gli argomenti inerenti all'analisi infinitesimale, che per la nostra storia non sono particolarmente rilevanti.

Vorrei invece soffermarmi ancora un poco sull'opera di Cauchy per un'altra grande definizione che egli fornisce sempre utilizzando il concetto di limite: la definizione di derivata. Anche in questo caso Cauchy, nel *Résumé des Leçons sur le calcul infinitésimal* , ci mostra come egli spiegava il concetto di derivata ai suoi studenti esattamente come facciamo noi con i nostri! Egli considera infatti una funzione continua in un certo intervallo nel quale considera un singolo valore della variabile indipendente, e di questa ne considera un incremento: questo determina il "rapporto alle differenze", quello che noi oggi chiamiamo rapporto incrementale, ovvero il rapporto fra la variazione subita dalla funzione in seguito all'incremento e l'incremento stesso. Definito tale rapporto ne va a considerare l'incremento infinitesimo, cioè effettua il limite di tale rapporto al tendere a zero dell'incremento, ed osserva che, pur essendo entrambi i fattori del rapporto tendenti singolarmente a zero, il loro rapporto in generale potrà avere un altro limite.

«Allorché la funzione $y=f(x)$ si mantiene continua tra due limiti dati della variabile x
e si assegna a questa variabile un valore compreso tra i due limiti in questione,
un incremento infinitesimo attribuito alla variabile

produce un incremento infinitesimo della funzione stessa.
Di conseguenza, se si pone allora $\Delta x = i$,
i tue termini del rapporto alle differenze

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

saranno delle quantità infinitesime.
Ma, mentre questi due termini si avvicinano indefinitamente e simultaneamente al limite zero,
il rapporto stesso
potrà convergere verso un altro limite, sia positivo che negativo.»

Da questa osservazione Cauchy va a definire derivata esattamente come il risultato del limite di questo rapporto delle differenze appena definito, specificando che ovviamente deve esistere: è una funzione anch'essa proprio perché è diversa per ogni valore particolare di x, quindi varia con x stesso, ed è comunque legata alla funzione di partenza, per questo appunto la chiama derivata.

«Questo limite, quando esiste,
ha un valore determinato per ogni valore particolare di x;
ma esso varia con x.
Così per esempio,
se si prende $f(x) = x^m$, m designando un numero intero,
il rapporto fra le differenze infinitesime sarà

$$\frac{(x+i)^m - x^m}{i} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} i + \ldots + i^{m-1}$$

e avrà per limite la quantità $m\, x^{m-1}$,
ossia una nuova funzione della variabile x.
Lo stesso accadrà in generale;
solamente la forma della nuova funzione che servirà da limite al rapporto

$$\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

dipenderà dalla funzione proposta $f(x)$.
Per indicare questa dipendenza,
si dà alla nuova funzione il nome di funzione derivata
e la si designa, per mezzo di un accento, con la notazione
y' o $f'(x)$.»

Abbiamo riportato gli aspetti per noi più significativi della grande svolta formale e sostanziale che segna l'opera di Augustin Louis Cauchy nella storia dell'analisi matematica: la definizione di limite e il suo divenire colonna portante di tutta l'analisi, osservando in particolare come di questo si sia servito per sciogliere ogni dubbio e incertezza su altri aspetti fondamentali, quali gli infinitesimi, la continuità e la derivata di una funzione, nonché a definire i numeri irrazionali. Possiamo dunque attribuire a Cauchy il grande merito di essere riuscito nel suo intento di donare all'analisi un impianto rigoroso fondato su definizioni precise e basato su dimostrazioni che non avevano nulla a che vedere con l'applicazione delle teorie a casi particolari o evidenti: egli riesce a dare all'analisi l'impostazione moderna che conosciamo oggi, nella quale il limite viene considerato come il concetto fondamentale. Cauchy rappresenta dunque l' evoluzione e il perfezionamento concettuale di quell'idea intuitiva del limite che avevamo già visto diffondersi, a livello quantomeno intuitivo, dal Seicento in poi. É importante sottolineare, come si legge dalle parti delle opere che abbiamo qui riportato, che tutte le definizioni di Cauchy sono espresse in un registro rappresentativi ancora di tipo verbale. Egli introduce effettivamente nuovi termini e nuove notazioni, come ad esempio quella di derivata, ma è ancora lontano dall'esprimere le sue definizioni nella forma simbolica che insegniamo oggi ai nostri ragazzi: per avere questo definitivo passaggio occorre attendere ancora qualche anno e l'opera di un altro grande matematico, Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1897).

Osserviamo ancora che, per quanto riguarda il processo storico della numerizzazione dei rapporti, ed in particolare dei rapporti geometrici, che dovrà in qualche modo portare alla creazione dell'insieme dei numeri reali, l'opera di Cauchy sottolinea in modo sempre più profondo il legame di questo processo con l'evoluzione della nozione di limite: a questo punto resta ancora da risolvere il problema dell'esistenza del limite reale per tutte le famiglie di segmenti (sia commensurabili che non) e quello della continuità dell'insieme dei numeri reali indipendentemente dall'intuizione geometrica ad esso legata.

Capitolo II.12

Le “raffinatezze matematiche” di Weierstrass

«I matematici non si sono mai messi d'accordo
sulla materia che studiano
e tuttavia si suppone che la matematica
sia la scienza delle verità
assolute, eterne, indiscutibili.»

- Lebesgue -

La grande opera di Cauchy, seppur grandiosa ed estremamente innovativa, non ancora fu sufficiente a conferire all'analisi matematica il rigore di cui necessitava: a partire dalla metà del XIX secolo, la grande mole dei risultati ottenuti dalle applicazioni dell'analisi, se da un lato abbagliava per i grandi successi raggiunti, dall'altro conduceva i matematici più attenti alle questioni metodologiche a convincersi sempre di più di quanto precari fossero i fondamenti dell'intera analisi. Anche la costruzione eretta da Cauchy, che inizialmente aveva rassicurato i matematici, pare non bastare più, pare non essere abbastanza rigorosa nei suoi principi anche all'apparenza più sicuri, come quello di continuità di una funzione, o quello di derivabilità, o ancor di più dei rapporti fra questi due concetti, persino il concetto di funzione ritorna ad essere messo in discussione.

«La continuità è ancora un'idea confusa»

Queste le parole di Kronecker al matematico italiano Casorati recatosi a Berlino nel 1864 per apprendere le nuove tematiche dell'analisi; e ancora Casorati riporta che lo stesso matematico ritenesse

«di essere più esatto coltivando la teoria dei numeri e l'algebra.
Nell'uso dell'analisi infinitesimale
non aveva trovato l'occasione di acquistare questa esattezza.»

Weirstrass scriveva invece:

«Più rifletto sui principi della teoria delle funzioni
-cosa che faccio continuamente-
più ferma diventa la mia convinzione
che tale teoria debba essere costruita
sul fondamento di verità algebriche»

La sensazione che pare affermarsi dalla seconda metà dell'Ottocento è dunque quella di non aver ancora raggiunto le basi necessarie per donare all'analisi infinitesimale quel rigore proprio delle scienze matematiche, e di dover ricercare tale rigore abbandonando definitivamente ogni riferimento all'intuizione dell'evidenza geometrica, per rifugiarsi piuttosto nell'aritmetica dei numeri naturali.
Oltre a questo bisogno di cercare l'esistenza di un fondamento sicuro per l'intera analisi, ci sono

matematici, fra i quali Dedekind, che iniziano ad affermare anche l' importanza fondamentale dell'introduzione di nuovi concetti per lo sviluppo delle teorie.

Una delle questioni fondamentali delle quali ancora si sentiva di non potersi fidare delle definizioni date era quella di continuità delle funzioni, alla quale si collegava direttamente la definizione di funzione stessa.

Nel 1851 Riemann dava la sua definizione di continuità e di funzione reali, che in realtà non apportava grandi innovazioni se non per l'accento che per primo pone sull'unicità del valore che la funzione deve assumere per essere considerata tale :

«Se si designa con *z* una grandezza variabile
che può prendere successivamente tutti i valori reali possibili,
allora, quando a ciascuno dei suoi valori corrisponde
un solo valore della grandezza indeterminata *w*,
si dice che *w* è funzione di *z* e,
allorché *z* percorre in maniera continua tutti i valori compresi tra due valori fissati,
w varia ugualmente in maniera continua,
si dice che questa funzione *w* è continua in questo intervallo.»

Effettivamente questa definizione pare perdere anche quel po' di rigore che in Cauchy traspariva : e questa fu la grande polemica mossa dai matematici che operavano a Berlino, capeggiati da Weierstrass, contro quelli di Gottinga che invece seguivano le idee di Riemann, che permeavano ancora un grande legame con le intuizioni e le evidenze legate alle rappresentazioni geometriche, pur portando a chiare difficoltà.

Diceva infatti Weierstrass a riguardo, in base ancora alle parole che ci riferisce Casorati :

«i discepoli di Riemann hanno il torto di attribuire tutto al loro maestro
mentre molte (scoperte) erano già fatte e dovute a Cauchy ecc.
e il Riemann non fece che vestirle alla maniera sua per comodo.»

E ancora Kronecker ne criticava la definizione non rigorosa e non universale dei concetti :

«I matematici sono un po' supponenti nell'uso del concetto di funzione.
Anche Riemann, generalmente molto esatto,
non è irreprensibile sotto questo rispetto.
Se una funzione cresce e poi diminuisce o viceversa,
Riemann dice di dovervi essere un massimo o un minimo
(vedi la dimostrazione del cosidetto principio di Dirichelet)
mentre si dovrebbe restringere la conclusione alla sfera
delle funzioni per così dire ragionevoli.»

Osservando questa citazione di Kronecker appare evidente che occorre specificare quali sono queste funzioni ragionevoli: e senza un chiaro e definitivo concetto di funzione e di continuità questo non poteva accadere. E nel pensare alle funzioni ragionevoli, si iniziarono a studiare le funzioni che presentavano per così dire comportamenti patologici, strani, e a partire da queste funzioni, non più ragionevoli, in particolare si iniziò a studiare il legame profondo fra l' idea di continuità e di derivabilità. Un'idea di questa distinzione e del reciproco legame fra queste caratteristiche era già apparsa nell'opera di Bolzano, che nel 1830 considerava una funzione continua in ogni punto, ma in nessun punto derivabile; mentre ad esempio in Cauchy questa riflessione era completamente assente, forse proprio perché anche lui, come Riemann, aveva considerato solo le funzioni ragionevoli, e infatti in tutti gli esempi di Cauchy si fa riferimento solo a funzioni continue tutte derivabili.

Del compito di ricostruire rigorosamente l'analisi matematica se ne fecero dunque carico i matematici dell'università di Berlino, capeggiati come abbiamo visto da Weierstrass.
Così, nel 1861, Weierstrass presenta per la prima volta durante le sue lezioni la definizione di continuità in termini ε-δ, praticamente identica a quella che diamo noi oggi passando però dal concetto di limite, dato che la esprime esplicitamente in termini di differenze minori di quantità arbitrariamente piccole:

«Se è possibile determinare un valore δ tale che
per ogni valore di h,
minore in valore assoluto di δ,
$f(x+h)-f(x)$ sia minore di una quantità ε arbitrariamente piccola,
allora si dirà che si è fatto corrispondere
a una variazione infinitamente piccola della variabile
una variazione infinitamente piccola della funzione.»

Con la sua sostituzione in termini di disuguaglianze abbiamo praticamente pienamente raggiunto la nostra definizione di continuità, in termini ancora molto più vicini alla nostra espressione simbolica di quanto non avesse fatto Cauchy 40 anni prima. Anche Dirichelet aveva fatto qualcosa di analogo, considerando le stesse disuguaglianze di Weierstrass, ma aveva identificato tale proprietà delle funzioni continue come un teorema da dimostrare, mentre Weierstrass l'assume come definizione di funzione continua, implicando in essa non più solo una teoria dei limiti, ma sostituendo quel tendere a zero con una nuova nozione di tipo topologico depurata da quei termini ancora propri e legati al linguaggio comune che aveva usato Cauchy parlando di valori successivi, o di “avvicinarsi indefinitamente” e di considerare qualcosa “piccolo quanto si vuole”: nell'idea di intorno che nasce si possono utilizzare solo termini e simboli propri della matematica, e come tali certi e rigorosi. Weierstass, Kronecker ed altri matematici di Berlino lavorarono assiduamente al raggiungimento di quel rigore assoluto che era l'obiettivo decisivo e irrinunciabile ricercato dal loro capogruppo, e solo verso gli anni '70 iniziarono a diffondere i risultati del loro lavoro, le loro “raffinatezze matematiche”, raffinatezze che sono praticamente arrivate fino ai giorni nostri : è la definizione di continuità e quindi di limite di Weierstrass che noi insegniamo ai nostri ragazzi, perché è da essa che si pongono le basi per tutta l' analisi matematica. E così nel 1872, possiamo ritrovare per la prima volta la nostra definizione di limite in termini ε-δ formalizzata in termini di disuguaglianze : questa definizione di limite compare negli Elemente di Heine, uno fra i matematici che aveva dato corso a pubblicazioni delle lezioni tenute da Weierstrass:

«Se, data una grandezza qualsiasi ε, esiste una η_0 tale che per $0<\eta< \eta_0$
la differenza $f(x_0 \pm \eta)-L$ è minore di ε in valore assoluto,
allora L è il limite di $f(x)$ per $x=x_0$.”

Questa fredda e precisa definizione, a parte per i simboli grafici di “per ogni” e di “esiste” e la η oggi sostituita dalla δ, è esattamente quella che utilizziamo noi, e finalmente non contiene altro che numeri reali, l'operazione di addizione e una relazione d'ordine: solo concetti tipici dell'aritmetica! A partire dal problema della continuità dunque Weierstrass dà il via ad una nuova epoca della matematica, quella che verrà chiamata “aritmetizzazione dell'analisi”, nella quale finalmente si riesce a trovare quel rigore che si andava cercando dalla nascita di questa branca della matematica : è la teoria dei numeri reali che rappresenta infatti per Weierstrass la necessaria introduzione alla teorie delle funzioni analitiche, la quale rappresentava a sua volta l'ambiente naturale in cui sviluppare le funzioni ellittiche e abeliane.

Una bella testimonianza delle teorie di Weierstrass (di cui egli affidava la diffusione quasi esclusivamente alle sue lezioni berlinesi) la ritroviamo nell'opera di Salvatore Pincherle del 1880, pubblicata a seguito del suo soggiorno a Berlino proprio per seguire le lezioni di Weierestrass :

Saggio di una introduzione alla teorica delle funzioni analitiche secondo i principi del prof. Weierstrass. In questo saggio il nostro matematico italiano ricalca l'esposizione delle lezioni ricevute: la prima parte inizia proprio con i principi fondamentali dell'aritmetica, la teoria dei numeri interi e razionali relativi, seguita poi dalla teoria dei numeri reali, che per Weierstrass erano quelli costituiti da un'infinità di elementi, e poi dei numeri formati con due unità principali, ovvero i numeri complessi. Questa subito viene posta come base, mentre nella seconda parte vengono il trattate alcune proprietà generali delle grandezze: qui si trova anche il così detto teorema di Bolzano-Weirstrass e solo nella terza parte del Saggio compare concetto di funzione, la cui definizione che viene riportata da Pincherle è la seguente:

«Se una quantità variabile, reale o complessa, che diremo *y*,
è legata a un'altra quantità variabile o reale o complessa x
in guisa che a un valore di *x*
corrispondano entro certi limiti uno o più valori determinati per *y*,
si dirà che *y* è
funzione di *x* nel senso più generale del vocabolo funzione
e si scriverà *y=f(x)*.»

Relativamente a questo modo di parlare delle funzioni, intendendo per esse solo questa associazione di una variabile x (reale o complessa) a una o più variabili y (reali o complesse), interessante è ancora questa osservazione di Weierstrass, che mostra come, se riusciamo a esplicitare un legame in modo che a ciascuna x corrisponda un solo valore della funzione, tutto resta ancora vago e indeterminato, quindi tale da non permettere caratteristiche comuni su cui fondare la teoria :

«Se si immagina tra x e y una relazione di dipendenza soggetta alla sola condizione che,
dato un valore di x,
ne consegua uno corrispondente per y,
si trova che il legami così stabilito fra le x e le y
è tanto vago e indeterminato
che è impossibile trovare qualche proprietà comune a tutte le funzioni.»

Da queste osservazioni, si evince che per fondare una vera teoria delle funzioni, come ci riporta ancora Pincherle, è necessario effettuare uno "studio puramente analitico delle funzioni", pertanto le stesse andranno in qualche modo limitate in classi alle quali vengono assegnate caratteristiche comuni

«una teoria delle funzioni non si potrà quindi fondare
se non si limitano in qualche modo
le classi di funzioni per le quali
si vogliono dare proprietà comuni.»

E così Pincherle ci riporta appunto che queste funzioni saranno quelle analitiche, ovvero quelle funzioni definite tramite serie di potenze uniformemente convergenti in un dato campo di convergenza. Ecco dunque che nella sua costruzione teorica Weierstrass dava un peso preponderante alla teorie delle serie di potenze, richiamandosi in qualche modo all'antica via delle funzioni analitiche di Lagrange, seppur riveduta e trasformata nei suoi fondamenti da una nuova e sofisticata strumentazione teorica. Lo studio delle funzioni analitiche di Weierstrass si sposta pertanto da un punto di vista globale, come era stato sostenuto da Riemann, a uno studio dal punto di vista locale, ovvero si trattava di rappresentare una funzione e riconoscerne le proprietà nell'intorno immediato del punto: e quindi lo studio si risolveva trattando la funzione con il nostro concetto di limite, che ora finalmente ha assunto il suo più completo significato, rientrando in quella sfera topologica di intorno, anche grazie alla sua caratterizzazione mediante esplicite espressioni in termini di differenze infinitesime, e relative caratteristiche che contraddistinguono gli spazi in cui trattiamo le diverse funzioni. Per funzioni analitiche infinite si intendevano quelle funzioni definite mediante serie di potenze uniformemente convergenti all'interno di un dato campo di convergenza: Weierstrass dava un ruolo privilegiato agli sviluppi convergenti in un cerchio o in una corona descritta intorno a un punto, e definire una funzione corrispondeva dunque a fornirsi di una serie di Taylor, poiché da questa serie si può, teoricamente, dedurre il valore della funzione in ogni punto in cui essa è definita utilizzando il metodo del prolungamento analitico

Capitolo II.13

Rigore, continuità, aritmetizzazione : Dedekind e Cantor

«Grazie ai numeri tutto diventa bello»
- Pitagora -

Nel 1872, Dedekind, che era stato allievo di Gauss a Gottinga insieme a Riemann e fu chiamato poi a insegnare al Politecnico di Zurigo, pubblicò un opuscolo intitolato *Continuità e numeri irrazionali* : Dedekind fu senza dubbio influenzato dalle idee di Dirichlet che successe a Gauss nel 1855, soprattutto da quelle che riguardavano la teoria dei numeri. Insegnando gli elementi del calcolo poi Dedekind si rese conto "più profondamente che mai" di quanto esso mancasse di un reale e rigoroso fondamento, ed in particolare quanto ancora si fosse mancanti di concetti fondamentali per l'intera analisi matematica, come quello della continuità della retta numerica e la costruzione dei numeri reali, questione di importanza preliminare ad ogni discorso sulle funzioni continue. Scrive infatti Dedekind nelle pagine iniziali del suo saggio:

«Spesso si dice che il calcolo differenziale
si occupa di grandezze continue,
eppure non si dà mai una definizione di questa continuità.»

Dedekind accusava poi, come i suoi colleghi berlinesi, dai quali però sottolineiamo che egli lavorò sempre autonomamente, che anche le opere che apparivano più rigorose in realtà si appellavano continuamente a rappresentazioni geometriche, o a teoremi dei quali mancasse una vera dimostrazione in termini puramente aritmetici, e a tal proposito asseriva che il calcolo infinitesimale, per poter davvero "essere scientifico", doveva cercare altrove i propri fondamenti, per togliere ogni dubbio e ogni sorta di legame con le particolarità e le rappresentazioni, cercandoli in una parte della matematica più pura, e questo si poteva fare utilizzando l'aritmetica:

«scoprire negli elementi dell'aritmetica la vera origine [del calcolo]
[…] acquistando con ciò al tempo stesso una
definizione effettiva della continuità.»

A differenza del suo maestro Dirichelet, dal quale aveva ereditato la focalizzazione sull'importanza dell'aritmetica, Dedekind però era fermamente convinto che i più grandi progressi nel campo della matematica si sono dovuti alla "creazione" e introduzione di nuovi concetti.
L'opera di Dedekind *Continuità e numeri irrazionali,* parte infatti dall'analisi di proprietà note per arrivare poi a introdurre il concetto innovativo dei numeri reali definiti mediante la stessa idea di continuità. L'opera inizia con lo studio di alcune proprietà dei numeri razionali, fra cui quella di densità e quella per cui ogni numero razionale q divide tutti gli altri in due classi, una contente i numeri maggiori di q e l'altra quelli minori : quest'ultima proprietà, osserva Dedekind, ricalca un'analoga proprietà della retta, ovvero quella per cui ogni suo punto la divide in due semirette, una contenente tutti i punti a destra di quello prefissato, e l'altra tutti quelli alla sua sinistra.

Quest'analogia diviene poi una corrispondenza a tutti gli effetti fra i numeri razionali e i punti di una retta qualora venga fissata un'origine e un'unità sulla retta stessa: ma a questo punto ci accorge subito di come ci siano punti sulla retta ai quali non corrisponda nessun numero razionale in quanto, come già gli antichi insegnavano, esistono segmenti incommensurabili con una certa unità assegnata. La conclusione di Dedekind è ovviamente la seguente:

«La retta è infinitamente più ricca di punti
che non il campo dei numeri razionali.»

Ecco quindi la necessità per Dedekind di ampliare i numeri razionale creando nuovi numeri che permettessero di ottenere un campo continuo esattamente come la retta, ovvero numeri che permettessero di descrivere aritmeticamente le proprietà della retta: e il punto irrinunciabile per Dedekind era la costruzione di questi nuovi numeri irrazionali definendoli facendo ricorso soltanto ai numeri razionali. Ma poiché dovevamo andare a definire dei numeri che rispettassero la continuità di una retta, ecco il nodo cruciale : occorre definire cosa si intenda essenzialmente per continuo.
E nel 1872 l'essenza della continuità tanto cercata, tanto agognata da secoli, trova la sua espressione in un principio tanto evidente quanto banale, come dice lo stesso autore

«[la maggior parte delle persone] proverà una grande disillusione
nell'apprendere che
è questa banalità
a svelare il mistero della continuità.»

La base di questo principio è una sorta di proprietà inversa di quella sopra ricordata, per la quale ogni punto divide la retta in due parti: Dedekind la definisce con le seguenti parole

«Se una ripartizione di tutti i punti sulla retta in due classi è di tale natura che
ogni punto di una delle due classi stia a sinistra di ogni punto sull'altra,
allora esiste uno e un sol punto
dal quale questa ripartizione di tutti i punti in due classi,
o questa decomposizione della retta in due parti,
è prodotta.»

Da questa semplice proprietà si può passare alla creazione dei numeri irrazionali:

«Orbene, ogni volta che è data una sezione (A_1, A_2)
che non sia prodotta da nessun numero razionale
noi creiamo un nuovo numero,
un numero irrazionale α,
che noi consideriamo completamente definito da questa sezione;
noi diremo che il numero α corrisponde a questa sezione
e che esso la produce.»

E dal teorema per cui presa una qualunque sezione (A_1, A_2) di numeri reali allora esiste uno e un sol numero reale α dal quale la sezione è prodotta, Dedekind provava la continuità del campo numerico da lui costruito! E la base sufficiente per tutto il calcolo infinitesimale, accanto a questa idea di continuità, viene fatta risalire al concetto di limite di una grandezza continua, di cui egli fornisce questa definizione:

«se una grandezza x cresce continuamente ma non oltre ogni limite,
allora x tende a un valore limite»

Dedekind è dunque riuscito a dare una definizione assiomatica della continuità mediante l'atto creativo dei numeri reali, per poi riuscire a definire così il limite di una funzione continua : e tutto questo lo ha fatto basandosi su concetti di tipo aritmetico.
D'ora in poi i matematici avranno la possibilità di gestire in modo completamente definito e rigoroso un nuovo insieme numerico, che risulta continuo e non più solamente denso, come nei secoli precedenti si tendeva a credere che fosse sufficiente per assicurarne l'idea del continuo, e sul quale si possono definire i concetti di cui si necessita senza più dover ricorrere a ingegnose definizioni di continuità : e il limite, che è forse il concetto più intimamente legato all'idea del continuo, ora può finalmente essere utilizzato in tutta la sua potenza per procedere in modo rigoroso con l'analisi infinitesimale.

A proposito del continuo ricordiamo infine un altro grande matematico dell'Ottocento che ne diede un contributo fondamentale : Georg Cantor . I più brillanti studi di Cantor erano in realtà rivolti ad operare in modo rigoroso, come aveva appreso dall'insegnamento di Weierstrass, con gli insiemi infiniti di punti. Per poter effettuare questo tipo di studio rigoroso, Cantor premetteva una teoria aritmetica dei numeri reali, che egli definiva utilizzando le successioni di numeri razionali, ma non come nelle teorie tradizionali che leggevano i numeri reali come limiti delle successioni di razionali (esattamente come aveva fatto Cauchy) : nella sua costruzione Cantor considerava successioni infinite di numeri razionali sottoposte alla condizione per cui la differenza fra due termini particolari fosse infinitesima, ovvero successioni $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ tali che per ogni $\varepsilon > 0$ fissato arbitrariamente piccolo, esiste un numero intero n_1 tale che, per $n \geq n_1$ e m intero qualunque, sia soddisfatta la realzione

$$|a_{m+n} - a_n| < \varepsilon$$

Una successione di questo tipo, scriveva Cantor, ha un limite determinato b, come se fosse associato a questa successione : l'insieme B di questi numeri b associati alle successioni, era per Cantor la definizione dei numeri reali, per i quali egli mostrava che si potessero estendere tutte le operazioni aritmetiche.
Cantor si spingeva poi ancora oltre, in quanto andando a considerare analoghe successioni di numeri reali $\{b_n\}$ alle quali era a loro volta associato un numero c, l'insieme dei quali andava a costituire un nuovo dominio numerico C, e così si poteva procedere in modo indefinito :

«Il concetto di numero,
così come è stato così sviluppato,
contiene in se il germe per un estensione infinita,
in sé necessaria ed assoluta.»

L'assioma di continuità di Cantor veniva poi dato riferendosi ai numeri reali del dominio B , che andavano finalmente a ricollegarsi alla continuità intuitiva della retta:

«ad ogni numero corrisponde un ben determinato punto sulla retta,
la cui coordinata è uguale a quel numero.»

I punti reali di tipo superiore poi venivano interpretati come insiemi “derivati”, che si potevano definire per Cantor a partire dal concetto di “punto limite” di un insieme di punti P, da lui definito nel modo seguente:

«un punto della retta tale che
in ogni suo intorno si trovino infiniti punti di P,
col che può capitare che egli stesso non appartenga all'insieme.
Per “intorno di punto” si deve intendere
ogni intervallo che contiene il punto al suo interno»

Questo insieme di punti, che noi oggi chiamiamo punti di accumulazione, veniva detto insieme derivato P', dal quale si poteva continuare a procedere indefinitamente creando così, per dirla con le stesse parole di Cantor

«una generazione dialettica di concetti
che conduce sempre più lontano,
e libera da ogni arbitrarietà,
resta in se necessaria e conseguente.»

Nel 1874 Cantor riusciva poi a dimostrare che l'insieme dei numeri reali da lui definito non si poteva mettere in corrispondenza con l'insieme dei numeri naturali : da questo ne seguiva l'esistenza di un'infinità di numeri trascendenti e una netta differenza fra ciò che è continuo e tutti gli altri numeri algebrici.
Anche Cantor dunque, partendo dai problemi che assillavano le radici dell'analisi dell'Ottocento, è riuscito a isolare e svelare concetti fondamentali, quali le proprietà del continuo dei numeri reali e quello di punto limite, accanto ad altri concetti di natura topologica e di dimensione di uno spazio : in particolare il concetto di potenza di un insieme si presentava a Cantor come la chiave naturale per penetrare nell'universo degli insiemi infiniti ed esplorare la natura del continuo. Per Cantor era dunque la teoria degli insiemi la svolta che permetteva di abbracciare in sé l'aritmetica, la teoria delle funzioni e la geometria, portandole ad una “superiore unità” utilizzando il concetto di potenza : scriveva a tal riguardo

«discontinuità e continuità
sono similmente considerate dallo stesso punto di vista
e sono misurate con la stessa misura.»

La storia del concetto di limite, il cui antenato abbiamo visto che si può in qualche modo far risalire al IV secolo A.C. con il metodo di esaustione, intorno agli anni Settanta del XIX secolo si è praticamente ormai conclusa: al di là della sua accezione positiva in termini di migliore approssimazione dell'epoca antica, e portata avanti come idea più o meno esplicita fino almeno agli anni di Cauchy, ma che è nettamente diversa da ciò che caratterizza il limite ai nostri giorni, nella matematica moderna esso è nato nelle menti dei matematici dapprima come concetto puramente intuitivo, ed è rimasto tale fin tanto che nell'uomo non è nato un più profondo bisogno di certezze, dovute in parte proprio dai grandi sviluppi cui era stato condotto dall'applicazione di quelle stesse idee intuitive. Il faticoso processo di formalizzazione dell'analisi in generale, che porta all'intreccio dei concetti più o meno intuitivi esistenti e alla scoperta e l'invenzione di nuovi, si conclude quindi con il rigore dell'aritmetizzazione della stessa analisi, in quanto è nell'aritmetica che trova finalmente le basi certe e indiscutibili su cui fondare i propri principi, ed essere così riconosciuta una scienza matematica a pieni diritti.
Questo accadde alla fine dell'Ottocento, epoca in cui il formalismo e la ricerca del rigore iniziato alla fine del Settecento trovano finalmente il loro coronamento.

Il nostro concetto di limite si fonde con quello di continuità, che a sua volta permea il grande problema della definizione dei numeri reali: non si poteva risolvere un problema senza l'altro, questi concetti si mescolano continuamente nel corso della nostra storia, spesso confondendosi l'uno nell'altro, mentre altre volte nascondendosi per la loro stessa evidenza.
All'inizio del Novecento infine ritroveremo, grazie alla sempre più netta distinzione fra scuole di pensiero formaliste o meno, la definizione di limite come oggi cerchiamo di farla imparare ai nostri studenti, cioè formalizzata al massimo con la notazione ε-δ che già era stata introdotta da Weierstrass ed Heine, e che trova la sua attuale e definitiva definizione in un articolo apparso nel 1922 sul *American Journal of Mathematics* intitolato appunto *A General Theory of Limits* ,scritto da E.H.Moore e H.L .Smith : in questo si legge la definizione e la notazione di limite come oggi ci è propria

«A function *f(x)* converges to *b* as *x* approaches *a*,
in notation $\lim_{x \to a} f(x) = b$
provided for every positive number *e*
that in a positive number d_e,
such that $|b - f(x)| \leqslant e$
for every *x* such that
$0 < |x - a| \leqslant d_e$ »

Prima di passare ad una possibile applicazione didattica di questa storia così complessa e intrecciata di problematiche diverse che caratterizza il concetto di limite, mi soffermo ancora un poco sulla nascita di un'altra questione molto interessante e in qualche modo ancora legata al nostro limite: la nascita della filosofia matematica.

Capitolo II.14

La crisi dei fondamenti e la nascita della filosofia matematica

«Nulla può nascere da ciò che non è,
ed è cosa impossibile e inaudita
che ciò che è si distrugga: esso è
Sempre presente là dove esiste un saldo fondamento.»
- Empedocle -

« [la matematica] deve fornire uno strumento
per lo studio della Natura. Ma non è tutto:
la matematica ha anche uno scopo filosofico e,
oso dirlo, estetico»
- Poincaré, 1897 -

Prima di porre termine alla nostra storia del concetto di limite e degli altri concetti matematici ad esso strettamente legati, poniamo la nostra attenzione sulla nascita di una nuova disciplina che la riflessione ottocentesca relativa al rigore matematico si porta dietro, ovvero la nascita di quel ramo del sapere che va sotto il nome di filosofia matematica.
La filosofia è interessata, per sua natura, a dare una giustificazione e una spiegazione della matematica in quanto manifestazione della realtà, una delle tante, la cui considerazione ricade nelle classificazioni predisposte dalla filosofia stessa; la matematica è considerata soprattutto attività conoscitiva, non rientra ad esempio nel campo dell'etica; la matematica è presa in esame sia nell'ontologia sia nella teoria della conoscenza. Nella problematica ontologica, ci si chiederà ad esempio che cosa e di che natura sono gli enti che la matematica indaga; nella teoria della conoscenza, ci si chiederà invece che tipo di certezza abbiano le verità matematiche (cioè le affermazioni che costituiscono le teorie matematiche), e se siano verità, e quale tipo di garanzia abbiano. I due tipi di domande, ontologiche ed epistemologiche, sono collegate, e si influenzano mutualmente le risposte in vari modi. Il complesso di queste riflessioni è ciò che costituisce la disciplina filosofica nota come filosofia della matematica.
Possiamo datare la nascita consapevole di un filosofia matematica proprio all'inizio del secolo XIX quando si fa preponderante il bisogno di rigore e la riflessione sui fondamenti su cui porre le basi dell'analisi matematica per renderla una vera scienza matematica (Cauchy, Abel, Bolzano).
Nella seconda metà del XIX secolo la riflessione relativa alla natura della matematica si fa ancora più profonda e diffusa: non si cerca più solo di scoprire nuove teorie o di applicare le esistenti a nuovi campi o migliorarle, ma nasce la profonda necessità di dover fondare la ricerca matematica su principi rigorosi e validi al di là delle particolari applicazioni o evidenze intuitive o geometriche. Chiari esempi di questa attenzione li abbiamo visti dapprima con Bolzano e Cauchy, che cercano di dare all'analisi l'impianto di una struttura rigorosa per definizioni e dimostrazioni, poi nel corso del secolo ritroviamo diversi matematici che si impegnano per riuscire a donare, soprattutto all'analisi matematica, quelle linee di principio e di rigore, quelle basi fondamentali e certe che pareva mancassero alla nuova branca della matematica moderna, nonostante i grandi successi che essa stava riscuotendo: basta ricordare la grande opera ritrovata nelle lezioni di Weierstrass, sulla quale ancora oggi poggiano le basi dell'analisi che insegniamo ai nostri ragazzi a scuola!

Nasce così un nuovo aspetto della riflessione filosofica nella seconda metà dell'Ottocento, che si interroga su che cosa è la verità in matematica, che cosa significa che alcune proposizioni sono evidenti, che cosa è un teorema e la sua relativa dimostrazione: questioni come queste ben si capisce come siano a metà fra un discorso prettamente matematico e uno di tipo più filosofico, pur nascendo dal problema matematico del ricercare quali siano i fondamenti della matematica.
Nella storia precedente della filosofia in generale invece la matematica era sempre stata assunta come il modello della conoscenza certa e garantita, e questo ruolo ne ha segnato l'importanza filosofica. La certezza delle verità matematiche era inattaccabile, la loro garanzia assoluta. Quindi si poteva dire innanzi tutto che esistevano verità e certezze, prima quelle matematiche poi eventualmente altre, ad esempio quelle metafisiche (da ottenere possibilmente con il rigore dello stile matematico). La filosofia doveva solo inquadrare tale fatto in una teoria generale, o dell'essere o delle capacità conoscitive umane, che spiegasse come le verità potessero esistere e come potessero essere conosciute (a tal riguardo possiamo ricordare la grandissima opera di Kant, che analizzò in dettaglio le possibili conoscenze umane e i limiti ai quali esse erano sottoposte). Questo in generale con una sovrana indifferenza a quanto accadeva nella storia alla matematica, assunta come immutabile, e quindi di fatto in riferimento ad una matematica antica, precisamente a quella di Euclide. Le novità nella matematica che nascono dall'introduzione della geometria analitica in Descartes, erano dichiarate autorità della stessa natura, senza un'indagine particolare (nonostante il fatto che molta della matematica nuova non avesse un'impostazione assiomatica euclidea).
La svolta che avviene nell'ottica filosofica è soprattutto in conseguenza e sotto l'influsso di quanto accadeva nel campo matematico, e che non poteva più essere ignorato dai matematici stessi, ed è così che dall'Ottocento in avanti, la filosofia si pone anche, o piuttosto, il compito di intervenire sulla matematica, fornendo per essa giustificazioni, o addirittura correttivi, necessari a ripristinare la fiducia nella sensatezza e nella validità della produzione matematica (oppure al contrario a sanzionarne la negazione).
Nella storia, è capitato spesso che i matematici si siano trovati a vivere momenti in cui hanno avuto dubbi e incertezze sui metodi che usavano, o sulle ricerche che conducevano: gli episodi di questo genere sono stati frequenti e importanti, sono i cosiddetti periodi di crisi e ,o seguiti da, periodi di rigore. Ricordiamo a tal proposito le parole di Enriques (1912):

«[La critica dei principi] è parte essenziale
dell'elaborazione dei concetti
che in ogni tempo prepara o accompagna il progresso della scienza
e la sua più estesa applicazione»

Uno dei primi esempi di riflessione filosofica relativa agli oggetti matematici la possiamo ritrovare in Platone: nonostante Platone non fosse un matematico attivo, nel senso che non faceva ricerca matematica e non ne abbia dato specifici contributi, è interessante notare come si soffermò a lungo sulla metodologia matematica nella sua filosofia. Platone afferma che i matematici disegnano figure geometriche e ci ragionano intorno, ma in realtà non è a quelle figure specifiche che hanno disegnato cui stanno pensando, bensì alle idee matematiche cui esse assomigliano: un concetto più profondo, più puro, legato a quell'evidenza visiva solo per poter aver un mezzo per immaginare a come le cose realmente stanno, per avvicinarsi all'idea più profonda ed essenziale cui esse tendono. Questo è quanto in un certo senso accade nello sviluppo dell'analisi infinitesimale, ci si è appoggiati ad un evidenza geometrica come passaggio per arrivare ad una verità più profonda, poi ci si è dovuti separare da essa per arrivare a scoprire e ad appoggiarsi sulla vera essenza dell'idea, ovvero ricercare i fondamenti dei principi dell'analisi.
Così in questo processo di ricerca dei fondamenti dell'analisi, ritroviamo i nostri matematici, non più solo impegnati ad applicare e a scovare nuovi teoremi, ma anche e soprattutto a quel che si dice "filosofeggiare" sull'argomento stesso del loro studio, ovvero riflettere di quanto stanno trattando non solo dal punto di vista pratico matematico, ma anche da quello concettuale e filosofico. La crisi

dell'Ottocento, dunque, se da una parte è stata simile alle altre, in quanto nasceva da difficoltà di nuovi sviluppi matematici, dall'altra è stata profondamente diversa, andando ad investire proprio la giustificazione della natura della matematica.
L'Ottocento è stato il secolo in cui si è avuto il maggior progresso della matematica di tutta la storia, un progresso, o comunque un mutamento, non solo quantitativo, ma che ha riguardato il modo stesso di fare matematica. I problemi non riguardavano solo singoli concetti o metodi, o particolari discipline, ma la tutta matematica nella sua impostazione: non è strano che questa, che è nota come la crisi dei fondamenti per eccellenza, abbia sollecitato anche l'interesse filosofico. La crisi della matematica nei confronti del suo oggetto di studio, della sua realtà, è stata tra l'altro una crisi anche per la filosofia della matematica: diventava difficile continuare a prenderla come modello, quando la matematica sembrava una costruzione logica sospesa nell'aria.
Per vedere ad esempio come i matematici dell'Ottocento si occupassero di quel "filosofeggiare" necessario per cercare di uscire dalla crisi della loro disciplina, consideriamo quanto afferma Dedekind nel 1888 a proposito della sua celebre frase relativa al processo di aritmetizzazione dell'analisi, "l'uomo aritmetizza" : egli vuole allontanarsi da ogni possibile rappresentazione legata a qualcosa di reale, di contingente, qualcosa che potrebbe sminuire il fondamento profondo legandolo a qualcosa di particolare. L'obiettivo è slegare l'analisi matematica da quelle rappresentazioni intuitive che l'avevano fatta nascere e sviluppare, per darle il suo fondamento più profondo fra verità assolute, fra verità come la matematica comanda, e nelle parole riportate qui sotto si può vedere il germe di una riflessione filosofica, oltre che matematica, relativa, ad esempio, al concetto di numero da parte di Dedekind:

«io intendo già di considerare il concetto di numero come del tutto indipendente dalle
rappresentazioni o idee dello spazio e del tempo
e di riconoscere piuttosto in questo concetto
un'emanazione diretta delle leggi del pensiero.
[…]
La costruzione puramente logica della scienza dei numeri,
e il campo continuo dei numeri in essa acquisito, ci danno i mezzi sufficienti
per analizzare con esattezza le nostre rappresentazioni dello spazio e del tempo,
avendo la facoltà di riferirle al campo numerico fondato nel nostro spirito.»

«Noi [matematici] siano di razza divina e possediamo il potere di creare»

Così scriveva Dedekind per sottolineare il fatto che i matematici fossero gli unici scienziati ai quali era riservata la capacità di creare qualche cosa, come ad esempio i numeri reali.
Con altre riflessioni di tipo squisitamente filosofico, Dedekind sostiene (nel saggio del 1872) la necessità di una liberazione,intesa come astrazione, da tutto ciò che possa vincolare il pensiero matematico a condizioni che ne impediscano il più libero sviluppo in un campo puramente logico. Scartato ogni riferimento al sensibile, il matematico aritmetizza, costruendo universi logici con procedimenti costruttivo-concettuali, con l'uso esclusivo della facoltà mentale.
Dalla seconda metà dell'Ottocento ritroviamo numerosi matematici impegnati in riflessioni filosofiche di questo tipo, fra i quali riscontriamo grandi nomi quali David Hilbert o Henry Poincarè, accanto a Russel e Whithead che erano matematici ma molto vicini alla riflessione filosofica; nel Novecento nacquero poi diverse correnti matematico-filosofiche, quali il logicismo fondato da Dedekind appunto, o il formalismo di Hilbert che richiamava per ruolo ed estensione, forse anche talvolta sopravvalutata, l' "a priori" kantiano e la riconoscenza, sempre di estrazione kantiana, che nell'intelaiatura teorica sono necessarie certe vedute a priori, e che tali vedute si trovano alla base del costruirsi delle nostre conoscenze : scrive infatti a tal proposito

«io credo che, alla fin fine,
anche la conoscenza matematica si basa su un certo tipo di tali vedute intuitive
e che perfino per la costruzione della teoria dei numeri
abbiamo bisogno di una certa impostazione intuitiva a priori»

Infine, a proposito della riflessione filosofica intorno ai concetti matematici in generale, e a quelli di cui abbiamo seguito la storia in particolare, riporto le parole che Russel scrive nella sua *Introduzione alla filosofia matematica* nel 1919, relative proprio al concetto di continuità e di numero che avevano fornito Dedekind e Cantor: in esse possiamo ritrovare la distinzione fra ciò che può pensare un filosofo a differenza di un matematico relativamente allo stesso concetto, ma il tentativo, seppur difficoltoso, di riunire il concetto matematico sotto un'ottica che si possa accordare con quella suggerita dalla filosofia che osserva il mondo più dal punto di vista empirico. Ed è interessante notare come all'inizio del XX secolo, la matematica si è riuscita a separare tanto da ogni accezione di tipo empirico per fondarsi su concetti propri, come era stato comandata dalla crisi ottocentesca, da dovere addirittura cercare di essere giustificata dall'altro punto di vista, cioè riuscire a darle una spiegazione di tipo filosofico-pratico

«Le definizioni di continuità che abbiamo considerato, quelle di Dedekind e Cantor,
non corrispondono molto da vicino
alla idea vaga associata alla stessa parola nella mente
dell'uomo della strada o del filosofo.
Essi pensano alla continuità come
ad un'assenza di separazione,
un po' come la generale sparizione
della capacità di distinguere che caratterizza il calo di una fitta nebbia .
É questo genere di cose che intende per "continuità" un metafisico,
dichiarando, molto correttamente,
che si tratta di una caratteristica della sua vita mentale […]
Ogni numero reale è quello che è,
in modo definito e senza compromessi;
non cambia per gradi impercettibili in un altro numero;
è una unità netta, separata, e la sua distanza da ogni altra individualità è finita,
sebbene possa essere resa minore di ogni quantità fisica, assegnata in precedenza.
Il problema della relazione tra il tipo di continuità esistente tra i numeri reali
e il tipo ad esempio di quel che vediamo ad un certo memento,
è difficile ed intricato.
Non si può dire che i due tipi siano semplicemente identici,
ma si può, credo, asserire molto correttamente,
che il concetto matematico che abbiamo considerato in questo capitolo
fornisce uno scema logico astratto
al quale deve essere possibile riferire il materiale empirico con manipolazioni opportune,
se questo materiale deve essere chiamato continuo,
in senso in qualche modo definibile con precisione.»

PARTE III

IL CONCETTO DI LIMITE
FRA STORIA E DIDATTICA

Introduzione

Nella prima parte di questa tesi si è cercato di dare una panoramica generale su come ricerche didattiche mostrano che l'introduzione e l'integrazione della storia della matematica all'interno dell'insegnamento della stessa possano aiutare sotto numerosi punti di vista l'apprendimento e la didattica della stessa.
Nella seconda parte abbiamo poi cercato di offrire una panoramica di tipo strettamente storico sul concetto di limite, e degli altri concetti che la sua evoluzione si porta dietro, essendo fra loro intrinsecamente legati, ovvero la continuità e la costruzione dei numeri reali.
In quest'ultima parte quello che ci proponiamo di fare è un ponte, ovvero mostrare in particolare come un'applicazione della storia della matematica possa aiutare nella didattica e nell'apprendimento del concetto di limite, che spesso si rivela uno degli ostacoli più ardui da superare per i nostri studenti.

Capitolo III.1

Ostacoli epistemologici relativi alla nozione di limite

«Un'asserzione erronea, un ragionamento inconcludente
di uno scienziato dei tempi trascorsi possono essere
tanto degni di considerazione
quanto una scoperta o un'intuizione geniale,
se essi servono ugualmente a gettar luce
sulle cause che hanno accelerato o ritardato
il progresso delle conoscenze umane.»

- G. Vailati -

Già dagli anni Ottanta, numerosi studi iniziarono a mostrare che una piena comprensione del concetto di limite da parte degli studenti fosse una cosa piuttosto rara: fin da subito fu chiaro che le difficoltà fossero da ricercare fondamentalmente nel conflitto fra l'idea intuitiva e la definizione formale, vale a dire che il processo di limite dal punto di vista matematico è solitamente ben capito a livello intuitivo, ma non da quello cognitivo. Per identificare le reali difficoltà di acquisizione del concetto di limite e migliorare l'insegnamento e l'apprendimento del concetto, Cornu (1983), ad esempio, fa uno studio storico ed epistemologico con l'obiettivo di identificare gli ostacoli epistemologici sulla nozione di limite, proprio a partire da un cammino storico sullo stesso concetto. Questi ostacoli, dal punto di vista storico, spiegano alcuni ritardi, alcuni errori, ma non hanno sempre un aspetto negativo: essi erano molte volte fattori di progresso perché richiedevano la messa in opera di mezzi per superarli, così allora si potrebbe far leva sugli stessi ostacoli che spesso si affacciano analoghi nelle menti dei nostri studenti, per indirizzarli a superarli con il loro impegno e le loro stesse forze, al massimo con qualche indicazione da parte dell'insegnante che lo indirizzi verso la strada per il corretto superamento degli ostacoli.
I principali ostacoli epistemologi sulla nozione di limite identificati dall'analisi di Cornu sono i seguenti:

- la trasposizione numerica delle dimensioni : essa deriva dal processo di astrazione in un contesto geometrico e cinematico nel dominio numerico dove il concetto si unifica
- l' aspetto "metafisico" del concetto di limite:
  - istituzione di un nuovo tipo di ragionamento matematico che in seguito a deduzioni logiche usuali va ad affrontare un processo infinito
  - nozione di "infinitamente piccolo" o "infinitamente grande" : ci sono delle quantità non ancora nulle, ma comunque non più assegnabili, delle quantità "evanescenti"? Cosa accadrà al "momento" in cui la quantità è pari a zero? Un numero minore di un qualunque numero dato piccolo a piacere, è nullo oppure no? "Un limite è raggiunto o no?"

Un altro studio sugli ostacoli epistemologici relativi al concetto di limite, riconoscibili sia a livello storico che a livello di apprendimento da parte degli studenti, lo ritroviamo in Sierpinska (1985) : egli riscontra i seguenti ostacoli

- « Horror vacui »
- ostacoli legati al concetto di funzione

- ostacoli geometrici
- ostacoli logici
- ostacoli legati ai simboli

L'ostacolo relativo all'aspetto metafisico del concetto di limite citato da Cornu, trova il suo corrispondente in quello che Sierpinska definisce sotto il classico e diffuso “Horror vacui”. Questo è il più importante gruppo di ostacoli epistemologici, che contiene appunto problemi intrinsecamente legati all'idea di una costante infinitamente piccola o infinitamente grande, quali:

- la tendenza quasi automatica di estendere metodi algebrici per le grandezze finite a quelle stesse grandezze infinite
- la questione se il limite debba o meno essere raggiunto
- la questione di intendere l'infinito e gli infinitesime nel senso potenziale o attuale
- l'ostacolo consistente nell'associare il passaggio al limite ad un movimento fisico, ad un concreto avvicinamento
- il rifiuto dell'operazione matematica di passaggio al limite

Contestualizzando in un quadro storico, quest'ultimo rifiuto, come abbiamo visto, è stato effettuato anche dal fondatore stesso del calcolo e da molti suoi successori, preferendo piuttosto il riferimento a quantità dalla vaga natura quali gli infinitesimi: è interessante, a mio avviso, chiedersi come mai questo rifiuto, e una spiegazione potrebbe essere proprio quella da un lato della mancanza effettiva di una continuità dei numeri reali, che quindi non consente un avvicinamento continuo anche dal punto di vista dinamico, e dall'altra del rifiuto, ancora legato a concezioni aristoteliche, della possibilità di un infinito e infinitesimo attuale. L'utilizzo di queste “quantità evanescenti” che non non vengono fatte tendere a zero come vorrebbe la nostra moderna idea del passaggio al limite, potrebbe essere servita ad eliminare un movimento continuo che non era possibile, e forse Leibniz era già favorevole ad un'idea non dinamica, ma preferiva evitare comunque l'utilizzo di infinitesimi attuali, ancora non accettabili dal punto di vista filosofico. Ora, pur mantenendoci ben consapevoli del fatto che non possiamo decontestualizzare le sue idee dal periodo storico, culturale e sociale in cui in cui crescono e si diffondono, spesso i nostri ragazzi faticano a concepire gli infiniti e infinitesimi attuali allo stesso modo (non per questioni filosofiche naturalmente, ma proprio perché, a mio avviso, non riescono a separarli da una rappresentazione di un “qualcosa” sempre più vicino a qualcos'altro), e quindi il passaggio al limite privato di un'idea e di una possibilità di movimento diventa una questione molto difficile da accettare, oltre che, strettamente per quanto riguarda i nostri ragazzi, essendo purtroppo spesso prevenuti, tendono a rifiutare tutto ciò che si discosta dalle consuetudini e dalle operazioni ormai consolidate, soprattutto in ambito matematico, in quanto di solito hanno la percezione che ogni novità nasconda certamente insidie e difficoltà più o meno nascoste.

Un altro lavoro molto interessante dal punto di vista epistemologico del limite, è quello di Bkouche (1996) in cui vengono posti in evidenza non solo due punti di vista diversi sulla nozione epistemologica della nozione di limite di una funzione , cioè quello “ cinematico” e quello di “approssimazione”, ma anche l'esistenza di un rapporto dialettico tra questi due punti di vista. Dal punto di vista cinematico la variabile indipendente, nel suo variare, disegna la funzione , quindi quando passiamo a vederne il limite, lo avremo nel senso che se una quantità variabile x tende a un certo valore a (cioè assume valori via via più vicini al dato valore a) , allora una variabile y (che è una funzione della variabile x) tenderà ad un certo valore di b (cioè ad assumere un valore tanto più vicino a b) nella stessa misura in cui la variabile x si avvicina al valore a (in altre parole, tanto più x si avvicina ad a, quanto più y si avvicinerà a b); dal punto di vista dell'approssimazione invece è il grado di approssimazione con cui vogliamo disegnare una certa variabile y a comandare il processo di avvicinamento della variabile indipendente, e quindi quello di variazione delle nostre variabili. Se, nella nozione cinematica è la variabile che cerca di disegnare la funzione, avvicinandosi quanto

più è possibile anche a quei valori proibiti, nella nozione relativa all'approssimazione, è il grado di approssimazione della funzione che vogliamo impostare che stabilisce quanto la variabile deve avvicinarsi a un dato valore – ed è questo che ricalca più da vicino la nozione odierna ε-δ di limite, pur essendo stato necessario allo stesso modo anche il punto di vista cinematico per la nozione di limite. Il punto di vista cinematico dà un ruolo predominante alla variabile *x*, come agli studenti abbiamo insegnato ad assegnare in tutta la prima parte dello studio delle funzioni ad esempio, mentre quello dell'approssimazione assegna il ruolo principale all'approssimazione dell'immagine f(x), ed è questo quello che i ragazzi devono imparare a leggere e a capire nella definizione ε-δ, e qui risiede l'ostacolo: in questa dialettica di punti di vista, sorge una contraddizione nelle due problematiche; la prima mette l'accento sul movimento della variabile indipendente e l'effetto di trascinamento sulla variabile dipendente, la seconda mette l'accento sulla variabile dipendente e fa in modo di dare rilievo ai valori della variabile indipendente per l'approssimazione desiderata sulla dipendente, ed è proprio questa contraddizione che costituisce, secondo Bkouche, una delle grandi difficoltà della nozione del limite, difficoltà che rileva l'ordine matematico della natura stessa del concetto di limite, e questa è una di quelle difficoltà pedagogiche principali.
Legato a questa dialettica nelle due possibili concezioni del concetto di limite, a mio avviso si può inserire anche un altro tipo di problematica, quella legata alla concezione degli infinitesimi come infiniti potenziali piuttosto che attuali: il punto di vista cinematico dà più facilmente l'idea di movimento, e quindi l'approssimazione che può divenire minore può essere facilmente interpretata come infinitesimo potenziale, mentre fissare a monte un'approssimazione della variabile indipendente alla quale si va a fare corrispondere una data variabilità di quella dipendente è certo più vicina all'idea attuale degli infinitesimi, e alle difficoltà che essa comporta.

Si possono riscontrare in definitiva tre grandi aspetti relativi agli ostacoli epistemologici legati al concetto di limite di una funzione

- una problematica "algebrica" che porta sul calcolo dei limiti (che esistono) regole algebriche che possono oscurare la natura della nozione del calcolo dei limiti
- una problematica "cinematica", o "di approssimazione della x", che dona all'approssimazione della variabile indipendente x un ruolo predominante per poter approssimare f(x) – nel senso dell'avvicinamento di x ad a che porta la y ad avvicinarsi a b
- una problematica "di approssimazione di f(x)" incarnata dentro la definizione ε-δ o dentro al linguaggio degli intorni (in rapporto alla definizione topologica della nozione di limite), e quindi legata in qualche modo al punto di vista attuale degli infinitesimi

Capitolo III.2

Misconcezioni sul concetto di limite legate ad approcci didattici tradizionali

«Quando si capisce qualcosa solo "intuitivamente",
in realtà è chiara solo la situazione che si vuole modellare,
ma non la costruzione del modello »

- L. Russo, 1996 -

Il limite è uno dei più importanti concetti con i quali gli allievi sono chiamati a confrontarsi nel corso degli studi della scuola secondaria superiore. Si tratta di una nozione fondamentale, sulla quale si basa l'intera analisi matematica; ma il suo apprendimento può non essere semplice. Il processo di limite, infatti, può essere intuitivo in senso matematico ma non in senso cognitivo, e dunque un importante compito dell'insegnante dovrebbe essere quello di proporre all'allievo esperienze che consentano il corretto sviluppo dei concetti infinitesimali in chiave cognitiva (come osservato in Tall, 1985). L'apprendimento del concetto di limite può venire ostacolato da numerose difficoltà, alcune delle quali riflettono quelle che, storicamente, si sono presentate ai matematici che si sono occupati dei procedimenti infinitesimali.
Alcuni degli ostacoli che possono rendere delicato l'apprendimento del concetto di limite sono dunque di natura epistemologica: poiché il concetto è impegnativo e fondante per gli sviluppi della matematica che si dovrà affrontare, è importante, come dice Vergnaud, non sottovalutare gli ostacoli epistemologici che si incontrano nel corso dell'apprendimento, ma analizzarli per evolvere le proprie idee, per creare quelle corrette e formare i concetti nel modo giusto: per questo diventa di fondamentale importanza l'approccio didattico che l'insegnante sceglie per trasmettere il concetto di limite.
Un elemento di fondamentale importanza è, ad esempio, il linguaggio impiegato nella trattazione del limite: esso può favorire la formazione di modelli spontanei sui quali possono basarsi alcune misconcezioni: ad esempio J. Mamona-Downs osserva

«per il concetto di limite [...] le percezioni sono di natura *dinamica*,
e tale tendenza è sostenuta anche dall'importanza linguistica di parole
come 'si avvicina', 'tende' etc.»

Dimarakis e Gagatsis (1997) considerano le interazioni tra il linguaggio matematico e la lingua naturale e notano come le espressioni "tende a", "limite", "si avvicina" e "converge", equivalenti dal punto di vista matematico, non lo siano nel linguaggio quotidiano. Monaghan rileva che "approssima" è un termine vago e può risultare di difficile comprensione, così come "tende a" è spesso visto interpretato come sinonimo di "si avvicina" in un contesto matematico, sebbene il suo impiego quotidiano non suggerisca situazioni riferibili a limiti: ma ad entrambe le frasi si continua a dare un'interpretazione dinamica. Anche il termine "converge" può generare confusione: il suo significato può essere associato a linee convergenti e quindi creare conflitti sul raggiungimento o meno (Monaghan, 1991). Sempre a tal proposito Cornu (1980) afferma che il termine "limite" indica spesso qualcosa di avvertibile in senso concreto, mentre l'espressione "tende a" sembra indicare una nozione vaga.

L’espressione linguistica non però è l’unico registro rappresentativo nel quale è possibile esprimere i concetti infinitesimali, anche se ovviamente l'introduzione viene fatta solitamente tramite registro verbale: gli oggetti matematici non vengono percepiti mediante i sensi e ciò rende necessario il ricorso a diverse rappresentazioni semiotiche (Sfard, 1991; Duval, 1993); ma, ad esempio, l’apprendimento mediante le rappresentazioni grafiche non può essere condotto basandosi soltanto sull’interpretazione spontanea delle figure (Duval, 1994). Un lavoro molto noto a tal riguardo è quello di Fischbein (1993), dedicato specificamente alla rappresentazione visuale di oggetti matematici e alla sua importanza nella didattica della matematica: illustrando la propria *teoria dei concetti figurali*, Fischbein afferma che dovrebbe essere cura dell’insegnante controllare l’integrazione delle proprietà concettuali e figurali in strutture mentali unitarie, con la predominanza dei contenuti concettuali su quelli figurali .
Nel caso dei concetti infinitesimali e, in particolare del limite, la visualizzazione assume importanza primaria nella didattica del limite e dell’infinitamente piccolo: ma quale concezione di infinitesimo è suggerita dalle rappresentazioni visuali? Un infinitesimo potenziale, intuitivamente più vicino all’esperienza (o all’immaginazione) degli allievi, oppure un più astratto ed impegnativo infinitesimo attuale? E quali effetti si manifestano sull’apprendimento degli allievi della scuola secondaria superiore, nei due casi ora prospettati?
A proposito dell'infinitesimo potenziale contrapposto all'attuale, e alla possibilità di appoggiarsi a rappresentazioni visive, e alle difficoltà che possono sorgere, possiamo riferirci alla storia che ha seguito il concetto di limite, che ha seguito esattamente gli stessi passi: ovvero un concetto inizialmente di tipo dinamico, legato alla potenzialità dell'infinitesimo e alle sue rappresentazioni grafiche e geometriche, che poi si è andata ad evolversi verso una visione statica in termini di infinitesimo attuale, e separandosi da ogni forma di rappresentazione grafica. Possiamo citare a proposito dell’infinitesimo potenziale contrapposto all’attuale in Dimarakis e Gagatsis, che evidenziano proprio le radici storiche delle concezioni di limite basate su impostazioni dinamiche (potenziali) e statiche (attuali):

«Fino all’era di Weierstrass,
il concetto di limite era stato introdotto mediante connotazioni di movimento continuo:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

significa che $f(x)$ si avvicina a L quando x si avvicina ad a.
Weierstrass contestò questa descrizione *dinamica* di limite
e la sostituì con una *statica*,
che coinvolge soltanto dei numeri reali.
Questa definizione non si basa sulla nozione di movimento [...];
è la cosiddetta definizione *epsilon-delta*:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

significa che, comunque dato $\varepsilon>0$, esiste un numero $\delta>0$ tale che $|f(x)-L|<\varepsilon$ se $|x-a|<\delta$.
Robinson (1918-1974) dimostrò che
gli infinitesimi esistono come oggetti matematici veri e propri
e che essi possono essere impiegati come
fondamento sul quale basare un rigoroso sviluppo alternativo del Calcolo.
La sua Analisi non-standard [...] riprende il modello di Leibniz-Cauchy, nel quale i numeri appartenenti alla retta reale hanno intorni infinitesimi»

La trattazione didattica tradizionale per la scuola secondaria seguita da quasi tutti i libri di testo, e quindi moltissimi insegnanti, molto spesso non viene preceduta dallo studio della topologia elementare e segue esattamente le fasi sopra accennate: in una fase introduttiva ci si riferisce ad una concezione dinamica del limite appoggiandosi ad alcuni grafici, per poi passare a dare la definizione statica e formale; alcuni testi ed alcuni insegnanti preferiscono preparare gli allievi esplicitando che passeranno da una nozione intuitiva ad una formale, altri no. Seguendo ad esempio il testo *Elementi di Matematica per i licei scientifici ad indirizzo sperimentale* di Dodero, Baroncini, Manfredi, riassumiamo la trattazione che ne fa nei seguenti punti:

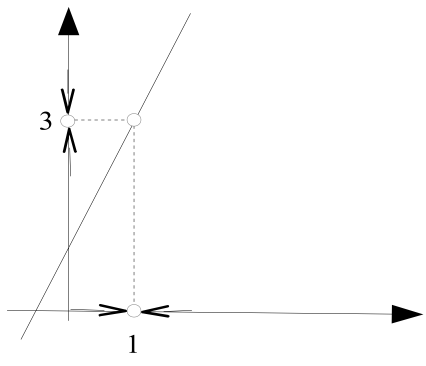
1. **Approccio intuitivo al concetto di limite**: in questo primo paragrafo si porta l'esempio del calcolo della velocità istantanea per un moto non uniforme, in cui si parla espressamente di "migliorare l'approssimazione" del calcolo della velocità media, riportando tabelle e calcoli che mostrano valori sempre più vicini a 10m/s

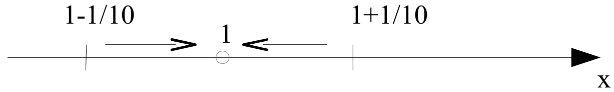
Δt	v_m
0,1	10,49
0,01	10,049
0,001	10,0049
0,0001	10,00049
…...........	….......

Viene mostrato quindi il concetto intuitivo di limite riferendosi subito ad una sua misconcezione, ovvero quella della migliore approssimazione

2. **Esempi** : Riporta un primo esempio $y = f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$ in cui "ci proponiamo di esaminare il comportamento della funzione quando si scelgono valori di x prossimi a 1, cioè al valore in cui la funzione non è definita." Costruisce dunque grafico e tabella

x	f(x)
1 - 1/10	2,8
	2,98
1 – 1/1000	2,998
1 – 1/10000	2,9998
⋮	⋮
1	Non esiste
⋮	⋮
1 + 1/10000	3,0002
1 + 1/1000	3,002
1 + 1/100	3,02
1 + 1/10	3,2





In questo primo esempio appare evidente come vengono palesate due misconcezioni:

- il limite inteso come processo dinamico di avvicinamento
- il limite inteso come approssimazione via via migliore

Gli altri esempi riportati per farsi una prima idea del concetto di limite sono quelli relativi a due funzioni che presentano asintoto orizzontale e asintoto verticale, e vengono affrontati nel medesimo modo, cioè con tabelle che “approssimano i valori della x e della y”: oltre a rinforzare le due misconcezioni precedenti dunque, questi due esempi successivi ne possono confermare un'altra :

- il limite non viene mai raggiunto

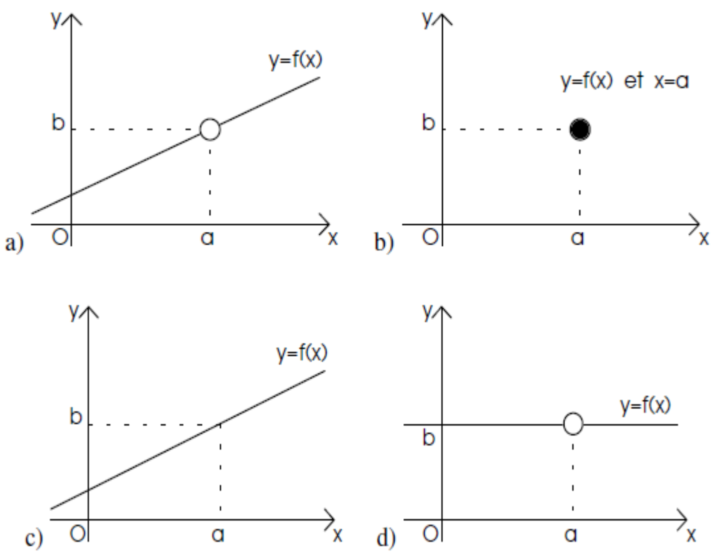
3. **Prima definizione**: viene data la definizione ε- δ di $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$
4. **Seconda definizione**: viene data la definizione ε- δ di $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$
5. **Terza definizione**: viene data la definizione ε- δ di $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$
6. **Quarta definizione**: viene data la definizione ε- δ di $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

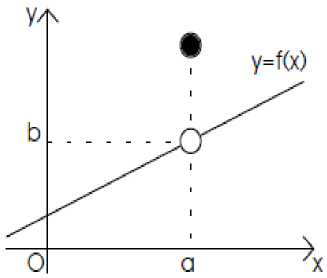
   Le misconcezioni che sorgono qui sono evidenti:

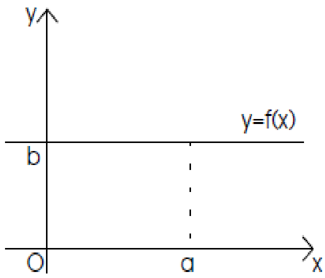
- il limite ha quattro definizioni diverse, quindi sarà quattro cose diverse

Un altro testo molto diffuso nelle scuole superiori, il Bergamini Trifone e Barozzi, cerca invece di evitare la misconcezione sul “non raggiungimento del limite” ponendo subito l'immagine di un grafico di una funzione continua accanto a una discontinua (con la presenza cioè del così detto “buco” , ovvero una discontinuità di terza specie), ma offre poi subito un esempio analitico simile a quello mostrato nell'altro testo, con rappresentazioni analoghe in termini di “buchi”e frecce. Questo secondo testo migliora per la definizione di limite, perché avendo definito in precedenza gli intorni, ne offre una definizione non in termini ε- δ, ma di appartenenza agli intorni : questa potrebbe essere utile se la generalizzasse, e invece la presenta per il solo limite finito, offrendone altre tre per gli altri, e quindi ricadendo sulla percezione che il limite possa avere 4 aspetti diversi.

Questa è dunque l'impostazione tradizionale seguita da libri di testo e molti professori: seguendo tale impostazione riportiamo i risultati ottenuti nel corso di una ricerca sperimentale condotta da Bagni nel 1999, in cui ha sottoposto gli allievi di una classe che avevano seguito le lezioni della loro insegnante che aveva seguito questa impostazione. I ragazzi sono stati sottoposti ad un test in cui veniva richiesto di osservare delle figure (riportate qui sotto) ed indicare quali fossero compatibili con la dicitura $\lim_{x \to a} f(x) = b$



e) 

f) 

I risultati ottenuti sono riportati nella seguente tabella:

a)	compatibile:	18 (67%)		
	non compatibile:	9 (33%)	nessuna risposta:	0 (0%)
b)	compatibile:	5 (19%)		
	non compatibile:	19 (70%)	nessuna risposta:	3 (11%)
c)	compatibile:	21 (78%)		
	non compatibile:	5 (19%)	nessuna risposta:	1 (3%)
d)	compatibile:	12 (44%)		
	non compatibile:	10 (37%)	nessuna risposta:	5 (19%)
e)	compatibile:	17 (62%)		
	non compatibile:	5 (19%)	nessuna risposta:	5 (19%)
f)	compatibile:	12 (44%)		
	non compatibile:	10 (37%)	nessuna risposta:	5 (19%)

Significativa è certamente la bassa percentuale di risposte esatte (44%) ai quesiti (d), (f): può dunque sembrare che il concetto di limite venga svincolato dalla rappresentazione grafica quando la funzione considerata è costante, quindi quando non può essere visualizzato il "progressivo avvicinamento" dei valori di $f(x)$ al limite b (corrispondente al "progressivo avvicinamento" di x al valore a: si ricordi l'impostazione che abbiamo mostrato essere presente nel libro di testo). Da ulteriori indagini sui ragazzi, Bagni nella sua ricerca evidenzia il riscontro di due principali misconcezioni legati a questo approccio tradizionale: ne riportiamo le parole esatte

«Dai risultati del test e dalle interviste menzionate emerge chiaramente che l'uso delle rappresentazioni visuali è importante (e delicato) nella didattica del limite nella scuola secondaria superiore. La varietà dei registri rappresentativi, giustamente auspicata da Duval (1993), non è un obiettivo semplice da raggiungere: talvolta gli stessi grafici cartesiani possono essere fonte di dubbi e di perplessità per l'allievo (fino a contribuire al sorgere di misconcezioni).
Nonostante il campione considerato sia piuttosto esiguo (11), è possibile evidenziare soprattutto la presenza di due misconcezioni principali (che identificheremo con le denominazioni seguenti):

- **Misconcezione della funzione valutata nel punto.** Il valore assunto dalla funzione f per $x = a$ viene interpretato come limite $\lim_{x \to a} f(x) = b$ (e talvolta tale valore è considerato insieme al valore desumibile per $f(x)$ dall'appartenenza di x ad un intorno di a, cioè all'effettivo valore del limite: ciò provoca contraddizioni con il teorema dell'unicità del limite).
- **Misconcezione delle funzioni costanti.** In base ad una (erroneamente intesa) nozione *dinamica* del limite, collegata all'infinitesimo potenziale, alcuni allievi, per considerare $\lim_{x \to a} f(x) = b$, intendono come indispensabile la presenza di un "progressivo avvicinamento" di y al limite b a fronte del "progressivo avvicinamento" di x al punto $x = a$.

Ciò rende ad esempio impossibile la considerazione del limite di funzioni costanti.»

Lo studio di Bagni prosegue poi con un intervento volto a superare queste misconcezioni utilizzando una concezione topologica di limite in termini di intorno, volti ad eliminare l'idea dinamica che l'approccio tradizionale presenta agli allievi.

Un altro tipo di misconcenzione interessante è quella riscontrata da Dimarakis & Gagatsis che, in uno studio del 1997, osservano come l'affermazione secondo la quale il limite è un confine che non può essere raggiunto sembra ben salda nelle menti degli allievi ed è la causa di molte misconcezioni; a tal proposito indicano cinque cause di misconcezioni:

- l'influenza del linguaggio
- la realizzazione di rappresentazioni matematiche a partire da preesistenti frammenti pre-matematici
- i processi collegati alla costruzione di concetti
- l'influenza di esempi specifici
- le errate interpretazioni dell'esperienza personale.

Le misconcezioni rilevate dagli studi illustrati, a mio avviso, possono ritrovare un riscontro storico, e quindi essere affrontate e superate anche da questo punto di vista.
Ad esempio, la "misconcezione della funzione valutata nel punto" per cui gli studenti pensano che il limite di una funzione per x che tende ad un certo valore x_0 sia equivalente a calcolare il valore della funzione in quel punto, a mio avviso si potrebbe superare cercando di fare meglio capire la definizione di continuità, e come essa sia legata ma diversa dal concetto di limite (seppure la utilizziamo implicitamente per il calcolo dei limiti stessi), e l'intreccio storico fra queste due nozioni può essere di supporto per mostrarne la complessità, il legame e la risoluzione finale, la continuità definita mediante il concetto di limite, e non il limite che dava per scontata la continuità fino a Cauchy.
Con l'illustrazione del processo storico della definizione di limite poi è molto semplice mostrare come sia stato necessario separarsi dalle rappresentazioni geometriche specifiche per arrivare alla formulazione rigorosa, e quindi come anche noi dobbiamo separarcene per capire il concetto nella sua profondità e pienezza. Allo stesso modo possiamo trovare un supporto nell'illustrare la storia del concetto di limite anche per tentare di far pervenire gli studenti ad un'idea attuale degli infinitesimi, oltre che ad eliminare la misconcezione del limite come processo dinamico e non statico, o sempre legato ad un'approssimazione.

Capitolo III.3

Lo storia del concetto di limite nei suoi registri rappresentativi e nella sua evoluzione cognitiva da parte degli studenti

«Il suo flusso [del linguaggio] non solo accompagna
quello del contenuto interiore della coscienza,
ma lo accompagna a diversi livelli che vanno
dallo stato di mente dominata da immagini particolari
a quello al quale i concetti astratti e le loro relazioni
sono il solo oggetto dell'attenzione
e che si chiama generalmente ragionamento.
Così solo la forma esteriore del linguaggio è costante;
la sua significazione interna, il suo valore psichico, la sua intensità
variano liberamente secondo l'attenzione
o l'interesse selettivo della mente e anche, inutile dirlo,
secondo lo sviluppo intellettuale generale.»

- Sapir,1921 -

«gli oggetti matematici
non sono direttamente accessibili alla percezione [...]
come sono gli oggetti comunemente detti "reali" o "fisici"[...]
le diverse rappresentazioni semiotiche di un oggetto
matematico sono assolutamente necessarie»

- Duval, 1993 -

Abbiamo già sottolineato come numerose ricerche in campo didattico mostrano che la comprensione profonda del concetto di limite da parte degli studenti non è particolarmente diffusa. Uno degli aspetti più frequentemente osservati è proprio la difficoltà degli studenti di capire il concetto di limite dal punto di vista cognitivo, mentre risulta più facile che riescano a farsi una buona idea del limite matematico dal punto di vista intuitivo: questo porta a un pesante conflitto fra l'immagine cognitiva che si creano gli studenti relativamente al concetto di limite, e la sua definizione. In questo rientrano due importanti considerazioni che riguardano le difficoltà: la prima è l'idea del limite di una funzione sia un processo dinamico, e quindi tutte le quantità infinite e infinitesime vengono automaticamente intese da un punto di vista potenziale; la seconda considerazione è legata in qualche modo alla prima, perché riguarda esattamente il registro con il quale introduciamo e spieghiamo il nostro concetto di limite. Il registro verbale è importante e imprescindibile in un primo momento, ovvero quello dell'introduzione del concetto di limite o di infinitesimo, ma occorre presto separarsi da questo, e sottolineare con i nostri ragazzi che è necessario separarsene, per passare a un registro più simbolico, più matematico potremmo dire, per non lasciare la possibilità di attribuire significati diversi a parole che ognuno potrebbe interpretare a modo proprio.

É evidente che come insegnanti dobbiamo necessariamente introdurre il concetto di limite utilizzando un linguaggio di tipo verbale e con riferimento, almeno in un primo momento, ad un infinito di tipo potenziale in quanto più facilmente comprensibile, ma è bene tenere a mente che un registro verbale non potrà essere definitivo, in quanto, proprio come è sottolineato dall'evoluzione storica del nostro limite, ed in particolare del modo di intendere gli infinitesimi, è troppo legato ai singoli significati che ciascuno gli può attribuire, anche legati ad una certa cultura e società, e quindi può dare adito a dubbi e misconcezioni. Ai nostri ragazzi si potrebbe fare un accenno a questa problematica proprio in sede iniziale, cioè dicendogli che gli sarà introdotto un concetto che intuitivamente, così come è nato, è molto facile, ma la cui formalizzazione richiederà un processo lungo e un poco faticoso per loro, esattamente come lo è stato per i protagosisti della storia reale del suo sviluppo, e potremmo anche dirgli che gli verranno mostrati i motivi per i quali non possiamo restare legati al concetto intuitivo e al registro verbale, perché gli andremo mostrare le difficoltà e le diatribe che tale registro ha creato nel corso della storia. Si potrebbe infatti osservare che in realtà ogni registro che possiamo utilizzare, in particolar modo però quello verbale, non ha in realtà l'unica dimensione legata al registro stesso, perché la natura del registro dipende fortemente dalla cultura della società che lo utilizza, e spesso è indivisibilmente e tacitamente legato ad altri aspetti concettuali e culturali propri della società stessa, come concetti impliciti in alcuni registri, sottintesi e accettati dalla comunità che utilizza tali registri.

Accanto al concetto intuitivo, altri studi (come ad esempio quello di Sfard del 1991) mostrano come, in riferimento al processo di formazione dei concetti, si potrebbe anche partire e considerare prima una concezione operativa, per poi passare dopo a quella strutturale più profonda del concetto in se stesso: anche in quest'ottica, per quello che riguarda il nostro concetto di limite, ritroviamo lo stesso processo avvenuto storicamente. Il limite, più o meno esplicitamente inteso, diciamo il calcolo infinitesimale, veniva utilizzato nelle applicazioni, fra l'altro con ottimi successi, fin dalla sua invenzione, ma solo nel lavoro di Cauchy, quasi 150 anni dopo, inizia il vero approccio alla sua comprensione piena e profonda: così, dal punto di vista didattico, potremmo fare approcciare i nostri allievi lentamente a questo concetto, per farglielo maturare con la calma necessaria, prima capendolo intuitivamente e magari osservandolo dal punto di vista operativo, finché, familiarizzando con esso sempre meglio, arriveranno a maturare il concetto per capirlo nella sua essenza e completezza.
Cercheremo dunque di mostrare nel seguito qualche passo rilevante della storia del concetto di limite mostrata in precedenza, in cui ci pare particolarmente rilevante il parallelo fra l'evoluzione storica del concetto e la crescita cognitiva dello stesso concetto nella mente dei nostri studenti, mostrando in particolar modo attenzione ai diversi registri di rappresentazione e al passaggio da un idea dinamica di limite verso quella statica, e quindi il passaggio da un infinito, e infinitesimo, potenziale verso quello attuale.

In realtà la distinzione fra infinito potenziale e attuale è molto antica, risale cioè ai tempi di Aristotele, il quale, pur rifiutando la possibilità di un infinito attuale, aveva ben chiaro la distinzione fra i due diversi aspetti: la differenza è sottile ma profonda, in quanto l'infinito, o infinitesimo, potenziale riguarda la possibilità di una grandezza di diventare sempre più grande, o sempre più piccola, di una qualunque altra grandezza data, e quindi un'idea dinamica del poter diventare più grandi o più piccoli, mentre l'idea di infinito, o infinitesimo, attuale, riguarda l'essere di una grandezza sempre più grande, o più piccola, di un'altra grandezza assegnata, per quanto grande, o piccola, questa possa essere. Geymonat definisce così i due infiniti:

«Si dice che una grandezza variabile costituisce un "infinito potenziale" quando,
pur assumendo sempre valori finiti, essa può crescere al di là di ogni limite;
se per esempio immaginiamo di suddividere un segmento con successivi dimezzamenti […]
il numero delle parti a cui perveniamo, pur essendo in ogni caso finito, può crescere ad arbitrio.
Si parla invece di "infinito attuale" quando ci si riferisce
ad un ben determinato insieme, effettivamente costituito da un numero illimitato di elementi;

se per esempio immaginiamo di aver scomposto un segmento in tutti i suoi punti,
ci troveremo di fronte a un infinito attuale,
perché non esiste alcun numero finito che riesca a misurare la totalità di questi punti»

Nella nostra storia questa idea del divenire l'abbiamo trovata nel metodo di esaustione, nel quale abbiamo cercato di individuare alcuni caratteri precursori della nostra analisi infinitesimale : ribadiamo qui che il metodo di esaustione è ben lontano dal poter essere assimilabile con un limite reale in senso moderno, ma in esso ritroviamo comunque l'immagine di due grandezze la cui differenza è sempre più piccola, e se pensiamo ad una possibile rappresentazione e visualizzazione geometrica, la possiamo far toccare con mano ai nostri studenti, perché vedono come quelle due differenze divengono via via sempre più piccole, e come il processo di avvicinamento non abbia un termine. Alcuni autori hanno mostrato come sarebbe possibile esprimere nel moderno registro simbolico il metodo di esaustione: questo potrebbe rivelarsi un buon esercizio dal punto di vista didattico, ma certamente, in accordo con numerosi autori quali Grugnetti, Kline e Bagni, dal punto di vista storico ed epistemologico riportare un concetto antico in termini moderni non ha molto senso, proprio perché svuoterebbe il punto di vista dell'approccio storico della matematica proprio di quelle componenti culturali e legate alla società che ci stiamo preoccupando in qualche modo di trasmettere ai nostri studenti mediante l'utilizzo della storia, per far si che percepiscano la matematica come un processo culturale e non come un invenzione per torturare gli studenti!

La nascita del calcolo differenziale, come abbiamo visto, si fa risalire alla seconda metà del XVII secolo, per opera di Leibniz e Newton, e a partire da quel momento l'implicita opposizione fra infinito attuale e potenziale si fa evidente: ciascuno dei matematici, nella creazione del metodo, da forma e realizzazione ad una loro primitiva intuizione, che per Newton è dettata dallo studio della fisica, mentre in Leibniz ha un'impostazione e un'origine più di tipo algebrico. E in Leibniz, più ancora che in Newton, si può osservare una prima ambiguità, in termini di infinito attuale e potenziale, presente nei suoi differenziali: infatti, come osserverà Enriques nel 1938, non è chiaro se gli incrementi utilizzati da Leibniz debbano essere interpretati solo da un punto di vista di infinitesimo potenziale, cioè come quantità variabili ed evanescenti, o abbiano dentro di loro anche un aspetto di infinitesimo attuale.

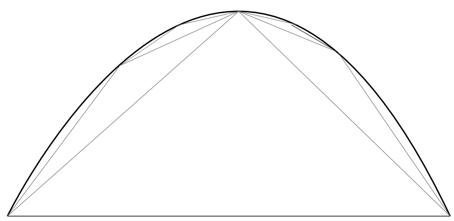
«La derivazione viene considerata da lui come quoziente di due *differentiae*
o (come si è detto in seguito secondo J. Bernoulli e L. Eulero) di due differenziali...
Se questi incrementi vadano intesi soltanto in senso potenziale,
cioè come quantità variabili evanescenti,
ovvero staticamente come infinitesimi attuali
non appare chiaramente nell'opera di Leibniz»

L'idea di queste quantità evanescenti è importante sotto molteplici aspetti: l'intuizione relativa ad una nuova teoria infinitesimale che ebbe Leibniz, porta già dentro di se il seme dell'introduzione di numeri "ideali" che possono essere considerati infinitamente piccoli se comparati a qualunque altro numero reale. Quella di Leibniz fu ovviamente solo un'intuizione, non ritroviamo traccia, ne in lui, ne nei suoi successori di uno sviluppo razionale di questa idea: se prendiamo ad esempio Euler, considerato uno dei più grandi matematici della storia, egli rifiutò la nozione degli infinitesimi come quantità inferiori ad una qualunque altra ma differenti dall'essere nulle; forse Euler era consapevole dei problemi relativi all'uso di infinitesimi attuali, per questo non considera gli infinitesimi nulla di più che constanti numeriche, preferendo un approccio all'analisi di tipo diverso (nella sua *Introductio in analysin Infinitorum* infatti egli studia gli sviluppi in serie, basando la sua interpretazione su concetti iperreali).
Ricordiamo ancora una volta che la distinzione fra infinito potenziale ed attuale fu fatta da Aristotele, ma la possibilità e l'uso dell'infinito attuale veniva rigorosamente rifiutata dagli aristotelici, e questa posizione influenzò per lunghissimo tempo l'evoluzione dell'idea dell'infinito e

dell'infinitesimo: come nota D'Amore

> «Il divieto di Aristotele ai matematici di far uso dell'infinito attuale
> va interpretato come un vero e proprio dogma... Più di uno studioso arriverà,
> nel Medioevo e nel Rinascimento, ma anche in tempi a noi assai più vicini,
> a scandagliare il senso stesso dell'infinito attuale...
> Ma la pesante eredità dello stagirita sarà sempre presente»

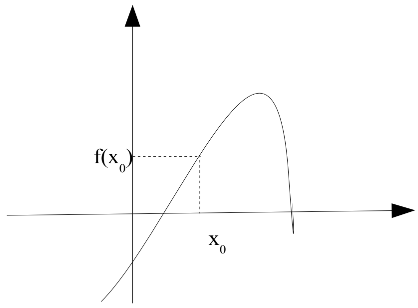
Facendo il punto didattico, un'introduzione storica di questo tipo ai nostri studenti, cioè con qualche accenno al metodo di esaustione e mostrando l'intuizione di Leibniz che porta alla nascita di queste quantità infinitesime, magari già anticipando anche la questione della diversa percezione fra infinitesimi potenziali ed attuali, dovrebbe averci portato fondamentalmente a delineare in loro l'idea intuitiva di limite, e di quanto tratta l'analisi infinitesimale in genere. In particolare abbiamo potuto offrirgli una rappresentazione visiva di due quantità la cui differenza può diventare sempre più piccola facendogli vedere le costruzioni del metodo di esaustione, come ad esempio quella mostrata nel nostro capitolo I.1

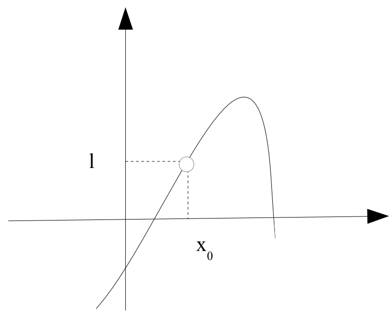


Accanto a questo aspetto visivo, abbiamo potuto introdurre il concetto intuitivo che sta dietro all'analisi infinitesimale, mostrandogli fin da subito le debolezze legate al registro in cui esso si esprime, legate a concetti legati alle tradizioni culturali dell'epoca e alle conseguenti possibili interpretazioni, e già come esse possono essere soggette a critiche proprio per la loro mancanza di rigore ed espressione riconosciuta a livello oggettivo.

La nozione di limite non è dunque antica come quella del metodo degli infinitesimi: il primo a parlare in termini esplicite di limite fu J.Wallis (1616-1703) nella sua opera del 1655 *Arithmetica infinitorum*, nella quale introduce un concetto aritmetico di limite di funzione come un numero la cui differenza dalla funzione si può rendere più piccola di una data quantità assegnata; questa definizione è ancora molto vaga, così come quella che ritroviamo in altri matematici del XVII secolo, quali P. Mengoli o J. Gregory, in molti altri casi poi l'idea di limite veniva poi associata a quella del calcolo delle serie geometriche.
In questi termini, si può paragonare quanto afferma Gregory riferendosi al paradosso di Achille e la tartaruga, a una delle principali misconcenzione dei nostri ragazzi che pensano che il fatto che una successione s_n tende a un limite l ($s_n \rightarrow l$), significhi che i valori della successione s_n si avvicinino proprio al valore limite l, pur senza raggiungerlo: in questa situazione il limite della funzione è considerato come un processo dinamico, cioè considerato nel senso dell'infinito potenziale invece che attuale. E infatti, in Gregory ritroviamo il concetto di limite espresso proprio in questi termini: ovvero come quel valore che la progressione dei valori non può raggiungere, sebbene questa si possa allungare indefinitamente, cioè inteso come quel valore al quale i termini della progressione

si possono avvicinare il più possibile. La questione incentrata sul fatto se una successione può raggiungere o no il suo limite, essendo un punto problematico, potrebbe dare spunto ad una discussione, affrontabile in classe, incentrata proprio su una riflessione filosofica e matematica su questo raggiungimento o meno del limite della successione : alcune successioni, per esempio quelle costanti, raggiungono realmente il loro limite, e la questione fondamentale è se un prototipo di successione tipica può via via andare a raggiungere il suo limite all'infinito in qualche senso, infatti nell'idea del processo dal punto di vista potenziale non può avvenire questo raggiungimento. Ecco qua dunque il conflitto cognitivo: un'idea intuitiva rappresentata anche da qualche immagine che la supporta, entra in contrasto con la definizione formale della matematica e qualche caso specifico, fra l'altro è interessante sottolineare anche come anche un registro di rappresentazione attuale può presentare una diversa misura di avvicinamento. Abbiamo ora fatto riferimento alle successioni per riallacciarci alla misconcezione storica riscontrabile il Gregory, ma potremmo riferirci anche alle funzioni con esempi di questo tipo





Spesso capita che se si mostra un grafico del primo tipo il valore $f(x_0)$ non viene considerato come limite in quanto viene raggiunto dalla funzione, mentre il secondo, essendo per qualche motivo un "pallino vuoto", quindi escluso, è percepito e inteso comodamente come il limite della funzione.

Seguendo la visione tradizionale, il primo matematico ad occuparsi in modo rigoroso dei problemi del calcolo infinitesimale fu Cauchy: in realtà, in accordo con Bagni, il suo modo di affrontare il problema è rigoroso dal nostro punto di vista contemporaneo, perché a loro modo tutti i matematici precedenti, come Wallis, piuttosto che Lagrange o D'Alembert, avevano affrontato i problemi con rigore e nel miglior modo possibile. Diciamo che è con Cauchy che inizia quel periodo della matematica condotto con un attenzione maggiore riguardo al rigore come lo intendiamo oggi, ed è interessante pensarne al motivo principe che spinge a questo rigore più profondo e duraturo : il *Cours D'Analyse* di Cauchy è un libro scritto a puro scopo didattico, e proprio per questo motivo principe per Cauchy si doveva cercare il rigore all'interno dell'analisi, per renderla più facilmente comprensibile a chi si apprestava al suo studio, oltre che per dare lo spunto agli stessi studenti per le ricerche future (come scrive esattamente egli stesso!!)

«[...]comportando la felice necessità di porre maggiore precisione alle teorie, […]
torneranno a profitto dell'analisi e
forniranno un certo numero di argomenti di ricerca che non sono privi di importanza.»

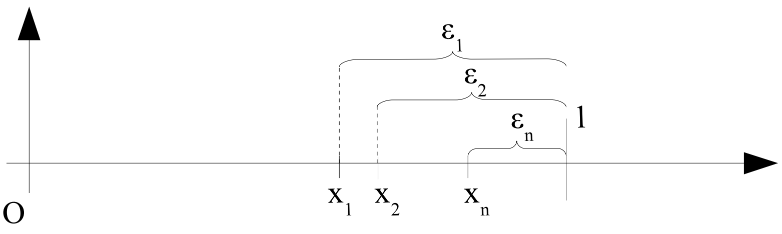
Riprendendo la definizione di limite che dà Cauchy, possiamo osservare come prima cosa che egli introduce la fondamentale distinzione fra quantità costanti e variabili

«Allorché i valori successivamente assunti da una stessa variabile
si avvicinano indefinitamente a un valore fissato,
in modo da finire per differirne di tanto poco quanto si vorrà,
quest'ultimo è chiamato il limite di tutti gli altri.»

La prima apparizione della definizione rigorosa di limite è espressa ancora una volta in un registro di tipo verbale, e ancora un volta si può effettuare l'esercizio didattico della sua traduzione in registro simbolico, che però certamente non rispecchia ancora l'aspetto storico: Cauchy non ritiene ancora necessario, o forse il suo contesto storico e la sua cultura ancora non richiede il passaggio ad un registro di tipo simbolico. Quello che possiamo notare è certamente come, al di là dell'utilizzo di un registro ancora di tipo verbale, la definizione di Cauchy lascia certamente adito a meno dubbi riguardanti la natura degli infinitesimi o delle differenze leibniziane: il registro verbale si è già in qualche modo evoluto, sostituendo a quelle tipiche diciture quali "piccolo quanto si vuole", " quantità evanescente", "tende a", o ancora "meglio approssima", un linguaggio matematico comunque ben stabilito in termini di differenze. Si ha una variabile, e anche con l'utilizzo di questo termine potremmo iniziare ad aiutare i nostri studenti a togliersi l'idea di un movimento (la variabile matematica non è una variabile fisica come il tempo, che scorre con l'idea del dinamico, la variabile è una certa quantità, rappresentata da una certa lettera, x o y solitamente, che non si muove, ma assume semplicemente valori diversi, in modo dipendente o indipendente da un'altra variabile), perché sono i valori diversi che può assumere questa variabile che si va ad avvicinare a qualcosa, cioè un dato valore, ma non a caso, o in modo personale, Cauchy ci dice come devono avvicinarsi, ovvero in modo da differirne poco quanto si vuole – è vero che qui c'è un linguaggio ancora legato alla decisione del soggetto, ma in fondo questa arbitrarietà deve restare, proprio perché questa differenza si può rendere più piccola di qualunque altra cosa …
Mostrato allora ai nostri ragazzi cosa fa Cauchy con il suo limite, sottolineato che il registro di cui Cauchy si accontenta è ancora quello verbale, possiamo suggerire ai nostri studenti l'esercizio cui accennavamo prima, ovvero tradurre la definizione verbale di Cauchy in un registro visualizzabile e poi in uno simbolico: questo si potrebbe fare anche anticipando ai ragazzi quello che sarà il passaggio storico successivo con Weierstrass, e quindi la formalizzazione ormai definitiva. Se ai ragazzi non è stato mostrato il punto di arrivo, la traduzione in linguaggio simbolico della definizione di Cauchy potrebbe essere un passaggio divertente per fargli fare l'atto della creazione matematica di un concetto formale, e quindi incentivarli ulteriormente, con un atto creativo ed istruttivo.
Quello che potrebbe uscirne potrebbe essere la seguente traduzione:

"i valori successivamente assunti da una stessa variabile"	$x=x_1,\ x=x_2,\ \dots\ x=x_n$
"si avvicinano indefinitamente a un valore fissato,"	*fisso il valore l*
"in modo da finire per differirne di tanto poco quanto si vorrà,"	$x_1 - l < \varepsilon_1,\quad x_2 - l < \varepsilon_2,$ $x_3 - l < \varepsilon_3,\ \dots.\ x_n - l < \varepsilon_n$
" quest'ultimo è chiamato il limite di tutti gli altri."	*x tende a l*

A livello di visualizzazione i potrebbe fare una rappresentazione come segue, dove si vede che non è una x che si avvicina (rappresentata solitamente dalle frecce), ma sono i diversi valori assunti dalla stessa variabile x che si fanno sempre più prossimi al valore l fissato:



A questo punto siamo arrivati quasi a raggiungere il nostro obiettivo, e quindi occorre fare l'ultimo passo verso l'opera di Weierstrass per aver creato accanto all'idea intuitiva e dinamica del processo di limite, anche la formalizzazione del concetto stesso: passo dopo passo dunque i nostri studenti dovrebbero aver raggiunto una quasi completa assimilazione e comprensione del concetto di limite.
Weierstrass completa e migliora il lavoro dei suoi predecessori quali Bolzano, Cauchy e Abel che per primi si erano impegnati a cercare di costruire l'impianto più formale possibile all'analisi infinitesimale: Weierstarss cerca di evitare ogni tipo di riferimento all'intuizione (come ancora si può riscontrare in piccola parte in Cauchy quando parla di "differirne poco quanto si vorrà") e cerca anche di evitare le frasi del tipo "variabili che si avvicinano al limite" perché suggeriscono l'idea di un tempo e di un movimento (seguendo Kline, 1972). Si stanno cercando i fondamenti dell'analisi, si deve cercare il rigore, e quindi occorre depurare il linguaggio da ogni cosa che può suggerire riferimenti all'intuizione o a qualcosa di esterno, ed anche l'idea delle variabili che si muovono deve essere evitata, proprio perché porta a quella visualizzazione di tipo fisico del tempo che scorre che non si vuole più.
Come abbiamo visto nella parte più strettamente storica, Weierstrass dà una moderna definizione di limite e di funzioni continue: infatti afferma che una funzione che manda i valori x in $f(x)$, è continua in un suo certo punto x

«Se è possibile determinare un valore δ tale che
per ogni valore di h,
minore in valore assoluto di δ,
$f(x+h)-f(x)$ sia minore di una quantità ε arbitrariamente piccola[...]»

E per la definizione di limite diceva appunto

«Se, data una grandezza qualsiasi ε, esiste una δ_0 tale che per $0<\delta<\delta_0$
la differenza $f(x_0 \pm \delta)-L$ è minore di ε in valore assoluto,
allora L è il limite di $f(x)$ per $x=x_0$»

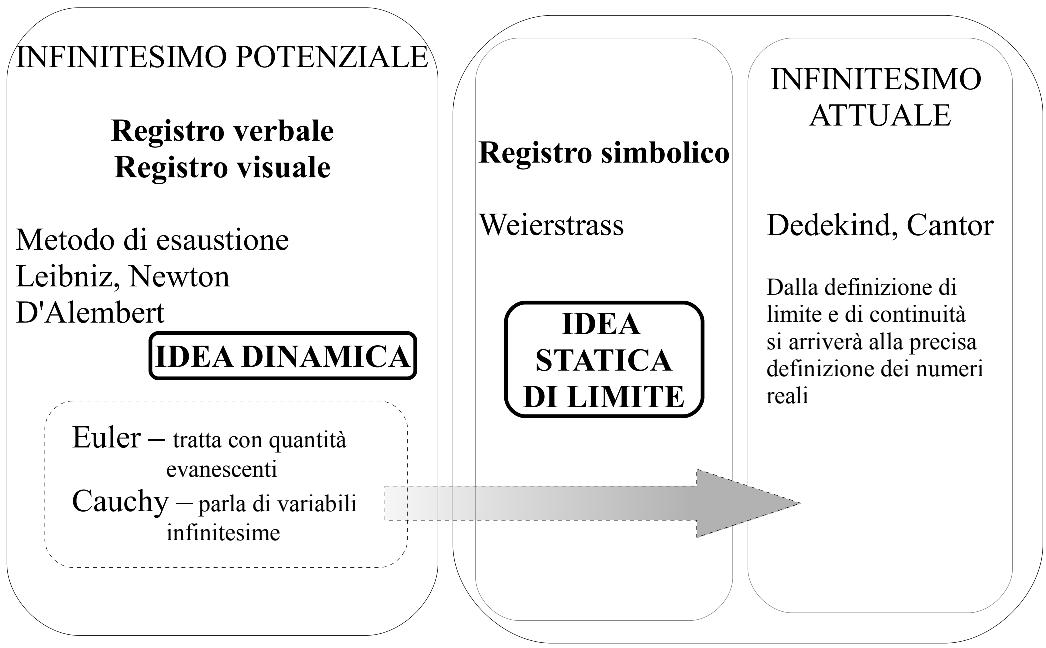
Osservando, e mostrando ai nostri studenti, il registro di rappresentazione utilizzato da Weierstrass nella sua definizione, possiamo vedere come egli utilizza già una moderna rappresentazione simbolica : in questo caso il nostro compito di "traduzione" in linguaggio matematico andrebbe solo a intervenire sui simboli che noi utilizziamo per i quantificatori universali "per ogni" $\forall$ ed "esiste" $\exists$ .Possiamo pertanto concludere che è la definizione di Weierstrass, anche chiamata definizione ε-δ, che finalmente ci conduce alla definizione di limite nella moderna e simbolica rappresentazione

“Se, data una grandezza qualsiasi ε, ”	$\forall \varepsilon$
“esiste una δ_0 tale che per $0<\delta< \delta_0$ ”	$\exists \delta_0 \ : \forall \delta, \ 0<\delta<\delta_0$
“la differenza $f(x_0 \pm \delta)-L$ è minore di ε in valore assoluto, ”	$\lvert f(x_0 \pm \delta)-L\rvert<\varepsilon$
“allora L è il limite di $f(x)$ per $x=x_0$”	$L=\lim_{x \to x_0} f(x)$

Sottolineiamo ancora una volta il fatto che è fuorviante pensare e fare riferimento a un solo registro di rappresentazione simbolica quando trattiamo argomenti matematici dal punto di vista storico, perché ogni comunità in realtà, riferita al proprio contesto sociale e culturale e al proprio storico e scientifico, utilizza il registro che gli pare più adeguato: noi diciamo che la definizione definitiva e formalmente corretta e assimilata è quella ε-δ di Weierstrass, ma questo perché è quella che la nostra comunità scientifica ha accetto ed istituzionalizzato in quel sapere scientifico che noi trasmettiamo ai nostri studenti. Gli studenti di Cauchy certamente accettavano, dopo aver superato anche loro i loro ostacoli e i loro dubbi cognitivi, quella che gli veniva fornita da Cauchy, perché quella all'epoca era il sapere riconosciuto ed istituzionalizzato, e pertanto quello che si doveva trasmettere affinché potesse essere appreso nel migliore dei modi.

Dal punto di vista didattico, la principale difficoltà dei nostri studenti (o forse potremmo dire degli studenti di Weierstrass e per tutti i successivi!!!) nel comprendere la definizione ε-δ è quella rappresentata dal carattere statico che assume la teoria formali dei limiti, in opposizione con quello dinamico del primo approccio cognitivo (ed intuitivo), e dalla formalizzazione che ne consegue, proprio per depurarla da ogni sorta di immagine e di soggettività.
Un'altra difficoltà che riscontrano molto spesso gli studenti, ancora a mio avviso legata all'immagine dinamica, o meglio cinematica del limite, è la questione di partire scegliendo un ε che si riferisce al valore assunto dalla funzione e non alla variabile indipendente x: i ragazzi hanno imparato, non senza fatica, che è sulla x che possono agire, ed ora si ritrovano per la prima volta a dover partire dalla y, e quasi sempre non capiscono perché quell'intorno arbitrariamente piccolo non si poteva scegliere direttamente sulla x. Il passaggio gli sarà realmente chiaro, e noi insegnanti avremo vinto il superamento del loro ostacolo, quando davvero riusciranno a convincersi che l'idea del limite è statica, e che proprio fissando l'arbitrarietà sulla variabile dipendente, riesco a fermare un certo intorno sulla variabile dipendente, con il quale tutto funziona perfettamente!

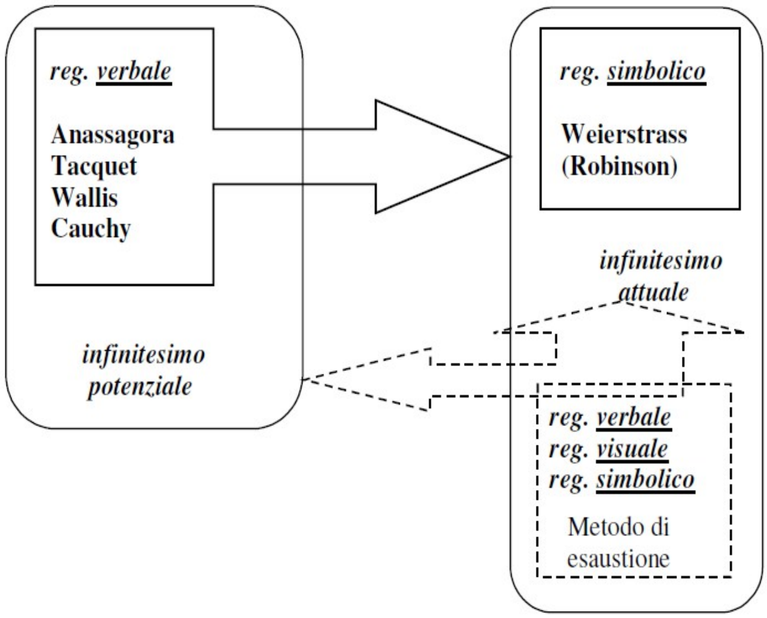
I principali passi dello sviluppo cognitivo del concetto di limite, dal punto di vista storico, che come abbiamo già più volte ribadito, può essere assimilabile allo sviluppo cognitivo che devono effettuare i nostri ragazzi nel corso del loro percorso formativo, può essere riassunto nello schema seguente (seguendo in particolare Bagni, 2001)



Seguendo ancora Bagni (2001), possiamo dire che l'uso dei registri rappresentativi per analizzare sia gli aspetti storici che quelli didattici della nozione di limite può essere un'interessante traccia da seguire, anche se la questione da considerare è che non è completamente chiaro come il processo filogenetico (cioè la storia evolutiva del concetto alla luce delle relazioni reciproche, di discendenza e di affinità con le sue eventuali versioni precedenti), si ponga in relazione con quello ontogenetico (ovvero le varie fasi del concetto che si forma il soggetto per arrivare alla comprensione completa dello stesso).

«La nozione di limite si presenta in un certo numero di forme diverse.[...]
Tutte queste hanno in comune un processo di
avvicinamento arbitrario ad un fissato valore (il limite).
In ogni caso, lo stesso simbolismo è usato per entrambi i processi di convergenza
e anche per il concetto di limite»

Seguendo Bagni dunque possiamo concludere che l' evoluzione storica dei concetti infinitesimali (ed in particolare del basilare concetto di limite) si è svolta e si svolge parallelamente all'evoluzione del linguaggio e delle modalità di rappresentazione: ciò è stato ed è causa di reciproche influenze che una corretta analisi storica non può ignorare (e delle quali la moderna ricerca in Didattica della Matematica deve tenere conto).
Ricordiamo inoltre che anche l'uso dei nuovi strumenti tecnologici induce negli allievi comportamenti di validazione legati al confronto di più punti di vista piuttosto che alla ricerca di dimostrazioni decisive (Artigue, 1998): ciò favorisce un'articolazione di registri semiotici che, se non controllata, potrebbe porre dei problemi di concezione della razionalità matematica (Trouche, 1996; Artigue & Al., 1997; Cantoral, 1998), legandola come in passato solo a rappresentazioni specifiche, seppur più varie possibili.
E sintetizzando il processo evolutivo in uno schema, avremo il seguente (ancora in Bagni, 2001):



Tall (2001) invece, sempre sulla stessa linea di un approccio storico, sostiene che lo sviluppo storico ci consente di considerare approcci diversi, riferiti ad esempio ad un'idea dinamica o statica del limite, oppure con riferimento al concetto di infinitesimo potenziale o attuale, o ancora andandoci a riferire ai diversi registri di rappresentazione: naturalmente è molto difficile, dal punto di vista didattico, introdurre la nozione di limite senza riferirci al nostro "procept" di limite (ovvero l'amalgama di tre componenti: il processo che produce la creazione di un oggetto matematico e il simbolo che viene utilizzato per rappresentare il processo e/o l'oggetto).

Fra i problemi cognitivi che intervengono nell'apprendimento della nozione di limite, c'è anche quello del passaggio dal discreto al continuo: questo tipo di passaggio è principalmente un passaggio di tipo culturale, e in questi termini un percorso e alcune questioni di tipo storico possono risultare essenziale nell'approccio cognitivo personale a questo passaggio e andare quindi ad evitare difficoltà successive che potrebbero sorgere.

Nonostante le numerose ricerche volte a chiarire come si potrebbe introdurre un approccio storico, quali siano i vantaggi effettivi nel possibile uso di diversi registri e l'evoluzione storica del concetto, per quali studenti e/o insegnanti potrebbe rivelarsi più utile, numerose questioni sono ancora aperte e in sospeso. Ad esempio, ancora riprendendo Bagni (2001)

«c'è un possibile parallelismo fra lo sviluppo storico dell'idea degli infinitesimi,
e lo sviluppo all'interno della comprensione della stessa da parte degli studenti: cosa segue da ciò?
Per esempio, lo studente sarà realmente aiutato conoscendo la storia della matematica?
Qual'è l'importanza della lettura di fonti storiche?
E qual'è il ruolo dell'insegnante?
E come interviene la formazione dell'insegnante e che ruolo ha nell'eventuale uso
di un parallelismo con la storia della matematica?»

Bagni propone infine una riflessione finale, sulla quale mi trovo in pieno accordo: usando esempi tratti dalla storia della matematica si possono effettivamente introdurre più facilmente alcuni argomenti fondamentali, come ad esempio l'idea statica piuttosto che dinamica del concetto di limite in riferimento ai diversi registri semiotici utilizzati; un'introduzione di questo genere permette un'interessante analisi a priori delle difficoltà incontrate dagli studenti e mostra la possibilità di un nuovo modo per superare ostacoli classici. Naturalmente non si vuole pensare che mostrare agli studenti i problemi incontrati nello sviluppo del sapere nel corso del suo sviluppo storico li aiuterà necessariamente nel superare le loro difficoltà cognitive, anche perché, come abbiamo più volte sottolineato, la conoscenza matematica è sempre stata, come tutte le altre d'altra parte, influenzata e radicata nel contesto culturale e sociale dell'epoca in cui si sviluppa, e come tale soggetta a diverse credenze dalla nostre, delle quali i nostri studenti non possono preoccuparsi. Ma usando anche solo qualche esempio tratto dalla storia, noi insegnanti, possiamo ottenere uno strumento in più che ci può aiutare a condurre i nostri studenti verso una comprensione più completa ed esauriente del concetto di limite, anche solo per la percezione dell'importanza del concetto che stiamo trattando, sottolineandone l'evoluzione storica e i dibattiti radicati nelle varie epoche che tale concetto ha seguito nel corso dei secoli.

Capitolo III. 4

Dallo studio della matematica verso uno studio storico epistemologico della creazione dell'insieme dei numeri reali

«Senza il Numero,
niente può essere pensato o conosciuto:
esso ci insegna tutto ciò
che è sconosciuto e incomprensibile.»
- Filolao, V sec. A.C. -

Una questione che mi capita di constatare, non senza rammarico, molto spesso con i miei ragazzi a lezione, è quella che non hanno un'idea ben precisa di cosa siano veramente i numeri reali e soprattutto di come si costruiscono: di solito quello che sanno è che l'insieme dei numeri reali è “quello dove ci possono stare le radici (di solito aggiungono anche quadrate, come se le altre non fossero degne di nota!)”.
Nonostante si possa definire in modi diversi, l'insieme R dei numeri reali è unico, è cioè un isomorfismo chiuso rispetto tre strutture essenziali: la struttura algebrica di corpo commutativo per le operazioni di somma e moltiplicazioni, la struttura di ordine totale, e la struttura topologica che si concentra sulle proprietà invarianti per le applicazioni del continuo. Certamente se dicessimo questo ad una classe di liceo, probabilmente otterremmo un effetto ancora peggiore relativamente alla loro percezione e comprensione dei numeri reali.
Noi sappiamo però che queste tre strutture non sono fra loro indipendenti, ma la compatibilità fra la struttura topologica e le altre due permette di ragionare relativamente agli intorni degli elementi di R invece che direttamente sui suoi elementi, e questo è permesso proprio dalla nozione di limite: per questo potremmo riallacciarci alla nostra storia proprio per cercare di offrire ai nostri studenti una migliore e più profonda comprensione di questo insieme dei numeri reali, che non sia cioè solo il “posto” dove sistemare la radice di due!!!
La compatibilità fra le tre strutture (corpo commutativo, ordine totale e topologica) caratterizza i numeri reali come insieme completo: è questa proprietà topologica fondamentale che distingue R dall'insieme dei numeri razionali Q. Dal punto di vista insiemistico, la completezza di R “riempe i buchi” che sono presenti in Q. In alcune definizioni dei reali è impostata prima la nozione di limite rispetto la completezza per poter caratterizzare la continuità di R : è ad esempio quello che per primo fece Cauchy.
Con il nostro approccio di tipo storico per il concetto e la definizione di limite, si potrebbe arrivare a mostrare ai ragazzi, se non le dettagliate costruzioni, almeno la completezza di R, intesa come coerenza fra completezza e nozione di limite.
Tuttavia, dobbiamo fornire un chiarimento epistemologico su questo rapporto: si possono analizzare le principali costruzioni dei numeri reali della storia, e le connessioni epistemologiche tra loro, al fine di evidenziare la relazione fra queste strutture e nozione di limite.
In questa storia dell'evoluzione dei numeri reali possiamo riconoscere tre grandi momenti

1. la costruzione della teoria dei rapporti fra grandezze per opera di Euclide
2. l'evoluzione contemporanea del concetto di numero reale e della nozione di limite nell'epoca

da Stevino a Cauchy
3. la costruzione dell'insieme dei numeri reali di Dedekind e Cantor e l'assiomatizzazione secondo Hilbert

La tabella seguente mostra in modo riassuntivo i principali passi dell'evoluzione del concetto e dell'idea di numero reale che possiamo incontrare e riscontrare all'interno della nostra storia del concetto di limite

	NUMERO COME RAPPORTO	**RELAZIONE FRA NUMERO E LIMITE**	**EVOLUZIONE CONCETTO DI LIMITE**
Nozione PROTOMATEMATICA dei numeri reali : relazione d'ordine totale. Non presenti operazioni.			
EUCLIDE IV-III sec. a.C.	- costruzione dei rapporti per relazioni di uguaglianza - esistenza di rapporti commensurabili e incommensurabili - irrazionali non oggetto di studio	metodo di esaustione come strumento per mostrare l'uguaglianza di due rapporti e per fare calcoli approssimati	col metodo di esaustione le differenze fra grandezze diventano piccole quanto si vuole
Nozione PARAMATEMATEMATICA dei numeri reali: relazione d'ordine totale. Presenza di operazioni geometriche e continuità geometrica			
STEVIN 1548-1620	Rapporto = numero	tutti i rapporti sono approssimabili con numeri decimali	approssimazione decimale
NEWTON 1642-1727	Numero = rapporto astratto	numero oppure limite come rapporti astratti	metodo delle flussioni : rapporto ultimo fra due quantità che decrescono sempre di più – approssimazione monotona-
D'ALEMBERT 1717-1783	Rapporto commensurabile = numero Rapporto incommensurabile NO numero	irrazionali come limite dei razionali	nozione di limite di una grandezza = approssimazione vicina quanto si vuole ma senza mai raggiungerla e sorpassarla -approssimazione monotona -
CAUCHY 1789-1857	Rapporto = numero Numeri con segno + o - = quantità insieme dei numeri positivi e negativi	definisce cosa vuole dire che x tende ad un valore a	nozione di limite di una successione numerica dal punto di vista non monotono

Nella tabella viene mostrato come l'idea di numeri, in particolare dei numeri reali, anche se la loro accezione non è la stessa che intendiamo noi oggi, è legata strettamente al rapporto, e in qualche modo si può ricondurre anche alla lenta evoluzione de limite.
Anche la storia dei numeri reali dunque ha origini molto antiche, risalendo la scoperta dei numeri irrazionali già alla scuola pitagorica: questi numeri ovviamente non fecero mai parte dello studio matematico, anzi, proprio per la loro incalcolabilità, venivano accuratamente evitati (pensiamo ad esempio alla leggenda di Ippaso gettato in mare per aver fatto trapelare il segreto dell'irrazionalità della radice di due!!), e ancora nell'opera di Euclide si tratta la teoria dei numeri solo dal punto di vista dei rapporti di grandezze commensurabili, seppur avesse ben presente l'esistenza di rapporti anche incommensurabili. Volendo forzare il riferimento al nostro concetto di limite *ante litteram*, anche in questo caso possiamo riferirci al metodo di esaustione, nel quale però non si fa alcun accenno esplicito ad un collegamento con i numeri commensurabili o incommensurabili: il metodo di esaustione viene usato in termini ancora di rapporto, nel senso che viene utilizzato per mostrare l'uguaglianza di rapporti e quindi dare sempre migliori approssimazioni, dal punto di vista strettamente numerico si potrebbe pensare al metodo di esaustione solo per la creazione di differenze sempre più piccole fra una grandezza calcolata e quella che essa approssima. Ma nuovamente questa è una forzatura che spesso si vuole vedere: nel contesto storico euclideo o pitagorico non si fa accenno ad alcuna natura o tipologia di numero non esprimibile i termini di rapporto.
Una nozione realmente matematica dei numeri si inizia ad avere solo a partire dal XVI Secolo con l'opera di Stevin: a lui è dovuta l'introduzione di una nuova notazione per i numeri decimali, che permetteva di estendere a tali numeri le normali operazioni algebriche sui numeri interi, anziché usare la notazione frazionaria, oltre che a una costruzione geometrica dei rapporti anche con numeri irrazionali.

Per quanto riguarda la trattazione dei numeri reali a partire dalla scoperta del calcolo per opera di Leibniz e Newton, possiamo osservare che il primo in realtà non si sofferma in particolare sulla questione, pur intuendo che occorressero "numeri ideali" con la possibilità di divenire sempre più piccoli, non si addentra in una trattazione razionale di questi. A tal proposito scrive ad esempio Robinson:

«Leibniz intuì che la teoria degli infinitesimi implica l'introduzione di numeri ideali
che possono essere infinitamente piccoli... se paragonati ai numeri reali.
Né lui né i suoi discepoli né i suoi successori seppero dare
uno sviluppo razionale ad un tale sistema...
Questi numeri ideali, governati dalle stesse leggi dei numeri ordinari,
sono solo una comoda finzione, adottata per abbreviare l'argomentazione
e per facilitare l'invenzione o la scoperta matematica»

Newton invece si sofferma maggiormente sulla questione, definendo i numeri come rapporti astratti, nei quali fa rientrare gli irrazionali semplicemente come rapporti fra quantità non commensurabili: egli infatti definisce i numeri come un "rapporto astratto" di una quantità qualunque con un'altra di una certa specie che viene considerata come unità. Da qui suddivide i numeri in tre diverse specie: gli interi che sono misurati esattamente dall'unità, i frazionari che sono parti, cioè sottomultipli, dell'unità, e gli irrazionali che invece risultano incommensurabili rispetto l'unità. Le flussioni, cioè il corrispettivo newtoniano dei differenziali infinitesimi di Leibniz, vengono definite come rapporto ultimo, cioè come il rapporto fra due quantità che decrescono sempre di più, e quindi tale rapporto, o il limite cui esso tende, inteso sempre come approssimazione, non viene inteso in modo diverso da un numero delle tre specie sopra descritte, solo semplicemente indefinitamente piccolo, ma non di diversa natura.
D'Alembert, invece, è il primo che utilizza il limite da lui definito per dare una definizione anche dei numeri reali: o meglio, per lui i numeri reali non sono nemmeno da considerare veri numeri. Per

D'Alembert infatti i numeri irrazionali risultano essere semplicemente il limite di rapporti fra numeri razionali, e poiché il limite, per la sua definizione, non può mai essere raggiunto, ovviamente non si possono nemmeno considerare realmente numeri, scrive infatti:

«I numeri commensurabili sono propriamente i soli e veri numeri.
Infatti tutti i numeri includono l'idea di un rapporto […]
e ogni reale rapporto fra due grandezze implica una certa parte in comune fra loro […]
$\sqrt{2}$ non è un numero propriamente detto, è una quantità per cui non esiste un punto,
è impossibile trovarlo.»

Tradizionalmente è Cauchy che introduce per primo una definizione di limite simile a quella che verrà formalizzata definitivamente da Weierstrass, e relativamente alla sua trattazione dei numeri reali è interessante notare due cose fondamentalmente: la prima è che considera non più un'approssimazione monotona nel suo concetto di limite, ma prendendo in considerazione i numeri sia positivi che negativi può considerare un "avvicinamento" da entrambe le direzioni; la seconda è che, pur essendo i numeri considerati ancora come rapporti, considera fra questi anche la presenza dei numeri irrazionali, non intesi come rapporti per loro stessi, ma come limite di altri numeri, quindi altri rapporti, che li approssimano sempre di più.

«Così per esempio, un numero irrazionale è
il limite delle diverse frazioni che ne forniscono valori sempre più approssimati.»

Possiamo considerare l'assegnazione di un valore numerico da parte di Cauchy come una relazione funzionale, in particolare riferita ai rapporti. Per Lakatos, ad esempio, la definizione di limite di Cauchy è in realtà la nozione di convergenza delle successioni numeriche, e in senso stretto, le variabili di Cauchy sono conseguenza di reali come verranno intesi da Weirstrass.
Quando infatti Cauchy definisce le funzioni continue, in realtà dà per scontato e sottinteso la continuità dei numeri reali, cioè quella dell'intervallo in cui considera le variazioni infinitesime della variabile indipendente, pur senza averlo definito a monte. In questo la trattazione di Cauchy non porta ad un'evoluzione rilevante nella definizione e concezione dei numeri reali, ma sottolinea però come in realtà il concetto di limite sia profondamente legato non solo al concetto di funzioni continue, ma anche alla continuità, o meglio completezza, dei numeri reali.

Il legame profondo fra la continuità, e quindi il limite, e la definizione dell'insieme dei numeri reali diventerà ancora più profonda ed esplicita nell'opera di Dedekind, *Continuità e numeri irrazionali,* in cui vengono creati nuovi numeri proprio ottenere un nuovo campo "altrettanto continuo come lo è la retta", e lo farà introducendo un assioma di continuità . La sua idea infatti, (come mostrato in Parte II capitolo 13) consiste nell'introdurre i reali non razionali tramite sottoinsiemi di razionali, i cosiddetti "tagli di Dedekind": ad esempio, la $\sqrt{2}$ è rappresentata dall'insieme di tutti i numeri razionali il cui quadrato è minore di 2: è un evidente rapporto tra la definizione di Dedekind e l'antica definizione di Euclide (Lipschitz criticò fortemente l'opera di Dedekind, sostenendo infatti che nella sostanza non si distinguesse affatto da quanto avevano già stabilito gli antichi geometri!), ma anche una profonda differenza: mentre per Euclide e per gli altri matematici greci l'oggetto privilegiato di studio erano le grandezze, e solo considerando i loro rapporti si trovavano di fronte a qualcosa di parzialmente analogo ai nostri numeri reali, all'epoca di Dedekind le grandezze numeriche avevano assunto da tempo un ruolo di protagonisti autonomi. Con Dedekind dunque finalmente il numero si può definitivamente spogliare di tutti i legami geometrici e relativi al rapporto fra le grandezze, e quindi in un certo senso potremmo dire anche in termini di registro visivo: il processo di aritmetizzazione dell'analisi risulta completo, e il rigore matematico, compreso quello di un nuovo insieme di numeri, quelli reali, è finalmente stato trovato in questo campo.

In conclusione, un'analisi storica del concetto di limite ci potrebbe dunque aiutare a

introdurre, anche se in modo non approfondito, la vera definizione e creazione dei numeri reali, in modo tale che i nostri studenti non rimangano convinti che sono semplicemente il contenitore dove poter sistemare le radici, ma anch'essi hanno una storia e una definizione molto più profonda, e che non è così tanto lontano da ciò che l'analisi ci insegna.
Tengo a sottolineare nuovamente che la possibilità che ci offre la storia della matematica, all'interno della didattica, di poter offrire ai nostri ragazzi anche una visione di insieme più completa e articolata, può a mio avviso donare un grande valore aggiunto soprattutto alla loro motivazione e alla loro percezione della materia: il discorso storico sui limiti ci ha portato così non solo a capire il suo legame con il concetto di continuità delle funzioni, ma a loro volta anche con i numeri reali, quegli stessi numeri che da lungo tempo i nostri ragazzi utilizzano senza saperne la vera origine e definizione. E anche in questo caso, a mio avviso, la storia della definizione dei numeri reali come l'abbiamo presentata, mostrandone cioè i vari passaggi dai primi problemi pitagorici causati dalle grandezze incommensurabili, fino alla definizione assiomatica di Dedekind nella sua apparente banalità, può aiutare i ragazzi a superare i numerosi ostacoli epistemologici che li lega ai numeri reali, e farglieli così percepire in modo da essere più consoni a quello che sono veramente, e alle caratteristiche che li contraddistinguono, e che per noi sono tanto preziose.

Capitolo III.5

Aspetti interdisciplinari legati al concetto di limite

«Uno scienziato degno di tal nome,
e soprattutto un matematico,
sperimenta nel suo lavoro
la stessa sensazione di un artista;
il suo piacere è della stessa intensità e natura»
- Poincaré -

In (Battistutti & Vicentini, 1995) è presentato un caso di uso della storia nell'insegnamento della matematica attuato (sia nella progettazione che nella presenza in classe) dalle insegnanti di matematica e di filosofia. L'esperienza ha aspetti innovativi: nell'articolo che hanno scritto su di essa gli insegnanti mettono in risalto i vari aspetti positivi rilevati nell'esperienza, che vanno dalla gratificazione del docente, al riconoscimento delle famiglie degli allievi, dall'interdisciplinarità alla visione unitaria della cultura, allo spazio dato agli studenti, al recupero di nozioni dimenticate, al confronto di metodi in discipline diverse. Io mi trovo assolutamente d'accordo con questi tipi di esperienze, perché offrono un'immagine completa e globale della cultura insegnata a scuola, in particolare quando ci riferiamo a licei, il cui compito principe dovrebbe proprio essere quello di dare cultura agli studenti, oltre che offrirgli metodo e spirito critico per la vita futura, qualunque sia l'ambito di studio od occupazionale che decideranno di coltivare. Scrive a tal proposito Matthew, nel già citato articolo relativo ad un riavvicinamento fra filosofia e scienze:

«La scienza ha una dimensione umana, culturale e storica,
è legata alla filosofia, alla società, all'etica […]
La scienza è ben più complessa e interessante
di quanto certe ingenue rappresentazioni ci possono far credere,
e soprattutto far credere agli studenti»

Abbiamo già citato anche nella prima parte come gli aspetti interdisciplinari possono apportare un notevole beneficio al processo di apprendimento della scienza in generale, ed in particolare a quello della matematica: questi riguardano la possibilità di avere una propria visione globale della cultura e dell'esperienza, la possibilità di migliorare le proprie capacità di ragionamento e di atteggiamento critico, ma anche quella di appassionare ed emozionare maggiormente rispetto ad uno studio chiuso delle singole discipline, migliorando la motivazione degli studenti, soprattutto, dal nostro punto di vista della matematica, di quelli che magari prediligono le materie umanistiche a scapito di quelle scientifiche, accostandole e avvicinandole a quelle preferite si migliora la percezione anche delle altre.

Per quanto riguarda l'interdisciplinarietà legata in particolar modo al nostro concetto di limite e alla sua storia, gli spunti che si potrebbero prendere in considerazione per creare un percorso didattico anche con insegnanti delle altre discipline sono a mio avviso molteplici, e soprattutto pieni di aspetti assolutamente interessanti e motivanti.

La cosa più ovvia, ma che purtroppo non sempre viene mostrata agli studenti del liceo, è quella di accostare e applicare il concetto di limite, e l'analisi infinitesimale più in generale, alla fisica: al di là del fatto che la fisica utilizza regolarmente tutta l'analisi matematica e il linguaggio utilizzato dalla fisica è esattamente quello matematico (cosa che purtroppo pochissime volte viene mostrata ai ragazzi, lasciandogli percepire le due materie come separate e diverse fra loro) , il concetto di limite, ed in particolare la storia del concetto di limite, si potrebbe utilizzare dal punto di vista interdisciplinare attraverso lo studio del metodo delle flussioni di Newton, quindi con un riferimento alla storia della fisica volto comunque a svelarne le origini del suo metodo di indagine. Nella parte che ho scritto riguardante la storia del concetto di limite, ho fatto la scelta di non illustrare, accanto al metodo dei differenziali di Leibniz, quello delle flussioni di Newton. La mia è stata una scelta consapevole per due motivi: il primo è di ordine matematico, nel senso che ho preferito illustrare il punto di vista leibniziano in quanto, rispetto a quello newtoniano, è mosso principalmente da motivazioni e problemi di tipo espressamente matematico, e non è legato invece a problematiche di natura più fisica. Il calcolo differenziale di Leibniz sorge infatti dal problema matematico di trovare i massimi e i minimi piuttosto che la tangente ad una data curva: ciò che ne muove le origini è una faccenda matematica, non fisica, che solo dopo la sua invenzione verrà applicata ad altri campi, ed in particolare nella fisica appunto. Il secondo motivo per cui non mi sono soffermata sulle flussioni newtoniane è invece proprio per una questione didattica interdisciplinare, nel senso che potrei lasciare spiegare il metodo newtoniano dall'insegnante di fisica: i differenziali di Leibniz e le flussioni di Newton, sono per molto aspetti molto simili, e per gli studenti, vederli affrontare da due insegnanti diversi, che hanno impostazioni disciplinari diverse, può essere motivo aggiuntivo per un' osservazione critica offerta da due punti di vista necessariamente diversi per impostazioni e finalità. Lasciare allo studente l'osservazione delle analogie, delle differenze, ricevere una presentazione depurata dagli aspetti di parte che potrebbe dare lo stesso professore che mostra due cose diverse che richiedono, come ha richiesto la storia, uno schieramento più o meno velato, può aiutare lo studente a valutare personalmente i due metodi, lo può condurre ad effettuare la sua scelta critica, non a seguire quella di un insegnante . Gli si può mostrare anche il dibattito seguito alla pubblicazione dei due metodi diversi ma simili, proprio per condurlo a schierarsi da una parte o dall'altra e quindi a porsi il problema, ad analizzarlo per poter prendere una posizione.

Molto interessante, dal mio punto di vista, sarebbe anche poter condurre un discorso interdisciplinare relativo al concetto di limite non solo con la fisica, o con altre materie scientifiche che utilizzano concetti matematici, o metodi di indagine similari, ma piuttosto con quelle di carattere più strettamente umanistico, in particolar modo la storia in senso stretto e la filosofia. Oltre ad offrire un nuovo punto di vista da un lato dei concetti matematici, che vengono contestualizzati storicamente e culturalmente nel periodo storico in cui si scoprono, e dall'altro della storia e della filosofia, che vengono arricchite e completate anche con una visione scientifica della cultura storica che trattano, un approccio di questo genere porterebbe ad avere un notevole valore aggiunto in termini di apertura mentale e spirito critico, anche solo per l'innovazione del metodo che sarebbe utilizzato. Un accostamento del genere, potrebbe, sempre a mio avviso, aiutare soprattutto quei ragazzi che non amano la matematica, preferendo piuttosto le materie umanistiche (a mio avviso per una comodità e abitudine nell'apprendimento, mai per mancanza di capacità come si convincono i ragazzi): mostrare soprattutto a loro il lato storico e interdisciplinare della nostra materia, gli offrirebbe una nuova chiave di lettura della materia odiata, avvicinandola, tramite l'accostamento e l'integrazione, a qualcosa per loro di più famigliare e piacevole. Non vedere la matematica solo come qualcosa di scientifico, metodico e rigorosamente, quasi esageratamente, oggettivo e razionale, ma leggervi la poesia e la bellezza, una forma d'arte in qualche modo, anche aiutandosi con un avvicinamento a qualcosa di apparentemente lontano ad essa, guardare alla matematica con spirito critico e soprattutto aperto, mostrarla come processo realmente radicato nella cultura delle varie epoche in cui essa si è sviluppata, non può fare altro migliorare la percezione della matematica, che è una percezione purtroppo diffusamente negativa fra gli studenti.
E proprio su questa cattiva percezione della nostra materia noi insegnanti di matematica dovremmo

interrogarci sul perché è così diffusa, e su come potremmo fare a togliere questa sensazione ai nostri studenti: io mi rispondo che talvolta siamo noi insegnanti di matematica a porci in modo sbagliato, la materia che insegniamo è certamente più fredda e oggettiva rispetto arte o letteratura, in cui la sfera umana, anche dal punto di vista sentimentale ed emozionale, entra in modo più preponderante, solo che gli studenti spesso avvertono anche noi insegnanti come persone separate dal mondo, sempre fredde, oggettive e razionali, perché nella nostra materia non c'è spazio per altro. Quando a lezione io mi soffermo a filosofeggiare con i ragazzi, o parliamo della mostra che sono andati a vedere con la scuola e che ho visto anch'io, o gli suggerisco qualche libro da leggere, di solito si stupiscono come io, dichiaratamente amante della matematica, possa parlare con loro di arte o letteratura, di come io possa appassionarmi a qualcosa che non è numero o funzione: io divento più vicina a loro, e la loro predisposizione migliora. Inserire la storia della matematica all'interno della didattica, anche con spunti interdisciplinari, può solo aiutare gli studenti, non solo ad abbattere gli ostacoli epistemologici dell'argomento specifico, ma anche a guardarne gli aspetti che vanno oltre all'oggettività e la freddezza, e che possono essere davvero emozionanti se guardati con occhio giusto, esattamente come un'opera d'arte.

Il concetto di limite dunque, ben si presta a mio avviso a un discorso di cultura interdisciplinare, da un lato certamente perché la sua evoluzione occupa un lasso di tempo molto ampio e in cui i cambiamenti culturali e sociali sono molto profondi, dall'altro perché il concetto di limite, sotto accezioni anche molto diverse fra loro, è un argomento molto caro a filosofi, artisti e letterati.

Io sono ben lontana dall'avere una cultura sufficientemente filosofica e storica per poter dettare legami fra la filosofia e la matematica da raccontare ai miei studenti, ma da appassionata di cultura in generale, da amante della storia e dei collegamenti fra materie di diverso tipo, ho pensato a qualche suggerimento che in qualche modo potrebbe creare un ponte interdisciplinare fra la storia del concetto di limite e la storia e la filosofia in particolar modo, volto ad un eventuale ed auspicabile collaborazione con l'insegnante specifico di queste materie.

Per quanto riguarda la storia in senso lato si potrebbe mostrare il periodo storico in cui si sviluppa la nostra lunga storia del limite: se siamo in un liceo, dove ha più senso tentare di applicare un procedimento di questo genere, al concetto di limite si arriva all'inizio del quinto anno, pertanto i ragazzi sono già in possesso di un notevole background storico e filosofico. Gli spunti principali in campo filosofico, per un collegamento diretto al concetto di limite, che mi sentirei di suggerire per le lezioni con l'insegnante di filosofia sono riassunti nei punti seguenti.

Filosofia antica

Abbiamo iniziato la storia del nostro concetto di limite partendo dal metodo di esaustione, attribuito ipoteticamente ad Eudosso di Cnido (V-IV secolo a.C.), mostrato negli elementi di Euclide (IV-III secolo a.C) e ampiamente utilizzato nelle opere di Archimede (287 – 212 a.C.). Dal punto vista filosofico è certamente interessante notare come tutti i filosofi antichi si occupassero anche di matematica, in modo più o meno diretto: per quanto riguarda nello specifico il nostro concetto di limite matematico, la filosofia antica non ha collegamenti molto stretti però. Le uniche cose che mi sentirei di sottolineare con i miei studenti riguardano invece due argomenti in qualche modo collegati con il nostro limite matematico, uno dal punto di vista della sua stessa concezione e definizione, l'altro per quello che piuttosto riguarda il metodo di indagine.

Il primo punto riguarda la distinzione fra il concetto di infinito attuale e infinito potenziale che introduce Aristotele, intendendo per Infinito potenziale la possibilità di aggiungere sempre qualcosa a una quantità determinata senza che ci sia un elemento ultimo; mentre l'infinito attuale dovrebbe essere inteso come collezione infinita, compiutamente data, di tutti i punti di una grandezza. Aristotele nega la possibilità della possibile concezione ed esistenza dell'infinito nel senso attuale, a tal proposito, per quanto riguarda i numeri affermava:

«il numero è infinito in potenza, ma non in atto […]
Questo nostro discorso non intende sopprimere per nulla le ricerche dei matematici,
per il fatto che esso esclude che l'infinito per accrescimento
sia tale da poter essere percorso in atto.
In realtà essi stessi allo stato presente non sentono il bisogno di infinito,
ma di una quantità più grande quanto essi vogliono, ma pur sempre finita…»

Da tale affermazione possiamo dedurre che l'unica accezione di infinito accettata da Aristotele era l'infinito potenziale inteso come "divenire". Un numero o una qualsiasi altra quantità, è potenzialmente in grado di tendere all'infinito, aumentandola ogni volta di poco, ma ogni volta risulterà un entità finita. Ad esempio nei numeri naturali aggiungendo ogni volta un'unità ad un numero si otterranno quantità finite, ma che sembrano potenzialmente in grado di tendere all'infinito. L'infinito per Aristotele deve essere considerato come qualcosa sempre in via di nascere o di perire, di crescere o diminuire e che, mantenendosi in ogni suo stato finito è sempre diverso nei suoi successivi stati. Nega l'esistenza di un infinito attuale fisico, come nega l'esistenza di un infinito attuale mentale: il termine usato in greco per designare l'infinito è "apeiron" (senza limiti, dunque illimitato). La difficoltà inerente all'infinito consiste perciò nella sua inesauribilità: l'infinito non può mai essere presente nella sua totalità nel nostro pensiero. L'illimitato non può essere in nessun caso considerato come un tutto completo. Ciò che è completo ha una fine e la fine è elemento limitante. Aristotele dunque associa indissolubilmente all'infinito un'idea negativa espressione della sua incompletezza e potenzialità non attuata e non attuabile. Proprio questa idea negativa porta al rifiuto di introdurre l'infinito attuale nella matematica greca.
Da qui si può già vedere un chiaro segnale della difficoltà maggiore di concepire mentalmente un infinito di tipo attuale: una discussione di questo tipo pone gli studenti subito davanti alle due diverse concezioni di infinito, quella più naturale e immaginabile dell'infinito potenziale, e quella più complicata dell'attuale, e quindi a capirne fin da subito le due posizioni e le differenze. In questo modo, a mio avviso, non resteranno ancorati solo alla più semplice idea di infinito potenziale, ma anche se Aristotele non l'ammetteva, capiranno e sapranno comunque cosa si intende per infinito attuale, e quando gli si proporrà di applicarlo in campo matematico per capire il concetto di limite, non dovranno scardinare la propria visione dell'infinito, ma dovranno semplicemente sostituirla con una nozione e un'idea che già conoscono e già hanno compreso.

Per quanto riguarda un discorso più ampio sul metodo, si può fare un parallelo fra la filosofia delle idee platoniche e la questione relativa ai fondamenti dell'analisi che sorge nell'Ottocento. Quando si inizia a riflettere non più solo sui risultati che l'applicazione dell'analisi portava, ma anche sui fondamenti di quel metodo innovativo, ci si accorge che esso è fondamentalmente basato su evidenze di tipo geometrico e non a rigorose dimostrazioni matematiche: sono le sue stesse e sole rappresentazioni visive che sembrano darne l'unico fondamento e la validità.
Questo fatto in fondo non si discosta così tanto da quello che diceva Platone a riguardo delle idee matematiche: la filosofia platonica infatti riconduceva tutto alla ricerca di due fondamentali tipi di idee, quelle relative ai valori e quelle delle idee matematiche, entrambi questi tipi di idee rappresentano la conoscenza sicura, immutabile, universale, assolutamente certa e affidabile; le idee sono gli oggetti che garantiscono l'universalità e la stabilità del sapere. Senza stare a scendere in ulteriori dettagli sulle idee platoniche, che devono essere lasciati all'insegnante di filosofia, è interessante notare quello che Platone sostiene relativamente alle idee matematiche: gli studiosi di matematica, e in particolare i geometri, mirano ovviamente alla conoscenza dell'idea di ciò che stanno trattando, ma per fare questo devono necessariamente basarsi su una rappresentazione, per loro però quella figura particolare andrà a rappresentare quella universale – a differenza dei matematici dell'Ottocento che non accetteranno questa posizione, ricercando un sapere realmente

universale, e non legato a nulla di particolare!

Sempre relativamente alla filosofia platonica, senza aver nulla a che vedere in particolare con il nostro discorso sul limite in questo caso, si potrebbe fare osservare ai ragazzi l'importanza che viene attribuita da Platone, così come era stato per i pitagorici, alla matematica: la matematica diviene uno dei principali mezzi per elevare la propria anima, proprio perché gli oggetti del suo studio, le idee matematiche appunto, alle quali si può arrivare anche da immagini particolari di esse, sono più chiare, universali, indiscutibilmente vere... e in questo ci si può ricollegare all'indagine della filosofia matematica che torna ad indagare prepotentemente sulla natura dell'oggetto di studio matematico.

Gottfried Wilhelm Leibniz :filosofo

Leibniz (1646 – 1716) è indiscutibilmente riconosciuto come genio universale: i suoi interessi spaziarono dalla filosofia, al diritto, la politica, la matematica, la fisica, coltivando una concezione del sapere in cui la teoria si sposa con la pratica, e quindi è molto forte in lui anche la curiosità verso la ricerca tecnologica (costruisce infatti una calcolatrice molto più sofisticata del primo tentativo effettuato per mano di Pascal). Le diverse discipline di cui si occupa Leibniz trovano appunto nella filosofia il loro momento fondante e unificante: per questo motivo il suo pensiero è tendenzialmente orientato alla costruzione di un sistema filosofico unitario.

Accanto al suo concetto filosofico fondamentale di Monade, ovvero la "forma sostanziale dell'essere" (le Monadi sono delle specie di atomi spirituali, eterne, non scomponibili, individuali, seguono delle leggi proprie, non interagiscono, ognuna di esse riflette l'intero universo in un'armonia prestabilita), che pone alla base della metafisica, Leibniz si interessò molto anche di questioni di logica: e da questo punto di vista è certamente più forte il ponte con la sua opera matematica.

Il suo obiettivo è la formulazione di un metodo logico che matematizzi il pensiero, eliminando da esso ciò che è soggettivo e riconducendo le operazioni mentali a una forma di *calcolus ratiocinator*: attraverso questa riconduzione alla matematica, la logica deve svolgere la duplice funzione di "dimostrare" gli enunciati con assoluta certezza, e di "inventare" un nuovo sapere attraverso la combinazione delle conoscenze già acquisite. Per conseguire questi scopi Leibniz procede, in primo luogo, cercando di ricondurre l'intero contenuto del pensiero a un numero definito di "concetti semplici" , dopo di che occorre assegnare a ciascun concetto un "carattere", cioè un simbolo che lo rappresenti in modo da poter operare sui simboli anziché sui concetti.

In questo passaggio mi pare chiaro il passaggio che dalla sua filosofia ci porta alla sua invenzione del calcolo: Leibniz utilizza i suoi differenziali come "concetti semplici", per i quali inventa anche una simbologia adeguata, sia per identificarli (dx, dy, etc), sia per svolgere operazioni fra essi (ricordiamo che è proprio lui a ideare il simbolo $\int$ di integrale), e questi vengono utilizzati per calcolare in modo semplice tangenti, massimi e minimi, e aree.

Nella sua scoperta della matematica dei limiti ed il principio degli indiscernibili, utilizzato nelle scienze, secondo il quale due cose che appaiono uguali, e fra le quali quindi la ragione non trova differenze, sono in realtà la stessa cosa, poiché due cose identiche non possono esistere, Leibniz deduce il principio di ragion sufficiente per il quale ogni cosa che è, ha una causa. In base alla sua logica infatti, Leibniz sosteneva che la verità sta nel fatto che la combinazione dei concetti avvenga senza comportare alcuna contraddizione: la verità si fonda dunque sul principio di identità (per il quale una proposizione è identica, quindi vera, se in essa il predicato è già contenuto nel soggetto), al quale è riconducibile anche il principio di contraddizione come sua variante negativa. Per Leibniz le verità fondate su questi due principi sono le verità di ragione, e hanno la prerogativa di essere necessarie e infallibili; accanto a queste vengono presentate quelle di fatto, le quali sono contingenti, ovvero per esse è possibile il contrario, e si fondano su quello che Leibniz chiama il principio di ragion sufficiente, e definisce in questo modo:

«nulla accade senza una ragione sufficiente,
cioè senza che sia possibile a chi conosca in profondità le cose
dare una ragione che sia sufficiente a determinare
perché è accaduto così e non altrimenti.»

Berkeley : filosofo

Abbiamo citato Berkely (1685 – 1753) come uno dei più accesi oppositori al calcolo infinitesimale introdotto da Leibniz e Newton: egli è vescovo della Chiesa Anglicana, e lo scopo principe della sua filosofia è difendere il valore della religione rivelata e della connessione tra religione e morale, scagliandosi per questo non solo contro le nuove correnti filosofiche che si stavano affermando in Inghilterra, quali in particolare deisti e liberi pensatori (il deismo, in particolare, riconosce l'esistenza di un ente supremo ordinatore dell'universo, ma nega ogni forma di rivelazione storica e di provvidenza, e rifiuta perciò qualsiasi dogma o autorità religiosa; inoltre ritiene che l'uso corretto della ragione consenta all'uomo di elaborare una religione naturale e razionale completa ed esauriente, capace di spiegare il mondo e l'uomo), ma anche contro ogni forma di concezione meccanicista della realtà, che egli vede come una pericolosa concessione dello spirito antireligioso.
In particolare, sino da suo *Saggio di una nuova teoria della visione* (1709), Berkeley polemizza contro il carattere matematico di qualità come la distanza e la grandezza. Egli infatti nega che la distanza e la grandezza degli oggetti che noi percepiamo mediante la vista siano determinabili in base a leggi ottiche aventi carattere geometrico. La nozione di queste qualità è invece data dall'esperienza: noi siamo abituati a connettere determinate idee visive (e quindi determinate posizioni degli occhi) con la rappresentazione di particolari grandezze e distanze. Appare così evidente come i differenziali di Leibniz, o le flussioni di Newton, a Berkeley non potessero andare bene: quantità infinitesime non solo non si possono percepire alla vista, ma non abbiamo di esse nemmeno precedente esperienza, ovvero non siamo abituati a trattarle!! Accanto alle critiche che abbiamo visto essere pubblicate su *The Analyst*, nel *Saggio di una nuova teoria della visione* mostra dunque la sua concezione esclusivamente pratica non solo delle idee visive di grandezza e distanza, ma anche di tutte le qualità primarie, pertanto non si può indagare la natura facendo ricorso a nulla al di fuori di quanto siamo abituati, figuriamoci qualcosa di infinitamente piccolo : scrive infatti

«insomma, possiamo correttamente concludere che
gli oggetti della visione costituiscono il linguaggio della natura;
è questo linguaggio che ci insegna a regolare le nostre azioni
per conseguire le cose necessarie alla conservazione e al benessere del nostro corpo
e per evitare tutto ciò che lo eliderebbe o lo distruggerebbe.»

E infatti, a proposito della sua idea di conservazioni, aveva attribuito agli infinitesimi l'idea di "spettri di quantità morte" !

L'illuminismo: D'Alembert e l'Encyclopédie

«L'illuminismo è l'uscita dell'uomo dallo stato di minorità
che egli deve imputare a se stesso [...]
abbi il coraggio di servirti della tua propria ragione!
E' questo il motto dell'illuminismo[...]
Senonché a questo Illuminismo non occorre altro che la libertà,
e la più inoffensiva di tutte le libertà,
quella cioè di fare pubblico uso della propria ragione in tutti i campi.»

Queste le parole di Kant per descrivere il grande movimento culturale che generalmente viene individuato come ideologia dominante del XVIII secolo, il cosiddetto "*Siècle des lumières"* (Secolo dei lumi): in esso si portò all'estremo compimento il principio secondo il quale la ragione, essendo condizionata, e quindi tipica manifestazione della limitatezza umana, era l'unico strumento in grado di fornire all'uomo quella conoscenza certa cui egli aveva, sin dalle origini del pensiero occidentale, aspirato. Essa venne pertanto elevata a giudice imparziale al cui tribunale sottoporre ogni realtà al fine di distinguere il vero dal falso, e di individuare ciò che poteva risultare di giovamento per la realtà; costante risultò pertanto, all'interno del movimento illuminista, l'esortazione al avvalersene in modo libero e pubblico. La novità più importante che l'Illuminismo introdusse, rispetto alla pretesa razionalistica di considerare vero solamente ciò che apparisse evidente alla ragione, fu la rigorosa autolimitazione della ragione stessa nel campo dell'esperienza; non più, pertanto, uno sterile dogmatismo nel quale la ragione si erigesse ad assoluta legislatrice valicando le proprie possibilità, ma, al suo posto, una scienza feconda e caratterizzata dalla possibilità di investigare ogni aspetto della realtà, solamente a prezzo di accettare l'obbligo preliminare di delineare con precisione i limiti gnoseologici umani.
Un grande cavallo di battaglia del movimento illuminista è la diffusione della cultura: il valore illuminante e liberatorio di essa si indirizza per la prima volta non solo ai sovrani e alle classi sociali più elevate, ma gli illuministi cercano proprio di raggiungere con il loro programma ampie cerchie della popolazione, soprattutto quella della borghesia, che lentamente inizia ad emergere. Proprio per arrivare ad un pubblico più vasto possibile si cambiano le forme dello scrivere, e quindi i pesanti trattati lasceranno il posto ai più snelli saggi e pamphlet, come il famoso "racconto filosofico" di Voltaire, e soprattutto a questi grandi dizionari che, voce per voce, cercano di racchiudere, e quindi trasmettere ai lettori, un sapere ad ampio raggio. Di queste opere spicca certamente per importanza e portata la grande *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, diretta da Diderot e D'Alembert, che oltre al discorso preliminare, ne curò le voci scientifiche delle prime edizioni, prima di ritirarsi a causa delle insistenti critiche che provenivano dagli ambienti culturali tradizionali, quali ad esempio i gesuiti.
Nell' *Encyclopédie* abbiamo visto si trova il primo tentativo veramente formale di definizione del nostro concetto di limite : questo non è un caso dato che l'obiettivo principe di essa era quello di dare una collocazione sistematica del sapere, seguendo l'articolazione che le discipline ricevono dall'organizzazione naturale delle facoltà conoscitive dell'uomo, senza però volerne mai formulare un sistema dottrinatico e dogmatico, in quanto avverso allo spirito illuminista aperto alla critica.

D'Alembert scoprì la filosofia quando era al collegio, e oltre alla filosofia, si interessò alle lingue antiche e alla teologia, ma uscito dal collegio mise definitivamente da parte teologia e si lanciò negli studi di diritto, medicina e matematica. Dei suoi primi anni di studio conservò una tradizione cartesiana che, integrata ai concetti newtoniani, avrebbe in seguito aperto la strada al razionalismo scientifico moderno.
Fu proprio *l'Encyclopédie,* alla quale collaborò con Diderot e altri pensatori del suo tempo, che gli diede l'occasione di formalizzare il suo pensiero filosofico. Il *Discorso preliminare* dell'*Encyclopédie, i*spirato dalla filosofia empirista di J. Locke e pubblicato all'inizio del primo

volume (1751), è spesso considerato, a ragione, un autentico manifesto della filosofia dell'Illuminismo. Egli vi afferma l'esistenza di un legame tra il progresso della conoscenza e il progresso sociale, indica come modelli epistemologici Newton e Locke, e sottolinea fortemente come la conoscenza deve attenersi ai dati dell'esperienza e, in particolare, deve essere fondata sulla sperimentazione, e non dedotta cartesianamente da principi astratti o da ipotesi metafisiche. In questo accenno delle idee illuministe di D'Alembert possiamo riscontrare come ancora in questo periodo siano le evidenze dell'esperienza a renderci la certezza del nostro sapere, e pertanto anche la ricerca della definizione dei concetti infinitesimale si può ancora attenere a quei legami con le rappresentazioni geometriche e fisiche, senza dover per forza andare a cercare un principio fondante interno alla materia stessa, a costo di dover inventare nuovi concetti, come invece accadrà nell'Ottocento.
Interessante è la presa di posizione che D'Alambert assume contro la religione (a differenza ad esempio del suo modello Newton, impregnato profondamente di misticismo e teologia): determinista e ateo (per lo meno deista), egli attribuiva alla religione un valore puramente pratico, non avendo essa lo scopo di illuminare le menti del popolo, ma piuttosto quello di regolarne i costumi. Il «catechismo laico» di d'Alembert si prefiggeva di insegnare una morale che permettesse di riconoscere il male come nocumento della società, e di assumersi le responsabilità; castighi e premi sono quindi distribuiti in funzione del danno o del vantaggio sociale. Il principio che regola la vita dell'uomo è quello dell'utilità; di conseguenza, è preferibile rivolgersi alle scienze piuttosto che alla religione, in quanto le prime hanno un'utilità pratica più immediata.
D'Alembert fu uno dei protagonisti, assieme al suo amico Voltaire, della lotta contro l'assolutismo religioso e politico che venne da lui denunciato nei numerosi articoli filosofici scritti per l'*Encyclopédie*. La raccolta delle sue analisi spirituali di ciascun dominio della conoscenza umana trattato dall'*Encyclopédie* costituisce una vera filosofia delle scienze. Nella *Philosophie expérimentale*, d'Alembert definì così la filosofia:

«La filosofia non è altro che l'applicazione della ragione
ai differenti oggetti sui quali essa può essere esercitata».

Immanuel Kant e la sua indagine sui limiti e sulla natura della conoscenza

Kant (1724 -1804) è forse il pensatore filosofo che ha maggiormente e più a lungo influenzato le generazioni successive: troviamo stralci kantiani ancora nelle idee di Poincarè all'inizio del novecento, e ancora oggi spesso si fa riferimento al criticismo o all' “a priori” insegnato proprio da Kant.
Non voglio assolutamente qui parlare della grandissima opera e filosofia kantiana, in quanto divagheremmo su un tema davvero troppo ampio per quanto interessante: ma per gli spunti filosofici relativi alla nostra storia del limite, alcune brevi considerazioni si possono fare, dato che la filosofia critica di Kant è costantemente segnata dalla ricerca dei limiti della ragione e della conoscenza umana. E al di là del chiaro e continuo riferimento a questo concetto di limite, anche se inteso non in senso matematico, che ci fa da ponte filosofico molto forte al nostro percorso, anche l'indagine sul metodo di Kant è degna di nota per gli sviluppi futuri della matematica fino ai nostri giorni.
Innanzi tutto è bene sottolineare che la formazione culturale di Kant è di tipo scientifico: in particolare le sue “opere scientifiche” partono dallo studio delle opere e del pensiero di Leibniz. Da questi studi, accompagnati poi da ricerche più vicine al campo filosofico in senso stretto, Kant osserva e si pone subito una questione fondamentale, che ha già in se il germe di tutte le questioni che riguarderanno le fondamenta e il rigore della disciplina matematica: si chiede Kant, “la metafisica è una scienza?”. Questa domanda nasce dal fatto che egli osserva come lo sviluppo della

metafisica non sia stato lineare e largamente riconosciuto, proprio perché le idee metafisiche cambiano e restano profondamente legate al pensatore che le idea. Per questo Kant definirà la scienza come una conoscenza oggettiva, universale, necessaria ed estensibile in campo didattico – e anche qui ritroviamo il germe della profonda riflessione che sfocerà appieno nell'Ottocento sulla questione didattica della scienza e della matematica in particolare. E un'altra riflessione interessante per lo sviluppo che si avrà nel secolo successivo relativamente alla ricerca dei fondamenti della matematica, che si devono riuscire a trovare all'interno della stessa disciplina per poterla renderla realmente rigorosa, è ancora riscontrabile nell'idea kantiana per cui si può valutare l'effettiva scientificità della scienza sono se si pone nella mente (e quindi all'interno), e non nella natura, il centro della conoscenza.
Per Kant occorreva dunque superare la scettica decostruzione del sapere attuata limitando le facoltà conoscitive umane, proprio in virtù del fatto che i limiti della ragione, e quindi della filosofia stessa, diventavano ora le uniche e più vere certezze umane: l'intento di Kant era proprio quello di

«reperire nel limite della validità la validità del limite»

e di porsi in tal modo in netto contrasto con lo scetticismo, che nel limite vedeva la giustificazione al principio dell'impossibilità di una conoscenza certa; il riconoscimento del limite è invece, kantianamente, norma che fornisce legittimità e fondamento alle varie facoltà umane, come si può notare in campo

- gnoseologico, dove l'impossibilità della conoscenza di trascendere i limiti dell'esperienza diventa base dell'effettiva validità della conoscenza stessa;
- etico, dove l'impossibilità dell'attività pratica di raggiungere la santità diventa legge dell'unica morale che è propria dell'uomo;
- estetico, dove l'impossibilità di subordinare la natura all'uomo diventa la base del giudizio teleologico.

L'atteggiamento di fondo del criticismo kantiano consiste nell'interrogarsi programmaticamente circa i fondamenti delle esperienze umane (dalle quali deriva appunto la conoscenza), ai fini di chiarirne tre elementi fondamentali:

- la possibilità, ossia le condizioni che a priori ne permettono l'esistenza; queste si identificano con i trascendentali, ossia quelli elementi la cui generalità li porta ad essere proprietà universali trascendenti le categorie aristoteliche in senso stretto e, pertanto, appartenenti a tutte le cose.
- la validità, ossia i titoli di legittimità e non-legittimità che le caratterizzano.
- i limiti, ossia i confini entro i quali permane tale validità.

La filosofia criticista di Kant, seppur dal punto di vista filosofico e riferito all'indagine sulla conoscenza umana, è tutta incentrata sullo studio dei limiti, proprio nello stesso periodo in cui il limite matematico inizia a divenire un concetto essenziale nella conoscenza matematica!!!!
Nelle sue tre principali opere, Critica alla Ragion Pura, Critica alla ragion Pratica e Critica del Giudizio, Kant si propone proprio di trovare una

«determinazione formale dei limiti del nostro uso della ragione»

Limiti da non confondere per Kant con i confini: egli infatti ne attua una ben precisa distinzione intendendo i limiti come luoghi della delimitazione di una quantità, con una valenza fondamentalmente positiva, mentre per i confini vengono intesi come limitazioni che affettano una grandezza priva di effettiva completezza, non contenendo, al contrario dei limiti, che mere negazioni.

A tal proposito Kant distinse pertanto

a) le *scienze legate al fenomenico*, quali fisica e matematica, che apparivano caratterizzate da confini ma non da limiti, in quanto il loro progresso conoscitivo si sarebbe potuto ampliare sino a un confine (posto al di fuori di esse e, pertanto, irraggiungibile), ma non a un limite (inteso come spazio che è trovato fuori di un certo determinato posto e che lo include);
b) le *scienze legate al noumenico*, ossia la metafisica, nella quale le idee trascendentali mostravano chiaramente i limiti dell'uso della ragion pura; all'uomo sarebbe risultato pertanto impossibile conoscere positivamente ciò che si trovava al di là di essi, ma egli avrebbe invece potuto e dovuto determinare il limite stesso e il rapporto fra ciò che si trovava fuori di questo e ciò che in esso era contenuto.

Quest'ultima determinazione, che doveva essere considerata come importantissimo acquisto per la speculazione, rappresentò un vero e proprio punto cardine per la prassi, che era considerata kantianamente lo scopo ultimo e la destinazione naturale della nostra ragione; compito dell'uomo era quindi quello di mantenersi su questo limite, confinando il suo giudizio solamente al rapporto tra il mondo e un essere, il cui concetto stesso si sarebbe tenuto al di fuori di tutta la conoscenza, e pensando poi tale Essere per analogia. Così, nelle parole di Kant:

«noi pensiamo il mondo COME SE esso,
per la sua esistenza e per la sua interna determinazione,
tragga origine da una Ragione suprema»

La filosofia dell'Ottocento

Se l'ottocento viene definito il secolo d'oro della matematica per il grandissimo numero di scoperte che vennero fatte, anche per le altre scienze è un secolo degno di nota per le grandi evoluzioni che sono avvenute: ed anche in ambito filosofico è ricco di pensatori, compresi grandi scienziati e matematici, e di correnti filosofiche diverse, per certi versi anche contrastanti.
I primi trent'anni dell'Ottocento sono di certo profondamente segnati tre grandi correnti filosofiche:

- l'idealismo, che trova il suo più grande esponente in Hegel (1770 – 1831), e che esprime il proseguimento della filosofia criticista di Kant: l' idea fondamentale è riassumibile nell'assunto per cui l' io o lo Spirito è il principio unico di tutto, che genera il mondo in uno stato di estasi più o meno onirico.
- il romanticismo che trova il suo carattere più generale nella polemica contro il razionalismo tipico dell'età illuminista: la ragione viene relegata a fonte di sapere astratto e formale, e quindi non in grado di cogliere la vera ed intima essenza della realtà, pertanto ad essa vengono contrapposti il sentimento, l'istinto e la passione, con una conseguente riscoperta del valore della soggettività, e quindi dell'arte
- il positivismo che, nato presso un gruppo elitario di intellettuali, tende sempre più a prendere piede presso la borghesia, a tal punto da caratterizzarsi come corrente di pensiero "di massa": il positivismo altro non è se non la filosofia della rivoluzione industriale e della scienza, in cui si nutrono sempre maggiori certezze sull'infallibilità della conoscenza scientifica e sulla sua progressiva estendibilità a tutte le sfere della conoscenza umana.

Per il nostro collegamento alla storia e all'evoluzione del concetto di limite, seppur gli studenti, amanti in genere del romanticismo, potrebbero apprezzare una correlazione sull'amore e la tensione verso l'infinito dei romantici e i nostri limiti (che però a mio avviso non ha reali legami), la corrente che si può meglio legare è quella relativa al positivismo.
Questa, nei suoi tratti più drastici, tende nell'Ottocento a sfociare in un vero e proprio determinismo:

escludendo qualsiasi forma di casualità nelle cose, si individua una spiegazione di tipo fisico per tutti i fenomeni, non solo quelli legati alla sfera scientifica, ma anche a quelli relativi alla morale, al sociale, alla politica, riconducendola alla catena delle relazioni causa-effetto,la principale conseguenza è che date delle condizioni iniziali tutto quel che accadrà nel futuro è predeterminato in modo univoco dalle leggi fisiche dell'Universo.

In questo contesto è particolarmente interessante e significativa la figura del matematico Pierre Simon de Laplace (1749-1827): accanto ai suoi contributi in campo matematico e di teoria della probabilità, la sua importanza nella storia della scienza e del pensiero filosofico è strettamente legata al fatto che egli sia diventato il determinista per antonomasia, ovvero il sostenitore del carattere di prevedibilità che deve avere la teoria scientifica, perché essa enuncia leggi che corrispondono ad un comportamento necessario degli oggetti fisici. In sostanza, esiste un ben preciso ambito, non solo del ragionamento, ma anche della realtà, nel quale non solo è ultra giustificato l'atteggiamento determinista, ma sarebbe del tutto illogico predicare l'opposto, ovvero un indetermismo secondo il quale è possibile che l'acqua posta in un recipiente sul fuoco non bolla, a meno che non si verifichino eventi che impediscono il normale corso delle cose.
Il determinismo di Laplace è molto interessante se accostato alle parole di Cauchy che abbiamo già visto in precedenza:

«Persuadiamoci dunque che esistono altre verità oltre quelle dell'algebra,
altre realtà oltre agli oggetti sensibili.
Coltiviamo con ardore le scienze matematiche,
senza volerle estendere al di là del loro dominio
e non andiamo a immaginare che si possa
affrontare la storia con delle formule
ne dare per sanzione alla morale dei teoremi d'algebra o di calcolo integrale.»

Cauchy si schiera dunque contro il determinismo di alcuni matematici della sua epoca, sottolineando che le scienze matematiche non si possano ad applicare a campi al di fuori del loro dominio, proprio perché formule e teoremi non possono regolare ogni campo della vita umana. Cauchy era un fervente religioso, oltre che monarchico, e questo lo rese anche piuttosto litigioso, cosa che causò varie difficoltà con i suoi colleghi: egli si sentiva maltrattato per le sue convinzioni, mentre i suoi oppositori pensavano che egli provocasse le persone intenzionalmente rimproverandole riguardo questioni religiose o difendendo i Gesuiti dopo che erano stati soppressi. Nonostante la sua profonda riflessione e impegno sul metodo, non fu mai, ad esempio a differenza di Laplace, un pensatore impegnato anche in discipline diverse e più filosofiche, si occupò solo di matematica, restando comunque sempre convinto che scienza e fede non possono collidere, poiché avrebbero la stessa fonte, ovvero Dio.

Bolzano : filosofo

Bernard Bolzano (1781 – 1848) fu matematico, filosofo e teologo boemo, che diede numerosi ed importanti contributi sia alla matematica sia alla teoria della conoscenza, seppur non ebbe mai successo: è una figura che anche in campo filosofico non viene studiata, eppure i suoi contributi sono molto interessanti, e per certi versi precursori, soprattutto dal punto di vista matematico, di ciò che accadrà dalla seconda metà dell'Ottocento. Scrive ad esempio durante i suoi studi di filosofia all'università di Praga:

«La mia speciale predilezione per la Matematica
si fonda in modo particolare sui suoi aspetti speculativi,
in altre parole apprezzo molto quella parte della Matematica
che è stata allo stesso tempo Filosofia.»

E infatti le sue grandi riflessioni riguardano soprattutto la questione del metodo, che abbiamo visto essere preponderanti in tutta la matematica del XIX secolo, e grazie a queste riflessioni è in questo periodo, come sottolinea Bolzano appunto nella frase riportata sopra, inizia l'esplicita riflessione che riguarda la filosofia matematica: scrive infatti ancora a tal proposito nella tesi del suo dottorato in geometria

«Non potrei essere soddisfatto di una dimostrazione strettamente rigorosa,
se questa non derivasse dai concetti contenuti nella tesi che deve essere dimostrata. »

Quanto illustrato vuole solo essere un accenno a qualche spunto che potrebbe essere utilizzato nel corso di un percorso sull'evoluzione del concetto di limite considerato non solo da un punto di vista matematico, ma anche filosofico: sottolineando ad esempio come quasi tutti i matematici hanno una ben chiara posizione filosofica, ed analizzando queste posizioni filosofiche rispetto i contributi matematici.

Si potrebbero in realtà fare altri collegamenti interdisciplinari, indagando magari più a fondo il contesto storico e sociale in cui avvengono i vari passi di questo sviluppo, oppure si potrebbero coinvolgere altri ambiti disciplinari, come ad esempio quello dell'arte o della letteratura, anch'essi ricchissimi di riferimenti ai limiti e alle diverse concezioni dei limiti nel corso dell'evoluzione storica e culturale.

Altri spunti per un'indagine interdisciplinare legata in qualche modo al concetto di limite e all'analisi infinitesimale potrebbero essere ad esempio la concezione dell'infinito: a partire dalla distinzione aristotelica fra potenziale ed attuale, e dalla negazione di quest'ultimo che si trascinerà per lungo tempo, subisce fortissimi cambiamenti nel corso dei secoli, fino a giungere all'età romantica con la sua estrema esaltazione di esso .

Interessante, anche se esteso ad un campo molto più ampio rispetto il nostro solo concetto di limite, è il discorso e il dibattito che riguarda nei secoli la questione del metodo, la riorganizzazione della cultura e la diffusione del sapere (che solitamente sono dibattiti che si affacciano insieme). A partire dalla grande raccolta degli elementi di Euclide (che si suppone potesse avere scopi didattici), al grande discorso sul metodo di Descartes (che dal punto di vista matematico a portato alla nascita della geometria analitica), alla riflessione Ottocentesca sul metodo e sul rigore matematico, legata anche alla nascente filosofia matematica, fino al novecento in cui lo sviluppo delle scienze umane pone un fortissimo accento anche su tutto ciò che è strettamente in campo didattico, possiamo osservare come in ogni periodo queste riflessioni siano stati preponderanti per gli sviluppi successivi della matematica, e come in ognuno di questo periodo la cultura si stesse diffondendo via via di più. Quindi alla base dello sviluppo c'è proprio quel sentimento didattico che ci spinge a fare sempre meglio per i nostri studenti, a offrire sempre qualcosa di migliore e perfetto ai nostri discepoli, affinché loro possano amare e imparare sempre di più ciò che noi possiamo trasmettergli.

Capitolo III.6

Perché io utilizzerei un approccio storico per spiegare il concetto di limite e le basi del calcolo infinitesimale

«Le norme della didattica
non la insegnano i libri di metodo,
ma il cuore, l'esempio, l'esperienza.»
- Tommaseo -

Nella prima parte di questa tesi si è cercato di dare una panoramica generale su come l'uso della storia della matematica, da una parte possa aiutare gli insegnanti nella didattica e gli studenti nell'apprendimento, ma certamente dall'altra si possa portare dietro aspetti rischiosi se non utilizzata in maniera ben integrata al curriculum, e soprattutto da docenti non adeguatamente preparati e convinti a riguardo.
Io sono favorevole all'utilizzo della storia della matematica integrata e a supporto della didattica, ed in particolare quando si affrontano temi importanti e che creano basi fondanti per gli sviluppi futuri, e quindi su cui gli studenti non dovrebbero crearsi misconcezioni che possano perdurare nel tempo; e soprattutto quando questi concetti hanno dietro di se una storia particolarmente ricca ed articolata, come appunto il concetto di limite e la nascita dell'analisi matematica.

Abbiamo osservato nella prima parte che, dal punto di vista didattico, assumono un'importanza rilevante le convinzioni epistemologiche degli insegnanti, in quanto queste vanno ad influenzare profondamente la trasposizione didattica, ovvero quel processo tramite il quale gli insegnanti trasmettono ai discenti il loro sapere conosciuto in sapere insegnato. In questi termini rientrano a mio avviso anche un'altra serie di convinzioni legate strettamente alla persona e alla personalità del docente: fra queste io annovererei come l'insegnante vede i suoi studenti e come vuole mostrarsi davanti a loro, cosa vuole lasciare ai suoi studenti, la cultura non solo disciplinare, cioè matematica in questo caso, del docente e in che modo il docente è legato alla sua stessa cultura, qual è il suo rapporto con la conoscenza, e cosa ne vuole fare.
Ora, io sono un' appassionata di cultura, sotto tutti i punti di vista, e poiché credo che ciò che dovremmo impegnarci a trasmettere ai nostri studenti (soprattutto quando parliamo di studenti del liceo) dovrebbe essere proprio cultura, passione e voglia di conoscere, intesa come curiosità, oltre che ovviamente alla capacità critica: la prima cosa che vorrei e che cerco di trasmettere ai miei studenti è la passione per un sapere che arricchisce la persona per sua stessa natura, non necessariamente perché, ad esempio, deve servire a qualcosa di pratico ed esplicito nella vita. Nessuno mi aveva mai mostrato la matematica, o la fisica, o le scienze in generale, da un punto di vista storico, cioè dal punto di vista della loro storia e dei loro fondamenti epistemologici, e quando mi sono ritrovata a seguire il corso di storia della matematica (così come quello di storia della fisica e storia delle scienze), la mia passione si è ulteriormente accesa, ed ho ritenuto questa nuova conoscenza un enorme valore aggiunto: poter integrare e collegare la mia amata matematica all'altrettanto amata storia, poter fare riflessioni di carattere filosofico ed epistemologico su questioni e dibattiti realmente esistiti, cercare collegamenti e spunti per nuove riflessioni, conoscere come i vari ambiti si sono e si possono mutuamente e reciprocamente influenzare. Ma io amo il sapere, e non solo il sapere specialistico della mia disciplina, ma un sapere con un respiro un po' più ampio, più interdisciplinare: e io credo dunque che anche la passione propria dell'insegnante, esattamente come quelle concezioni epistemologiche relative alla propria conoscenza specifica che

deve insegnare, entra necessariamente in quella trasposizione didattica per portare il suo sapere ai suoi studenti. In questi termini ci tengo a precisare che l'utilizzo della storia della matematica nella didattica può rivelarsi uno strumento utilissimo in mano di tutti, ma sono assolutamente d'accordo quando le autorità sostengono che è importante che venga usato adeguatamente e coscienziosamente per condurre ad un miglioramento della didattica, e soprattutto potrà avere i suoi risvolti più positivi quando è l'insegnante il primo a crederci veramente, ed è veramente appassionato in quello che sta insegnando: così ai ragazzi, oltre al sapere, arriverà certamente anche un po' di quella passione, che , se riusciranno ad apprezzare e a fare propria, migliorerà certamente il loro apprendimento e la loro voglia di studiare.
Questa premessa è per dire che io personalmente, come appassionata di storia e di filosofia, cercherei di inserirla ed integrarla nel curriculum dei miei studenti ogni qualvolta l'argomento trattato sia di particolare rilievo e possa offrire riflessioni adeguate e migliorative – di solito quando faccio riferimenti a carattere culturale più ampio vedo subito che lo studente davanti a me si rilassa e si accende, come se vedesse scemare la freddezza che tutti credono che la matematica debba necessariamente imporre - . Ovviamente non intendo dire con ciò è che è opportuno andare a inserire della storia o delle riflessioni filosofiche in ogni argomento che si va ad affrontare nell'insegnamento matematico: non tutti gli argomenti si prestano adeguatamente a riflessioni di questo genere, ma non è il caso del concetto di limite, che, come abbiamo visto, offre tantissime riflessioni di carattere storico ed epistemologico per migliorare l'apprendimento degli studenti, per aiutarli a superare le loro misconcezioni e i loro ostacoli di apprendimento, ma anche tanti spunti per discussioni di carattere più ampio, ad esempio di tipo filosofico, come ho cercato di illustrare precedentemente.

Ho pensato al concetto di limite, e con esso le basi in qualche modo dell'analisi matematica che si studia in quinta liceo, per mostrare la mia posizione a riguardo proprio per questi motivi: la ricchezza e la complessità della sua storia ricalca da una parte le difficoltà che impiegano gli studenti per comprenderlo, analoghe per certi versi a quelle che si sono dovute superare nel corso della storia per arrivare alla sua formulazione, dall'altra la vastità di spunti filosofici ed epistemologici che si possono trarre per riflessioni in classe, perché il nostro concetto di limite è effettivamente stato accompagnato e influenzato, più o meno esplicitamente nel corso della sua evoluzione, dal contesto culturale e filosofico. Inoltre il concetto di limite si porta dietro numerosi sviluppi in termini strettamente matematici che, con un approccio storico, gli studenti sono a mio avviso agevolati a non leggerli e interpretarli come concetti gli uni separati dagli altri: altro grosso problema nell'insegnamento della matematica è infatti, a mio avviso, quello di fare percepire agli studenti ogni argomento separato dall'altro, come se si potesse imparare la matematica a compartimenti stagni.
Io mi schiero dunque a favore di due principali posizioni a difesa dell'uso della storia della matematica all'interno della didattica :

I. la storia migliora la didattica perché emoziona gli studenti, anche offrendo un nuovo punto di vista della matematica, ovvero ci si può avvicinare ad essa considerandola un processo storico-culturale ben radicato in un contesto storico e sociale, e non come un mondo a se stante come spesso viene considerata: la storia e la filosofia possono aiutare agli studenti a eliminare dalla matematica quell'immagine troppo tristemente diffusa di disciplina per poche menti elette, e spiegata da un docente che troppo spesso viene avvertito lontano e non desideroso di interagire con loro (anche per questo farsi accompagnare dall'insegnante di filosofia e storia, generalmente più vicino ai ragazzi, può aiutare a migliorare la percezione dell'insegnante di matematica e quindi della materia- che necessariamente viene impersonificata con chi la spiega per certi versi)

II. la storia migliora la didattica perché seguendo il percorso storico delle difficoltà incontrate nel corso della storia reale, gli studenti possono palesare i loro dubbi confrontandosi con quelli dei matematici vissuti prima di loro, e quindi meglio superare gli ostacoli epistemologici, e possibilmente non crearsi misconcenzioni: la storia può riflettere le loro difficoltà cognitive, offrendo altresì un modo per superarle

Dal punto di vista più specifico del concetto di limite, l'uso della storia può aiutare a superare alcune delle principali difficoltà che gli studenti incontrano, proprio per il percorso e i passaggi graduali che si possono mostrare nel corso di essa, guardando anche le motivazioni che hanno spinto all'evoluzione in tal senso, senza cioè che nulla appari forzato : fra queste possiamo ad esempio ricordare le seguenti

- le motivazioni del perché ci accingiamo ad affrontare un certo tipo di studio, del perché è stato necessario introdurre nuovi concetti ed oggetti matematici, e quindi anche per meglio comprendere a che cosa serve l'analisi infinitesimale
- il passaggio da un concetto intuitivo e profondamente legato ad un registro visivo, ad uno formalizzato dal punto di vista matematico ed espresso in un registro fortemente simbolico
- l'evoluzione da un'idea dinamica del limite ad una statica, e quindi il passaggio da una visione degli infiniti e infinitesimi da un punto di vista potenziale verso una di tipo attuale
- il capire cosa effettivamente stanno facendo quando si apprestano a fare uno studio di funzione, quindi come trattare in modo corretto lo strumento che gli viene messo a disposizione, cioè il limite
- capire realmente il concetto di continuità e come essa sia profondamente e concettualmente legata a quello di limite, e non solo nella loro applicazione operativa, e come essi interagiscano l'uno nei confronti dell'altra
- capire cosa sono i numeri reali, come essi nascano e come non si possano trascurare quando facciamo dell'analisi matematica

Capitolo III.7

Come io utilizzerei un approccio storico per spiegare il concetto di limite e le basi del calcolo infinitesimale

«Ecco il mio segreto.
È molto semplice: non si vede bene che col cuore.
L'essenziale è invisibile agli occhi.»
- De Saint Exupéry -

Vorrei dunque concludere mostrando quello che sarebbe il percorso che seguirei davanti ad una classe di quinta liceo per introdurre e spiegare il concetto di limite: tengo a sottolineare nuovamente il fatto che l'approccio che seguirei è per sua natura molto vincolato alla scuola, un po' per la preparazione interdisciplinare dei ragazzi- se siamo in un istituto tecnico non si può parlare di filosofia non essendo tale materia nel curriculum scolastico -, inoltre è importante, a mio avviso, tenere sempre ben presente lo scopo dei ragazzi che si hanno di fronte, che ovviamente non può e non deve essere lo stesso per chi ha seguito 5 anni di liceo e chi invece ha scelto una scuola di tipo tecnico – in una scuola di questo tipo sarebbero certamente più appropriati supporti alla didattica non presi dalla storia o dalla filosofia, quanto piuttosto alle scienze applicate o alla tecnologia ad esempio (sempre se l'insegnante è ferrato relativamente a tali questioni).
Quando ci si trova ad introdurre il concetto di limite, primo argomento dell'analisi matematica, si è solitamente all'inizio del quinto anno scolastico: i ragazzi studiano filosofia già dal terzo anno, e solitamente dovrebbero essere arrivati ad affrontare Kant, e in storia sono già certamente già arrivati col programma all'Ottocento, esattamente come in letteratura italiana e in storia dell'arte.

i. Introduzione

«Finché un ramo della scienza offre un'abbondanza di problemi,
allora è vivo;
una mancanza di problemi prefigura l'estinzione
o l'arresto di uno sviluppo indipendente.
Così come ogni impresa umana persegue determinati obiettivi,
anche la ricerca matematica richiede i suoi problemi.
È attraverso la soluzione di problemi che
il ricercatore mette alla prova la sua tempra d'acciaio;
egli trova nuovi metodi e nuove prospettive,
e conquista un orizzonte più vasto e più libero.»
- Hilbert -

Non partirei dall'introduzione dell'analisi ne dal punto di vista dei limiti dinamici, ne dal punto di vista topologico, ne dal punto di vista intuitivo come fa ad esempio il Dodero Baroncini visto sopra, appoggiandosi ad un concetto fisico quale la velocità istantanea in un moto non uniforme, ne tanto meno dall'osservazione del grafico di una funzione che presenta asintoti o buchi.

Partirei con l'affrontare quello che Bkouche chiama epistemologia della problematizzazione: ovvero partirei col presentare ai miei studenti quale è il problema che nel Seicento i matematici sono impegnati a risolvere, problema che in realtà riguarda anche loro, cioè la questione di trovare i massimi e i minimi di una funzione, e soprattutto il problema del calcolo delle tangenti alla curva in un suo punto – si può spingere con i ragazzi sul problema delle tangenti perché loro lo conoscono bene: hanno affrontato lo studio della geometria analitica fra il terzo e il quarto anno, e ben si ricordano le difficoltà e i calcoli complicati di dover cercare la retta tangente ad una conica utilizzando il metodo del "delta uguale a zero", o doversi ricollegare alla geometria euclidea per il "fortunato" caso della circonferenza che poi si porta dietro tutte le formule delle varie distanze, o ancora la difficoltà del doversi ricordare le strane formule di sdoppiamento. Ma potrei anche andare oltre chiedendogli come potrebbero fare a calcolare la tangente ad esempio per una cubica elementare del tipo $y=x^3$ con i mezzi resi disponibili dalla geometria analitica da loro conosciuta. Quindi come prima cosa li porrei davanti allo stesso problema che si sono trovati ad affrontare matematici come Fermat e Leibniz, e gli andrei successivamente a mostrare come hanno cercato di risolverlo, il primo relativamente al problema dei massimi e minimi , il secondo in riferimento al problema del calcolo delle tangenti.
In questo modo spererei di aver catturato un poco l'attenzione e l'interesse, anche per il nuovo approccio dato alla lezione, ma soprattutto mi augurerei di evitare quelle domande che solitamente in quinta, dopo essere state messe a tacere dalla seconda in poi, tornano fuori prepotentemente quando i ragazzi si approcciano all'analisi, forse per la novità degli argomenti trattati, o forse per la nuova difficoltà che incontrano nello studio della matematica, o proprio perché vengono introdotti oggetti e concetti nuovi rispetto quelli cui si erano abituati negli anni precedenti: ci si sente pertanto di nuovo domandare "ma a cosa serve sta roba?", "ma dove potrò mai incontrare queste cose?", "perché devo studiare queste cose se non andrò a fare matematica?", "ma da dove saltano fuori queste cose?" … oltre ovviamente a domande più colorite che i ragazzi possono rivolgere (soprattutto quando si è in sede di lezione privata quindi con un rapporto meno formale fra insegnante e discente), del tipo "ma voi matematici dovete proprio essere fuori di testa a pensare a queste cose", oppure "questa roba può servire solo a un pazzo come voi matematici" … e ritorna sempre questa cosa che il matematico è pazzo, o è un "eletto", ma comunque sempre una persona fuori dalla norma: anche per questo una didattica storica, anche dal punto di vista semplicemente aneddotico aiuta ad umanizzare i matematici e renderli meno lontani dalle persone comuni, dagli stessi personaggi appunto che hanno fatto la storia, a volte forse basta solo dare un nome o un volto alla matematica, invece che solo simboli o figure per renderla una scienza fatta dagli uomini e per gli uomini!!!!

ii. Primi tentativi risolutivi

A questo punto, dopo l'introduzione del problema mostrerei i primi tentativi di risoluzione, contestualizzandoli bene nell'epoca in cui sorgono, ed anticipando che questi sono solo le prime basi che vengono poste al calcolo differenziale, che impiegherà comunque altri due secoli per poter essere formalizzato nel sapere che conosciamo e che dobbiamo apprendere ai nostri giorni.
Gli proporrei dunque l'approccio di Fermat per la ricerca dei massimi e minimi (vedi parte II capitolo 3) – che mi potrà ritornare utile quando si studieranno i teoremi sulle funzioni derivabili, essendoci proprio il teorema relativo-, e quello di Leibniz più specifico per la ricerca delle tangenti (vedi parte II capitolo 4).
Per quanto riguarda l'opera di Leibniz, non andrei ovviamente a soffermarmi sull'idea dei differenziali e sulle regole di differenziazione (sarà un argomento eventualmente che si potrà affrontare, anche dal punto di vista dell'utilizzo della fonte storica originale, quando si tratteranno le derivate), ma focalizzerei l'attenzione piuttosto sull'idea degli infinitesimi. Anche in questo caso potrei cercare un supporto nelle fonti, soprattutto per poter aprire una sorta di dibattito con i ragazzi

su che cosa potessero essere per Leibniz queste quantità evanescenti, questi differenziali, questi infinitesimi, e su questo passaggio matematico si potrebbe analizzare anche dal punto di vista filosofico, dato che molto probabilmente loro Leibniz l'avranno incontrato proprio nel corso di filosofia dell'anno scolastico precedente. Potrei proporre, oltre alle citazioni già riportate nella precedente parte, altri passi di Leibniz come punto di partenza per una discussione sulla natura degli infinitesimi, alla quale si può facilmente arrivare a far vertere la discussione anche sul tema del continuo (giusto per iniziare ad anticipare quali saranno i temi salienti della nostra analisi) : i pezzi proposti potrebbero essere ad esempio i seguenti – che addirittura potrebbero essere proposti nella versione originale in latino, concordando ovviamente una lezione in concomitanza con il docente di lettere

«[...] quanto sia necessaria questa più profonda
contemplazione degli infiniti e degli indivisibili,
senza la quale non si può porre rimedio alle difficoltà che sopraggiungono
dalla dottrina degli indivisibili e degli infiniti.
Nota: gli indivisibili devono essere definiti infinitamente piccoli,
ossia il cui rapporto alla quantità sensibile è infinito.»

«Chiamo indesignabile una quantità
la cui grandezza non si possa esprimere con alcun segno o carattere sensibile.
Ogni grandezza designabile purchessia, infatti,
potrà essere scritta in un qualche libro abbastanza piccolo,
per mezzo di comprende e rappresentazioni,
per comprendere la qual cosa Archimede intraprese
la ricerca sul Numero dei grani di Sabbia.»

«Durante le dimostrazioni ho introdotto
quantità incomparabilmente piccole,
vale a dire la differenza di due quantità comuni, incomparabile con queste quantità.
Così infatti, se non vado errato,
tali quantità si possono presentare chiarissimamente.
E quindi, se qualcuno non vuole impiegare quantità infinitamente piccole,
può assumerle tanto piccole quanto giudica sufficiente
perché siano incomparabili
e producano un errore di nessuna importanza, anzi, minore dell'errore dato.»

« E così sarà sufficiente che, quando diciamo
infinitamente grandi (ma più esattamente infiniti)
e infinitamente piccoli (o gli infinitesimi delle quantità a noi note),
intendiamo indefinitamente grandi e indefinitamente piccoli,
vale a dire tanto grandi quanto si vogliano
e tanto piccoli quanto si vogliano
perché l'errore che si assegna sia minore dell'errore in precedenza assegnato.»

Da questi esempi di fonti leibniziane, si potrebbe dunque introdurre che cosa sono questi infinitesimi, e come sia evidente anche dalle parole del loro stesso autore che non ci sia una definizione rigorosa e univoca di queste quantità, ma l'idea che questi infinitesimi offrono è certamente quella della potenzialità di divenire sempre più piccoli (o sempre più grandi se si parla di infiniti), offrono l'idea di un'approssimazione volta a rendere l'errore sempre inferiore al precedente, non presentandosi però mai come quantità legate un'idea dinamica, cioè in termini cinematici di movimento: ed ognuna di queste idee legate alla natura degli infinitesimi viene

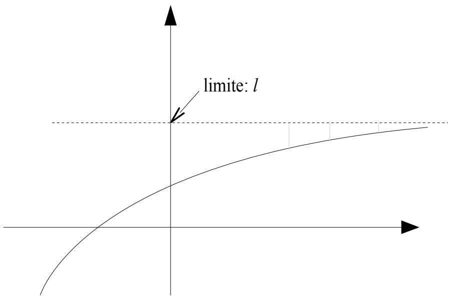
espressa in un registro verbale, l'autore stesso dichiara di non poter rappresentare in un registro di tipo visivo.
A questo punto chiederei ai miei ragazzi se questa definizione a loro pare esauriente, ovvero se sono riusciti a farsi un'idea precisa di questi infinitesimi, possibilmente da un punto di vista matematico, e se da tale punto di vista riuscirebbero a formalizzarla: loro mi danno la loro opinione, che di solito resta vincolata al registro verbale con i soliti termini “prendo un numero sempre più piccolo”, o in alcuni casi appellandosi alla densità della retta andando a rappresentare “segmentini” sempre più corti. Conforterei a questo punto le loro difficoltà osservando che, al di là delle applicazioni pratiche che il calcolo di Leibniz introdusse nella matematica della sua epoca e che per questo riscosse molto successo, la questione della natura degli infinitesimi era molto delicata, e proprio per essi arrivarono le principali critiche al nuovo calcolo differenziale (vedi parte II capitolo 6) e di conseguenza i primi tentativi di difesa con una formalizzazione migliore, volta soprattutto a sistemare la natura di questi “fantomatici” infinitesimi.

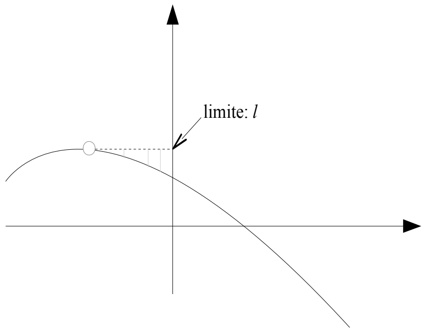
iii. Primo tentativo di formalizzazione

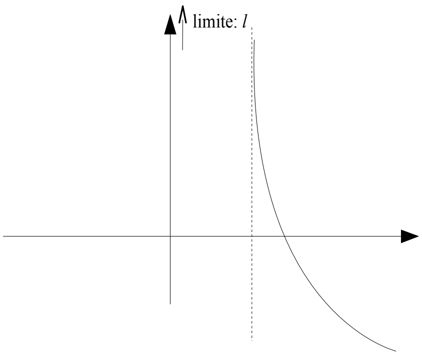
A questo punto potrei andare ad introdurre la definizione di limite che dà D'Alembert : anche in questo caso sarebbe molto interessante un parallelo e una lezione interdisciplinare con l'insegnante di filosofia, perché D'Alembert è direttore della parte scientifica dell' *Encyclopédie*, opera che incarna pienamente lo spirito illuminista del Settecento, inoltre è contemporaneo ad un altro grande personaggio della filosofia, che influenzerà gli aspetti filosofici e culturali, anche di molti matematici successivi: Immanuel Kant. Senza scendere ora in disquisizioni di carattere filosofico, alle quali ho già accennato per eventuali spunti nelle parti precedenti, utilizzerei la figura di D'Alembert e la definizione di limite che scrive nell' *Encyclopédie,* per introdurre a questo punto il concetto di limite, e lo farei proprio a partire dall'opposizione di D'Alembert agli infinitesimi, che egli ritiene “pure chimere” , poiché non si può stare a metà fra l'essere qualcosa e il non essere nulla (vedi ancora parte II capitolo 6) : per ovviare alla definizione di questi, egli dà come base del calcolo differenziale fondato da Leibniz il concetto di limite

«La teoria dei limiti è la base della vera metafisica del calcolo differenziale.
[…]
A dire il vero, il limite non coincide mai, o non diventa mai uguale alla quantità di cui è limite,
ma questa vi si avvicina sempre di più
e può differirne poco quanto si vuole.»

A questo punto potrebbe essere opportuno fornire qualche esempio intuitivo, sottolineando sempre ai ragazzi che la definizione di D'Alembert incarna perfettamente ciò che dal punto di vista intuitivo possiamo attribuire al concetto di limite, ma che ancora siamo lontani dalla definizione rigorosamente matematica alla quale dovremo pervenire. Gli esempi intuitivi proposti potrebbero essere ad esempio grafici che presentano asintoti, orizzontali o verticali, o “buchi” - gliene offrirei comunque una collezione in quanto ho notato che talvolta identifichino in modo chiaro il limite di una funzione solo con l'asintoto verticale (intuitivamente più semplice), mentre gli altri sono sempre idee confuse, che se si allontanano dalla prassi creano molti problemi.







Questa preparazione, questo sottolineare che siamo ancora in un ambito dinamico in cui gli infiniti e gli infinitesimi si concepiscono dal punto di vista potenziale, questo anticipare ai ragazzi che le cose devono ancora cambiare, a mio avviso li può aiutare a non crearsi misconcezioni durature: cercare si di fargli capire le cose a passi successivi, quindi creandosi anche un concetto intuitivo corretto, ma anticipandogli allo stesso tempo che dovremo ancora aggiustare un po' le cose. Secondo me è importante mostrargli questi passaggi che si sviluppano dall'intuizione anticipandogli che siamo ancora in via di definizione, per non radicare in loro concetti intuitivi come assolutamente veri, e dai quali separarsi diventa estremamente difficoltoso, e il farlo seguendo un discorso storico aiuta a giustificare i passi successivi che occorre fare, altrimenti potrebbero non capire perché non gli viene fornita direttamente la soluzione finale, e quindi non ritenere utili i passaggi intermedi – spesso i ragazzi ricercano l'economia nello studio e nell'apprendimento, senza una giustificazione solida che motivi i passa intermedi, essi talvolta pretendono di imparare solo il passaggio finale, e questo apprendimento, necessariamente mnemonico nella maggior parte dei casi, non li aiuta ne a capire profondamente i concetti, ne tanto meno a ricordarli con facilità. Quindi il legarsi a questioni ed aspetti di tipo storico, a mio avviso, crea una giustificazione del motivo per cui non possiamo cercare di apprendere il concetto di limite dalla sua definizione formale, perché altrimenti non potremmo capire cosa ci sia realmente dietro, ne tanto meno perché si debba dare una definizione così tanto complicata di una cosa apparentemente così facile.

Dopo un'introduzione di tipo storico sui problemi che hanno mosso alla creazione di un nuovo metodo matematico, dopo aver mostrato loro a livello intuitivo cosa significhi, ed anche a livello grafico ed eventualmente operativo, la situazione in cui i nostri studenti si trovano è esattamente analoga a quella del contesto storico e culturale in cui si trovano i nostri avi matematici all'inizio del XIX secolo: abbiamo un metodo molto potente che però non ha basi rigorose come siamo abituati a vedere in altri ambiti matematici, e quindi nasce il bisogno di dare queste fondamenta rigorose al calcolo, proprio perché si possa continuare ad applicare senza che continuino a nascere diatribe o dibattiti sulla sua fondatezza, proprio perché stiamo facendo matematica, scienza esatta per sua natura e definizione!

iv. Riflessione sull'Ottocento

Con l'introduzione al problema del metodo e del rigore, che si pone nuovamente preponderante dall'inizio del XIX secolo, si potrebbe fare un altro parallelo storico e filosofico, eventualmente sempre accompagnati dall'insegnante di filosofia: la questione del metodo che, come era già accaduto in epoca rinascimentale (pensiamo appunto all'importanza della filosofia e del metodo cartesiano per lo sviluppo della matematica e delle scienze), da un ambito inizialmente di tipo filosofico, va a creare l'input per nuove ricerche e nuovi sviluppi nel campo delle scienze. In questo caso la riflessione, che porta alla nascita della filosofia matematica, va proprio ad intervenire sul rigore del metodo utilizzato e sugli oggetti e i modi fondanti dello studio, cercandone di indagare la natura profonda: ricordiamo che all'inizio dell'Ottocento da un lato sono ancora molto forti le influenze del criticismo kantiano, che indagava appunto la possibilità la validità e i limiti dell'esperienza e quindi della conoscenza umana, dall'altro si inizia ad affermare la corrente del determinismo, appoggiata da importanti matematici quali ad esempio Laplace, che riteneva che le scienze potessero spiegare ogni ambito della vita umana.
Ma ciò su cui mi piacerebbe soffermarmi insieme ai miei studenti, per una discussione preliminare che ci conduca verso un argomento piuttosto complicato, per supportare e migliorare la nostra motivazione, è la seguente riflessione di carattere storico ed epistemologico.

Se all'inizio era bastata un'intuizione geniale che funzionasse per risolvere i problemi che da sempre attanagliavano le menti dei matematici, e quest'idea, nella sua più intuitiva evidenza, era stata sufficiente per poter essere applicata con successo a una grande varietà di problemi specifici e di natura diversa fra loro, all'inizio dell'Ottocento non è più sufficiente: la matematica, e in particolare l'analisi matematica, necessita a questo punto del rigore che è sempre stato attribuito alla matematica, e che in realtà è presente e preponderante in tutte le altre branche della stessa; le evidenze geometriche, le applicazioni brillanti e i risultati esaurienti non bastano più ad affermare e garantire la giustezza e il rigore. C'è bisogno del principio fondante, del rigore, della simbologia opportuna se quella a disposizione non basta – ricordiamo quanto è stato importante il passaggio dal linguaggio retorico a quello simbolico per lo sviluppo della matematica che introdusse François Viéte nel XVI secolo- : occorre dunque andare oltre alla conoscenza cui si è arrivati, anche se da un lato il sentimento diffuso dei matematici appare quello di essere arrivati al massimo del sapere, dall'altro c'è questa grande tensione (degna del periodo romantico) nel non volersi fermare, ci si vuole spingere ancora più in là rispetto quello che si ha, per scandagliarne i principi fondanti, per assegnarne una costruzione rigorosa e certa che nulla possa tentare di abbattere, e per vincere questa battaglia i matematici dell'Ottocento sono pronti a dare nuovi principi, nuove definizioni, nuove difficoltà, e proprio per questo nuovi spunti di ricerca.
Ma perché va fatto questo?
Questa è la vera domanda interessante, perché i matematici iniziano ad intraprendere questa nuova ricerca, verso la filosofia della matematica, ragionando sui principi della disciplina, sui suoi significati, sugli oggetti del suo studio? E una risposta bellissima viene a tal riguardo, già a partire dalle riflessioni di Cauchy nella prima metà dell'Ottocento (la filosofia matematica vera e propria si affermerà maggiormente nella seconda metà, anche se già all'inizio del secolo tale riflessione, soprattutto incentrata sulla necessità di rigore e di basi solide, si fa sempre più diffusa): questo sforzo per dare fondamenta solide alla nostra disciplina lo dobbiamo fare in nome dell'esattezza della matematica e della sua chiarezza, soprattutto per i nostri studenti.
La grande riflessione sul metodo e sul rigore della matematica, nasce proprio in seguito al grande sviluppo dell'insegnamento all'interno delle università (e ancora una volta ritroviamo uno sviluppo matematico fortemente legato e dovuto al contesto storico e sociale dell'evoluzione umana): dapprima in Francia, grazie all'opera napoleonica di ridefinizione della struttura scolastica in cui

viene posto un accento maggiore sull'istruzione tecnica e scientifica, con l'istituzione de l'*École Normale* e l'*École Polytéchnique*, e in cui ritroveremo l'opera di Cauchy, nata proprio per dare uno strumento di supporto ai suoi studenti, e in seguito la creazione e lo sviluppo delle altre università europee, in particolare quelle tedesche di Berlino e Gottinga, in cui ritroveremo la grande impresa di un altro professore, ovvero Weierstrass. Non solo dunque per un principio di esattezza intrinseco alla matematica ci si appresta a nuove ricerche, ma anche e soprattutto per i nostri studenti, ai quali così potranno essere fornite solide e sicure basi su cui costruire e far crescere il loro sapere, non dobbiamo insegnargli solo esempi ed intuizioni, per quanto geniali, ma verità assolute, certe, dobbiamo fornirgli un sapere sicuro e rassicurante, dobbiamo trasmettergli un sapere che qualche semplice obiezione non deve riuscire a smontare, non devono esserci possibili controesempi o spazi per polemiche di carattere metafisico, loro per primi devono crederci e devono essere sicuri che quello che noi gli abbiamo insegnato sono le basi solide e certe su cui loro si possono poggiare per volare lontano, e andare sempre oltre alla conoscenza che noi gli trasmettiamo.
Io credo che ogni professore di matematica dovrebbe riflettere su quello che hanno fatto personaggi come Cauchy e Weierstrass: erano in primo luogo professori, e come tali hanno cercato di migliorare le cose, a livello strutturale, proprio per i loro studenti, sistemare le basi della conoscenza per dare nuovi spunti alla ricerca e non rischiare di creare dubbi o incertezze negli studenti, questo hanno fatto: ed è anche per questo che io credo che la storia della matematica aiuti la didattica, perché dovremmo sentirci tutti un po' professori come Cauchy, che hanno posto le vere basi dell'analisi matematica, che come matematici noi oggi amiamo, per i loro studenti. E accanto a questo incentivo per noi professori a conoscere sempre di più e sempre meglio la nostra materia per aiutare i nostri ragazzi, forse anche loro, posti a conoscenza di questo sentimento del docente, si sentiranno non più vittime di menti perverse, ma importanti perché loro sono il motore delle nuove e spettacolari scoperte della matematica ottocentesca, che più di ogni altra ha contribuito a farci pervenire al sapere attuale, in tutte le sue forme.

Ora mi aspetterei che i miei studenti fossero carichi e motivati per scoprire come si è deciso di concludere la tormentata nascita di questo limite e di questi infinitesimi – quando faccio questa premessa ai miei ragazzi a lezione di solito riesco a catturare molto bene la loro attenzione, quanto meno perché risulto sempre io per prima molto appassionata a questo argomento!!!

v. La definizione di Cauchy

Passerei dunque a trattare l'opera di Cauchy: mostrando la sua definizione di limite appare subito evidente che ancora non siamo riusciti a separarci completamente dalla stessa idea intuitiva alla quale siamo pervenuti seguendo la storia fino a questo punto, ne tanto meno da un registro ancora di tipo verbale

> «Allorché i valori successivamente assunti da una stessa variabile
> si avvicinano indefinitamente a un valore fissato,
> in modo da finire per differirne di tanto poco quanto si vorrà,
> quest'ultimo è chiamato il limite di tutti gli altri.»

Appare evidente come la definizione di Cauchy risulti certamente più chiara rispetto a quella ad esempio che aveva fornito D'Alembert, ma ancora non è una definizione completamente rigorosa in termini matematici, essendo ancora legata a quell' "avvicinamento indefinito" che può lasciare adito a dubbi sul quanto effettivamente ci si debba avvicinare, così come quel "tanto poco si vorrà"; inoltre in questa definizione è ancora presente il senso dinamico del concetto di limite, proprio per questo senso di "avvicinamento" e di "successione" dei valori assunti dalla variabile: appare dunque, dalla definizione come viene presentata, un senso di dinamicità del limite e di infinitesimi dal punto di vista potenziale.

Molto più interessante è a mio avviso la definizione di Cauchy relativa agli infinitesimi: anche se possono venire intesi ancora da un punto di vista potenziale, certamente questa definizione toglie definitivamente ogni dubbio relativo alla loro natura, essi sono delle quantità che tendono a zero, e per questo Cauchy pone prima la definizione di limite, perché la utilizzerà come fondamento per le definizioni successive, in particolare questi infinitesimi e la continuità delle funzioni.

«Allorché i successivi valori numerici di una stessa variabile
decrescono indefinitamente in modo da diventare minori di ogni numero dato,
questa variabile diviene ciò che si chiama infinitesimo o una quantità infinitesima.
Una variabile di questa specie ha zero come limite.»

«Se, […] si attribuisce alla variabile x un incremento infinitesimo α,
la funzione stessa riceverà per incremento la differenza
$f(x+\alpha) - f(x)$
che dipenderà al tempo stesso dalla nuova variabile α e dal valore di x.
Ciò posto, la funzione $f(x)$ sarà, entro i due limiti assegnati alla variabile x,
funzione continua di questa variabile se,
per ogni valore di x compreso fra questi due limiti,
il valore numerico della differenza
$f(x+\alpha) - f(x)$
decresce indefinitamente insieme a quello di α.»

E qui viene spiegato in modo molto chiaro che cosa si intenda per continuità della funzione: i ragazzi di solito hanno molto chiara l'idea di funzione continua a livello intuitivo (la matita che percorre il grafico della funzione senza staccarla mai dal foglio solitamente è l'immagine più utile e più ampiamente utilizzata) , ma quando la si va a formalizzare e definire mediante i limiti, sembra vadano ad avvertirla e identificarla come una cosa separata da quell'idea che avevano. Non sono sicura che un approccio storico sia sufficiente per togliere quest'idea nefasta, certamente questo legame logico e formale che ci presenta Cauchy in modo evidente, ovvero definizione di limite → definizione di infinitesimo → definizione di continuità, può certamente aiutare i ragazzi a creare un collegamento più stretto fra il concetto di limite e il concetto di continuità, soprattutto se prima gli avevamo mostrato quante difficoltà erano sorte nel tentativo di definire le funzioni continue senza l'ausilio dei limiti, o addirittura effettuando il passaggio contrario, cioè definire i limiti usando implicitamente la continuità delle funzioni.

vi. La moderna definizione di Weierstrass

Infine, dopo questa lunga premessa che ha investito numerosi campi di indagine, consci di quanto dobbiamo e vogliamo fare, siamo pronti per raggiungere la definizione formale di limite come la forniva Weierstrass nel corso delle sue lezioni all'università di Berlino, che è praticamente il nostro punto di arrivo :

«Se, data una grandezza qualsiasi ε, esiste una η_0 tale che per $0<\eta<\eta_0$
la differenza $f(x_0 \pm \eta)-L$ è minore di ε in valore assoluto,
allora L è il limite di $f(x)$ per $x=x_0$.»

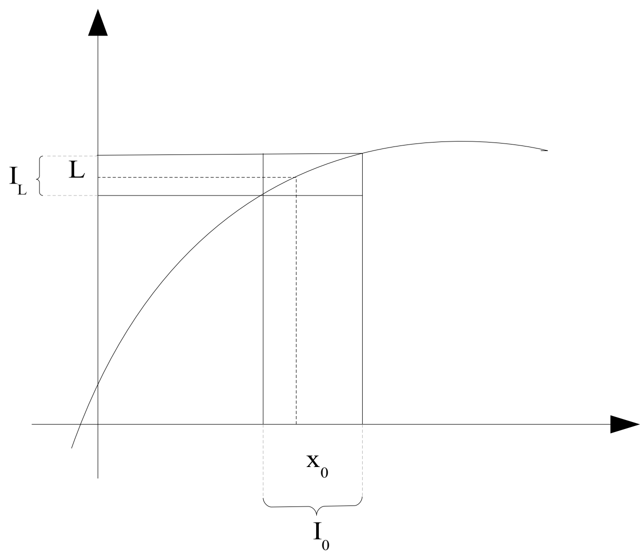
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \ :\ \forall\varepsilon\ \ \exists\eta_0 \,/\, 0<\eta<\eta_0 \Rightarrow\ |f(x_0\pm\eta)-L|<\varepsilon$$

La traduzione di questa espressione, ancora in qualche punto legata ad un registro verbale, in registro simbolico è immediata, come avevamo già visto in precedenza: io credo che arrivare a questa espressione gradualmente anche per quello che riguarda i registri utilizzati sia di grande aiuto ai ragazzi, non solo per vincere gli ostacoli legati alla comprensione effettiva del limite, ma anche per vincere quelle difficoltà inconsce legate ad una sorta di incomprensibilità legata ad un linguaggio non proprio e percepito spesso negativamente, che la presentazione della definizione di limite diretta potrebbe portare.

Ora che siamo arrivati a questo punto, non mi rimane da fare altro che mostrare come in questa definizione presentata da Weierstrass si sia completamente perduta l'idea del limite come qualcosa di dinamico e di potenziale, perché queste quantità ε e η_0 non si muovono per diventare sempre più piccole, ma sono delle quantità ben definite, singole, non variabili, in più hanno un carattere di universalità, nulla dipende da una scelta del soggetto: si dice solitamente "scegli ε piccolo a piacere", ma comunque venga scelto la validità dell'enunciato non cambia, perché è quel "per ogni" che rende la mia definizione valida universalmente, al di là che ε sia grande o piccolo, e da tutti quei possibili ε sarà la funzione stessa a permettere di trovare un valore conseguente di η_0 che ci consentirà di verificare la relazione finale. É chiaro che occorrerà sottolineare ai ragazzi che questo ε farà il "suo dovere", ovvero rappresenterà significativamente il nostro limite quando sarà molto piccolo piuttosto che grande, cioè nel caso peggiorativo; inoltre, questo prendere delle zone in cui considerare nuove variabili, ovvero degli intervalli di numeri reali che racchiudano al loro interno il nostro valore $f(x_0)$ e x_0, li chiameremo intorni, ed avranno la loro validità e la loro forza per la funzione anche qualora ci trovassimo costretti ad eliminare il valore x_0 , ad esempio perché non contenuto nel dominio della nostra funzione, oppure come nel caso del limite verso l'infinito. Introdotto e spiegato pertanto il concetto topologico di intorno e la sua caratterizzazione come un concetto statico non dinamico, e quindi in cui le quantità infinitesime assumono significato in termini attuali e non potenziali, potrei anche generalizzare la definizione di limite andando ad utilizzare il linguaggio topologico degli intorni:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \ : \ \forall I_L \ \exists I_{x_0} \,/\, x \in I_{x_0}, x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \in I_L$$

La mia spiegazione sul concetto di limite si potrebbe fermare qua, ma sono sicura che qualche faccia perplessa sia comparsa, pertanto, per tranquillizzare i miei ragazzi, gli proporrei una rassicurante rappresentazione grafica di questo genere, in cui non è presente alcuna freccia che possa dare l'idea di qualche cosa che si muove o che va ad approssimare qualcos'altro.



A questo punto si potrebbe dare la definizione di continuità in un punto, sempre come la insegna Weierstrass, dopo di che, a mio avviso, varrebbe la pena soffermarsi un poco sulla costruzione dell'insieme dei numeri reali, e di come la sua creazione sia profondamente legata a questi concetti.

		PROBLEMA: cercare un metodo per il calcolo delle tangenti e dei massimi e minimi IDEA/ INTUIZIONE per risolvere il problema
XVII Secolo ➢ Rivoluzione scientifica ➢ Affermazione filosofia razionalista ➢ Leibniz filosofo	• Fermat (per max e min) • Leibniz (per tangenti) NASCITA DEL CALCOLO INFINITESIMALE	
XVIII Secolo ➢ Berkeley ➢ Illuminismo ed *Encyclopédie* ➢ Kant ➢ D'Alembert filosofo	SVILUPPO CALCOLO • progressi e sviluppi grazie alle applicazioni operative • sviluppo e ricerca su nuove questioni quali il concetto di funzione, la continuità e la natura dei numeri reali • <u>Concetto di limite</u> come base del nuovo calcolo: primo tentativo di formalizzazione con D'Alembert	OSTACOLO ONTOLOGICO /EPISTEMOLOGICO: cosa sono gli infinitesimi?qual è la loro natura? Quanto sono piccoli? Si possono o si devono annullare?e se si annullano cosa succede? OSTACOLO EPISTEMOLOGICO /GEOMETRICO: legame con rappresentazioni geometriche;esempi ed applicazioni sul concetto di tempo ↓ OSTACOLO EPISTEMOLOGICO: interpretazione intuitiva legata all'idea di dinamicità e potenzialità ↓ OSTACOLO EPISTEMOLOGICO: che cosa è la continuità, cosa vuol dire e cosa implica avvicinarmi in modo continuo ↓ OSTACOLO EPISTEMOLOGICO: che cosa sono i numeri reali
XIX Secolo ➢ nascita delle università ➢ problema del metodo e del rigore volto anche all' insegnamento ➢ determinismo (Laplace) e sua critica (Cauchy) ➢ filosofia matematica	NECESSITÀ DI RIGORE E FORMALIZZAZIONE • Bolzano (continuità delle funzioni) • Cauchy (definizione di limite) • Weierstrass definitiva formalizzazione del concetto di limite e grazie ad esso di funzione continua passaggio da registro verbale e visivo a registro simbolico	OSTACOLO EPISTEMOLOGICO: formalizzare in modo rigoroso e definitivo un concetto intuitivo e funzionante a livello pratico ↓ PROBLEMA

Conclusioni

La tabella riportata mostra in modo sintetico il percorso storico-didattico che seguirei io per presentare ai miei studenti di quinta liceo il concetto di limite.
Spiegare il concetto di limite in modo che gli studenti lo capiscano al meglio è una questione molto complessa, per questo mi ritengo favorevole ad utilizzare metodi e approcci didattici alternativi, al fine di offrire una migliore comprensione, e soprattutto un migliore predisposizione da parte degli studenti: troppo spesso in matematica partono prevenuti e demotivati.
La presentazione del concetto di limite dal punto di vista storico è a mio avviso un ottimo modo per spiegare ai ragazzi un concetto che, più di molti altri, ha faticato a guadagnare la sua dimensione formale e rigorosa, proprio a causa, probabilmente, della sua facilità di comprensione a livello intuitivo e visivo, ma di estrema difficoltà a livello formale: presentare la questione dal punto di vista storico prepara i ragazzi a dover fare questo salto, e pertanto migliora la loro predisposizione ad effettuarlo.
Le ricerche in campo didattico inoltre confermano come l'approccio storico aiuti il superamento degli ostacoli epistemologici legati al concetto di limite, anche facilitando gli insegnanti a capire quali sono e dove si incontrano principalmente questi ostacoli, proprio perché il percorso evolutivo verso l'apprendimento, ricalca in qualche modo il percorso effettuato per arrivare al sapere conosciuto ed insegnato ai nostri giorni.
Ricapitolando dunque i punti salienti possiamo concludere che un approccio didattico al concetto di limite a partire da un punto di vista storico offre i seguenti vantaggi:

- Predispone e aiuta gli studenti a non restare ancorati all'idea intuitiva del concetto di limite, in quanto con un approccio storico sanno fin dall'inizio che il sapere presentato andrà ad evolversi, pertanto sarà più difficile che trovino giustificazioni che li lasci a un primo livello di sapere, perché è come se loro decidessero di fermarsi ad un livello iniziale del sapere, e non completassero l'evoluzione naturale e reale che il concetto ha avuto

- Facilita gli studenti nel comprendere il passaggio fra gli infiniti e gli infinitesimi in senso potenziale, verso quello attuale: offrendo anche la possibilità di osservare e capire la distinzione fra queste due posizioni dal punto di vista matematico, e non solo filosofico, come si presume che dovrebbe essere stato fatto nel corso dello studio della filosofia aristotelica, e le diverse modalità e conseguenze applicative

- Offre un approccio diverso allo studio della matematica, un approccio che può essere percepito più semplice e più incentivante perché più vicino a quello di materie che appaiono più semplici e amate rispetto la matematica, come appunto la storia e la filosofia. Può aiutare a creare un legame interdisciplinare con le altre materie del curriculum scolastico anche degli anni precedenti data la vastità temporale dell'evoluzione del concetto di limite, e pertanto a migliorare la percezione di quanto si sta studiando, avendo a disposizione una visione più ampia e completa. E da questo punto di vista anche l'insegnante ne può trarre vantaggio, rivalutando e risistemando la propria cultura disciplinare alla luce di nuove nozioni storiche e filosofiche.

- Mostra agli studenti le motivazioni che hanno spinto alla creazione del calcolo, e quindi della nozione di limite, e gli ostacoli, soprattutto di natura epistemologica, che si sono dovuti affrontare e superare nel corso del suo sviluppo fino alla sua piena affermazione: li accompagna pertanto nello stesso percorso che devono effettuare loro, anticipandone gli ostacoli che possono incontrare e offrendogli un aiuto e un suggerimento per il loro superamento

- Mostra agli studenti la vera natura del concetto di limite, non solo come calcolo algebrico volto a trovare gli asintoti nel corso di uno studio di funzione, o come rappresentazione geometrica, ma come concetto profondo e fondante per la matematica, e profondamente collegato ad altri concetti essenziali come quello di continuità e di definizione dei numeri reali.

«Il fatto è che bisogna superarli un po' alla volta,
i nostri limiti, con un po' di pazienza.
Qui sta il trucco. [...]
Non dar retta ai tuoi occhi,
e non credere a quello che vedi.
Gli occhi vedono solo ciò che è limitato.
Guarda con il tuo intelletto,
e scopri quello che conosci già,
allora imparerai come si vola.»

R. Bach - Il Gabbiano Jonathan Livingston

G. De Chirico, *Piazza d'Italia* - 1913

BIBLIOGRAFIA

- BOTTAZZINI, *Il flauto di Hilbert*
  UTET,Torino 2003
- BOTTAZZINI, *Il calcolo sublime: storia dell'analisi matematica da Euler a Weierstrass*
  Boringhieri, Torino 1981
- BOTTAZZINI, FREGUGLIA, RIGATELLI, *Fonti per la storia della matematica*
  Sansoni editore, Firenze 1992
- BOYER, *Storia della matematica*
  Mondadori, 2011
- CAMBIANO, MORI, *Storia e Antologia della Filosofia – dal Quattrocento al Settecento*
  Editori Laterza, 1993
- CAMBIANO, MORI, *Storia e Antologia della Filosofia – dal Quattrocento al Settecento*
- Editori Laterza, 1993
- PASINI, *Il reale e l' immaginario – la fondazione del calcolo infinitesimale nel pensiero di Leibnitz*
  Edizioni Sonda, Torino 1993
- RUSSO, *La rivoluzione dimenticata*
  Feltrinelli, Milano1997
- RUSSELL, *Introduzione alla filosofia matematica*
- ROSSI, *La nascita della scienza moderna in Europa*
  Editori Laterza, Bari 2011
- ROSSI, *La filosofia, Vol.secondo:la filosofia e le scienze*,
  Garzanti, Milano 1996

- BAGNI, *Il metodo di esaustione nella storia dell'analisi infinitesimale*
  DE CHIRICO, Nostalgia dell'infinito
  Periodico di Matematiche VII, 1997
- BAGNI, *Limite e visualizzazione: una ricerca sperimentale*
- L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 22B (1999)
- BAGNI, *Historical root of limit notion*
  Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education (2001)
- BAGNI, *Infinito e infinitesimo potenziale ed attuale: una sfida per la scuola secondaria superiore*
  Bollettino dei docenti di matematica 42 (2001)
- BKOUCHE, *Sur la notion de perspective historique dans l'enseignement d'une science*
  reperes - irem . n° 39 , 2000
- D'AMORE, *Per una formazione culturale e professionale degli insegnanti di matematica della scuola secondaria*
  In: Bolondi G. , Perché studiare la matematica. Milano 2012
- GIUSTI, *Dalla Géometrie al calcolo: il problema delle tangenti e l' origine del calcolo infinitesimale* – estratto da La rivoluzione scientifica
  Enciclopedia Italiana Treccani, 2002
- FURINGHETTI, *Storia della matematica per insegnanti e studenti*
- FURINGHETTI*, Riflessioni sulla professione di insegnanti di matematica*
- FURINGHETTI, SOMAGLIA, *storia della matematica in classe* (1997)
- LOLLI, *La questione dei fondamenti tra matematica e filosofia - Panorama introduttivo*

- MATTHWES, *Il riavvicinamento tra storia, filosofia ed insegnamento della scienza*

http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/Studenti/Ricerche/Passarino/
https://it.wikipedia.org/wiki/Jean_Baptiste_Le_Rond_d%27Alembert#Filosofia
https://it.wikipedia.org/wiki/Bernard_Bolzano
http://www.filosofico.net

RINGRAZIAMENTI

Innanzi tutto un grazie particolare al mio gatto *Solembum* … perché questa tesi è stata praticamente scritta a sei mani: o meglio due mani e quattro zampe!

Ringrazio *Manuele* … che ha mostrato di essere davvero il mio compagno, sostenendomi e accompagnandomi dall'inizio alla fine di questa avventura, che mi ha sopportato, supportato e portato fuori a cena per ogni esame, che ha diviso con me le gioie ma soprattutto i dolori, che ha sacrificato weekend e tempo libero per restarmi accanto, forte e paziente, e nonostante tutto è ancora qua con me … sperando non vada mai via, questa laurea è anche per lui!

Ringrazio la *mia famiglia* … perché mi hanno sostenuta come per la prima laurea: la mia *mamma,* per il suo essere sempre rassicurante e amorevole nei miei confronti, che anche nei momenti più difficili riesce a farmi stare meglio; il mio *fratellino,* per la sua presenza e per i suoi consigli sempre ineccepibili; *Tina* per la consulenza artistica.
E ancora una volta ringrazio mio *padre* … che anche se avrebbe voluto che facessi l'ingegnere, in qualche modo è stato lui a condurmi sulla strada dell'insegnamento... e se la prima laurea era per lui, questa è tutta per me... ma sono certa che proprio per questo sarà ancora più fiero della sua bambina!!

Ringrazio la *Dottoressa Tonelli...* che mi ha fatto capire l'importanza del mio desiderio: e questa laurea, e ciò cui spero mi potrà portare, è il mio desiderio .

Ringrazio il *Professor Bolondi* … che mi ha accolto abbandonata e mi ha portato fino in fondo a questa avventura!

Ringrazio tutte le persone meravigliose che ho incontrato qui a matematica … le mie compagne e i miei compagni, che mi hanno accolto fra loro e mi hanno sempre aiutato, i professori sempre preparati e disponibili, l'efficienza della segreteria didattica e di Alice in particolare.

Ma soprattutto, ringrazio *i miei studenti*, tutti…dai primi quando ancora stavo terminando il liceo, a quelli che verranno... non riuscirò a elencarli tutti, sarebbero troppi, ma questa tesi, questa laurea è per loro, perché loro mi hanno fatto conoscere la gioia e la soddisfazione di insegnare, loro mi hanno dato la forza per il sacrificio di questi anni e mi daranno la forza per i sacrifici futuri, perché so che la strada per l'insegnamento sarà impervia, ma per loro e grazie a loro io potrò sopportarla … perché loro mi hanno fatto capire ed essere felice e fiera di essere un insegnante.

Grazie ragazzi … grazie …