

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

**POLINOMIO CROMATICO DI UN GRAFO
E PROBLEMA DEI QUATTRO COLORI**

Tesi di Laurea in Teoria dei Grafi

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Marilena Barnabei

Presentata da:
Roberto Luzi

**III Sessione
Anno Accademico 2012-2013**

soltanto per pazzi ...

H.Hesse

Introduzione

Il **teorema dei quattro colori** ha un ruolo importante nella matematica. Infatti, come è accaduto per esempio in *teoria dei numeri* e in *algebra* con il “teorema di Fermat”, la ricerca della sua dimostrazione ha dato origine a un gran numero di nozioni e metodi di un’intera disciplina, la *teoria dei grafi*, che nel corso degli anni ha acquisito una vita propria sviluppandosi indipendentemente.

La nozione di *grafo* risulta di facile comprensione. La sua accessibilità rende i grafi estramente duttili; essi possono essere utilizzati per descrivere qualunque struttura algebrica, anche apparentemente più complicata, quale potrebbe essere un gruppo od un campo ed addirittura l’intera complessità della matematica.

Un aspetto molto interessante è il fatto che il teorema dei quattro colori ammette varie formulazioni equivalenti, relative a diversi campi di ricerca. Infatti il teorema non tratta solo di colorazione di vertici e lati di un grafo, ma ha legami profondi anche con l’esistenza di particolari cicli, la soluzione di equazioni diofantee, la ricerca delle radici di polinomi, problemi di matrici su un campo finito e così via.

La dimostrazione del teorema consiste nel ricondurre una qualsiasi configurazione a un numero finito, anche se molto elevato, di tipologie, mediante una serie di trasformazioni che modificano le relative posizioni delle aree interessate ma non le proprietà topologiche della mappa. Come vedremo, per la dimostrazione si è dovuti ricorrere a calcolatori numerici. Il programma, eseguito su due macchine con diversi algoritmi, verificava che per ciascuna di

queste configurazioni esiste una colorazione che impiega non più di quattro colori.

L'indispensabile utilizzo di calcolatori nella dimostrazione ha scatenato una fervente diatriba, arrivando a mettere in dubbio la validità stessa della prova. L'analisi di casi discreti per mezzo del calcolatore solleva dubbi sul fatto che non sussiste la certezza che un algoritmo sia stato implementato correttamente. Infatti, non è possibile dimostrare la correttezza di un algoritmo ma solo la sua non correttezza, mediante una controprova. Ad ogni modo, nell'algoritmo utilizzato nella dimostrazione del teorema non è stato riscontrato alcun errore.

La seguente tesi si propone di approfondire il problema dal punto di vista della colorazione dei grafi.

Il primo capitolo presenta la teoria dei grafi. Dopo un breve cenno storico sull'origine del termine grafo, introdotta da Eulero per affrontare il famoso “problema dei sette ponti di Königsberg”, vengono definiti i concetti di grafo, cammini, grafo bipartito e grafo planare. Nell'introduzione del concetto di grafo planare è presente un riferimento ad un altro problema famoso: “ il problema dei pozzi e dei villaggi”. I concetti più importanti per la dimostrazione dei quattro colori (terzo capitolo) sono sicuramente i grafi planari ed i grafi duali e la *formula di Eulero*.

Il secondo capitolo è incentrato sulla *colorazione dei grafi*. Infatti vedremo che è possibile colorare i grafi in maniere diverse; si possono colorare i vertici, i lati, e le superfici nel caso dei grafi planari. Per introdurre la colorazione dei lati di un grafo si accenna ad un altro problema concreto, quello della “compilazione del calendario di un torneo all'italiana”. Inoltre viene presentato un importante argomento: il *polinomio cromatico*. Nella colorazione dei grafi planari viene dimostrato il *teorema dei 5 colori*, vero e proprio preludio al terzo capitolo.

Il terzo capitolo affronta il teorema dei quattro colori. Viene presentata l'evoluzione sia storica sia tecnica del teorema dei quattro colori. In particolare ci si sofferma sul ragionamento della “dimostrazione errata di Kempe” e delle correzioni che portano la coppia di matematici Haken-Appel a dimostrarlo.

Indice

Introduzione	i
1 Teoria dei grafi	1
1.1 Definizioni di base	3
1.2 Alcune proprietà	7
1.2.1 Morfismi tra grafi	7
1.2.2 Aritmetica dei grafi e sottografi	8
1.2.3 Matrici di incidenza e matrici di adiacenza	12
1.3 Cammini e Grafi connessi	13
1.3.1 Connettività locale	15
1.4 Grafi bipartiti	18
1.5 Grafi piani e Grafi planari	19
1.5.1 Grafo duale	25
2 Colorazioni di grafi	27
2.1 Colorazione di vertici	28
2.1.1 Teorema di Brooks	29
2.1.2 Legame tra numero di stabilità e numero cromatico	32
2.2 Colorazione dei lati	34
2.3 Polinomio Cromatico	41
2.3.1 Problema delle disposizioni condizionate	47
2.4 Colorazione dei grafi planari	48

3	Da problema a Teorema dei quattro colori	51
3.1	Un po' di storia	51
3.2	Dimostrazione di Kempe	53
3.2.1	Le ipotesi	53
3.2.2	Carte e grafi	55
3.2.3	Il ragionamento di Kempe	61
3.2.4	L'errore di Kempe	69
3.3	Attacco alla congettura dei quattro colori: configurazioni ri- ducibili	70
3.4	Dimostrazione di Appel-Haken	74
3.4.1	La dimostrazione Haken-Appel	77
3.4.2	Dialogo "uomo-macchina"	81
	Bibliografia	83

Elenco delle figure

1.1	I ponti di Königsberg	1
1.2	Grafo di Eulero	2
1.3	Grafi equivalenti	3
1.4	Grafi adiacenti	5
1.5	Grafo orientato	6
1.6	Isomorfismo di grafi	8
1.7	Grafi G e G'	10
1.8	$G \cup G'$, $G \cap G'$, $G - G'$	10
1.9	Grafi $K_2 * K_3 = K_5$	10
1.10	Grafo G e grafo $L(G)$	11
1.11	Sottografo	11
1.12	Cammino	14
1.13	Albero	17
1.14	Grafi r -partiti	19
1.15	Grafo planare	21
1.16	Teorema di Jordan	22
2.1	Metodo compilazione calendario	38
2.2	Esempio contrazione e connessione	39
2.3	Algoritmo numero cromatico	40
2.4	$P(G; 2)$	43
3.1	Ipotesi di Guthrie	54
3.2	Carte di De Morgan	55

3.3	Duale con coppia	57
3.4	Duale del duale	58
3.5	Catena semplice di Kempe	62
3.6	Nido d'ape	65
3.7	Esempio di conteggio lati	66
3.8	Adattamento	70
3.9	Configurazioni inevitabili	75
3.10	Triangolazione	77
3.11	Tre ostacoli	79

Capitolo 1

Teoria dei grafi

La *teoria dei grafi* nasce nel 1736, quando il matematico tedesco Eulero, ossia Leonard Euler (1707-1783) pubblica *Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis* (la Soluzione di un Problema Relativo alla Geometria di Posizione), testo nel quale veniva risolto il famoso “problema dei sette ponti Königsberg”. Per la prima volta viene utilizzato il termine **grafo**.

Il problema (figura 1.1) consiste nel sapere se esiste o meno un percorso che

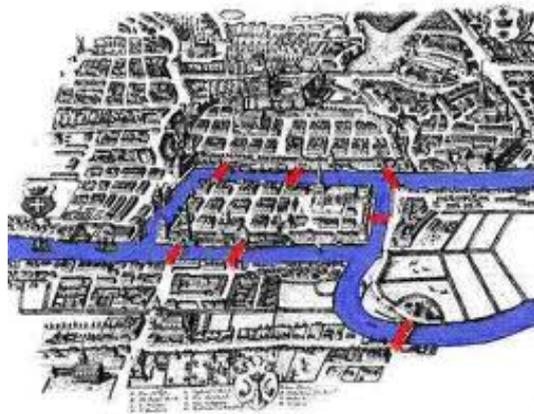


Figura 1.1: I sette ponti della città di Königsberg

permetta di attraversare *tutti* i ponti *una e una sola* volta, qualsiasi sia il numero di ponti e diramazioni del fiume. Eulero decide di eliminare tutte le

informazioni inutili e introduce questo disegno:

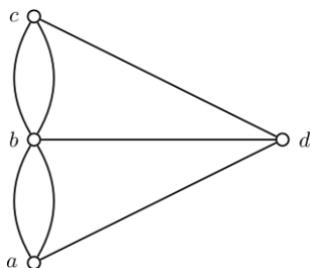


Figura 1.2: Grafo di Eulero equivalente a Königsberg

dove le lettere minuscole a, b, c e d indicano le regioni divise dal fiume, mentre i ponti che le collegano sono rappresentati dagli *archi* o *lati*. Proprio questa figura verrà denominata grafo.

Formulando il problema in questi termini, la sua soluzione risulta decisamente più accessibile.

Immaginiamo che esista un percorso P che, partendo da un vertice del grafo, attraversi tutti i lati una e una sola volta. Consideriamo poi i vertici dai quali né si parte né si arriva: in ognuno di essi si deve poter entrare e uscire da lati diversi. In questo modo possiamo dividere i lati di entrata da quelli di uscita. I vertici che non siano quello iniziale o quello finale devono quindi avere un numero pari di uscite e di entrate.

Se chiamiamo *pari* i vertici con un numero pari di lati che convergono in essi, possiamo dire che il percorso P è possibile solo se i vertici dispari sono zero oppure due. Tali vertici saranno *necessariamente* quello iniziale e quello finale, che possono coincidere o essere distinti.

Grazie a questa condizione *necessaria*, possiamo dare una risposta al problema di Eulero: essendoci nel grafo dei ponti di Königsberg quattro vertici dispari, non esiste alcun percorso che attraversi i lati tutti e una e una sola volta.

1.1 Definizioni di base

Definiamo in maniera più rigorosa e corretta le nozioni di base con il quale lavoreremo anche nei prossimi capitoli.

Definizione 1.1. Si dice **grafo** una coppia $G = (V, E)$, dove V ed E sono insiemi, con una funzione $f : E \rightarrow [V]^2$, dove $[V]^2 = \{\{u, v\} | u, v \in V\}$ è una famiglia di *multinsiemi* di lunghezza 2.

L'insieme V si chiama insieme di *vertici*, mentre E^1 si chiama insieme di *lati* (od archi), f si chiama *funzione di incidenza*.

Se $f(e) = \{u, v\}$, il lato e è *incidente* con i vertici u e v .

Per rappresentare un grafo, disegniamo dei punti per indicare i vertici e dei segmenti (od archi) per raffigurare i lati incidenti. Tuttavia non è importante in che modo li rappresentiamo, l'importante è segnalare tutte le relazioni tra vertici e spigoli.

Esempio 1.1.

Sia $G = (V, E)$ il grafo con $V = \{A, B, C, D\}$ ed $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, sia anche f funzione di incidenza tale che:

$$f(e_1) = \{A, B\}, \quad f(e_2) = \{B, C\}, \quad f(e_3) = \{A, D\}$$

allora sono equivalenti le due seguenti rappresentazioni:

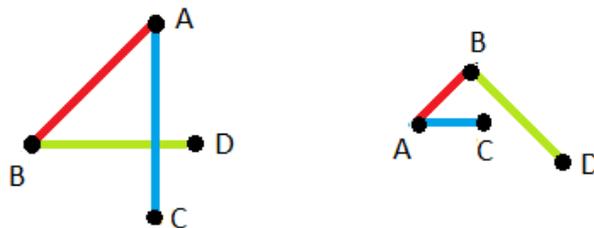


Figura 1.3: Rappresentazioni equivalenti di un grafo.

¹La lettera E sta per “edges”, dall’inglese che tradotto in italiano significa spigoli o lati.

Se il lato e è incidente con $\{u, v\}$, i vertici u, v si chiamano *estremi* di e .

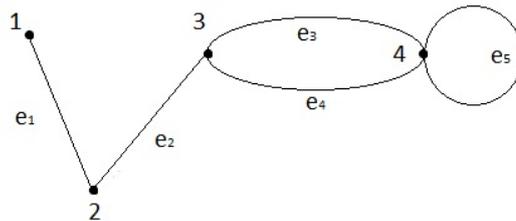
Definizione 1.2. Siano $e_i, e_j \in E$, lati di un grafo $G = (V, E)$. Se vale che $f(e_i) = f(e_j)$ i lati e_i ed e_j si dicono **lati paralleli**. Mentre si chiama **cappio**² un lato che ha estremi uguali.

Esempio 1.2.

Sia $V = \{1, 2, 3, 4\}$ l'insieme dei vertici, sia $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ e sia la funzione di incidenza f tale che:

$$f(e_1) = \{1, 2\}, f(e_2) = \{2, 3\}, f(e_3) = \{3, 4\}, f(e_4) = \{3, 4\}, f(e_5) = \{4, 4\}.$$

Possiamo disegnare il seguente grafo:



Quindi e_3, e_4 sono *lati paralleli*, mentre e_5 è un *cappio*.

Definizione 1.3. Un grafo che non ha cappi e non ha lati paralleli si dice **semplice**.

Definizione 1.4. Si dice che due vertici u, v di un grafo sono *adiacenti* se esiste un lato incidente con $\{u, v\}$; mentre due lati si dicono *adiacenti* se hanno in comune un vertice.

²In inglese "loop".

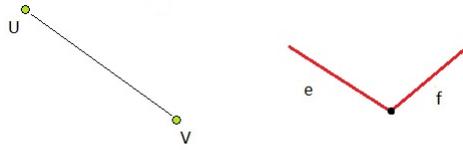


Figura 1.4: U, V vertici adiacenti; e, f lati adiacenti

Definizione 1.5. Si chiama **grado** (o valenza) di un vertice il numero di lati che lo contengono e si indica con $d(x)$.

I vertici con grado zero si dicono *isolati*, quelli con grado uno si dicono *pendenti*. Un insieme di n vertici di grado zero (quindi privo di lati) si dice *grafo nullo* e si indica con Ω_n .

Un vertice di un grafo si dice *pari* (*dispari*) se il suo grado è pari (dispari).

Teorema 1.1.1. Sia $G = (V, E)$ un grafo con $m = |E|$ lati.

Sia $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ l'insieme dei vertici di G . Allora

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2|E|$$

Dimostrazione. Dato che ogni lato è incidente a due vertici distinti, sommare i gradi di tutti i vertici equivale a contare i lati due volte. \square

Corollario 1.1.2. In ogni grafo il numero di vertici dispari è pari.

Osservazione 1. Il grado di un vertice è un esempio di invariante³ di un grafo di natura *locale*. Esempi di invarianti di natura “globale” sono invece:

il grado minimo di G

$$\delta(G) = \min\{d(v) | v \in V\}$$

ed il grado massimo di G

$$\Delta(G) = \max\{d(v) | v \in V\}.$$

³Una quantità associata ad un grafo è detta *invariante* se è la stessa per tutti i grafi isomorfi al grafo dato.

Definizione 1.6. Un **grafo orientato** è una coppia $G = (V, A)$, in cui V è un insieme finito di vertici e A un insieme di coppie ordinate di elementi di V , detti archi⁴.

Osservazione 2. Per i grafi orientati è possibile definire il *grado in entrata* ed il *grado in uscita* dei vertici. Sia $v \in V$ indicheremo $d^-(v)$ il grado in entrata, cioè il numero di archi che entrano in v ; ed allo stesso modo d^+ il grado in uscita, cioè il numero di archi che escono da v .

In particolare chiameremo: *sorgente* di G un vertice avente grado in entrata nullo, e *pozzo* un vertice avente grado in uscita nullo.

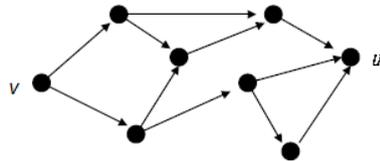


Figura 1.5: v è un vertice sorgente, u è un vertice pozzo.

Teorema 1.1.3. Sia $G = (V, A)$ un grafo orientato. Allora

$$\sum_{v \in V} d^-(v) = \sum_{v \in V} d^+(v) = |A|.$$

Definizione 1.7. Un grafo si dice *regolare* se tutti i suoi vertici hanno lo stesso grado. Se $d(x) = k \quad \forall x \in V$, allora si dice che il grafo è *k-regolare*.

Un grafo 3-regolare è spesso detto *cubico*.

Definizione 1.8. Si chiama *ordine* di un grafo G la cardinalità dell'insieme dei vertici, e viene indicato con $|G|$.

Si chiama *grandezza* (o *dimensione*) la cardinalità dell'insieme dei lati, e viene indicato con $||G||$.

⁴Per semplificare useremo la notazione A e chiameremo archi (al posto di lati) per distinguere i grafi ordinari da quelli orientati.

Definizione 1.9. Un grafo semplice si dice **completo** (o *clique*) se i vertici sono a due a due adiacenti (ovvero ogni coppia di vertici è collegata da un lato).

Si indica con K_n il grafo completo di ordine n .

Ovviamente, K_n ha $\binom{n}{2}$ lati.

Quindi dato un grafo semplice con n vertici ed m lati, si deduce che il numero di lati è compreso tra zero ed il numero di lati di K_n :

$$0 \leq m \leq \binom{n}{2}$$

1.2 Alcune proprietà

Nelle prossime sottosezioni parleremo delle funzioni (morfismi) tra grafi, sottoinsiemi ed un po' di aritmetica.

1.2.1 Morfismi tra grafi

Nell'esempio 1.1 precedente abbiamo visto che non è importante in che modo si disegnano i grafi, ma è essenziale mantenere le relazioni vertici-lati.

Tuttavia, se avessimo insiemi di vertici diversi e collegamenti diversi, ciò non significherebbe che i grafi non si possono identificare.

Definizione 1.10. Siano $G = (V, E)$ ed $G' = (V', E')$ due grafi. Se una biiezione $\phi : V \rightarrow V'$ è tale che $v_1 v_2 \in E$ se e solo se $\phi(v_1) \phi(v_2) \in E'$ per ogni $v_i, v_j \in V$, allora ϕ si dirà *isomorfismo di grafi*.

Se $G = G'$, ϕ si chiamerà *automorfismo di grafi*.

Stabilire se due grafi sono isomorfi o meno può essere non banale.

Esempio 1.3.

Consideriamo i grafi G_1, G_2 e G_3 . Hanno tutti lo stesso numero di vertici e di lati. Si ha che G_1 e G_2 sono isomorfi tra loro, mentre G_3 non è isomorfo con nessuno dei due. Per dimostrare che due grafi non sono tra loro isomorfi,

basta semplicemente trovare una caratteristica che non è propria di uno dei due grafi.

In questo caso G_3 ha tre vertici a due a due adiacenti, mentre G_1 e G_2 no. Questo basta per dire che non sono isomorfi.

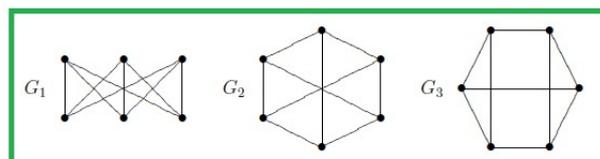


Figura 1.6: G_1, G_2 sono grafi isomorfi tra loro, mentre G_3 non lo è con nessuno dei due.

Più in generale possiamo definire il concetto di *morfismo* tra grafi.

Definizione 1.11. Siano $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ due grafi. Si chiama *morfismo* $f : G \rightarrow G'$ una funzione $f : V \rightarrow V'$ tale che

$$v_1 v_2 \in E \Rightarrow f(v_1) f(v_2) \in E', \forall v_1 v_2 \in V.$$

Il morfismo $f : G \rightarrow G'$ si chiama *monomorfismo* se $f : V \rightarrow V'$ è iniettiva, e di *epimorfismo* se $f : V \rightarrow V'$ è suriettiva.

1.2.2 Aritmetica dei grafi e sottografi

Definiamo ora qualche semplice operazione che si può effettuare con i grafi.

Definizione 1.12. Dati due grafi $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ definiamo:

1. l'*unione* ponendo

$$G \cup G' = (V \cup V', E \cup E') \quad ;$$

2. l'*intersezione* ponendo

$$G \cap G' = (V \cap V', E \cap E') \quad .$$

L'unione di due grafi è sempre un grafo, mentre nel caso dell'intersezione non si ottiene sempre un grafo, come ad esempio nel caso in cui $V \cap V' = \emptyset^5$; in questo caso G e G' si diranno *disgiunti*. Possiamo anche introdurre altre operazioni.

Definizione 1.13. Sia $G = (V, E)$ un grafo qualsiasi.

(a) *Grafo differenza e grafo somma.*

Se $F \subseteq [V]^2$, è un insieme di lati, poniamo

$$G - F = (V, E \setminus F), \quad G + F = (V, E \cup F) \quad .$$

(b) Si chiama *complementare* \bar{G} di un grafo G il grafo con lo stesso insieme di vertici V di G e l'insieme di lati complementari di E ; si pone

$$\bar{G} = (V, [V]^2 \setminus E) \quad .$$

(c) Sia $G' = (V', E')$ un grafo disgiunto da G . Si definisce *prodotto di grafi* il grafo

$$G * G' = (V \cup V', F) \quad ,$$

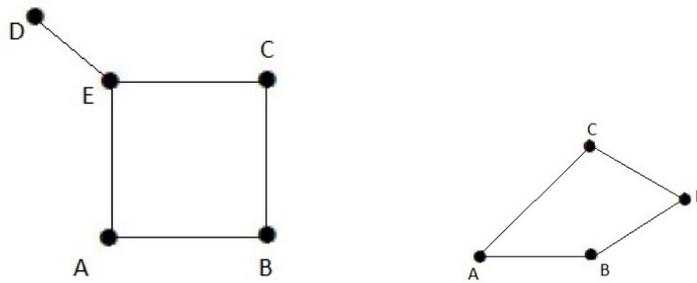
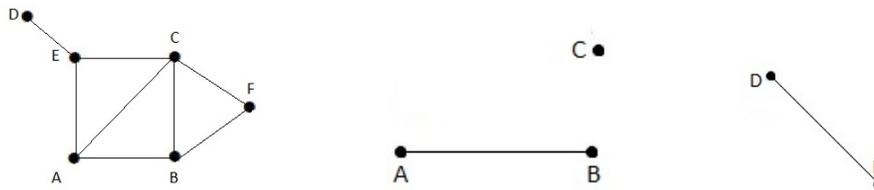
con F si indica l'insieme dei lati che contiene tutti quelli di E e di E' e tutti i lati che collegano i vertici di V con quelli di V' .

Definizione 1.14. Dato un grafo $G = (V, E)$; il *grafo lineare* di G (o grafo dei lati), che si indica con $L(G)$, è il grafo che ha l'insieme dei lati E come vertici, con la condizione che due vertici $e, f \in E$ sono adiacenti in $L(G)$ se e solo se essi sono adiacenti in quanto lati di G .

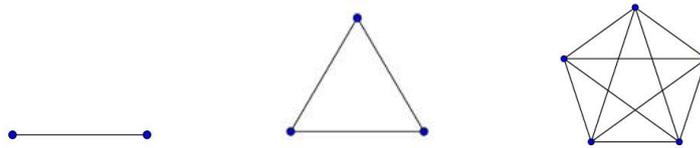
Esempio 1.4.

Applichiamo le operazioni appena definite ai grafi G e G' .

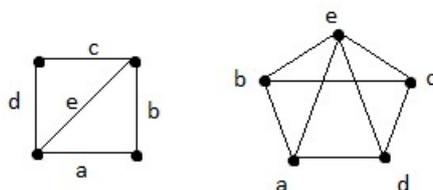
⁵Questo è vero a meno di considerare anche l'esistenza del grafo vuoto.

Figura 1.7: Grafi G e G' Figura 1.8: $G \cup G'$, $G \cap G'$, $G - G'$ **Esempio 1.5.**

Applichiamo l'operazione prodotto ai grafi K_2 e K_3 e otteniamo il grafo K_5

Figura 1.9: Grafi $K_2 * K_3 = K_5$ **Esempio 1.6.**

Sia G un grafo di insieme di lati $E = \{a, b, c, d, e\}$. Costruiamo il grafo lineare del grafo G .

Figura 1.10: Grafo G e grafo $L(G)$

Definizione 1.15. Sia $G = (V, E)$ un grafo. Dato un sottoinsieme $E' \subset E$, $H = (V, E')$ si chiama *grafo parziale di G rispetto ad E'* .

Se e è un lato di G e $E' = E \setminus \{e\}$, il grafo parziale H rispetto ad E' si denota con $G - \{e\}$.

Definizione 1.16. Sia $G = (V, E)$ un grafo e sia $W \subset V$. Sia U l'insieme costituito da tutti i lati di G aventi entrambi gli estremi in W . Il grafo $G' = (W, U)$ si dice *sottografo di G generato da W* .

Se $|V| > 1$, $x \in V$ e $W = V \setminus \{x\}$, il grafo (W, U) generato da W si denota con $G - \{x\}$.

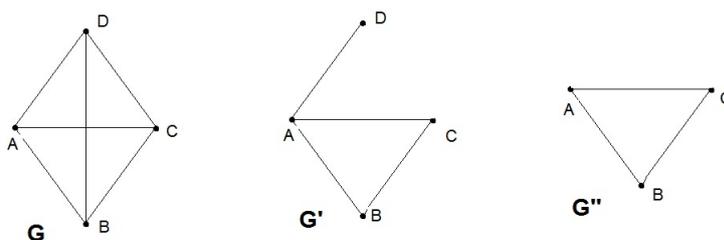


Figura 1.11: Dato il grafo G , G' è un suo grafo parziale mentre G'' è un suo sottografo generato da l'insieme dei vertici $\{A, B, C\}$.

Teorema 1.2.1. *Per ogni grafo G ed ogni intero $r \geq \Delta(G)$, esiste un grafo r -regolare H che contiene G come sottografo.*

Dimostrazione. Supponiamo che G non sia r -regolare o che $r \geq \Delta(G)$, perchè se G fosse regolare e $\Delta(G) = r$ avremmo già finito (basterebbe prendere $H = G$). Sia G' una copia di G : colleghiamo i vertici di G' di grado minore di r con quelli corrispondenti di G ed otteniamo un nuovo grafo che chiamiamo G_1 . Se G_1 è r -regolare, abbiamo finito perchè $H = G_1$, altrimenti si itera la costruzione partendo da G_1 . Infatti si intuisce che con un numero k finito di passi⁶ si ottiene un G_k r -regolare che contiene G come sottografo. \square

Osservazione 3. La dimostrazione del teorema è costruttiva, ma il grafo ottenuto H non è detto che abbia il minor ordine possibile.

1.2.3 Matrici di incidenza e matrici di adiacenza

Abbiamo già visto come un grafo G possa essere descritto in maniera diretta, esplicitando gli insiemi di vertici V e l'insieme dei lati E , e come possa essere rappresentato in maniera grafica. Vedremo ora come un grafo possa anche essere descritto in termini di matrici.

Sia $G = (V, E)$ un grafo. Sia $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ l'insieme dei vertici e sia $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ l'insieme dei lati di G .

Poniamo per ogni coppia di vertici $v_i, v_j \in V$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } v_i v_j \in E \\ 0 & \text{se } v_i v_j \notin E \end{cases}$$

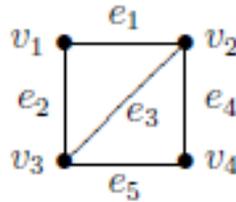
La matrice $A(G) = (a_{ij})$ è detta *matrice di adiacenza* del grafo G . Questa sarà una matrice quadrata $n \times n$, simmetrica con coefficienti 0 o 1.

Un'altra matrice che si può associare al grafo G è la *matrice di incidenza* $B(G) = (b_{i,j})$, una matrice $n \times m$ definita ponendo:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il vertice } v_i \text{ è incidente al lato } e_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

⁶Precisamente $k = r - \delta(G)$.

A titolo di esempio riportiamo le matrici di adiacenza A e di incidenza B associate al seguente grafo:



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.3 Cammini e Grafi connessi

Definizione 1.17. Dato un grafo qualsiasi $G = (V, E)$ una sequenza di $k + 1$ vertici

$$v_0 v_1 \dots v_k$$

tali che $\forall i = 1, \dots, k$ si ha

$$e_i = (v_{i-1}, v_i) \in E$$

si chiama **cammino** (o catena) di G . Si indica con $C = v_0 v_1 \dots v_k$.

Il numero di archi k indica la *lunghezza* del cammino, mentre $x = v_0$ e $y = v_k$ si chiamano *estremi* di C . In tal caso il cammino si può indicare con $C(x, y)$.

Il cammino di lunghezza minima che collega due vertici si chiama *linea geodetica*.

Se gli estremi coincidono, il cammino si dice *chiuso*, altrimenti si dice *aperto*.

Se per ogni $i, j \in \{0, 1, \dots, k\}$ si ha $e_i \neq e_j$, si parla di *cammino semplice*.

Se per ogni $i, j \in \{0, 1, \dots, k\}$ si ha $v_i \neq v_j$, si parla di *cammino elementare*.

Un cammino chiuso ed elementare è detto *ciclo*.

Osservazione 4. Evidentemente un cammino elementare è semplice, ma non vale il viceversa.

Ad esempio la sequenza $V_1, e_1, V_2, e_2, V_3, e_8, V_5, e_7, V_2, e_3, V_6$ rappresenta un cammino $C(V_1, V_6)$ semplice ma non elementare.

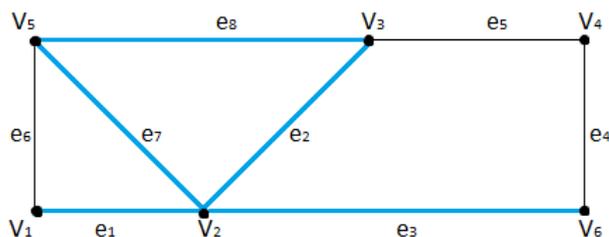


Figura 1.12: Cammino semplice ma non elementare (catena in blu).

Definizione 1.18. Un grafo si dice **connesso** se esiste almeno un cammino $C = (u, v)$ per ogni coppia di vertici $u, v \in V$.

Proposizione 1.3.1. I vertici di un grafo connesso G possono essere numerati in modo che tutti i sottografi $G_i = G[v_1, \dots, v_i]$, per $i = 1, 2, \dots, |G|$, siano connessi.

Considerando sempre un grafo $G = (V, E)$, introduciamo ora la relazione R in V definita in questo modo:

$$\forall x, y \in V \quad xRy \Leftrightarrow \exists C(x, y).$$

È facile verificare che si tratta di una *relazione di equivalenza*⁷. Allora V è partizionato in classi, ognuna delle quali contiene un vertice del grafo ed i vertici in relazione con esso, ovvero tali che sono collegati ad esso tramite un cammino. Tali classi prendono il nome di *componenti connesse* di G . Il numero di tali classi è detto *numero di connessione* di G e si indica con $p(G)$.

Osservazione 5. Una definizione alternativa di grafo connesso è quindi quella di grafo con $p(G)=1$.

⁷È una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva.

Proposizione 1.3.2. *Sia $G = (V, E)$ un grafo. Se G è connesso allora*

$$|E| \geq |V| - 1.$$

Dimostrazione. Sia $G = (V, E)$ un grafo connesso con $|V| = n$. Procediamo per induzione sul numero di vertici n . Per $n = 1, 2$ l'asserzione è ovvia.

Supponiamo $n \geq 3$ ed assumiamo l'asserzione vera. Se $d_G(v) \geq 2 \quad \forall v \in V$, per il teorema 1.1 sappiamo che,

$$2|E| = \sum_{v \in V} d_G(v) \geq \sum_{v \in V} 2 = 2|V|,$$

cioè $|E| \geq |V|$.

Supponiamo esista $v \in V$ tale che $d_G(v) = 1$. Consideriamo $G' = G - \{v\}$. Il grafo G' è connesso, poichè contiene un cammino (di G) che congiunge tutti i suoi vertici. E' , l'insieme dei lati di G' , è uguale ad E a meno di un lato, quello incidente a v . Si ha, per l'ipotesi induttiva, la tesi:

$$|E| = |E'| + 1 \geq (|V \setminus \{v\}| - 1) + 1 = |V| - 1.$$

□

1.3.1 Connettività locale

Sia $G = (V, E)$ un grafo. Siano A e B due sottoinsiemi di V e $X \subset V \cup E$.

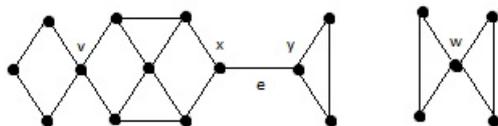
Definizione 1.19. L'insieme X *separa* gli insiemi A e B in G se ogni AB -cammino⁸ in G contiene un vertice, oppure un lato, che appartiene ad X .

Definizione 1.20. Un *vertice di taglio* in un grafo G è un vertice che separa due vertici che appartengono alla stessa componente di G . Un *ponte* è un lato che separa i suoi estremi.

Esempio 1.7.

Ad esempio, consideriamo la seguente figura:

⁸Un AB -cammino in G è un cammino avente un estremo in A e un estremo in B .



in questo grafo, i vertici di taglio sono v, x, y e w , mentre lo spigolo e è l'unico ponte.

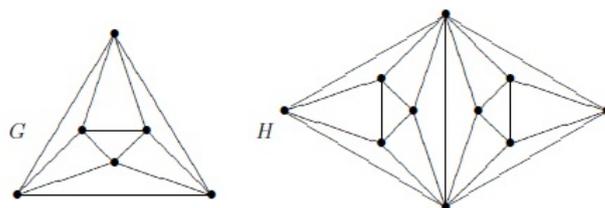
Definizione 1.21. Sia k un numero naturale. Un grafo $G = (V, E)$ è detto k -connesso se $|G| > k$ e se per ogni sottoinsieme $X \subset V$ con $|X| < k$, il grafo $G - X$ è connesso.

Definizione 1.22. La *connettività* di un grafo G , indicata con $\kappa(G)$, è il più grande intero k tale che G sia k -connesso.

Osservazione 6. Si ha dunque che, dato un grafo G con $\kappa(G) = 0$, G è un grafo sconnesso (oppure $G = K_1$). Si verifica agevolmente che $\kappa(K_n) = n - 1$, per ogni $n \geq 1$.

Definizione 1.23. Sia $l \in \mathbb{N}$. Un grafo $G = (V, E)$ si dice *connesso per l lati* (o l -lato-connesso) se $|G| > 1$ e se il grafo $G - F$ è connesso, per ogni sottoinsieme $F \subset E$ di cardinalità minore di l .

La *connettività per lati*, che si indica con $\lambda(G)$, è il più grande intero l tale che G sia connesso per l lati.



In questi grafi abbiamo che $\kappa(G) = \lambda(G) = 4$, mentre $\kappa(H) = 2$ e $\lambda(H) = 4$.

Foglie, Alberi e Foreste

Definizione 1.24. Un *albero* è un grafo aciclico⁹ e connesso. I vertici pendenti (di grado 1) si chiamano *foglie*.

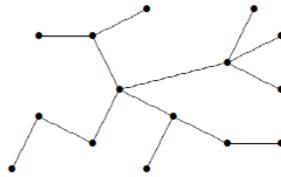


Figura 1.13: Questo grafo è un albero.

Lemma 1.3.3. *Un albero con almeno due vertici ha almeno due vertici pendenti.*

Teorema 1.3.4. *In ogni albero, per ogni coppia di vertici distinti esiste uno e un solo cammino congiungente tali vertici.*

Dimostrazione. Se esistessero due cammini distinti congiungenti due vertici, la loro unione darebbe un ciclo fra i due vertici; se così fosse, si contraddirebbe la definizione di albero. \square

Corollario 1.3.5. *In ogni albero $T = (V, E)$, per ogni $e \in E$ il grafo parziale $T - e$ non è connesso.*

Dimostrazione. Siano $u, v \in V$ gli estremi di e . Se $T - e$ fosse connesso, esisterebbe un cammino congiungente u con v in $T - e$. Questo contraddirebbe l'ipotesi che in T esiste uno e un solo cammino congiungente i vertici di T stesso. \square

⁹Privo di cicli. Il ciclo è una catena nel quale il primo e l'ultimo vertice coincidono.

Corollario 1.3.6. *In ogni albero $T = (V, E)$ si ha $|E| = |V| - 1$.*

Dimostrazione. Si dimostra per induzione sul numero di vertici di T .

Sia $|V| = n$, ed $|E| = m$ allora per $n = 1$ la tesi è sicuramente vera.

Supponiamo che il teorema sia vero per $n > 1$. T è connesso, quindi esiste un lato e che collega due vertici u e v . Per il corollario 1.3.5 precedente, $T - e$ non è connesso, quindi esistono due componenti T_1 e T_2 connesse, più precisamente sono alberi, aventi rispettivamente $n_1, n_2 < n$ nodi e $m_1, m_2 < m$ lati. Quindi, per ipotesi induttiva,

$$m = m_1 + m_2 + 1 = n_1 - 1 + n_2 - 1 + 1 = n - 1 \quad .$$

□

Definizione 1.25. Un grafo le cui componenti connesse sono alberi si chiama *foresta*.

Teorema 1.3.7. *In ogni foresta F , avente v vertici, e lati e p componenti connesse si ha*

$$v - e = p.$$

Dimostrazione. Siano G_1, G_2, \dots, G_p le componenti connesse di F . Per ogni $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, sia v_i è il numero di vertici ed e_i è il numero di spigoli di G_i . Dal corollario 1.3.6, si ha che $v_i - e_i = 1$, che vuol dire

$$v - e = \sum_{i=1}^p v_i - \sum_{i=1}^p e_i = \sum_{i=1}^p (v_i - e_i) = p.$$

□

1.4 Grafi bipartiti

Definizione 1.26. Un grafo $G = (V, E)$ è detto r -partito ($r \geq 2$, intero) se l'insieme dei vertici ammette una partizione in r blocchi, in modo che ogni lato di G abbia le due estremità in classi diverse. Se $r = 2$ il grafo si dice **bipartito**.

I grafi r -partiti si indicano K_{n_1, \dots, n_r} , oppure se $n_1 = n_2 = \dots = n_r$ si indica con K_n^r . Si chiamano invece grafi *stella* i grafi del tipo $K_{1,n}$.

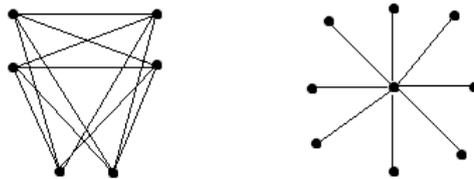


Figura 1.14: Il grafo K_2^3 ed il grafo $K_{1,n}$

Teorema 1.4.1 (Caratterizzazione dei grafi bipartiti).

Sia G un grafo semplice con almeno due vertici. Esso è bipartito se e solo se non ha cicli di lunghezza dispari.

Dimostrazione. La condizione necessaria è ovvia. Dimostriamo la condizione sufficiente. Sia G connesso e sia V l'insieme dei vertici. Fissiamo $x \in V$ e poniamo:

$$V_1 = \{y \in V \mid \text{congiunti ad } x \text{ formano cammino elementari di lunghezza dispari}\},$$

$$V_2 = \{y \in V \mid \text{congiunti ad } x \text{ formano cammino elementari di lunghezza pari}\}.$$

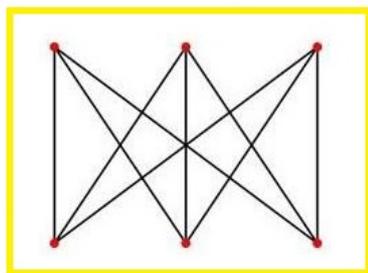
Per costruzione, otteniamo che $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, inoltre $V_1 \cup V_2 = V$ perchè altrimenti esisterebbe un ciclo di lunghezza dispari. Otteniamo quindi che V_i , con $i = 1, 2$ sono una partizione di V . Da cui segue che G è bipartito. \square

1.5 Grafi piani e Grafi planari

Attraverso un vecchio e molto famoso rompicampo, “il problema dei villaggi e dei pozzi”, introdurremo i *grafi planari*.

Gli abitanti di tre villaggi attingono acqua da tre pozzi situati ad una certa distanza da tutti e tre i villaggi. A causa di ricorrenti siccità, un antico accordo stabilisce che ognuno dei villaggi possa utilizzare tutti e tre pozzi; quindi da ogni villaggio partono tre sentieri che arrivano a ciascuno dei pozzi. Con il tempo si è però sviluppata un'inimicizia tra le tre comunità, per cui possono verificarsi incidenti qualora abitanti di diversi villaggi si incontrino negli incroci tra i sentieri. Un antropologo, venuto dall'estero, giunto da quelle parti, compiaciuto di poter risolvere tanto facilmente (grazie alla propria cultura superiore) il problema, propone agli anziani dei tre villaggi di tracciare nuovi sentieri che non si incontrino se non in prossimità dei pozzi (luoghi sacri e quindi sicuri). Gli anziani lo fissano accondiscendenti per qualche secondo e quindi scoppiano a ridere. Perché?

La questione diventa semplice se il problema viene schematizzato con un grafo come quello della figura sottostante. Si può disegnare diversamente tale grafo (bipartito), in modo che i lati non si intersechino se non nei vertici?



Anche questo problema, come nel problema dei sette ponti di Königsberg, affrontato con la teoria dei grafi diventa più semplice; infatti si vede subito, dalla figura, che non è possibile tracciare tre sentieri che collegano i villaggi ai pozzi senza che essi si intersechino.

Definizione 1.27. Un **grafo piano** $G = (V, E)$ è un grafo tale che:

- (i) V è un sottoinsieme finito di \mathbb{R}^2 ;
- (ii) lati diversi hanno insiemi di estremi diversi;
- (iii) l'interno di un lato non contiene vertici o punti di altri lati.

Si chiama invece **grafo planare**, un grafo isomorfo ad un grafo piano.

Quindi il grafo planare è un grafo astratto che *può* essere disegnato nel piano come sopra detto, mentre un grafo piano *deve* essere disegnato come sopra detto.

Nelle pagine successive non tratteremo con particolare attenzione la distinzione delle due nozioni.

Nella figura seguente vediamo come G sia un grafo planare ma non piano, mentre G' è il grafo piano isomorfo a G .

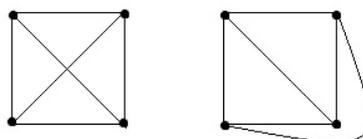


Figura 1.15: G e G' .

Ora citiamo il famoso “teorema di Jordan” sulle curve semplici¹⁰ chiuse, il cui enunciato è intuitivo, ma la dimostrazione tutt’altro che banale.

Teorema 1.5.1 (Teorema di Jordan¹¹).

Ogni curva semplice e chiusa nel piano separa il piano in due regioni semplicemente connesse, una interna ed una esterna.

¹⁰Accettando in maniera intuitiva il concetto di curva semplice.

¹¹Camille Jordan era un matematico francese nato a Lione nel 1838 e morto nel 1922 a Parigi.

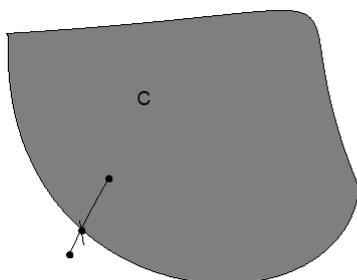


Figura 1.16: I punti della regione C sono sconnessi con i punti di $\mathbb{R}^2 \setminus C$

Una conseguenza di questo teorema è il seguente: le regioni di $\mathbb{R}^2 \setminus G$ si chiamano *facce* del grafo piano, le indicheremo con f . In particolare si chiamerà faccia *interna* ogni regione all'interno del grafo, e faccia *esterna* la regione all'esterno di G (essa è anche chiamata regione illimitata). È immediato notare che la faccia esterna di un grafo piano esiste sempre, ed è unica, mentre quelle interne potrebbero non esistere.

Ora diamo un importante risultato dimostrato nel 1952 da Eulero.

Teorema 1.5.2 (Formula di Eulero).

Consideriamo un grafo piano connesso $G = (V, E)$. Sia $|V| = n$, $|E| = m$ e c il numero di facce di G . Allora vale

$$n - m + c = 2.$$

Dimostrazione. Fissiamo il numero di vertici n e procediamo per induzione sul numero di lati m . Osserviamo che il numero m non può essere tale che $m < n - 1$, altrimenti il grafo è sconnesso. Nel caso $m = n - 1$, G è un albero e quindi ha una sola faccia:

$$n - m + c = n - (n - 1) + 1 = 2.$$

Se $m \geq n$, G ha almeno un ciclo C . Sia e un lato del ciclo e sia $G' = G - e$. G' ha lo stesso numero di vertici di G ma un lato in meno, quindi per ipotesi induttiva vale la formula di Eulero. Allora e , appartenendo ad un ciclo di G ,

giace sulla frontiera di due facce di G . Se lo togliamo otteniamo una faccia in meno come in G' . Per cui la formula di Eulero diventa in G

$$n - (m - 1) + (c - 1) = 2.$$

Da ciò segue che $n - m + c = 2$. \square

Teorema 1.5.3. *Dato un grafo piano $G = (V, E)$, con $|E| = m$ spigoli e $|V| \geq 2$ vertici, si ha*

$$m \leq 3n + 6.$$

Dimostrazione. Possiamo supporre che G sia un grafo connesso. Infatti, se non lo fosse potremmo aggiungere uno spigolo che connette le diverse componenti, così da ottenere un grafo con lo stesso numero di vertici ma uno spigolo in più e connesso.

Denotiamo con $d(\alpha)$ il numero di spigoli distinti di una faccia α . Per cui si ha

$$\sum_{\text{faccia } \alpha} d(\alpha) = 2m, \quad (1.1)$$

poichè ogni lato fa parte del perimetro di due facce. Ogni faccia è delimitata da almeno tre spigoli, ovvero $d(\alpha) \leq 3$ per ogni faccia. Per la (1.1) vale che $3c \leq 2m$, con c il numero di facce. Per il teorema di Eulero abbiamo che $c = m - n + 2$, per cui si ottiene

$$3(m - n + 2) \leq 2m$$

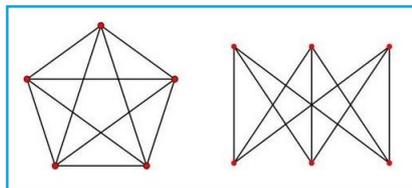
da cui la tesi. \square

Corollario 1.5.4. *Un grafo piano ha almeno un vertice di grado al più 5.*

Dimostrazione. Sia G un grafo piano con n vertici e m spigoli. Supponiamo per assurdo che ogni vertice abbia almeno grado 6. Per il teorema 1.1

$$6n \leq \sum_{v \in V} d_G(v) = 2m.$$

Ma questo contraddice il teorema precedente. \square



I grafi qui rappresentati sono importanti per capire quella che sarà la caratterizzazione dei grafi planari.

Teorema 1.5.5 (Caratterizzazioni dei grafi planari).

I grafi K_5 e $K_{3,3}$ non sono grafi planari.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che K_5 sia un grafo planare. Dato che K_5 ha $n = 5$ vertici e $m = 10$ lati, si ha

$$m > 3n - 6,$$

che contraddice il teorema 1.5.3. Se ne deduce che K_5 non può essere un grafo planare.

Supponiamo ora che $K_{3,3}$ sia un grafo planare. Poichè $K_{3,3}$ è bipartito, esso non può avere cicli dispari, di conseguenza ciascuna delle sue facce deve essere limitata da almeno quattro lati. Indichiamo con c il numero di facce di $K_{3,3}$ e con N la somma, estesa a tutte le facce, del numero di lati che delimitano ciascuna faccia. Da quanto detto, si deve avere $N \geq 4c$.

Osserviamo che è facile determinare il valore di N : il grafo $K_{3,3}$ ha 9 lati, e nella somma che dà il risultato N , ogni lato lato viene contato due volte (dato che ogni lato appartiene al bordo di esattamente due facce); quindi $N = 18$. Si conclude che $c \leq \frac{N}{4} = \frac{9}{2}$.

Tuttavia dalla formula di Eulero si ottiene:

$$c = 2 - n + m = 2 - 6 + 9 = 5,$$

il che contraddice la stima precedente. Si conclude quindi che anche $K_{3,3}$ non può essere un grafo planare. \square

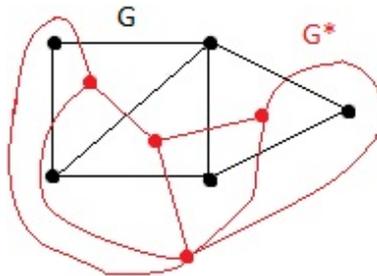
Possiamo finalmente dare una risposta alle risa degli anziani dei villaggi. Il grafo bipartito che rappresentava i sentieri è proprio il grafo $K_{3,3}$, che non è planare!

Corollario 1.5.6. *Se un grafo G contiene un sottografo isomorfo a K_5 e $K_{3,3}$, allora non è planare.*

1.5.1 Grafo duale

Da ogni grafo planare G è possibile costruire un grafo planare duale G^* ad esso legato.

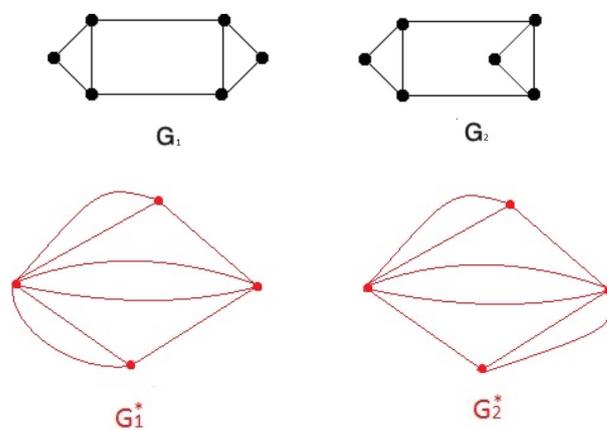
Definizione 1.28. Il grafo duale $G^* = (V^*, E^*)$ di un grafo piano $G(V, E)$ è un grafo piano che ha i vertici corrispondenti con le facce di G , mentre i suoi lati corrispondono a quelli di G nel seguente modo: se $e \in E$ è un lato di G con facce X da una parte del lato e Y dall'altro, allora i vertici del lato duale $e^* \in E^*$ sono x ed y che rappresentano le facce X ed Y di G .



Di conseguenza, G^* ha lo stesso numero di lati di G .

Ci sono molti duali di ogni grafo, ma sono tra loro tutti isomorfi; per cui nel seguito, senza perdita di generalità, parleremo *del* grafo duale di un grafo.

Osservazione 7. Dati due grafi piani isomorfi, essi possono dar luogo a due grafi duali non isomorfi tra loro. Ad esempio, i grafi G_1 e G_2 della figura sono evidentemente isomorfi. Si osservi però che la faccia infinita di G_1 ha un contorno formato da 6 lati, mentre in G_2 la faccia infinita ha un contorno formato da solo 5 lati.



Nel capitolo §3 approfondiremo la costruzione dei grafi duali di grafi piani e le sue proprietà.

Capitolo 2

Colorazioni di grafi

Introduciamo con un esempio pratico un' applicazione della *colorazione dei grafi*.

Supponiamo che un dipartimento di Chimica debba fare un inventario dei suoi prodotti chimici. Non tutti i prodotti chimici sono compatibili tra loro, e mischiandoli si potrebbero innescare violente o addirittura disastrose reazioni.

Allora le sostanze devono necessariamente stare in stanze (o settori) diverse. Ovviamente la soluzione più facile sarebbe collocare ogni sostanza chimica in una stanza diversa, ma questo non è una soluzione pratica, poichè utilizziamo più stanze di quelle necessarie. Allora possiamo unire i prodotti chimici compatibili nella stessa stanza. Una volta divisi questi prodotti,, ci chiediamo: qual è il numero minimo di stanze che possa contenere le diverse "classi" di prodotti?

Ora traduciamo la questione come problema di grafi. Sia $G = (V, E)$ un grafo con V insieme di vertici che corrispondono ai prodotti chimici. Essi sono tra loro adiacenti se (e solo se) sono incompatibili tra loro. I vertici così raggruppati descrivono una partizione di V in classi di vertici indipendenti. La cardinalità di queste classi sarà il numero minimo di stanze cercato. Nella colorazione dei grafi questo numero si chiamerà *numero cromatico*.

2.1 Colorazione di vertici

Definizione 2.1. Dato un grafo $G = (V, E)$ ed un insieme $C = \{1, 2, \dots, k\}$ si chiama *colorazione di vertici* una funzione $f : V \rightarrow C$ tale che $\forall x, y$ adiacenti si ha

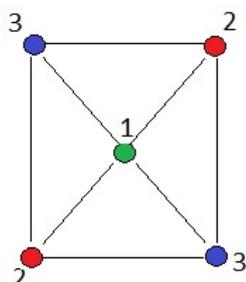
$$f(x) \neq f(y),$$

dove gli elementi di C sono detti *colori*. Si dice che f è una k -colorazione di G se $|f(V)| = k$.

Definizione 2.2. Il minimo k per cui G è k -colorabile¹ si dice *numero cromatico* di G , che si indica con $\chi(G)$.

Esempio 2.1.

Il grafo G della figura è 3-colorabile.



Osservazione 8. È chiaro che $\chi(K_n) = n$, dove K_n è il grafo completo con n vertici. È anche piuttosto facile vedere che dato C_n , ciclo di lunghezza n allora

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 3 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Nelle prossime sottosezioni studieremo come trovare limitazioni del numero cromatico.

¹Si dice che G è k -colorabile se esiste un k per cui esiste una k -colorazione.

2.1.1 Teorema di Brooks

Definizione 2.3. Dato un grafo $G = (V, E)$, si chiama *densità* di G la massima cardinalità di un sottografo completo di G . Si indica con

$$d(G) = \max\{|X| : X \subseteq V, G[X] \text{ completo}^2\}.$$

Teorema 2.1.1. Per ogni grafo $G = (V, E)$, si ha

$$d(G) \leq \chi(G)$$

Dimostrazione. È evidente che, se $X \subseteq V$ e $G[X]$ completo, allora

$$\forall x, y \in X, \quad x \neq y, \quad f(x) \neq f(y);$$

dove f è la colorazione. Poichè in G esiste un sottografo completo $G[X]$ con $d(G)$ vertici, si ha

$$d(G) \leq \chi(G).$$

□

Adesso cerchiamo anche una limitazione superiore.

Teorema 2.1.2. Per ogni grafo $G = (V, E)$, si ha

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Dimostrazione. Si dimostra per induzione sul numero di vertici n , e poniamo $\Delta(G) = \Delta$. Il teorema è sicuramente vero per $n = 1$ e $n = 2$.

Sia $G = (V, E)$ un grafo con $n \geq 3$. Fissiamo un vertice $v \in V$ e sia $G' = G - v$. Posto $\Delta' = \Delta(G')$, G' ha $n - 1$ vertici, dunque si ha

$$\chi(G') \leq 1 + \Delta' \leq 1 + \Delta,$$

essendo $\Delta' \leq \Delta$.

Se $f' : V \setminus \{v\} \rightarrow C$ è una $(\Delta + 1)$ -colorazione di G' , poichè $d(G) \leq \Delta$, esiste almeno un colore, tra i $\Delta + 1$ di f' , non associato ad alcuno dei vertici adiacenti a v in G . È allora possibile definire una colorazione f in G , con $\Delta + 1$ colori, associando un tale colore a v . □

² $G[X]$ indica il grafo generato da X .

Esistono alcuni casi per cui vale l'uguaglianza, cioè $\chi(G) = \Delta + 1$.

Ad esempio i grafi completi K_n hanno $\Delta(K_n) = n - 1$ e $\chi(K_n) = n$; anche per i C_n , con n dispari vale $\Delta(C_n) = 2$ e $\chi(C_n) = 3$.

Possiamo dare adesso un teorema di notevole importanza dovuto a R.L.Brooks³.

Teorema 2.1.3 (Brooks, 1941).

Se $G = (V, E)$ è un grafo connesso tale che:

$$G \neq C_{2k+1}, \quad G \neq K_{\Delta+1}$$

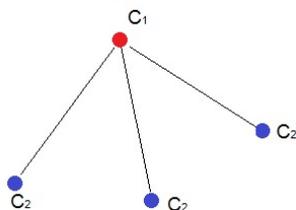
allora

$$\chi(G) \leq \Delta.$$

Dimostrazione. Necessariamente $\Delta \geq 2$. Se $\Delta = 2$, allora G o è una catena aperta con $m \geq 2$ lati, o è un ciclo di lunghezza pari. In entrambi i casi G è Δ -colorabile. Supponiamo $\Delta \geq 3$. Dunque $n \geq 4$.

Procediamo per induzione su n .

Per $n = 4$, il teorema è di facile verifica.



Sia $G = (V, E)$ un grafo con $n \geq 5$ vertici. Supponiamo che:

$$\exists x \in V : d(x) < \Delta.$$

In tal caso, G è Δ -colorabile. Infatti, $G - x$ è Δ -colorabile (per ipotesi induttiva). Inoltre se x_1, x_2, \dots, x_r sono i vertici adiacenti a x in G e c_1, c_2, \dots, c_r rispettivamente i colori ad essi assegnati in una Δ -colorazione di $G - x$, essendo $r < \Delta$, esisterà un colore, tra i Δ non assegnati ad alcuno dei vertici x_1, x_2, \dots, x_r . Se \bar{c} è questo colore si ottiene una Δ -colorazione

³Più famoso per il rompicapo del *quadrato dei quadrati*.

di G , assegnando \bar{c} al vertice x .

Supponiamo, quindi, che

$$\forall x \in V : d(x) = \Delta.$$

Dunque G è regolare di grado Δ .

Sia $v \in V$. Per induzione, $G - v$ è Δ -colorabile. Per ogni coppia c_i, c_j ($i \neq j$), indichiamo con H_{ij} il sottografo di G i cui vertici sono colorati con c_i o con c_j .

Siano, inoltre, $v_1, v_2, \dots, v_\Delta$ i vertici adiacenti a v in G . Posto $k(v_i) = c_i$, ($k(v_i)$ indica il colore nella k -colorazione del vertice v_i) possiamo supporre che sia $c_i \neq c_j, \forall i, j = 1, 2, \dots, \Delta$ ($i \neq j$). In caso contrario, infatti, esisterebbe un colore \bar{c} non assegnato ad alcuno dei vertici $v_1, v_2, \dots, v_\Delta$ e si potrebbe, quindi, definire una Δ -colorazione di G , ponendo $k(v) = \bar{c}$.

Dunque

Osservazione 9. $c_i \neq c_j \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, \Delta$ ($i \neq j$).

Dimostriamo che

Osservazione 10. $\forall v_i, v_j \quad \exists$ in H_{ij} una catena da v_i a v_j .

Infatti, se v_i, v_j stanno in componenti connesse diverse di H_{ij} allora, fissata una delle componenti, per esempio quella dove c'è v_i , possiamo in questa invertire i colori c_i e c_j ottenendo una colorazione di $G - v$ con Δ colori.

A questo punto, a v_i risulta assegnato il colore c_j e quindi è possibile assegnare a v il colore c_i .

Osservazione 11. Ogni v_i è adiacente ad un solo vertice colorato con $c_j, \forall j \neq i$.

Infatti se v_i è adiacente ad almeno due vertici colorati con lo stesso colore c_j , essendo $d(v_i) = \Delta - 1$ in $G - v$, esiste un colore \bar{c} non assegnato ad alcuno dei vertici adiacenti a v_i . Dunque è possibile assegnare il colore \bar{c} a v_i ed il colore c_i a v , ottenendo così una Δ -colorazione di G .

Osservazione 12. $\forall i, j = 1, 2, \dots, \Delta$ ($i \neq j$) la componente connessa di H_{ij} contenente v_i e v_j è una catena di estremi v_i e v_j .

In altre parole i vertici diversi da v_i, v_j hanno grado 2 in H_{ij} . Infatti se esistesse un vertice \bar{x} di H_{ij} , avente grado ≤ 3 in H_{ij} , essendo $d(\bar{x}) = \Delta$ in G , esisterebbe un colore \bar{c} non associato ad alcuno dei vertici adiacenti di \bar{x} . Dunque si potrebbe assegnare il colore \bar{c} a \bar{x} , interrompendo la catena (osservazione 10). Da cui la tesi.

Osservazione 13. Due catene rispettivamente da v_i a v_j e da v_j a v_h , con $i \neq h$ si intersecano solo in v_j .

Infatti indichiamo con $P(v_i, v_j)$ la catena da v_i a v_j . Se $w \in P(v_i, v_j) \cap P(v_j, v_h)$, esiste almeno un colore \bar{c} non assegnato ad alcuno dei vertici adiacenti a w ($d(w) = \Delta$, ecc.). Allora si può assegnare il colore \bar{c} a w , interrompendo la catena $P(v_i, v_j)$, allora per l'osservazione 10 otteniamo la tesi.

Fatte queste premesse siano v_i e v_j due vertici non adiacenti (esistono perchè G non è K_n). Sia w il vertice adiacente a v_i ed appartenente alla catena $P(v_i, v_j)$. Consideriamo la catena $P(v_i, v_l)$ con $l \neq j$, ed invertiamo in essa i colori $C_i \longleftrightarrow C_l$. Segue che:

$$w \in P(v'_l, v_j) \cap P(v_j, v'_i),$$

con

$$w \in \text{catena colorata con } C_l \text{ e } C_j$$

$$w \in \text{catena colorata con } C_j \text{ e } C_i.$$

Assurdo! □

2.1.2 Legame tra numero di stabilità e numero cromatico

Sia $G = (V, E)$ un grafo. Sia $X \subseteq V$ sottoinsieme dei vertici di G . Allora X è detto *stabile* se non contiene coppie di vertici adiacenti; ossia

$$X \text{ è stabile} \Leftrightarrow \forall x, y \in X, x \neq y, (x, y) \notin E.$$

Il *numero di stabilità* di G , che si indica $\alpha(G)$, è la massima cardinalità di un insieme stabile:

$$\alpha(G) = \max \{|X| : X \text{ insieme stabile di } G\}.$$

Con questa nozione è possibile calcolare nuove limitazioni del numero cromatico.

Lemma 2.1.4. *Se S è un insieme stabile di G , allora*

$$\chi(G - S) \geq \chi(G) - 1 \quad .$$

Teorema 2.1.5. *Sia un grafo $G = (V, E)$ con $|V| = n$ e sia $\alpha(G) = \alpha$ e $\chi(G) = \chi$. Vale*

$$n \leq \alpha\chi \leq n + 1 \quad . \quad (2.1)$$

Dimostrazione. Il grafo G può essere partizionato in χ classi di colorazione V_1, V_2, \dots, V_χ , ognuna delle quali costituisce un insieme stabile di G . Si ha quindi che $|V_i| \leq \alpha \quad \forall i = 1, 2, \dots, \chi$. Segue che

$$n = \sum_{i=1}^{\chi} |V_i| \leq \alpha\chi \quad ,$$

da cui si ottiene la prima disuguaglianza di (2.1).

Sia S un insieme stabile di G tale che $\alpha = |S|$. Si ha per il lemma 2.1.4 che

$$\chi(G - S) \geq \chi(G) - 1 \quad .$$

Inoltre, poichè in $G - S$ vi sono $n - \alpha$ vertici ($|V \setminus S| = |V| - |S| = n - \alpha$) risulta:

$$\chi(G - S) \leq n - \alpha \quad .$$

Segue

$$n + \alpha \geq \chi - 1 \quad ,$$

da cui

$$\chi - \alpha \leq n + 1 \quad ,$$

per cui è verificata anche la seconda disuguaglianza della tesi. \square

2.2 Colorazione dei lati

Problema del calendario di un torneo all'italiana

Immaginiamo di dover organizzare un torneo all'italiana tra un numero n di squadre di calcio: ogni squadra deve affrontare tutte le altre una volta sola ed ogni giornata consiste nell'affrontare una sola squadra. Quante giornate sono richieste (al minimo) per giocare tutte le partite? Siccome ogni squadra deve affrontare $n - 1$ squadre, è chiaro che $n - 1$ è un limite inferiore al numero totale delle giornate. Saremmo portati a ritenere che sia il numero giusto: questo è vero se n è pari (ma non del tutto ovvio), ma non è vero se n è dispari.

Supponiamo ad esempio che le squadre iscritte al torneo siano 9: allora il numero complessivo di partite da giocare è $\binom{9}{2} = 36$; se fossero sufficienti 8 giornate per disputarle tutte, ci sarebbe almeno una giornata in cui vengono disputate 5 partite (dato che $8 \cdot 4 = 32 < 36$), ma 5 partite coinvolgono 10 squadre, il che è impossibile. Dunque se n è dispari sono necessarie almeno n giornate per completare il torneo. Sono sufficienti? Anticipiamo la risposta, sì. Per il momento osserviamo come questo problema si possa ridurre ad un problema di colorazione dei lati del grafo K_n , che impieghi il minimo numero di colori: i vertici sono le diverse squadre, ed ogni colore indica le partite da giocarsi in una stessa giornata. Trovare una colorazione del genere fornisce un calendario completo degli incontri.

Possiamo ora definire con un linguaggio più formale quanto detto.

Definizione 2.4. Una *colorazione di lati* di un grafo $G = (V, E)$, è una funzione $c : E \rightarrow C$ tale che $c(e_i) \neq c(e_j)$ se i lati e_i ed e_j sono adiacenti (l'insieme C è detto di *colori*). Se $|C| = k$ la funzione c si chiama *k-colorazione di lati*.

Definizione 2.5. Il *numero lato-cromatico* (anche detto *indice cromatico*) di un grafo G , indicato con $\chi'(G)$, è il più piccolo intero positivo k tale che G ammette una *k-colorazione di lati*. Un grafo G con $\chi'(G) \leq k$ si dice che il grafo è *k-colorabile per lati*.

Supponiamo sia data una colorazione dei lati di un grafo $G = (V, E)$. Allora per ogni vertice v di G , i lati incidenti a v hanno tutti colori diversi: quindi il loro numero di colori è almeno pari al grado di v . Pertanto, per ogni grafo G , si ha

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \quad .$$

In molti casi si trova che $\Delta(G)$ è uguale all'indice cromatico di G .

Teorema 2.2.1 (König, 1916).

Sia G un grafo bipartito. Allora

$$\chi'(G) = \Delta(G).$$

Dimostrazione. Sia $G = (V_1 \cup V_2, E)$ un grafo bipartito senza cappi. Procediamo per induzione sul numero di lati $|E|$. Se $|E| = 0$ non c'è nulla da provare. Sia $|E| \geq 1$, sia $\Delta(G) = \Delta$ e sia $e = v_1, v_2 \in E$. Per ipotesi induttiva, i lati del grafo $G - e$ possono essere colorati mediante Δ colori. Ora, in $G - e$, i vertici v_1 e v_2 hanno grado al più $\Delta - 1$: quindi ci sono due colori c_1 e c_2 , tra i Δ a disposizione, tale che c_1 non compare tra i colori dei lati incidenti a v_1 e c_2 non compare tra i colori dei lati incidenti a v_2 .

Se $c_1 = c_2$, basta assegnare ad e tale colore per ottenere una Δ -colorazione di lati di G . Supponiamo quindi $c_1 \neq c_2$, e quindi che v_1 sia estremo di un lato (ed uno solo) colorato con c_2 . A partire da tale lato consideriamo un cammino massimale⁴ C in $G - e$, i cui lati sono alternativamente colorati in c_2 e c_1 . Allora C è necessariamente semplice: infatti se uno stesso vertice comparisse due volte in C , tale vertice non può essere v_1 , dato che nessuno dei lati colorati con c_1 è ad esso adiacente, né può essere un altro vertice perchè in tal caso vi sarebbero almeno tre lati di C adiacenti ad esso, contro il fatto che i lati di C sono di due colori. Inoltre, C non può contenere il vertice v_2 , perchè se così fosse v_2 sarebbe estremo di un lato colorato con c_1 : dunque avrebbe lunghezza pari, ed aggiungendo ad esso il lato e si otterrebbe

⁴È il cammino più lungo.

un ciclo di lunghezza dispari, il che non è possibile essendo G bipartito. Ora coloriamo di nuovo i lati di C , scambiando i due colori c_1 e c_2 : per la scelta di c_2 e la massimalità di C abbiamo ancora una Δ -colorazione di lati di $G - e$. Assegnando allora al lato e il colore c_2 si ottiene una Δ -colorazione di lati di G . \square

Per quanto riguarda le limitazioni superiori del valore di $\chi'(G)$, osserviamo che ogni lato del grafo G ha estremo in comune con al più $2\Delta(G) - 2$ altri lati. Applichiamo ora il teorema di Brooks ad $L(G)$, grafo lineare di G . Si ricava

$$\chi'(G) \leq 2\Delta(G) - 2 \quad .$$

Tuttavia si può dire anche di più. Infatti vale il seguente ed importante risultato.

Teorema 2.2.2 (Vizing, 1964).

Sia un grafo G . Allora

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Una conseguenza di questo risultato è la possibilità di determinare il l'indice cromatico dei grafi completi K_n .

Teorema 2.2.3. *Dato il grafo completo K_n vale*

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n - 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ n & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Dimostrazione. Poichè K_n è regolare di grado $n - 1$, $\chi'(K_n) \geq n - 1$.

Caso 1 Sia $n = 2k + 1$ con $k \in \mathbb{Z}$.

In questo caso il numero di lati $|E| = k(2k + 1)$.

Se fosse $\chi' = \chi'(K_{2k+1}) = 2k$, allora per almeno uno dei colori C , il numero di lati $t(C)$ di colore C deve soddisfare

$$t(C) \geq \frac{|E|}{\chi'} = \frac{2k + 1}{2} \quad ,$$

e siccome deve essere un numero intero, deve essere $t(C) \geq k + 1$. Ma i lati dello stesso colore hanno tutti estremi distinti, quindi $k + 1$ lati hanno $2k + 2$ estremi distinti, ma questo non è possibile perchè supererebbe il numero di vertici di K_{2k+1} . Dunque

$$\chi' \geq \Delta(K_{2k+1}) + 1 = 2k + 1 \quad .$$

A questo punto il teorema di Vizing assicura l'uguaglianza.

Dunque se prendiamo come insieme di colori le classi resto modulo n , $C = \{[0]_n, [1]_n, \dots, [n-1]_n\}$; etichettiamo i vertici di K_n con gli interi $0, 1, \dots, n-1$ ed assegnamo ad ogni lato $\{i, j\}$ il colore $[i+j]_n$. Quindi se i lati hanno estremo in comune hanno lo stesso colore⁵. Quella data è una colorazione di K_n di n colori.

Osserviamo che per ciascun vertice i , i lati adiacenti assumono tutti i colori di C , tranne $[2i]_n$ poichè n è dispari. L'insieme delle classi $[2i]_n$ è tutto C : concludiamo dunque che tali colori "mancanti" sono, al variare dei vertici, tutti diversi.

Caso 2 Sia $n = 2k$ e numeriamo con $0, 1, \dots, n-1$ i vertici del garfo. Togliamo da K_n il vertice $n-1$, e coloriamo il sottografo completo K_{n-1} . Adesso ritroviamo la situazione del *caso 1* (i colori sono le classi di resto modulo $n-1$). Ad ogni lato del tipo $\{i, n-1\}$ assegnamo $[2]_{n-1}$. Per quanto detto sopra, otteniamo una colorazione dei lati K_n , e questa utilizza $n-1$ colori.

□

Con questo teorema e con le conoscenze acquisite in questo paragrafo siamo in grado di "costruire" un calendario all'italiana adeguato.

⁵Dati i lati $\{i, j\}$ e $\{i, k\}$ se $i+j \equiv i+k \pmod{n}$ allora $j \equiv k$ cioè fanno parte della stessa classe con cui abbiamo nominato i colori.

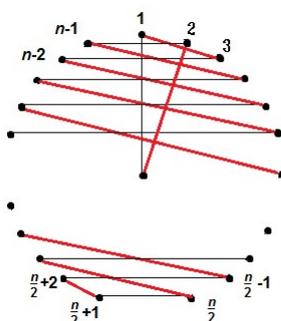


Figura 2.1: Questa figura rappresenta il metodo utilizzato nella dimostrazione del teorema.

Osservazione 14. Osserviamo che una colorazione dei lati di un grafo G è equivalente ad una colorazione dei vertici del grafo lineare $L(G)$; si ha pertanto

$$\chi'(G) = \chi(L(G)).$$

Di conseguenza, lo studio delle colorazioni dei lati dei grafi può essere considerato come un caso particolare dello studio delle colorazioni dei vertici.

Algoritmo per la determinazione di $\chi(G)$

Esistono diversi algoritmi che permettono di determinare il numero cromatico $\chi(G)$ di un grafo G . Uno dei più importanti è quello basato sul **principio di contrazione e connessione**. Infatti questo fornisce oltre al numero cromatico, anche tutte le possibili colorazioni del grafo, a meno del nome dei colori. Se u, v sono vertici non adiacenti in G , poniamo:

1. $G + uv$ il *grafo connessione*, definito a partire dal grafo somma⁶.
2. $G.uv$ il *grafo contrazione*, sostituendo ai vertici u e v un unico vertice $u \equiv v$ adiacente a tutti i vertici che sono adiacenti in G sia ad u che a v .

⁶Definizione 1.13 con $F = \{u, v\}$.

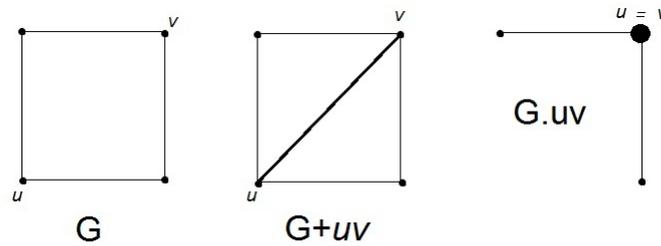


Figura 2.2: Un esempio di connessione e contrazione.

Definizione 2.6 (Principio di contrazione e connessione).

Sia G un grafo non completo. Applicando più volte la connessione e la contrazione al grafo G otteniamo sempre, dopo una serie di passaggi, un grafo completo.

È evidente che se G è completo non esiste per G né il grafo contrazione né il grafo connessione.

L' algoritmo consiste nel determinare tutti i possibili grafi completi che si possono ottenere da G , mediante contrazioni e connessioni successive.

1. Se G è un grafo completo, allora $\chi(G) = n$ e c'è un solo modo di colorare i vertici di G : attribuendo ad essi colori tutti distinti.
2. Se G non è completo, esistono in esso almeno due vertici $u, v \in G$ non adiacenti.
3. Se $G' = G + uv$ o $G'' = G.uv$ è completo si passa al punto 1. Altrimenti si passa al punto 2.

Alla fine si ottiene un insieme di grafi completi, con possibili ripetizioni, ognuno dei quali dà una colorazione di G . Questo insieme si chiama una C -scomposizione di G e si indica con $C(G)$ e si usa il seguente simbolismo:

$$G \longrightarrow C(G) = a_n K_n + a_{n-1} K_{n-1} + \dots + a_\chi K_\chi \quad ,$$

dove ogni $a_i K_i$ indica che esistono a_i modi di colorare i vertici di G con r colori.

Evidentemente, poichè in G esistono al più colorazioni con n colori, non esistono in $C(G)$ grafi completi con un numero di vertici maggiore di n e, inoltre, si ha sempre che $a_n \neq 0$. Invece, poichè non esistono in G colorazioni con un numero minore di χ colori, in $C(G)$ il grafo con il numero minore di vertici è K_χ e, $a_\chi \neq 0$.

Se K_r è uno dei grafi ottenuti da G , esso definisce una colorazione di G con r colori. Se $r < n$, esistono in K_r vertici "sovrapposti" provenienti da contrazioni di G : ad essi si assegna il medesimo colore.

Esempio 2.2.

Sia $G \cong C_4$ ciclo di quattro vertici, allora otteniamo $C(G) = K_4 + 2K_3 + K_2$.

Infatti

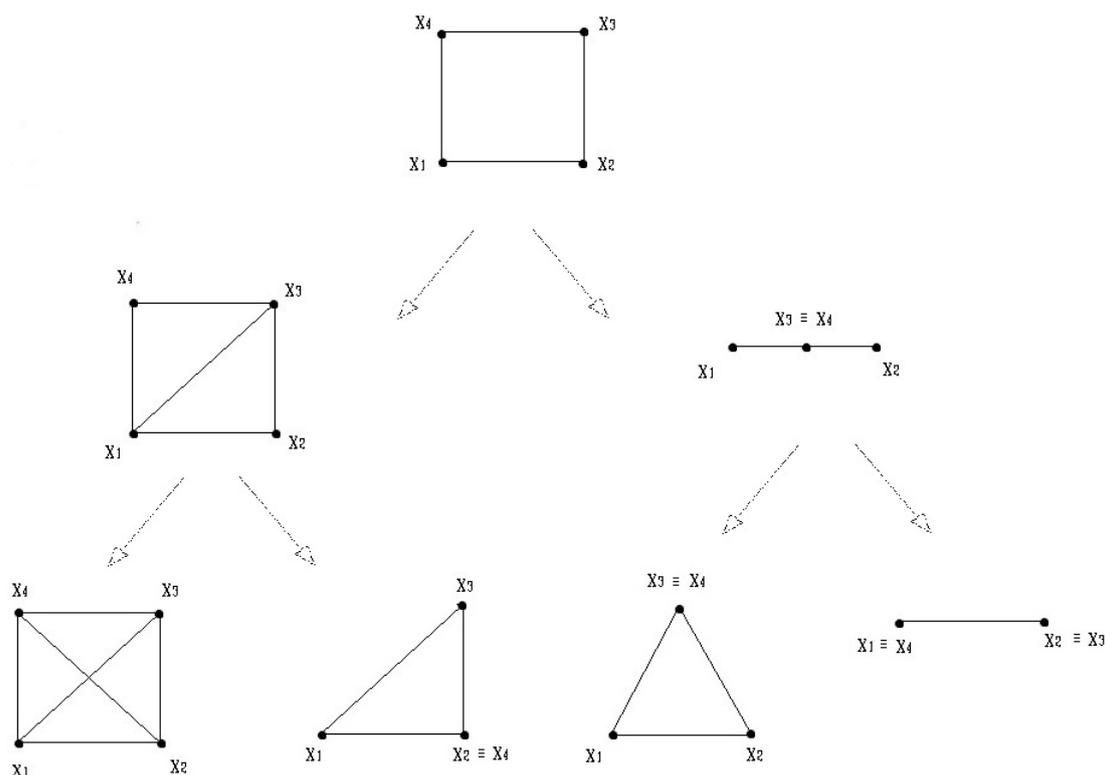


Figura 2.3: Applicazione Algoritmo.

2.3 Polinomio Cromatico

Nel 1946, nel tentativo di dimostrare la (allora) **congettura dei quattro colori**⁷, i matematici Birkhoff e Lewis introdussero il *polinomio cromatico di un grafo* G .

Sia G un grafo. Per ogni intero $k > 0$, indichiamo con $P(G; k)$ il numero di k -colorazioni distinte definite in G , comprese quelle con meno di k colori. $P(G; k)$ è un polinomio in k e si chiama *polinomio cromatico*.

Esempio 2.3.

Un albero G con n vertici ha polinomio cromatico

$$P(G; k) = k(k - 1)^{n-1}.$$

Infatti se coloriamo a partire da un vertice qualsiasi, quest'ultimo è possibile colorarlo in k modi; mentre per qualsiasi altro vertice possiamo scegliere tutti i colori meno quello con cui si è colorato il vertice iniziale, cioè proprio $k - 1$ colori.

Esempio 2.4.

Consideriamo il grafo K_n allora

$$P(K_n; k) = [k]_n := \begin{cases} 0 & \text{se } k > n \\ k(k - 1) \dots (k - n + 1) & \text{se } k \leq n \end{cases}$$

Infatti se v_1, v_2, \dots, v_n sono i vertici del grafo K_n , fissato $k \geq n$ colori, si può osservare che una colorazione di vertici di K_n non è altro che una disposizione di classe n dei k colori dati e quindi il numero di colorazioni con k colori coincide con il numero di tali disposizioni.

Teorema 2.3.1 (Ricorrenza del polinomio cromatico).

Sia G un grafo qualsiasi. Allora

$$P(G; k) = P(G - e; k) - P(G.e; k),$$

per qualsiasi lato $e \in G$.

⁷Di cui parleremo ampiamente nel prossimo capitolo; è stata dimostrata nel 1976.

Dimostrazione. Ogni k -colorazione di G è anche una k -colorazione di $G - e$. Invece una k -colorazione di $G - e$ è una k -colorazione di G se e solo se assegna colori diversi ai due vertici di e . Dunque bisogna scartare le k -colorazioni di $G - e$ che assegnano lo stesso colore ai due vertici di e che sono esattamente tante quante le k -colorazioni di $G.e$. \square

Proposizione 2.3.2. *Se il grafo G ha un numero p di componenti connesse G_1, G_2, \dots, G_p , allora*

$$P(G; k) = P(G_1; k)P(G_2; k) \dots P(G_p; k).$$

La dimostrazione è immediata, considerando che ogni componente connessa può essere colorata in modo indipendente dalle altre.

Corollario 2.3.3. *Se G non è completo e u e v sono due vertici non adiacenti, allora*

$$P(G; k) = P(G + uv; k) + P(G.uv; k).$$

Con queste premesse ed il *principio di contrazione e connessione*, dato un qualsiasi grafo G è possibile determinare il polinomio cromatico.

Esempio 2.5.

Vediamo per esempio come scomporre il grafo $G \cong C_4$. Nell'esempio 2.2 abbiamo trovato $C(G) = K_4 + 2K_3 + K_2$:

$$\begin{aligned} P(G; k) &= \left(\begin{array}{c} \square \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c} \square \\ \diagup \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \cdot - \cdot - \cdot \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c} \square \\ \diagup \diagdown \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \triangle \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \triangle \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \cdot - \cdot \end{array} \right) \end{aligned}$$

allora il polinomio cromatico è

$$\begin{aligned}
P(G; k) &= P(K_4; k) + 2P(K_3; k) + P(K_2; k) \\
&= [k]_4 + 2[k]_3 + [k]_2 \\
&= k(k-1)(k-2)(k-3) + 2[k(k-1)(k-2)] + k(k-1) \\
&= k^4 + 3k^3 + 6k^2 - 3k.
\end{aligned}$$

$k = 0$: non esistono 0-colorazioni, infatti $P(G; 0) = 0$.

$k = 1$: non esistono 1-colorazioni, infatti $P(G; 1) = 0$.

$k = 2$: esistono due 2-colorazioni, infatti $P(G; 2) = 2$.

...

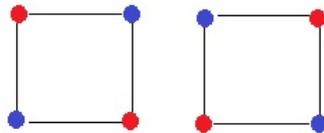


Figura 2.4: Le 2-colorazioni di G .

Teorema 2.3.4 (Caratterizzazione del polinomio cromatico).

Sia un grafo G con $|V| = n$, $|E| = m$ e con numero cromatico χ . Allora

1. ponendo $P(K_r; k) = [k]_r$, si ha

$$P(G; k) = a_n [k]_n + a_{n-1} [k]_{n-1} + \dots + a_\chi [k]_\chi \quad ;$$

2. $P(G; k)$ ha grado n ed il suo termine noto è nullo;

3. il coefficiente di k^n è sempre uguale ad 1;

4. $P(G; k) = k(k-1) \dots (k-\chi+1)Q(k)$ ⁸;

⁸ $Q(k)$ indica un polinomio in k .

5. i coefficienti di $P(G; k)$ sono alternativamente non negativi e non positivi;
6. il coefficiente di k^{n-1} è $-m$.

Dimostrazione. Sia G un grafo. Applicando l'algoritmo di connessione e contrazione si ha

$$C(G) = a_n K_n + a_{n-1} K_{n-1} + \dots + a_\chi K_\chi,$$

dove $a_n \neq 0$, $a_\chi \neq 0$. Allora:

1. essendo $P(K_r; k) = [k]_r$, segue che

$$P(G; k) = a_n [k]_n + a_{n-1} [k]_{n-1} + \dots + a_\chi [k]_\chi \quad .$$

2. Dalla 1. sviluppando il polinomio $P(G; k)$ si ha;

$$\begin{aligned} P(G; k) &= a_n (k(k-1) \dots (k-n+1)) + a_{n-1} (k(k-1) \dots (k-n+2)) + \\ &\quad + \dots a_\chi (k(k-1) \dots (k-n+\chi+1)) \\ &= a_n k^n + b_{n-1} k^{n-1} + \dots + b_1 k \quad . \end{aligned}$$

3. Applicando l'algoritmo di connessione e contrazione per la ricerca di $C(G)$, si può osservare che si ottiene un solo grafo con K_n , proveniente dalla connessione di tutti i vertici non adiacenti di G . Risulta dunque: $a_n = 1$. Pertanto per la 2. si ha

$$P(G; k) = k^n + b_{n-1} k^{n-1} + \dots + b_1 k.$$

4. Se G ha un numero cromatico χ , non esistono in G k -colorazioni per ogni $k < \chi$. Questo vuol dire che, per $k = 0, k = 1, \dots, k = \chi - 1$, si ha sempre $P(G; k) = 0$, poichè sono radici del polinomio, da cui

$$P(G; k) = k(k-1) \dots (k-\chi+1) Q(k) \quad .$$

5. Induzione sul numero di lati m .

Sia G un grafo con n vertici. Se $m = 0$, il grafo G è formato da n vertici isolati, cioè n componenti connesse tutte isomorfe a K_1 . Si ha, per le proposizioni precedenti, che $G = nK_1$, $C(K_1) = K_1$



da cui

$$P(G; k) = [k]_1 [k]_1 \dots [k]_1 = k^n$$

la tesi è provata.

Se G ha n vertici ed $m = 1$, G è formato da un lato e da $n - 2$ vertici isolati, dunque $G = K_2 + (n - 2)K_1$, $C(K_2) = K_2$ e $C(K_1) = K_1$



da cui

$$P(G; k) = [k]_2 [k]_1 \dots [k]_1 = k(k - 1)k \dots k = k^n - k^{n-1}$$

la tesi è provata.

Sia G un grafo con $m > 1$ lati. Supponiamo la tesi vera per tutti i grafi con $m' < m$ lati. Se $\{u, v\}$ è un lato di G e $G' = G - \{u, v\}$, per G' si ha, per l'ipotesi induttiva:

$$P(G'; k) = k^n - b_{n-1}k^{n-1} + b_{n-2}k^{n-2} - \dots,$$

dove i coefficienti b_i sono ≥ 0 .

Ma poichè $G' + \{u, v\} = G$, si ha

$$P(G; k) = P(G'; k) + P(G'.uv; k),$$

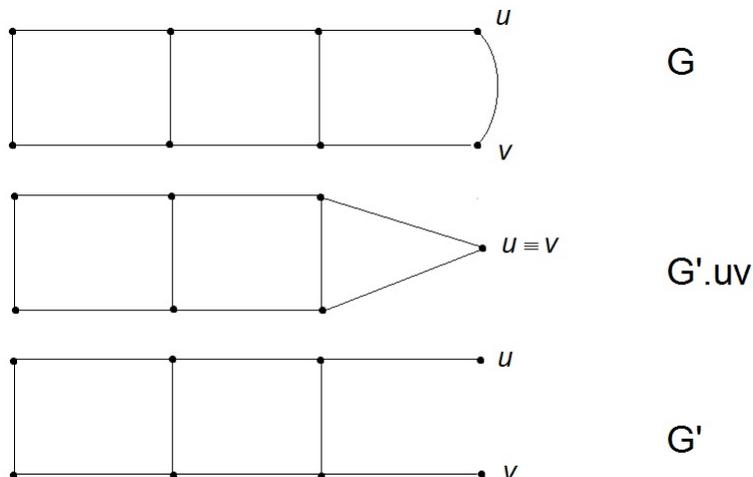
ed essendo per ipotesi induttiva

$$P(G'.uv; k) = k^{n-1} - c_{n-2}k^{n-2} + c_{n-3}k^{n-3} - \dots,$$

con $c_i \geq 0$, si ha

$$\begin{aligned} P(G; k) &= P(G'; k) - P(G'.uv; k) \\ &= (k^n - b_{n-1}k^{n-1} + b_{n-2}k^{n-2} - \dots) + \\ &\quad - (k^{n-1} - c_{n-2}k^{n-2} + c_{n-3}k^{n-3} - \dots) \\ &= k^n - (b_{n-1} + 1)k^{n-1} + (b_{n-2} + c_{n-2})k^{n-2} - \dots \end{aligned}$$

che prova la tesi.



6. Si procede analogamente al caso 5. Per l'ipotesi induttiva, se $m' = m - 1$ e m'' sono rispettivamente il numero di spigoli di G' e $G.uv$, si ha che

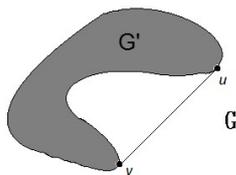
$$P(G'; k) = k^n - m'k^{n-1} + b_{n-2}k^{n-2} - \dots ,$$

$$P(G.uv; k) = k^{n-1} - m''k^{n-2} + c_{n-3}k^{n-3} - \dots ,$$

da cui segue

$$\begin{aligned} P(G; k) &= P(G'; k) - P(G.uv; k) \\ &= (k^n - m'k^{n-1} + b_{n-2}k^{n-2} - \dots) + \\ &\quad -(k^{n-1} - m''k^{n-2} + c_{n-3}k^{n-3} - \dots) \\ &= k^n - (m' + 1)k^{n-1} + (b_{n-2} + m'')k^{n-2} - \dots \\ &= k^n - mk^{n-1} + (b_{n-2} + m'')k^{n-2} - \dots , \end{aligned}$$

che prova la tesi, essendo $m = m' + 1$. □



2.3.1 Problema delle disposizioni condizionate

Sia A un alfabeto con k lettere, $n \in \mathbb{N}$ ed $E \subseteq \{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq n\}$.

Ora ci chiediamo qual è il numero di parole di lunghezza n che si possono scrivere con lettere di A e con la condizione che la i -esima lettera sia distinta dalla j -esima lettera per ogni coppia $\{i, j\} \in E$.

Risulta immediato che, considerato il grafo $G = (V, E)$, con $V = \{1, 2, \dots, n\}$, il numero richiesto di $\mathcal{D}_{k,G}$ ⁹ è uguale a $P(G; k)$ ed è pertanto calcolabile mediante l'algoritmo per la ricerca del numero cromatico (che consente anche di determinare il polinomio cromatico). In particolare si ha che:

$$\mathcal{D}_{k,n}^r = P(\Omega_n; k) = k^n$$

e

$$\mathcal{D}_{k,n} = P(K_n; k) = [k]_n \quad .$$

Ad esempio si trova il numero di parole di lunghezza n che si possono scrivere con k lettere con la condizione che ogni lettera sia distinta dalla successiva e l'ultima distinta dalla prima è

$$\mathcal{D}_{k,C_n} = P(C_n; k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1) \quad .$$

Un problema sul numero cromatico di un grafo riguarda la predisposizione del diario delle lezioni e degli esami universitari in maniera tale che nessuno studente debba seguire lezioni contemporaneamente o sostenere esami lo stesso giorno. Anche il problema dell'assegnazione di frequenze televisive è un problema sul numero cromatico, dato che due trasmettitori televisivi che si trovano a meno di 100 km di distanza l'uno dall'altro devono usare frequenze diverse.

⁹Disposizioni su n oggetti sono i numeri delle coppie ordinate $\mathcal{D}_{n,2}$, terne ordinate $\mathcal{D}_{n,3}$, quaterne ordinate $\mathcal{D}_{n,4}$, ..., k -uple ordinate $\mathcal{D}_{n,k}$ che posso formare con n oggetti.

2.4 Colorazione dei grafi planari

Nello studio della colorazione dei grafi planari il risultato più importante è senza dubbio il *teorema dei quattro colori*, di cui parleremo ampiamente nel prossimo capitolo. Intanto ci “accontentiamo” di dimostrare il seguente:

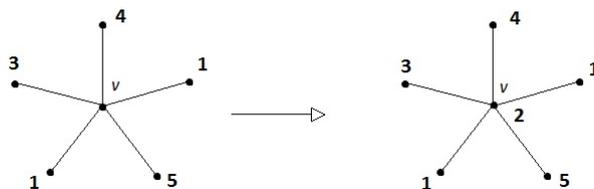
Teorema 2.4.1 (Teorema dei cinque colori¹⁰).

Ogni grafo planare semplice è 5-colorabile.

Dimostrazione. Sia G un grafo planare con n vertici e m lati.

Se $n \leq 5$ l'enunciato è banalmente verificato. Supponiamo quindi che si abbia $n \geq 6$. Dimostreremo il risultato per induzione sul numero di vertici.

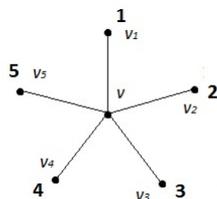
Supponiamo dunque che ogni grafo planare con meno di n vertici sia 5-colorabile e sia G un grafo piano con n vertici. Dato che G è un grafo piano, esso contiene sicuramente un vertice v tale che $d(v) \leq 5$ ¹¹. Sia $H = G - v$, per ipotesi induttiva sappiamo quindi essere 5-colorabile, poichè ha $n - 1$ vertici. Sia allora $c : V \setminus \{v\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ una colorazione dei vertici di H . Se la colorazione c usa al massimo 4 colori per i vertici di H che sono adiacenti a v , è possibile estendere c a una colorazione di tutti i vertici di G che usa al più 5 colori (basta attribuire a v uno dei colori non utilizzati per i vicini di v come nell'esempio seguente). L'unico caso che rimane quindi da considerare



è quello in cui ci sono esattamente 5 vertici adiacenti a v e questi 5 vertici sono stati colorati con 5 colori distinti. Denotiamo i cinque vertici adiacenti a v con v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 (partendo da uno qualsiasi di essi e ruotando in senso orario). Senza perdita di generalità possiamo supporre che $c(v_i) = i$ con $i = 1, 2, 3, 4, 5$, come nella figura seguente:

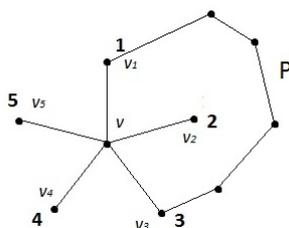
¹⁰Nel prossimo capitolo vedremo la collocazione storica di questo teorema, dovuta ad Heawood.

¹¹Conseguenza del teorema 1.5.3.



Dati $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, indichiamo con $H_{i,j}$ il sottografo di H contenente solo i vertici il cui colore è i oppure j . Consideriamo ad esempio $H_{1,3}$. Esso contiene sicuramente i vertici v_1 e v_3 , ma non è detto che sia connesso. Indichiamo con C_1 la componente di $H_{1,3}$ che contiene v_1 . Se $v_3 \notin C_1$, noi possiamo scambiare tra loro i colori 1 e 3 dei vertici nella componente C_1 . In questo modo si ottiene un'altra colorazione di H , ma ora il vertice v_1 ha colore 3, esattamente come v_3 . Ora è quindi possibile assegnare al vertice v il colore 1, ottenendo così una 5-colorazione di G .

Rimane quindi ancora da considerare il caso in cui $v_3 \in C_1$, cioè il caso in cui esiste in $H_{1,3}$ un cammino P che collega v_1 con v_3 . Sia quindi P un tale cammino. Aggiungendo a P i lati vv_1 e vv_3 si ottiene un ciclo C con la proprietà che i vertici v_2 e v_4 appartengono a facce diverse di C , come indicato dalla seguente figura:



Consideriamo ora il sottografo $H_{2,4}$. Dato che P è contenuto in $H_{1,3}$, si deve avere $P \cap H_{2,4} = \emptyset$ (un vertice che appartenesse sia a P che a $H_{2,4}$ dovrebbe avere colore 1 oppure 3, ma anche 2 oppure 4, il che è assurdo). Da ciò si deduce che i vertici v_2 e v_4 devono appartenere a componenti diverse di $H_{2,4}$, in particolare la componente C_2 di $H_{2,4}$ che contiene v_2 non può anche contenere v_4 . Ma allora, nella componente C_2 è possibile scambiare tra loro i colori 2 e 4. In questo modo si ottiene un'altra colorazione di H , con la proprietà

che il vertice v_2 ha ora il colore 4. In questo caso possiamo assegnare il colore 2 al vertice v , ottenendo ancora una volta una 5-colorazione di G . Questo esaurisce la lista di casi possibili, quindi la dimostrazione è terminata. \square

Osservazione 15. Nella dimostrazione abbiamo detto che poichè il grafo è planare allora possiede un vertice di grado ≤ 5 .

Questo è vero perchè per il teorema 1.5.3 vale che

$$m \leq 3n - 6 \quad , \quad (2.2)$$

dove m indica il numero di lati ed n il numero di vertici di G .

Se tutti i vertici di G avessero grado $d_i \geq 6$, con $i = 1, 2, \dots, n$ avremmo una contraddizione di (2.2):

$$2m = d_1 + d_2 + \dots + d_n \geq 6n \quad .$$

Capitolo 3

Da problema a Teorema dei quattro colori

Il *Teorema dei quattro colori* è stato formulato nel 1852 da Francis Guthrie, ma verrà risolto da due matematici, lo statunitense Kenneth Appel e il tedesco Wolfgang Haken solo nel 1976. Per 124 anni è stata una **congettura**. La ricerca della dimostrazione ha visto impegnati moltissimi matematici, dilettanti e notissimi. In questo capitolo vedremo come si è evoluta questa ricerca.

Problema dei quattro colori (Guthrie, 1852)

Una qualunque carta tracciata su un foglio può essere colorata con quattro colori solamente, in modo tale che regioni con confini in comune non abbiano il medesimo colore?

3.1 Un po' di storia

Nel 1852, il matematico Francis Guthrie scrive una lettera al fratello Frederick, allievo di August De Morgan all' *University College* di Londra, per sapere se esiste un metodo di dimostrazione per spiegare il fatto che una

qualsiasi carta geografica tracciata¹ su un foglio potesse essere colorata con quattro colori solamente, in modo che le regioni con confini in comune non avessero il medesimo colore. Frederick, poichè non torvava risposta, decise di chiedere ausilio al suo professore De Morgan. Anche egli tuttavia non aveva risposta; infatti si limitò a dimostrare che non è possibile che cinque regioni siano in posizione tale che ciascuna di esse sia adiacente alle altre quattro. Questo fatto indusse De Morgan (e tanti altri matematici) a credere vera la congettura.

Alcuni storici matematici attribuiscono il problema al matematico tedesco August Ferdinand Möbius. Infatti gli storici raccontano che durante una lezione il professore tedesco rivolse ai suoi studenti il problema:

Il re dell'India ha cinque figli. Egli decretò che dopo la sua morte il regno dovrà essere diviso in cinque regioni equivalenti, ognuno delle quali confinante con gli altri quattro stati. Come può dividere questa regione?

Ovviamente nessuno degli allievi seppe rispondere al quesito, per cui Möbius tranquillizzando gli studenti disse loro che non era possibile farlo.

Il problema dei quattro colori venne investito con il titolo di “congettura” solo nel 1878 quando il matematico Alfred Cayley, dopo diversi tentativi di risoluzione o refutazione, lo presentò alla *London Mathematical Society*. Meno di un anno dopo un avvocato membro della comunità scientifica, Alfred Bray Kempe pubblicò la prima dimostrazione che tuttavia conteneva un errore, come vedremo meglio nelle prossime sezioni. L'errore era un'incompletezza dell'ipotesi fatta da Kempe, che venne mostrata dal matematico Percy John Heawood nel 1890. Heawood continuò lo studio della congettura per almeno 60 anni, nel corso dei quali molti altri matematici famosi profusero sforzi sulla dimostrazione di tale congettura. In quegli stessi anni i matematici riuscirono a costruire potenti teorie che permettevano di dimostrare moltissimi altri risultati importanti, e la comunità scientifica acquistò la sensazione che

¹Carta in cui linee chiuse formano regioni.

tutti i problemi matematici (e scientifici) potessero essere risolvibili. Questa posizione cambiò drasticamente quando, negli anni trenta del '900, matematici come Kurt Gödel e Alonzo Church ottennero risultati “imbarazzanti” nell’ambito della logica formale. Si dimostrò infatti che esistono enunciati che non possono essere né dimostrati né refutati. Alcuni matematici allora cominciarono a supporre che la “congettura” dei quattro colori fosse proprio uno di questi enunciati, poichè erano più di 80 anni che si tentava di dimostrarla. Altri matematici avevano la sensazione che, se pure una dimostrazione esisteva, sarebbe stata troppo lunga per poter essere scritta per intero. Tuttavia molti matematici credevano che i risultati della logica formale non potessero arrivare fino a quel ramo della matematica, continuando ad apportare miglioramenti e risultati alla dimostrazione dei quattro colori. Tra questi matematici c’erano anche George David Birkhoff e Philip Franklin che tra il 1913 ed il 1950 corressero ed ampliarono le teorie di Kempe.

La svolta decisiva per la dimostrazione del teorema fu l’introduzione di calcolatori numerici ad alta velocità, che rese tecnicamente possibile affrontare questo problema. Henrich Heesch elaborò un algoritmo che permise di tradurre al calcolatore il teorema, ma per la dimostrazione “formale” si dovrà aspettare fino al 1976, quando i matematici Appel e Haken riuscirono a perfezionare l’algoritmo di risoluzione.

Di seguito analizziamo come si è sviluppata la dimostrazione anche tecnicamente, cominciando con la dimostrazione incompleta di Kempe.

3.2 Dimostrazione di Kempe

3.2.1 Le ipotesi

Esaminiamo il problema partendo dalla formulazione originale di Guthrie. Nella lettera inviata al fratello Frederick, vanno sottolineati i due seguenti aspetti:

1. Con *regioni confinanti* Guthrie immagina regioni che hanno in comune

almeno un tratto di confine che non si riduca ad un punto. Infatti una carta a forma di torta tagliata a fette richiede tanti colori quante sono le fette (regioni). Si veda la figura 3.1 (a sinistra).

2. Per *regione* Guthrie si riferiva ad una zona connessa. Infatti se si ammettesse che una regione possa essere formata da più zone separate, è semplice costruire un esempio di carta con cinque regioni, ognuna adiacente alle altre quattro. Si veda la figura 3.1 (a destra).

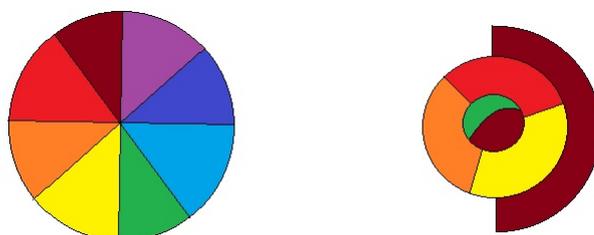


Figura 3.1: A sinistra una carta con regioni confinanti in un punto; a destra una carta con cinque regioni con zone separate.

Quindi le ipotesi del teorema, affinché abbia senso, sono le seguenti: *una carta deve consistere unicamente di paesi contigui, che per essere considerati confinanti, devono essere adiacenti lungo una linea; infine i vari paesi devono essere costituiti da una singola regione connessa.*

Per Guthrie e De Morgan fu evidente che la *congettura per tre colori* è falsa: è possibile tracciare una carta con quattro regioni, ciascuna delle quali adiacente a tutte le altre. Quindi tre colori non sono sufficienti per colorare qualunque carta (vedi figura 3.2 a sinistra).

Inoltre De Morgan, come accennato precedentemente, riuscì a dimostrare che non è possibile costruire cinque regioni adiacenti ognuna a tutte le altre, e questo lo portò a credere che non erano mai necessari cinque colori. Ma dimostrare che in una carta non possono esistere cinque regioni mutuamente adiacenti non è equivalente a dimostrare la congettura dei quattro colori (si veda la figura 3.2 a destra): *non è corretto assumere che il numero dei colori*

necessari per una carta sia uguale al massimo numero di paesi mutuamente adiacenti.

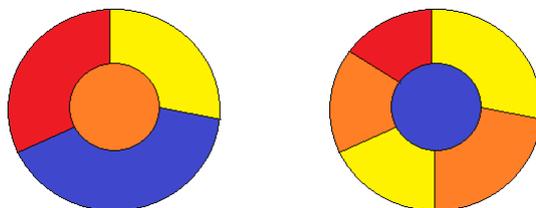


Figura 3.2: A sinistra la carta richiede almeno quattro colori; a destra nella carta non vi sono più di tre paesi mutuamente adiacenti, ma occorrono quattro colori.

3.2.2 Carte e grafi

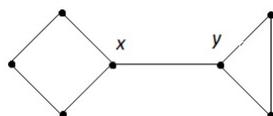
Formuliamo il problema dei quattro colori come problema di colorazione di grafi planari. A partire dalla definizione di grafo planare in §1.5, diamo la seguente definizione:

Definizione 3.1. Si definisce **carta** (o mappa) un grafo planare $G = (V, E)$ le cui facce hanno lati che sono curve semplici e chiuse (*circuiti*), dette *regioni* e che gode delle seguenti proprietà

- (a) ogni lato separa facce diverse;
- (b) $\forall v \in V \quad d(v) \geq 3$.

Dalla definizione segue che ogni carta è un grafo planare. Ma non è vero il viceversa.

Esistono infatti grafi planari che non sono carte, come quello nella figura seguente: in questo grafo, il lato di vertici x e y è un confine che ha da ambo

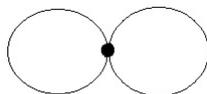


le parti la stessa regione, mentre per la proprietà (a) i lati sono confini di

due differenti regioni. Nessuna regione di una carta può avere un lato interno “inutile”. Questo è assicurato dalla proprietà dei lati di essere curve semplici chiuse.

Inoltre questo grafo planare presenta vertici di grado 2, che per la proprietà (b) non sono ammissibili in una carta. Infatti i vertici di grado due possono essere eliminati, in quanto sono anche essi inutili: un vertice di una carta serve a costruire lati che separano regioni.

La carta che identifica il grafo planare della figura precedente può essere così rappresentata.



Osservazione 16. Osserviamo che il vertice di un cappio ha grado 2.

La definizione di carta ci permette di eliminare alcuni grafi “indesiderati”. In particolare, poichè le facce di una carta devono essere delimitate da circuiti, si escluderanno le carte in cui esiste una faccia isolata, poichè la faccia esterna del grafo non sarebbe delimitata con una curva semplice chiusa.

Dualità

Abbiamo introdotto in §1.5.1 il concetto di grafo duale. Vediamo come costruire il grafo duale di una carta.

Sia un $G = (V, E)$ un grafo piano qualsiasi. Per costruire il suo *grafo duale* G^* operiamo nel seguente modo:

- disegniamo un punto all’interno di ogni faccia del grafo: essi rappresenteranno i vertici di G^* ;
- ogni volta che due facce di G si incontrano su un lato $e \in E$, disegniamo un lato che unisce i due punti corrispondenti alle facce, che attraversa e : questo nuovo lato è un lato di G^* ;

- se due facce di G si incontrano su più lati $e_1, e_2, \dots, e_n \in E$, disegniamo un lato per ogni e_i nel quale si incontrano due facce; ogni nuovo lato attraverserà uno degli e_i ;
- se un lato è contenuto in una faccia, disegniamo un cappio che inizia e finisce nel vertice che corrisponde alla faccia

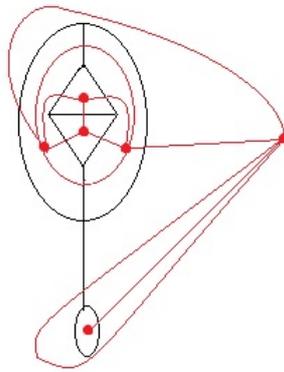


Figura 3.3: Questo grafo duale contiene un cappio

Proprietà: Il duale del duale di un grafo connesso G è il grafo originale.

Dimostrazione. Sia v un vertice di G . Disegniamo i lati del duale G^* corrispondente ai lati che incontrano v . Troviamo un insieme di lati che formano una faccia. Segue che per due vertici di G uniti da un lato e ci saranno due facce di G^* , ognuna delle quali contiene uno dei due vertici, e le due facce si incontreranno in un lato che attraversa e . Allora, se costruiamo il duale del grafo G^* , all'interno di ogni sua faccia si troverà un vertice del grafo G in modo che due di essi saranno uniti da un lato se e solo se le corrispondenti facce di G^* si incontrano in un lato. Quindi l'originale grafo G è il duale del duale G^* . \square

Osservazione 17. Una conseguenza della precedente proprietà è che se G non è connesso si ottiene che il duale del duale non è un grafo isomorfo all'originale. Infatti in ogni grafo planare ci si può spostare da faccia a faccia

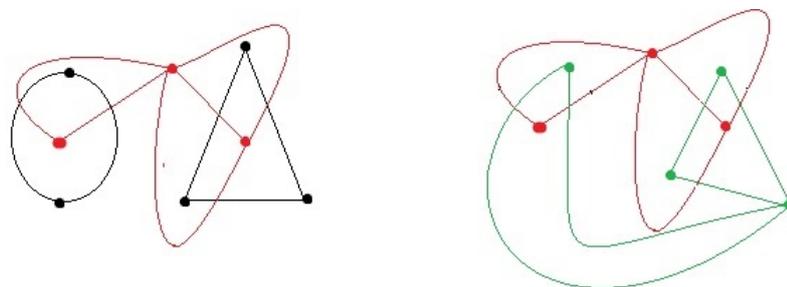


Figura 3.4: Nella figura si vede come il duale del duale (grafo verde) non sia isomorfo al grafo originale (in nero).

attraversando le facce e incrociando i lati; questo spostamento corrisponde ad un percorso sui lati del grafo duale. Allora *il duale di ogni grafo è connesso*. Di conseguenza il duale del duale di un grafo non connesso è connesso e non può essere isomorfo al grafo originale.

Ci sono due importanti aspetti sulla dualità da ricordare.

1. Come osservato in §1.5.1, il duale di un grafo non è solo determinato dal grafo, ma anche dalla rappresentazione nel piano. Infatti due grafi isomorfi possono avere grafi duali non isomorfi.
2. Il duale di una carta potrebbe non essere una carta.
Infatti, se consideriamo una carta con una faccia con due lati, il grafo duale ha un vertice di grado 2 e quindi esso non è una carta.

Colorazioni del grafo duale

Definizione 3.2. Se in una carta ad ogni regione può essere assegnato un colore in modo che due facce che si incontrano in un lato non hanno lo stesso colore, allora nel grafo duale possiamo associare i colori ai vertici in modo che due vertici uniti da un lato non avranno lo stesso colore. Questa colorazione dei vertici è detta colorazione del grafo duale.

Per ogni risultato di una carta, ce n'è uno equivalente per il suo duale. Dal *problema* dei quattro colori si ha:

Duale del problema dei quattro colori

Il grafo duale di ogni carta può essere quattro colorato.

Dalla formulazione originale del problema dei quattro colori, che riguardava la colorazione delle facce di un grafo planare, si passa al problema duale della colorazione dei vertici.

Dalla definizione 3.1, definiamo le seguenti proprietà duali:

- La proprietà (a) si mantiene nel duale. Infatti è facile rendersi conto che, poichè in una carta ogni vertice ha grado almeno 3, nel duale della mappa ogni faccia ha almeno tre lati.
- La proprietà che ogni faccia di una carta è delimitata da un circuito vale per il duale, ma non è così immediato.

Mostriamo la seguente argomentazione che mostra che la proprietà è autoduale: se ogni faccia di un grafo connesso è delimitata da un circuito, allora ogni faccia del duale è anche essa delimitata da un circuito.

Sia G un grafo connesso che ha una faccia F tale che non è limitata da un circuito. Ogni circuito è un grafo connesso in cui tutti i vertici hanno grado due. Inoltre ogni grafo connesso in cui tutti i vertici hanno grado due è un circuito. Questo vuol dire che in F o la frontiera² non è connessa, e in questo caso la faccia interna di F separa 2 o più componenti del grafo, o c'è un vertice sulla frontiera di F che non è di grado 2. La prima possibilità non può accadere perchè G è un grafo connesso, quindi qualche vertice della frontiera di F non ha grado 2. Sia v tale vertice: per quanto detto, non esistono due lati appartenenti ad F che contengono v . Passando al grafo duale di G , si ha che in G^* c'è un vertice f (corrispondente ad F) che appartiene alla faccia V (corrispondente a v), tale che non esistono due lati appartenenti a V e contenenti f . Quindi il vertice f non ha grado 2 sulla frontiera della

²Insieme dei lati che delimitano F .

faccia V .

Per concludere, osserviamo che se un grafo piano connesso non ha la proprietà che tutte le facce sono delimitate da circuiti, allora anche il suo duale non avrà questa proprietà. Infatti se G è un grafo planare connesso con questa proprietà tale che il suo duale G^* non ha la proprietà, allora si ha una contraddizione: il duale del duale non deve avere la proprietà per quanto dimostrato precedentemente, ma il duale del duale è G , che ha la proprietà per ipotesi.

Quindi possiamo dare il duale della definizione 3.1

Definizione 3.3 (Duale di carta).

Il duale di una carta è un grafo planare connesso dove le facce sono delimitate da circuiti e ogni faccia ha almeno tre lati.

Poichè abbiamo visto che il duale di una carta non è necessariamente una carta, definiamo una classe di grafi nella quale i duali appartengono ancora alla classe.

Definizione 3.4. Si definisce *carta corretta* una carta in cui tutte le facce hanno almeno tre lati.

È facile capire che il duale di una carta corretta è una carta corretta.

Le informazioni sulle proprietà delle colorazioni delle mappe corrette ci descrivono le medesime proprietà per tutte le carte? In particolare, possiamo ridurre il problema dei quattro colori alle mappe corrette? La risposta è sì, vediamo il perchè.

Vogliamo dimostrare che se tutte le mappe corrette sono 4-colorabili, allora tutte le carte sono 4-colorabili. Dalla dualità, questa equivale a dire che se i vertici di tutte le carte corrette sono 4-colorabili, allora i vertici del duale di ogni carta sono 4-colorabili.

Supponiamo che M^* sia il duale di una carta M e che i vertici di ogni carta corretta sono 4-colorabili. Se M^* è una carta corretta, allora è 4-colorabile.

Se M^* non è una carta corretta, vuol dire che ci sono vertici di grado 2. Cambiamo allora M^* in una carta corretta M' sostituendo ogni vertice di grado 2 con una coppia di triangoli, come illustrato nella figura seguente. Ogni volta che sostituiamo un vertice con una coppia di triangoli, il vertice



è stato unito a soli due altri vertici; allora possiamo scegliere un colore per esso che è differente da quello dei suoi vicini. In questo modo si ottiene una 4-colorazione M^* .

Osservazione 18. Un vantaggio di lavorare con le carte corrette è che ogni qualvolta si trova un nuovo risultato relativo alle carte corrette, si è anche trovato un risultato duale su di loro.

3.2.3 Il ragionamento di Kempe

Nel saggio pubblicato nel 1879 da A.B.Kempe le argomentazioni per la dimostrazione della congettura sono estremamente sottili, e nonostante si riveleranno incomplete, esse contengono le idee fondamentali che porteranno alla dimostrazione formale corretta di quasi cento anni più tardi. Mostriamo quindi la sua “dimostrazione”, ricordando che contiene un errore.

L’argomentazione è centrata sull’uso delle “*catene di Kempe*” e sulla *inter-scambiabilità* dei colori.

Definizione 3.5. Consideriamo una carta colorata con quattro colori a, b, c e d . Si chiama *catena di Kempe* (o ab -catena) una sequenza di regioni (facce) colorate con i soli colori a e b , in modo da attraversare la carta senza passare da regioni colorate con c o d .

Definizione 3.6 (Duale della catena di Kempe (ab -catena)).

Sia G un grafo 4-colorato con i colori a, b, c e d . Sia H un sottografo formato

dai vertici di due colori, siano a e b , insieme ai lati che uniscono questi vertici. Ogni componente connessa di H è detta *duale della catena di Kempe* (o della ab -catena).



Figura 3.5: La figura rappresenta una catena semplice di Kempe e la duale della stessa catena di Kempe.

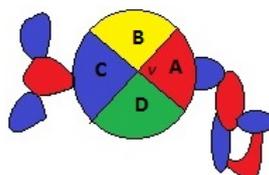
Osservazione 19. In realtà si parlerà di catena di Kempe in entrambe le formulazioni. Se si colorano regioni ci si riferisce alla definizione 3.3, quando si colorano vertici ci si riferisce alla definizione 3.4.

Se intercambiamo i colori delle regioni in una ab -catena in modo che gli stati a -colorati diventano b -colorati e viceversa, otteniamo una nuova 4-colorazione accettabile della carta.

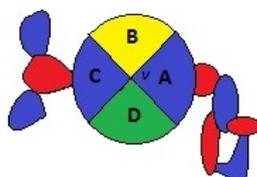
Dimostriamo le tre premesse che Kempe utilizza per la sua “dimostrazione”. Nelle prime due si seguiranno le argomentazioni originali di Kempe.

- (i) In una carta 4-colorata, se v è un vertice di grado 4, allora c'è una 4-colorazione della carta tale che le quattro regioni che si incontrano in v sono colorate con al più tre colori.

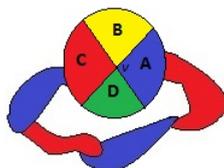
Dim. Supponiamo che, nella mappa originale, tutti e quattro i colori siano usati per colorare i quattro stati adiacenti in v . Denotiamo questi paesi con A,B,C e D ed i loro rispettivi colori con a, b, c e d , come nella figura seguente.



Se A e C non appartengono alla stessa ac -catena, come nella nostra figura, allora possiamo scambiare i colori nella ac -catena che comincia da A , ottenendo A dello stesso colore di C senza compromettere la colorazione della carta.



Se invece A e C appartengono alla stessa ac -catena come nella figura seguente, allora questa catena separa B da D . Di conseguenza, B e D non possono appartenere alla stessa bd -catena.

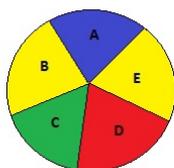


Quindi scambiando i colori della bd -catena (è indifferente partire da B o da D), otteniamo B e D dello stesso colore senza nessuna violazione della colorazione.

In ogni caso il numero di colori nel vertice v possono essere ridotti a tre.

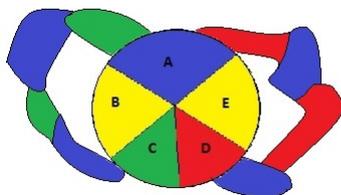
- (ii) In una carta 4-colorata, se v è un vertice di grado 5, allora c'è una 4-colorazione della carta tale che le cinque regioni che si incontrano in v sono colorate con soli tre colori.

Dim.³ Supponiamo che, nella mappa originale, tutti e quattro i colori siano usati per colorare i cinque stati adiacenti in v . Denotiamo questi paesi con A,B,C, D ed E. In questo caso due regioni non adiacenti avranno lo stesso colore; assumiamo che i colori delle regioni siano a, b, c e d , come nella figura seguente.



Analogamente alla dimostrazione della proposizione precedente, se A e C non appartengono alla stessa ac -catena, allora possiamo scambiare i colori in essa partendo da A ottenendo che solo tre colori c, b e d si trovino in v (colorando A con lo stesso colore di C). Allo stesso modo se A e D non appartengono alla stessa ad -catena.

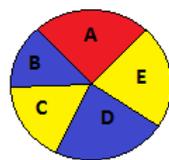
Supponiamo invece che A e C appartengono alla stessa ac -catena e A e D appartengono alla stessa ad -catena (come nella figura seguente).



In tal caso E e C sono separati da una catena, B e D sono separati dall'altra catena. Allora, scambiando i colori nella bc -catena che contiene E, coloriamo entrambi E e C dello stesso colore c ; analogamente, scambiando i colori nella bd -catena contenente B, coloriamo entrambi B e D dello stesso colore d .

In ogni caso il numero di colori del vertice v è 3, come nella seguente figura.

³In realtà, come vedremo successivamente, è incompleta.



(iii) Ogni carta ha una regione con al più 5 lati.

Dim. Se proviamo a disegnare una mappa tale che ogni regione abbia almeno 6 lati, o più semplicemente una mappa nella quale ogni regione abbia esattamente 6 lati, alla fine si arriverà a due possibili esiti qui di seguito disegnati.

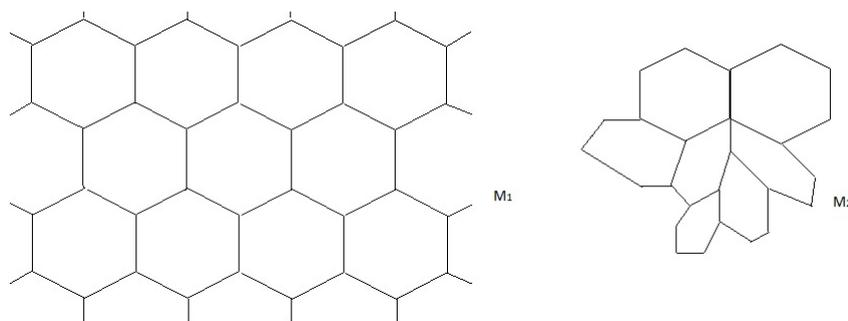


Figura 3.6: M_1 carta a nido d'ape infinita, M_2 carta con regioni di 6 lati.

Ma i grafi della figura 3.4 non sono carte. Infatti M_1 ha un numero infinito di vertici, mentre M_2 ha vertici di grado 2.

Proveremo che esiste sempre una regione con al più cinque lati restringendoci alle carte⁴.

Per ogni carta M definiamo p_i il numero delle regioni con i lati.

⁴È un risultato che non vale per tutti i grafi planari.

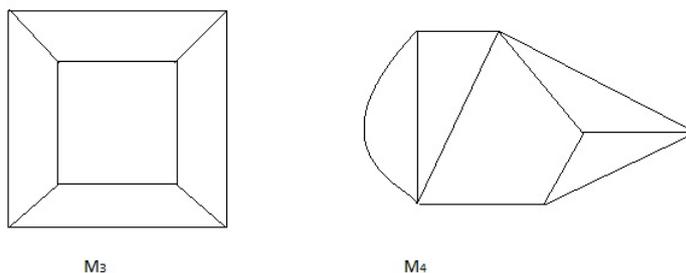


Figura 3.7: Per la carta M_3 abbiamo $p_4 = 6$ e $p_i = 0$ per ogni $i \neq 4$. Per M_4 abbiamo $p_2 = 1$, $p_3 = 3$, $p_4 = 1$, $p_5 = 1$ e $p_i = 0$ per tutti gli altri valori di i .

Marchiamo ogni lato di M con un segno. Un modo per contare i segni fatti è prendere il numero di segni posti dentro le regioni con 2 lati, aggiungere a questo il numero di segni posti all'interno delle regioni con 3 lati, aggiungere a questo il numero di segni posti all'interno delle regioni con 4 lati, così via. Il numero totale di segni è

$$2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + \dots \quad .$$

D'altronde, il numero di segni fatto coincide con la somma dei gradi dei vertici della carta, che per il teorema 1.1.1 è $2E$, dove con E indichiamo il numero totale di lati della carta. Si ottiene quindi⁵

$$\sum_{i=2}^{\infty} ip_i = 2E \quad . \quad (3.1)$$

Utilizziamo ora i numeri p_i per contare il numero C di regioni in M . Esso è il numero delle regioni con 2 lati più il numero di quelle con 3 lati più il numero di quelle con 4 lati, così via. Si ottiene

$$\sum_{i=2}^{\infty} p_i = C \quad . \quad (3.2)$$

Moltiplichiamo per 6 la (3.2) e sottraiamo poi la (3.1), ottenendo

$$\sum_{i=2}^{\infty} (6 - i)p_i = 6C - 2E \quad . \quad (3.3)$$

⁵Per semplicità consideriamo la somma infinita. In realtà sappiamo che la somma è finita poichè $p_i = 0$ per i sufficientemente grande.

Indichiamo con V il numero di vertici di M . La formula di Eulero (teorema 1.5.2) implica che $6V - 6E + 6C = 12$; poichè in una carta ogni vertice ha almeno grado 3, $2E \geq 3V$. Quindi $6C - 2E \geq 12$.

Combinando quest'ultima con la (3.3) otteniamo

$$\sum_{i=2}^{\infty} (6-i)p_i \geq 12 \quad . \quad (3.4)$$

La somma della (3.4) per esteso è

$$4p_2 + 3p_3 + 2p_4 + p_5 - p_7 - 2p_8 - \dots \quad ,$$

che rappresenta un numero positivo dato che è maggiore od uguale di 12. Tuttavia, solo i primi quattro termini della somma possono essere positivi, quindi almeno uno dei primi quattro p_i deve essere non nullo. In altre parole, in M c'è una regione con al più 5 lati.

I tre precedenti risultati conducono alla “dimostrazione” del seguente enunciato:

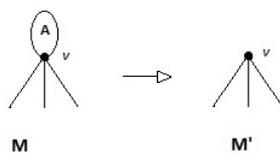
Teorema 3.2.1. Ogni mappa può essere colorata con al più quattro colori.

Dimostrazione. Kempe procede a dimostrare con il classico metodo della *reductio ad absurdum*.

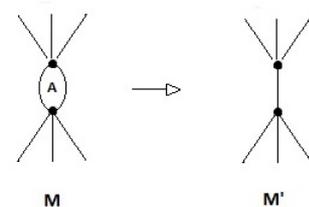
Supponiamo che esistano carte che richiedono cinque o più colori (carte pentacromatiche). Tra tutte queste, denotiamo con M la carta che ha un numero minimo di regioni (pentacromatica minimale). Per tanto per dimostrare il teorema è sufficiente dimostrare che l'esistenza di una carta pentacromatica minimale conduce ad una contraddizione.

Sia M una carta pentacromatica minimale. Per (iii) esiste una regione in A di M con al più cinque lati. Costruiamo a partire da M una nuova carta M' , che dovrà avere meno regioni di M , rimuovendo prima tutti i lati di A e costruendone altri. Il metodo di Kempe per ridurre il numero di regioni in una mappa è detto “*patching*” che obbedisce alle seguenti regole:

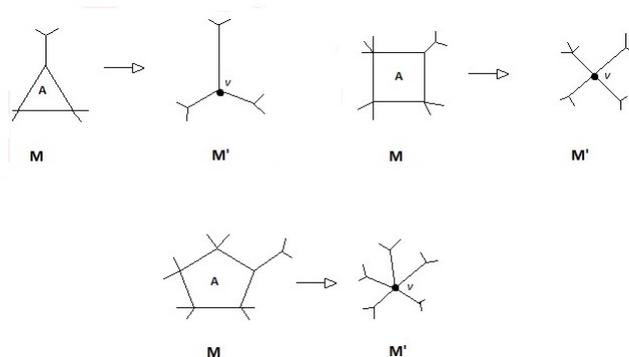
1. se A ha un solo lato, non dobbiamo fare altro che rimuoverlo;



2. se A ha due lati, li cancelliamo e uniamo i vertici di A con un lato;



3. se A ha 3 o più lati, li cancelliamo; aggiungiamo un nuovo vertice v nella regione di A e disegniamo dei nuovi lati che collegano v ai vertici di A .



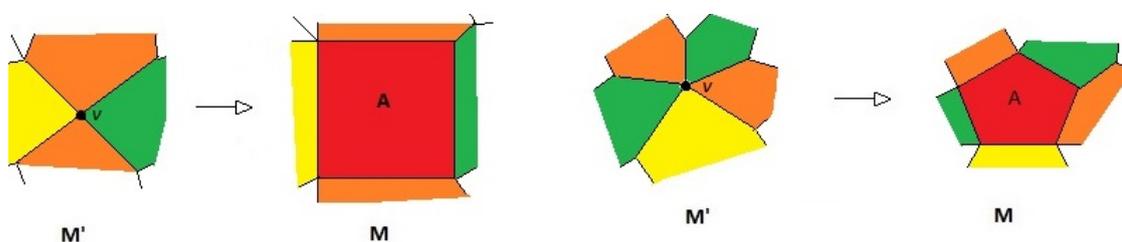
Nota Per definizione un vertice deve avere almeno valenza 3; se con questa procedura si genera una valenza di un vertice di A minore di 3 allora il vertice in questione viene cancellato dalla mappa.

Dato che M è pentacromatica minimale ed M' ha meno regioni, necessariamente M' è 4-colorabile. Nel caso in cui A abbia 3,4, o 5 lati, applicando la regola 3., comparirà un nuovo vertice v in M' con, rispettivamente, 3,4, o 5 regioni confinanti con esso:

- se v confina con 3 regioni, esse saranno colorate con non più di 3 colori;

- se v confina con 4 o 5 regioni, per (i) e (ii), possiamo cambiare la 4-colorazione di M' , ammettendo solo tre colori che si incontrano in v .

Consideriamo la carta M' 4-colorata e invertiamo la costruzione sin qui fatta per ripristinare la mappa M . Mantenendo la colorazione di M' , otteniamo un colore per ogni regione di M eccetto per A . In ogni caso, ci sono al massimo cinque regioni che circondano A e mostrano al massimo 3 colori, lasciando inutilizzato il quarto colore per A stesso. Così anche M è 4-colorabile, il



che è assurdo. □

3.2.4 L'errore di Kempe

Nelle argomentazioni di Kempe, c'è un errore sottile ma fatale. La “proposizione” (ii), utilizzata nella dimostrazione del teorema 3.2.1, non è corretta. In questa dimostrazione Kempe trascurò di considerare la possibilità che la ac -catena e la ad -catena potessero condividere delle regioni colorate con a . Se questo accade, è possibile che scambiando i colori nella bc -catena (per colorare E come C), potrebbe cambiare una regione della ac -catena di colore c nel colore b , così distruggendo l' ac -catena e rompendo il blocco che separa B da D .

È piuttosto difficile avere una carta 4-colorabile in cui si manifesta questa situazione. Il controesempio che rigetta la sua dimostrazione fu però trovato da Heawood nel 1890, cioè 11 anni dopo la pubblicazione: egli presentò una mappa 4-colorata nella quale le due catene si intersecano e gli scambi di colori non possono essere entrambi realizzati.

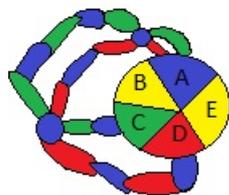


Figura 3.8: Un adattamento della carta di Heawood

L'errore di Kempe mostra che egli fallì nel considerare tutte le possibilità, ma non mostra che la sua dimostrazione non può funzionare.

Ironia della sorte, è proprio il fallimento di Kempe ad assicurargli un posto nella storia della matematica. Se il suo lavoro fosse stato corretto, probabilmente l'interesse per i problemi di colorazione di una carta sarebbe scemato notevolmente ed il problema dei quattro colori, così dimostrato, sarebbe diventato non più di una curiosità.

3.3 Attacco alla congettura dei quattro colori: configurazioni riducibili

Un modo per tentare di dimostrare il problema dei quattro colori è non considerare le mappe che sono 4-colorabili e studiare solo quelle che richiedono almeno cinque colori, anche se sappiamo non esistere.

Definizione 3.7. Una carta si dice *irriducibile* se si può provare che essa richiede almeno cinque colori e tutte le carte con meno facce sono 4-colorabili.

Si dimostra che [3] *in una carta irriducibile ogni faccia deve avere almeno 5 lati.*

La congettura dei quattro colori equivale ad affermare che non esistono carte irriducibili. Allora se assumiamo che esistono carte irriducibili, la congettura potrebbe essere provata arrivando a un qualche tipo di contraddizione. Un metodo è il seguente: assumendo che esiste una carta irriducibile, si prova

a dimostrare che esiste una carta irriducibile con alcune proprietà *speciali*; infine si prova a dimostrare che una carta irriducibile con queste proprietà speciali non può esistere.

Ad esempio, se esiste una carta irriducibile, non è difficile mostrare che esiste una carta irriducibile 3-valente; allora possiamo risolvere la congettura dimostrando che una carta riducibile 3-valente non esiste.

Poichè è più facile lavorare con i grafi duali delle carte, diamo la seguente definizione:

Definizione 3.8 (Duale di carta irriducibile).

Un grafo planare è irriducibile se richiede almeno cinque colori e ha un numero minimo di vertici

In seguito considereremo i grafi senza cappi e senza lati paralleli, perchè rimuovere i cappi e tutti tranne uno dei lati paralleli, non avremmo ripercussioni sulle proprietà di colorazione del grafo considerato.

Proprietà:

1. ogni grafo irriducibile è connesso ;
2. se esiste un grafo irriducibile, allora esiste un grafo irriducibile in cui ogni faccia è triangolare (grafo triangolare).

Dimostrazione 1. Se un grafo irriducibile fosse non connesso, allora ogni componente, che ha meno vertici del minimo numero per la 5-colorabilità dovrebbe essere 4-colorabile; di conseguenza l'intero grafo sarebbe 4-colorabile.

□

Dimostrazione 2. Se aggiungiamo dei lati sulle facce di un grafo irriducibile, ottenendo un grafo triangolare, si giunge ad avere un grafo che richiede almeno più colori del grafo originale. Poichè ogni grafo triangolare senza cappi o lati paralleli è 3-connesso [3], segue che se esiste un grafo irriducibile allora esiste un grafo irriducibile (triangolare) 3-connesso.

□

Definizione 3.9. Un grafo che non può verificarsi come sottografo di un grafo irriducibile triangolare è detto **configurazione riducibile**.

Se ogni grafo ha una configurazione riducibile, allora la congettura dei quattro colori è vera (poichè non esistono grafi irriducibili).

Abbiamo detto che una mappa minimale⁶ che richiede 5 colori (pentacromatica) non ha facce con meno di cinque lati.

Il duale di questa proprietà ci dice che i grafi non irriducibili possono avere dei vertici di grado minore di cinque. Un vertice di grado minore di cinque è quindi un esempio di configurazione *riducibile*.

Oltre a questa si conoscono altre configurazioni riducibili.

Un modo per provare che una configurazione è riducibile è il seguente.

- La configurazione viene sostituita con una più piccola, producendo un grafo 4-colorabile;
- si usa questa 4-colorazione per colorare la parte del grafo originale che è sulla frontiera della configurazione o fuori da essa;
- questa colorazione viene quindi estesa all'interno della configurazione.

La colorazione trovata mostra che il grafo originale potrebbe non essere irriducibile, quindi la configurazione analizzata è riducibile.

Se la configurazione da analizzare è molto grande, potrebbero esserci svariate possibili colorazioni della frontiera (centinaia o migliaia di modi). Di conseguenza la dimostrazione di configurazioni riducibili può essere molto lunga. Nella ricerca di configurazioni riducibili, la speranza è che un insieme di configurazioni riducibili potrebbe allargarsi al punto che nessun grafo può evitare di contenere almeno una di esse. Seguirebbe allora che non ci sono grafi irriducibili e quindi ogni grafo è 4-colorabile.

⁶Con il minimo numero di facce.

Dall'equazione di Eulero, in §3.2.3 abbiamo dimostrato che per ogni carta corretta vale la seguente relazione:

$$\sum (6 - i)p_i \geq 12 \quad ,$$

dove l'uguaglianza vale se ogni vertice è 3-valente. Per il duale di una carta corretta vale la seguente relazione (duale):

$$\sum (6 - i)v_i \geq 12 \quad ,$$

dove l'uguaglianza vale se ogni faccia ha 3 lati.

Quindi in un grafo triangolare vale che

$$\sum (6 - i)v_i = 12 \quad .$$

Poichè il grado minimo di un vertice in grafo irriducibile è 5, l'unico termine positivo a sinistra della precedente equazione è v_5 . Di conseguenza devono esserci almeno 12 vertici di grado 5. Segue che ogni grafo irriducibile ha almeno dodici vertici. In altre parole la congettura dei quattro colori è vera per ogni grafo meno di 12 vertici.

Molti matematici hanno migliorato questo risultato:

1922 P.Franklin dimostra che un grafo irriducibile ha almeno 26 vertici;⁷

1938 Franklin migliora il suo risultato portando a 32 il numero dei vertici;⁸

1940 C.E.Winn lo porta a 36;⁹

1969 O.Ore e G.J.Stemple incrementano il numero di vertici a 40¹⁰

1975 J.Mayer dimostra che il numero di vertici è 96.¹¹

⁷P.Franklin, *The four color problem*, Amer J.Math, 44(1922): 225-236.

⁸P.Franklin, *Note on the four color problem*, J.Math Phys., 16(1938): 172-184.

⁹C.E. Winn, *A case of coloration in the four problem*, Amer J. Math, 59(1937): 515-528.

¹⁰O.Ore, G.J.Stemple, *Numerical calculations on the four-color problem*, J.Combin. Theory, 8(1970): 477-492.

¹¹J.Mayer, *Inègalitès nouvelles dans le problème des quatre couleurs*, J. Combin.Theory, 19(1975): 119-149.

Come precedentemente detto i metodi per verificare la riducibilità di una configurazione possono essere eccessivamente lunghi. Infatti questi metodi, se applicati a configurazioni di grandi dimensioni, richiedono l'analisi di ingenti quantità di dettagli: ogni configurazione è circondata da un anello di confinanti; la dimensione dell'anello¹² ha un'influenza diretta sulla difficoltà di dimostrare la riducibilità della configurazione. Se ad esempio si scopre che una configurazione non è riducibile, la si può sostituire con un anello di maggiori dimensioni; anche se consideriamo un solo vertice in più, la difficoltà della procedura aumenta considerevolmente, poichè il numero delle colorazioni distinte dei vertici è circa tre volte superiore del numero delle colorazioni dei vertici dell'anello originale.

Questi problemi sono stati affrontati con l'introduzione di *calcolatori numerici* ad alta velocità. Heesch formalizzò i procedimenti noti per verificare la riducibilità delle configurazioni e ne dedusse che almeno uno di essi era una procedura sufficientemente meccanica per poter essere eseguita da un calcolatore. Karl Dürre, allievo di Heesch, scrisse un programma per calcolatore di tale procedura. Quindi quando il programma ha successo, si dichiara la riducibilità della configurazione; un esito negativo ci dice che quel particolare metodo non è sufficiente per dimostrarne la riducibilità, ma non si esclude che altri metodi possano farlo. In quest'ultimo caso Heesch riesce a dimostrare la riducibilità delle configurazioni effettuando ulteriori calcoli. Il lavoro di Heesch sulla teoria delle configurazioni riducibili, anche se successivamente migliorato, include tutte le idee necessarie alla dimostrazione della congettura.

3.4 Dimostrazione di Appel-Haken

La dimostrazione di Appel-Haken è sostanzialmente un'estensione delle parti valide della dimostrazione di Kempe.

¹²Il numero di regioni che formano l'anello.

Riprendendo quanto fatto da Kempe, possiamo sottolineare che: la proposizione (iii) può essere formulata dicendo che l'insieme di "configurazioni" consistente di una regione con 2 confinanti, una regione con 3 confinanti, una regione con 4 confinanti e una regione con 5 confinanti è **inevitabile**. In altre parole, ogni grafo in cui in un unico punto non concorrono più di tre regioni (triangolare) deve contenere almeno una delle configurazioni elencate. Possiamo descrivere quindi l'approccio di Kempe alla congettura dei quattro

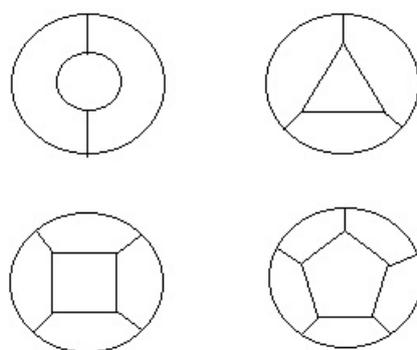


Figura 3.9: L'insieme delle configurazioni inevitabili di Kempe

colori come un tentativo di trovare un insieme inevitabile di configurazioni riducibili: trovare un tale insieme sarebbe sufficiente per dimostrare la congettura.

Kempe cercò di dimostrare che le quattro configurazioni inevitabili sono riducibili, riuscendo per tre di esse ma errando per la configurazione con 5 confinanti.

Inevitabilità

Heesch, negli stessi anni, introdusse il *metodo di scaricamento* per la ricerca di insiemi inevitabili di configurazioni. Esso aveva analogie con il trasferimento di una carica in una rete elettrica. Inizialmente questo metodo, sviluppato in maniera rudimentale, non apporta grandi miglioramenti e progressi nella dimostrazione della congettura dei quattro colori. Solo negli anni successivi il metodo venne perfezionato e divenne di fondamentale importanza.

Quindi poichè il grado minimo di un vertice di un grafo irriducibile è 5, nel seguito quando useremo il termine “triangolazione” indicheremo una triangolazione priva di vertici di grado inferiore a cinque.

Ora assegnamo il numero di carica $6 - k$ ad ogni vertice con k confinanti. Allora si avrà che i vertici con grado superiore a 6, che chiameremo *principali*, hanno carica negativa mentre i vertici 5 confinanti hanno carica positiva. Dal risultato ottenuto da Kempe abbiamo che la somma dei numeri assegnati ai membri di una qualsiasi triangolazione è 12 ((iii) della sezione precedente). Questo fatto è di notevole importanza, infatti per ogni triangolazione la somma delle cariche risulta sempre positiva, si ha quindi una dimostrazione che i vertici di grado minore di 6 devono necessariamente esistere, sono cioè inevitabili. Ora supponiamo un algoritmo che permetta ai vertici di scambiare le cariche in modo che: da un vertice la carica positiva (cioè 5 confinante) sia trasferita verso qualcuno dei vertici principali a carica negativa. Poichè la carica totale deve restare invariata e positiva, l'algoritmo ad un certo punto incontra delle configurazioni che impediscono la distribuzione voluta: l'insieme di queste configurazioni è inevitabile. In altre parole ogni triangolazione deve contenere almeno una di queste configurazioni. Se le configurazioni sono riducibili allora la congettura dei quattro colori è dimostrata. Ovviamente se non tutte le configurazioni inevitabili sono riducibili allora non ci sono stati veri e propri passi in avanti.

Esempio 3.1.

Vediamo un esempio semplice della procedura di scaricamento.

Consideriamo una procedura che trasferisce $\frac{1}{5}$ di unità di carica da ciascuno dei vertici di grado 5 a ciascuno dei suoi confinanti *principali*. Il corrispondente insieme inevitabile è formato da due configurazioni: una è una coppia di vertici di grado 5 uniti da un lato e l'altra è formata da un vertice di grado 5 unito da un lato con vertice di grado 6.

Queste configurazioni sono ottenute nel modo seguente. Un vertice di grado 5 può risultare solo positivo, alla fine di questa procedura, se almeno uno dei suoi confinanti non è principale, così che il vertice inevitabilmente deve

conservare carica positiva; il vertice o ha un confinante di grado 5 (prima configurazione) o ha un confinante di grado 6 (seconda configurazione). Un vertice di grado 6 parte senza carica quindi non può riceverne alcuna. Un vertice di grado 7 potrebbe diventare positivo solo se avesse almeno sei vertici 5 confinanti, mentre un vertice di grado 8 non può diventare positivo neanche se tutti i suoi confinanti sono di grado 5, (infatti $-2 + 8\frac{1}{5} < 0$). Pertanto le due configurazioni, non riducibili, formano un insieme inevitabile; quindi dato che questi calcoli si applicano a qualunque triangolazione, un elemento dell'insieme delle due configurazioni si troverà in ogni triangolazione così fatta.

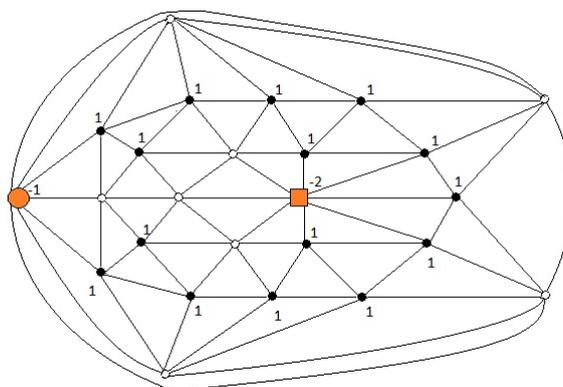


Figura 3.10: Questo esempio di triangolazione include un vertice di grado 8 (quadrato arancione) un vertice di grado 7 (tondino arancione), otto vertici di grado 6 (tondino bianco) e 15 vertici di grado 5 (tondini neri). I vertici di grado 2,3 e 4 sono riducibili, ovvero, non si possono presentare in una carta pentacromatica normale

3.4.1 La dimostrazione Haken-Appel

Nel 1970 Haken viene a sapere di nuovi metodi per migliorare le procedure di scaricamento, e comincia a pensare che questi miglioramenti lo porteranno alla dimostrazione. Tuttavia molte difficoltà apparivano insormontabili. In primo luogo, si credeva che configurazioni molto grandi (con anelli di confinanti con 18 vertici) dovessero essere incluse in qualunque insieme inevitabile

di configurazioni irriducibili e questo rendeva il problema al di là delle capacità dei calcolatori esistenti: infatti, applicando il programma di Durre, valutare la riducibilità di configurazioni di piccole dimensioni è semplice, ma il tempo necessario al calcolatore aumenta di un fattore quattro per ogni incremento di unità nelle dimensioni dell'anello. Un'altra difficoltà era non sapere quante configurazioni riducibili sarebbero state necessarie per formare un insieme inevitabile: si credeva infatti che il numero delle configurazioni fosse nell'ordine delle migliaia, ma in realtà non era fissato alcun limite superiore. Anche in questo caso, se l'insieme fosse tanto grande, la dimostrazione avrebbe dovuto aspettare che la tecnologia avanzasse.

Nonostante ciò, nel 1972 i matematici Haken ed Appel cominciarono comunque a lavorarci, anche se consapevoli che senza il calcolatore non sarebbero riusciti a trovare la dimostrazione. Per trovare un insieme inevitabile di configurazioni riducibili, il primo passo fu pertanto quello di determinare se esistesse o meno un insieme di questo tipo con configurazioni con anelli di dimensioni abbastanza piccole da permettere al calcolatore la dimostrazione della riducibilità in un tempo ragionevole. Allora attraverso delle osservazioni di Heesch, cominciarono a restringere il campo di ricerca. Heesch infatti notò che esistono alcune condizioni ("ostacoli alla riduzione") che coinvolgono disposizioni di vertici di una configurazione, sotto le quali non è mai stata trovata una configurazione riducibile. Heesch trovò tre ostacoli alla riduzione; se si volevano considerare configurazioni riducibili, si dovevano evitare questi tre ostacoli:

- un vertice ha quattro confinanti sull'anello della configurazione (a sinistra della figura), ovvero è adiacente a 4 vertici dell'anello;
- un vertice ha tre confinanti non consecutivi sull'anello della configurazione (al centro della figura);
- due vertici connessi l'uno all'altro ed a diversi vertici dell'anello, ma che hanno solo un altro confinante nella configurazione (a destra della figura).

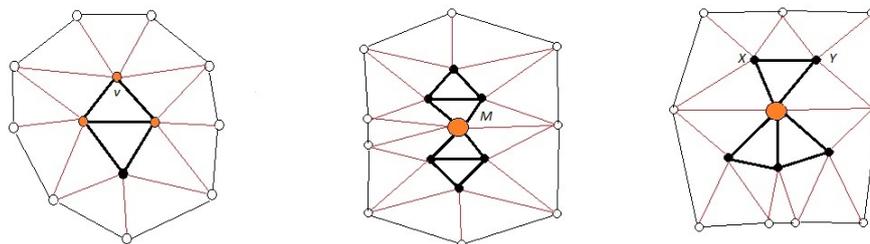


Figura 3.11: Qui le configurazioni sono le disposizioni di vertici uniti dalle linee nere più spesse. Le linee nere più sottili conettono i vertici dell'anello. Le linee rosse conettono i vertici della configurazione ai vertici dell'anello.

Anche se non è mai stato dimostrato che una configurazione riducibile con questi ostacoli non possa esistere, è alta la probabilità che configurazioni prive di ostacoli siano riducibili.

Haken ed Appel idearono una procedura di scaricamento per determinare i tipi di insiemi di configurazioni senza ostacoli che potevano verificarsi. Essi restrinsero il problema a configurazioni *geograficamente buone*, cioè a configurazioni che non contengono i primi due ostacoli. Nel 1972 stesero un programma per calcolatore per attuare la particolare procedura di scaricamento e cominciarono a ricavare non un insieme inevitabile, ma molte informazioni:

1. configurazioni geograficamente buone di dimensioni ragionevoli si trovavano vicino alla maggior parte dei vertici a carica finale positiva;
2. le configurazioni si ripetevano spesso;
3. la procedura forniva risultati troppo grandi per poter lavorarci sopra;
4. la procedura conteneva delle falle, perchè si trovavano vertici a carica finale positiva nelle cui vicinanze non era garantita l'esistenza di configurazioni geograficamente buone.

Apportando correzioni al programma e ad alcuni aspetti della procedura, i due matematici riuscirono a risolvere i vari problemi. Così, nel 1974, si

impegnarono sulla dimostrazione formale del fatto che la procedura avrebbe fornito un insieme inevitabile finito di configurazioni geograficamente buone. Il compito si rivelò arduo più del previsto, poichè era necessario formulare definizioni generali, dimostrare enunciati astratti, esaminare tutti i casi possibili. Ci volle più di un anno per riuscire ad ottenere una dimostrazione.

Dimostrato che la procedura funzionava, la applicarono al problema ristretto alle triangolazioni prive di coppie di vertici adiacenti di grado 5. L'insieme inevitabile di configurazioni geograficamente buone trovato era relativamente piccolo: 47 configurazioni e con anelli di dimensione mai superiori a 16 vertici. Nel 1975 decisero di modificare il programma in modo che la procedura determinasse non più configurazioni geograficamente buone, ma configurazioni che non contenevano ostacoli; si scoprì, con enorme sorpresa, che le configurazioni erano solamente raddoppiate.

A questo punto, si doveva sottoporre l'insieme inevitabile di configurazioni senza ostacoli ottenuto ad un test di riducibilità. In quello stesso anno si unì ai due matematici uno studente di scienze del calcolatore (oggi lo chiameremmo informatico), John Koch, che ideò un programma per valutare la riducibilità.

Arrivati a quel punto, era necessario migliorare la procedura di scaricamento. Nel dicembre del 1975 si scoprì che una regola della procedura di scaricamento ideata da Haken e Appel era troppo rigida ed andava resa più flessibile, in modo da ottenere nell'insieme inevitabile configurazioni riducibili più piccole rispetto a quelle delle procedure precedenti.

Nel 1976 con la nuova procedura di scaricamento si iniziò a costruire un insieme inevitabile di configurazioni riducibili. La versione finale aveva il vantaggio di autocorreggersi per assicurare la riducibilità delle configurazioni finali: infatti il programma era progettato in modo da identificare le zone critiche, cioè le configurazioni che apparissero resistenti ai tentativi di riduzione, e da modificarsi in modo da spostare le cariche positive in maniera indifferente. La procedura di scaricamento iniziava con il considerare ogni caso possibile in cui un vertice fosse necessariamente positivo; in ciascuno di

questi casi si esaminavano le vicinanze del vertice per trovare una configurazione senza ostacoli: se non se ne trovavano, si definivano critiche quelle vicinanze e serviva una modifica della procedura per evitare il problema; se invece si trovava una configurazione senza ostacoli, non avendo la certezza che si trattasse di una configurazione riducibile, si applicavano i programmi di riduzione; in quest'ultimo caso, se non si trovavano configurazioni senza ostacoli e riducibili, continuavano ad essere vicinanze critiche. Anche se la procedura di scaricamento può essere operata senza calcolatore, un rapido esame della riducibilità per determinare gli intorni critici prevede necessariamente il suo utilizzo.

Nel giugno del 1976, dopo 4 anni, l'analisi di 10000 intorni di vertici a carica positiva e l'analisi-macchina di oltre 2000 configurazioni, la costruzione dell'insieme era completata ed il teorema dei quattro colori era finalmente dimostrato.

3.4.2 Dialogo “uomo-macchina”

Haken ed Appel, come Kempe, hanno affrontato il problema costruendo un insieme inevitabile di configurazioni irriducibili, ma il loro insieme consisteva di circa 1500 figure complesse e non di sole quattro semplici configurazioni. Il metodo sviluppato dai due matematici per costruire l'insieme, perfezionata la procedura di scaricamento, fu possibile solo grazie ad un dialogo con il calcolatore. Il programma sorprese gli stessi autori quando cominciò ad agire come una macchina giocatrice di scacchi, in grado di autocorreggersi e adottare strategie complesse, basate sugli artifici imparati. In un certo senso il programma si dimostrò superiore non solo nelle parti meccaniche dell'esecuzione, ma anche in certe “aree intellettuali”.

Benché la procedura di scaricamento, senza le riduzioni, possa essere controllata con carta e matita impiegando un paio di mesi, è virtualmente impossibile verificare in questo modo i calcoli delle riduzioni. Questo aspetto della dimostrazione ha aperto nella comunità scientifica un dibattito sui po-

teri e limiti dei metodi dimostrativi e di calcolo.

Molti matematici rifiutano di considerare i calcolatori come strumenti matematici: ritengono che un'argomentazione sia debole quando non può essere controllata direttamente. Le dimostrazioni matematiche tradizionali sono ragionevolmente brevi e teoriche (più è potente la teoria, più è elegante la dimostrazione) ed è possibile controllarle a mano. Gli autori ritengono che, quando i calcoli sono di routine, come nel caso delle riduzioni, è invece più efficiente controllare per mezzo di una macchina. Dal loro punto di vista, la dimostrazione del teorema dei quattro colori suggerisce l'esistenza di limiti teorici: sono convinti che esistano teoremi di grande interesse matematico la cui dimostrazione è possibile solo grazie a metodi che fanno uso di calcolatori; anche se il teorema dei quattro colori non ha una rilevanza matematica di grande spessore, rappresenta l'esempio di come va affrontato una dimostrazione di questo genere.

Bibliografia

- [1] K.Appel, W.Haken, *Il problema dei quattro colori*, Le scienze n.113, 1978
- [2] R.Balakrishnan, K.Balakrishnan, *A textbook of graph theory*, Spinger, 1983..
- [3] D.Barnette, *Map coloring, polyhedra and four-color problem*, The Dolciani mathematical exposition, 1983.
- [4] C.Berge, *Graphs*, North-Holland, 1986.
- [5] M.Gionfriddo, *Appunti del corso di teoria dei grafi*, Università di Catania A.A. 2009/2010.
- [6] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley, 1969