

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

Alcune proprietà dei poliedri

Tesi di Laurea in Storia della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Salvatore Coen

Presentata da:
Carlotta Baccolini

Sessione invernale
Anno Accademico 2012/2013



Figura 1: Poliedri costruiti da Carlotta Baccolini alle medie
[, costruiti]

Indice

1	Introduzione	7
2	Poliedri	9
2.1	Cenni di storia	9
2.2	Definizione	12
3	Eulero	15
3.1	Formula di Eulero per i poliedri	15
3.2	Applicazioni	21
4	Cauchy	29
4.1	Teorema di rigidità di Cauchy	29
4.1.1	Lemmi	29
4.1.2	Teorema	34
5	Considerazioni didattiche	43
	Bibliografia	47

Capitolo 1

Introduzione

La formula di Eulero per i poliedri (o teorema di Eulero per i poliedri) afferma che se P è un poliedro dello spazio, semplicemente connesso e se rispettivamente V , S , F sono il numero dei vertici, degli spigoli e delle facce di P , allora vale $V - S + F = 2$.

La dimostrazione del risultato ed anche la sua formulazione hanno preso molto tempo. Stranamente non si hanno notizie certe della conoscenza o anche dell' intuizione del risultato nell' antichità. La stessa definizione di poliedro a lungo non è stata la stessa nei varii studi e questo ha complicato le dimostrazioni e la loro comprensione. Le dimostrazioni attualmente accettate sono molte, almeno una ventina, prova dell' importanza del risultato e del fatto che, in qualche modo, esso interseca varie branche della matematica (quali la topologia algebrica e la teoria dell' omologia, la teoria dei grafi, la teoria della distribuzione delle cariche elettriche,..).

Di più, il teorema ha avuto numerose interessanti conseguenze (quali il teorema di Pick che a sua volta è impiegato in certe dimostrazioni della formula di Eulero, il teorema di Sylvester Gallai, il teorema di rigidità di Cauchy). Ricordo che alla formula, di straordinaria eleganza, hanno dato contributi matematici di alto livello quali René Descartes, Leonard Euler, Joseph-Louis Lagrange, Augustin-Louis Cauchy, G. K. C. Von Staudt, Jaques Hadamard e più recentemente Peter Hilton, Gian Carlo Rota, William P. Thurston.

In queste pagine io darò una dimostrazione del teorema per i soli poliedri convessi, ora classica, quella basata sulla proiezione della superficie del poliedro su un piano e sulla successiva rimozione di facce, spigoli e vertici in modo da lasciare inalterata la somma $V - S + F$. Dimostrazione sostanzialmente dovuta a Cauchy; in realtà la dimostrazione dovuta ad Eulero non era completa come lo stesso Eulero sapeva.

Nel secondo capitolo illustro e dimostro, come conseguenza del teorema

di Eulero, il teorema di rigidità di Cauchy. Il risultato afferma che se due poliedri convessi A , B sono combinatorialmente equivalenti con le facce corrispondenti congruenti allora gli angoli tra corrispondenti coppie di facce adiacenti sono uguali e quindi i due poliedri sono congruenti. Per definire la equivalenza combinatoria può essere utile, come d'uso nel caso generale dei politopi, definire facce, spigoli vertici sempre come facce (generalizzate), rispettivamente coi nomi di 2-facce (facce di dimensione 2), 1-facce (di dimensione 1), 0-facce (facce di dimensione 0).

Ricordo che si dice allora che due poliedri A , B sono combinatorialmente equivalenti se è data una biezione che manda l'insieme delle facce di A nell'insieme delle facce di B e che preserva dimensione ed inclusione tra le facce. Per ottenere questo, uso il teorema “del braccio” di Cauchy-Steinitz. Si tratta di un teorema dovuto a Cauchy che generalizza la Proposizione 25 del primo libro degli Elementi di Euclide. In realtà la dimostrazione di Cauchy del teorema “del braccio” era incompleta ed è stata completata da Steinitz per il caso dei poligoni non convessi.

Capitolo 2

Poliedri

2.1 Cenni di storia

Lo studio dei poliedri è stato riscontrato in documenti provenienti da popolazioni pre-elleniche, egizi, babilonesi e cinesi, e dagli stessi greci. Anche se avveniva in modo più pratico che teorico e senza le conoscenze matematiche necessarie per ottenere delle risposte esaustive.

Il problema più affrontato in passato sui poliedri è il volume del tronco di piramide. Di questo problema si sono occupati egizi e babilonesi, mentre greci e cinesi hanno studiato il volume della piramide. I metodi risolutivi che ci sono pervenuti sono a volte simili fra loro, il che lascia pensare che gli uni conoscessero i risultati degli altri.

Per prima cosa è giusto enunciare la formula del tronco di piramide corretta e conosciuta tutt'oggi.

Preso un tronco di piramide di base qualsiasi il volume V è

$$\frac{1}{3}Bh + \frac{1}{3}\sqrt{BB'}h + \frac{1}{3}B'h$$

dove B è l'area della base maggiore, B' è l'area della base minore e h è l'altezza. $\sqrt{BB'}$ è la media proporzionale delle aree delle due basi del tronco. Un'interpretazione che si può dare a questa formula è :

Un tronco di piramide è equivalente alla somma di tre piramidi di altezza eguale al tronco aventi come basi le due basi di esso e la loro media geometrica.

La soluzione degli egizi, trovata nel papiro di Mosca tradotta con il linguaggio matematico moderno è questa:

Preso un tronco di piramide a base quadrata con il lato inferiore di lunghezza

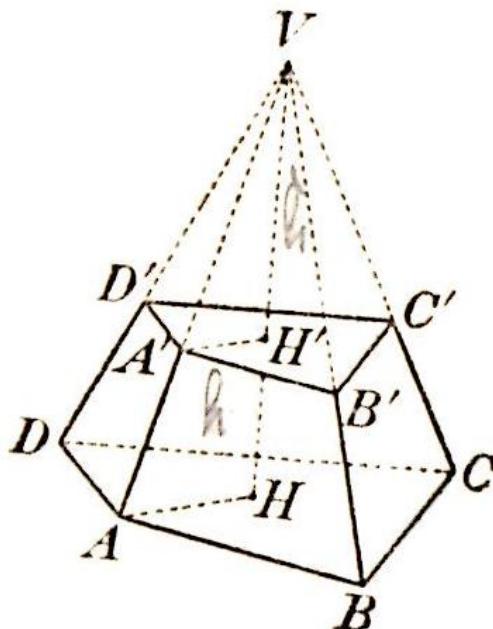


Figura 2.1: Tronco di piramide
[7, Enriques]

b, il lato superiore di lunghezza a e di altezza h il volume è:

$$V = \frac{h}{3}(b^2 + ab + a^2)$$

Non sappiamo con esattezza come gli egizi fossero arrivati a questa soluzione anche se la tesi più accreditata (o quanto meno accreditata in [9,]) è che avessero proceduto per equivalenza per equiscomposizione. Questo procedimento equivale il volume di poliedri conosciuti e li modifica fino a ottenere il poliedro cercato e il suo volume.

Se confrontiamo questa formula con quella da noi conosciuta vediamo che le due formule si equivalgono in caso di piramide a base quadrata, che è poi il caso esaminato dagli egizi.

I greci, per l'esattezza Democrito di Abdera si occuparono del calcolo del volume della piramide. Si crede che egli conoscesse già la formula egizia per via dei suoi viaggi e che l'abbia semplicemente dimostrata.

La dimostrazione risulta non essere rigorosa ma piuttosto intuitiva. Democrito studiando i prismi e le piramidi nota che un prisma è divisibile in tre

piramide che hanno egual base ed egual altezza, da cui suppone che il volume delle tre piramidi sia eguale e che perciò sia un terzo di quello del prisma.

Anche i cinesi studiarono il volume della piramide, l'unico documento in cui però viene riportata sono 'I commenti ai Nove Capitoli' di Liu Hui. In esso l'autore riporta l'algoritmo di calcolo senza dimostrarlo come era pratica presso egizi e babilonesi. La formula $V = \frac{(AB)H}{3}$, dove AB è l'area di base, quindi A e B sono i lati della piramide rettangolare, e H è l'altezza, è comunque corretta.

Contributi molto importanti nella storia dei poliedri sono dati da Platone e Archimede. Il primo in uno dei suoi dialoghi il "Timeo" costruisce 4 dei 5 solidi principali a partire dal triangolo isoscele e da quello scaleno e ne lega l'esistenza ai quattro elementi della natura.

Mentre il dodecaedro lo costruisce in un modo leggermente diverso e lo lega all'universo perchè ha 12 facce così come dodici sono le case dello zodiaco.

Nel '600 Keplero cercherà di dare una spiegazione, non molto ortodossa, delle scelte degli altri poliedri.

Il cubo rappresentava la terra perchè era stabile, l'ottaedro rappresentava l'aria perchè era il più mobile ed era diviso da un grande cerchio, il tetraedro era il fuoco perchè aveva il minor numero di lati e l'icosaedro era l'acqua perchè ne aveva il maggior numero. Come già detto l'analogia è molto fragile ma vista l'epoca di Platone in cui tutto doveva avere una spiegazione legata alla natura, ha senso.

Ad Archimede invece si attribuisce la scoperta di 13 poliedri, conosciuti oggi

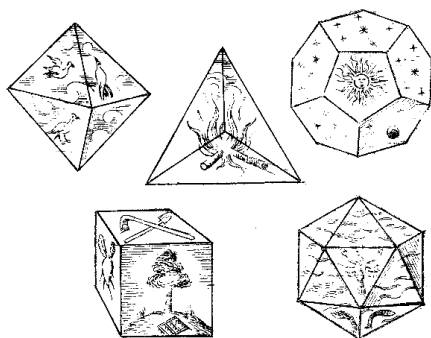


Figura 2.2: Rappresentazione dei poliedri regolari, o solidi platonici con disegnati dei simboli che richiamano i collegamenti alla natura fatti da Platone

[11, Hartshorne]

come poliedri archimedeei e che fanno parte dei poliedri semi regolari. Infatti pur essendo costituiti da soli poligoni regolari come i solidi platonici, non

sono poliedri regolari perchè le facce non sono tutte uguali, e gli angoli solidi anche se sono tutti uguali non sono regolari. Secondo Erone da Alessandria, che si è occupato di fare delle note introduttiva agli “Elementi” alcuni di questi solidi erano comunque già stati scoperti dallo stesso Platone che aveva studiato i poliedri piuttosto approfonditamente. Erone ha anche osservato che tutti i solidi archimedei sono ottenibili dai solidi platonici per troncamento. Come per ogni altro ambito della geometria e della matematica dobbiamo ad Euclide il lavoro di raccolta delle conoscenze greche, infatti egli nel libro XI dei suoi “Elementi” tratta anche i poliedri e ricostruisce matematicamente tutti i 5 solidi platonici. Euclide, non da però una definizione generale di solido regolare, definisce invece individualmente i cinque solidi platonici. [4, Cromwell]

2.2 Definizione

Il termine poliedro deriva dal greco ‘poly’ (molti) e ‘hedra’(sede). Si deve ad Archimede la consuetudine di indicare le facce di un solido con il termine ‘hedra’.

Per avere una definizione matematica precisa dobbiamo aspettare, però, molti secoli e aggiungere il concetto di superficie poliedrale.

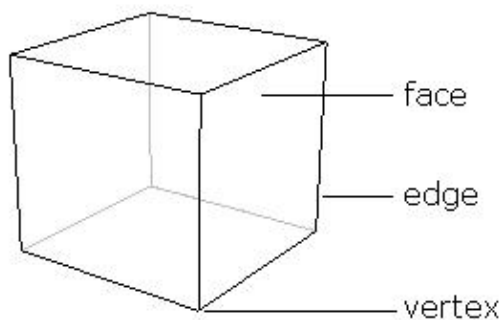


Figura 2.3: Un cubo con in evidenza facce, spigoli e vertici.
[, Immagine presa dal sito plus.math.org]

Definizione 2.2.1. Un sottoinsieme connesso S di \mathbf{R}^3 è una *superficie poliedrale* se è l’unione di un numero finito di poligoni P_j nello spazio (poligoni che si diranno *facce* del poliedro) in modo tale che risultino soddisfatte le seguenti condizioni:

1. l'intersezione di due facce, se non è vuota, è o uno spigolo o un vertice comune alle due facce (e che chiameremo *spigolo* o *vertice* del poliedro);
2. ogni spigolo appartiene ad esattamente due facce;
3. due facce adiacenti (cioè tali che la loro intersezione sia uno spigolo) non sono complanari;
4. comunque si fissi un vertice v , e due facce f e g che contengono v , esiste una catena di facce f_1, \dots, f_n , tutte contenenti v , e tali che $f = f_1$, $g = f_n$, e f_i sia adiacente a f_{i+1} , per ogni $i = 1, \dots, n-1$.

Definizione 2.2.2. Si dice *poliedro* la regione di spazio delimitata da una superficie poliedrale.

Definizione 2.2.3. Quando due facce si incontrano lungo uno spigolo si forma un *diedro*. L'unione di tutte le facce in un vertice crea un *angolo solido* o *angoloide*.

Definizione 2.2.4. Un poliedro si dice *convesso* se per ogni due punti della superficie del poliedro il segmento tra i due punti è interamente contenuto nella figura solida limitata dal poliedro.

Possiamo ora dare la definizione di poliedro regolare:

Definizione 2.2.5. Un poliedro convesso si dice *regolare* se le sue facce sono tutte uguali a poligoni regolari e se ha lo stesso numero di facce che si incontrano ad ogni vertice.

Capitolo 3

Eulero

3.1 Formula di Eulero per i poliedri

La comunità matematica odierna ritiene che la formula di Eulero per i poliedri sia fra i risultati più belli che egli abbia ottenuto.

Questa formula, che lega fra loro il numero di vertici, facce e spigoli di un poliedro, fu enunciata per la prima volta da Eulero in una lettera che egli mandò a Goldbach nel 1750, dove egli si stupisce anche di essere stato il primo a notare tale relazione.

Infatti Eulero sapeva di non essere il primo a studiare a fondo i poliedri, che erano molto ammirati fin dall'antica Grecia.

Sia Kepler(1571-1630) che Descartes(1596-1650), due dei più grandi matematici precedenti ad Eulero, studiarono approfonditamente i poliedri. Tanto che Kepler li usò nella prima formulazione del modello del sistema solare e Descartes arrivò ad un passo dalla formula senza, però, riuscire a formalizzarla.

Eulero studia approfonditamente questi argomenti tanto da trattarli in varie lettere e esposizioni pubbliche fino a riportarli per intero, con anche la dimostrazione, in 'Elementa doctrinae solidorum'.

Il primo documento in cui li tratta, e che abbiamo già nominato, è la lettera del 1750 a Goldbach dove egli formulò il teorema come segue:

'In ogni solido chiuso da facce piane la somma del numero delle facce e del numero degli angoli solidi eccede di due il numero degli spigoli, $H+S=A+2$ ' dove dove H sono le facce, in latino 'hedra', A gli spigoli, in latino 'acies' e S i vertici che Eulero chiamava angoli solidi.

Teorema 3.1.1. *Prendiamo un poliedro convesso con v numero dei vertici,*

s numero degli spigoli, e *f* numero delle facce. Allora

$$v - s + f = 2$$

Il numero $v - e + f$ viene chiamato *caratteristica* di Eulero di una superficie.

Può inoltre essere applicato a tutti i campi della geometria, anzi di più, su esso si fonda la topologia.

Nella già più volte richiamata lettera a Goldbach Eulero afferma anche di non essere ancora riuscito ad ottenere una dimostrazione soddisfacente della formula.

Eulero esporrà questa formula all'Accademia di Berlino nel novembre del 1750.

Un altro importante documento è un saggio dell'anno seguente dove Eulero tratta ancora di questa formula riportandone per la prima volta una dimostrazione.

Tale dimostrazione non è però molto corretta e matematicamente rigorosa il che porta vari matematici di epoche successive a lavorare alla dimostrazione di questa formula.

Ad oggi esistono talmente tante dimostrazioni (ne conosciamo almeno 17) di questa formula che quella di Eulero è stata quasi dimenticata. Di seguito riportiamo la dimostrazione data da Cauchy che è abbastanza chiara.

Dimostrazione. Per prima cosa possiamo osservare che per dimostrare il teorema basta considerare la superficie poliedrale ignorando il poliedro, poichè la regione di spazio contenuta in essa non interferisce con il numero di facce, vertici o spigoli.

Per dimostrare il teorema costruiamo un omeomorfismo dal poliedro ad una parte del piano che mandi i vertici in punti del piano, gli spigoli in archi e le facce in figure piane in modo da ottenere una figura piana. Per avere un'idea di una particolare deformazione di questo tipo, in modo da visualizzare la deformazione, ragioniamo come segue.

Poichè il poliedro è convesso, se dal punto centrale di una faccia possiamo vedere tutte le altre facce senza sovrapposizioni. Se si sposta di poco lo sguardo, si è in grado di vedere gli spigoli delle facce attraverso cui si sta guardando. Ora proiettiamo quest'immagine su un piano.

Questo distorce angoli e distanze ma gli spigoli restano dritti, così si ottiene nel piano una figura composta di vari punti e dai segmenti che li connettono fra loro e le facce del poliedro originale corrispondono ai poligoni di questa figura, più una faccia (quella da cui stiamo guardando il poliedro).

Dobbiamo ricordarci della faccia tolta per ottenere il risultato corretto, infatti alla fine della dimostrazione risulterà una faccia mancante, quella che



Figura 3.1: Vediamo la dimostrazione passo passo applicandola ad un cubo. Primo passo togliamo una faccia

[3, Courant]

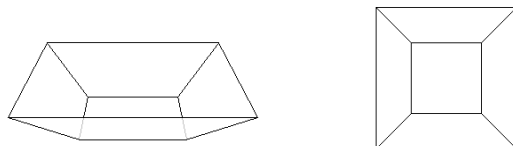


Figura 3.2: Secondo passo della dimostrazione deformato il poliedro su un piano
[, plus.math.org]

abbiamo tolto.

Ora prendiamo una faccia non triangolare e tracciamo una delle sue diagonali nella figura tridimensionale per poi applicare l'omeomorfismo per deformarla nella figura piana, facendo questo abbiamo aggiunto una faccia triangolare e uno spigolo. Questo passaggio non altera la formula di Eulero perchè $v - (s + 1) + (f + 1) = v - s - 1 + f + 1 = v - s + f$, le unità si elidono fra loro.

Continuiamo a tracciare diagonali fino ad ottenere una figura piana composta di soli triangoli nella figura tridimensionale e di triangoli deformati in quella piana. Questo senza mai rischiare di modificare la formula.

Ora alcuni di questi triangoli avranno un lato esterno, se noi lo togliamo priveremo la figura di una faccia e di uno spigolo.

Questo però senza modificare la formula di Eulero: $v - (s - 1) + (f - 1) = v - s + 1 + f - 1 = v - s + f$.

Ora passiamo a rimuovere i triangoli che hanno due lati esterni, in questo caso togliamo una faccia, un vertice e uno spigolo ma come sempre non modifichiamo la formula $(v - 1) - (s - 2) + (f - 1) = v - 1 - s + 2 + f - 1 = v - s + f$.

Ripetiamo queste operazioni fino ad ottenere un'unica faccia triangolare.

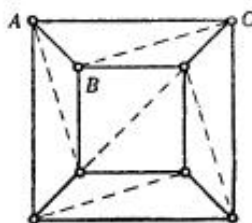


Figura 3.3: Terzo passo della dimostrazione traccio le diagonali [3, Courant]

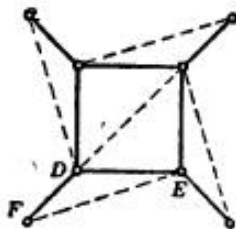


Figura 3.4: Quarto passo della dimostrazione tolgo i triangoli con dei lati esterni [3, Courant]

Per fare questo dobbiamo però usare un po' di accortezza, nel caso ci siano facce con un bordo esterni e facce con due bordi esterni dobbiamo prima lavorare sulle seconde poi sulle prime perchè altrimenti potremmo rischiare di spezzare la figura. Un'occhio di riguardo ci vuole poi ad ogni passaggio nel compiere un solo passo alla volta e in una sola faccia per non rischiare di complicare la situazione o commettere errori.

Ad esempio quando ci si trova nel caso della figura 2.6 si possono commettere alcuni errori se si rimuovono due segmenti alla volta si può arrivare alla situazione della figura 2.7 da dove poi non sappiamo uscire.

Una volta ottenuta una sola faccia triangolare possiamo provare la formula:

$$v - s + f = 3 - 3 + 1 = 1$$

Non dobbiamo stupirci del risultato perchè abbiamo tolto una faccia in partenza, ora se aumentiamo il numero di facce dell'unità tolta all'inizio, la formula è verificata $3 - 3 + 2 = 2$. \square

A questo punto però sorgono due domande. Siamo sicuri che alla fine non possano risultare due triangoli distinti? E cosa facciamo se ci troviamo nel

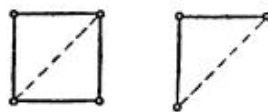


Figura 3.5: Quinto passo della dimostrazione ripetiamo i passi precedenti per ottenere un triangolo

[3, Courant]

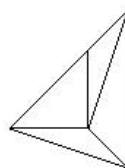


Figura 3.6: Esempio di possibili errori
[, plus.math.org]

primo dei due casi della figura 2.7?

Usando solo queste due applicazioni non possono risultare due triangoli distinti perchè la figura da cui partiamo è connessa e noi eliminiamo solo lati esterni. Ora se per assurdo noi togliendo un lato sconnettiamo la figura vuol dire che era l'unico lato in comune fra due triangoli, perchè la figura è composta interamente di triangoli.

Ma questo è assurdo perchè noi togliamo solo lati esterni, quindi non possiamo aver tolto un lato in comune fra due triangoli che non è esterno.

Il secondo problema si potrebbe presentare ma se togliamo un triangolo che sia collegato alla nostra figura solo da un vertice non modifichiamo la formula di Eulero, perchè togliamo 3 spigoli, 1 faccia e 2 vertici $(v - 2) - (s - 3) + (f - 1) = v - 2 - s + 3 + f - 1 = v - s + f$.

I teoremi enunciati di seguito, senza le relative dimostrazioni, possono essere dimostrati usando la formula di Eulero o essere usati per dimostrare tale formula.

Non si incappa in un circolo perchè esistono dimostrazioni di questi teoremi che non usano la formula.

Teorema 3.1.2. (Pick) *L'area di un qualsiasi poligono (non necessariamente convesso) $Q \subseteq \mathbf{R}^2$ con vertici interi è data da*

$$A(Q) = n_{int} + \frac{1}{2}n_{bd} - 1,$$

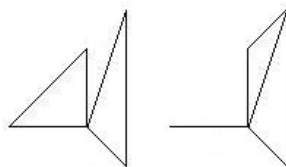


Figura 3.7: Esempio di possibili errori
[, plus.math.org]

dove n_{int} e n_{bd} sono i numeri dei punti interi rispettivamente nell'interno e sul bordo di Q .

Immaginando la figura in un reticolato, ad esempio disegnandola su carta millimetrata il teorema diviene quasi immediato visto che possiamo scomporre la figura in elementi che già conosciamo

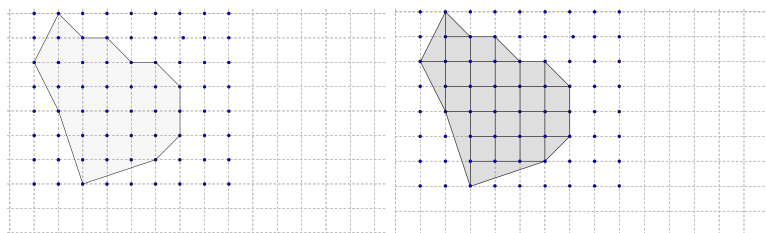


Figura 3.8: Partendo dalla prima figura e considerando con ogni punto colorato è un punto intero e tracciando così tutti i quadrati e i triangoli di cui è composta la figura si può facilmente calcolarne l'area perchè ogni quadratino 1×1 ha area 1, due triangolini 1×1 hanno area 1 e i due triangoli 3×1 insieme sono come tre quadrati 1×1 e quindi hanno area 3, funziona uguale per i due triangoli 2×1 con i 2 al posto dei 3. Facendo le dovute somme si ottiene l'area come teorizzata da Pick

[, Immagine disegnata da Carlotta Baccolini]

Teorema 3.1.3. (Sylvester-Gallai) Dato un insieme di $n \geq 3$ punti nel piano, non tutti allineati, vi è sempre una retta che contiene esattamente due dei punti.

Di questo teorema esistono anche enunciati più generali come:

Teorema 3.1.4. (Sylvester-Gallai) Sia P un insieme di $n \geq 3$ punti nel piano, non tutti allineati. Allora l'insieme L delle rette che passano per almeno due punti contiene almeno n rette

Le dimostrazioni di questi teoremi si possono trovare nel libro *Proofs from THE BOOK*.

L'ipotesi di convessità in questo teorema è forte e non necessaria. Per esempio, il risultato rimane verificato anche per un icosaedro perforato che però non è convesso. L'ipotesi corretta per questo teorema è che il poliedro sia semplicemente connesso.

Un icosaedro perforato è un icosaedro a cui viene rimossa una piramide

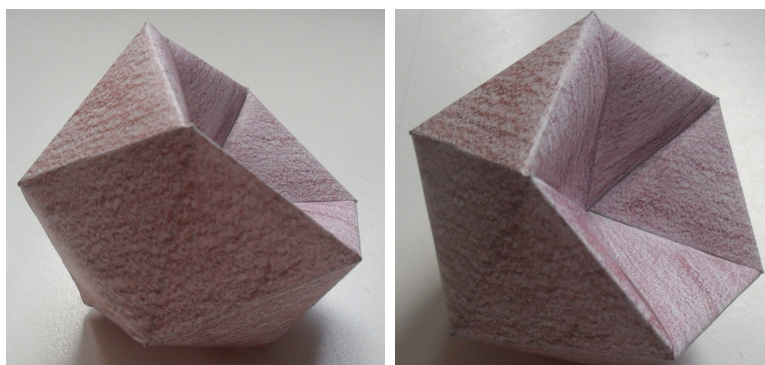


Figura 3.9: Immagini di icosaedro perforato
[, Modellino di carta costruito da Carlotta Baccolini]

pentagonale, cioè un vertice e tutte le 5 facce che vi si incontrano, per poi rimetterla con il vertice riflesso verso l'interno.

3.2 Applicazioni

Dalla formula di Eulero si traggono molte conseguenze considerate classiche. La prima conseguenza è che servendosi della formula di Eulero possiamo facilmente dimostrare che *non esistono più di cinque poliedri regolari convessi*.

Dimostrazione. Sia dato poliedro con f facce, ognuna delle quali è un poligono regolare con n lati e nel quale, ad ogni vertice, si incontrano r spigoli. In ogni spigolo si incontrano due facce perciò:

$$nf = 2s$$

cioè il numero delle facce per il numero dei poligoni è uguale al doppio degli spigoli. La stessa cosa si può fare per i vertici perchè ogni spigolo forma due

vertici, quindi $rv = 2s$. Da qui si ottiene che $f = \frac{2s}{n}$ e $v = \frac{2s}{r}$. sostituendoli nella formula di Eulero otteniamo

$$\frac{2s}{r} + \frac{2s}{n} - s = 2$$

e, dividendo per $2s$, si arriva a

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} = \frac{1}{s}$$

n ed r devono essere maggiori o uguali a tre, poiché un poligono deve avere almeno tre lati ed almeno tre lati devono incontrarsi nel vertice di ciascuno degli angoloidi di un poliedro.

Ma n ed r non possono essere entrambi maggiori di tre perché in tal caso il primo membro dell'equazione sarebbe negativo o uguale a 0 mentre $\frac{1}{s}$ è certamente positivo, quindi almeno uno fra n e r deve essere tre.

Supponiamo $n = 3$, si ha

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{r} - \frac{1}{2} = \frac{1}{s} \Rightarrow \frac{1}{r} - \frac{1}{6} = \frac{1}{s}$$

e quindi r può essere uguale solo a 3, 4 o 5, casi che corrispondono rispettivamente al tetraedro, all'ottaedro e all'icosaedro.

L'esistenza di tali poliedri si può verificare anche calcolando l'ampiezza degli angoloidi che in un poliedro non può mai raggiungere o superare 360° . Il tetraedro ha ampiezza $180^\circ = 3 \times 60^\circ$, l'ottaedro $240^\circ = 4 \times 60^\circ$ e l'icosaedro $300^\circ = 5 \times 60^\circ$. Sono tutte inferiori a 360° (60° è l'ampiezza dell'angolo di un triangolo equilatero).

Allo stesso modo, se $r = 3$ n può assumere solo i valori 3, 4 o 5, per lo stesso motivo di prima. 3 può essere scartato perché lo abbiamo considerato nel caso precedente, corrisponde al tetraedro; restano i casi 4 e 5, che corrispondono al cubo e al dodecaedro.

Anche qui l'ampiezza degli angoloidi dimostra l'esattezza del risultato ottenuto. Nel cubo questa ampiezza è $270^\circ = 3 \times 90^\circ$ mentre nel dodecaedro è $324^\circ = 3 \times 108^\circ$. Non esistono altri casi possibili e quindi i poliedri regolari sono solo cinque. \square

Questi cinque poliedri (il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro) sono conosciuti fin dall'antica grecia infatti oggi sono chiamati anche solidi platonici.

Usando il calcolo dell'ampiezza degli angoloidi abbiamo una prova che *non può esistere un poliedro di soli esagoni*, perché dovrebbe avere almeno tre facce ad ogni vertice, ma $3 \times 120^\circ = 360^\circ$, 120° è l'ampiezza dell'angolo

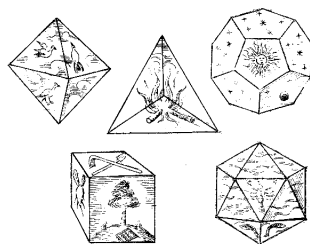


Figura 3.10: immagine degli unici cinque solidi regolari o solidi platonici
[11, Hartshorne]

di un esagono regolare.

Questo si può dimostrare anche applicando la formula di Eulero, infatti, in un poliedro ogni vertice è comune ad almeno 3 facce ed ogni spigolo è sempre comune a 2 facce.

Ora, poiché qualsiasi esagono ha 6 lati e 6 vertici, un poliedro formato di soli esagoni regolari deve avere $\frac{6}{3}$ vertici per faccia e $\frac{6}{2}$ spigoli per faccia. Dunque, se f è il numero di facce, i numeri di spigoli s devono essere uguali a $3f$ ed il numero di vertici v a $2f$.

Si ha allora: $f - s + v = f - 3f + 2f = 0$ e la formula di Eulero non è verificata. Per ovviare a questo problema invece che usare solo esagoni per formare il poliedro, sostituiamo alcuni di essi con dei pentagoni.

Questo poliedro esiste perchè il numero di spigoli e di vertici diminuisce:



Figura 3.11: Possiamo notare come il pallone da calcio sia un icosaedro troncato, cioè affettato in corrispondenza dei 12 vertici a cinque facce
[, Immagine presa dal sito wikipedia]

per ogni pentagono aggiunto, si ha $\frac{6-5}{2}$ spigoli, cioè spigolo in meno ogni due pentagoni e $\frac{6-5}{3}$ vertici, cioè un terzo di vertice in meno; $f - s + v$ aumenta

dunque ogni volta della differenza, cioè di un sesto.

Affinché la formula di Eulero per i poliedri sia rispettata, occorre che $f - s + v$ inizialmente uguale a 0, diventi uguale a 2. Quindi ci basta sostituire 12 esagoni con altrettanti pentagoni per ottenere un poliedro. Il numero dei vertici v è allora di $2f - 4$ e quello degli spigoli s di $3f - 6$.

Vedendo le cose da questo punto di vista il dodecaedro diventa un caso estremo dove non resta più nessun esagono.

Di questo tipo di poliedri se ne posso trovare molti esempi quotidiani e naturali. L'esempio più semplice a cui si possa pensare è il pallone da calcio vecchio stampo dove la superficie era ricoperta da 20 esagoni e 12 pentagoni.

Un altro esempio di ciò è il fullerene, una classe di molecole del carbonio, le

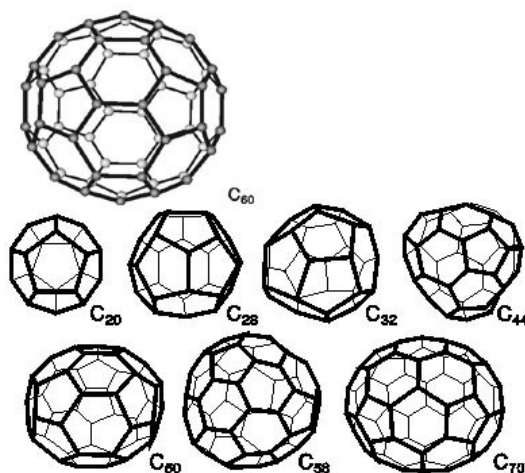


Figura 3.12: Alcuni esempi di fullereni. Partendo dal carbonio 20, che forma un dodecaedro regolare, e aumentando le molecole di carbonio aumentano gli esagoni mentre i pentagoni restano 12

[, Immagine presa dal sito wikipedia]

cui molecole si dispongono poliedricamente formando facce esagonali e pentagonali.

Una particolare conseguenza della formula di Eulero è che limita molto l'esistenza dei poliedri in base alle facce, ai vertici e agli spigoli.

La figura 3.16 mostra tutti i possibili poliedri in un grafico che ha come ordinata i vertici e come ascissa le facce, le rette tratteggiate indicano il valore degli spigoli.

Ad ogni pallino del grafico corrisponde un poliedro, nelle zone d'ombra non ci

sono poliedri, come possiamo notare questo limitata molto i possibili poliedri che si possono creare.

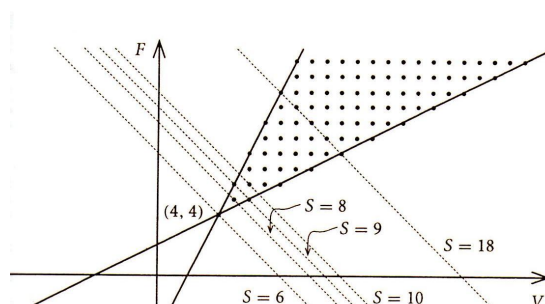


Figura 3.13: Grafico dei poliedri esistenti secondo la formula di Eulero [5, Dedò]

Tutti questi poliedri si possono costruire attraverso il procedimento di *troncamento* o quello di *aumento*.

Il primo procedimento equivale ad affettare un poliedro conosciuto, ad esempio la piramide, in prossimità di un angolo aumentando così di 1 il numero delle facce e di 2 quello degli angoli del solido.

Il secondo consiste nel erigere una piramide su una faccia del poliedro aumentandone così di 2 il numero delle facce e di 1 quello dei vertici.

Alla luce della formula di Eulero il teorema di Cartesio, sotto riportato, può essere visto come un suo corollario seppur precedente in linea temporale. Cartesio, partendo dalla relazione fra angoli di un poligono nella geometria piana ha formulato un teorema per gli angoli solidi di un poliedro.

Prima del teorema però ci serve una definizione.

Definizione 3.2.1. Definiamo *difetto* δ_V del vertice V come 2π meno la somma dell'ampiezza degli angoli delle facce che compongono V

Corollario 3.2.1. *In un poliedro convesso la somma dei difetti dei vertici è uguale a quattro angoli retti.*

Dimostrazione.

$$\sum_V \delta_V = \sum_V (2\pi - \sum(\text{angoli delle facce})) = 2\pi v - \sum(\text{angoli delle facce})$$

dove v è il numero dei vertici e δ_V è il difetto del vertice V . Ora la somma degli angoli delle facce dei poligoni di n lati è $(n-2)\pi$. Per ogni n prendiamo f_n come il numero di facce aventi n lati. Il numero totale delle facce è $f = \sum f_n$, e il numero degli spigoli e è $\frac{1}{2} \sum n f_n$. Combinando queste osservazioni abbiamo:

$$\sum_V \delta_V = 2\pi v - \sum_n (n-2)\pi f_n = 2\pi v - \pi \sum_n n f_n + 2\pi \sum_n f_n = 2\pi(v-e+f) = 4\pi$$

□



E L E M E N T A

DOCTRINAE SOLIDORVM.

AVCT. L. EVLERO.

§. 1.

Quemadmodum Geometria in contemplatione figurarum planarum versatur, et quae de lineis et angulis in ea traduntur, ad eius prolegomena referenda sunt; ita Stereometria in contemplatione solidorum occupatur, et quae ibi de inclinatione planorum angulisque solidis explicantur, eius quoque tanquam prolegomena sunt spectanda.

§. 2. Solidum est extensum trium dimensionum vndique terminatum, perinde atque superficies definitur per extensum duarum tantum dimensionum. Duae autem solidorum constituendae sunt classes, prout eorum ambitus figuris siue planis, siue conuexis concauisue includitur.

§. 3. Hic eam tantum classem solidorum, quae vndique figuris planis includuntur, contemplari constitui; perinde atque Geometria a figuris rectilineis exorditur; et quemadmodum figurarum rectilinearum in genere plures insignes proprietates sunt annotatae; ita solidorum huius classis non nullas proprietates generales eruere conabor.

§. 4. Quanquam autem Stereometria iam satis diligenter elaborata videtur, in eaque praeter theoriam in-

O 3

clina-

DOCTRINAE SOLIDORVM. 119

hedrarum ponatur $= H$, neque hic numerus H neque numerus S maior esse potest quam $\frac{2}{3} A$.

PROPOSITIO IV.

§. 33. *In omni solido hedris planis incluso aggregatum ex numero angulorum solidorum et ex numero hedrarum binario excedit numerum acierum.*

DEMONSTRATIO.

Scilicet si ponatur vt haecenus :

numerus angulorum solidorum $= S$
 numerus acierum - - - $= A$
 numerus hedrarum - - - $= H$
 demonstrandum est, esse $S + H = A + 2$.

Fateri equidem cogor, me huius theorematis demonstrationem firmam adhuc eruere non potuisse; interim tamen eius veritas pro omnibus solidorum generibus, ad quae examinabitur, non difficulter agnosceretur, ita vt sequens inductio vicem demonstrationis gerere queat.

1. Consideremus ergo primo pyramidem quamcum-
 que super basi $A B C D E F G$ quocumque laterum con-
 stitutam et in apicem H desinentem. Sit numerus la-
 terum basis $= m$, totidemque triangula a basi ad apicem
 vsque assurgent. Includitur ergo haec pyramis $m + 1$
 hedris, quarum m sunt triangula, vna vero polygonum
 m angulorum seu laterum. Erit itaque numerus hedra-
 rum

Figura 3.15: Estratto di 'Elementa doctrinae solidorum' dove possiamo vedere il testo originale in latino

[6, testo originale]

Capitolo 4

Cauchy

4.1 Teorema di rigidità di Cauchy

Questo teorema è stato enunciato e dimostrato nel libro “Sur les polygones et les polyhèdres” del 1813.

Il problema a cui questo teorema vuole dare una soluzione è semplice: Se ho due poliedri convessi con le facce congruenti, sono fra loro congruenti?

Questo problema non era del tutto nuovo per i matematici tanto che Cauchy trovò una prima formulazione di una soluzione di questo problema negli Elementi di Euclide, e lui stesso si basò per la dimostrazione su un precedente lavoro di Lagrange.

La soluzione di Cauchy propone di spostare l'attenzione sul comportamento degli angoloidi, se anch'essi sono congruenti allora i poliedri sono congruenti. Prima di enunciare il teorema di Cauchy, però, è doveroso riportare due lemmi che ne aiutano la dimostrazione. Il primo è detto lemma di Steinitz perchè, seppur enunciato da Cauchy fu corretto da Steinitz cento anni dopo.

4.1.1 Lemmi

Lemma 4.1.1. (*Steinitz*)

Supponiamo di avere due poligoni convessi A_1, A_2, \dots, A_n e B_1, B_2, \dots, B_n con tutti i lati ordinatamente uguali eccetto possibilmente l'ultimo. Supponiamo anche che gli angoli del primo poligono siano ordinatamente minori o uguali a quelli del secondo con l'ultimo strettamente diverso. Allora $A_1A_n < B_1B_n$

Dimostrazione. Dimostrazione di Cauchy.

Il lemma è evidente per i triangoli (prop 24 libro I degli ‘Elementi’ di Euclide),

perchè se nel triangolo ABC i lati AB e BC restano invariati ma l'angolo B aumenta, allora la lunghezza del lato AC aumenta. Analogamente, se diminuiamo l'angolo B senza cambiare le lunghezze di AB e BC diminuirà anche la lunghezza di AC .

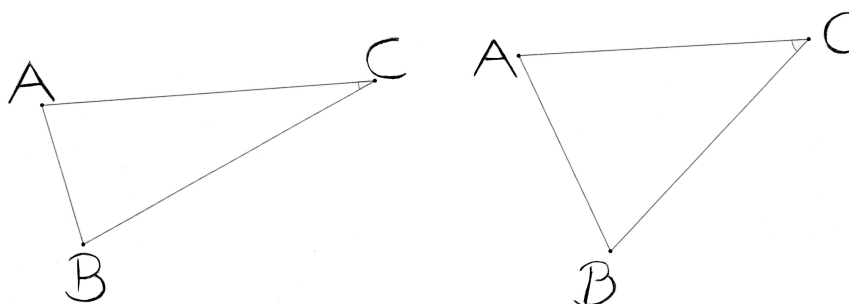


Figura 4.1: Dimostrazione figurata relativa al caso triangolare
[, costruiti]

Ora si consideri il poligono A_1, A_2, \dots, A_n con $n \geq 4$.
Supponiamo che la lunghezza di tutti i lati tranne $A_n A_1$ rimanga costante, e

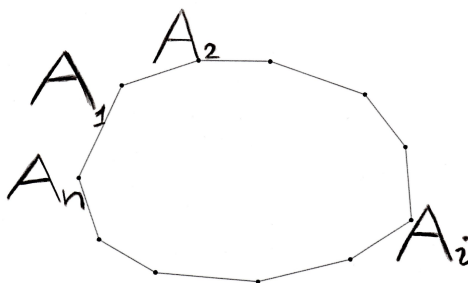


Figura 4.2: Poligono A_1, A_2, \dots, A_n
[, costruiti]

che solo un angolo cambi, esclusi gli angoli di vertice A_1 e A_n . In particolare, supponiamo che l'angolo di vertice A_i aumenti.

Formiamo un triangolo $A_1 A_i A_n$ disegnando i segmenti $A_1 A_i$ e $A_i A_n$.

I poligoni A_1, A_2, \dots, A_i e A_i, A_{i+1}, \dots, A_n non cambiano se A_i aumenta perchè i segmenti che abbiamo appena costruito non cambiano se l'angolo fra loro cresce.

In particolare, le lunghezze dei segmenti $A_1 A_i$ e $A_i A_n$ e gli angoli a e b non

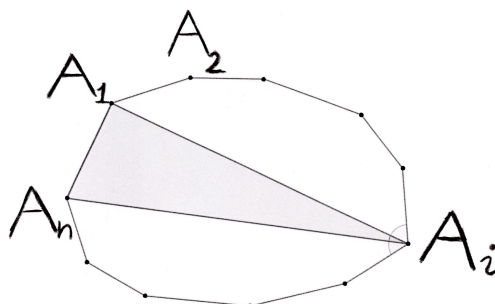


Figura 4.3: Poligono con i segmenti A_1A_i e A_iA_n e l'angolo A_i in evidenza
[, costruiti]

cambiano. Ma angolo $c = A_{i-1}A_iA_{i+1} - a - b$, perchè l'angolo aumenta e a e b sono costanti.

Il triangolo $A_1A_iA_n$ ha due dei suoi lati, A_1A_i e A_iA_n , costanti e l'angolo c che cresce. Pertanto, per il caso di triangoli, lato A_1A_n deve aumentare.

Supponiamo ora che ad aumentare siano più di un angolo del poligono, mentre gli altri rimangono costanti. Allora possiamo aumentare la angolazioni una alla volta, come segue: Cominciamo con l'aumentare l'angolo al vertice A_i , mantenendo tutte gli altri costanti, questo porterò A_iA_n ad aumentare. Ora aumentiamo l'angolo al vertice A_k , sempre mantenendo gli altri angoli costanti. Il lato A_iA_n deve ancora aumentare.

Ripetiamo in modo simile con tutti gli angoli che vogliamo aumentare.

Così, dopo che alcuni o tutti gli angoli dei vertici A_2, \dots, A_{n-1} sono aumentati, mentre gli altri sono rimasti costanti, il lato A_iA_n deve essere aumentato. Con un argomento simile, se alcuni o tutti questi angoli diminuiscono il lato A_iA_n diminuisce. \square

L'errore in questa dimostrazione è che aumentando, o diminuendo, l'ampiezza di più angoli contemporaneamente si corre il rischio di alterare la convessità del poligono.

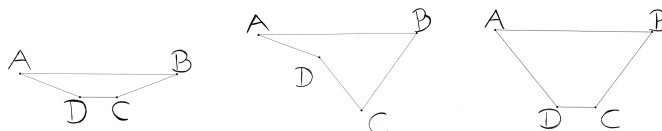


Figura 4.4: Dimostrazione figurata che il poligono, in uno degli stadi intermedi della trasformazione, può perdere la sua convessità
[, costruiti]

Dimostrazione. Dimostrazione corretta di Steinitz.

Procediamo per induzione su n .

Per $n = 3$ il lemma è vero per la prop 24 del libro I degli ‘Elementi’ di Euclide. Ora se supponiamo $n \geq 4$ possiamo avere due situazioni diverse: o $\angle A_i = \angle B_i$ per qualche i oppure $\angle A_i \neq \angle B_i$ per ogni i . Se ci troviamo nel primo caso il triangolo $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ è congruente al triangolo $B_{i-1}B_iB_{i+1}$, quindi $A_{i-1}A_{i+1} = B_{i-1}B_{i+1}$.

Ora possiamo applicare l’ipotesi induttiva perchè il poligono ha $n - 1$ lati.

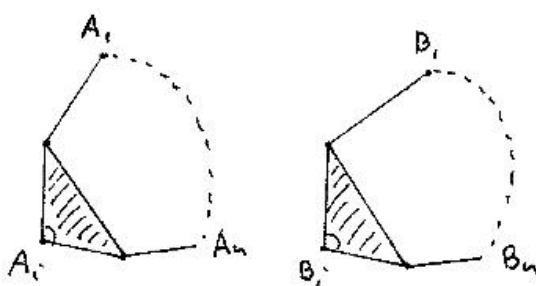


Figura 4.5: Immagine dei triangoli congruenti dentro il poligono
[11, Harthshorne]

Se invece così non fosse e ci trovassimo nel secondo caso dobbiamo operare in modo diverso. Cominciamo col produrre un nuovo poligono sostituendo A_n con A_n^* in modo che $\angle A_{n-1}$ sia l’angolo più grande possibile tale che $\angle A_{n-1} \leq \angle B_{n-1}$. Assicurandosi però che il poligono rimanga convesso.

Questo passaggio è ciò che mancava alla dimostrazione di Cauchy, Steinitz si assicura che il poligono non perda la convessità.

Questo procedimento mantiene tutti le lunghezze degli altri spigoli e gli altri angoli come nel poliedro iniziale.

Se questo può essere davvero fatto allora abbiamo $A_1A_n < A_1A_n^* \leq B_1B_n$, ora sfruttando il caso $n = 3$ diminuiamo di uno il numero di lati e perciò possiamo usare l’induzione.

Se non riusciamo a trovare un punto A_n^* tale che $\angle A_{n-1} \leq \angle B_{n-1}$ e che mantenga la convessità del poligono allora applichiamo un movimento tale da ottenere che $A_1A_n^* > A_1A_n$ fermiamo il movimento in modo che A_2, A_1, A_n^* siano allineati. Questo non compromette la convessità, dimostrazione di questo fatto si può trovare in ‘On Cauchy’s lemma concerning convex poly-

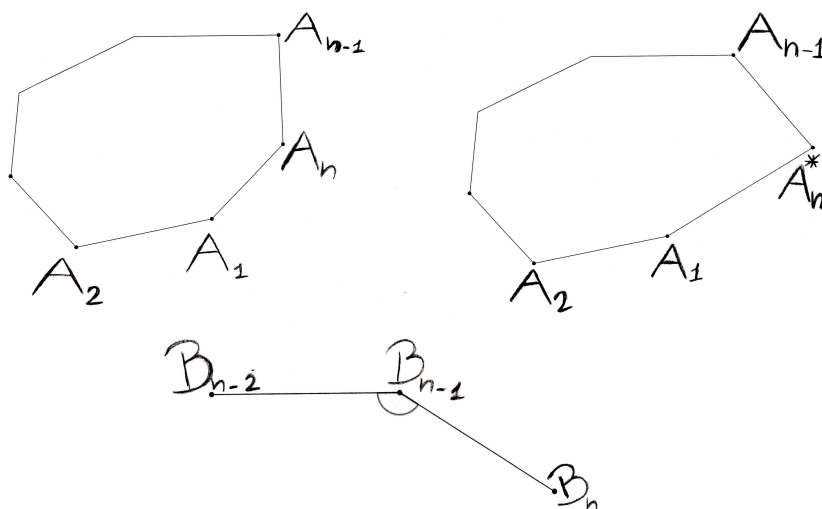


Figura 4.6: Produzione del nuovo poligono sostituendo A_n con A_n^* paragonato con $\angle B_{n-1}$

[, costruiti]

cons'.

Ora confrontiamo A_1, A_2, \dots, A_n^* , il poligono così ottenuto con B_1, B_2, \dots, B_n , il poligono di confronto originale. Così facendo abbiamo $A_2 A_n^* \leq B_2 B_n$ per induzione su n .

Quindi

$$B_1 B_n \geq B_2 B_n - B_1 B_2 \geq A_2 A_n^* - A_1 A_2 = A_1 A_n^* > A_1 A_n$$

□

In realtà, ciò che ci serve per dimostrare il teorema di rigidità di Cauchy non è questo lemma ma il risultato analogo per poligoni sulla superficie di una sfera.

L'estensione a poligoni sferici non risulta essere troppo difficile perché la dimostrazione utilizza sì una proposizione che viene dal Libro I di Euclide ma posta prima dell'introduzione del postulato delle parallele e perciò facilmente spostabile sulla superficie sferica.

Lemma 4.1.2. *Siano A_1, \dots, A_n e B_1, \dots, B_n due poligoni convessi, nel piano o sulla sfera, con i lati corrispondenti uguali. Per ogni i , marchio il vertice A_i con + se $\angle A_i < \angle B_i$ o con - se $\angle A_i > \angle B_i$, mentre non lo marchio*

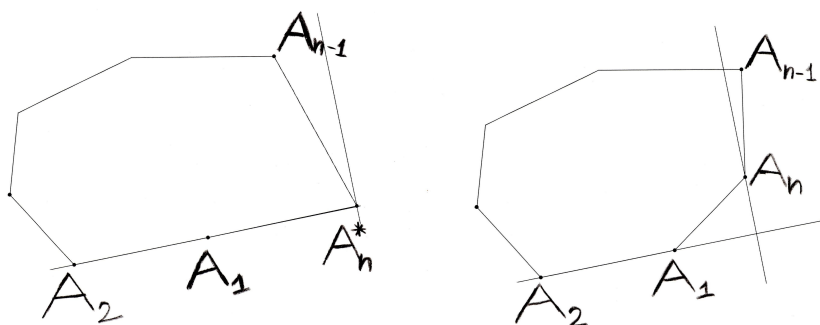


Figura 4.7: Produzione del nuovo poligono spostando A_n^* per ottenere $A_1A_n^* > A_1A_n$ con A_2, A_1, A_n^* allineati

[, costruiti]

affatto se sono uguali. Allora o tutti i vertici corrispondenti sono uguali, e quindi non marchiati, oppure se si segue l'ordine dei vertici devono essere almeno quattro cambi di segno.

Dimostrazione. Per assurdo.

Naturalmente se il numero dei cambiamenti di segno è minore di quattro, significa che ci sono esattamente due cambi di segno, devono essere sempre in numero pari perchè ad ogni segno diverso si operano due cambi.

Allora traccio una diagonale A_iA_j in modo da dividere il poligono in due poligoni convessi, uno con tutti i vertici con segno + e l'altro con tutti i vertici con il segno -. Questo posso farlo perchè avendo due cambi di segno ho che tutti i segni uguali si susseguono finchè non si cambia segno.

Se ora applichiamo il lemma di Steinitz a questi due poligoni otteniamo che $A_iA_j < B_1B_j$ e contemporaneamente $A_iA_j > B_1B_j$ e questo è assurdo perciò abbiamo almeno quattro cambi di segno.

□

4.1.2 Teorema

Passiamo ora al teorema vero e proprio:

Teorema 4.1.3. *Siano P e P' due poliedri convessi e sia T un isomorfismo fra P e P' , supponiamo inoltre che le facce corrispondenti siano congruenti, allora anche gli angoli tra coppie corrispondenti di facce adiacenti sono uguali (e pertanto P è congruente a P').*

In un poliedro può essere opportuno indicare gli spigoli come 0-facce, come 1-facce, e le facce come 2-facce; dove 0, 1 e 2 indicano la dimensione

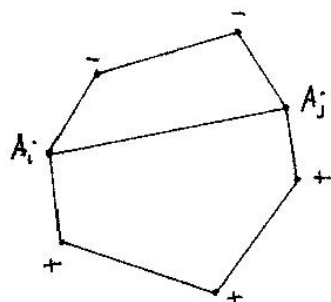


Figura 4.8: La figura mostra un poligono con solo due cambi di segno e la diagonale fra essi

[11, Harthshorne]

dell'oggetto. Con questa notazione un' *isomorfismo* f tra P e P' è una biezione, cioè un'applicazione suriettiva e iniettiva, fra l'insieme delle facce del poliedro P e quello del poliedro P' . Tale isomorfismo è fatto in modo che una j -faccia sia mandata in una j faccia, con $0 \leq j < 3$, e che se una i -faccia A sta in una j -faccia B con $0 \leq i < j < 3$ allora $f(A) \subset f(B)$

L'enunciato di questo teorema risulta abbastanza ovvio per chi si diletta a costruire modelli di poliedri perchè una volta che ci vengono fornite le facce, in carta o cartoncino, e le regole di assemblaggio il risultato finale può essere uno solo. Questo perchè questo tipo di costruzione rende il poliedro rigido. Se invece ci limitiamo a costruirne lo scheletro, ad esempio con dei bastoncini, la struttura non è rigida e nemmeno unica. Basti pensare di costruire un quadrato con delle bacchette, basta muoverle di poco per ottenere un rombo.

Se le facce sono date non si possono modificare quindi il risultato è unico.

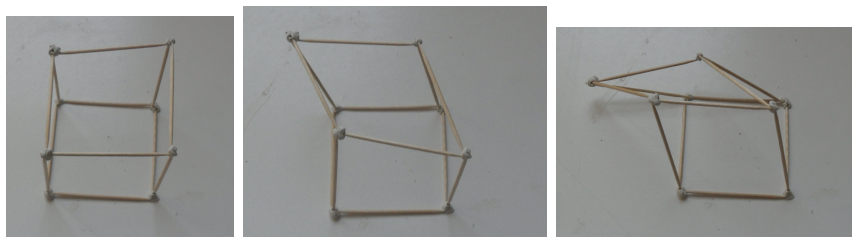


Figura 4.9: Modellino che dimostra la flessibilità di un poliedro costruito con i bastoncini

[, costruiti]

Per quanto però il teorema sia evidente da un punto di vista geometrico non

è semplice da dimostrare.

Come per la dimostrazione della formula di Cauchy anche per questa possiamo trovarne varie versioni perchè è stata perfezionata e modernizzata da vari matematici. La versione più moderna è quella di Stoker del 1968.

Dimostrazione. Supponiamo che siano dati due poliedri convessi P e P' con facce congruenti. Coloriamo gli spigoli di P come segue: uno spigolo è nero(o “positivo”) se il corrispondente angolo interno tra due facce adiacenti è più grande in P' che in P ; è bianco(o “negativo”) se l'angolo corrispondente è più piccolo in P' che in P .

Gli spigoli bianchi e neri di P ricoprono la superficie di P , possiamo trasferire questa copertura sulla sfera unitaria, supponendo che l'origine sia all'interno di P . Se P e P' hanno facce-angoli corrispondenti la copertura è bicolore, altrimenti non è colorata. Ora troviamo che vi è un vertice p adiacente ad almeno uno spigolo bianco o nero, tale che vi siano almeno due cambi tra spigoli neri e bianchi (in ordine ciclico).

Ora intersechiamo P con una piccola sfera S_ε (di raggio ε) con centro nel vertice p ed intersechiamo P' con una sfera S'_ε dello stesso raggio ε centrata nel corrispondente vertice p' . In S_ε e S'_ε troviamo poligoni sferici convessi Q e Q' tali che gli archi corrispondenti abbiano le stesse lunghezze, a causa della congruenza delle facce di P e P' e poichè abbiamo scelto lo stesso raggio ε .

Contrassegniamo con $+$ gli angoli di Q per i quali gli angoli corrispondenti in Q' sono più grandi, e con $-$ gli angoli corrispondenti in Q' sono più piccoli. Dalla nostra scelta di p sappiamo che si verifica *qualche* segno $+$ o $-$ e che in ordine ciclico vi sono al massimo due cambi $+/-$. Se si verifica solo un tipo di segno, allora c'è una contraddizione perchè uno spigolo deve cambiare la sua lunghezza.

Se vi sono entrambi i tipi di segno, allora (poichè vi sono solo due cambi di segni) vi è una “retta di separazione” che congiunge i punti medi di due spigoli e separa tutti i segni $+$ da tutti i segni $-$. Nuovamente abbiamo una contraddizione perchè la “retta di separazione” non può essere alla stesso tempo più lunga e più corta in Q' che in Q .

Quindi non ci sono cambi di segno e questo è possibile solo se non ci sono segni, perchè abbiamo visto che non può esserci solo un segno. Quindi, visto che la scelta di p è arbitraria, gli angoloidi sono tutti uguali e i poliedri sono congruenti.

□

[1, Aigner] L'ipotesi di convessità è necessaria perchè il teorema sia verificato, l'immagine 3.1 è un esempio di tale affermazione. Questi due poliedri

hanno le facce corrispondenti congruenti, ma non sono congruenti fra loro perchè non sono entrambi convessi.

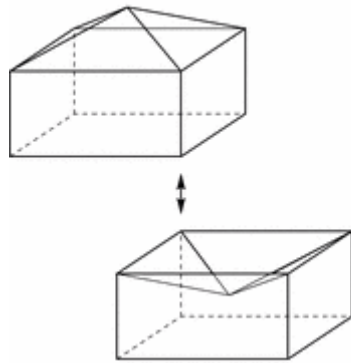


Figura 4.10: Due poliedri che non rispettano il teorema di rigidità.
[1, Aigner]

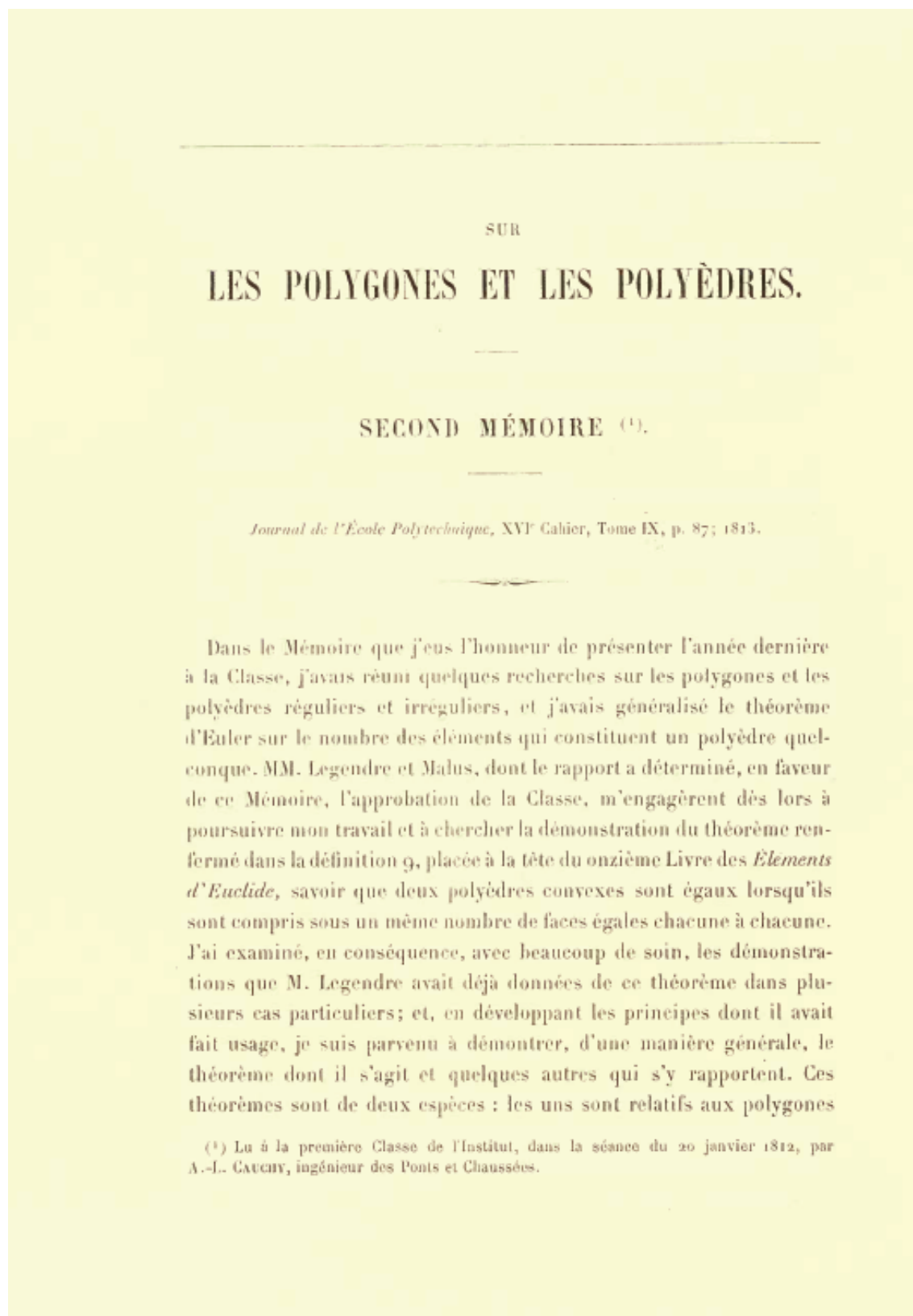


Figura 4.11: Frontespizio di 'Sur le polygones et les polyèdres'
[2, testo originale]

SUR LES POLYGONES ET LES POLYÈDRES. 27

convexes rectilignes et sphériques; les autres aux angles solides et aux polyèdres convexes. Je vais les exposer successivement dans les deux Parties de ce Mémoire.

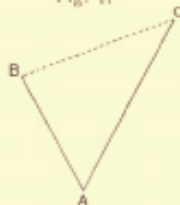
PREMIÈRE PARTIE.

Théorèmes sur les polygones convexes rectilignes et sphériques.

M. Legendre a démontré, dans ses *Éléments de Géométrie sur les triangles rectilignes et sphériques*, un théorème qu'on peut énoncer de la manière suivante :

THÉORÈME I. — *Si, dans un triangle rectiligne ou sphérique ABC (fig. 1) dont deux côtés AB, AC sont invariables, on fait croître ou diminuer l'angle A compris entre ces côtés, le côté opposé BC croîtra dans le premier cas et diminuera dans le second.*

Fig. 1.



On peut généraliser ce théorème de la manière suivante :

THÉORÈME II. — *Si, dans un polygone convexe rectiligne ou sphérique ABCDEFG (fig. 2), dont tous les côtés AB, BC, CD, ..., FG, à l'exception d'un seul AG, sont supposés invariables, on fait croître ou décroître simultanément les angles B, C, D, E, F, G compris entre ces mêmes côtés, le côté variable AG croîtra dans le premier cas et décroîtra dans le second.*

Démonstration. — Supposons d'abord que l'on fasse croître l'angle ABC tout seul; alors, dans tout le polygone ABCDEFG, il n'y aura que le triangle ABC de variable; et, dans ce triangle même, il n'y aura de variable que le côté AG et les angles : mais l'angle ABG devant croître

Figura 4.12: Estratto di 'Sur le poligones et les polyhèdres' dove possiamo vedere il testo originale del lemma in francese

[2, testo originale]

SUR LES POLYGOUES ET LES POLYÈDRES. 37

au plus, comme les quadrilatères. En continuant de même, on fera voir que les hexagones et les heptagones ne pourraient fournir chacun plus de six changements de signes, que les octogones et les ennéagones n'en pourraient fournir chacun plus de huit et ainsi de suite. Il suit de là que toutes les faces du polyèdre ne pourront fournir ensemble plus de changements de signes qu'il n'y a d'unités dans la somme faite de deux fois le nombre des triangles, de quatre fois celui des quadrilatères, de quatre fois celui des pentagones, de six fois celui des hexagones, etc., ou dans

$$2a + 4b + 4c + 6d + 6e + \dots$$

Mais, si l'on compare ce résultat à la valeur de $4S - 8$ trouvée plus haut, il sera facile de voir qu'il ne peut jamais la surpasser. Il est donc impossible d'obtenir entre les variations d'inclinaison sur toutes les arêtes un nombre de changements de signes au moins égal à $4S$; on ne peut donc changer à la fois les inclinaisons sur toutes les arêtes.

Si l'on suppose, en second lieu, que dans le polyèdre donné, non seulement les faces, mais encore les inclinaisons sur plusieurs arêtes restent invariables et que cependant on puisse, sans détruire le polyèdre, faire varier les inclinaisons sur les arêtes restantes, alors, pour démontrer l'absurdité de l'hypothèse, il suffira de concevoir la surface du polyèdre décomposée en autant de portions que les arêtes sur lesquelles les inclinaisons varient forment de contours différents, et d'appliquer aux portions, aux arêtes qui les terminent et aux sommets compris entre ces arêtes, les mêmes raisonnements que nous avons appliqués dans l'hypothèse précédente aux faces, aux arêtes et aux sommets du polyèdre. On y parviendra en substituant, dans le cours de la démonstration, les théorèmes X et XII aux théorèmes IX et XI sur lesquels on s'est appuyé dans le premier cas.

Corollaire I. — Il suit du théorème précédent que deux polyèdres convexes, compris sous un même nombre de faces égales et semblablement placées, sont ou superposables ou symétriques et, dans les deux cas, ils

Figura 4.13: Estratto di 'Sur le poligones et les polyhèdres' dove possiamo vedere il testo originale del teorema in francese

[2, testo originale]

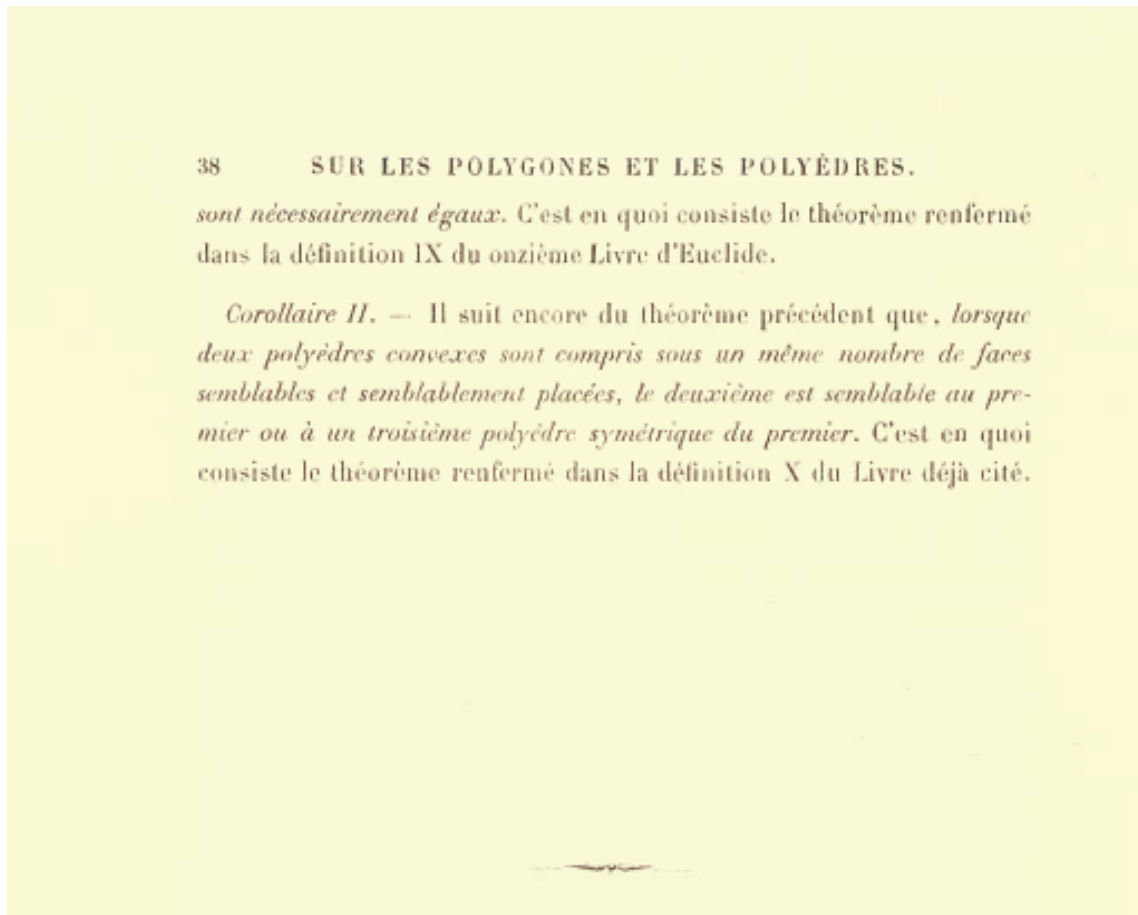


Figura 4.14: Estratto di ‘Sur le poligones et les polyhèdres’ dove possiamo vedere il testo originale del teorema in francese

[2, testo originale]

Capitolo 5

Considerazioni didattiche

Per concludere trattiamo i poliedri da un punto di vista didattico.

Un esempio di insegnamento dei poliedri si ha nel libro ‘Elementi di Geometria’ di F.Enriques e U.Amaldi. In questo libro gli autori trattano entrambi i teoremi sopra enunciati e dimostrati in modo da spiegarli a degli studenti delle scuole secondarie superiori, scuole in cui è stato adottato come libro di testo per diversi anni.

Nel caso della formula di Eulero gli autori enuncia il teorema e ne da una dimostrazione simile a quella da noi proposta. La dimostrazione però è in forma più semplice cioè non vengono trattati i casi particolari e non viene triangolarizzata la figura piana che rimane divisa in facce poligonali.

Enriques di seguito alla dimostrazione propone alcune applicazioni di tale formula senza dimostrarle, probabilmente, per permettere ai ragazzi di lavorare con la formula e capirne l’importanza.

Una cosa molto particolare e relativamente interessante da notare è che tutto questo si svolge nella parte del capitolo sui poliedri dedicata agli esercizi risultando così non obbligatoria da trattare per un insegnante che adotti il libro, e utile come approfondimento per uno studente curioso che non ha avuto la possibilità di studiare queste cose in classe.

Sempre in questo libro nel capitolo sui poliedri vengono trattati anche i poliedri regolari, la parte interessante su di essi è che non vengono presentati dicendo “ne esistono solo cinque” ma vengono fatti costruire passo passo dal lettore per poi dimostrare tramite la relazione di Cartesio sugli angoli (la somma dei difetti agli angoli non può superare quattro angoli retti) che non possono esistere altri. In questo modo l’esistenza e l’unicità di questi cinque poliedri non viene fatta assumere per fede agli studenti ma spiegata e dimostrata in modo che la assimilino meglio.

Per quanto riguarda il teorema di Cauchy, Enriques ne da l’enunciato fornendo una nota storica sulla dimostrazione di Cauchy senza però riportarla.

Enriques riporta però alcuni casi particolari del teorema proprio perchè la dimostrazione è molto difficile la limita a casi particolari:

‘ Prismi, aventi le facce ordinatamente eguali, sono eguali’ [7, Enriques]

‘ In uno stesso prisma indefinito, prismi finiti, aventi uguali gli spigoli laterali e parallele le basi, sono eguali’ [7, Enriques]

‘ Due parallelepipedi, aventi ordinatamente eguali un triedro e i tre spigoli di esso sono eguali’ [7, Enriques]

Particolare ma molto logico è il fatto che non venga riportato il lemma di Steinitz ma visto che questo è un libro di testo per le scuole secondarie superiori e che l'autore non intende dimostrare il teorema è normale che non riporti il lemma necessario per farlo.

Un altro libro, che seppur non sia stato scritto con intento didattico tratta questo argomento in modo chiaro e semplice, è ‘ Forme, simmetria e topologia’ di M.Dedò.

Una prima importante idea data da questo libro è un modo nuovo di osservare il teorema di Cauchy che secondo l'autrice è :

‘ Un poliedro è univocamente determinato quando se ne assegnino le facce e la struttura combinatoria.’ [5, Dedò]

Questo spunto è un punto di partenza nuovo che si può sfruttare nelle scuole visto che i ragazzi in alcune scuole secondarie inferiori imparano a costruire i poliedri manualmente perciò vedendo in questo modo il teorema lo potrebbero capire meglio.

Anche in questo libro ritroviamo il teorema di Eulero dimostrato sempre con una dimostrazione simile a quella da noi riportata. Dedò pone poi particolare attenzione su un'ipotesi dell'enunciato: la connessione semplice. Infatti in questo libro il teorema non viene enunciato per poliedri convessi ma semplicemente connessi che come abbiamo detto è sufficiente.

Dopo il teorema vengono esposte le sue applicazioni sottoforma di esercizi lasciando così la possibilità di dimostrarla personalmente se si vuole e in caso contrario di conoscerle ugualmente.

Del teorema di Cauchy l'autrice da l'enunciato e ne spiega l'uso e la difficoltà nella dimostrazione senza però darla; Dedò nota appunto la relazione tra la difficoltà della dimostrazione e la chiarezza del teorema da un punto di vista modellistico. In questo libro a differenza del precedente, prima del teorema viene riportato il teorema di Steinitz senza darne dimostrazione, viene però fornita una nota bibliografica di dove la si può trovare. Anche in questo caso la scelta è da ritenersi utile perchè non appesantisce il testo ma permette a chi voglia sapere di informarsi.

La differenza nelle scelte degli autori sta proprio nel fatto che il primo

è pensato per come libro di testo il secondo è chiaro didatticamente ma a priori non è scritto per le scuole.

Bibliografia

- [1] M. Aigner e G. Ziegler, *Proofs from THE BOOK, Edizione italiana a cura di Alfio Quarteroni*. Springer, 2006.
- [2] A. Cauchy, *Sur les polygones et les polyèdres*. Journal de L'Ecole Polytechnique, XVI Cahier, Tome IX, 1813.
- [3] R.Courant e H.Robbins, *Che cos'è la matematica?*. Boringhieri, 1974.
- [4] P. Cromwell, *Polyhedra*. Cambridge University Press, 1997.
- [5] M.Dedò, *FORME, simmetria e topologia*. Zanichelli, 1999.
- [6] L.Euler, *Elementa doctrinae solidorum*. Novi Commentarii Academiae scientiarum Petropolitanae 4, 1758.
- [7] F.Enriques e U.Amaldi, *Elementi di geometria*. Zanichelli, 1958.
- [8] E.A. Fellmann, *Leonhard Euler*. Birkhause, 2007.
- [9] L.Giacardi e C.S. Roero, *La matematica nelle civiltà arcaiche*. Università popolare Torino, 2010.
- [10] Lyusternik L.A., *Convex Figures and Polyhedra* . D. D.C. Heath and co., Boston.
- [11] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond* . Springer, 2000.
- [12] D.A. Singer, *Geometry: Plane and Fancy*. Springer, 1997.
- [13] J.Schoenberg e S.K.Zaremba, *On Cauchy's lemma concerning convex polygons*. Canadian J. Math, 1967.
- [14] Donald B. Wagner: , *An early Chinese derivation of the volume of a pyramid: Liu Hui, third century A.D.*. Historia mathematica, v.6, pp. 164-188, 1979,.

Ringraziamenti

Non mi dilungherò troppo nei ringraziamenti perchè chi mi conosce sa che non sono una grande scrittrice preferisco di gran lunga il parlato, però mi sembrava doveroso ringraziare alcune persone che mi hanno aiutato molto nel mio percorso di laurea.

Ringrazio i miei genitori e miei amici che mi hanno supportato e sopportato nelle varie fasi di questo lavoro dall'immatricolazione fino ad oggi. Un ringraziamento particolare va a tutti quelli che hanno dovuto subire i miei sfoghi in questi ultimi mesi pieni di ansia, perchè hanno saputo capire che ero molto sotto pressione e non ce l'avevo con loro.

Ringrazio anche coloro che mi hanno offerto il loro aiuto nella mia guerra contro L^AT_EX, che per fortuna sembra aver vinto.

E infine un grazie di tutto cuore agli amici e ai parenti che sono qui oggi per vedermi trionfare dopo un lungo e duro percorso durato quattro anni, e a chi ci sarebbe voluto essere ma per un motivo o per un altro non è potuto venire.