

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

**EINSTEIN E MINKOWSKI
SULLA
RELATIVITA' RISTRETTA**

Tesi di Laurea in Fisica Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
SANDRO GRAFFI

Presentata da:
DEBORA BIZZOCCHI

Sessione II
Anno Accademico 2012/2013

*D*edico questa tesi di laurea a tutte quelle

persone che in questi anni, in ogni maniera, mi hanno sostenuta, a tutti coloro che hanno creduto in me, e a quella luce che mi ha indicato la via quando mi è apparsa buia, ardua ed impraticabile ...

*Dedico questa tesi ai miei genitori **Adello** e **Marisa** che mi hanno cresciuta trasmettendomi quei semplici valori che sono l'essenza della vita, ed oggi, le radici del mio Essere.*

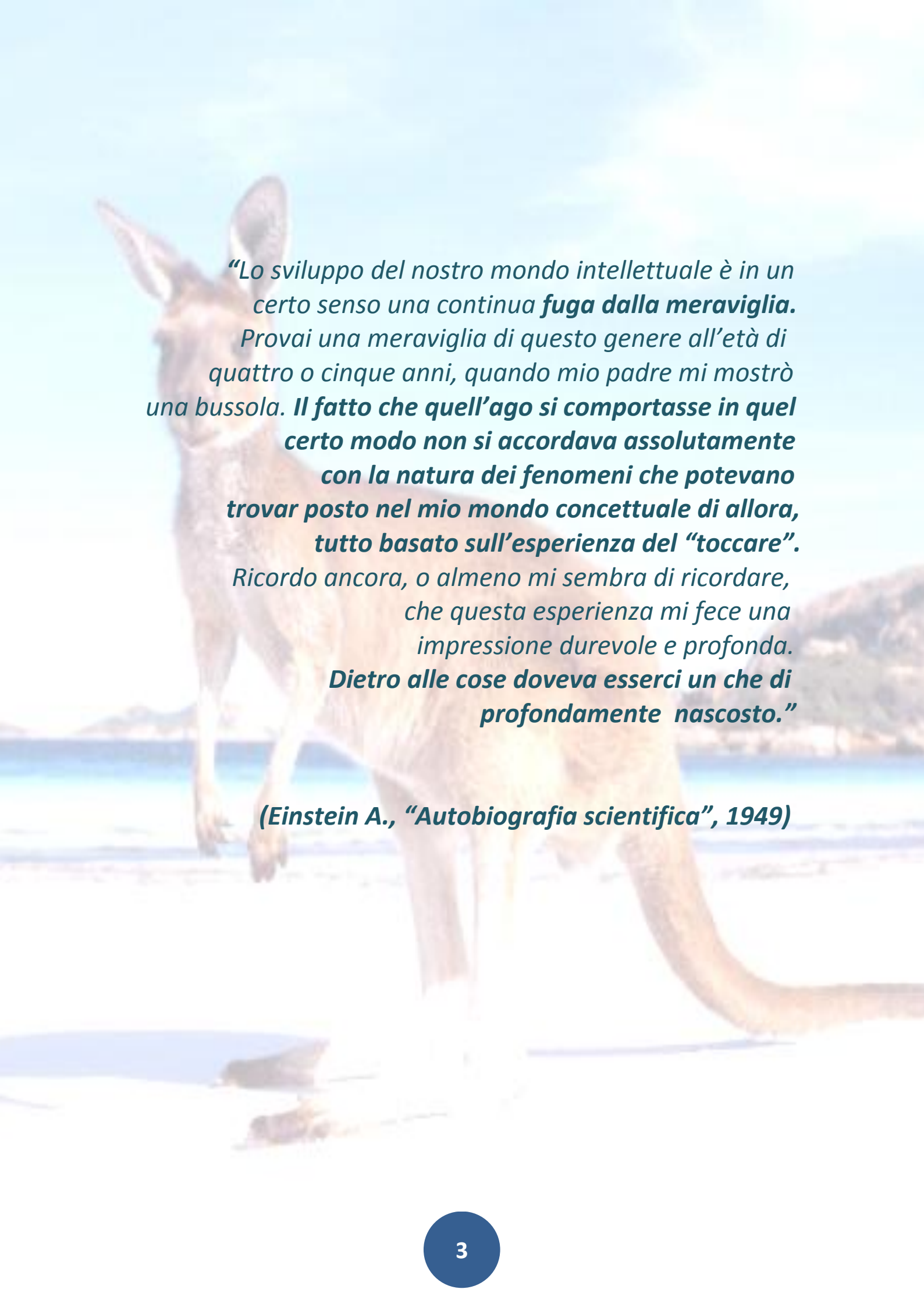
A professori che ho incontrato in tutto il mio percorso scolastico ed universitario, che ho stimato e che mi hanno insegnato le più svariate discipline, ma anche, ognuno di loro ha trasmesso uno stile di vita, ha educato, ed è stato importante per la mia crescita.

*A tutti gli amici che ho incontrato e che non dimenticherò mai perché compagni di banco ma non solo, compagni di vita e degli anni più belli. Alla mia cara amica **Elisa Ugolini** che il percorso universitario mi ha permesso di poter incontrare.*

*Dedico questa tesi a **Loris Innocenti** che è arrivato nella mia vita come un sole a riportarmi quella felicità che è rara da trovare e che credevo forse anche perduta ... al suo sorriso e a tutti i momenti belli trascorsi insieme, che possano essere non solo un ricordo ma diventare qualcosa di irrinunciabile ...*

Alla mia caparbità, al mio coraggio e alla mia forza interiore che mi hanno permesso di arrivare al traguardo desiderato, un traguardo fissato già da quando ero piccolissima, e alla speranza che anche io un giorno possa diventare un'insegnante.

*Ed infine ai miei nipoti **Samuel Vanucci** (10/1/2004) ed **Alessia Vanucci** (2/12/2008) con l'augurio che possano innamorarsi anche loro di questa affascinante e brillante disciplina che è la Matematica.*

A kangaroo is the central focus of the image, standing on a sandy beach. The background shows a clear blue sky and the ocean. The kangaroo is facing left, with its long tail extending to the right. The text is overlaid on the kangaroo's body.

*“Lo sviluppo del nostro mondo intellettuale è in un certo senso una continua **fuga dalla meraviglia**.
Provai una meraviglia di questo genere all’età di quattro o cinque anni, quando mio padre mi mostrò una bussola. **Il fatto che quell’ago si comportasse in quel certo modo non si accordava assolutamente con la natura dei fenomeni che potevano trovar posto nel mio mondo concettuale di allora, tutto basato sull’esperienza del “toccare”.**
Ricordo ancora, o almeno mi sembra di ricordare, che questa esperienza mi fece una impressione durevole e profonda.
Dietro alle cose doveva esserci un che di profondamente nascosto.”*

(Einstein A., “Autobiografia scientifica”, 1949)

Indice

Prefazione.....	9
Capitolo 1. I fondamenti Sperimentali della teoria della relatività ristretta	
1.1 Introduzione.....	9
1.2 Trasformazioni di Galileo.....	11
1.3 Relatività galileiana.....	16
1.4 Elettromagnetismo e relatività galileiana.....	19
1.5 Tentativi di individuare il riferimento assoluto. L'esperimento di Michelson-Morley.....	21
Capitolo 2. Einstein e la teoria della relatività ristretta	
2.1 I postulati della teoria della relatività ristretta.....	25

2.2	La rappresentazione operazionista di Einstein....	27
2.3	I due metodi di sincronizzazione degli orologi.....	30
2.4	La relatività della simultaneità.....	32
2.5	Derivazione delle trasformazioni di Lorentz.....	34
2.6	La dilatazione dei tempi.....	42
2.7	La contrazione delle lunghezze.....	44

Capitolo 3. Lo “spazio-tempo” di Minkowski

3.1	I diagrammi spazio-temporali.....	46
3.2	Simultaneità, contrazione e dilatazione.....	52
3.3	L'ordine temporale e la separazione degli eventi...	57
3.4	L'intervallo invariante in relatività.....	59

Capitolo 4. La relatività ristretta di Minkowski: il trionfo dell'assoluto

- 4.1 Minkowski e la ricerca di una nuova ontologia
per la relatività ristretta.....62
- 4.2 Uno sguardo al testo della conferenza di Minkowski
"Raum und Zeit" (Colonia, 1908).....64
- 4.3 La visione sostanzialista di Minkowski.....68
- 4.4 Il rifiuto di Einstein del sostanzialismo e l'ontologia
relazionista.....70



Prefazione

“Era un mondo in cui non vi era più spazio per il tempo assoluto, teologico, di Newton, il suo posto era ora occupato da una procedura.”

(Galison P., “Gli orologi di Einstein, le mappe di Poincaré”, 2003)

Capitolo 1. I Fondamenti Sperimentali della teoria della relatività ristretta

1.1 Introduzione

P

er mandare un segnale il più velocemente possibile da

un punto ad un altro attraverso lo spazio noi usiamo un fascio di luce o qualche altra onda elettromagnetica come un'onda radio. *Non è mai stato scoperto un metodo di segnalazione più rapido.* Questo fatto sperimentale suggerisce che la velocità della luce nello spazio vuoto, $c (\cong 3,00 \times 10^8 \text{ m/sec})$ sia un'appropriata velocità limite di riferimento con la quale si possono confrontare le altre velocità, come le velocità delle particelle o delle onde meccaniche.

Nel mondo macroscopico delle nostre esperienze quotidiane, la velocità v degli oggetti in movimento o delle onde meccaniche rispetto ad un qualunque osservatore è sempre trascurabile rispetto a c . E' in questo ambiente macroscopico che sono state per la prima volta formulate le nostre idee sullo spazio e sul tempo e in cui Newton sviluppò il suo sistema della meccanica. Nel mondo microscopico si possono facilmente trovare particelle le cui velocità sono molto vicine a quelle della luce, ma gli esperimenti dimostrano che la meccanica newtoniana non fornisce previsioni corrette quando viene applicata a particelle così veloci. Infatti, nella meccanica newtoniana non c'è in linea di principio alcun limite alla velocità raggiungibile da una particella, così che la velocità della luce c non gioca affatto un ruolo speciale.

Nel 1905 Albert Einstein pubblicò la sua teoria della relatività ristretta. Sebbene fosse mosso dal desiderio di raggiungere una più profonda comprensione della natura dell'elettromagnetismo, Einstein, nella sua teoria, estese e generalizzò anche la meccanica newtoniana. Egli predisse correttamente i risultati degli esperimenti meccanici nell'intervallo completo di velocità da $u/c = 0$ a $u/c \rightarrow 1$. La meccanica newtoniana si rivelò essere solo un importante caso particolare di una teoria più generale. Einstein esaminò criticamente i procedimenti usati per misurare gli intervalli di spazio e di tempo. Questi procedimenti richiedono l'uso di segnali luminosi e, effettivamente, un'ipotesi sul modo di propagazione della luce è una delle due ipotesi centrali su cui si basa la teoria. La sua teoria diede luogo a una visione completamente nuova della natura dello spazio e del tempo. La connessione fra meccanica ed elettromagnetismo non è sorprendente poiché la luce, che (come vedremo) gioca un ruolo basilare nell'esecuzione delle misure fondamentali di spazio e

tempo che sono alla base della meccanica, è un fenomeno elettromagnetico. Poiché abbiamo detto che la meccanica newtoniana fallisce quando viene applicata a particelle la cui velocità non è trascurabile rispetto a quella della luce, sembra opportuno cominciare con l'esaminare i fondamenti della meccanica newtoniana.

1.2 Trasformazioni di Galileo

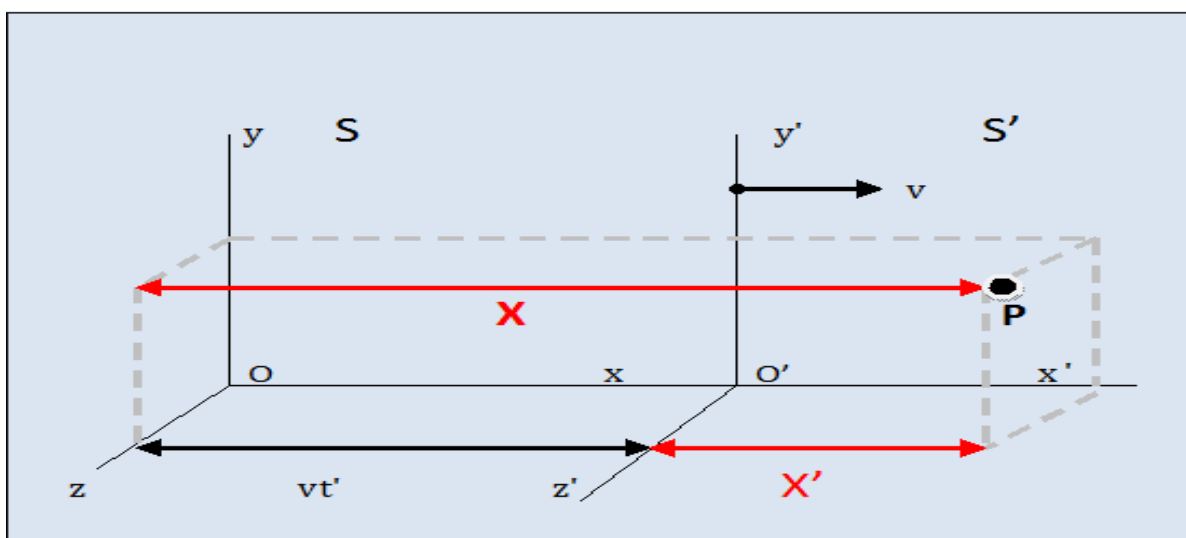
Cominciamo con il considerare un *evento* fisico. Un evento è qualcosa che accade indipendentemente dal sistema di riferimento che potremmo usare per descriverlo. L'evento accade in un punto nello spazio e in un istante nel tempo. Noi identificheremo un evento con quattro misure (spazio-temporali) in un particolare sistema di riferimento, cioè le coordinate x, y, z ed il tempo t . Per esempio, come evento possiamo considerare la collisione di due particelle ed immaginare che questo evento avvenga in $x = 1m$, $y = 4m$, $z = 11m$, e al tempo $t = 7sec$ in un certo sistema di riferimento (per es. un laboratorio nella terra) così che i quattro numeri $(1,4,11,7)$ identificano l'evento in quel sistema di riferimento. Lo stesso evento osservato da un diverso sistema di riferimento (per es. un aereo in volo) sarebbe ancora identificato da quattro numeri, sebbene i numeri possano essere diversi da quelli nel sistema del laboratorio. Così, se dobbiamo descrivere gli eventi, in nostro primo passo è di stabilire un sistema di riferimento.

Noi definiamo come ***sistema inerziale*** un sistema di riferimento in cui è valida la legge di inerzia (prima legge di Newton). In un sistema di questo tipo, che possiamo anche descrivere come un ***sistema non accelerato***, un corpo soggetto ad una forza complessiva nulla si muoverà con velocità costante.

Così, possiamo considerare un qualunque sistema di assi fissi sulla terra come un sistema di coordinate (approssimativamente) inerziale. Allo stesso modo, un qualunque sistema di assi che si muova con velocità uniforme rispetto alla terra, ad esempio su un treno, su una nave, su un aereo, sarà (approssimativamente) inerziale in quanto il moto con velocità uniforme non introduce accelerazione. Invece, un sistema di assi che sia accelerato rispetto alla terra, come un sistema connesso con una giostra ruotante o con una automobile in fase di accelerazione, non è un sistema inerziale.

La teoria della relatività ristretta, che noi considereremo qui, tratta solamente della descrizione degli eventi da parte di osservatori (che si trovino) in sistemi di riferimento inerziali. Gli oggetti di cui studiamo il moto possono essere accelerati rispetto a tali riferimenti ma i riferimenti stessi sono non accelerati.

Consideriamo ora un riferimento inerziale S e un altro riferimento inerziale S' che si muove con velocità costante v rispetto a S , come è mostrato in figura.



Per comodità, scegliamo gli assi corrispondenti paralleli e supponiamo che il loro moto relativo avvenga lungo l'asse comune x, x' . Possiamo poi generalizzare ad arbitrarie orientazioni e velocità relative dei riferimenti, ma i principi fisici interessati non sono alterati dalla semplice scelta particolare che abbiamo ora fatto. Notiamo inoltre che possiamo considerare S in movimento con velocità $-v$ rispetto a S' allo stesso modo in cui consideriamo S' in movimento con velocità v rispetto a S . Supponiamo che si verifichi un evento in un punto P , di cui si misurano le coordinate spazio-temporali in ciascun riferimento inerziale. Un osservatore solidale con S identifica, con l'ausilio di metri e orologi, per esempio, la posizione e l'istante in cui avviene l'evento, assegnandogli le coordinate spaziali x, y, z e il tempo t . Un osservatore solidale con S' , usando i propri strumenti di misura, identifica lo stesso evento con le coordinate spazio-temporali x', y', z' e t' . Le coordinate x, y, z daranno la posizione di P relativa all'origine O misurata dall'osservatore S , e il tempo t sarà il tempo che l'osservatore S registra con i suoi orologi per l'evento stesso. Le coordinate x', y', z' danno la posizione di P rispetto all'origine O' ed il tempo t' è quello registrato dagli orologi dell'osservatore inerziale S' per l'evento stesso P .

Ora ci chiediamo che relazione sussiste fra le misure x, y, z, t e x', y', z', t' . I due osservatori usano metri, che sono stati confrontati e calibrati l'uno con l'altro, e orologi, che sono stati sincronizzati e calibrati l'uno con l'altro. Il procedimento classico, che esamineremo più criticamente più avanti, consiste nell'assumere che gli intervalli di lunghezza e gli intervalli di tempo siano assoluti, cioè che siano gli stessi per tutti gli osservatori inerziali dei medesimi eventi.

Per esempio, se i metri sono della stessa lunghezza quando vengono confrontati in quiete l'uno rispetto all'altro, si assume che essi rimangano della stessa lunghezza quando si confrontano in moto relativo l'uno rispetto all'altro. Similmente se gli orologi sono calibrati e sincronizzati quando sono a riposo si assume che le loro letture e i loro ritmi rimangano in accordo anche se essi sono messi in movimento relativo l'uno rispetto all'altro.

Possiamo formulare esplicitamente questi risultati nel modo seguente. Per semplicità supponiamo che gli orologi di entrambi gli osservatori segnino zero all'istante in cui coincidono le origini O e O' dei riferimenti S e S' , che sono in movimento relativo. Allora le *trasformazioni delle coordinate di Galileo*, che legano le misure x, y, z, t a x', y', z', t' , sono:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

Trasformazioni di Galileo
per la posizione

Da queste equazioni segue subito che l'intervallo di tempo fra gli avvenimenti di due dati eventi, diciamo P e Q , è lo stesso per ogni osservatore, cioè

$$t'_P - t'_Q = t_P - t_Q$$

e che la distanza, o intervallo spaziale, fra due punti, diciamo A e B, misurata ad un dato istante, è la stessa per ogni osservatore, cioè

$$x'_B - x'_A = x_B - x_A$$

Questo ultimo risultato merita un'analisi più accurata. Siano A e B gli estremi di un'asta, per esempio, che sia in riposo nel riferimento S. Allora l'osservatore accentrato S', per il quale l'asta si muove con velocità $-v$ misurerà le posizioni degli estremi come x'_B e x'_A , mentre l'osservatore non accentrato S le localizzerà in x_B e x_A . Usando le trasformazioni di Galileo abbiamo:

$$\begin{cases} x'_B = x_B - vt_B \\ x'_A = x_A - vt_A \end{cases}$$

➔ $x'_B - x'_A = x_B - x_A - v(t_B - t_A)$

Poiché le posizioni degli estremi A e B sono misurate allo stesso istante, si ha che $t_B = t_A$

➔ $x'_B - x'_A = x_B - x_A$

Secondo le trasformazioni di Galileo le misure di intervalli spaziali e temporali precedentemente fatte sono ASSOLUTE, cioè

forniscono gli stessi risultati per tutti gli osservatori inerziali, in quanto la velocità relativa v dei riferimenti è del tutto arbitraria e non interviene nei risultati.

1.3 Relatività galileiana

La posizione di una particella in movimento è una funzione del tempo, perciò possiamo esprimere la velocità e l'accelerazione della particella in termini delle derivate temporali della posizione. Abbiamo bisogno solo di eseguire successive derivazioni rispetto al tempo delle trasformazioni di Galileo. La trasformazione delle velocità si deduce immediatamente. Partendo dalla

$$x' = x - vt$$

derivando rispetto al tempo si ha

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v$$

Ma essendo $t = t'$, l'operazione d/dt è identica all'operazione d/dt' quindi

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx'}{dt'}$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v \\ \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt} \end{array} \right.$$

Ponendo $\frac{dx'}{dt'} = u'_x$ componente x della velocità misurata in S' , $\frac{dx}{dt} = u_x$ componente x della velocità misurata in S , e così via per le altre componenti y e z otteniamo

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_x = u_x - v \\ u'_y = u_y \\ u'_z = u_z \end{array} \right.$$

Trasformazioni di Galileo
per la velocità

Ovviamente, nel caso più generale in cui v , velocità relativa dei riferimenti, ha componenti lungo tutti tre gli assi, otterremmo il risultato vettoriale più generale

$$u' = u - v$$

Lo studente ha già incontrato molte volte esempi di questa legge. Per esempio, la velocità di un aereo rispetto all'aria (u') è uguale alla velocità dell'aereo rispetto alla terra (u) meno la velocità dell'aria rispetto alla terra (v).

Per ottenere le trasformazioni per l'accelerazione dobbiamo semplicemente differenziare le relazioni per la velocità. Procedendo come prima, otteniamo

$$\frac{d}{dt'}(u'_x) = \frac{d}{dt}(u_x - v)$$

Ossia, essendo v una costante:

$$\frac{du'_x}{dt'} = \frac{du_x}{dt} \qquad \frac{du'_y}{dt'} = \frac{du_y}{dt} \qquad \frac{du'_z}{dt'} = \frac{du_z}{dt}$$

E quindi:

$$\left\{ \begin{array}{l} a'_x = a_x \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{array} \right.$$

Trasformazioni di Galileo
per l'accelerazione

Abbiamo trovato così che l'accelerazione di una particella è la stessa in tutti i sistemi di riferimento che si muovono con velocità relativa costante; cioè

$$a' = a$$

Nella fisica classica, anche la massa non è influenzata dal moto del sistema di riferimento. Quindi, il prodotto ma sarà lo stesso per tutti gli osservatori inerziali. Se $F = ma$ allora $F' = ma'$ e $F = F'$. **Le leggi del moto di Newton e le equazioni del moto di una particella sono esattamente le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali.**

Poiché, in meccanica, si può dimostrare che i principi di conservazione, come quello per l'energia, la quantità di moto e il momento angolare, sono tutti conseguenze delle leggi di Newton, si ha che le leggi della meccanica sono le stesse in tutti i riferimenti inerziali. Nessun riferimento inerziale è privilegiato rispetto agli altri, poiché le leggi della meccanica sono le stesse in tutti. Quindi non c'è nessun riferimento in quiete assoluta fisicamente definibile. La persona che si trova sul treno non può assolutamente dire se solo lei si sta muovendo o se solo la terra si muove rispetto ad essa, o se si tratta di una qualche combinazione di movimenti. Questo risultato, che si possa parlare solo della velocità relativa di un riferimento, è talvolta chiamato **Relatività Galileiana**.

1.4 Elettromagnetismo e relatività galileiana

Abbiamo detto che le leggi della meccanica sono invarianti per trasformazioni di Galileo. Vediamo ora se questo accade anche per le leggi dell'elettromagnetismo. Se così fosse allora il principio di relatività galileiana sarebbe valido non solo per la meccanica ma per tutta la fisica. Cioè nessun riferimento inerziale sarebbe privilegiato rispetto agli altri, o assoluto, e nessun tipo di esperimento di fisica non solo di meccanica, eseguito in un unico riferimento ci permetterebbe di determinare la velocità del nostro riferimento rispetto ad un altro. Per vedere subito che il caso elettromagnetico è per quanto riguarda le trasformazioni di Galileo, diverso da quello meccanico, consideriamo un impulso luminoso (cioè un impulso elettromagnetico) che viaggia rispetto al mezzo di propagazione della luce detto, "etere", alla velocità c . Al "mezzo" di propagazione della luce fu dato, storicamente, il nome di

“etere”, poiché quando la visione meccanica della fisica dominava il pensiero dei fisici (fine del 19° secolo) non si ammetteva che una perturbazione elettromagnetica si potesse propagare nello spazio vuoto. Per semplicità, possiamo considerare il riferimento dell’ “etere”, S, come un riferimento inerziale in cui un osservatore trova che la velocità della luce è esattamente $c = (1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}) = 2,997925 \times 10^8 m/sec$. In un riferimento S’ che si muove con una velocità costante v rispetto a questo riferimento dell’etere, un osservatore misurerebbe per l’impulso luminoso una velocità diversa, variante tra $c + v$ e $c - v$ a seconda della direzione del moto relativo, come conseguenza della trasformazione Galileiana delle velocità. Quindi, la velocità della luce non è certamente invariante per una trasformazione di Galileo.

Il fatto che le trasformazioni di Galileo possano o no applicarsi alle leggi della Meccanica e alle leggi di Maxwell dell’elettromagnetismo ci porta ad ipotizzare tre possibilità:

1. Esiste un principio di relatività per la meccanica ma non per l’elettrodinamica, dove esiste un riferimento inerziale privilegiato ; cioè il riferimento dell’etere.
2. Le leggi dell’elettrodinamica di Maxwell non sono corrette.
3. Esiste un principio di relatività sia per la meccanica che per l’elettrodinamica ma le leggi della meccanica di Newton non sono corrette.

Risposta:

1. **FALSA!** L'esperimento di Michelson-Morley negò l'esistenza dell'etere
2. **FALSA!** Le leggi di Maxwell sono corrette
3. **VERA!** La meccanica di Newton non vale per le alte velocità. Le leggi di trasformazione corrette sia per la meccanica che per l'elettromagnetismo non sono quelle di Galileo ma quelle elaborate da Lorentz prima che venisse formulata la teoria della relatività di Albert Einstein.

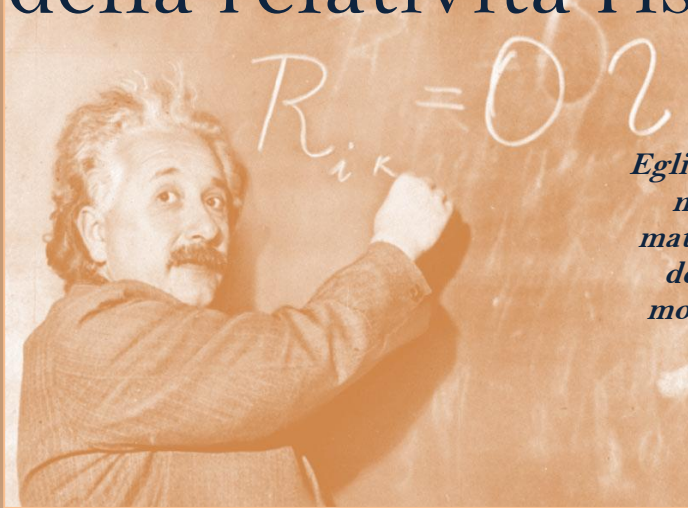
1.5 Tentativi di individuare il riferimento assoluto L'esperimento di Michelson-Morley

La base teorica dell'esperimento è la seguente: se esiste l'etere, il moto della Terra crea un flusso, un vento di etere, opposto alla velocità terrestre, proprio come un veicolo in movimento crea un flusso di aria che scorre oltre il veicolo. La velocità della luce misurata sulla Terra dovrebbe risultare influenzata dal flusso dell'etere oppure no, a seconda che la luce si stia muovendo parallelamente (con verso uguale o contrario) o perpendicolarmente al flusso. L'analisi è in questo caso esattamente la stessa che si applica a due nuotatori ugualmente veloci in un fiume; uno percorre a nuoto una data distanza avanti e indietro lungo il corso del fiume; l'altro, partendo dallo stesso punto nello stesso istante percorre a nuoto la stessa distanza procedendo avanti e indietro trasversalmente rispetto al fiume. I due nuotatori non possono tornare al punto di partenza contemporaneamente; il nuotatore che attraversa il fiume torna

sempre per primo, come si può mostrare dalla legge semplice dell'addizione aritmetica delle velocità. Se la luce si propagasse attraverso un etere fisso che permea tutto lo spazio, il vento di etere creato dal moto della Terra dovrebbe far ritardare un fascio di luce che, muovendosi nella direzione del moto della Terra, urta uno specchio ad una definita distanza dalla sorgente di luce e ritorna indietro, rispetto ad un fascio identico che si muove verso uno specchio equidistante e torna indietro ad angolo retto rispetto al moto della Terra. L'apparato, estremamente sensibile, era stato progettato per segnalare una differenza tra i tempi di ritorno dei due fasci anche se la velocità della Terra attorno al Sole fosse stata di 1,5 km/sec invece della sua vera velocità di 30 km/sec; Michelson e Morley non rilevarono però alcuna differenza, con grande disappunto di Michelson, che considerò fallito l'esperimento, giudicandolo, per come era stato concepito, non in grado di rilevare il moto della Terra. Anche se Michelson ripudiò il suo esperimento, abbandonandolo come privo di significato, altri fisici dell'epoca videro nel suo risultato nullo un'enunciazione sulla natura molto importante, pur senza rendersi conto della sua portata. Il fisico Hendrik Antoon Lorentz fece il tentativo più coraggioso, nell'ambito della fisica classica, per spiegare il risultato nullo di Michelson-Morley utilizzando la sua teoria elettronica della materia. I complessi dettagli della sua analisi molto brillante non sono importanti, ma il risultato è sorprendente. Il suo studio mostrò che un elettrone sferico in movimento si appiattisce in qualche modo nella direzione del moto a causa delle sue proprietà elettriche, e che si appiattisce sempre di più al crescere della velocità. Quindi Lorentz concluse che la materia, essendo composta di elettroni, è in qualche modo appiattita lungo la direzione del suo moto quando è in movimento. Usò poi questa analisi per spiega-

re il risultato negativo dell'esperimento di Michelson Morley e stabilì che la traiettoria della luce che si muove parallela al moto della Terra si contrae, permettendo così al fascio di andare e tornare esattamente nello stesso tempo del fascio perpendicolare. La cosa importante è che questa indagine afferma che la contrazione lungo la direzione del moto equivale esattamente alla quantità necessaria per cancellare il ritardo prodotto dal vento di etere sul tempo di volo del fascio di luce che si muove parallelamente ad esso. Questo effetto è noto come ipotesi della contrazione di Fitzgerald-Lorentz, poiché il fisico teorico britannico Fitzgerald aveva proposto una simile ipotesi di contrazione più o meno contemporaneamente a Lorentz. L'ipotesi della contrazione non fu presa sul serio, poiché appariva eccessivo che le interazioni elettrostatiche tra le particelle cariche che costituivano la materia potessero ridurre la lunghezza di uno dei bracci (quello parallelo al moto terrestre) dell'apparato di Michelson-Morley precisamente della quantità necessaria per ottenere il risultato nullo trovato dagli sperimentatori. Questo risultato, comunque, rimase una spina nel fianco dei fisici teorici fino a quando non fu brillantemente spiegato nel primo articolo di Einstein, che formulava la teoria della relatività ristretta. Questo articolo determinò una rivoluzione di primaria importanza nei nostri concetti di spazio e tempo e nelle leggi della natura. Einstein non sviluppò la teoria della relatività ristretta per spiegare il risultato nullo di Michelson-Morley, poiché allora non conosceva quell'esperimento; in realtà, aveva pochi contatti con gli ambienti ufficiali della fisica del tempo. Ma conosceva la teoria elettromagnetica di Maxwell ed era profondamente impegnato nel tentativo di comprendere le proprietà della luce; in particolare il suo moto.

Capitolo 2. Einstein e la teoria della relatività ristretta



“Nessuno riuscì a stimolarlo a frequentare i seminari matematici... Egli non vedeva ancora la possibilità insita nel dominio di quel potere formale della matematica, che più tardi divenne la guida del suo lavoro... Desiderava procedere in modo affatto empirico, per assecondare la sua inclinazione scientifica di allora... Come scienziato naturale, era un puro empirista”.

Nessun evento individuale nella storia della scienza ha avuto un così profondo effetto sul pensiero umano come l'enunciazione della teoria della relatività, concepita in due momenti, la relatività ristretta nel 1905 e la relatività generale nel 1915, da Albert Einstein. Questo è un argomento talmente interessante da richiedere un breve profilo di Einstein come uomo. Le opinioni correnti sull'uomo che ha indubbiamente rappresentato per la sua generazione il simbolo della profondità dell'intelligenza umana potrebbero essere messe in crisi da fatti come questi: i genitori di Einstein temettero per un certo periodo che egli fosse tardo di mente in quanto imparò a parlare più tardi del solito; uno dei suoi maestri disperato per le sue fantasticherie e la sua insofferenza per i metodi formali di istruzione, gli disse: “Non concluderai mai niente, Einstein” ; egli non riuscì a prendere un diploma di scuola superiore e, all'età di quindici anni, senza alcuna prospettiva d'impiego, vagabondava come un perfetto fannullone: il primo tentativo di Einstein di ottenere l'ammissione a un istituto politecnico finì col fallimento nell'esame di

ammissione; dopo avere ottenuto l'ammissione, disertò gran parte delle lezioni e, presi in prestito gli appunti di un amico, si preparò intensamente per due mesi prima dell'esame finale. Più tardi egli disse, al riguardo, "...dopo che ebbi superato l'esame finale, per un anno intero trovai sgradevole la considerazione di qualunque problema scientifico". Fu solo due anni dopo avere conseguito il diploma che egli ottenne un impiego fisso, come esaminatore di brevetti nell'Ufficio Svizzero dei brevetti a Berna: Einstein si interessava molto di apparati tecnici e di strumenti, ma visto che poteva concludere il lavoro del giorno in tre o quattro ore, lavorava segretamente, in ufficio e anche nel tempo libero, ai problemi di fisica che lo appassionavano. Einstein non poteva accettare il conformismo che gli si chiedeva, nelle istituzioni educative, religiose, militari e governative. Era un lettore avido che seguiva i propri interessi intellettuali, aveva una grande curiosità della natura ed era un genuino "libero pensatore" e uno spirito indipendente.

2.1 I postulati della teoria della relatività ristretta

Nel 1905, Albert Einstein, apparentemente ignaro di parecchi importanti articoli precedenti sull'argomento, fornì una soluzione al dilemma cui si trovava di fronte la fisica. Nel suo articolo "**Sulla elettrodinamica dei corpi in movimento**" Einstein scrisse: *"...nessuna caratteristica dei fatti osservati corrisponde al concetto di un etere assoluto; ...per tutti i sistemi di coordinate per i quali valgono le equazioni della meccanica, valgono anche le equivalenti equazioni dell'elettrodinamica e dell'ottica...In quanto segue facciamo questa ipotesi (che chiameremo poi il principio di relatività) e introduciamo l'ulteriore postulato, un postulato che è a prima vista inconciliabile con le ipotesi precedenti, che la luce si propaga nello spazio vuoto con una velocità c che è indipendente dalla natura del moto del corpo che la emette. Queste due ipotesi sono del tutto sufficienti a darci una semplice e consistente*

teoria dell'elettrodinamica dei corpi in movimento basata sulla teoria di Maxwell per i corpi in riposo". Noi possiamo riformulare questi postulati di Einstein nel modo seguente:

- 1) Le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi inerziali. Non esiste un sistema inerziale privilegiato.
(Principio di relatività).

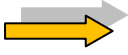
- 2) La velocità della luce nello spazio vuoto ha lo stesso valore c in tutti i sistemi inerziali.
(Principio della costanza della velocità della luce).

Il principio di relatività di Einstein va al di là del principio di relatività Newtoniana, che si riferiva solo alle leggi della meccanica, per includere tutte le leggi della fisica. Esso afferma che è impossibile per mezzo di qualsiasi misura fisica definire un sistema inerziale come intrinsecamente in quiete o in movimento; noi possiamo solo parlare del moto relativo dei due sistemi. Quindi, nessun esperimento fisico di qualunque specie eseguito interamente all'interno di un solo sistema inerziale può dire all'osservatore qual è il moto del suo sistema rispetto ad un qualunque altro sistema inerziale. Il secondo principio, che è in netta contraddizione con la trasformazione Galileiana delle velocità, è chiaramente consistente con gli esperimenti di Michelson-Morley (e successivi). L'intera teoria della relatività ristretta si deduce direttamente da questi due postulati. La loro semplicità, generalità e chiarezza sono caratteristiche del genio di Einstein. Il successo della sua teoria può essere verificato solo dal confronto con l'esperimento. Essa non solo riuscì a spiegare tutti i risultati sperimentali esistenti ma predisse dei nuovi effetti che furono confermati da successivi esperimenti. Non è stata ancora trovata alcuna obiezione sperimentale alla teoria della relatività ristretta di Einstein.

L'**esigenza di semplicità** di Einstein sostiene che la fisica debba basarsi sul minor numero di ipotesi possibili ("l'etere lumini fero" e il concetto di "quiete assoluta" sono concetti superflui e quindi da rimuovere). L'approccio di Einstein consiste nell'eliminare tutte le conoscenze a priori sulla natura della realtà o dell'universo, assumendo invece come punto di partenza i fatti sperimentali ben convalidati e accuratamente provati. *La scienza moderna è così essenzialmente empirica* e Einstein procede "operativamente" attraverso tutta una serie di definizioni come quella di evento, del tempo di un evento, del procedimento di sincronizzazione degli orologi distanti nello spazio per la correlazione di eventi che avvengono in luoghi diversi (reticolo di orologi sincronizzati)... Come vedremo il linguaggio che utilizzerà Einstein è un linguaggio algebrico ed inoltre è ampio il ricorso all'uso di esperimenti mentali per meglio illustrare gli effetti relativistici.

2.2 La rappresentazione operativa di Einstein

Definizione di evento : Un evento è definito operativamente quando sono definite le operazioni di misura per determinare posizione ed istante di tempo in cui l'evento accade.

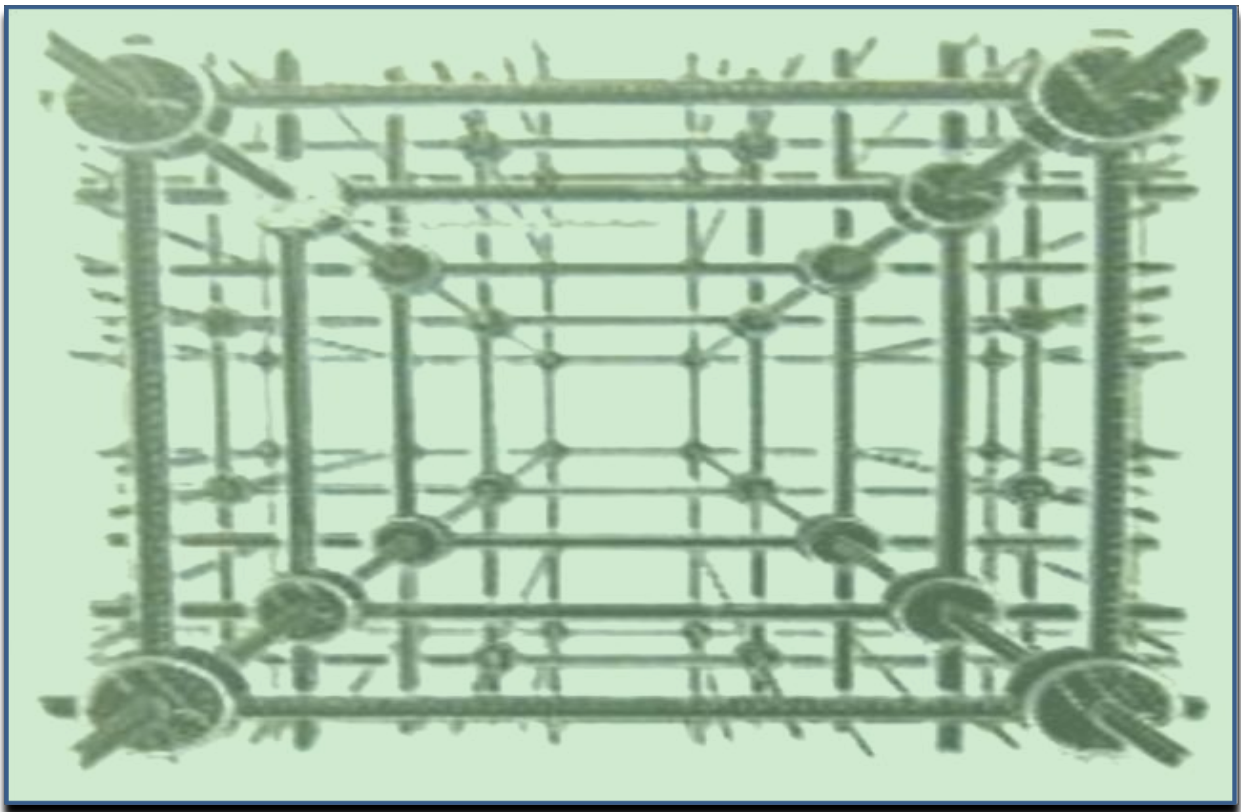
 **Per definire un evento occorre l'utilizzo sia di un "regolo misuratore" sia di un orologio.**

Definizione Tempo di un evento : Il tempo di un evento è ciò che "è misurato dall'orologio" collocato nella stessa posizione dell'evento. Due eventi distanti spazialmente sono simultanei quando gli orologi corrispondenti sono tra loro sincronizzati e registrano per essi lo stesso tempo.

 **Per stabilire l'ordine temporale di due eventi occorre definire un procedimento di sincronizzazione degli orologi**

collocati esattamente dove sono avvenuti gli eventi. Si procede con la costruzione del reticolo di orologi sincronizzati ognuno posto in ogni punto dello spazio.

Il confronto temporale tra due eventi distanti nello spazio avviene con la costruzione del “**reticolo di orologi sincronizzati**” posti in ogni punto dello spazio.



Einstein infatti aveva intuito che l'esistenza di un tempo universale che fosse lo stesso per tutti gli osservatori inerziali $t = t'$ e che veniva assunto nelle equazioni di Newton, doveva essere errato. Cioè la medesima scala temporale applicata in tutti i sistemi di riferimento inerziali costituì una premessa fondamentale della meccanica Newtoniana. Per costruire una scala universale dei tempi, bisogna riuscire a dare un significato, indipendente dal sistema di riferimento, ad affermazioni quali

“Gli eventi A e B sono avvenuti allo stesso istante” Einstein fece notare che quando si dice che un treno arriva alle 7 precise ciò significa che il passaggio della lancetta dell’orologio dalle 7 e l’arrivo del treno presso l’orologio sono simultanei. Non si ha certamente una scala universale dei tempi se osservatori inerziali differenti non concordano sulla simultaneità di due eventi. Cerchiamo dapprima di costruire una scala dei tempi non ambigua in un singolo sistema di riferimento: poi possiamo costruire esattamente allo stesso modo scale dei tempi in tutti i riferimenti inerziali e confrontare quello che differenti osservatori hanno da dire sulla sequenza di due eventi A e B. Alcuni “ovvi” metodi di sincronizzazione degli orologi risultano essere erronei. Per esempio, possiamo regolare i due orologi in modo che essi segnino lo stesso tempo visti dall’osservatore A. Ciò significa che ogni volta che A guarda l’orologio di B questo segna per lui lo stesso tempo del suo orologio. Il difetto di questo metodo è che se l’osservatore B usa lo stesso criterio (cioè sono sincronizzati per A) egli troverà che gli orologi non sono sincronizzati per lui se A dice che lo sono, e viceversa. Infatti se la distanza tra gli orologi è L , un osservatore vedrà l’altro orologio in ritardo di $\frac{2L}{c}$ quando l’altro osservatore ritiene che essi siano in sincronismo. Questo metodo è ERRATO. Un modo per uscire da questa difficoltà è quello di regolare i due orologi in modo che segnino lo stesso tempo e poi muoverli verso le posizioni in cui avvengono gli eventi. In linea di principio abbiamo bisogno di orologi in ogni punto del nostro sistema di riferimento per registrare l’istante in cui avvengono gli eventi. Poiché anche secondo la meccanica classica, il moto può influenzare il ritmo a cui vanno gli orologi, la cosa più logica da fare è di mettere i nostri orologi in posizione e sincronizzarli per mezzo di segnali. Se avessimo un metodo di trasmettere segnali con velocità infinita, non ci sarebbero complicazioni, i segnali andrebbero dall’orologio A all’orologio B, all’orologio C

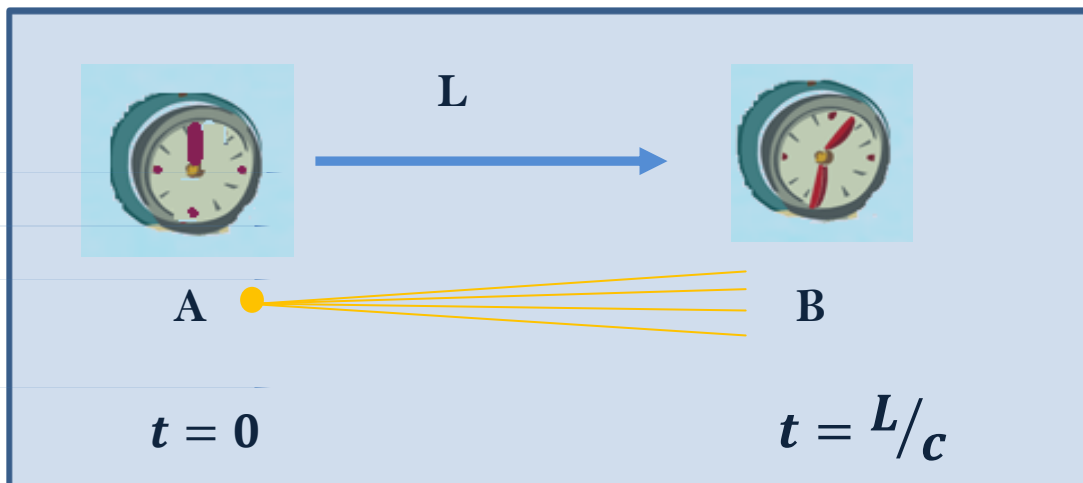
e così via, in un tempo nullo. Si potrebbe fare uso di un tale segnale per fare segnare a tutti gli orologi lo stesso tempo. Ma nessun segnale che si conosca gode di questa proprietà, tutti i segnali noti richiedono di un tempo finito per percorrere una certa distanza e il tempo aumenta con la distanza percorsa

$$v = \frac{\text{spazio}}{\text{tempo}} \quad \Rightarrow \quad \text{tempo} = \frac{\text{spazio}}{\text{velocità}}$$

Come segnale sceglieremo le onde elettromagnetiche (e in particolare la luce) che ha una velocità di propagazione c la più alta conosciuta. Ora analizzeremo i modi di sincronizzazione degli orologi e vedremo che abbiamo 2 metodi per sincronizzarli.

2.3 I due metodi di sincronizzazione degli orologi

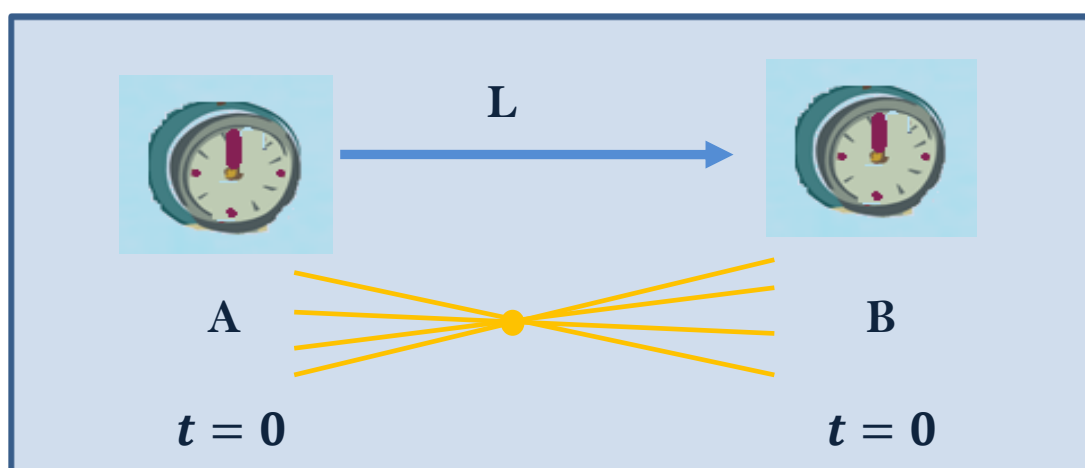
I° metodo sincronizzazione orologi



Immaginiamo un osservatore con una sorgente luminosa che può essere una lampada presso ciascun orologio A e B. La distanza misurata tra gli orologi (e gli osservatori) sia L . Allora A accenderà la sua sorgente luminosa a $t = 0$ e l'osservatore B metterà il suo orologio a $t = L/c$ all'istante in cui riceve il

segnale luminoso da A. Questo procedimento tiene conto del tempo di trasmissione e sincronizza gli orologi in un modo consistente. Per esempio, se B accende successivamente la sua lampada al tempo t segnato dal suo orologio, il segnale arriverà in A al tempo $t + L/c$, che è appunto quello che l'orologio di A segnerà quando A riceve il segnale.

II° metodo sincronizzazione orologi

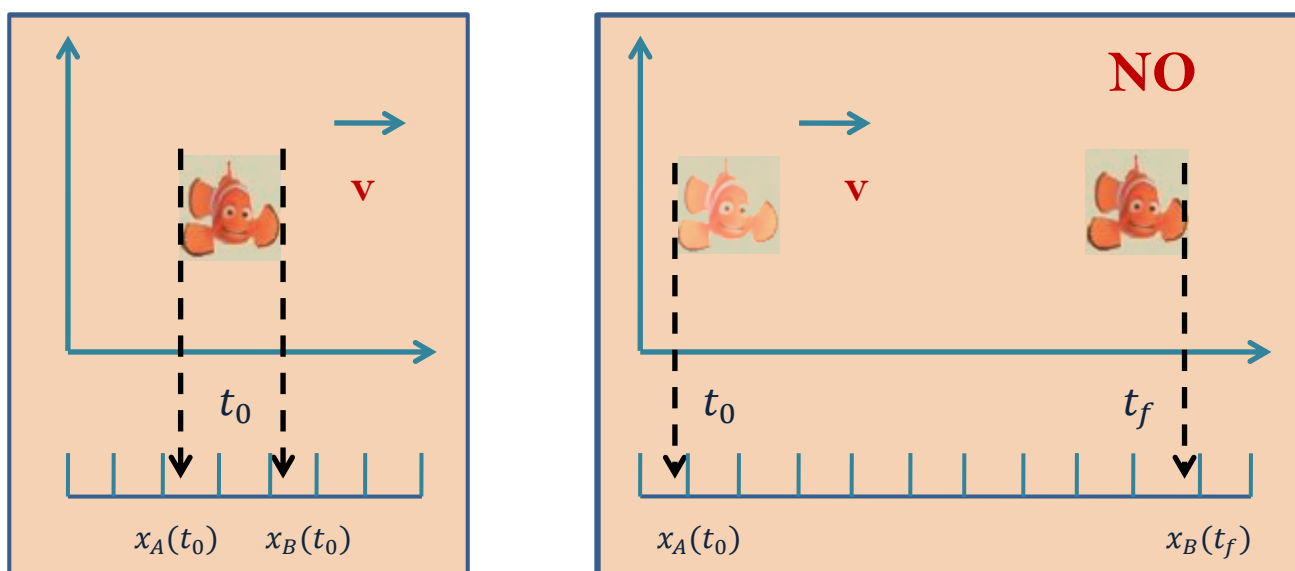


Un metodo equivalente al precedente consiste nel mettere una sorgente luminosa esattamente nel punto di mezzo della retta congiungente A e B e informare ciascun osservatore di mettere il proprio orologio al tempo $t = 0$ quando gli arriva il segnale luminoso di accensione. La luce impiegherà un tempo eguale per arrivare dal punto di mezzo ad A e a B, quindi questo procedimento sincronizza effettivamente gli orologi.

Ora che abbiamo un procedimento per sincronizzare gli orologi in un sistema di riferimento, possiamo giudicare l'ordine temporale degli eventi in quel riferimento. Il tempo di un evento è misurato dall'orologio la cui posizione coincide con quella dell'evento.

Eventi che accadono in due luoghi diversi si devono chiamare *simultanei* quando gli orologi corrispondenti registrano per essi lo stesso tempo.

Definizione Lunghezza : Misurare la lunghezza di un oggetto significa localizzare simultaneamente i suoi estremi, ovvero registrare per mezzo di orologi sincronizzati le posizioni in cui si trovano le due estremità dell'oggetto e misurarle poi attraverso un regolo campione

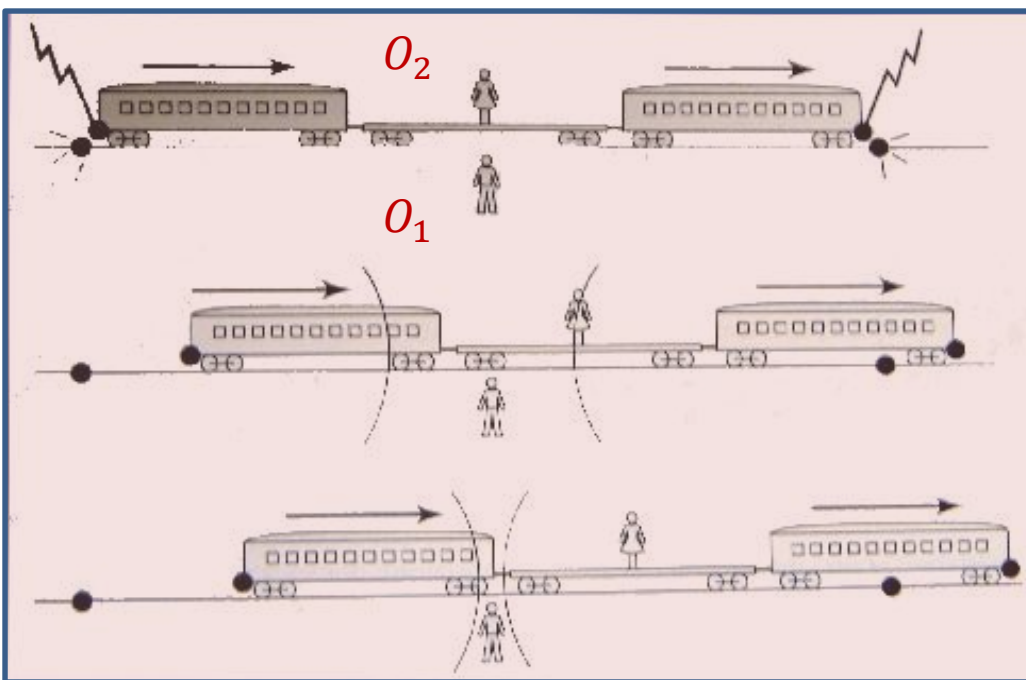


➡ **Il legame spazio-tempo è necessario e sufficiente per la definizione di ciascun evento che accada nello spazio. Un evento non è definibile a meno delle coordinate spazio-tempo.**

2.4 La relatività della simultaneità


Supponiamo che un osservatore inerziale trovi che due eventi separati sono simultanei. Questi stessi eventi saranno considerati simultanei da un osservatore o da un altro sistema inerziale che sia in movimento rispetto al primo con velocità v ? Se ciò non succe-

de, la simultaneità non è indipendente dal sistema di riferimento usato per descrivere gli eventi. Invece di essere assoluto il concetto di simultaneità sarebbe un concetto relativo. Infatti, vedremo che ciò è proprio vero in diretta contraddizione col postulato classico. Per comprendere questo fatto, consideriamo un esempio. Ci siano due sistemi di riferimento S' e S in moto relativo l'uno rispetto all'altro. Ciascun riferimento ha i suoi metri e i suoi orologi sincronizzati.



Due petardi sono fatti esplodere sui binari in corrispondenza delle due estremità del treno. Poiché il treno si muove verso destra il lampo che proviene da destra giunge all'osservatore O_2 prima dell'altro lampo che giunge da sinistra. Per O_2 le due esplosioni non sono simultanee. Per l'osservatore O_1 che si trova a terra invece i due lampi giungono nello stesso istante, visto che si trova esattamente nel punto medio tra i segni di bruciatura. Per O_1 quindi le due esplosioni sono simultanee. L'assioma sulla costanza della velocità della luce permette di stabilire in modo ope-

rativo e non ambiguo quando due eventi sono simultanei o no. Il concetto di simultaneità tra due eventi, così, è solo un concetto relativo, due eventi che risultano essere simultanei in un dato sistema di riferimento, non lo sono in un altro che si muove rispetto al primo. Solo se la luce si propagasse a velocità infinita il giudizio di simultaneità sarebbe assoluto ed uguale per tutti gli osservatori inerziali, così come il tempo sarebbe assoluto, (infatti i riferimenti non si sposterebbero affatto l'uno rispetto all'altro nel tempo (nullo) che il segnale impiegherebbe per raggiungere gli osservatori).

 **Il concetto di simultaneità tra due eventi è relativo e non assoluto a causa della velocità finita $c = 300.000$ km/s con cui si propaga la luce. Così la simultaneità non è indipendente dal sistema di riferimento usato per descrivere gli eventi.**

Alcune altre conclusioni derivano automaticamente dalla relatività della simultaneità. Misurare la lunghezza di un oggetto significa localizzare simultaneamente i suoi estremi. Poiché la simultaneità è un concetto relativo, anche le misure di lunghezza dipenderanno dal sistema di riferimento e saranno relative. Inoltre si trova che il ritmo con cui battono gli orologi dipende dal sistema di riferimento.

2.5 Derivazione delle trasformazioni di Lorentz

Abbiamo visto che le equazioni di Galileo devono essere sostituite da delle nuove che siano consistenti con l'esperienza. Descriveremo ora queste nuove equazioni, usando i postulati della teoria della relatività ristretta ed inoltre faremo uso dell'ipotesi di omogeneità, ovvero l'ipotesi che lo spazio ed il tempo siano omogenei, in altre parole vuol dire che i risultati di misura di un intervallo di lunghezza o di tempo di un evento

non dipendono da dove o quando tale intervallo capita nel nostro sistema di riferimento, (tutti i punti nello spazio e nel tempo sono equivalenti). L'ipotesi dell'omogeneità richiede che le equazioni di trasformazione debbano essere lineari (cioè, contengano solo la prima potenza delle variabili), quindi la forma più generale che esse possono avere è:

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t$$

$$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t$$

$$z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t$$

$$t' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t$$

Qui, i coefficienti a_{ij} ($i, j = 1, \dots, 4$), sono delle costanti che dobbiamo determinare per ottenere le equazioni di trasformazione esatte. Si noti che non escludiamo la possibile dipendenza delle coordinate spaziali e temporali l'una dall'altra. Se le equazioni non fossero lineari, verrebbe violata l'ipotesi di omogeneità. Per esempio, supponiamo che x' dipenda dal quadrato di x , cioè sia $x' = a_{11}x^2$. Allora la distanza tra due punti nel sistema accentato sarebbe legata alla posizione di questi punti nel sistema non accentato da $x'_2 - x'_1 = +a_{11}(x_2^2 - x_1^2)$. Supponiamo ora che un'asta di lunghezza unitaria in S abbia i suoi estremi in $x_2 = 2$ e $x_1 = 1$; allora $x'_2 - x'_1 = 3a_{11}$. Se invece, la stessa asta fosse posta in $x_2 = 5$ e $x_1 = 4$ avremmo ottenuto $x'_2 - x'_1 = 9a_{11}$. Cioè, la lunghezza misurata dell'asta dipenderebbe dalla sua posizione nello spazio. Similmente, possiamo escludere ogni dipendenza da t che non sia lineare, in quanto l'intervallo temporale di un evento non deve dipendere dall'indicazione numerica delle lancette dell'orologio dell'osservatore. Le relazioni devono quindi essere lineari per non fare della scelta dell'origine delle nostre coordinate spazio-temporali (o di qualche altro punto) una preferenza dal punto di vista fisico su tutti gli altri punti.

Ora, considerando questi sedici coefficienti, ci si aspetta che i loro valori dipendono dalla velocità relativa v dei due riferimenti inerziali. Per esempio, se $v = 0$, i due riferimenti coincidono in ogni istante e ci aspettiamo $a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = 1$ e tutti gli altri coefficienti uguali a zero. Più generalmente se v è piccola rispetto a c , i coefficienti devono ricondurre alle equazioni classiche di trasformazione di Galileo. Ci proponiamo di trovare i coefficienti per un valore qualunque di v , cioè come funzioni di v . In che modo allora determiniamo i valori di questi sedici coefficienti? Fondamentalmente, facciamo uso dei postulati della relatività, cioè (1) il principio di relatività, non esiste alcun riferimento inerziale privilegiato, le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi inerziali, e (2) il principio della costanza della velocità della luce nel vuoto ha lo stesso valore c in tutti i sistemi di riferimento inerziali. L'asse x coincide continuamente con l'asse x' . Ciò impone che per $y = 0, z = 0$ (che caratterizzano punti sull'asse x) si abbia sempre che $y' = 0, z' = 0$ (che caratterizzano punti sull'asse x'). Quindi le formule di trasformazione per y e z devono essere del tipo:

$$y' = a_{22}y + a_{23}z \quad \text{e} \quad z' = a_{32}y + a_{33}z$$

Cioè, i coefficienti $a_{21}, a_{24}, a_{31},$ e a_{34} devono essere zero. Similmente, il piano $x - y$ (che è caratterizzato da $z = 0$) si deve trasformare nel piano $x' - y'$ (che è caratterizzato da $z' = 0$); e così, per i piani $x - z$ e $x' - z'$, $y = 0$ deve dare $y' = 0$. Ne segue che a_{23} e a_{32} sono zero e perciò:

$$y' = a_{22}y \quad \text{e} \quad z' = a_{33}z$$

Questi coefficienti costanti a_{22} e a_{33} , possono essere valutati usando il postulato di relatività. Illustriamo il procedimento per a_{22} . Supponiamo di avere un'asta posta lungo l'asse y che risul-

ta di lunghezza unitaria rispetto a S . Secondo l'osservatore S' la lunghezza dell'asta sarà a_{22} , (cioè, $y' = a_{22} \times 1$). Ora, supponiamo che la stessa asta sia portata a riposo lungo l'asse y' del riferimento S' . L'osservatore accentato deve misurare per questa asta, quando essa è in riposo nel suo riferimento, la stessa lunghezza (unitaria) misurata dall'osservatore non accentato quando l'asta è in riposo rispetto ad esso: altrimenti ci sarebbe un'assimmetria nei riferimenti. In questo caso, tuttavia l'osservatore S troverebbe che la lunghezza dell'asta è $1/a_{22}$ [cioè $y = (1/a_{22}) y' = (1/a_{22}) \times 1$]. Ora, per la natura reciproca di queste misure di lunghezza, il primo postulato richiede che queste misure diano risultati identici, poiché altrimenti i riferimenti non sarebbero fisicamente equivalenti. Quindi, si deve avere $a_{22} = 1/a_{22}$ ossia $a_{22} = 1$. Il medesimo ragionamento si può fare per determinare $a_{33} = 1$. Perciò, le nostre due equazioni centrali di trasformazione diventano:

$$y' = y \quad \text{e} \quad z' = z$$

Rimangono le equazioni di trasformazione per x' e t' , cioè,

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t \\ \text{e} \quad t' &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t \end{aligned}$$

Consideriamo dapprima l'equazione per t' . Per ragioni di simmetria, supponiamo che t' non dipenda da y e z . Altrimenti, orologi disposti nel piano $y - z$ simmetricamente rispetto all'asse x (quali quelli in $+y, -y$ oppure $+z, -z$), sembrerebbero in disaccordo osservati da S' , il che sarebbe in contraddizione dell'isotropia dello spazio. Quindi $a_{42} = a_{43} = 0$. Per quanto riguarda l'equazione per x' , sappiamo che un punto avente $x' = 0$ sembra muoversi nel verso positivo dell'asse x con velocità v quindi l'affermazione $x' = 0$ deve essere identica a quella $x = vt$. Perciò ci aspettiamo che $x' = a_{11}(x - vt)$ sia la trasformazione

corretta. (Cioè, $x = vt$ dà sempre $x' = 0$ in questa equazione).
 Quindi, $x' = a_{11}x - a_{11}vt = a_{11}x + a_{14}t$. Questa equazione dà
 $a_{14} = -va_{11}$, e le nostre quattro equazioni si sono ora ridotte
 alle seguenti:

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= a_{41}x + a_{44}t \end{aligned} \quad (\square)$$

Resta ora il problema di determinare i tre coefficienti a_{11} , a_{41} ,
 e a_{44} . Per fare ciò, usiamo il principio della costanza della ve-
 locità della luce. Supponiamo che al tempo $t = 0$ un'onda elet-
 tromagnetica sferica lasci l'origine di S, che coincide con l'ori-
 gine di S' in quel momento. L'onda si propaga con velocità c
 in tutte le direzioni in ciascun riferimento inerziale. La sua
 propagazione è, allora, descritta dall'equazione di una sfera il
 cui raggio si espande nel tempo con velocità c sia nel sistema
 di coordinate accentato che in quello non accentato. Cioè

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= c^2t^2 \\ \text{ossia} \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 &= c^2t'^2 \end{aligned}$$

Se ora sostituiamo nell'equazione $x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2$ le equa-
 zioni di trasformazione (\square) , otteniamo:

$$a_{11}^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2(a_{41}x + a_{44}t)^2$$

Raccogliendo opportunamente i termini si ha:

$$(a_{11}^2 - c^2a_{41}^2)x^2 + y^2 + z^2 - 2(va_{11}^2 + c^2a_{41}a_{44})xt = (c^2a_{44}^2 - v^2a_{11}^2)t^2$$

Affinché questa espressione si accordi con l'equazione
 $x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$, che rappresenta la stessa cosa, deve essere:

$$\begin{aligned}
c^2 a_{44}^2 - v^2 a_{11}^2 &= c^2 \\
a_{11}^2 - c^2 a_{41}^2 &= 1 \\
v a_{11}^2 + c^2 a_{41} a_{44} &= 0
\end{aligned}$$

Queste sono tre equazioni in tre incognite, la cui soluzione è:

$$\begin{aligned}
a_{44} &= 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \\
a_{11} &= 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \\
e \quad a_{41} &= -\frac{v}{c^2}/\sqrt{1 - v^2/c^2}
\end{aligned}$$

Sostituendo questi valori nelle equazioni (10), otteniamo, infine, le nuove equazioni di trasformazione che cercavamo:

$$\left\{ \begin{aligned}
x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\
y' &= y \\
z' &= z \\
t' &= \frac{t - \left(\frac{v}{c^2}\right)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}
\end{aligned} \right.$$

Equazioni di trasformazione di Lorentz

Fu Poincaré a dare questo nome alle equazioni. Lorentz, nella sua teoria classica degli elettroni, le aveva proposte prima di Einstein. Tuttavia, Lorentz considerò come v la velocità relativa ad un riferimento assoluto dell'etere e diede una differente interpretazione alle equazioni. Prima di illustrare il significato di queste equazioni le dobbiamo sottoporre a due necessarie verifiche. In primo luogo, se scambiamo i due nostri sistemi di riferimento ossia, il che

è lo stesso, consideriamo come coordinate spazio-temporali dell'evento quelle osservate in S' piuttosto che quelle in S , la sola variazione permessa dal principio di relatività è quella fisicamente comprensibile, del cambiamento della velocità relativa da v a $-v$. Cioè il sistema S si allontana da S' verso sinistra mentre il sistema S' si allontana da S verso destra. Quando risolviamo le equazioni di trasformazione di Lorentz per x, y, z, t in termini delle coordinate accentate, otteniamo:




$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x' - vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{t' - \left(\frac{v}{c^2}\right)x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{array} \right.$$

che sono formalmente identiche alle equazioni di trasformazione di Lorentz scritte sopra, eccetto che, come richiesto, v si trasforma in $-v$. Un altro requisito è che per velocità piccole rispetto a c , cioè per $v/c \ll 1$, le equazioni di Lorentz diventino:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}$$

che sono le equazioni delle trasformazioni classiche di Galileo.

Lorentz nel 1904, fece uso di un gran numero di ipotesi ad hoc e postulò le equazioni di Lorentz a priori per ottenere l'invarianza delle equazioni di Maxwell nel vuoto. Einstein invece come abbiamo visto, le derivò formalmente dai due principi fondamentali della relatività ristretta e ne dedusse poi formalmente gli effetti relativistici che sono:

-  Relatività della simultaneità
-  Dilatazione dei tempi
-  Contrazione delle lunghezze

Effetti Relativistici

Prima di esaminare gli effetti relativistici della dilatazione dei tempi e della contrazione delle lunghezze è bene definire alcuni termini che più volte useremo:

TEMPO PROPRIO $\Delta t'$: L'intervallo di tempo tra due eventi dove posso usare un solo orologio (perché i due eventi avvengono nello stesso punto).

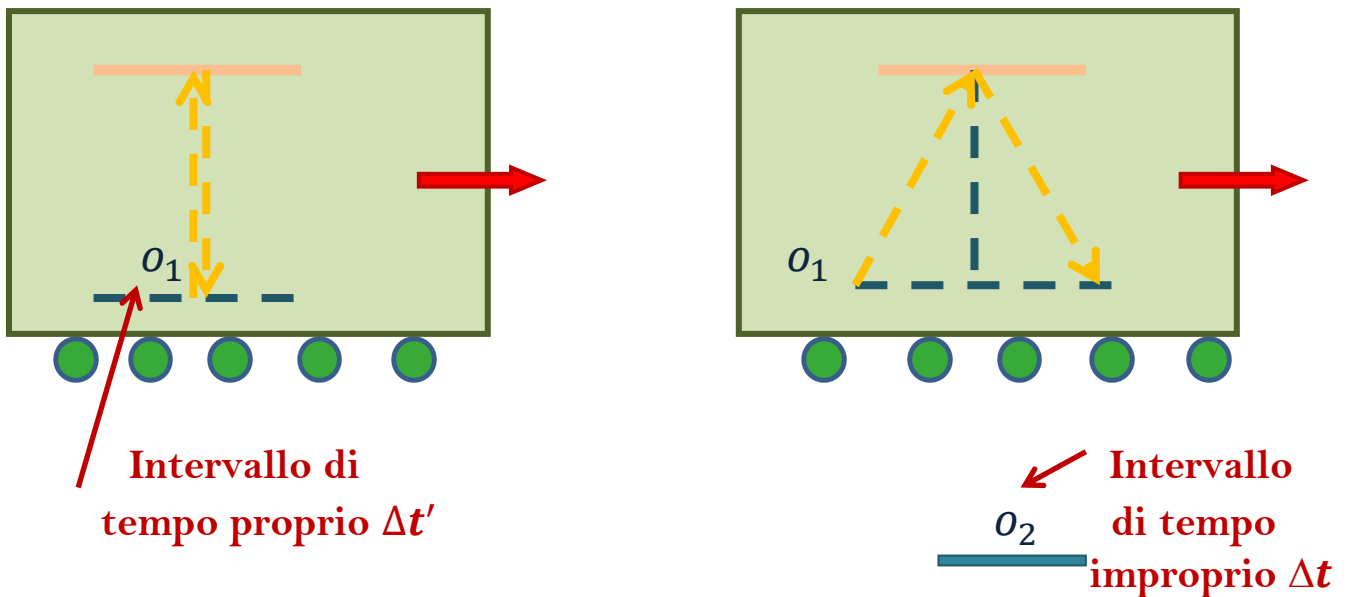
TEMPO IMPROPRIO Δt : L'intervallo di tempo tra due eventi dove devo usare due orologi (perché i due eventi avvengono in due luoghi differenti).

LUNGHEZZA PROPRIA L : Lunghezza dell'oggetto fermo attraverso l'utilizzo di un regolo campione. Ovvero confronto diretto dell'oggetto con un regolo campione solo quando siamo nel sistema solidale all'oggetto (siamo nello stesso sistema dell'oggetto).

LUNGHEZZA IMPROPRIA L' : Lunghezza dell'oggetto in movimento attraverso l'utilizzo di orologi sincronizzati. Ovvero registriamo per mezzo di orologi sincronizzati collocati nel sistema in moto relativo, le posizioni in cui si trovano le due estremità dell'oggetto da misurare, e questo è possibile solo quando siamo nel sistema in moto rispetto all'oggetto (siamo in un sistema diverso da quello dell'oggetto).

2.6 La dilatazione dei tempi

Un semplice esperimento che rivela in modo diretto la relazione quantitativa tra gli intervalli di tempo tra due eventi misurati da due riferimenti inerziali diversi è quello dell'orologio a luce.



Immaginiamo un passeggero **O1** che si trovi su un treno che si muove con velocità v verso destra rispetto la terra. L'esperimento consiste nell'inviare un fascio di luce su uno specchio posto sul soffitto e misurare il tempo che occorre alla luce per andare e tornare al suo punto di partenza. Per l'osservatore **O1**, che invia il fascio di luce da dentro il treno, il fascio di luce segue un cammino rigorosamente verticale per andare e tornare al suo punto di partenza. Questo è un intervallo di tempo proprio misurato da un unico orologio (l'orologio da polso del passeggero **O1**) posto in una certa posizione in quanto la partenza e l'arrivo del segnale luminoso avvengono nello stesso luogo nel riferimento S' del passeggero. L'osservatore **O2** invece, fisso nel riferimento S della terra, vede il treno e il passeggero muoversi verso destra durante questo intervallo. Egli misurerà l'intervallo di tempo delle

letture di due orologi stazionari, uno nel luogo dell'invio del fascio di luce e l'altro nel luogo del ritorno del fascio di luce. Quindi egli confronta la lettura di un orologio in movimento, quella del passeggero **O1**, con quelle di due orologi stazionari. Per l'osservatore **O2**, il fascio di luce segue un cammino obliquo. Così l'osservatore sulla terra trova che la luce percorre una distanza più grande di quella misurata dal passeggero. Poiché la velocità della luce è la stessa in entrambi i riferimenti, l'osservatore sulla terra misura un intervallo di tempo più grande di quello del passeggero. Egli conclude che l'orologio del passeggero rimane indietro.

➡ *Un orologio va al ritmo più veloce quando è in riposo rispetto all'osservatore. Quando si muove con velocità v rispetto all'osservatore, il suo ritmo misurato rallenta di un fattore $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < 1$*

➡
$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

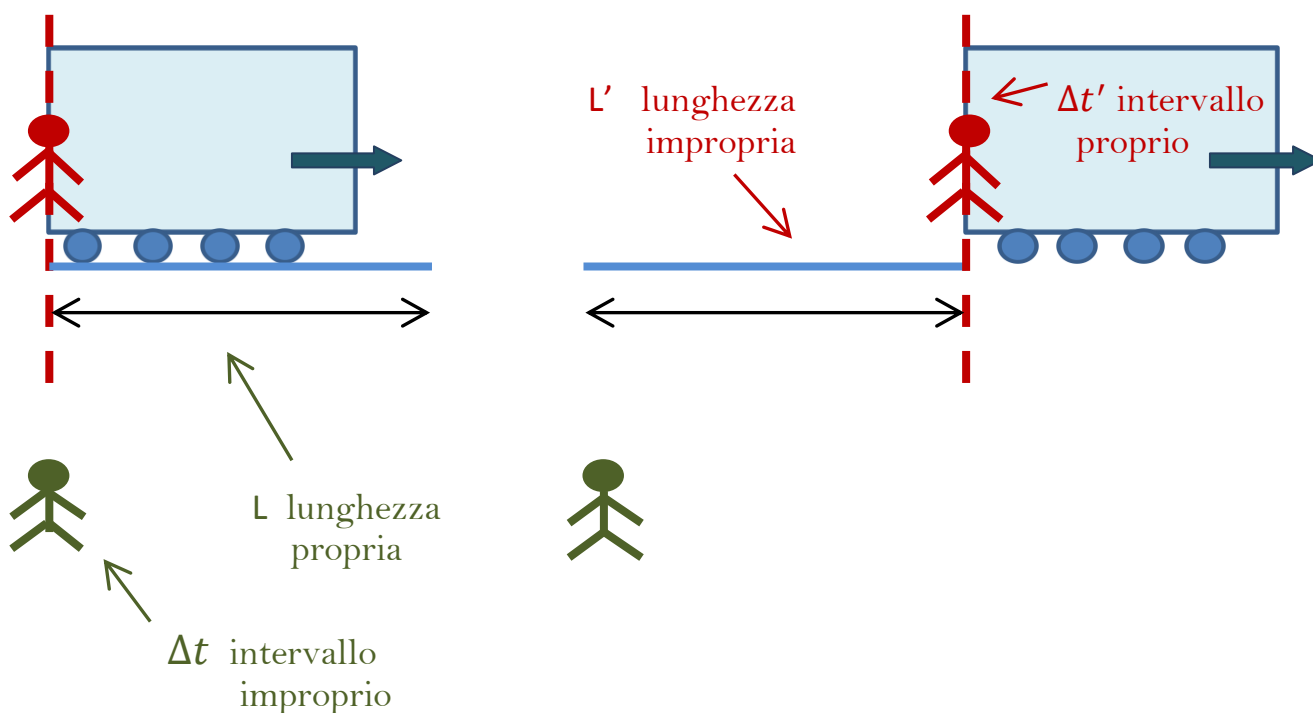
(cioè il tempo proprio $\Delta t'$ è sempre $<$ del tempo improprio Δt)

➡ *Il tempo scorre a velocità differenti per sistemi di orologi in moto l'uno rispetto all'altro. **“I tempi”** sostituiscono il tempo.*



2.7 La contrazione delle lunghezze

Conseguenza immediata della dilatazione dei tempi è la contrazione delle lunghezze. Immaginiamo due diversi osservatori inerziali, uno posto su un treno che passa davanti alla stazione con velocità v , l'altro a riposo nella stazione. Vogliamo misurare la lunghezza della piattaforma della stazione.



L'osservatore posto sulla terra trova che la lunghezza è L e sostiene che il passeggero ha coperto questa distanza nel tempo L/v . Questo tempo Δt è un tempo non proprio, poiché gli eventi osservati (il passaggio del passeggero dall'inizio della piattaforma e il passaggio del passeggero dalla fine della piattaforma) avvengono in luoghi diversi nel riferimento (S) della terra e sono registrati da due orologi differenti. Il passeggero, tuttavia, osserva la piattaforma avvicinarsi e allontanarsi e trova che i due eventi accadono nello stesso luogo nel suo riferimento (S'). Cioè il suo orologio (da polso) si trova sempre nel luogo dove accade ciascun evento.

Il passeggero a bordo del treno misura un intervallo di tempo proprio $\Delta t'$ che come abbiamo visto è legato a Δt dalla seguente relazione :

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \Delta t' \gamma$$

γ = fattore di Lorentz

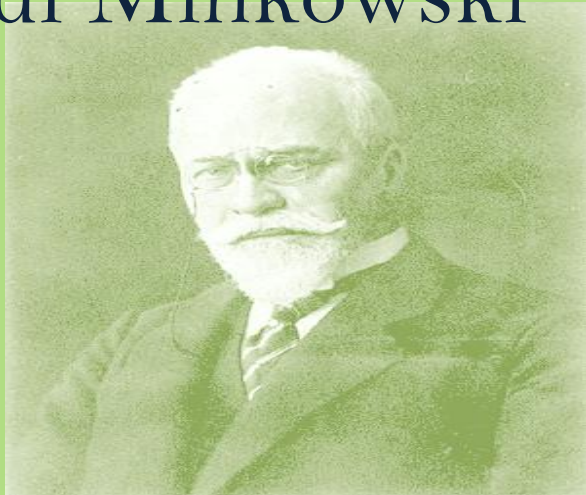
$$L = v \Delta t = v \Delta t' \gamma = L' \gamma > 1$$

lunghezza propria L > lunghezza impropria L'
 tempo proprio $\Delta t'$ < tempo improprio Δt

Quindi per l'osservatore a terra la lunghezza della piattaforma della stazione è maggiore della lunghezza misurata dall'osservatore a bordo del treno, e così anche l'intervallo di tempo misurato per percorrerla è maggiore rispetto all'intervallo di tempo misurato dall'osservatore a bordo del treno per il quale la piattaforma è più corta e quindi impiega meno tempo a percorrerla.

➡ *La lunghezza misurata di un corpo è più grande quando esso è in riposo relativamente all'osservatore. Quando il corpo si muove con una velocità v rispetto all'osservatore la sua lunghezza misurata si contrae nella direzione del moto del fattore $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < 1$, mentre le sue dimensioni perpendicolari alla direzione del moto non vengono alterate.*

Capitolo 3. Lo “spazio-tempo” di Minkowski



“D’ora innanzi, lo spazio in se stesso, e il tempo in se stesso, sono condannati a svanire come pure ombre, e solo una sorta di unione tra i due conserverà una realtà indipendente”

3.1 I diagrammi spazio-temporali

Nella fisica classica, la coordinata tempo non è influenzata dalla trasformazione da un riferimento inerziale ad un altro. La coordinata tempo, t' , di un riferimento inerziale non dipende dalle coordinate spaziali, x, y, z , di un altro sistema inerziale essendo l'equazione di trasformazione $t' = t$. Nella relatività, tuttavia, spazio e tempo sono interdipendenti. La coordinata tempo di un sistema inerziale dipende sia dalla coordinata temporale che da quelle spaziali di un altro sistema inerziale, essendo l'equazione

di trasformazione $t' = \frac{t - \left(\frac{v}{c^2}\right)x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. Perciò, invece di trattare

separatamente lo spazio e il tempo, come si fa del tutto correttamente nella teoria classica, in relatività è naturale trattarli assieme. H. Minkowski fu il primo ad illustrare chiaramente come ciò si poteva fare.

➡ *Se in fisica classica spazio e tempo sono trattati separatamente, in relatività sono trattati assieme come relazioni tra eventi o oggetti.*

➡ *Minkowski decide di rappresentare, con un **nuovo linguaggio**, quello **geometrico**, questa interdipendenza tra spazio e tempo, che rappresenta la chiave della teoria della relatività.*

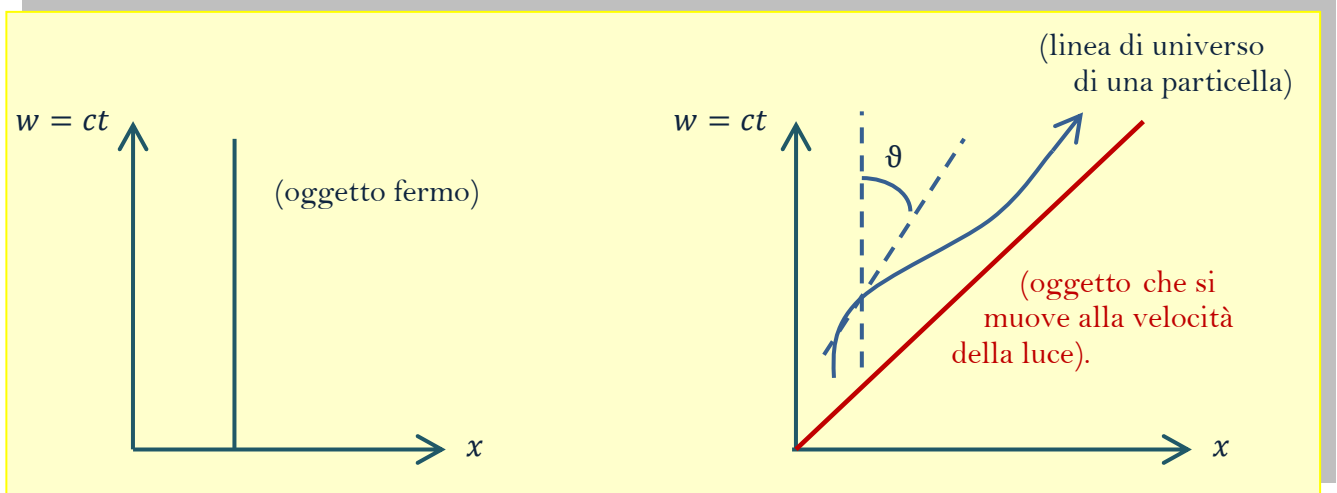
Ricordiamo le equazioni di trasformazione di Lorentz:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \left(\frac{v}{c^2}\right)x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{array} \right.$$

Nel seguito **considereremo solamente l'asse spaziale (orizzontale) e quello temporale (verticale)**, questo ci permetterà di mettere più chiaramente a fuoco l'interdipendenza dello spazio e del tempo e la loro rappresentazione geometrica. Se chiamiamo $\omega = ct$ e $\beta = \frac{v}{c}$ allora le equazioni di Lorentz possono essere riscritte così:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - \beta\omega}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \omega' = \frac{\omega - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{array} \right.$$

Per rappresentare geometricamente la situazione, cominciamo col disegnare gli assi x e $w = ct$ del riferimento S, ortogonali l'uno all'altro.

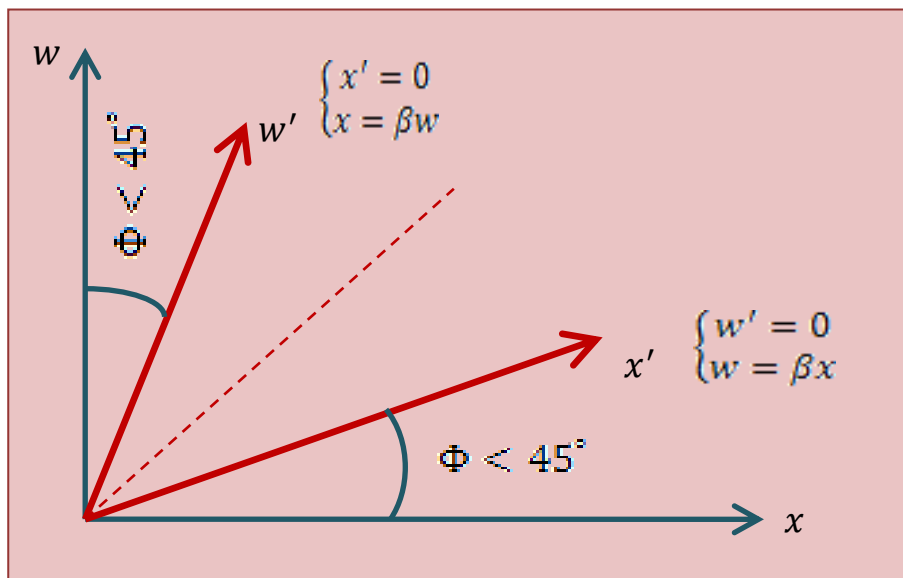


L'asse temporale w : fisicamente rappresenta un oggetto fermo in una determinata posizione ed il suo trascorrere del tempo.

L'asse spaziale x : fisicamente rappresenta tutti gli eventi simultanei ad un dato evento che prendo come riferimento, (cioè l'origine del mio asse).

Se vogliamo rappresentare il moto di una particella in questo riferimento, tratteremo una curva, detta linea d'universo, che dà l'insieme dei punti dello spazio-tempo corrispondenti al moto. La tangente alla linea d'universo in un punto qualunque, essendo $\frac{dx}{dw} = \left(\frac{1}{c}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)$, è sempre inclinata di un angolo $< 45^\circ$ rispetto all'asse temporale. Infatti questo angolo è dato da $\tan\vartheta = \frac{dx}{dt} = \frac{u}{c}$ e si deve avere sempre $u < c$ per una particella materiale. La linea di universo di un'onda luminosa per la quale $u = c$ è la bisettrice degli assi (angolo 45°).

Consideriamo ora anche il riferimento S' che si muove rispetto ad S con velocità v lungo l'asse comune $x - x'$.

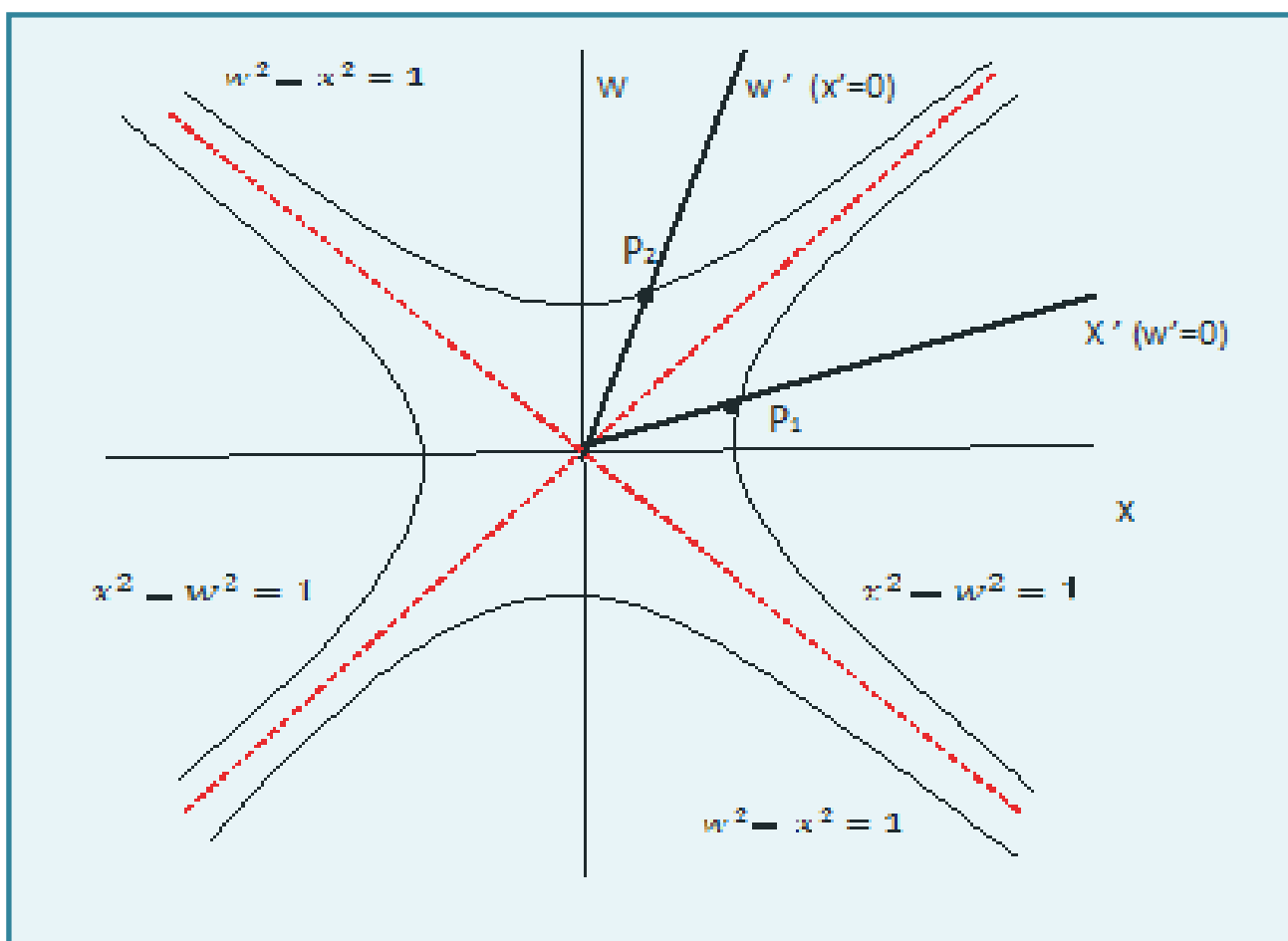


$$w = ct$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

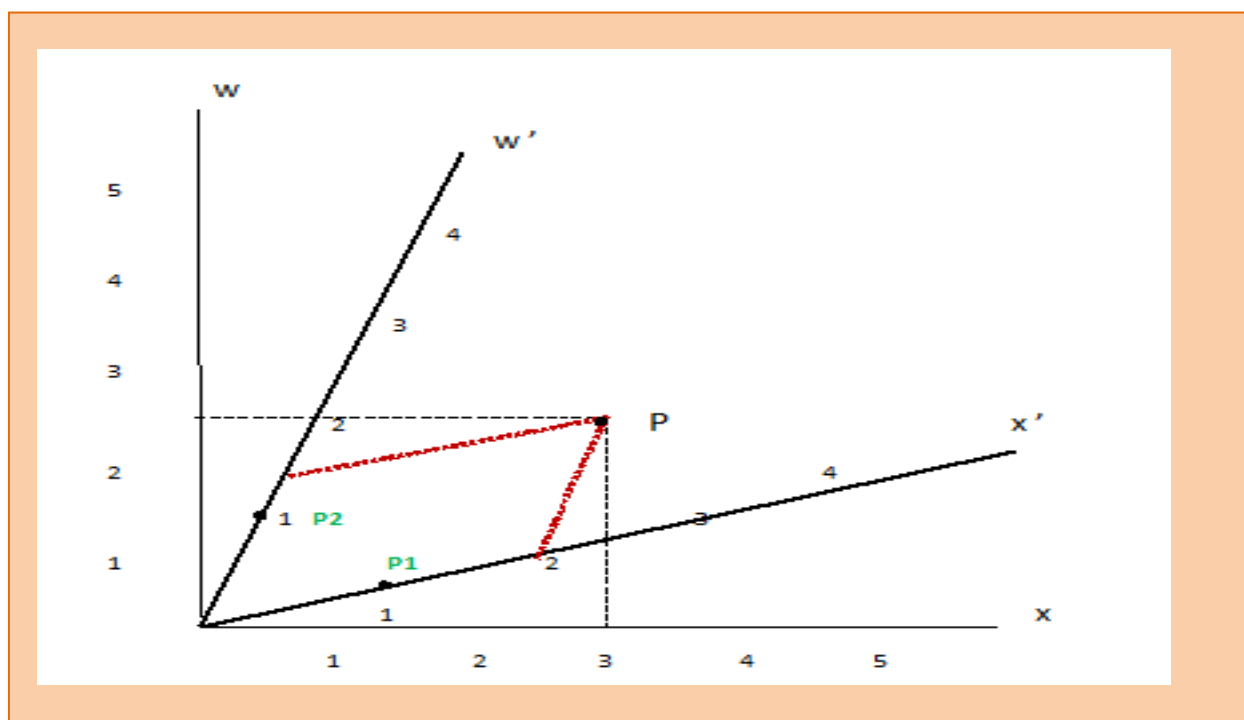
L'equazione del moto di S' rispetto ad S può essere ottenuta ponendo $x' = 0$ ciò corrisponde a $x = \beta w = vt$. Disegniamo la linea $x' = 0$ cioè $x = \beta w = vt$ e notiamo che, poiché $v < c$ e $\beta < 1$, l'angolo che questa linea fa coll'asse w , $\Phi (= \arctg \beta)$, è minore di 45° . Come l'asse w corrisponde a $x = 0$ ed è l'asse dei tempi nel riferimento S , così la retta $x' = 0$ dà l'asse dei tempi w' in S' . Ora, se disegniamo la retta $w' = 0$ (che dà la posizione degli orologi che segnano $t' = 0$ in S'), avremo l'asse spaziale x' . Cioè come l'asse x corrisponde a $w = 0$, così l'asse x' corrisponde a $w' = 0$. Si vede che nello spazio a quattro dimensioni (x, y, z, t) le equazioni di Lorentz determinano una trasformazione da un sistema ortogonale ad uno non ortogonale. **Possiamo usare questa rappresentazione per illustrare la relatività della simultaneità e dare un'interpretazione degli effetti di contrazione spaziale e dilatazione temporale.**

A questo scopo, rappresentiamo la situazione in un nuovo diagramma dove disegniamo i due rami dell'iperbole $w^2 - x^2 = 1$ e i due rami dell'iperbole $x^2 - w^2 = 1$. Queste curve, il cui significato diverrà chiaro fra breve, si avvicinano asintoticamente alle linee di universo (a 45°) dei raggi luminosi. Disegniamo anche gli assi x e w di S e gli assi x' e w' di S' .

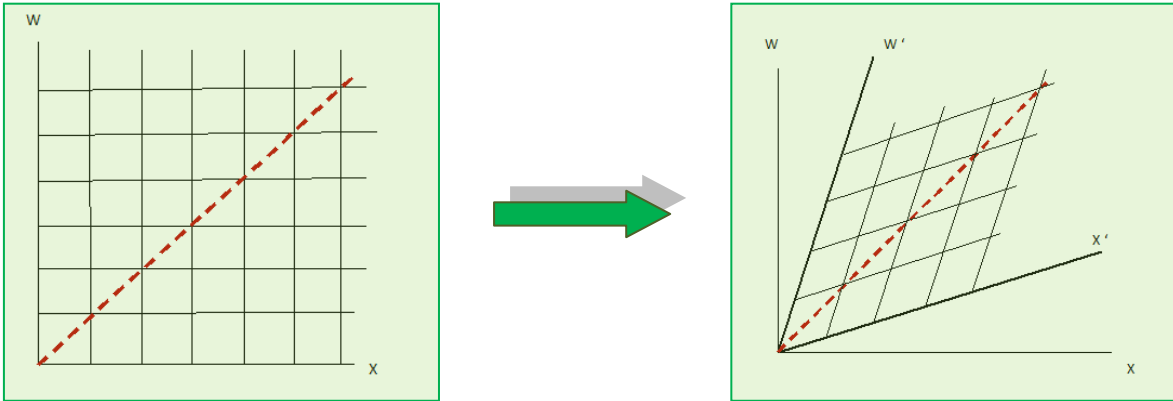


L'intervallo OP_1 dà l'unità di lunghezza lungo l'asse x' mentre l'intervallo OP_2 dà il tempo unitario lungo l'asse w' . Le iperboli vengono chiamate **curve di calibrazione**.

La prima cosa che dobbiamo riuscire a fare è determinare le coordinate spazio-temporali di un evento P dal diagramma di Minkowski. Per trovare le coordinate spaziali dell'evento, tracciamo semplicemente da P una retta parallela all'asse dei tempi fino ad incontrare l'asse spaziale. La coordinata tempo è analogamente data da una retta parallela all'asse spaziale tracciata da P verso l'asse dei tempi. Le stesse regole valgono sia per il riferimento accentato che per quello non accentato. Nella figura per esempio l'evento P ha come coordinate spazio-temporali $x = 3$, $w = 2,5$ in S $x' = 2$, $w' = 1,5$ in S' .



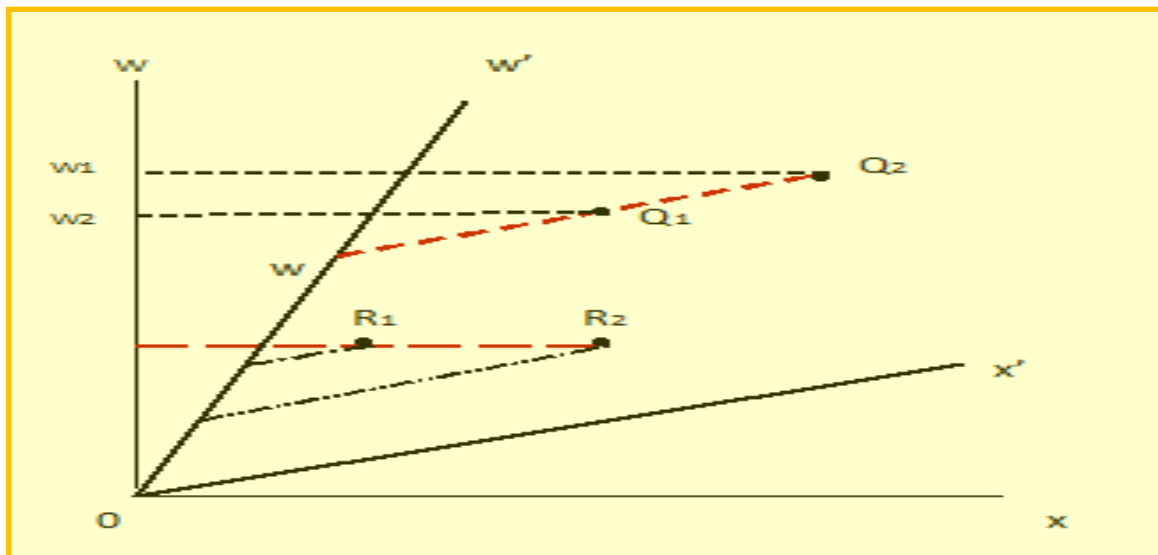
Tutto avviene come se il reticolo rettangolare delle rette coordinate di S si schiacciasse verso la bisettrice a 45° quando vengono riportate nello stesso grafico le rette coordinate di S' . Cioè **le equazioni di Lorentz trasformano un sistema ortogonale in uno non ortogonale.**



Le equazioni di Lorentz trasformano un sistema ortogonale in uno non ortogonale.

3.2 Simultaneità, contrazione e dilatazione

Ora possiamo facilmente dimostrare la relatività della simultaneità. Misurati due eventi nel riferimento S' , essi saranno simultanei se hanno la stessa coordinata temporale w' . Quindi se gli eventi giacciono su una retta parallela all'asse x' essi sono simultanei in S' . Nella figura sotto riportata per esempio, gli eventi Q_1 e Q_2 sono simultanei in S' per il quale avvengono nello stesso tempo w mentre ovviamente non sono simultanei in S poiché in questo riferimento avvengono in due tempi diversi w_1 e w_2 . Analogamente due eventi R_1 e R_2 che sono simultanei in S , sono distanziati nel tempo in S' .

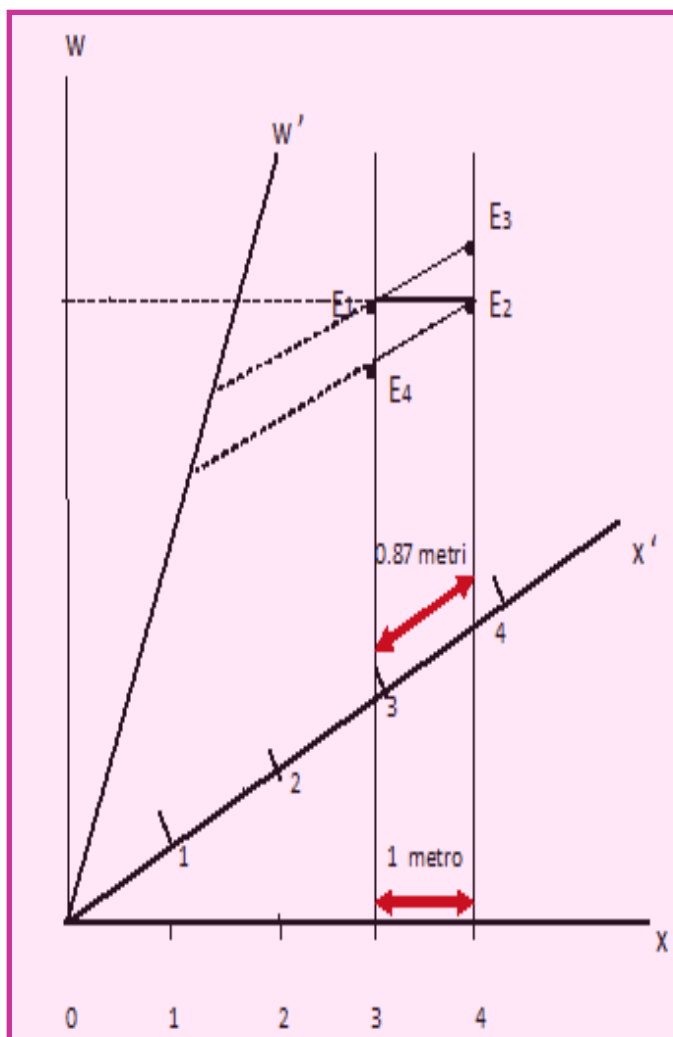


Contrazione dello spazio

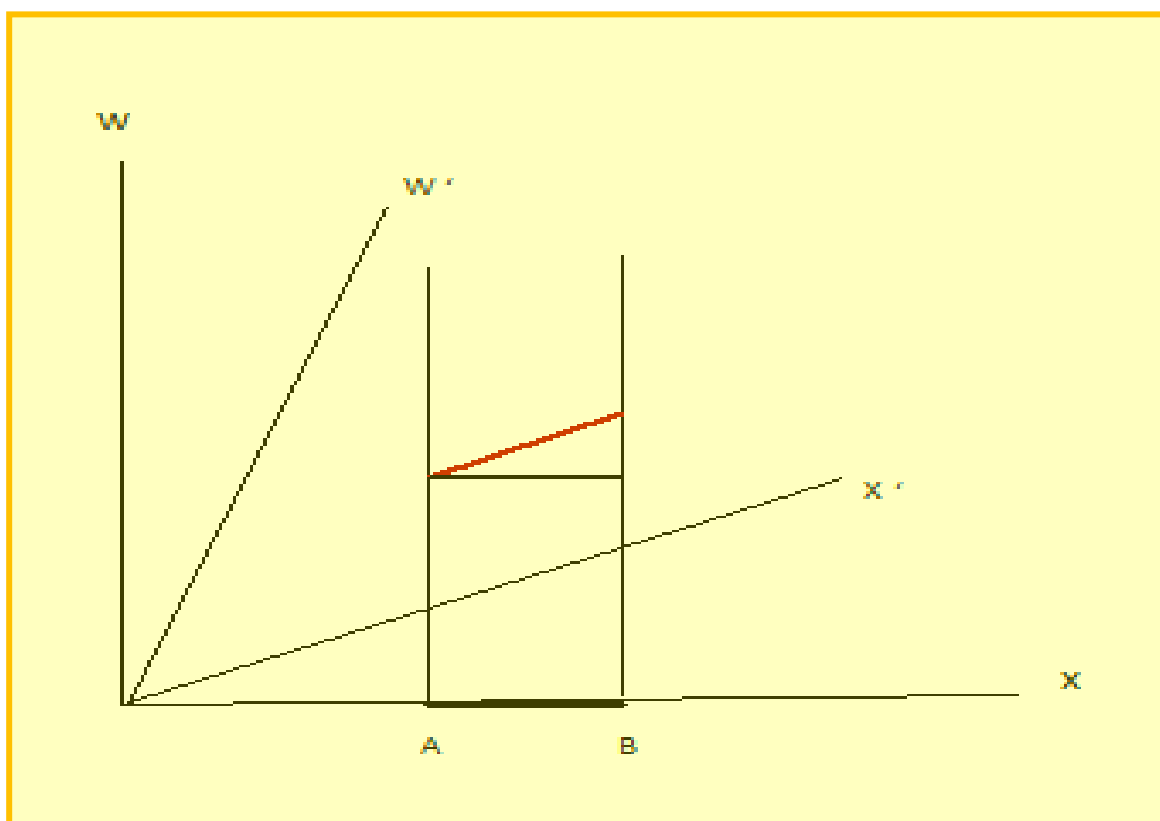
Un'asta di un metro sia in riposo nel riferimento S e i suoi estremi si trovino in $x = 3$ e $x = 4$. Col passare del tempo la linea di universo di ciascun estremo descrive una retta verticale parallela all'asse w . **La lunghezza dell'asta** è definita come **la distanza fra gli estremi misurati simultaneamente**. In S ,

riferimento a riposo, la lunghezza è la di stanza fra le intersezioni delle linee di universo con l'asse x , o con qualunque altra retta parallela all'asse x , poiché questi punti d'intersezione rappresentano eventi simultanei in S . La lunghezza a riposo è un metro. Per ottenere la lunghezza dell'asta in S' , in cui l'asta si muove, dobbiamo ottenere la distanza in S' fra gli estremi misurati simultaneamente.

Questa sarà la distanza in S' delle intersezioni delle linee di universo coll'asse x' , o con qualsiasi sua parallela, poiché questi punti d'intersezione rappresentano eventi simultanei in S' . La lunghezza dell'asta (in movimento) in S' è evidentemente minore di un metro. La figura rivela il disaccordo sulla simultaneità degli eventi che conduce a differenti valori misurati delle lunghezze. L'osservatore S misura la coppia di eventi E_1 e E_2 mentre l'osservatore S' la coppia E_1 e E_3 oppure E_2 e E_4 .

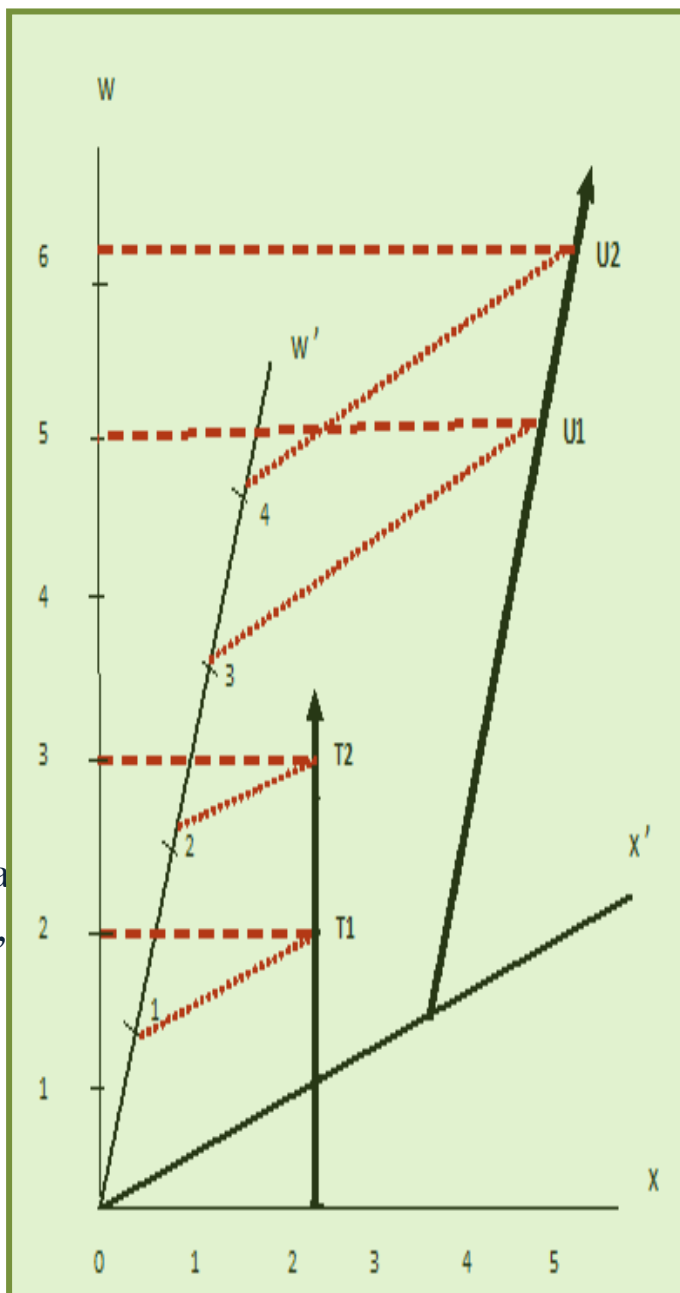


Il risultato geometrico appena ottenuto della contrazione delle lunghezze può sembrare apparentemente errato poiché la linea rossa che mi rappresenta la lunghezza dell'asta nel sdr in moto, e che doveva dunque contrarsi, sembra però più lunga della lunghezza dell'asta a riposo nel sistema di riferimento fisso S!!! In realtà è tutta una questione di taratura degli assi, e la linea rossa misura meno di quella nera che rappresenta l'asta nel sdr fisso S.



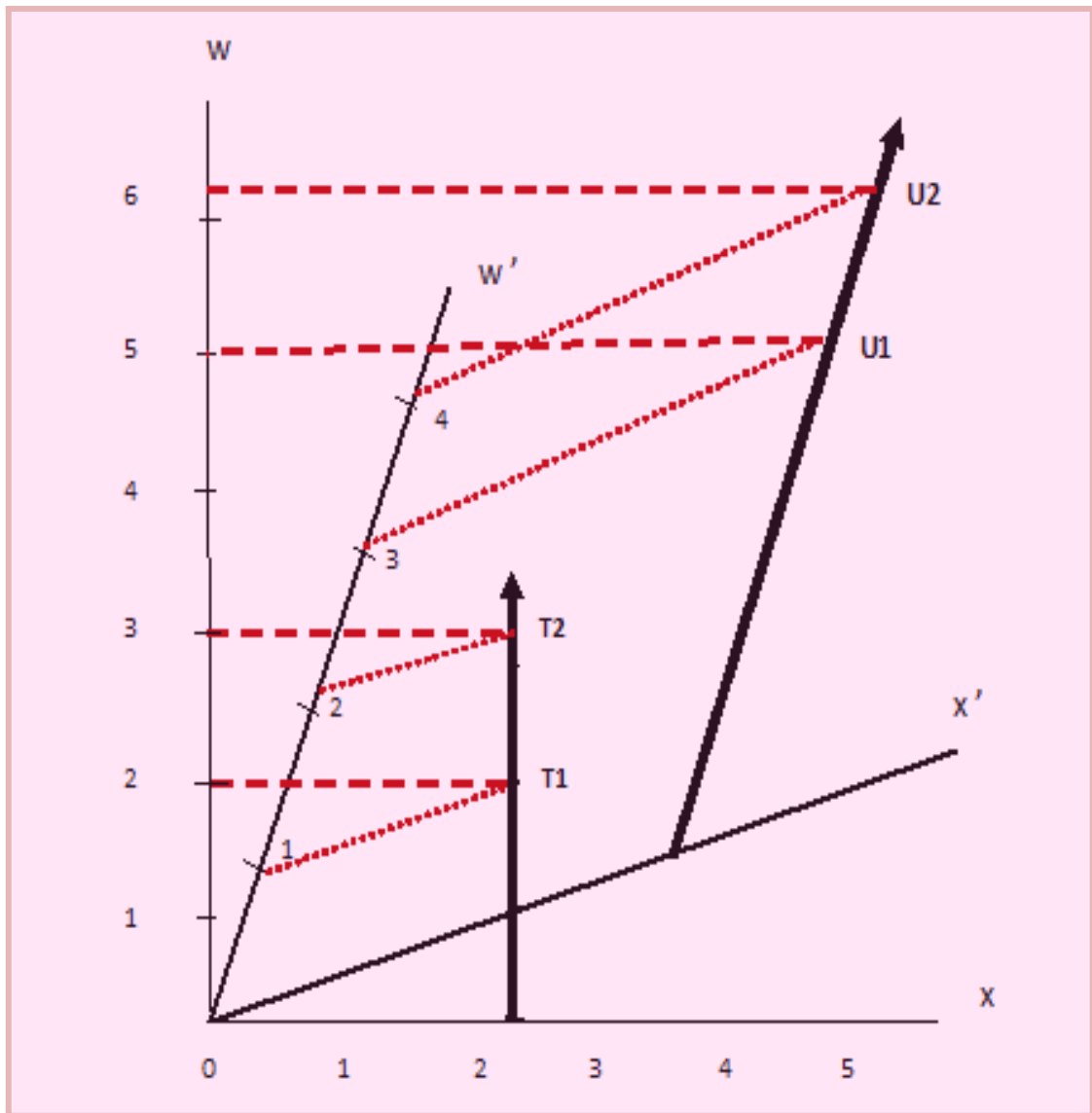
Dilatazione dei tempi

Rimane ora da dimostrare geometricamente il risultato della dilatazione dei tempi. A questo scopo consideriamo un orologio che si trovi in riposo nel riferimento S , dove segna le unità di tempo. La linea verticale a tratto pieno che passa per $x = 2.3$ è la linea di universo corrispondente a tale orologio. $T1$ e $T2$ sono gli eventi corrispondenti ai segnali forniti dall'orologio per $w(= ct) = 2$ e $w(= ct) = 3$. In S' questo orologio si muove verso sinistra perché S' si muove verso destra, e dunque si trova in luoghi diversi ogni volta che emette un segnale. Per misurare l'intervallo di tempo fra gli eventi $T1, T2$ in S' usiamo due orologi differenti uno nella posizione dell'evento $T1$ e l'altro nella posizione dell'evento $T2$. La differenza di letture di questi orologi in S' è la differenza in tempo fra $T1$ e $T2$ misurata in S' . Dal grafico vediamo che questo intervallo è più grande dell'unità di conseguenza per S' l'orologio di S in movimento sembra rallentato, va più piano, misura un valore di tempo minore. S' misura cioè un tempo maggiore dell'unità mentre S un tempo uguale all'unità.



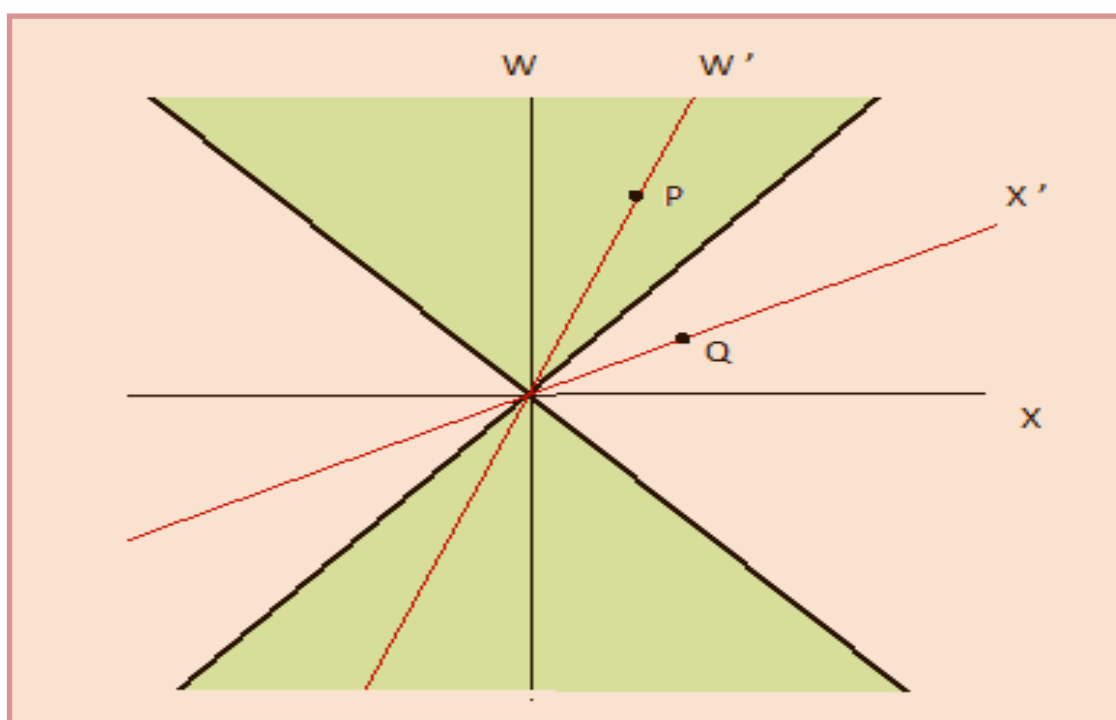
L'effetto della dilatazione dei tempi è perfettamente simmetrico. Ogni osservatore ritiene che gli orologi altrui sono più lenti di quelli che sono a riposo nel proprio sistema inerziale di riferimento. La natura reciproca del risultato della dilatazione dei tempi è anch'essa illustrata in figura, in questo caso un orologio a riposo in S' batte i colpi $U1$ e $U2$ distanziati da un tempo proprio. Misurato da S , l'intervallo di tempo corrispondente sarà maggiore dell'unità.

La dilatazione dei tempi si riassume in questo modo: Gli orologi in moto sono più lenti.



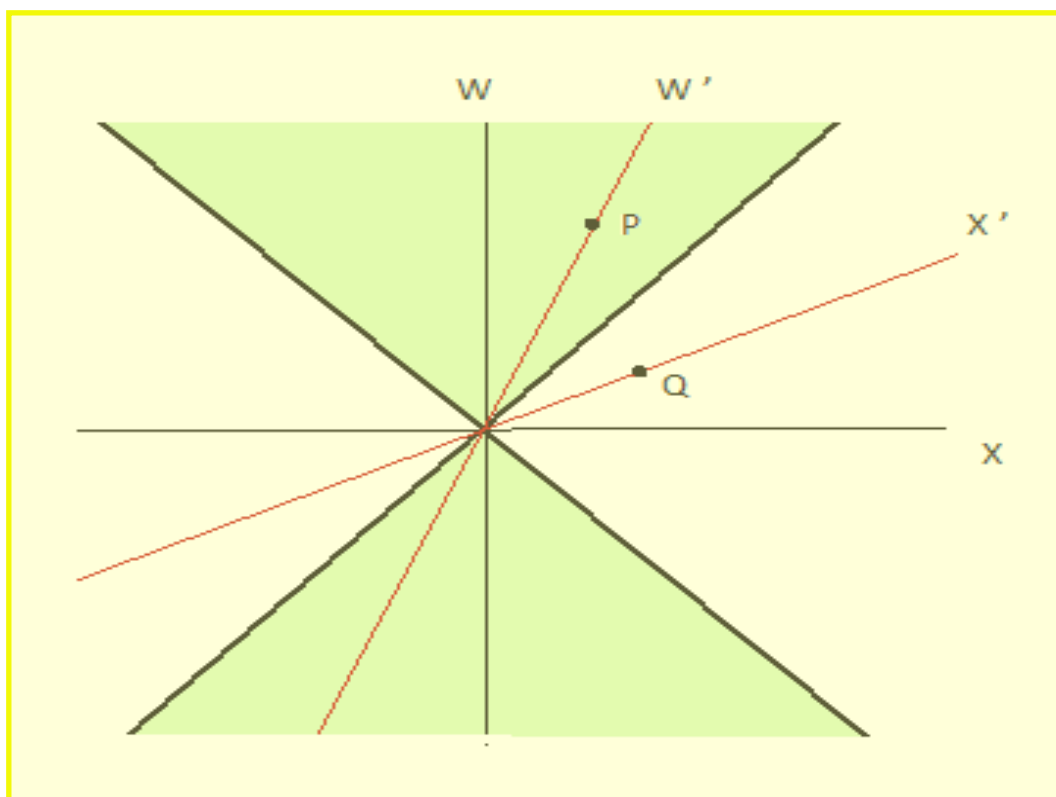
3.3 L'ordine temporale e la separazione degli eventi

Possiamo usare la rappresentazione geometrica spazio-tempo anche per comprendere l'ordine temporale e la separazione spaziale degli eventi. Si consideri l'area verde della figura, per un punto qualunque P di questa area, limitata dalle linee di universo delle onde luminose, possiamo tracciare l'asse w' che passa per l'origine. Cioè noi possiamo trovare un riferimento inerziale S' in cui gli eventi O e P avvengono nello stesso luogo ($x' = 0$) e sono distanziati solo nel tempo. L'evento P segue nel tempo l'evento O (avviene più tardi per gli orologi di S'), qualunque sia la sua posizione nella metà superiore dell'area verde. Quindi gli eventi nella parte superiore sono assolutamente nel futuro rispetto a O e questa regione è chiamata **Futuro Assoluto**. Se invece

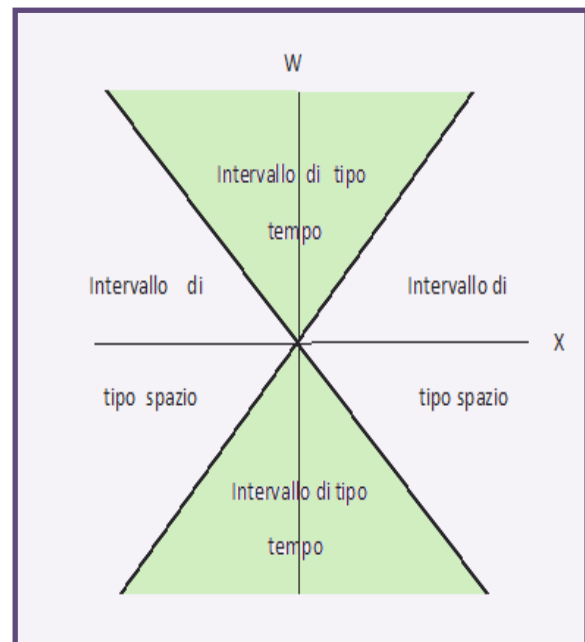
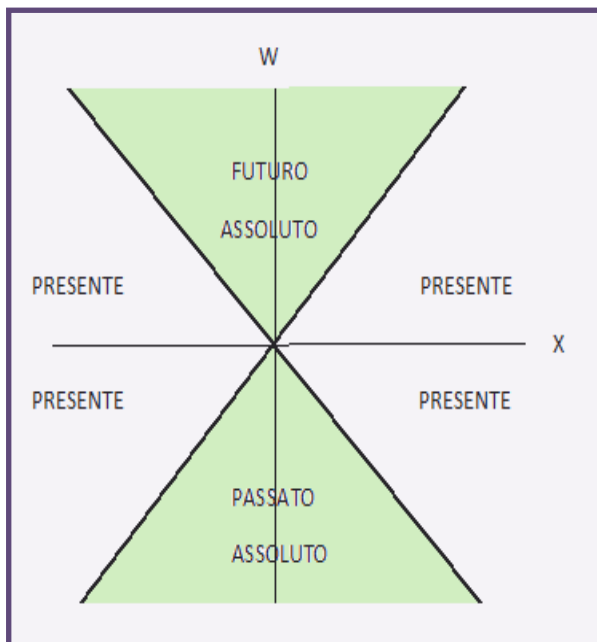


ce all'evento P corrisponde un punto spazio-temporale nella metà inferiore dell'area verde, P precederà nel tempo l'evento O . Gli eventi della metà inferiore sono assolutamente nel passato rispetto ad O , e questa regione è chiamata **Passato Assoluto**.

Nelle regioni color verde perciò esiste un determinato ordine temporale degli eventi rispetto O poiché si può sempre trovare un riferimento in cui O e P avvengono nello stesso luogo; un unico orologio determinerà in modo assoluto l'ordine temporale dell'evento in quel luogo. Consideriamo ora le regioni bianche della figura. Per un qualunque punto Q possiamo tracciare un asse x' che passi dall'origine, cioè possiamo trovare un riferimento inerziale S' in cui O e Q avvengono nello stesso tempo ($w' = 0$) e sono distanziati solo nello spazio. Possiamo sempre trovare un riferimento inerziale in cui gli eventi O e Q appaiono simultanei per punti spazio-temporali Q che si trovano nelle regioni bianche della figura, e perciò questa regione è chiamata **Presente**. In altri riferimenti inerziali naturalmente O e Q non sono simultanei e non c'è un ordine temporale assoluto di questi eventi ma solo un ordine temporale relativo.



Se ricerchiamo la separazione spaziale degli eventi, invece del loro ordine temporale, vediamo che gli eventi nel presente sono distanziati in modo assoluto da O, mentre quelli nel futuro assoluto o nel passato assoluto non hanno un definito ordine spaziale rispetto a O. Infatti le regioni Passato e Futuro Assoluto sono dette di tipo temporali, mentre la regione Presente è detta di tipo spaziale.



3.4 L'intervallo invariante in relatività

In relatività, dati due eventi esiste una quantità, detta **intervallo invariante**, che dipende solo dagli eventi stessi e non dal particolare sdr usato per descriverli. L'intervallo tra due eventi $P(ct_1, x_1, y_1, z_1)$ e $Q(ct_2, x_2, y_2, z_2)$ è definito come il quadrato della quantità s .

$$s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

Da ciò dobbiamo dedurre che mentre gli intervalli spaziali e temporali dipendono dal sdr che si è scelto di utilizzare, gli eventi P e Q hanno un'esistenza intrinseca (insieme al segmento che li congiunge).

Si chiama **spazio-tempo** o **spazio di Minkowski**, lo spazio 4-dimensionale (t, x, y, z) nel quale l'intervallo invariante tra due eventi è: $s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$

- Se $s^2 = 0$ si ha un intervallo di tipo Luce.
- Se $s^2 > 0$ si ha un intervallo di tipo Tempo.
- Se $s^2 < 0$ si ha un intervallo di tipo Spazio.

Capitolo 4. La relatività ristretta di Minkowski: il trionfo dell'assoluto

La teoria della relatività ristretta ci impone di rinunciare al carattere assoluto dello spazio e del tempo che carat-

terizzava invece la fisica classica di Newton. Ora con la teoria della relatività ristretta di Albert Einstein, i concetti di spazio e tempo assoluti vengono infatti ritenuti erronei poiché non vi è nessuna relazione spaziale assoluta, ossia indipendente dallo spazio di riferimento, e nessuna relazione temporale assoluta tra due eventi.

Tuttavia vi è però una relazione assoluta nello spazio e nel tempo, indipendente dallo spazio di riferimento, ovvero **l'intervallo invariante tra due eventi**. Né il punto nello spazio né l'istante nel tempo in cui qualcosa accade ha una realtà fisica, ma solo l'evento in se stesso. Così ora la nuova cinematica si basa sull'inseparabilità dello spazio e del tempo e non bastano più solo le tre coordinate spaziali ma è necessario aggiungere una quarta coordinata, quella temporale.

Minkowski espresse questa idea così **“d'ora in poi lo spazio di per se stesso o il tempo di per se stesso sono condannati a svanire in pure ombre, e solo una specie di unione tra i due concetti conserverà una realtà indipendente”**. Dunque se Einstein con la teoria della relatività pen-



sava di eliminare per sempre l'assolutismo dello spazio e del tempo ora con Minkowski si ha un ritorno all'assolutismo riguardo però **all'unione spazio-temporale** che sarà una realtà indipendente. Infatti spazio e tempo sono proiezioni di un'entità spazio-temporale invariante, (intervallo invariante), e queste proiezioni cambiano cambiando sistema di riferimento ma tuttavia l'intervallo tra i due eventi è sempre lo stesso, ovvero non cambia cambiando sistema di riferimento.

Tuttavia Einstein continuò a manifestare antipatia per lo spazio e il tempo assoluto che era riuscito a cacciare e che ora ritornano invece a vivere con Minkowski sotto forma però di **un'unica entità** spazio-temporale (quadridimensionale).

4.1 Minkowski e la ricerca di una nuova ontologia per la relatività ristretta

Secondo l'opinione più diffusa, il contributo scientifico di Minkowski sarebbe stato quello di fornire una traduzione in forma geometrica della stretta interdipendenza fra spazio e tempo già sancita dalle trasformazioni di Lorentz. Sarebbe tale interdipendenza ad aver suggerito come 'naturale' l'idea di una rappresentazione degli eventi fisici in uno spazio quadridimensionale.

Questa visione non è storicamente precisa per almeno due motivi. Il primo è che Minkowski non è il "vero inventore" dello spazio-tempo, perché nel presentare la sua visione geometrica quadridimensionale riprendeva e sviluppava un'idea proposta per la prima volta da Poincaré in contributi del 1905-1906, nei quali la geometria spazio temporale viene definita contestualmente al riconoscimento delle trasformazioni di Lorentz come gruppo di simmetria. Il secondo motivo è che tale visione attri-

buisce allo spaziotempo il ruolo di puro strumento formale utile per rappresentare graficamente e, dunque, per visualizzare concetti quali la relatività della simultaneità e gli effetti cinematici di contrazione delle lunghezze e dilatazione dei tempi. Questa visione dello spaziotempo non è quella proposta originariamente né da Minkowski né da Poincaré ma è alla base della scelta operata da molti autori di libri di testo (sia a livello universitario sia a livello di scuola secondaria superiore) di presentare la geometria spaziotemporale come un capitolo quasi marginale. D'altra parte lo spaziotempo così interpretato non aggiunge nulla al contenuto fisico della relatività ristretta, dal momento che tutti i concetti di cui propone una visualizzazione grafica sono concetti deducibili algebricamente dalle trasformazioni di Lorentz. Che il significato originale attribuito da Minkowski alla geometria dello spaziotempo sia di tutt'altra portata culturale emerge dal testo della conferenza dal titolo "Raum und Zeit" tenuta a Colonia nel 1908 (pubblicata nel 1909). Questa conferenza rappresenta un'emblematica occasione in cui un esponente importante della comunità scientifica pone all'attenzione dei colleghi la necessità di un cambiamento di ontologia imposto da un formulario nuovo e intrinsecamente "rivoluzionario", direbbe Kuhn. Riletto oggi, il testo di questa conferenza colpisce, oltre che per i suoi contenuti, anche per la retorica chiaramente mirata ad invitare fisici e matematici a riflettere sulle conseguenze ontologiche della relatività ristretta e sulla necessità di un riadattamento dell'abitudine e della percezione. Prima di proporre un'analisi critica dell'interpretazione minkowskiana, ripercorriamo le principali tappe del suo ragionamento per riuscire a capire cosa Minkowski intendesse dire con la tanto celebre quanto 'ermetica' frase pronunciata in apertura di conferenza: "I punti di vista su spazio e tempo [...] germogliano nel terreno della fisica sperimenta-

le, e in questo risiede la loro forza. Si tratta di concezioni drastiche. D'ora innanzi, lo spazio in se stesso, e il tempo in se stesso, sono condannati a svanire come pure ombre, e solo una sorta di unione tra i due conserverà una realtà indipendente”.

4.2 Uno sguardo al testo della conferenza di Minkowski “Raum und Zeit” (Colonia, 1908)

Obiettivo generale della relazione di Minkowski è mostrare come, “a partire dalla meccanica accreditata al giorno d'oggi, si possa arrivare, lungo una linea di pensiero puramente matematica, a nuove idee di spazio e tempo”. Il problema centrale affrontato è quello di risolvere la disomogeneità esistente tra i due gruppi di trasformazioni che conservano la forma delle equazioni differenziali della meccanica classica: il gruppo delle rotazioni spaziali e quello delle trasformazioni di Galilei. Minkowski legge in questi due gruppi di trasformazioni profonde differenze in quanto:

- nel primo gruppo vede espresse le proprietà di omogeneità ed isotropia dello *spazio*, proprietà a cui viene attribuito il significato *geometrico*;
- nel secondo gruppo vede espresse le caratteristiche del *tempo* classico (l'esistenza del tempo assoluto e la libertà del tempo di assumere una qualunque direzione rispetto agli assi spaziali), nonché l'assunto *fisico* che non esista alcun fenomeno che ci permetta di distinguere tra sistemi di riferimento inerziali.

La geometria quadridimensionale viene dunque riletta da Minkowski come la strada per risolvere le disomogeneità presenti nella fisica classica. Tant'è che obiettivo specifico dello studio

di Minkowski diventa quello di riuscire a rileggere il gruppo di Lorentz come gruppo di trasformazioni più generale del quale i due gruppi di simmetria della meccanica classica risultino casi particolari. In questo modo la struttura formale può ritrovare unitarietà e organicità, grazie alle quali sarà possibile capire “cosa ha a che fare la richiesta di ortogonalità nello spazio”, ovvero la richiesta di invarianza delle leggi fisiche per trasformazioni omogenee lineari che lascino invariata l'espressione $x^2 + y^2 + z^2$, richiesta espressa dal primo gruppo, con la “perfetta libertà dell'asse temporale” di assumere una qualunque direzione rispetto agli assi spaziali, proprietà implicata dal secondo gruppo. Per connettere concretamente i due gruppi di trasformazione, Minkowski considera nel piano x,t l'invariante rappresentato dall'equazione $c^2t^2 - x^2 = 1$, dove c è un parametro al quale non viene attribuito all'inizio alcun particolare significato. Come passo successivo viene costruito in modo totalmente geometrico un nuovo sistema di coordinate x',t' nel quale l'espressione scritta rimane invariante in forma. Attraverso passaggi dal carattere apparentemente artificioso arriva alla conclusione che la richiesta di invarianza dell'iperbole porta in realtà ad individuare, per ogni valore di c , un ben definito gruppo di trasformazioni lineari. Tale gruppo viene indicato con G_c , ad evidenziare la dipendenza dal parametro usato. Dando a c il significato di velocità della luce e facendo tendere c all'infinito è possibile ritrovare il gruppo classico di trasformazioni - il gruppo di Galileo - da Minkowski indicato con G_∞ . La geometria quadridimensionale invariante per il gruppo G_c di trasformazioni diventa così espressione di diverse esigenze che, nel loro insieme, concorrono a porre le basi per quella che sarà l'interpretazione ontologica della relatività ristretta proposta da Minkowski, riconducibile ad

una ‘visione sostanzialista dello spaziotempo’. Oltre a rispondere all’esigenza, già ricordata, di ricostruire una struttura formale sufficientemente generale da riassorbire in sé le disomogeneità particolari, essa diventa anche espressione di una ritrovata armonia tra fisica e geometria, nonché di una possibilità di rinsaldare le teorie fisiche sull’idea che l’essenza stessa del mondo deve essere assoluta, cioè invariante, indipendente dalla visione necessariamente particolare degli osservatori. Vediamo più in dettaglio questi due punti.

a) Il progetto di geometrizzare la fisica

Minkowski pone molta attenzione a persuadere pubblico (e lettori) della necessità di una visione di un mondo quadridimensionale, necessità che non deriva da pure speculazioni formali, ma dal mondo naturale, o meglio, “germoglia dal terreno della fisica sperimentale”. Per questo invita a “visualizzare graficamente lo stato di cose”. Minkowski sottolinea, infatti, quanto ogni visualizzazione non avvenga nello spazio, ma nello spazio e nel tempo, e quanto questa sia un’operazione naturale, dal momento che “gli oggetti della nostra percezione includono invariabilmente spazi e tempi in combinazione”: a nessuno capita infatti di pensare “un luogo al di fuori di un tempo, o un tempo al di fuori di un luogo”. Per esplicitare e ricordare che questo è il modo naturale di percepire il mondo fattuale, Minkowski chiama *Weltpunkt* “un punto dello spazio in un punto del tempo”. Il *mondo* è semplicemente l’insieme di tutti i possibili valori di x, y, z, t . Quei punti del mondo che rappresentano “la corsa” di un qualunque oggetto, definiscono per quell’oggetto la cosiddetta *Weltlinie*. Il progetto di Minkowski di geometrizzare la fisica acquista così naturale legittimità, in quanto fonda le proprie radici nel mondo dei fenomeni ed è di questo che vuole dare spiegazione. Grazie alle sue proprietà di simmetria, generalità e invarianza, la geometria

quadridimensionale diventa il modo privilegiato di liberare la conoscenza del mondo fattuale da quelle imperfezioni che derivano dall'attaccamento, istintivo e non completamente razionale, al nostro modo approssimativo di percepire e osservare la natura: "le leggi fisiche potranno trovare la loro espressione *perfetta* come relazioni reciproche tra queste *Weltlinien*". Solo guardando il mondo dei fenomeni da una visione quadridimensionale strutturata, dunque, le leggi fisiche sono esprimibili nella forma più semplice possibile. Nello spazio classico tridimensionale esse, infatti, "lasciano solo una complicata proiezione", "un'ombra". Lo spazio e il tempo in se stessi sono infatti per Minkowski solo ombre, in tre o in una dimensione, del mondo reale, ombre che il pensiero matematico ha permesso di far svanire guidando la conoscenza a riconoscere la vera "essenza" quadridimensionale della realtà.

b) L'invariante come essenza del mondo

Se questo mondo geometrizzato, o questo spaziotempo, è derivabile "dalla totalità dei fenomeni naturali", è anche vero che per Minkowski, "una volta dato", non è più in nessun modo "determinato univocamente dai fenomeni". L'essenza della teoria diventa l'invarianza della struttura geometrica per trasformazioni del gruppo G_c e, per questo, il nome più adatto per esprimere questo non è più il "postulato di relatività", quanto "il postulato del mondo assoluto" o "postulato del mondo". Questa nuova struttura geometrica, dunque, è tale da sopravvivere indipendentemente dai fenomeni e dagli osservatori e, per questo, può essere riconosciuta come la struttura propria del mondo intero all'interno della quale ogni osservatore, in ogni luogo e in ogni istante di tempo, si ritrova. La geometria dello spaziotempo, infatti, si riproduce uguale a se stessa quando la si associa ad un qualunque osservatore posto in un qualunque punto O del mondo: in ogni luogo

si riproducono le strutture invarianti dei due coni di vertice O, rappresentati dall'equazione $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$, le quali ovunque individuano due zone, cosiddette del “dopo” e del “prima” di O, costituite da quegli insiemi di punti che possono rispettivamente “ricevere” o “inviare luce a O”. Ciò non esclude che si possa ancora parlare di relatività, e di sistemi associati ad osservatori che vedono i fenomeni dalla loro particolare prospettiva, ma lo si può fare solo nel momento in cui si rinuncia a vedere e a pensare il mondo a quattro dimensioni, e ci si riferisce ad esso attraverso la sua proiezione tridimensionale nello spazio e a quella unidimensionale nel tempo. Solo tali proiezioni, infatti, “possono essere ancora assunte con un certo grado di libertà”, ovvero lasciano spazio a letture dipendenti dal punto di vista dell'osservatore e affette da ‘distorsioni prospettiche’. Per Minkowski, dunque, il mondo di Einstein popolato di regoli e orologi, dal momento che enfatizza gli effetti relativistici di contrazione delle lunghezze e di dilatazione del tempo, è un mondo osservato da una prospettiva che tradisce un attaccamento ad una visione newtoniana, perché newtoniana è l'abitudine a tenere separate le dimensioni spaziali da quella temporale.

4.3 La visione sostanzialista di Minkowski

Lo spaziotempo di Minkowski, per quanto si è già detto, non vuole essere una rappresentazione grafica della relatività ristretta di Einstein, né tanto meno una pura astrazione matematica. Va invece letto come il risultato di un'interpretazione ontologica del formulario della relatività ristretta e, come tale, è espressione di una visione globale e radicale di un intreccio complesso tra fisica, geometria e mondo naturale. In particolare la visione di Minkowski nasce dalla convinzione dell'esistenza di una “armonia pre-stabilita fra matematica pura e fisica”. Riconoscere

nelle trasformazioni di Lorentz l'interdipendenza tra spazio e tempo e la possibilità di riunificarli in un'espressione invariante non è sufficiente per cogliere appieno i significati attribuiti da Minkowski allo spaziotempo, significati che sono sintetizzati nel commento introduttivo già citato e di cui ora possiamo proporre un'interpretazione. In esso sono espressi i tre concetti chiave da cui prende forma la visione di Minkowski: lo spaziotempo *deriva dal mondo dei fenomeni*, è *reale* ed è *indipendente* dall'osservatore. Come si è cercato di mostrare, Minkowski vede la geometria quadridimensionale come l'ente primario - il 'mondo' - al quale ricondurre la fisica e, con essa, l'insieme dei fenomeni naturali. A svelare il vero 'mondo' sono le stesse relazioni fisiche della natura, "relazioni che solo in quattro dimensioni rivelano la loro vera *essenza* in tutta semplicità". In questa visione costruita postulando l'esistenza del 'mondo', il comportamento dei "punti di sostanza" (punti occupati da oggetti fisici e non astratti punti geometrici) va letto in termini di relazioni invarianti fra le 'linee del mondo', perché è in tali relazioni che si esplicitano le leggi fisiche. Il 'mondo' di Minkowski è quindi svelato nella sua *essenza* dai fenomeni e acquista significato perché dei fenomeni è in grado di dare ragione: in quest'ottica si deve leggere il rifiuto di Minkowski di pensare al 'mondo' come ad un vuoto primordiale ("*eine gähnende Leere*"). Il suo 'mondo' è estraneo ad una visione che gli conferisca connotazioni mitiche o metafisiche. Esso rappresenta la vera *essenza* della realtà e nella sua veste quadridimensionale si libera dal relativismo dello spazio oltre che del tempo e confina lo spazio tridimensionale al ruolo che hanno le "ombre" nel mito platonico della caverna. Nella visione di Minkowski viene stabilita un'identificazione *letterale* tra la struttura spaziotemporale matematica e la struttura del mondo naturale. In altre parole, la posizione di Minkowski si basa sull'assunto sostanzialista che il mondo reale è una varietà quadridimensio-

nale, la quale esiste come oggetto dotato di *realtà*. In più, tale struttura, in quanto letteralmente identificata con il mondo naturale, non può che essere invariante, *indipendente* dall'osservatore e, per questo, assoluta. A completamento della visione di Minkowski, occorre aggiungere che grazie alla sua peculiarità di essere geometrica e, quindi, razionale, la struttura intrinseca del mondo assume forme riconoscibili e comprensibili dall'uomo. Quindi, criteri estetici quali simmetria, invarianza, generalità diventano criteri a disposizione dello scienziato per valutare il grado di fedeltà della teoria al mondo dei fenomeni, perché queste sono le proprietà delle forme attraverso le quali si manifesta, “nel terreno della fisica sperimentale”, quell'armonia tra matematica pura e natura che, essendo prestabilita, trascende la conoscenza.

4.4 Il rifiuto di Einstein del sostanzialismo e l'ontologia relazionista

L'interpretazione diffusa dello spaziotempo di Minkowski come puro strumento di visualizzazione sembra riprendere alla lettera la visione di Einstein come è espressa, ad esempio, nell'esposizione divulgativa delle teorie relativistiche. Il fatto di considerare il tempo come quarta dimensione non rappresenta per Einstein una novità, dal momento che si potrebbe parlare in termini di continuo quadridimensionale anche nella fisica classica. Qui però il tempo aveva una funzione “indipendente in confronto alle coordinate spaziali. È questa la ragione della nostra inveterata abitudine di trattare il tempo come un continuo indipendente. È stata la teoria della relatività a suggerirci di considerare l'“universo” come avente quattro dimensioni, poiché secondo tale teoria il tempo viene defraudato della sua indipendenza,

come mostra la quarta equazione della trasformazione di Lorentz” Il riconoscimento, da parte di Einstein, della necessità (e dei vantaggi) di trattare lo spazio e il tempo come un tutt’uno, quale emerge da queste parole, fu il risultato di profonde meditazioni che nacquero contestualmente alla scrittura della relatività generale. Tant’è che, come dice Bergia, nello scritto giovanile di Einstein sulla relatività ristretta “spazio e tempo viaggiano sì su percorsi correlati, ma non si propone alcuna forma di riunificazione tra di essi”. Infatti sono ampiamente documentate le riserve espresse da Einstein nei confronti del lavoro di Minkowski immediatamente dopo la sua presentazione. In esso Einstein vedeva il riemergere in fisica di uno spazio tanto assoluto quanto lo era quello di Newton, contro il quale il fisico tedesco si era scagliato e che pensava di avere una volta per tutte espunto dalla fisica attraverso l’idea di ricondurre il significato dei concetti alle loro definizioni operative. Soltanto contestualmente alla scrittura della relatività generale, Einstein cominciò a rendersi conto dell’importanza di una visione quadridimensionale e di quanto l’approccio geometrico fosse di gran lunga preferibile all’originaria scrittura algebrica della relatività ristretta. E dopo mesi di “duro lavoro” sul formalismo tensoriale arrivò ad affermare: “l’animo mi si è riempito di un grande rispetto per la matematica, la parte più sottile della quale avevo finora considerato, nella mia dabbenaggine, un puro lusso”. Queste parole potrebbero essere interpretate come i primi segni di quella che alcuni, come Holton ad esempio, ritengono una vera e propria svolta nel pensiero di Einstein, che lo avrebbe portato dall’empirismo giovanile ad una posizione di tipo realista in età più matura. Di certo esse sono indicative del fatto che Einstein, lavorando alla teoria della relatività generale, giunse a riconsiderare il ruolo della matematica come

strumento descrittivo potente ed unificatore, sul quale basare l'organizzazione del pensiero e costruire la conoscenza sul mondo. In una lettera scritta ad un amico nel 1938, egli stesso dichiarò infatti di essere divenuto, "a causa del problema della gravitazione, un credente razionalista, cioè uno che cerca l'unica fonte attendibile di verità nella semplicità matematica". L'influenza su Einstein dell'idea di Minkowski - il mondo che percepiamo è soltanto un'ombra del mondo reale a quattro dimensioni - è evidente in una lettera inviata da Einstein a Michele Besso nel luglio 1952. In essa Einstein rimproverava l'amico dicendo: "tu non prendi sul serio le quattro dimensioni della relatività, ma consideri invece il presente come fosse la sola realtà. Ciò che tu chiami 'mondo' corrisponde, nella terminologia fisica, a 'sezioni spaziali', alle quali la teoria della relatività - già quella speciale - nega realtà oggettiva".

Quelle "sezioni spaziali" sono proprio le proiezioni di cui parla Minkowski nel corso della sua conferenza del 1908, sono cioè le ombre che il pensiero matematico ha rivelato come percezioni parziali della realtà. Negli anni che seguirono alla pubblicazione della relatività generale Einstein non perse occasione per riconoscere in modo esplicito il proprio debito nei confronti di Minkowski, tuttavia non si può dire che le due posizioni circa l'ontologia della relatività ristretta arrivarono a sovrapporsi in modo stabile e deciso. Nonostante siano documentate oscillazioni nel pensiero di Einstein sulla natura dello spazio, Einstein non perse mai una certa diffidenza verso una visione dello spaziotempo riconoscibile come decisamente sostanzialista. L'influenza di parte machiana di Einstein non poteva infatti che renderlo diffidente verso un qualsiasi assoluto che rievocasse quella

stessa “mostruosità concettuale” contro cui Mach si era scagliato. Einstein riteneva che la fisica fosse “il tentativo di costruzione concettuale di un *modello* del *mondo reale* e della sua struttura retta da leggi”. Egli fu coerente con se stesso nel continuare a considerare le teorie dei modelli. Quello che cambiò nel pensiero di Einstein, anche in seguito al lavoro di Minkowski, fu l’idea del modello, che si definì sempre più in termini di un modello matematico in grado di codificare il livello acquisito di comprensione di una realtà che esiste indipendentemente dall’osservatore. In sintesi si può dire che alla visione sostanzialista di Minkowski si sia affiancata una più prudente posizione realista di Einstein: “La sola giustificazione dei nostri concetti e dei sistemi di concetti sta nel fatto che essi servono a rappresentare il complesso delle nostre esperienze; oltre a ciò essi non hanno nessuna legittimità. Sono convinto che i filosofi hanno avuto un’influenza dannosa sul progresso del pensiero scientifico, trasportando certi concetti fondamentali dal dominio dell’empirismo, dove essi erano sottoposti al nostro controllo, alle altezze intangibili dell’*a-priori*”. La posizione di Einstein prende dunque forma dall’assunto che la scienza si debba occupare del mondo naturale elaborando concetti, anche astratti e matematici, ma pur sempre calati o calabili nel mondo esperibile e non appartenenti a realtà metafisiche, all’“Olimpo dell’*a-priori*”. Secondo Einstein esiste un limite della conoscenza razionale a cui deve tendere l’impresa scientifica, oltre alla quale si entra in un mondo in cui si creano dogmie tabù: “Perché mai è necessario trascinare giù dalle sfere olimpiche di Platone i concetti fondamentali del pensiero scientifico, e svelare il loro lignaggio terrestre? Risposta: allo scopo di liberare questi concetti dai *tabù* loro an-

nessi, e pervenire così a una maggiore libertà nella formazione dei concetti. Costituisce il merito imperituro di D. Hume e di E. Mach quello di avere, più di tutti gli altri, introdotto questa mentalità critica.” Coerente con questa posizione epistemologica è la visione di spazio che Einstein propone più frequentemente nei suoi scritti, visione che può essere riconosciuta come di tipo “relazionista”: lo spazio come struttura di relazioni formali, costruita dall’uomo per porre ordine, “comprendere” il mondo dei fenomeni naturali, dove per “comprendere” si intende “la creazione di un ordine tra le impressioni sensoriali, frutto dei concetti generali, delle relazioni fra questi concetti e delle relazioni tra i concetti e l’esperienza sensoriale.” Anche quando Einstein si professava un razionalista ed esprimeva il suo rispetto per la matematica, il suo ‘atteggiamento’ nel parlare di relatività ristretta non si allontanò mai definitivamente da una prospettiva neopositivista. In particolare, nel pensiero di Einstein mantenne una forte presa la distinzione di stampo neopositivista tra termini osservativi e termini teorici, il cui “lignaggio terrestre” è garantito se e solo se esiste una ‘regola di corrispondenza’, una ‘definizione operativa’. Coerentemente, l’ontologia proposta per la relatività ristretta era ancorata all’idea che una teoria scientifica ha significato fin tanto che parla di oggetti fisici osservabili. Dal quadro proposto si dovrebbe dunque capire perché Einstein non poteva non criticare la sostanzialità dello spaziotempo: “lo spaziotempo non è di necessità qualcosa a cui si possa attribuire un’esistenza separata, indipendentemente dagli oggetti effettivi della realtà fisica. Gli oggetti fisici non sono nello spazio, bensì spazialmente estesi. In tal modo il concetto di ‘spazio vuoto’ perde il suo significato”. L’immagine di spazio alla quale Einstein nel 1952 dirà di sentirsi vicino è quella di Descartes, a cui la relatività generale avrebbe ricondotto: uno spazio “che non ha esistenza separata rispetto a ‘ciò che riempie lo spazio’ e che di-

pende dalle coordinate.” ‘Ciò che riempie lo spazio’ per la relatività generale è il campo gravitazionale, descritto dai termini g_{ik} , i quali definiscono anche le proprietà strutturali del continuo. “Se immaginiamo di togliere il campo gravitazionale, cioè le funzioni g_{ik} , [...] rimarrà assolutamente *nulla*”. Alla luce di questa immagine di spazio, lo spaziotempo di Minkowski “non è uno spazio senza campo, ma un caso speciale del campo g_{ik} , caso in cui le funzioni g_{ik} hanno - per il sistema di coordinate usato, che non ha in sé alcun significato oggettivo - dei valori indipendenti dalle coordinate. Non esiste un qualcosa come uno spazio vuoto, ossia uno spazio senza campo. Lo spaziotempo non pretende di avere un’esistenza per proprio conto, ma soltanto *una qualità strutturale del campo*”.

Può essere utile fare qualche precisazione circa la posizione di Einstein e il sostanzialismo, essendo questo un punto delicato e tuttora oggetto di discussione tra gli storici della fisica. In un suo studio Kostro afferma che a partire dal 1916 Einstein utilizza praticamente come sinonimi i termini “spazio fisico”, “etere”, “campo”: “It must be noted, however, that these three terms, which to some extent can be considered as synonyms, were used by Einstein in different periods with different frequencies and with different ontological values attributed to their meanings” [30]. Il fatto che “spazio fisico” ed “etere” siano stati utilizzati come sinonimi di “campo” può anche essere letto a sostegno dell’idea che in Einstein prevalessse una visione relazionale dello spazio, perché il campo non è, per Einstein, una proprietà dello spazio, ma un oggetto fisico esso stesso. Infatti, quando definisce lo spazio come ‘qualità strutturale del campo’, sta affermando che l’esistenza e la forma di quest’ultimo sono primarie rispetto alla nozione di spazio. Dunque quando si afferma che in uno dei suoi pellegrinaggi filosofici Einstein, relativamente all’etere, “cambiò parere e scrisse numerosi arti-

coli in cui si dichiarava favorevole ad uno spazio dotato di proprietà fisiche, da lui stesso chiamato più volte «etere», si sta secondo me evocando uno spazio che non è lo spazio a cui pensava Einstein. Quest'ultimo, infatti, non può essere identificato con l'etere di Lorentz le cui caratteristiche sono quelle di essere sistema di riferimento privilegiato e avere "a certain substantiality". Tuttavia è vero che nel periodo tra il 1926 e il 1935, come dice Kostro, Einstein prese in considerazione la possibilità che lo spazio potesse essere tanto sostanziale da poter generare le particelle elementari. Era il periodo in cui, dopo il successo della relatività generale, Einstein coltivava la speranza di utilizzare la geometria come base per una teoria unificata, ovvero l'idea che tutta la fisica allora conosciuta potesse essere spiegata in termini geometrici e quindi rappresentata da un tensore metrico generalizzato. Come dicono Earman e Norton, però, la forma di sostanzialismo a cui approdò Einstein in quel periodo era una forma banale di sostanzialismo, perché di fatto esprimeva semplicemente la convinzione 'realista' dell'esistenza di una realtà fisica indipendente dell'osservazione.

BIBLIOGRAFIA

“Introduzione alla relatività ristretta”
di Robert Resnick

“La storia della fisica”
di Lloyd Motz e Jefferson Weaver

“Relatività ristretta e concezioni di spazio (Giornale
di fisica, XL, 4, 205-220, 1999)”
di Olivia Levrini

“Quando la fisica parlava tedesco” Alcune memorie di
un'epoca
Tradotte da Salvatore Antoci