Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

ALCUNE APPLICAZIONI DELLA TEORIA DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE A PROBLEMI DI MOTO UNIDIMENSIONALE

Tesi di Laurea in Fisica Matematica

Presentato da:
Trotti Manuela

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Emanuela Caliceti

Sessione II
Anno Accademico 2012 - 2013

"A traveller who refuses to pass over a bridge until he has personally tested
the soundness of every part of it is not likely to go far;
something must be risked, even in mathematics"
Horace Lamb

Indice

Introduzione

A partire dalla formulazione della legge fondamentale della dinamica, introdotta da Newton nella seconda metà del XVII secolo, la teoria delle equazioni differenziali ordinarie è alla base della risoluzione di ogni problema del moto nell'ambito della meccanica classica. Infatti, ad un punto materiale di massa m soggetto ad una forza di vettore $\vec{F}$, viene impressa un'accelerazione $\vec{a}$ tale che

$$m\vec{a} = \vec{F}. \tag{1}$$

Il problema del moto per il punto P consiste nel determinare la sua evoluzione temporale, cioè conoscere la sua configurazione nello spazio $\mathbb{R}^3$ in ogni istante, supponendo di conoscere le forze a cui è soggetto. In termini dell' equazione (1), poichè l'accelerazione $\vec{a}$ rappresenta la derivata seconda rispetto al tempo della configurazione $P(t)$ del punto, si tratta di risolvere la seguente equazione differenziale del secondo ordine in $\mathbb{R}^3$:

$$m\frac{d^2P(t)}{dt^2} = \vec{F}, \tag{2}$$

nell'incognita $P(t)$, supponendo di conoscere il vettore $\vec{F} = \vec{F}(P, \frac{dP}{dt}, t)$. Impostato in questi termini, il problema risulta indeterminato, poichè sotto opportune ipotesi di regolarità per la funzione $\vec{F}(P, \frac{dP}{dt}, t)$, l'equazione differenziale (2) ammette infinite soluzioni. E' necessario quindi individuare gli elementi che permettono di circoscrivere la ricerca, e questo viene fatto imponendo il cosiddetto *Problema di Cauchy* che consiste nel determinare la soluzione di (2) che soddisfa la *condizione iniziale*

$$\begin{cases} P(t_0) = P_0 \\ \frac{dP}{dt}(t_0) = \vec{v}_0, \end{cases} \tag{3}$$

dove P_0 e $\vec{v}_0$ sono vettori assegnati in $\mathbb{R}^3$, che rappresentano rispettivamente la posizione iniziale e la velocità iniziale del punto P. A questo punto la teoria delle equazioni differenziali è in grado di risolvere perfettamente il problema garantendo, sempre sotto opportune ipotesi sulla $\vec{F}$, non solo l'esistenza ma anche l'unicità della soluzione. In altre parole, se si vuole conoscere l'evoluzione temporale di P, non basta conoscere le forze che agiscono su di esso, ma anche la configurazione da cui parte e la sua velocità iniziale.
Per sistemi meccanici più complessi rispetto al singolo punto materiale, costituiti anche da infiniti punti o rappresentati da una distribuzione continua di materia, l'equazione di Newton (1) risulta inadeguata allo studio del moto, ma si possono utulizzare le equazioni di Lagrange, che a loro volta sono equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine. Lo scopo di questa tesi è affrontare lo studio degli elementi di base della teoria delle equazioni differenziali ordinarie, allo scopo di poter risolvere alcuni problemi specifici e interessanti nell'ambito della meccanica classica, che si possono affrontare a partire dalla legge di Newton. In particolare verrà analizzato il moto di un punto soggetto ad una forza di tipo elastico, alla quale successivamente viene aggiunta prima una forza di resistenza del mezzo e poi anche una forza periodica di tipo sinusoidale.
Utilizzando le tecniche di risoluzione delle equazioni differenziali del secondo ordine a coefficienti costanti, si ottengono nel primo caso il cosiddetto moto oscillatorio armonico, nel secondo caso un moto smorzato, ed infine un moto

approssimabile con un moto periodico. In quest'ultimo caso viene studiato il cosiddetto fenomeno della *risonanza* che si verifica quando il periodo delle *oscillazioni proprie* del sistema, generate dalla forza elastica, è vicino al periodo della forza sinusoidale estrema. Vedremo come questo fenomeno, quando si verifica, può essere responsabile di effetti anche gravi, quali il crollo di un ponte.

L'esposizione dei temi trattati in questa tesi si articola in tre capitoli:

Il primo capitolo serve per introdurre alcune nozioni fondamentali sulle equazioni differenziali e sul problema di Cauchy, approfondendo in particolar modo quelle lineari del secondo ordine, che sono quelle che serviranno per i capitoli successivi, illustrando anche le diverse tipologie di soluzioni.

Nel secondo capitolo viene esaminata la Legge fondamentale della dinamica, o seconda legge di Newton, che è il più comune esempio di equazione differenziale ordinaria di tipo lineare del secondo ordine in forma normale.

Nel terzo capitolo infine vengono illustrati gli esempi descritti sopra per individuare le diverse tipologie di moto che fanno seguito ai diversi tipi di forze agenti su un punto materiale, includendo un'ampia trattazione del fenomeno della risonanza.

Per la stesura di questa tesi si è fatto riferimento principalmente ai libri [3], [4] [5] per il Capitolo 1, e ci si è riferiti ai libri [1],[2] e consultati i siti internet [7], [6] per i capitoli 2 e 3. A queste stesse referenze viene rinviato il lettore per ulteriori approfondimenti o dettagli che per ragioni di sintesi sono stati omessi.

Capitolo 1

Considerazioni introduttive sulle equazioni differenziali ordinarie

1.1 Definizioni e terminologia

Definizione 1.1. *Data una funzione* $F : D \subseteq \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{R}$*,* D *aperto,* $(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) \longrightarrow F((t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}))$ *si chiama equazione differenziale ordinaria di ordine* n *generata da* F *nell'incognita* y *la relazione*

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

Se I *è un intervallo in* $\mathbb{R}$*, una funzione* $y : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *di classe* $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ *si dice soluzione di* (1.1) *se*

$$\forall t \in I, (t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)) \in D$$
$$F(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0$$

e dove $y^{(k)}(t) \equiv \dfrac{d^k y}{dt^k} y(t), \qquad \forall k = 1, \dots n.$

L'*ordine* di un'equazione è l'ordine massimo di derivazione sull'incognita che vi compare.
L'aggettivo *ordinaria* si riferisce al fatto che l'incognita è funzione di una sola variabile.
Se nella (1.1) è possibile esplicitare la derivata di ordine massimo, ossia

$$y^n = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{1.2}$$

con $f : A \subset \mathbb{R}^{(n+1)} \longrightarrow \mathbb{R}$, A aperto, l'equazione è detta in *forma normale.*
Se F è un polinomio di I grado in $y, y', \ldots, y^{(n)}$, l'equazione si dice *lineare.*
La forma generale è la seguente:

$$a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = b(t) \tag{1.3}$$

Nel caso $a_0(t) \neq 0$ la (1.3) si può scrivere in forma normale.

Definizione 1.2. *Una funzione $u \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ è soluzione (o integrale generale) dell'equazione* (1.2) *se* $(t, u(t), u'(t), \ldots, u^{(n-1)}(t)) \in A$

$$u^n(t) = f(t, u(t), u'(t), \ldots, u^{(n-1)}(t)), \qquad \forall t \in I. \tag{1.4}$$

1.2 Sistemi di equazioni differenziali

Più in generale si può parlare di sistemi di equazioni differenziali ordinarie, in funzione di più incognite, tutte in una sola variabile. Noi tratteremo il caso particolarmente importante dei sistemi di n equazioni del I ordine in forma normale, in n funzioni incognite. Un generico sistema di questo tipo si può scrivere nel modo seguente:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{1.5}$$

dove le funzioni f_j, $j = 1$,. . . ,n, sono definite in una stessa regione $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ed $y_1 = y_1(t), y_2 = y_2(t), \ldots, y_n = y_n(t)$ sono le funzioni incognite.
Introducendo i vettori $y = (y_1, \ldots, y_n)$ e $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, il sistema (1.5) può essere scritto come un'unica equazione vettoriale:

$$y' = f(t, y) \tag{1.6}$$

Se ogni componente di f è lineare in y si dice che il sistema è lineare.
Se f non dipende esplicitamente da t, ossia $f(t, y) = g(y)$, si dice che il sistema lineare è autonomo.

Di particolare rilevanza ai fini pratici è la riduzione di un'equazione differenziale ordinaria di ordine n in forma normale ad un sistema differenziale del primo ordine. Questa tecnica permette di semplificare notevolmente alcuni tipi di problemi, evitando l'introduzione di complesse forme di risoluzione. A partire dalla (1.2) si pongono $y_1 = y$ e $y_i = y^{(i-1)}(t)$, in modo che $y_i' = y_{i+1}, \quad \forall i \in \{2, \ldots, n\}$.
L'equazione differenziale (1.2) è dunque equivalente al sistema:

$$
\begin{cases}
y_1' = y_2 \\
y_2' = y_3 \\
\vdots \\
y_{n-1}' = y_n \\
y_n' = f\left(t, y_1, y_2, \ldots, y_n\right).
\end{cases}
\tag{1.7}
$$

1.3 Problema di Cauchy

Di importanza fondamentale è il cosiddetto *Problema di Cauchy* o dei *valori iniziali* che consiste nel trovare una soluzione di un'equazione differenziale di ordine n di forma normale

$$
y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{1.8}
$$

su un intervallo I che soddisfi le condizioni iniziali:

$$
\begin{cases}
y(a) = y_0 \\
y'(a) = y_1 \\
y''(a) = y_2 \\
\ldots \\
y^{(n-1)}(a) = y_{n-1}
\end{cases}
\tag{1.9}
$$

per un assegnato istante iniziale $t_0 \in I$ e assegnati valori iniziali $y_0, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$. Per i sistemi del tipo (1.5) il problema si riconduce a cercare una funzione $y = (y_1, \ldots y_n)$ di classe $\mathcal{C}'(I, \mathbb{R}^n)$ a valori vettoriali, tale che

$$
\begin{cases}
y' = f(t, y(t)), \qquad \forall t \in I \\
y(t_0) = y_0,
\end{cases}
\tag{1.10}
$$

con $t_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in \mathbb{R}^n$ assegnati, e $f = (f_1, \dots, f_n)$.

Poichè ogni equazione differenziale di ordine n in forma normale si può ricondurre a un sistema di n equazioni del primo ordine (sempre in forma normale), è sufficiente sviluppare la teoria per questi ultimi.

Definizione 1.3.
Sia data una funzione $f : A \subset \mathbb{R}^{(n+1)} \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

a) Si dice che $f = f(t, y)$ è lipschitziana in D rispetto a y, uniformemente in t, se esiste una costante L (detta costante di Lipschitz) tale che

$$\|f(t, y) - f(t, z)\| \le L\|y - z\| \tag{1.11}$$

per ogni coppia di punti (t, y) e (t, z) in D.

b) Si dice che $f = f(t, y)$ è localmente lipschitziana in A rispetto a y, uniformemente in t, se ogni punto di A ha un intorno in cui vale (1.11).

Osservazione 1.4. Si può dimostrare che f è localmente lipschitziana in A se e solo se la (1.11) vale in ogni compatto contenuto in A, si veda ad esempio [3]. Inoltre se $f = (f_1, f_2, \dots f_n)$, allora f è lipschitziana (rispettivamente localmente lipschitziana) se e solo se lo sono tutte le sue componenti.

Teorema 1.5 (Esistenza e unicità delle soluzioni del problema di Cauchy)**.**
Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$, con A aperto di $\mathbb{R}^{n+1}$. Se:

1. *f è continua in A,*

2. *f è localmente lipschitziana in A, rispetto a y e uniformemente in t,*

allora, per ogni punto $(t_0, y_0) \in A$ esiste un intorno I_δ di t_0, $I_\delta = [t_{0-\delta}, t_{0+\delta}]$, nel quale è definita una soluzione φ del problema di Cauchy (1.10)*. Tale soluzione è unica nel senso che ogni altra soluzione coincide con φ nell'intervallo comune di definizione.*

Lemma 1.6. *Con le ipotesi del Teorema 1.5 se $\varphi \in \mathcal{C}^1(I_\delta)$ è soluzione del problema di Cauchy* (1.10)*, allora φ soddisfa la seguente equazione integrale (detta equazione integrale di Volterra):*

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) \qquad \forall\, t \in I_\delta \tag{1.12}$$

Viceversa, se $\varphi \in \mathcal{C}(I_\delta)$ è soluzione di (1.12)*, allora $\varphi \in \mathcal{C}^1(I_\delta)$ ed è soluzione del problema di Cauchy* (1.10)*. Per dimostrazione e approfondimenti si veda [4]*

1.4 Equazioni differenziali lineari

Da quanto visto nella sezione 1.1, un' equazione differenziale lineare di ordine n di tipo normale è della seguente espressione

$$y^{(n)} = a_0(t)y^{(0)} + a_1(t)y^{(1)} + \ldots + a_{n-1}(t)y^{n-1} + b(t) \tag{1.13}$$

o equivalentemente

$$y^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t)y^{(j)} + b(t) \tag{1.14}$$

dove b, $a_j \in C(I, \mathbb{R}), j = 0, \ldots, n-1,\ I = (a_0, b_0)\,,\ -\infty \leq a_0 < b_0 \leq \infty$. Se, in (1.14), la funzione b è identicamente nulla, l'equazione corrispondente

$$y^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t)y^{(j)} \tag{1.15}$$

si dice *omogenea.* Essendo l'operazione di derivazione un operatore lineare sull'insieme delle funzioni derivabili, è immediato verificare il seguente

Teorema 1.7. *L'insieme delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea* (1.15) *è uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{R}$*

Dimostrazione. Poniamo $A(\varphi) :\equiv \varphi^{(n)} - \sum_{j=0}^{n-1} a_j \varphi^{(j)}$, per ogni funzione $\varphi \in \mathcal{C}^{(n)}(I, \mathbb{R})$. Dobbiamo far vedere che se u e v sono soluzioni di (1.15), ovvero $A(u) = A(v) = 0$, si ha anche $A(\lambda u + \mu v) = 0, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Infatti

$$\begin{aligned} A(\lambda u + \mu v) = (\lambda u + \mu v)^{(n)} - \sum_{j=0}^{n-1} a_j (\lambda u + \mu v)^{(j)} = \\ = \lambda u^{(n)} + \mu v^{(n)} - \lambda \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) u^{(j)} - \mu \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) v^{(j)} \\ = \lambda \left(u^{(n)} - \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) u^{(j)} \right) + \mu \left(v^{(n)} - \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) v^{(j)} \right) = \\ = \lambda A(u) + \mu A(v) = 0. \end{aligned} \tag{1.16}$$

□

Dunque

$$K = \left\{ u \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) \textit{ tale che } u^{(n)}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) u^{(j)}(t) \quad \forall t \in I \right\} \tag{1.17}$$

è uno spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$). Fissando poi $t_0 \in I$ ad arbitrio e ponendo

$$T_{t_0} : K \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad T_{t_0}(u) = (u(t_0), u'(t_0,), \ldots u^{n-1}(t_0))$$

si dimostra (vedere [3]) che T_{t_0} è un isomorfismo di K su $\mathbb{R}^n$, e quindi che $dim K = n$.

Definizione 1.8. *Una base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ dello spazio vettoriale K si dice che è un sistema fondamentale di integrali dell'equazione omogenea* (1.15)

Poichè T_{t_0} è un isomorfismo di K su $\mathbb{R}^n$, per ogni fissato $t_0 \in I$, un sottoinsieme $\{u_1, \dots, u_n\}$ di K è una base di K se, e solo se,

$$W(u_1,\dots,u_n)(t_0) = \begin{vmatrix} u_1(t_0) & u_2(t_0) & \dots & u_n(t_0) \\ u_1'(t_0) & u_2'(t_0) & \dots & u_n'(t_0) \\ \dots & \dots & \dots\dots & \\ u_1^{(n-1)}(t_0) & u_2^{(n-1)}(t_0) & \dots & u_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (1.18)$$

in un opportuno punto $t_0 \in I$. Il determinante in (1.18) si chiama *wronskiano* di $u_1, \dots, u_n$.

Se $\{u_1, \dots, u_n\}$ è un sistema fondamentale per l'equazione (1.15) allora

$$u = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j, \qquad c_1, \dots c_n \in \mathbb{R} \tag{1.19}$$

è l'integrale generale dell'equazione stessa. Procediamo ora ad analizzare le equazioni differenziali lineari non omogenee, per determinarne l'integrale generale.

Proposizione 1.9. *Sia* $\{u_1, \dots, u_n\}$ *un sistema fondamentale dell'equazione omogenea* (1.15) *e sia* v *una soluzione particolare dell'equazione*

$$y^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) y^{(j)} + b(t). \tag{1.20}$$

Allora

$$u = v + \sum_{s=1}^{n} c_s u_s, \qquad c_1, \dots c_n \in \mathbb{R} \tag{1.21}$$

è l'integrale generale di (1.20). *In altre parole l'integrale generale di* (1.21) *è dato da*

$$u = v + w, \tag{1.22}$$

dove w *è l'integrale generale dell' omogenea associata* (1.15)

Dimostrazione. Poniamo nuovamente $A(\varphi) :\equiv \varphi^{(n)} - \sum_{j=0}^{n-1} a_j \varphi^{(j)}$, per ogni $\varphi \in \mathcal{C}^{(n)}(I, \mathbb{R})$. Facciamo vedere innanzitutto che se u è data dalla (1.22) allora è soluzione di (1.20), ossia $A(u) = b$. Infatti, poichè la w è soluzione di (1.15), si ha $A(w) = 0$, ed essendo v soluzione di (1.20) si ha $A(w) = b$. Si ottiene dunque, per la linearità dell'operatore A, $A(u) = A(v) + A(w) = b$.
Viceversa, sia ora u come soluzione generica di (1.20). Allora A(u) $=$ b e pertanto, ponendo $w = u - v$, si ha $a(w) = A(u - v) = b - b = 0$, ovvero la funzione $w = u - v$ è soluzione dell' equazione omogenea (1.15), e $u = v + w$. □

Proposizione 1.10 (metodo dalla variazione delle costanti)**.** *Sia* $\{u_1, \ldots, u_n\}$ *un sistema fondamentale di integrali dell'equazione omogenea* (1.15)*.*
Esistono allora n funzioni

$$c_1, \ldots, c_n \in \mathcal{C}^{(1)}(I, \mathbb{R})$$

tali che

$$v = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j, \tag{1.23}$$

è soluzione dell'equazione non omogenea

$$y^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) y^{(j)} + b(t).$$

Le funzioni $c'_1, c'_2, \ldots c'_n$ sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c'_j u_j = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} c'_j u'_j = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} c'_j u_j^{(n-2)} = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} c'_j u_j^{(n-1)} = b \end{cases} \tag{1.24}$$

Il sistema è risolvibile in quanto il determinante della matrice dei suoi coefficienti è il determinante wronskiano $W(u_1, \dots, u_n)$ che è diverso da zero in ogni punto di I in quanto $\{u_1, \dots, u_n\}$ è un sistema fondamentale per l' equazione omogenea.

1.5 Equazioni differenziali lineari del *II* ordine

Dedichiamo una sezione anche allo studio delle equazioni di secondo ordine a coefficienti costanti che sono molto utili in quanto consentono di risolvere diversi problemi nell'ambito della meccanica classica. Da quanto detto nelle sezioni precedenti la più generale equazione differenziale lineare del secondo ordine ha la forma

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t), \quad t \in I \tag{1.25}$$

dove I è un intervallo reale e $a, b, c \in \mathcal{C}(I, K)$. La corrispondente equazione differenziale omogenea associata è:

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0. \tag{1.26}$$

Dedichiamo particolare attenzione allo studio delle soluzioni delle equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti *costanti*. Le soluzioni dell'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti omogenea

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad a, b \in \mathbb{R} \tag{1.27}$$

si trovano partendo dalla risoluzione, in $\mathbb{C}$, della seguente equazione algebrica, *equazione caratteristica associata*,

$$z^2 + az + b = 0 \tag{1.28}$$

e cioè a a partire dalle le radici z_1 e z_2 dette *radici caratteristiche*. Infatti è immediato verificare che se z è soluzione di (1.28), allora $u(t) = e^{zt}$ è soluzione di (1.27):

$$u'' + au' + bu = z^2 e^{zt} + aze^{zt} + be^{zt} = e^{zt}(z^2 + az + b) = 0.$$

Pertanto, risolvendo la (1.28) troveremo due soluzioni della (1.27) che potranno essere a valori reali e distinte, a valori reali e coincidenti, a valori colplessi e distinte a seconda che il determinante Δ della (1.28) sia positivo, nullo o negativo.

1. $\Delta = a^2 - 4b > 0$

   In questo caso la (1.28) ammette due radici z_1 e z_2 reali e distinte da cui si generano le due soluzioni $u_1 = e^{z_1 t}$, $u_2 = e^{z_2 t}$ che risultano essere linearmente indipendenti. Infatti, per quanto osservato dopo la Definizione (1.8). basta far vedere che $W(t_0) \neq 0$ per un opportuno $t_0 \in \mathbb{R}$. Prendendo $t_0 = 0$ si ottiene

   $$W(t_0) = \begin{vmatrix} e^{z_1 t_0} & e^{z_2 t_0} \\ z_1 e^{z_1 t_0} & z_2 e^{z_2 t_0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = z_2 - z_1 \neq 0 \tag{1.29}$$

   essendo $z_1 \neq z_2$.

   Dunque $\{e^{z_1 t}, e^{z_2 t}\}$ è un sistema fondamentale di soluzioni per (1.27), la cui soluzione generale ha perciò la forma

   $$u(t) = c_1 e^{z_1 t} + c_2 e^{z_2 t} \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \tag{1.30}$$

2. $\Delta = a^2 - 4b = 0$

   In questo caso si ha $b = \dfrac{a^2}{4}$ e la (1.28) diventa

   $$z^2 + az + \frac{a^2}{4} = 0 \tag{1.31}$$

da cui $z = -\frac{a}{2}$. Allora $u_1 = e^{zt}$ è soluzione di (1.28) e si verifica facilmente che $u_2(t) = te^{zt}$ è anch'essa una soluzione di (1.28). Si ha infatti $u_2'(t) = e^{zt}(1+tz)$ e $u_2''(t) = e^{zt}(z^2t + 2z)$, da cui

$$\begin{aligned} u_2''(t) + au_2'(t) + bu_2(t) = \\ e^{zt}(z^2t + azt + bt + 2z + a) = \\ e^{zt}t(z^2 + az + b) + e^{zt}(2(-\frac{a}{2}) + a) = 0 \end{aligned} \tag{1.32}$$

Inoltre $\{e^{zt}, te^{zt}\}$ è un sistema fondamentale per la (1.27), infatti scegliendo $t_0 = 0$ si ha

$$W(t_0) = \begin{vmatrix} e^{zt_0} & t_0e^{zt_0} \\ ze^{zt_0} & e^{zt_0}(1+t_0z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0. \tag{1.33}$$

Pertanto la più generale soluzione di (1.27) assume la forma

$$u(t) = c_1e^{zt} + c_2te^{zt}, \quad \text{con } z = -\frac{a}{2} \text{ e } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{1.34}$$

3. $\Delta = a^2 - 4b < 0$

   In questo caso le radici di (1.28) risultano complesse coniugate e le scriviamo nella forma $z_{1,2} = p \pm iq$, con $p, q \in R$. Allora $u_1(t) = e^{(p+iq)t}$ e $(u_2(t) = e^{p-iq}t)$ sono soluzioni della (1.27) a valori complessi. Per quanto visto in precedenza anche le loro combinazioni lineari

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \frac{1}{2}(u_1(t) + u_2(t)) = e^{pt}\cos qt \\ v_2(t) &= \frac{1}{2i}(u_1(t) - u_2(t)) = e^{pt}\sin qt \end{aligned} \tag{1.35}$$

   sono soluzioni di (1.27), questa volta a valori reali. Inoltre v_1, v_2 è un sistema fondamentale per (1.27); infatti prendendo $t_0 = 0$ si ha

$$W(t_0) = \begin{vmatrix} e^{pt_0}\cos qt_0 & e^{pt_0}\sin qt_0 \\ e^{pt_0}(p\cos qt_0 + q\sin qt_0) & e^{pt_0}(p\sin qt_0 - q\cos qt_0) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ p & -q \end{vmatrix} = q \neq 0. \tag{1.36}$$

Dunque la più generale soluzione di (1.27) assume la forma

$$u(t) = c_1 e^{pt} cos(qt) + c_2 e^{pt} sin(qt) \tag{1.37}$$

$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. La (1.37) può essere riscritta in una forma più significativa dal punto di vista fisico, come vedremo in seguito, con una diversa rappresentazione delle costanti arbitrarie $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Ponendo infatti $c_1 = C\cos\gamma$ e $c_2 = -C\sin\gamma$ ovvero

$$C = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \gamma = -\arctan\frac{c_1}{c_2},$$

dalla (1.37) si ottiene

$$u(t) = Ce^{pt}\cos(qt + \gamma), \quad \forall C, \gamma \in \mathbb{R} \tag{1.38}$$

che rappresenta quindi la più generale soluzione di (1.27)

Per quanto riguarda l'equazione completa (1.25), per determinare la soluzione generale occorre trovarne una particolare $v(t)$. Non ci soffermiamo qui su questo aspetto, rinviando il lettore ai testi gia citati [3],[4],[5], per ulteriori approfondimenti.
In ogni caso la soluzione generale di (1.25) avrà dunque la forma

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + v(t) \tag{1.39}$$

dove $\{y_1, y_2\}$ è un sistema fondamentale per l'equazione omogenea (1.27) e v è una soluzione particolare di (1.25).

Capitolo 2

la legge fondamentale della dinamica

Seguendo la notazione tradizionale nell'ambito della meccanica classica, d'ora in avanti le derivate prima e seconda rispetto alla variabile t, che in questo caso rappresenta il tempo, verranno indicate in questo modo:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \qquad \ddot{x} = \frac{d^2x}{d^2t}.$$

La *legge fondametale della dinamica*, o *seconda legge di Newton*, afferma che se $\vec{F}$ è vettore risultante di tutte le forze che agiscono su un punto materiale P e $\vec{a}$ l'accelerazione di P allora si ha:

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{2.1}$$

dove m è un coefficiente positivo, detto massa del punto, che dipende solo dalla natura della materia di cui è costituito il punto e dall'unità di misura fissata.
Ricordando che il vettore $\vec{F}$ nel caso più generale dipende dalla posizione del

punto P, rappresentato dalle coordinate cartesiane (x, y, z), dalla velocità $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ di P, e dal tempo t, si ha che la (2.1) è equivalente a tre equazioni scalari:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{x} = F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{z} = F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \end{cases} \tag{2.2}$$

dove F_x, F_y, F_z rappresentano le conponenti del vettore $\vec{F}$, ossia $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$. Allora le (2.2) costituiscono un sistema di tre equazioni differenziali del secondo ordine in forma normale; esse però non determinano in modo univoco il moto del punto materiale, se non sono conosciuti ulteriori elementi; così per la risoluzione del sistema occorrono le cosiddette condizioni iniziali che dovranno sempre supporsi associate ad esso. Esse consistono nell' assegnare, in un certo istante che potremo sempre assumere come origine del tempo, la posizione e la velocità del punto materiale. Cioè, occorre siano note, per $t = t_0$, le coordinate x_0, y_0, z_0 del punto e le componenti $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ della sua velocità. Questo segue infatti dal Teorema di Cauchy.
Ricordiamo che l'equazione differenziale

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{2.3}$$

in $\mathbb{R}^n$ corrisponde ad un sistema di n-equazioni differenziali in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1, ..x_n, t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f(x_1, ..x_n, t) \end{cases} \tag{2.4}$$

con $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $f(x, t) = (f_1(x, t), ..., f_n(x, t)) \in \mathbb{R}^n$.
Inoltre ogni equazione differenziale del secondo ordine di forma normale in

$\mathbb{R}$:

$$\ddot{u} = g(u, \dot{u}, t) \tag{2.5}$$

è equivalente ad un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine in $\mathbb{R}$, ovvero ad una equazione differenziale del primo ordine in $\mathbb{R}^2$. Ponendo infatti $x_1 = u$ e $x_2 = \dot{u}$, la (2.5) diventa equivalente a:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = g(x_1, x_2, t) \end{cases} \tag{2.6}$$

Ponendo poi $x = (x_1, x_2)$ e $f(x, y) = (x_2, g(x_1, t))$, la (2.6) può essere riscritta in forma compatta:

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{2.7}$$

La condizione iniziale $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^2$ del problema di Cauchy diventa:

$$\begin{cases} u(t_0) = x_{01} \\ \dot{u}(t_0) = x_{02} \end{cases} \tag{2.8}$$

Ritornando al sistema (2.2), esso equivale ad un sistema di sei equazioni differenziali del I ordine in $\mathbb{R}$ (cioè una equazione differenziale del I ordine in $\mathbb{R}^6$). La condizione iniziale, imposta dal teorema di Cauchy per garantire l' unicità della soluzione, diventa una condizione su $x(t_0), y(t_0), z(t_0), \dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0)$, cioè sulla posizione e sulla velocità iniziali di P. Dal punto di vista dinamico la risoluzione della (2.2) garantisce la determinazione del moto del punto P, cioè delle sue coordinate

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R} \\ z = z(t) \end{cases} \tag{2.9}$$

a patto di conoscere il dato iniziale, cioè $P(t_0)$ e $\vec{v}(t_0)$, e le forze che agiscono sul punto stesso, di cui $\vec{F}$ è il vettore risultante.

Capitolo 3

Moti unidimensionali: moto oscillatorio armonico, moto smorzato e risonanza

Molti problemi di oscillazioni che si presentano in meccanica possono essere trattati in un unico modo e quindi con un'unica descrizione matematica. In fisica, il moto armonico è il particolare moto vario descritto da un oscillatore armonico, cioè un sistema meccanico che reagisce ad una perturbazione dall'equilibrio con una accelerazione di richiamo $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$ proporzionale allo spostamento subito x. La costante di proporzionalità è sempre negativa e si può quindi intendere, come qualsiasi numero reale negativo, come l'opposto di un quadrato di un altro numero costante ω, detto *pulsazione*, così indicato in quanto dimensionalmente simile alla velocità angolare. Quindi l'equazione del moto di un oscillatore armonico è:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \tag{3.1}$$

3.1 Moto armonico semplice

L'equazione che governa il moto armonico semplice di un punto materiale è un'equazione differenziale ordinaria lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non completa ed omogenea.

Chiamiamo *moto armonico semplice* il moto rettilineo di un punto materiale (P, m) dove, a parte un'eventuale costante adittiva $s(0)$, l'ascissa curvilinea $s(t)$ è lineare con il seno o il coseno di un polinomio di primo grado nel tempo t:

$$s(t) = Acos(\omega t + \gamma) \tag{3.2}$$

La costante di proporzionalità A è detta *ampiezza* e le due grandezze ω e γ rispettivamente *pulsazione* e *fase iniziale* del moto armonico.

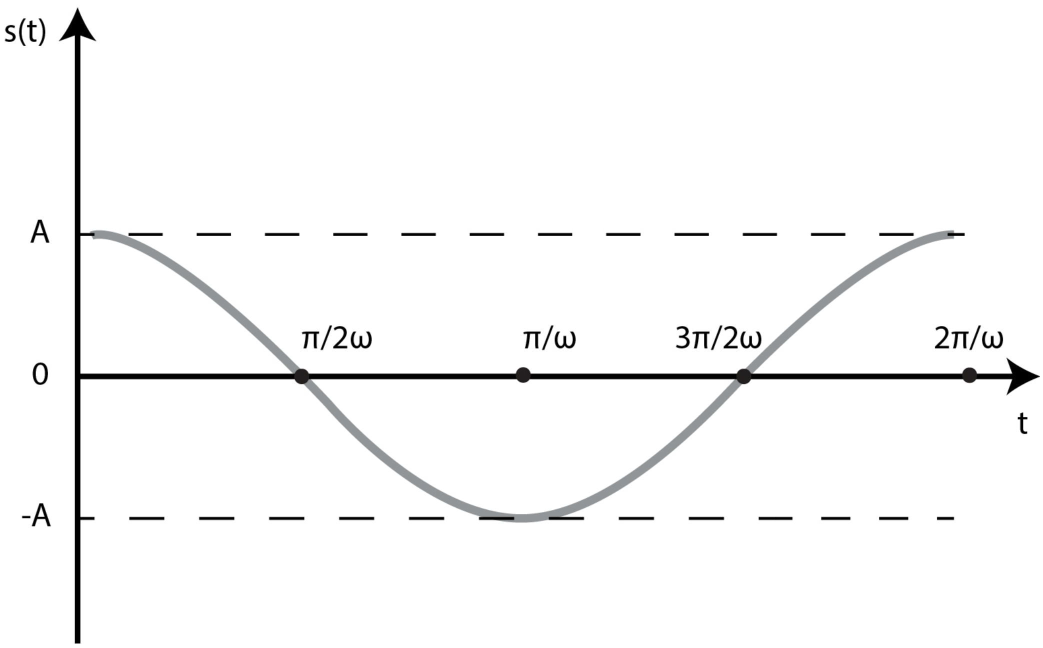

Figura 3.1: Moto armonico semplice

Si chiama poi *oscillatore armonico unidimensionale* un punto materiale (P, m) mobile su una retta, identificata con l'asse x, soggetto ad una sola forza $\vec{F}_e$ elastica, e cioè tale che:

$$\vec{F}_e = -k^2 \vec{i} \tag{3.3}$$

essendo $\vec{i}$ il versore orientato secondo il verso positivo dell'asse x. La posizione del punto P è rappresentata dalla coordinata x. La grandezza k^2 è detta *costante elastica* di una molla o di un corpo elastico. Dalla (3.3) ricaviamo l'equazione differenziale del moto:

$$m \frac{d^2}{dt^2} x = -k^2 x \tag{3.4}$$

ovvero

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{3.5}$$

con $\omega^2 = \dfrac{k^2}{m}$. Per risolvere la (3.5), per quanto visto nel Capitolo 1, basta considerare l'equazione caratteristica associata:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \tag{3.6}$$

le cui radici sono date dai numeri immaginari puri:

$$\lambda_{\pm} = \pm i\omega \tag{3.7}$$

Dalla (1.39) la soluzione generale di (3.5) assume dunque la forma

$$x(t) = C\cos(\omega t + \alpha), \qquad C, \alpha \in \mathbb{R} \tag{3.8}$$

Il valore numerico delle costanti C e α può essere determinato univocamente solo se è assegnato il dato iniziale

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 \end{cases} \tag{3.9}$$

coerentemente col *Teorema di Cauchy*.

3.2 Moto armonico smorzato

Si consideri ancora il moto rettilineo e si supponga che sul punto agisca, oltre a una forza di tipo elastico proporzionale allo spostamento, anche una forza dovuta alla resistenza del mezzo, che, per piccoli valori della velocità risulta proporzionale e di verso opposto alla velocità stessa. Detta forza si potrà indicare con $-2pm\dot{x}$ essendo p un numero positivo che chiameremo *costante di smorzamento*. Allora l'equazione del moto diventa:

$$m\ddot{x} = -2pm\dot{x} - k^2 x \tag{3.10}$$

Dividendo per m dopo aver posto $\omega^2 = \dfrac{k^2}{m}$ si ottiene

$$\ddot{x} + 2p\dot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{3.11}$$

Questa equazione è intanto soddisfatta dalla soluzione $x = 0$. Cioè se inizialmente il punto è nell'origine ed è a velocità nulla, esso non si sposta. L'origine è dunque posizione di equilibrio o di riposo del punto. Per determinare le altre tipologie di moto, osserviamo che la (3.11) è un' equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti, che come abbiamo visto si integra molto facilmente, studiando le soluzioni dell'equazione caratteristica associata

$$\lambda^2 + 2p\lambda + \omega^2 = 0. \tag{3.12}$$

Ora le proprietà del moto sono diverse a seconda che la (3.12) abbia radici reali e distinte, reali e coincidenti, complesse coniugate. Esaminiamo i singoli casi.

3.3 I caso Moto aperiodico smorzato

Se il discriminante della (3.12) è positivo, ossia se

$$p^2 > \omega^2 \tag{3.13}$$

le radici dell'equazione sono, oltre che reali, negative e le indicheremo $-\beta_1$, $-\beta_2$, (β_1 e β_2 positive, con $\beta_1 > \beta_2$). Perciò i due integrali particolari di (3.11) saranno $e^{-\beta_1 t}, e^{-\beta_2 t}$ e l'integrale generale varrà, come abbiamo visto nel Capitolo 1,

$$x(t) = C_1 e^{-\beta_1 t} + C_2 e^{-\beta_2 t} \tag{3.14}$$

dove C_1 e C_2 sono due costanti arbitrarie che si determinano con i valori iniziali x_0 di x e v_0 della velocità $\dfrac{dx}{dt}$. Si ha infatti subito, ponendo in (3.14) $t = 0$ e calcolando anche la derivata

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 \\ \dot{x}(0) = v_0 = -\beta_1 C_1 - \beta_2 C_2 \end{cases} \tag{3.15}$$

da cui

$$C_1 = -\frac{v_0 + \beta_2 x_0}{\beta_1 - \beta_2}, \qquad C_2 = \frac{v_0 + \beta_1 x_0}{\beta_1 - \beta_2} \tag{3.16}$$

La (3.14) rappresenta il cosiddetto *moto aperiodico smorzato*, dove lo spostamento $x(t)$ tende a 0 per t che tende all'infinito, senza oscillare. In particolare se prendiamo come dati inizali $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0 = 0$, la soluzione corrispondente a questi dati sarà

$$x(t) = \frac{x_0}{\beta_1 - \beta_2}(\beta_1 e^{-\beta_2 t} + \beta_2 e^{-\beta_1 t}) \tag{3.17}$$

Più in generale il moto unidimensionale di un punto si dice smorzato se $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

3.4 II caso Moto aperiodico smorzato con smorzamento critico

Se invece (3.12) ha due radici reali e coincidenti, cioè $p^2 = \omega^2$, esse valgono $-p$. I due integrali particolari di (3.11) saranno quindi e^{-pt} e te^{-pt}.
Quindi si ha:

$$x(t) = C_1 e^{-pt} + C_2 t e^{-pt} \tag{3.18}$$

dove nuovamente C_1 e C_2 sono costanti arbitrarie che determiniamo con le condizioni iniziali. Ponendo in (3.18) $t = 0$ e calcolando la derivata abbiamo le equazioni

$$x_0 = C_1, \qquad v_0 = -pC_1 + C_2 \tag{3.19}$$

ossia

$$C_1 = x_0 \qquad C_2 = v_0 + px_0 \tag{3.20}$$

In particolare, se $v_0 = 0$ si ha

$$x(t) = x_0(1 + pt)e^{-pt} \tag{3.21}$$

L'andamento espresso in (3.18) e (3.21) è ancora quello di un moto smorzato,che viene detto moto *aperiodico smorzato con smorzamento critico*. Infatti, se indichiamo il moto espresso da (3.17) e (3.21) rispettivamente con x_a e x_b, si dimostra che il rapporto

$$\frac{x_a}{x_b} = \frac{1}{\beta_1 - \beta_2} \left(\frac{\beta_1}{1 + pt} e^{-(\beta_2 - p)t} - \frac{\beta_2}{1 + pt} e^{-(\beta_1 - p)t} \right),$$

sapendo che $\beta_1, \beta_2 = p \pm \sqrt{p^2 - \omega^2}$ da cui risulta $\beta_1 < p < \beta_2$ e quindi $(\beta_1 - p) < 0$, tenderà all'infinito quando $t \longrightarrow \infty$. Questo ci permette di affermare che il moto aperiodico con smorzamento critico x_b tende a zero più rapidamente del moto aperiodico smorzato x_a(Figura 3.2)

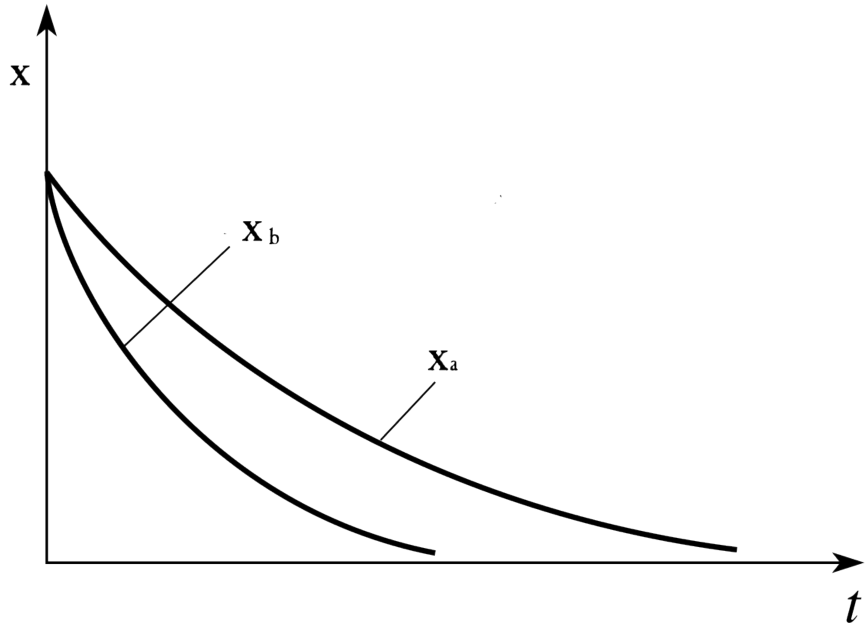

Figura 3.2: Andamento moto smorzato

3.5 III caso Moto oscillatorio smorzato

Infine, se la (3.12) ha radici complesse coniugate, ossia se

$$p^2 < \omega^2 \tag{3.22}$$

posto $\sqrt{\omega^2 - p^2} = q$, dalla (1.39) otteniamo che i due integrali particolari di (3.11) hanno la forma $e^{-pt}e^{iqt}, e^{-pt}e^{-iqt}$. Quindi la soluzione generale diventa

$$x(t) = Ce^{-pt}\cos(qt + \gamma) \quad \forall C, \gamma \in \mathbb{R} \tag{3.23}$$

Il moto in questo caso si dice *oscillatorio smorzato* con periodo

$$T = \frac{2\pi}{q} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - p^2}}. \tag{3.24}$$

Per ulteriori approfondimenti e dettagli su questo tipo di moto, si veda ad esempio [2]

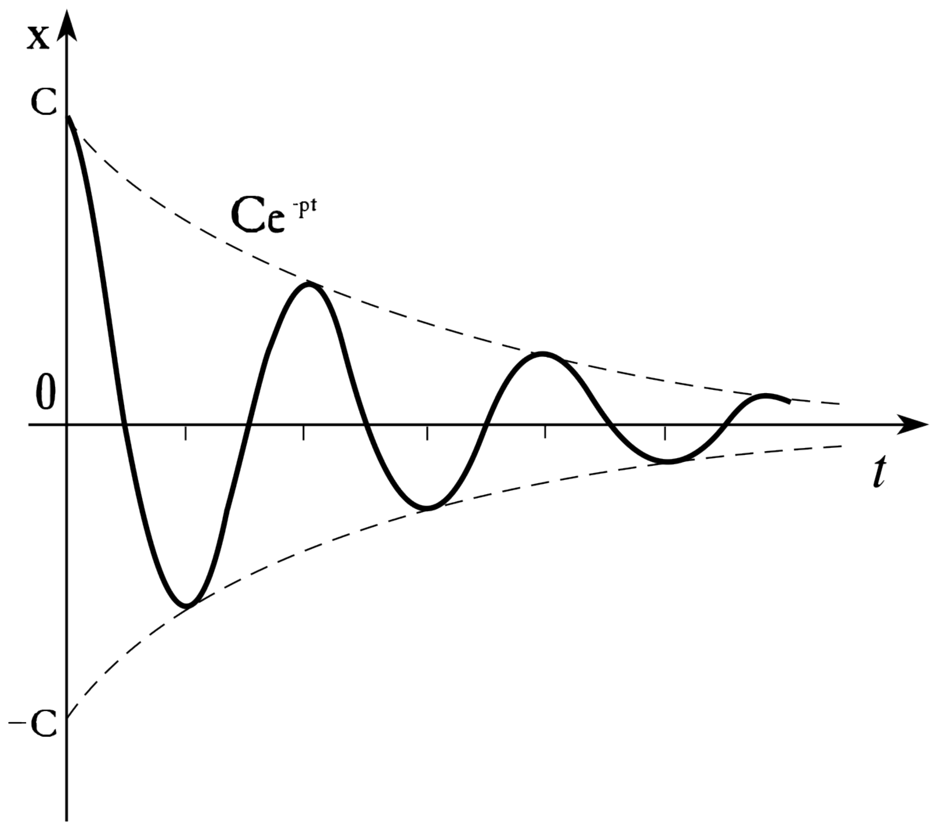

Figura 3.3: moto oscillatorio smorzato

3.6 Oscillazioni forzate e risonanza

Supponiamo ora che sul punto materiale agisca, oltre alla forza di tipo elastico e alla resistenza del mezzo, una forza f periodica, armonica, di pulsazione Ω, sempre diretta secondo l'asse x e perciò rappresentata dall'espressione

$$f(t) = Acos(\Omega t + \alpha) \tag{3.25}$$

Allora l'equazione del moto (2.1) diventa, posto $N = \dfrac{A}{m}$,

$$\ddot{x} + 2p\dot{x} + \omega^2 x = N\cos(\Omega t + \alpha). \tag{3.26}$$

Questa è un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti non omogenea. Come abbiamo visto, il suo integrale generale si ottiene sommando l'integrale generale dell' omogenea associata con un integrale particolare x_1 della completa. Per trovare quest'ultimo integrale ricerchiamo, se esiste, una soluzione sinusoidale di pulsazione Ω della (3.26) che potremo scrivere

$$x_1 = C\cos(\Omega t + \gamma) \tag{3.27}$$

(dove C e γ sono costanti da determinare). Passiamo dalla (3.26) alla equazione differenziale in campo complesso

$$\ddot{z} + 2p\dot{z} + \omega^2 z = Ne^{i(\Omega t+\alpha)} \tag{3.28}$$

E' immediato verificare che se $z(t)$ è soluzione di (3.28), allora $x(t) = Rez(t)$ è soluzione di (3.26). Infatti prendendo la parte reale di ambo i membri della (3.28) si ottiene

$$Re\ddot{z} + 2pRe\dot{z} + \omega^2 Rez = N\cos(rt + \alpha) \tag{3.29}$$

da cui

$$(\ddot{Rez}) + 2p(\dot{Rez}) + \omega^2(Rez) = N\cos(\Omega t + \alpha). \tag{3.30}$$

Cerchiamo ora le soluzioni di (3.28) della forma

$$z(t) = Ce^{i(\Omega t+\gamma)} = ce^{i\Omega t} \tag{3.31}$$

con $c = Ce^{i\gamma} \in \mathbb{C}$ da determinare. Sostituendo in (3.28) si ottiene

$$c\Omega^2 e^{i\Omega t} + 2pic\Omega e^{i\Omega t} + \omega^2 ce^{i\Omega t} = Ne^{i\alpha}e^{i\Omega t} \tag{3.32}$$

da cui, ponendo $n = Ne^{i\alpha} \in \mathbb{C}$, si ha

$$c(-\Omega^2 + \omega^2 + 2ip\Omega) = n \tag{3.33}$$

Da (3.33) si può ricavare l'incognita c:

$$c = \frac{n}{\omega^2 - \Omega^2 + 2pi\Omega}. \tag{3.34}$$

Resta così determinata la soluzione sinusoidale della (3.26) espressa dalle (3.27) in cui C e γ non sono altro che il modulo e l'argomento di c dato da (3.34). L'integrale generale dell'equazione completa (3.28) è allora dato da

$$x = x_0 + x_1 \tag{3.35}$$

dove x_1 è dato dalla (3.27) e x_0 è la soluzione generale dell'omogenea associata e rappresenta un moto smorzato. Pertanto, poichè $\lim_{t \longrightarrow \infty} x_0(t) = 0$, per t abbastanza grande, $x(t)$ può essere approssimato con

$$x(t) \approx x_1 = C\cos(\Omega t + \gamma) \tag{3.36}$$

Si può quindi concludere che, dopo un tempo di solito molto breve, il moto del punto è armonico con lo stesso periodo della forza sinusoidale f. Il punto esegue quindi le cosiddette *oscillazioni forzate*. L' ampiezza di queste oscillazioni è data dal modulo di c cioè da

$$C = |c| = \frac{|n|}{|\omega^2 - \Omega^2 + 2pi\Omega|} = \frac{N}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4p^2\Omega^2}} \tag{3.37}$$

Ricerchiamo, tenendo fissi ω e p, per quale valore di Ω l'ampiezza C è massima. Ciò accadrà quando il radicando della (3.37) è minimo. Ponendo allora $h(\Omega^2) = (\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4p^2\Omega^2$, dovrà risultare $h'(\Omega^2) = 0$, ossia

$$h'(\Omega^2) = -2(\omega^2 - \Omega^2) + 4p^2 = 0. \tag{3.38}$$

Troviamo allora che $'(\Omega^2)$ è minima se

$$\Omega^2 = \omega^2 - 2p^2, \qquad \Omega = \sqrt{\omega^2 - 2p^2}, \tag{3.39}$$

cioè l' ampiezza C diventa massima quando Ω è data dalla (3.39) e assume valore

$$C = \frac{N}{\sqrt{4p^4 + 4p^2(\omega^2 - 2p^2)}} = \frac{N}{2p\sqrt{\omega^2 - p^2}}. \tag{3.40}$$

Ora se, come avviene in molti casi, p^2 è trascurabile rispetto a ω^2, si ha $\Omega = \omega$, cioè l'ampiezza dell'oscillazione è massima quando il periodo della forza è sensibilmente uguale al periodo proprio del sistema, cioè al periodo in cui oscillerebbe il punto se fosse soggetto solo alla forza di tipo elastico.
Si ha allora, per questa coincidenza di periodo, il cosiddetto *fenomeno della risonanza*, cioè l'ampiezza di oscillazione può raggiungere valori notevoli e, per la (3.40), tanto più grandi quanto più piccolo lo smorzamento p.
Si chiama *curva di risonanza* la curva ottenuta portando sulle ascisse Ω e sulle ordinate C. Essa ha un massimo per Ω data dalla (3.39). Ovviamente, ad ogni valore di p corrisponde una di queste curve. Ora è notevole il fatto che il massimo della curva è tanto più accentuato quanto più piccolo è p; cioè *quanto più piccolo è lo smorzamento, tanto più stretto è l'intervallo dei valori di Ω in cui è sensibile il fenomeno della risonanza.*

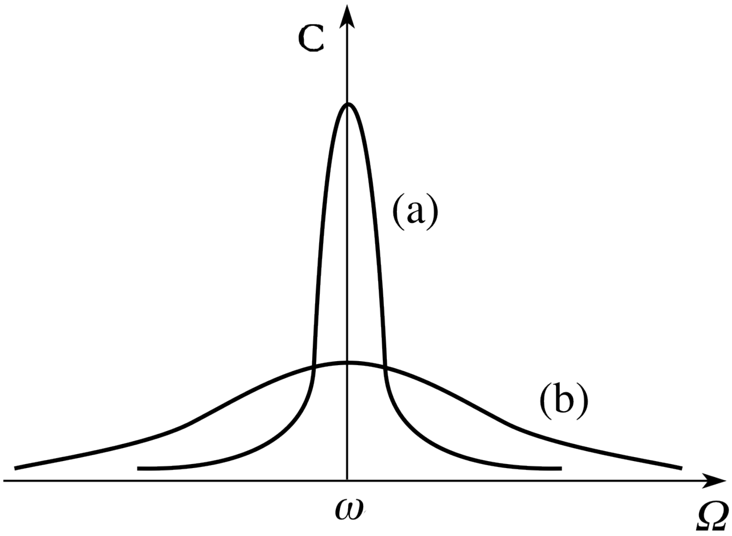

Figura 3.4: Risonanza: in questa figura il grafico (a) corrisponde a p piccolo, il grafico (b) a p grande

Anche le strutture architettoniche sono oscillatori: hanno una frequenza propria determinata dalla loro rigidità, dalla massa e dalle caratteristiche della loro costruzione. Una forza eccitatrice che agisce su questi oscillatori può essere per esempio un terremoto, che produce scuotimenti periodici del suolo. Se la frequenza di oscillazione del suolo è vicina alla frequenza propria della costruzione, le vibrazioni risonanti della costruzione possono amplificarsi raggiungendo ampiezze tali da danneggiare o addirittura distruggere lo costruzione. Per evitare disastri del genere bisogna costruire strutture con frequenze proprie lontane da quelle tipiche dei terremoti (tra O e 15 Hz) e con un grosso coefficiente di smorzamento. Sono numerosi i casi storici di *risonanza distruttiva*. Di seguito ne riportiamo degli esempi.

Esempio 1 Nel 1831 il ponte di Broughton in Inghilterra entrò in risonanza e crollò durante il passaggio di un battaglione. Nel 1850 il ponte di Anges sulla Loira fece la stessa fine. In entrambi i casi la frequenza di marcia dei soldati aveva eguagliato la frequenza propria del ponte. I ponti sospesi, a quel tempo, erano di tipo deformabile, nel senso che potevano oscillare anche in senso verticale. Quando il periodo di oscillazione del ponte e quello trasmesso, per esempio, dal passo di una truppa militare, entravano in risonanza, il ponte iniziava a oscillare con ampiezza sempre più grande, fino al disastro. Da allora ai soldati viene ordinato di rompere il passo di marcia quando attraversano il ponte. [7]

Esempio 2 Un caso notevole di risonanza è stato riscontrato nel crollo del *ponte di Tacoma.*

Il ponte di Tacoma (in inglese Tacoma Narrows Bridge) è un'opera di ingegneria civile comprendente due ponti sospesi paralleli, che attraversano il canale Tacoma Narrows, Washington tra le città di Tacoma e di Gig Harbor. I lavori per il primo ponte (853 m di campata centrale, 1524 metri di lunghezza complessiva per 12 di larghezza) iniziarono il 23 novembre 1938 e la struttura fu aperta al traffico il 1 luglio 1940, prima di crollare il 7 novembre dello stesso anno. A causa della scarsità dei materiali dovuta alla seconda guerra mondiale, ci vollero dieci anni per costruire il ponte sostitutivo, che fu inaugurato il 4 ottobre 1950.

Verso le 10 del mattino del 7 novembre 1940 iniziò la torsione della campata centrale del ponte, che collassò un'ora e dieci minuti dopo. Le immagini del disastro furono riprese da un docente di ingegneria che stava studiando i movimenti della struttura. L'ingegnere italiano Giulio Krall fu il primo a trovare una spiegazione del crollo e calcolò la velocità critica del vento sulla struttura in 67 km/h, praticamente coincidente con la effettiva velocità del vento che causò il disastro. Le cause del crollo furono attribuite alle vibrazioni autoeccitate indotte dal distacco periodico di vortici di von Kármán (fenomeno di instabilità aeroelastica detto anche flutter). Infatti, sotto l'azione di un vento costante di circa 42 nodi, la scia dei vortici di von Kármán trasmetteva alla struttura delle coppie torcenti pulsanti alla stessa frequenza torsionale del ponte, innescando così un fenomeno di risonanza con ampiezze via via crescenti e non compensate da un adeguato smorzamento. Il ponte venne ricostruito nel 1950 facendo tesoro della drammatica esperienza; più largo (e dunque meno snello), con maggior rigidezza torsionale e capacità di smorzamento e con una struttura molto più stabile nei confronti degli effetti del vento. [6]

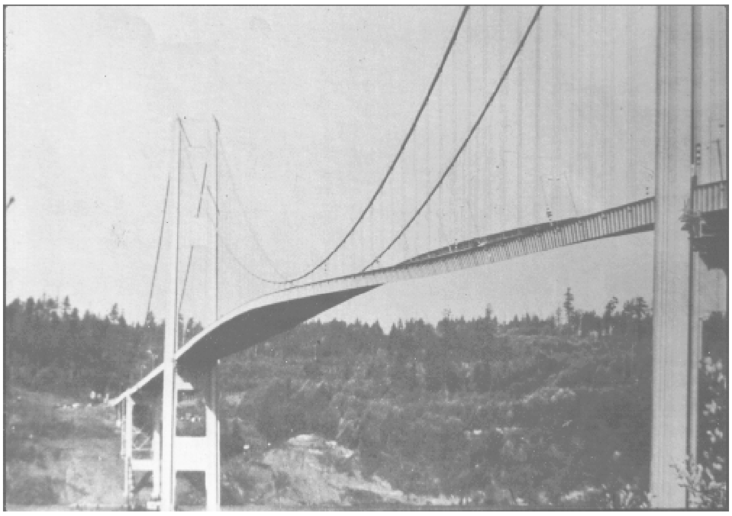

Figura 3.5: Ponte di Tacoma

Bibliografia

[1] M. Fabrizio - *Introduzione alla meccanica razionale e ai suoi metodi matematici* - Zanichelli, Bologna, 1994

[2] D. Graffi - *Elementi di meccanica razionale* - Patron, Bologna 1973

[3] E. Lanconelli - *Analisi matematica 2* - Pitagora, Bologna, 2001

[4] C.D. Pagani - *Analisi matematica 2* - Zanichelli, Bologna, 2009

[5] L. Tonelli - *Lezioni di analisi matematica 2* - Tacchi, Pisa

[6] Contributori di Wikipedia, *Ponte di Tacoma* - `http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Ponte_di_Tacoma&oldid=60959151`

[7] Bianchi, Ghisalberti, Rizza *Approfondimenti* `http://www1.mat.uniroma1.it/didattica/ssis/laboratorio-di-informatica/0809/GhisalbertiBianchiRizza/Approfondimenti_1.html`

Ringraziamenti

Vorrei iniziare con coloro grazie ai questa carriera accademica è stata permessa:

Mia madre, che mi ha spronato a iscrivermi all'università, e che dopo ogni esame fatto, rammentandomi anche le mie origini, mi diceva: "*Meh, tu si luat d'annanz*". Se si ricordava mi chiedeva anche il voto.

Mio padre, che ha sopportato tutte le mie ansie e i miei tentennamenti, e che a ogni telefonata fatta prima di dare un'orale mi ripeteva questi tre proverbi: "*tentar non nuoce*"," *la fortuna aiuta gli audaci*","*ogni lasciata è persa*", in seguito alle mie tre rispettive affermazioni, purtroppo molto frequenti:"*Faccio 'na brutta figura*", " *come faccio! non mi ricordo niente!*"e "*non ce la faccio oggi, lo faccio la prossima volta..*".

I miei nonni, il cui pensiero e ricordo mi ha dato la forza e la volontà di proseguire.

Mia sorella, che, a modo suo, c'è sempre stata.

La professoressa Emanuela Caliceti, che mi ha seguita e aiutata per la stesura della tesi.

In ultimo, ma non meno importanti, i miei amici, alcuni dei quali con cui ho condiviso gioie e dolori della carriera universitaria, altri con cui ho passato momenti divertenti, o anche semplicemente momenti, e quelli con cui ho condiviso entrambe le cose.